CAPITULO XI

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

§ 127. Función directa e inversa

La función

$$y = f(x) \tag{1}$$

la llamamos *directa*; en tal caso la función

$$x = \varphi(y), \tag{2}$$

obtenida de la ecuación (1) después de resolverla respecto a x, se llama *inversa* con relación a la función $y = f(x)$.

Ejemplos.

1) $y = 2x - 3$ (es una función directa, lineal),

$x = \frac{y+3}{2}$ (es una función inversa, también lineal);

2) $y = 2x^2$ (función directa), $x = \pm\sqrt{\frac{y}{2}}$;

aquí hay dos funciones, cada una de las cuales se puede llamar inversa para la función directa $y = 2x^2$. Si queremos obtener una función inversa de simple valuación, hay que imponer una limitación en el campo de variación del argumento x de la función directa; por ejemplo, si $y = 2x^2$ y $x \geqslant 0$, tendremos su función inversa de simple valuación $x = \sqrt{\frac{y}{2}}$. Cabe hacer notar que la función directa $y = 2x - 3$ y su función inversa $x = \frac{y+3}{2}$ tiene la misma gráfica, puesto que cualquier par de números que satisfaga la ecuación (1) satisface también la ecuación (2). Por ejemplo, para la función $y = 2x - 3$, tendremos $x_1 = 2$; $y_1 = 1$; $x_2 = -3$; $y_2 = -9$. Pero, si en la función inversa cambiamos de lugares x e y, es decir, la función inversa la vamos a designar, como la directa, por la letra y, y el argumento por la letra x, las gráficas de las funciones

$y = 2x - 3$ (función directa), $y = \frac{x+3}{2}$ (función inversa)

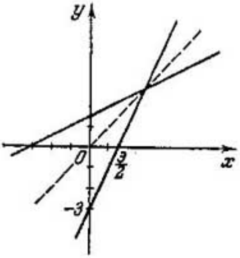

Fig. 95.

ya no coinciden: ellas son simétricas respecto a las bisectrices de los ángulos de coordenadas primero y tercero (fig. 95).

De este modo, la función directa $y = f(x)$ tendrá se función inversa de simple valuación $x = \varphi(y)$ ó, para las notaciones corrientes del argumento y de la función, $y = \varphi(x)$, si para la función directa se toma una región de variación tal del argumento x, en la que la función y ó sólo crece, o sólo decrece.

E j e m p l o. La función $y = x^3$ crece en todo el eje numérico. Su función inversa $y = x^{1/3}$ también crece en todas partes.

§ 128. Función arco seno

Vamos a partir de la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$ (fig. 89). A cada valor del ángulo x corresponde un valor determinado y único del seno de este ángulo; en la interpretación geométrica esto significa que la perpendicular trazada desde cualquier punto del eje Ox corta a la curva de la función sólo en un punto. ¿Empero, se podría decir lo contrario, es decir, que a cada valor admisible del seno, o sea, al número y, corresponde un valor único del ángulo x? Evidentemente que no, puesto que sabemos que al valor dado del seno corresponde un conjunto infinito de ángulos; por ejemplo, si $y = \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, tendremos que $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, es decir, k es un número entero cualquiera. Geométricamente estos ángulos los obtenemos si trazamos una recta paralela al eje Ox a una distancia

$d=\frac{1}{2}$ y sobre el eje Ox. Esta paralela corta a la sinusoide infinitas veces, puesto que la gráfica puede continuarse indefinidamente a ambos lados. En la fig. 88 se muestran los puntos de intersección, cuyas abscisas x son iguales a

$$\ldots; \frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi; \ldots$$

De este modo, por ahora no se puede establecer la correspondencia inversa entre los valores del seno (y) y los valores de x, de manera que esta correspondencia sea unívoca. No obstante, *si el ángulo x se considera variable sólo en el segmento* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, *a cada valor de y ($|y| \leqslant 1$) le corresponderá un único valor de x*. En otras palabras, existe una función inversa de simple valuación que se designa del modo siguiente: Si

$$y = \operatorname{sen} x \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

tendremos que

$$x = \operatorname{arc\,sen} y \quad (|y| \leqslant 1).$$

La última igualdad se lee así: x es un ángulo (arco) medido en radianes, cuyo seno es igual a y, o abreviadamente: «x es igual al *arco seno* de y». La notación «arc sen» está formada por dos palabras «arco» y «seno»; algunos autores las escriben juntos «arcsen», aquí las escribiremos separadas.
El argumento de la función inversa también se admite en designar por la letra x, y la función, por la letra y, de manera que en lugar de $x = \operatorname{arc\,sen} y$ en adelante escribiremos:

$$y = \operatorname{arc\,sen} x,$$

donde

$$|x| \leqslant 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

La propiedad de que las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{arc\,sen} x$ sean inversas se escribe así:

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x) = x, \text{ si } |x| \leqslant 1,$$

$$\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x) = x, \text{ si } |x| \leqslant \frac{\pi}{2},$$

es decir, los signos de las operaciones «arc sen», y «sen» si se suceden una a otra, se anulan mutuamente y queda el número

x, con el cual se realizaron sucesivamente estas dos operaciones. Por ejemplo, 1) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$;

2) $\operatorname{sen}\left[\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\operatorname{arc\,sen}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$;

4) $\operatorname{arc\,sen}\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=-\frac{\pi}{6}$.

Sin embargo,

$$\operatorname{arc\,sen}\left(\operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi\right)\neq\frac{2}{3}\pi.$$

Esta expresión se debe calcular así:

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}=\operatorname{sen}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{3},$$

de donde

$$\operatorname{arc\,sen}\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

Observación. El conjunto de todos los ángulos cuyos senos son iguales a x ($|x|\leqslant 1$), se designa por la notación Arc sen x, de manera que, por ejemplo,

$$\operatorname{Arc\,sen}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}(-1)^k+\pi k,$$

$$\operatorname{Arc\,sen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}(-1)^k+\pi k,$$

donde $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

§ 129. Curva de la función $y = \operatorname{arc\,sen} x$

Para trazar la gráfica de la función

$$y=\operatorname{arc\,sen} x \tag{1}$$

puede servirse de que de la correlación (1) se deduce

$$x=\operatorname{sen} y \tag{2}$$

por definición de la función arc sen.

Si construimos la parte de la sinusoide $x=\operatorname{sen} y$, que corresponde a la variación del argumento y en el segmento $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ésta es precisamente la gráfica de la función

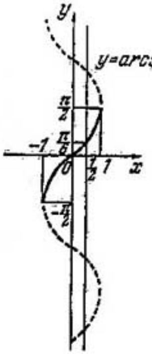

Fig. 96.

$y = \text{arc sen } x$ (fig. 96). Toda la sinusoide $x = \text{sen } y$ es la gráfica de la función de valuación multiple

$$y = \text{Arc sen } x.$$

Señalemos las propiedades de la función arc sen x, que se manifiestan mediante la gráfica:

1) la función está definida solamente en el segmento $[-1, 1]$;

2) el conjunto de todos los valores de la función compone el segmento $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, es decir,

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \text{arc sen } x \leqslant \frac{\pi}{2};$$

3) si el argumento x recorre el segmento $[-1, 1]$ de izquierda a derecha, los valores de la función y varían desde $-\frac{\pi}{2}$ hasta $\frac{\pi}{2}$, es decir, la función crece en todo el segmento $[-1, 1]$, adquiriendo el menor valor para $x = -1$, igual a $-\frac{\pi}{2}$, y el mayor valor para $x = 1$, igual a $\frac{\pi}{2}$;

4) la función se hace nula cuando $x = 0$;

5) la función arc sen x es impar:

$$\text{arc sen } (-x) = -\text{arc sen } x;$$

su gráfica es simétrica con respecto al origen de coordenadas.

§ 130. Función arco tangente

La función $y = \operatorname{tg} x$ pone a cada valor del argumento x, del campo de definición $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, en correspondencia un valor determinado de y, es decir, la tangente de este ángulo. Se puede establecer también la correspondencia unívoca inversa entre los valores de y y x, si a la función $y = \operatorname{tg} x$ la vamos a considerar sólo para los valores de x que se encuentran en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. En tal caso, a cada número real y, tomado como valor de la tangente, se puede poner en correspondencia el único número x, es decir, el correspondiente ángulo en radianes: cualquier recta paralela al eje Ox, trazada a una distancia finita cualquiera del eje Ox (indistintamente sobre o debajo de él), interseca a la gráfica de la función $y = \operatorname{tg} x$ sólo en un punto, cuya abscisa se encuentra entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ (fig. 91).

● DEFINICIÓN. La función inversa a la tangente se llama *arco tangente.*

Si $y = \operatorname{tg} x$ es la función directa, tendremos que $x = \operatorname{arc\,tg} y$ es la función inversa.

Esta notación hay que entenderla así: "x es un ángulo tal, medido en radianes, tomado en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, cuya tangente es igual al número y". Trasladando las designaciones del argumento y de la función, escribimos la función inversa en la forma $y = \operatorname{arc\,tg} x$. En esta notación el argumento x (tangente) es un número real cualquiera; la función y (ángulo en radianes) es un número cualquiera del intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

La propiedad de que las operaciones «tg» y «arc tg» sean inversas se escribe del siguiente modo

$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x$ (x es un número real cualquiera),

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

De este modo

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 2) = 2, \quad \operatorname{tg}[\operatorname{arc\,tg}(-\pi)] = -\pi;$$

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}, \text{ pero } \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi\right) \neq \frac{3\pi}{4},$$

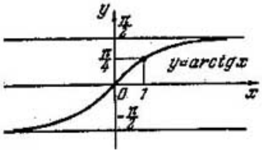

Fig. 97.

puesto que el ángulo $\frac{3}{4}\pi$ sale de los límites del intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Por eso hay que escribir:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi\right) = \operatorname{arc\,tg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Observación. El conjunto de todos los ángulos (arcos), cuyas tangentes son iguales al número dado x, se designan por Arc tg x. De aquí se deduce que la función $y = \operatorname{Arc\,tg} x$ es de valuación multiple:

$$\operatorname{Arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4} + \pi k,$$

$$\operatorname{Arc\,tg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} + \pi k,$$

donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

§ 131. Curva de la función $y = \operatorname{arc\,tg} x$

En la fig. 97 se muestra la gráfica de la función $y = \operatorname{arc\,tg} x$. Esta curva coincide con la curva de la función $x = \operatorname{tg} y$, cuando el argumento y varía en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Propiedades de la función arc tg x:

1) el argumento x puede ser un número real cualquiera, es decir, la función está definida en todo el eje numérico;
2) el conjunto de valores de la función (y) forma el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;
3) la función arc tg x es impar, puesto que $\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x$; la gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas;
4) la función arc tg x crece en todo su campo de definición; cuando x, al crecer, recorre el eje numérico (eje de abscisas) de izquierda a derecha, los valores de la función aumentan sucesivamente;

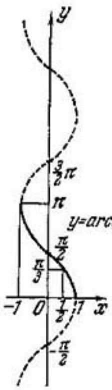

Fig. 98.

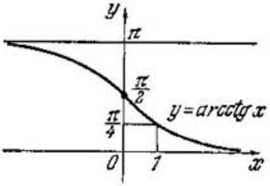

Fig. 99.

5) la función arco tangente no tiene valores máximo ni mínimo, si se la considera en todo el eje numérico ($-\infty < x < +\infty$).

§ 132. Funciones inversas de arc cos x y arc ctg x

● DEFINICION 1. La función inversa al coseno se llama *arco coseno.*

Si $y = \cos x$, tendremos que $x = \operatorname{arc} \cos y$, lo que se debe interpretar del siguiente modo: x es un ángulo (arco) cuyo coseno es igual a y. Designando el argumento de la función inversa también por la letra x, y la función por la letra y, obtendremos la notación

$$y = \operatorname{arc} \cos x.$$

La función arco coseno será de simple valuación si el conjunto de sus valores están comprendidos en el segmento $[0, \pi]$. En tal caso, a cada valor de $|x| \leqslant 1$ corresponde un único valor de y $(0 \leqslant y \leqslant \pi)$.

La propiedad de que las funciones $\cos x$ y $\operatorname{arc} \cos x$ sean inversas se escribe así:

$$\cos(\operatorname{arc} \cos x) = x, \text{ si } -1 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$\operatorname{arc} \cos(\cos x) = x, \text{ si } \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

La gráfica de la función $y = \operatorname{arc} \cos x$ coincide con la parte de la gráfica de la función $x = \cos y$, que corresponde a la variación de y desde 0 hasta π (fig. 98). Utilizando esta gráfica establézcase las propiedades de la función arc cos x.

DEFINICION 2. La función inversa a la cotangente se llama *arco cotangente*.

De la igualdad $y = \operatorname{ctg} x$ se deduce que $x = \operatorname{arc\,ctg} y$, o en las notaciones ya acostumbradas

$$y = \operatorname{arc\,ctg} x. \qquad (1)$$

En la igualdad (1) x es un número real cualquiera, tomado como valor de la cotangente, y es el ángulo (arco) correspondiente tomado del intervalo $0 < y < \pi$. En la fig. 99 se muestra la gráfica de la función

Ejemplos.

1) $\operatorname{arc\,ctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$;

2) $\operatorname{arc\,ctg} (-1) = \frac{3}{4}\pi$;

3) $\operatorname{arc\,cos} (-1) = \pi$;

4) $\operatorname{arc\,cos} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

La propiedad de que las funciones arc ctg x y ctg x sean inversas se puede apreciar de la siguiente anotación

$$\operatorname{ctg} (\operatorname{arc\,ctg} x) = x, \text{ si } -\infty < x < \infty;$$
$$\operatorname{arc\,ctg} (\operatorname{ctg} x) = x, \text{ si } \quad 0 < x < \pi.$$

Observación. El conjunto de todos los ángulos, cuyos cosenos (cotangentes) son iguales a x, se designa con la notación Arc cos x (respectivamente Arc ctg x). Por ejemplo:

$$\operatorname{Arc\,cos} \frac{\sqrt{3}}{2} = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k,$$

$$\operatorname{Arc\,ctg} (-1) = \frac{3}{4}\pi + \pi k,$$

donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

§ 133. Algunas identidades que relacionan las funciones trigonométricas inversas

Teorema. *Para todo valor real de x que satisfaga la desigualdad $|x| \leqslant 1$, se tendrá la identidad*

$$\operatorname{arc\,sen} x + \operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2}.$$

DEMOSTRACION. Examinemos los dos ángulos

$$\text{arc sen}\, x \text{ y } \frac{\pi}{2} - \text{arc cos}\, x$$

y demostraremos que ellos coinciden.
Por definición

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \text{arc sen}\, x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leqslant \text{arc cos}\, x \leqslant \pi.$$

De las últimas desigualdades obtendremos:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - \text{arc cos}\, x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

De este modo, ambos ángulos están contenidos en el segmento $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, que es, como se sabe, el conjunto de valores de la función *de simple valuación* $y = \text{arc sen}\, x$. Por lo tanto, para la demostración de la coincidencia de estos ángulos es suficiente demostrar la coincidencia de sus senos. En efecto,

$$\text{sen}\,(\text{arc sen}\, x) = x,$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc cos}\, x\right) = \cos\,(\text{arc cos}\, x) = x,$$

con lo que el teorema queda demostrado.
De un modo semejante se puede demostrar que para cualquier valor real de x se cumple la identidad

$$\text{arc tg}\, x + \text{arc ctg}\, x = \frac{\pi}{2}.$$

Recomendamos a los lectores la demostración individual del mismo.

§ 134. Expresión de cualquier función trigonométrica inversa mediante las demás funciones

Cualquiera de las cuatro funciones trigonométricas inversas se puede expresar mediante cualquiera de las tres restantes.
1. Expresión del arc sen x mediante el arc cos, arc tg y arc ctg. Tengamos

$$\text{sen}\, \alpha = x \quad (0 < x < 1).$$

En tal caso

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \sqrt{1-x^2},\\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\\ \operatorname{ctg}\alpha &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Las igualdades (1) y la igualdad inicial son equivalentes a las siguientes igualdades:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \operatorname{arc\,sen} x,\\ \alpha &= \operatorname{arc\,cos}\sqrt{1-x^2},\\ \alpha &= \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\\ \alpha &= \operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Estas igualdades se deducen de la misma definición de las funciones trigonométricas inversas.

Puesto que los primeros miembros de las igualdades (2) son iguales entre sí, también son iguales sus segundos miembros:

$$\operatorname{arc\,sen} x = \operatorname{arc\,cos}\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Ejemplo.

$$\operatorname{arc\,sen}\frac{5}{13} = \operatorname{arc\,cos}\sqrt{1-\frac{25}{169}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{5}{13}}{\sqrt{1-\frac{25}{169}}} = \operatorname{arc\,ctg} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{1-\frac{25}{169}}}{\frac{5}{13}}$$

o bien.

$$\operatorname{arc\,sen}\frac{5}{13} = \operatorname{arc\,cos}\frac{12}{13} = \operatorname{arc\,tg}\frac{5}{12} = \operatorname{arc\,ctg}\frac{12}{5}.$$

2. Expresión del $\operatorname{arc\,tg} x$ mediante las restantes funciones trigonométricas inversas. Tenemos

$$\operatorname{tg}\alpha = x \quad \left(x>0;\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

En tal caso

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{x}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Por eso

$$\left.\begin{aligned}&\alpha=\operatorname{arc\,tg} x,\\&\alpha=\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x},\\&\alpha=\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\\&\alpha=\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};\end{aligned}\right\}$$

$$\operatorname{arc\,tg} x=\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ejemplo.

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}=\operatorname{arc\,ctg}\frac{4}{3}=\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=\operatorname{arc\,sen}\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}},$$

o bien

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}=\operatorname{arc\,ctg}\frac{4}{3}=\operatorname{arc\,cos}\frac{4}{5}=\operatorname{arc\,sen}\frac{3}{5}.$$

Recomendamos a los lectores demostrar por el mismo método la validez de las siguientes igualdades:

$$\operatorname{arc\,cos} x=\operatorname{arc\,sen}\sqrt{1-x^2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$(0<x\leqslant 1)$;

$$\operatorname{arc\,ctg} x=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\operatorname{arc\,cos}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ (x>0).$$

§ 135. Ejemplos de funciones trigonométricas inversas

Ejemplo 1. Calcular $\operatorname{sen}\left[\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{1}{2}\right)+3\operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Suponemos que:

$$\alpha=\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{1}{2}\right),\quad \beta=\operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En tal caso

$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$, por lo tanto, $\alpha=\frac{2}{3}\pi$,

$\operatorname{sen}\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, por lo tanto, $\beta=\frac{\pi}{3}$, de donde

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}+3\cdot\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}=\operatorname{sen}\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ejemplo 2. Calcular $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{3}+\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}\right)$.

Suponemos que

$$\alpha=\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{3},\quad \beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}.$$

En tal caso

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{3};\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\frac{1}{9}}}=\frac{1}{\sqrt{8}};\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{4}{3}.$$

Por la fórmula de la tangente de la suma tendremos:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\left.\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\right|_{\substack{\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{8}},\\ \operatorname{tg}\beta=\frac{4}{3}}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{3\sqrt{8}}}=\frac{3+8\sqrt{2}}{6\sqrt{2}-4}\approx 3,19.$$

Ejemplo 3. Calcular $\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,cos}\frac{3}{4}\right)$.
En las nuevas notaciones este ejemplo se puede escribir del siguiente modo:

$$\operatorname{sen}\left(2\alpha-\frac{\beta}{2}\right),$$

donde

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2},\\ \beta&=\operatorname{arc\,cos}\frac{3}{4}.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Conforme a estos datos calculamos previamente $\operatorname{sen}2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}$ y $\cos\frac{\beta}{2}$, puesto que

$$\operatorname{sen}\left(2\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\operatorname{sen}2\alpha\cdot\cos\frac{\beta}{2}-\cos 2\alpha\cdot\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}.\qquad(2)$$

De las igualdades (1) se deduce que

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}, \quad \cos\beta=\frac{3}{4},$

donde α y β son ángulos agudos. Por eso,

$$\operatorname{sen} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};$$

para $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$ tendremos:

$$\operatorname{sen} 2\alpha=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5};$$

$$\cos 2\alpha=\left.\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right|_{\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}}=\frac{3}{5}$$

(aquí el ángulo α se considera como mitad con respecto a 2α y, por eso, se han utilizado las fórmulas del § 119). Análogamente

$$\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}=\left.\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}\right|_{\cos\beta=\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}\sqrt{2},$$

$$\cos\frac{\beta}{2}=\left.\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}\right|_{\cos\beta=\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}\sqrt{14}.$$

A continuación, utilizando la (2), tendremos

$$\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}\right)=$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{14}-\frac{1}{4}\sqrt{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{\sqrt{14}}{5}-\frac{3\sqrt{2}}{20}\approx 0{,}536.$$

E j e m p l o 4. Verificar si se cumple la igualdad

$$\underbrace{\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{11}}_{\alpha}+2\underbrace{\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}}_{2\beta}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}.$$

Si esta igualdad se cumple, es decir, el primer y segundo miembro son ángulos idénticos, tendremos que a iguales ángulos les corresponden iguales tangentes. Tomemos las tangentes de ambos miembros:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{11}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}\right)=\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\beta}.$$

Pero

$$\operatorname{tg} 2\beta=\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}\Big|_{\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{7}}=\frac{7}{24}\left(0<2\beta<\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{11}\quad\left(0<\alpha<\frac{\pi}{4}\right),$$

por lo cual $\alpha+2\beta<\frac{\pi}{2}$, y el primer miembro de la igualdad es un ángulo agudo, además,

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{11}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}\right)=\frac{\frac{2}{11}+\frac{7}{24}}{1-\frac{2}{11}\cdot\frac{7}{24}}=\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

De la igualdad de las tangentes de los dos ángulos agudos se deduce la igualdad de los mismos ángulos. Con esto queda demostrada la igualdad.

E j e m p l o 5. Hallar x de la ecuación

$$\operatorname{arc\,sen} x-\operatorname{arc\,cos} x=0\qquad(x>0).$$

Puesto que $\operatorname{arc\,sen} x=\operatorname{arc\,cos}\sqrt{1-x^2}$, la ecuación puede tomar la siguiente forma:

$$\operatorname{arc\,cos}\sqrt{1-x^2}=\operatorname{arc\,cos} x,$$

de donde

$$\sqrt{1-x^2}=x,\ 1-x^2=x^2;$$

$$2x^2=1,\ \text{ó}\ x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Verificación:

1) $\operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{2}}{2}-\operatorname{arc\,cos}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=0;$

2) $\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\neq 0.$

El número $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ no es una raíz de la ecuación dada, sino es la raíz de la ecuación

$$\operatorname{arc\,sen} x-\operatorname{arc\,cos} x=-\pi.$$

§ 136. Algunos ejemplos de ecuaciones trigonométricas

En el § 124 se dieron ejemplos de resolución de ecuaciones trigonométricas elementales.
Veamos otros tipos de ecuaciones trigonométricas y sus métodos de resolución.

1. Ecuación del tipo

$$a \cos^2 x + b \cos x \cdot \operatorname{sen} x + c \operatorname{sen}^2 x = 0. \tag{1}$$

La ecuación (1) se llama *homogénea* respecto a $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, además el grado de homogeneidad es igual a 2. (Compárese con la ecuación algebraica $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, que también se llama homogénea de segundo grado respecto a x e y).
Vamos a considerar los tres coeficientes a, b y c distintos de cero. Es evidente que los ángulos, cuyos senos o cosenos son nulos, no pueden ser soluciones o raíces de la ecuación (1):

$$\cos x \neq 0, \ \operatorname{sen} x \neq 0.$$

Supongamos lo contrario, es decir, que $\cos x = 0$. En tal caso los dos primeros términos del primer miembro de la ecuación (1) se hacen nulos, y se obtiene:

$$c \cdot \operatorname{sen}^2 x = 0,$$

lo que es un absurdo para $c \neq 0$, puesto que $\operatorname{sen} x = \pm 1$ cuando $\cos x = 0$.
Análogamente comprobamos que $\operatorname{sen} x \neq 0$. En tal caso, todos los términos de la ecuación se pueden dividir por $\cos^2 x$ (o por $\operatorname{sen}^2 x$). Obtendremos una ecuación cuadrática con respecto a la tangente (correspondientemente a la cotangente):

$$c \cdot \operatorname{tg}^2 x + b \cdot \operatorname{tg} x + a = 0,$$

de donde

$$\operatorname{tg} x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c};$$

si $b^2 - 4ac \geqslant 0$, la ecuación tiene raíces reales.

E j e m p l o. $2\cos^2 x + 5 \cos x \cdot \operatorname{sen} x - 3 \operatorname{sen}^2 x = 0$. Después de dividir por $\cos^2 x$, obtendremos:

$$3 \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x - 2 = 0,$$

$$(\operatorname{tg} x)_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6},$$

$(\operatorname{tg} x)_1 = -\frac{1}{3}, \quad (\operatorname{tg} x)_2 = 2;$

$x_1 = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k, \quad x_1 = -\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} + \pi k,$

$x_2 = \operatorname{arc\,tg} 2 + \pi k,$

donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

En general, la ecuación de tipo

$$a \cos^2 x + b \cos x \operatorname{sen} x + c \operatorname{sen}^2 x = m,$$

donde $m \neq 0$, se resuelve del siguiente modo: multipliquemos el segundo miembro de la ecuación por $1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$. En tal caso

$$a \cos^2 x + b \cos x \operatorname{sen} x + c \operatorname{sen}^2 x = m (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x),$$
$$(a - m) \cos^2 x + b \operatorname{sen} x \cdot \cos x + (c - m) \operatorname{sen}^2 x = 0.$$

Esta es una ecuación homogénea y se resuelve por el método anterior.

2. Ecuación del tipo

$$a \cos x + b \operatorname{sen} x = c \quad (a \neq 0, \ b \neq 0, \ c \neq 0).$$

Expresemos $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ por la $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (§ 119); obtendremos:

$$a \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + b \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = c,$$

o bien

$$a \frac{1 - z^2}{1 + z^2} + b \frac{2z}{1 + z^2} = c \quad \left(z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right),$$

lo que nos conduce a una ecuación de segundo grado:

$$(a + c) z^2 - 2bz + c - a = 0.$$

Si el discriminante $D = b^2 - (c - a)(a + c) \geqslant 0$, ó $a^2 + b^2 \geqslant c^2$, la ecuación tiene raíces reales.

E j e m p l o. $5 \cos x + 4 \operatorname{sen} x = 3$.

Aquí $a^2 + b^2 - c^2 = 25 + 16 - 9 = 32 > 0$, y la ecuación tiene raíces reales. Obtendremos

$$8z^2 - 8z - 2 = 0,$$
$$4z^2 - 4z - 1 = 0,$$
$$z_1 = \frac{2 - \sqrt{8}}{4} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2};$$

$\operatorname{tg}\frac{x_1}{2}=\frac{1-\sqrt{2}}{2}\quad \frac{x_1}{2}=-\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{2}-1}{2}+\pi k,$

$x_1=-2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{2}-1}{2}+2\pi k;$

$\operatorname{tg}\frac{x_2}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2},\quad x_2=2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{2}+1}{2}+2\pi k.$

El menor ángulo positivo que satisface a la ecuación dada es

$x=2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$

Al principio hallemos su magnitud en grados y después en radianes:

$\frac{\sqrt{2}+1}{2}\approx\frac{2{,}4142}{2}=1{,}2071,$

$\operatorname{arc}\operatorname{tg}1{,}2071\approx 50^\circ 22',$

$2\operatorname{arc}\operatorname{tg}1{,}2071\approx 100^\circ 44'\approx 1{,}758$ rad.

Segundo método de resolución. Transformemos el primer miembro de la ecuación:

$$5\cos x+4\operatorname{sen}x=4\left(\frac{5}{4}\cos x+\operatorname{sen}x\right).$$

Introduzcamos el ángulo auxiliar φ; suponiendo que $\operatorname{tg}\varphi=\frac{5}{4}$ $(\varphi=51^\circ 20')$, tendremos

$$5\cos x+4\operatorname{sen}x=4(\operatorname{tg}\varphi\cos x+\operatorname{sen}x)=\frac{4}{\cos\varphi}\operatorname{sen}(x+\varphi).$$

Ahora la ecuación toma la forma

$$\frac{4}{\cos\varphi}\operatorname{sen}(x+\varphi)=3,$$

de donde

$$\operatorname{sen}(x+\varphi)=\frac{3\cos\varphi}{4}.$$

Pero,

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{25}{16}}}=\frac{4}{\sqrt{41}}\approx\frac{4}{6{,}403},$$

$$\operatorname{sen}(x+\varphi)\approx\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{6{,}403}\approx\frac{1}{2{,}134}\approx 0{,}4686.$$

Por eso,

$$x+\varphi=(-1)^k\operatorname{arc}\operatorname{sen}0{,}4686+\pi k\ (k=0,\ \pm 1,\ \ldots).$$

Pero

$\arcsin 0{,}4686 \approx 27°57'$.

Finalmente,

$x = -51°20' + (-1)^k \cdot 27°57' + 180° k$.

Frecuentemente, después de transportar todos los términos de la ecuación al primer miembro, se consigue descomponer este miembro en factores. Igualando a cero cada factor, hallamos las raíces de la ecuación dada.

Ejemplos. 1) $\cos x - \cos 2x = 1$. Representemos la ecuación en la siguiente forma

$$\cos x - (1 + \cos 2x) = 0,$$
$$\cos x - 2\cos^2 x = 0,$$
$$\cos x (1 - 2\cos x) = 0.$$

Si el producto es igual a cero, debe ser igual a cero aunque sea uno de los factores: o bien

$$\cos x = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1),$$

o bien

$$1 - 2\cos x = 0, \quad \cos x = \frac{1}{2},$$

$$x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots).$$

2) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x = 0$. Transformemos la suma $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 5x$ en producto:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 5x = 2 \operatorname{sen} 3x \cdot \cos 2x.$$

La ecuación toma la forma

$$2 \operatorname{sen} 3x \cdot \cos 2x + \operatorname{sen} 3x = 0,$$
$$\operatorname{sen} 3x (2\cos 2x + 1) = 0.$$

Igualando a cero cada factor por separado, obtendremos:

$$\operatorname{sen} 3x = 0, \ 3x = \pi k, \ x_1 = \frac{\pi}{3} k \ (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots);$$

$$2\cos 2x + 1 = 0, \quad \cos 2x = -\frac{1}{2},$$

de donde

$$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots).$$

§ 137. Indicaciones generales para la resolución de las ecuaciones trigonométricas

Los métodos de resolución de las ecuaciones trigonométricas son variadísimos y no existe una regla general de resolución de cada ecuación. Por eso, nos limitaremos a mostrar en ejemplos algunos de los métodos de resolución frecuentemente utilizados.

1) Si la ecuación contiene varias funciones trigonométricas diferentes de igual argumento, todas las funciones se pueden expresar mediante una de ellas, después de lo cual obtendremos una ecuación algebraica con respecto a la incógnita, que designa la función por la cual se expresan todas las demás.

E j e m p l o 1. $3 \operatorname{sen} x + \cos^2 x = 2$. Aquí es conveniente expresar $\cos^2 x$ por el seno, después de lo cual obtendremos una ecuación cuadrática respecto a $\operatorname{sen} x$:

$$\operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0.$$

Resolviéndola, obtendremos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}382,$$

$$x = (-1)^k\ 22^\circ\ 30' + 180^\circ \cdot k \ (k = 0,\ \pm 1,\ \ldots);$$

la segunda raíz, $\operatorname{sen} x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ se desprecia, puesto que $\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$.

E j e m p l o 2. $3 \operatorname{sen} x + \cos x = 1$. En este caso no conviene sustituir $\cos x$ por $\pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$, puesto que obtendríamos una ecuación irracional respecto a $\operatorname{sen} x$, y después de librarnos del radical podrían aparecer raíces impropias. Lo sencillo es resolver esta ecuación del siguiente modo:

$$3 \operatorname{sen} x - (1 - \cos x) = 0.$$

$$6 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Después de simplificar por 2 y descomponer el primer miembro en factores, tendremos:

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} \left(3 \cos \frac{x}{2} - \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right) = 0;$$

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = 0, \quad x_1 = 2\pi k;$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 3, \quad x_2 = 2 \operatorname{arc\,tg} 3 + 2\pi k.$$

2) Si la ecuación contiene funciones trigonométricas de distintos argumentos, en los que se encuentra la incógnita, frecuentemente lo conveniente es reducir las funciones a un argumento.

E j e m p l o 3. $\operatorname{sen} x + 2\cos 2x = 1{,}5$. Aquí $\cos 2x$ se puede expresar solamente por $\operatorname{sen} x$, puesto que $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$, después de lo cual obtendremos una ecuación cuadrática respecto a $\operatorname{sen} x$:

$$8\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x - 1 = 0,$$

$$\operatorname{sen} x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_1 = \frac{\pi}{6}(-1)^k + \pi k \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots),$$

$$\operatorname{sen} x_2 = -\frac{1}{4}, \quad x_2 = (-1)^{k+1} \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{4} + \pi k$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

E j e m p l o 4. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$. Al resolver esta ecuación no es necesario reducir todas las funciones a un argumento. Transformemos el primer miembro de la ecuación en un producto:

$$(\cos x + \cos 3x) + \cos 2x = 0,$$

$$2\cos 2x \cos x + \cos 2x = 0,$$

$$\cos 2x\,(2\cos x + 1) = 0,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4}(2k + 1); \quad x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots).$$

3) Los ejemplos expuestos demuestran que uno de los métodos más eficientes de resolución de las ecuaciones es la descomposicion del primer miembro de la ecuación en factores después de pasar todos los términos a ese miembro. Por eso, a veces se hace necesario recurrir a métodos artificiosos de descomposición.

E j e m p l o 5. $\dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 1 + \operatorname{sen} 2x$. Representemos la ecuación en la siguiente forma:

$$\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} - 1 = 2\operatorname{sen} x \cos x,$$

o bien

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} - 2\operatorname{sen} x \cos x = 0;$$

sacamos el factor común $\operatorname{sen} x$:

$$\operatorname{sen} x\left(\frac{\frac{1}{\cos x}}{1-\operatorname{tg} x}-\cos x\right)=0,$$

o bien

$$\operatorname{sen} x\left(\frac{1}{\cos x-\operatorname{sen} x}-\cos x\right)=0;$$

1) $\operatorname{sen} x=0,\ x_1=\pi k\ (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$;

2) $\frac{1}{\cos x-\operatorname{sen} x}-\cos x=0,$

$$\frac{1-\cos^2 x+\operatorname{sen} x\cos x}{\cos x-\operatorname{sen} x}=0.$$

Suponiendo que $\cos x-\operatorname{sen} x\neq 0$, hallamos

$1-\cos^2 x+\operatorname{sen} x\cos x=0,$

$\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x\cos x=0,$

$\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x+\cos x)=0;$

de donde o bien $\operatorname{sen} x=0$, entonces tendremos 1), o bien

$\operatorname{sen} x+\cos x=0,$

o bien

$$\operatorname{tg} x=-1,\ x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi k\ (k=0,\ \pm 1,\ \ldots).$$

4) Si la ecuación contiene senos o cosenos cuadrados del argumento incógnito, generalmente se utilizan las fórmulas de reducción de la potencia, sustituyendo $\operatorname{sen}^2 x$ por $\frac{1-\cos 2x}{2}$, y $\cos^2 x$ por $\frac{1+\cos 2x}{2}$. Este método conviene utilizarlo también para potencias pares más superiores del seno y del coseno.

Ejemplo 6. $\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$. Resolución:

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{5}{8},$$

$$(1-\cos 2x)^2+(1+\cos 2x)^2=\frac{5}{2},$$

$$2+2\cos^2 2x=\frac{5}{2}$$

o bien

$$1+\cos 4x=\frac{1}{2} \quad \cos 4x=-\frac{1}{2},$$

$$4x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,$$

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

5) La ecuación, que contiene términos con productos de senos o cosenos, puede ser conveniente reducirla a la forma en la que los productos sean sustituidos por sumas algebraicas.

E j e m p l o 7. $\operatorname{sen} 5x \cos 3x - \operatorname{sen} 8x \cos 6x = 0$. Resolución:

$$\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 8x+\operatorname{sen} 2x)-\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 14x+\operatorname{sen} 2x)=0,$$

$$\operatorname{sen} 8x-\operatorname{sen} 14x=0,$$

$$-2\operatorname{sen} 3x\cos 11x=0,$$

$$\operatorname{sen} 3x=0,\ x_1=\frac{\pi}{3}k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

$$\cos 11x=0,\ x_2=\frac{\pi}{22}(2k+1) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

§ 138. Gráficas de las funciones obtenidas por transformación de la sinusoide

1. Gráfica de la función $y=\operatorname{sen}(x+a)$. Veamos como están relacionadas entre sí las gráficas de las funciones

$y = \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen}(x + a)$.

Supongamos para certeza que $a > 0$.
Para iguales valores de la variable independiente x los argumentos de estas dos funciones se diferencian en la magnitud constante $(x + a) - x = a$. Debido a esto, a todo punto M de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ le corresponderá un punto M_1 de la segunda gráfica, de igual ordenada pero la abscisa del punto M_1, es menor que la del punto M en la magnitud a. De este modo, cualquier punto de la primera gráfica puede transformarse en el punto correspondiente de la segunda gráfica transportándolo paralelamente al eje Ox en la magnitud a en sentido negativo (fig. 100). Si se desplaza la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ a lo largo del eje Ox a la magnitud a, en sentido negativo, se producirá la unión (coincidencia) de

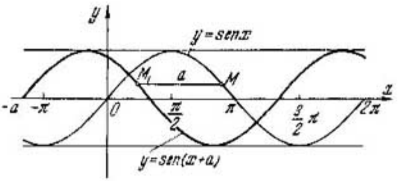

Fig. 100.

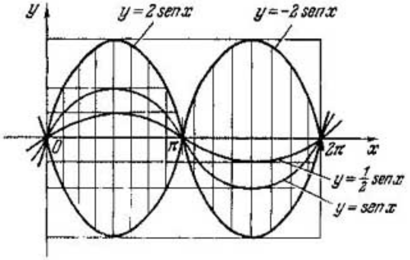

Fig. 101.

estas dos gráficas, y puede decirse que *la gráfica de* $y =$ $= \operatorname{sen}(x + a)$ *es la sinusoide* $y = \operatorname{sen} x$ *desplazada a la magnitud* a *a lo largo del eje* Ox *hacia la izquierda.* En general, *la gráfica de la función* $y = \operatorname{sen}(x + a)$ *es la sinusoide* $y = \operatorname{sen} x$, *desplazada a la magnitud* $|a|$ a lo largo *del eje* Ox *hacia la derecha cuando* $a < 0$, *y hacia la izquierda cuando* $a > 0$;

Observación. En particular, cuando $a = \frac{\pi}{2}$ tal transformación de la sinusoide la hemos examinado en el § 113 al construir la gráfica de la función $y = \cos x$, puesto que $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.

2. Gráfica de la función $y = A \operatorname{sen} x$. Comparemos las dos funciones: 1) $y = 2 \operatorname{sen} x$ $(A = 2)$ y 2) $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x \left(A = \frac{1}{2}\right)$ con la función $y = \operatorname{sen} x$.

Para iguales valores del argumento x los valores de la primera función son dos veces mayores que los correspondientes valores de la función $y = \operatorname{sen} x$; los valores de la segunda función son dos veces menores. En la representación geométrica esto significa que las ordenadas de la curva $y = 2 \operatorname{sen} x$

pueden ser obtenidas de las correspondientes ordenadas de la curva $y = \text{sen}\, x$ *alargándolas dos veces en dirección del eje* Oy (las ordenadas positivas se alargan hacia arriba, las negativas, hacia abajo).

La gráfica de la función $y = \frac{1}{2} \text{sen}\, x$ se obtiene de la gráfica de $y = \text{sen}\, x$ *comprimiendo* todas las ordenadas dos veces en dirección del eje Oy, lo que está representado en la fig. 101.

En general, *la gráfica de la función* $y = A\, \text{sen}\, x$ *se obtiene de la gráfica de* $y = \text{sen}\, x$ *alargando las ordenadas* A *veces en dirección del eje* Oy *cuando* $A > 1$ *y comprimiéndolas* $\frac{1}{A}$ veces, si $0 < A < 1$.

El número A se llama *amplitud* de la sinusoide $y = A\, \text{sen}\, x$ y denota la desviación máxima de los puntos de la gráfica del eje Ox, es decir, la ordenada mayor en valor absoluto de la curva.

Observación. La gráfica de la función $y = -2\, \text{sen}\, x$ es la reflexión especular, respecto al eje Ox, de la gráfica $y = 2\, \text{sen}\, x$ (véase la fig. 101). En general, la gráfica de la función $y = A\, \text{sen}\, x$ para $A < 0$ se obtiene de la gráfica de $y = \text{sen}\, x$ alargando las ordenadas, si $|A| > 1$ (respectivamente comprimiendo, si $|A| < 1$) con la ulterior reflexión respecto al eje Ox.

3. Gráfica de la función $y = \text{sen}\, kx$. Supongamos que $y = \text{sen}\, 2x$ ($k = 2$). Se comprende fácilmente que el período de esta función es igual a π, es decir, $T = \pi$, donde por T se ha designado el período. En efecto, por definición del período la igualdad

$$\text{sen}\, 2(x + T) = \text{sen}\, 2x$$

debe cumplirse para cualquier valor de x, ó

$$\text{sen}\, (2x + 2T) = \text{sen}\, 2x,$$

lo que es posible sólo si

$$2T = 2\pi n, \quad T = \pi n.$$

Puesto que $T = \pi$, cuando $n = 1$, tendremos que π es el menor número positivo, cuya adición a x no varía el valor de la función $y = \text{sen}\, 2x$, es decir, *su período*. La gráfica de la función $y = \text{sen}\, 2x$ es una sinusoide comprimida dos veces en dirección del eje Ox (fig. 102).

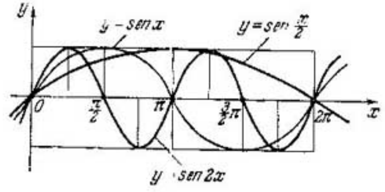

Fig. 102.

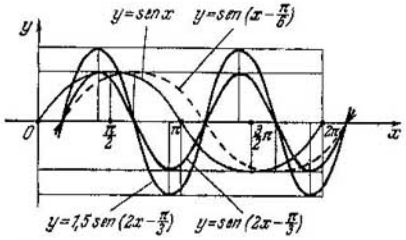

Fig. 103.

La gráfica de la función $y = \text{sen}\,\frac{x}{2}$ es una sinusoide alargada dos veces con una longitud de onda (período) de 4π puesto que la identidad

$$\text{sen}\,\frac{x+T}{2} = \text{sen}\,\frac{x}{2},$$

o bien

$$\text{sen}\left(\frac{x}{2}+\frac{T}{2}\right) = \text{sen}\,\frac{x}{2},$$

se verificará para todos los valores de x, si

$$\frac{T}{2} = 2\pi, \text{ es decir, } T = 4\pi.$$

En la fig. 102 se muestra la construcción de la gráfica.

4. Gráfica de la función $y = \text{sen}\,(kx + a), k > 0$. El argumento $(kx + a)$ se puede representar en la forma $k\,(x + a_1)$, donde $a_1 = \frac{a}{k}$. En tal caso, $y = \text{sen}\,k\,(x + a_1)$. Desplazando paralelamente (trasladando) la sinusoide $y = \text{sen}\,x$ la magnitud a_1 en dirección al eje Ox (en $|a_1|$ hacia la derecha, si $a_1 < 0$, y hacia la izquierda cuando $a_1 > 0$) logramos que a la nueva posición de la sinusoide corresponde la nueva ecuación $y = \text{sen}\,(x + a_1)$. Si ahora reducimos la longitud de la onda k veces, si $k > 1$ (correspondientemente alargamos $\frac{1}{k}$ veces, si $k < 1$), a tal transformación geométrica secundaria de la sinusoide le corresponde la ecuación $y = \text{sen}\,k\,(x + a_1)$, ó $y = \text{sen}\,(kx + a)$.

Así, pues, la gráfica de la función $y = \text{sen}\,(kx + a)$ *es una sinusoide transformada o deformada*. En la fig. 103 se muestra la gráfica de la función $y = \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ con representación de cada transformación.

5. Gráfica de la función $y = A\,\text{sen}\,(kx + a)$. Esta gráfica es una deformación de la gráfica de $y = \text{sen}\,(kx + a)$, es decir, el *alargamiento* en A veces de todas las ordenadas de la gráfica en dirección al eje Oy, si $A > 1$, ó la *compresión* en $\frac{1}{A}$ veces, si $0 < A < 1$ (si $A < 0$, la respectiva compresión o alargamiento se realiza con la reflexión ulterior respecto al eje Ox). La semejante gráfica $\left(y = 1{,}5\,\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right)$ se muestra en la fig. 103.

6. Función $y = A\cos kx + B\,\text{sen}\,kx$. Demostremos que

$$y = A\cos kx + B\,\text{sen}\,kx \tag{1}$$

puede ser reducida a la forma

$$y = C\,\text{sen}\,(kx + \alpha).$$

Multiplicamos y dividimos el segundo miembro de la igualdad (1) por $\sqrt{A^2 + B^2}$:

$$y = \sqrt{A^2 + B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos kx + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,\text{sen}\,kx\right).$$

Pongamos

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \text{sen}\,\alpha, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\alpha,$$

lo que siempre es posible, puesto que, en valor absoluto, cada una de las fracciones $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ y $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ no es mayor que la unidad y la suma de sus cuadrados es igual a la unidad:

$$\left|\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| \leqslant 1, \quad \left|\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| \leqslant 1;$$

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = 1.$$

En tal caso, tendremos;

$$y = \sqrt{A^2+B^2}\,(\operatorname{sen}\alpha\cos kx + \cos\alpha\operatorname{sen} kx) =$$
$$= \sqrt{A^2+B^2}\operatorname{sen}(kx+\alpha) = C\operatorname{sen}(kx+\alpha),$$

donde $C = \sqrt{A^2+B^2}$.

E j e m p l o. $y = -0{,}5\cos 2x + 1{,}2\operatorname{sen} 2x$. Aquí $A = -0{,}5$; $B = 1{,}2$; $k = 2$. Hallamos:

$$C = \sqrt{(-0{,}5)^2 + (1{,}2)^2} = 1{,}3.$$

En tal caso,

$$\cos\alpha = \frac{-0{,}5}{1{,}3} = -\frac{5}{13} \approx -0{,}3846;$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1{,}2}{1{,}3} = \frac{12}{13} \approx 0{,}9231.$$

El ángulo α corresponde al segundo cuadrante, en el que el seno tiene valor positivo, y el coseno, negativo. Por las tablas hallamos

$$\alpha = 180° - 67°23' = 112°37'.$$

En radianes

$$\alpha = 1{,}9654, \text{ ó } \alpha \approx 1{,}97.$$

De este modo

$$y = 1{,}3\operatorname{sen}(2x + 1{,}97),$$

es decir, hemos obtenido una ecuación del tipo examinado antes (véase el p. 5).

§ 139. Resolución gráfica de las funciones trigonométricas

E j e m p l o 1. Supongamos querer resolver la ecuación trigonométrica sen $2x = 0$. Esto significa que hay que hallar las raíces de la función $y = \operatorname{sen} 2x$, mientras que en la interpretación geométrica, las abscisas de los puntos de intersección de la curva con el eje Ox. Los puntos de intersección de la curva $y = \operatorname{sen} 2x$ con el eje de abscisas se pueden dar por la fórmula $x = \frac{\pi}{2}k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, lo que está representado en la fig. 104.

E j e m p l o 2. Las raíces de la ecuación sen $2x = \frac{1}{2}$ son las abscisas de los puntos de intersección de la curva $y =$

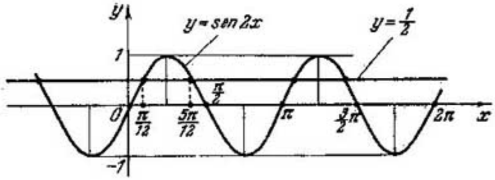

Fig. 104.

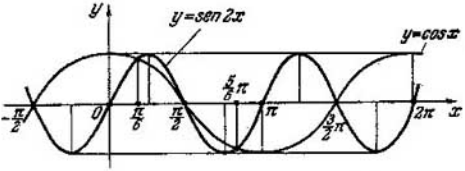

Fig. 105.

$=\operatorname{sen} 2x$ con la recta $y=\frac{1}{2}$, paralela al eje Ox y dispuesta sobre ella a la distancia $d=\frac{1}{2}$. Los puntos de intersección tienen la forma

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

En la fig. 104 están marcados los puntos próximos al origen de coordenadas de abscisas: $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, ...

Ejemplo 3. La resolución de la ecuación $\operatorname{sen} 2x - \cos x = 0$ se reduce a hallar las abscisas de los puntos de intersección de las curvas de las dos funciones, $y = \operatorname{sen} 2x$ e $y = \cos x$, puesto que a la ecuación se le puede dar la forma $\operatorname{sen} 2x = \cos x$.
Las abscisas de los puntos de intersección de las curvas $y = \operatorname{sen} 2x$ è $y = \cos x$, es decir, las raíces de la ecuación, se determinan por dos fórmulas (fig. 105):

$$x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1) \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

$$x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

En la figura están representadas las raíces $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, obtenidas de la primera fórmula para $k=-1$, 0 y 1,

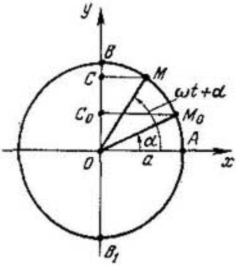

Fig. 106.

y las raíces $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$, obtenidas de la segunda fórmula para $k=0$ y 1.

§ 140. Oscilación armónica simple

Por la circunferencia de radio $OA = a$ se mueve el punto M a una velocidad angular constante en sentido positivo. Según qué ley se mueve la proyección del punto M sobre el eje Oy, es decir, el punto C, si al comenzar el movimiento ($t = 0$) el punto M que se mueve por la circunferencia se halla en la posición M_0; la velocidad angular del punto M es igual a $\omega\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$ (fig. 106).

En el instante inicial el radio OM_0 forma con el eje Ox el ángulo $\angle AOM_0 = \alpha$. Después de t segundos el ángulo aumenta la magnitud ωt, y el radio OM, correspondiente a la nueva posición del punto, forma con el eje Ox el ángulo $\angle xOM = \omega t + \alpha$. En el tiempo t s la proyección del punto M sobre el eje Oy, o sea, el punto C, de la posición inicial C_0 se traslada por el eje Oy a la posición C. Si designamos por y el segmento OC, que caracteriza la desviación de la proyección C del centro de la circunferencia en el instante t, tendremos

$$\frac{y}{a} = \operatorname{sen}(\omega t + \alpha),$$

o bien

$$y = a \operatorname{sen}(\omega t + \alpha).$$

Esta es precisamente la ley que describe el movimiento de la proyección del punto M sobre el eje Oy. La proyección C se mueve de manera rectilínea por el eje Oy, oscilando alrededor del punto O, es decir, desviándose ora hacia arriba, ora hacia abajo no más que la magnitud del radio. Por lo tanto, la proyección se mueve por el eje Oy entre los puntos B_1 y B.

● DEFINICION.. El movimiento por la ley

$$y = a \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

se llama *oscilación armónica simple*.

Aclaremos el significado de las constantes que componen la ecuación

$$y = a \operatorname{sen}(\omega t + \alpha).$$

El parámetro a se llama *amplitud de la oscilación* y caracteriza la mayor desviación del punto oscilante del centro O. El argumento $\omega t + \alpha$ recibe el nombre de *fase* del punto oscilante C; α es la *fase inicial* de la oscilación. El tiempo T, durante el cual el punto M cumple una vuelta completa por la circunferencia, y por lo tanto, el punto C efectúa una oscilación completa y vuelve a la posición inicial, se llama *período de oscilación armónica*. Es evidente que

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

La magnitud inversa al período de la oscilación, se llama *frecuencia de la oscilación*; la frecuencia

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Observación. La proyección del punto M, tomada sobre el eje Ox, efectúa también una oscilación armónica, si el punto M se mueve uniformemente por la circunferencia, pero sólo con otra fase inicial:

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) = a \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2} + \omega t + \alpha\right],$$

o bien

$$x = a \operatorname{sen}\left(\omega t + \underbrace{\frac{\pi}{2} + \alpha}_{\alpha_1}\right).$$

La gráfica de la oscilación armónica para el caso $a = 1{,}5$; $\omega = 2$; $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ está representada en la fig. 103.

▲ **Ejercicios**

1. Hallar: 1) $\operatorname{arc\,sen} \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{arc\,sen} \frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\operatorname{arc\,tg} \sqrt{3}$; 4) $\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} 1$; 5) $3 \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2. Hallar: 1) $\operatorname{arc\,cos}\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3}$;

4) $2\operatorname{arc\,ctg}(-1)$; 5) $\operatorname{arc\,cos} 0$.

3. Calcular: 1) $\operatorname{arc\,tg} 1+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{arc\,cos}(-1)+\operatorname{arc\,sen}(-1)$;

3) $\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3})+\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. Construir los correspondientes ángulos (arcos):
1) $\operatorname{arc\,sen} 0,6$; 2) $\operatorname{arc\,cos}(-0,4)$; 3) $\operatorname{arc\,tg} 1,5$; 4) $\operatorname{arc\,sen}(-0,3)$.

5. Expresar x como función de y de las siguientes igualdades:

1) $y=\operatorname{sen} x$, si $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$; 2) $y=\frac{1}{2}\operatorname{sen} x$,

si $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$;

3) $y=\cos 2x$, si $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$;

4) $y=\frac{1}{4}\operatorname{tg} x$, si $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$;

5) $y=3\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, si $-\pi<x<\pi$; 6) $y=\operatorname{ctg} 2x$, si $0<x<\frac{\pi}{2}$.

6. Expresar x como función de y de las igualdades:

1) $y=\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{2}$; 2) $y=2\operatorname{arc\,tg} x$;

3) $y=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,cos} x$; 4) $y=3\operatorname{sen} 2x$.

7. Calcular: 1) $\cos(\operatorname{arc\,sen} 0,8)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,sen} 1-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{2}\right)$;

3) $\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\,sen} x)$ $(0<x<1)$; 4) $\cos\left(2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}-\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2}\right)$.

8. Demostrar el cumplimiento de las siguientes igualdades:

1) $2\operatorname{arc\,cos} x=\operatorname{arc\,cos}(2x^2-1)$, $0\leqslant x\leqslant 1$;

2) $\operatorname{arc\,tg} 1+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}=\operatorname{arc\,tg} 3$;

3) $\operatorname{arc\,cos} 0,6+\operatorname{arc\,cos} 0,8=\operatorname{arc\,cos} 0$.

9. Utilizando las notaciones de las funciones trigonométricas inversas, escribir la forma general de los ángulos, correspondientes al valor dado de la función trigonométrica:

1) $\operatorname{sen} x=\frac{2}{3}$; 2) $\operatorname{sen} 3x=-\frac{1}{4}$; 3) $\cos 2x=\frac{1}{5}$;

4) $\operatorname{tg} 2x=5$; 5) $\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{4}{5}$; 6) $\cos\frac{x}{2}=-\frac{3}{7}$.

A d v e r t e n c i a. Si $\operatorname{sen} 2x = \frac{3}{5}$, tendremos que $2x = (-1)^k \times$ $\times \operatorname{arc\,sen} \frac{3}{5} + \pi k$; $x = \frac{1}{2}(-1)^k \operatorname{arc\,sen} \frac{3}{5} + \frac{\pi}{2} k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$.

10. Transformar en producto:

1) $\operatorname{sen} 80° + \operatorname{sen} 30°$; 2) $\operatorname{sen} 3\alpha - \operatorname{sen} \alpha$; 3) $\operatorname{sen} 5 + \operatorname{sen} 3$;
4) $\cos 4x - \cos 2x$;

5) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{5} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$; 6) $\operatorname{tg} 70° + \operatorname{ctg} 40°$; 7) $\frac{1}{2} + \cos x$;

8) $\sqrt{3} + \operatorname{tg} A$; 9) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{sen} 40°$; 10) $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$;

11) $1 + \operatorname{sen} x + \cos x$; 12) $\cos x + \operatorname{sen} 2x - \cos 3x$;
13) $\operatorname{sen} A + \cos A$; 14) $3 - 4\cos^2 x$.

11. Representar en forma de suma las siguientes expresiones:

1) $2 \operatorname{sen} 40° \cdot \cos 20°$; 2) $2 \cos 70° \cdot \operatorname{sen} 10°$; 3) $\operatorname{sen} 3\alpha \cdot \cos \alpha$;

4) $\cos 5x \cdot \operatorname{sen} 2x$; 5) $\cos \frac{3\pi}{5} \cdot \cos \frac{\pi}{5}$; 6) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{8} \cdot \operatorname{sen} \frac{3\pi}{8}$;

7) $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; 8) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

12. Demostrar las identidades:

1) $4 \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen}(60° - \alpha) \operatorname{sen}(60° + \alpha) = \operatorname{sen} 3\alpha$;

2) $\operatorname{sen} x + \cos x + 1 = 2\sqrt{2} \cos \frac{x}{2} \cos\left(45° - \frac{x}{2}\right)$;

3) $(\cos A + \cos B)^2 + (\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B)^2 = 4 \cos^2 \frac{A+B}{2}$;

4) $\operatorname{tg} 30° + \operatorname{tg} 40° + \operatorname{tg} 50° + \operatorname{tg} 60° = \frac{4 \cos 20°}{\operatorname{sen} 60°}$;

5) $\operatorname{sen} 10° + 2 \operatorname{sen} 5° \cdot \cos 15° + \cos 50° = \cos 10°$;

6) $\cos 2\alpha \cdot \cos \alpha - \operatorname{sen} 4\alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha = \cos 3\alpha \cos 2\alpha$;

7) $\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\beta - \gamma) + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen}(\gamma - \alpha) + \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 0$;

8) $\cos 10° \cdot \cos 50° \cdot \cos 70° = \frac{\sqrt{3}}{8}$;

9) $1 - 4\cos^2 \alpha = 4 \operatorname{sen}(60° + \alpha) \operatorname{sen}(\alpha - 60°)$;

10) $1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}$;

11) $\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$;

12) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - 1} = \operatorname{ctg}(45° - \alpha)$;

13) $\operatorname{tg} 20° \cdot \operatorname{tg} 40° \cdot \operatorname{tg} 60° \cdot \operatorname{tg} 80° = 3$.

13. Resolver las ecuaciones:

1) $\operatorname{sen} x + 2\cos x = 1$;

2) $\sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x = 1$;

3) $8 \operatorname{sen} x - 3 \cos x = 4$;

4) $\operatorname{sen} 2x=(\cos x-\operatorname{sen} x)^2$;

5) $\operatorname{sen}^2 x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x=1$;

6) $\operatorname{sen} 3x=\cos 2x$.

Advertencia. $\cos 2x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)$;

7) $\operatorname{tg} 2x-\operatorname{ctg} 3x=0$;

8) $\operatorname{sen}(x+45^\circ)\operatorname{sen}(x-15^\circ)=\frac{1}{2}$;

9) $\operatorname{sen} 3x\cos 5x=\operatorname{sen} 4x\cos 6x$;

10) $\operatorname{sen} 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\operatorname{sen} 3x$;

11) $\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$;

12) $12\operatorname{sen} x+4\sqrt{3}\cos(x+\pi)=8\sqrt{3}$;

13) $8\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+3\operatorname{sen} x-4=0$;

14) $\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} 2x+\cos 3x=0$;

15) $\sec x=4\operatorname{sen} x+6\cos x$;

16) $3\cos x+5\operatorname{sen}\frac{x}{2}=-1$;

17) $\cos\frac{x}{2}+\cos x+\cos 2x=0$;

18) $\cos^2 x-2\sqrt{3}\cos x\operatorname{sen} x-$
$-\operatorname{sen}^2 x=1$;

19) $\operatorname{sen} x\operatorname{sen}(x+60^\circ)\times$
$\times\operatorname{sen}(x+120^\circ)=\frac{1}{4}$;

20) $\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} 2x\cdot\operatorname{sen} 3x=$
$=\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x$;

21) $\frac{\operatorname{sen} x\operatorname{tg} x}{\cos x-1}=1$;

22) $\operatorname{ctg} x=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

Advertencia. $y=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$;

23) $2\operatorname{sen} 3x+\sqrt{3}\cos 5x+\operatorname{sen} 5x=0$;

24) $\operatorname{sen}^2 4x-\operatorname{sen}^2 2x=\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 3x$;

25) $\sec^2\frac{x}{2}-1=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sec x$;

26) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\operatorname{ctg} x-1$;

27) $2(\cos x-\operatorname{sen} x)+10\cos x\operatorname{sen} x-5=0$;

28) $\operatorname{sen}^3 x-\cos^3 x=1$;

29) $\cos x+\operatorname{sen} x=\frac{\cos 2x}{1-\operatorname{sen} 2x}$;

30) $\frac{\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 3x+\operatorname{sen} 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}+2\operatorname{tg} x=0$;

31) $\operatorname{sen} 3x+4\operatorname{sen}^3 x+4\cos x=5$;

32) $2\left[1-\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\right]=\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\pi-x}{2}$.

CAPITULO XII

PROGRESIONES

§ 141. Sucesión numérica

Ejemplo 1. Los postes telegráficos se ponen a una distancia de 50 m uno del otro. Expresar la longitud de la línea de comunicación S_n en función de la cantidad de postes instalados.

Es evidente que $S_n = 50(n-1)$.

Para $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$

$S_n = 50$ m, 100 m, 150 m, 200 m, ...

Ejemplo 2. De la geometría se sabe que el número de todas las diagonales de un polígono convexo de n lados se determina por la fórmula $a_n = \frac{n(n-3)}{2}$, donde a_n es el número de diagonales en n ángulos. Dando a n los valores: 4, 5, 6, 7, 8, ... obtendremos los correspondientes valores de $a_n = 2, 5, 9, 14, 20, \ldots$

En los dos ejemplos examinados hemos obrado con funciones, cuyo argumento n puede adquirir solamente valores enteros positivos. Estas funciones se admiten en llamar funciones de argumento natural (de otro modo, funciones de argumento entero) y escribirlas brevemente (simbólicamente) así:

$a_n = f(n)$ ó $\{a_n\}$.

La particularidad esencial de la función de argumento natural es que el conjunto de sus valores se puede numerar y disponer en un orden determinado: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$. Aquí, en el primer lugar se encuentra el número $a_1 = f(1)$, en el segundo, el número $a_2 = f(2)$, en el tercero, $a_3 = f(3)$, etc. En este caso se dice que el conjunto de números: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ *está ordenado*.

DEFINICION 1. El conjunto ordenado de valores de la función de argumento natural se llama *sucesión numérica*. En forma general una sucesión numérica se escribe así: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots$ El número a_1 se llama primer término de la sucesión, el número a_2, segundo término, etc. Veamos otros ejemplos de sucesiones.

E j e m p l o 3. Si se eleva al cuadrado cada número natural obtendremos una sucesión de cuadrados de números naturales $\{n^2\}$: 1, 4, 9, 16, 25, . . ., n^2, . . .

E j e m p l o 4. Para cada número natural n existe un número inverso a él $\frac{1}{n}$; estos números inversos forman la sucesión numérica $\left\{\frac{1}{n}\right\}$;

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

La sucesión se considera dada si se conoce la regla por la cual cada número natural n se encuentra en correspondencia con otro número a_n. De ordinario esta correspondencia se establece por la fórmula del término general de la sucesión, por ejemplo, $a_n = \frac{n}{2n+1}$. Esta fórmula da lugar a la sucesión $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$ . . ., Sin embargo, no toda sucesión numérica se puede dar por una fórmula. Así, por ejemplo, para la sucesión 3, 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; . . . no estamos en condición de indicar una fórmula que permite por el número del término de la sucesión determinar el propio término.

No obstante, la regla por la que están formados los términos de la sucesión, se expresa verbalmente con facilidad: el primer término de la sucesión es un valor aproximado del número π por defecto con la exactitud de hasta 1, el segundo término es un valor aproximado de π por defecto con la exactitud de hasta 0,1, etc. En general el n-simo término de la sucesión es un valor aproximado del número π por defecto con la exactitud de hasta $\frac{1}{10^{n-1}}$.

La sucesión 2, 3, 5, 7, 11, . . . es interesante ya que sus términos son números simples dispuestos en su orden de crecimiento. En primer lugar se encuentra el menor número simple 2; en segundo lugar, el siguiente número simple, es decir, el 3, etc. Esta sucesión se continúa fácilmente, disponiendo la tabla de números simples; sin esta tabla no estamos en condición de decir, por ejemplo, el término que se encuentra en el 1000-ésimo lugar, puesto que no hay una fórmula que exprese el n-simo número como función del número. Sin embargo, la regla verbal expresa exactamente la ley de formación de sus términos. A veces la sucesión se da por la fórmula de recurrencia, por ejemplo, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. El sentido de esta fórmula consiste en que cada término (comenzando del tercero) se determina como suma de los dos términos anteriores próximos a él: $a_3 = a_1 + a_2$, $a_4 = a_2 + a_3$, . . . Para que sea posible escribir esta sucesión hay que dar sus dos primeros términos. Supongamos que $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, en tal caso tendremos: $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 7$, $a_6 = 11$, etc.

● DEFINICION 2. La sucesión $\{a_n\}$ se llama *monótona creciente*, si cada término siguiente es mayor que el anterior,es decir, la desigualdad $a_{n+1} > a_n$ es cierta para todo n natural. En los ejemplos 1, 2, 3 ya nos hemos encontrado con la sucesión monótona creciente.

● DEFINICION 3. La sucesión $\{a_n\}$ se llama *monótona decreciente* si cada término siguiente es menos que el anterior, es decir, la desigualdad $a_{n+1} < a_n$ es cierta para todo n natural.

Un ejemplo de una sucesión monótona decreciente es

$\left\{\frac{1}{n}\right\}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

Existen sucesiones cuyos términos ora crecen, ora decrecen. Estas sucesiones se llaman oscilantes o indeterminadas.

Ejemplo. $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n}{n+1}$.

Para $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ obtenemos los términos de la sucesión

$1, -\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \ldots$

Se nota fácilmente que $a_2 < a_1$, pero $a_3 > a_2$.

Los términos de esta sucesión crecen y decrecen alternativamente.

§ 142. Ilustración gráfica de una sucesión

Los términos de las sucesiones monótonas (es decir, sólo crecientes o sólo decrecientes) se representan cómodamente por puntos sobre un eje numérico; además, al crecer el punto se mueve hacia la derecha a medida que crece el número de término, lo que está representado en la fig. 107. Para la sucesión monótona decreciente el punto se mueve hacia la izquierda con el crecimiento del número de término.

Podemos proceder también de otro modo, admitiendo el número de cada término como abscisa, y la magnitud de ese término, como ordenada y construir los puntos $(1; a_1)$,

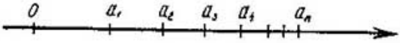

Fig. 107.

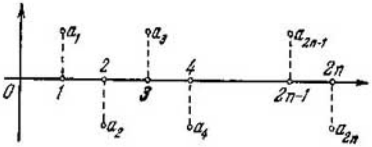

Fig. 108.

$(2; a_2)$, $(3; a_3)$, . . . etc. Se obtiene una serie de puntos aislados del plano o, como se dice, puntos discretos. Estos puntos, o dicho con rigor, sus ordenadas son las representaciones de los términos de la sucesión.

En la fig. 108 se muestra la sucesión $\{a_n\}$:1, -1, 1, ... En ésta $a_n = (-1)^{n+1}$. Si quisiésemos representar los términos de esta sucesión en forma de puntos sobre el eje numérico (eje de abscisas), tendríamos que la representación sería inexpresiva, puesto que los términos con números impares se representan por un punto $a_{2n+1} = 1$, y todos los términos con números pares se reúnen en otro punto $a_{2n} = -1$. En este ejemplo se puede notar la ventaja del segundo método de representación ante el primero.

§ 143. Progresión aritmética

Examinemos las siguientes dos sucesiones:

4, 7, 10, 13, 16, . . .,

8, 3, -2, -7, -12, . . .

Su ley de composición es la misma; la diferencia entre cualquier término de la sucesión y el próximo a él de izquierda (anterior) es una magnitud constante. En el primer ejemplo esta diferencia es igual a: $7-4 = 10-7 = \ldots = 3$; en el segundo ejemplo tendremos $3-8 = -2-3 = -5$.

● DEFINICION. Se llama *progresión aritmética* una sucesión de números, en la cual cada término siguiente se obtiene del anterior sumando a éste un mismo número denominado *diferencia de la progresión*. La diferencia de la progresión se designa por la letra d; por lo tanto, en el primer ejemplo $d = 3$; en el segundo ejemplo $d = -5$. Los términos de una progresion aritmética se designan por a_1, a_2, a_3, etc.; en el primer ejemplo $a_1 = 4$; $a_2 = 7$; $a_3 = 10$.

Si $d > 0$, la progresión es creciente; si $d < 0$, es decreciente.

Para demostrar que la sucesión dada es una progresión aritmética se le antepone el signo $\div$, por ejemplo: $\div 7, 9, 11, 13, \ldots$

Si $d = 0$, todos los términos de la progresión son iguales entre sí. El estudio de estas progresiones no presenta interés.

§ 144. Fórmula de cualquier término de una progresión aritmética

Por definición de la progresión tendremos

$a_2 = a_1 + d;$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d;$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d.$

Se puede notar la siguiente ley: para obtener un término de una progresión aritmética de número k hay que sumar al primer término la diferencia d multiplicada por el número de términos que preceden al que se determina:

$$a_k = a_1 + (k - 1) d \qquad (1)$$

(al término a_k le anteceden $(k - 1)$ términos). Por ahora ésta es nuestra suposición, pues aún no está demostrada la validez de la igualdad (1).

Demostremos que si la igualdad (1) es cierta, también es cierta la igualdad

$$a_{k+1} = a_1 + kd. \qquad (2)$$

En efecto,

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k - 1) d + d = a_1 + kd,$$

con lo que queda demostrada la validez de la igualdad (2). Hemos comprobado directamente que para $k = 2$ y $k = 3$ la fórmula (1) es cierta, en tal caso, por demostración también es cierta cuando $k = 4$, y si lo es para $k = 4$, lo es también para $k = 5$, y en general, es cierta para todo $k = n$. Por eso,

$$a_n = a_1 + (n - 1) d.$$

§ 145. Media aritmética

Supongamos que a_{k-1}, a_k, a_{k+1} son tres términos sucesivos de una progresión aritmética. En tal caso, por propiedad de la progresión tendremos:

$a_k - a_{k-1} = a_{k+1} - a_k;$

$2a_k = a_{k-1} + a_{k+1};$

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

Se llama *media aritmética* la semisuma de dos números; por lo tanto, *cualquier término de una progresión aritmética* (excepto el primero) *es la media aritmética de dos de sus términos contiguos.*

E j e m p l o. Intercalar 7 medias aritméticas entre los números 8 y 20. Esto significa que se deben hallar 7 números tales que junto con los números dados 8 y 20 formen una progresión aritmética; el primer término de esta progresión es el 8, el noveno, el número 20. Tendremos que

$$a_9 = a_1 + 8d;\ 20 = 8 + 8d,\ d = 1{,}5.$$

La progresión buscada será:

$$\div\, 8;\ 9{,}5;\ 11;\ 12{,}5;\ 14;\ 15{,}5;\ 17;\ 18{,}5;\ 20.$$

Este ejemplo se puede generalizar: si hay que intercalar k medias aritméticas entre los números a y b, tendremos que

$$b = a + (k+1)\,d,\ \ d = \frac{b-a}{k+1}\,.$$

Conforme al primer término y la diferencia d se puede escribir los restantes términos.

§ 146. Fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética

Señalemos previamente una propiedad de la progresión aritmética con un número finito de términos.

Supongamos tener la progresión

$$\div\, 2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ 32,\ 37.$$

Sumemos los términos equidistantes de los extremos de la progresión: $2 + 37 = 39$; $7 + 32 = 39$; $12 + 27 = 39$; $17 + 22 = 39$; notamos que *la suma de dos términos de una progresión aritmética equidistantes de los extremos es igual a la suma de los términos extremos.*

Así debe ser: los primeros sumandos de estas sumas (es decir, 2, 7, 12, 17) crecen en 5; en cambio los segundos sumandos (37, 32, 27, 22) decrecen en 5; debido a esto la suma de cada par de sumandos permanece constante.

Pasemos a la deducción de la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética. Designemos esta suma por S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n. \qquad (1)$$

Si los sumandos del segundo miembro de la igualdad los escribimos en el orden inverso, la suma S_n no variará por ello:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1. \qquad (2)$$

Sumando miembro a miembro las igualdades (1) y (2), obtendremos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots$$
$$\ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

En cada paréntesis tenemos una suma de dos términos equidistantes de los extremos de la progresión; por lo tanto, todas estas sumas entre paréntesis son iguales entre sí y cada una de ellas es igual a la suma de los términos extremos $a_1 + a_n$; en total son n paréntesis, es decir, tantos como términos de la progresión. Por eso, tendremos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n;$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n.$$

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética es igual a la semisuma de los términos extremos multiplicada por el número de términos.

Se se utiliza la expresión del término general de una progresión aritmética: $a_n = a_1 + (n - 1)\, d$, la fórmula de la suma puede tomar otra forma:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)\, d}{2}\, n,$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\, d}{2}\, n.$$

Es conveniente utilizar esta fórmula cuando hay que hallar el número de términos de una progresión según los datos a_1, d y S_n.

§ 147. Representación geométrica de la suma S_n

Demos la deducción geométrica de la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética. Antes señalemos lo siguiente: si la base de un rectángulo es igual a la unidad, sú superficie se expresa por el mismo número que su altura..

Construyamos n rectángulos de alturas iguales a los términos de la progresión aritmética (fig. 109); la base de cada rectángulo es igual a la unidad: todos los rectángulos están

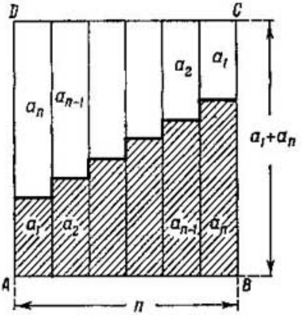

Fig. 109.

juntos uno a otro. Obtendremos una figura escalonada (en la figura se muestra rayada), cuya superficie numéricamente es igual a S_n. Si a la figura rayada se le yuxtapone una misma figura, pero dada vuelta, se obtendrá el rectángulo $ABCD$ de base $AB = n$, altura $AD = a_1 + a_n$; la superficie de la figura rayada es la mitad del rectángulo, es decir, $S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$.

§ 148. Ejemplos de empleo de la fórmula de la suma S_n

Ejemplo 1. Hallar la suma de los n primeros números de una serie natural. Tendremos: $a_1 = 1$; $a_n = n$; el número de términos también es igual a n; por la primera fórmula de la suma se puede escribir:

$$S_n = \frac{(1+n)\,n}{2}.$$

Ejemplo 2. Hallar la suma de 10 términos de una progresión:

$\div$ 18; 14; 10; 6, . . .

En este caso $d = 14 - 18 = -4$; $a_1 = 18$; $n = 10$. Por la segunda fórmula de la suma tendremos:

$$S_{10} = \frac{2\cdot 18 + 9\cdot(-4)}{2}\cdot 10;\ \ S_{10} = 0.$$

Ejemplo 3. El cuarto término de la progresión es igual a 9, el noveno término, igual a -6. ¿Cuantos términos hay que tomar para que su suma sea igual a 54?

$$a_9 = -6, \quad \text{ó} \quad a_1 + 8d = -6$$

$$\begin{array}{ll} a_4 = 9, & \text{ó} \quad \underline{a_1 + 3d = 9} \\ & \qquad 5d = -15; \end{array}$$

$$d = -3;$$

$$9 = a_1 + 3\cdot(-3);$$

$$a_1 = 18.$$

Por la segunda fórmula de la suma tendremos:

$$54 = \frac{2\cdot 18 + (n-1)\cdot(-3)}{2}\, n;$$

$$108 = (36 - 3n + 3)\, n;$$

$$36 = (13 - n)\, n;$$

$$n^2 - 13n + 36 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática obtendremos

$$n_1 = 4; \; n_2 = 9.$$

Abmas respuestas satisfacen los datos del problema, lo que se aprecia al verificar:

$$\div\, 18,\ 15,\ 12,\ 9,\ 6,\ 3,\ 0,\ -3,\ -6; \; S_4 = 54;$$

$S_9 = S_4 + 0 = 54$, puesto que la suma de los últimos cinco términos es igual a cero. Evidentemente, lo mismo ocurrirá si la progresión tiene términos de signos contrarios, pero iguales en valor absoluto.

§ 149. Suma de los cuadrados de los n primeros números de una serie natural

La suma de los n primeros números de una serie natural la designamos por S_1, y la suma de sus cuadrados por S_2, de manera que

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n;$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2.$$

Si en la identidad

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

damos sucesivamente a n los valores $1, 2, 3, 4, \ldots, n$, obtendremos:

$$2^3 - 1^3 = 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1;$$
$$3^3 - 2^3 = 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1;$$
$$4^3 - 3^3 = 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1;$$
$$5^3 - 4^3 = 3\cdot 4^2 + 3\cdot 4 + 1;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1;$$
$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1.$$

Sumando miembro a miembro estas igualdades:

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \dots + n^2) + $$
$$+ 3(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) + n,$$

o bien

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3S_2 + 3S_1 + n. \qquad (3)$$

Pero

$$S_1 = \frac{(n+1)\,n}{2}.$$

Sustituyendo el valor de S_1 en la igualdad (3), obtendremos:

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3S_2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n,$$

de donde

$$6S_2 = 2(n^3 + 3n^2 + 3n) - 3n^2 - 3n - 2n = 2n^3 +$$
$$+ 3n^2 + n = n(n+1)(2n+1);$$
$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

De manera semejante se puede hallar la suma de los cubos de los n primeros números de una serie natural, si se parte de la identidad

$$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1;$$

obtendremos:

$$S_3 = \left[\frac{(1+n)\,n}{2}\right]^2 = S_1^2.$$

§ 150. Progresión geométrica

● DEFINICIÓN. Una sucesión de números, en la que cada término siguiente es igual al término anterior multiplicado por el mismo número, se llama *progresión geométrica*. Expondremos ejemplos de progresiones geométricas

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots;$$

$$27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots;$$

$$12, -6, 3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$$

Cada término de la primera sucesión, comenzando del segundo, es igual al anterior multiplicado por 2; en el segundo ejemplo el término siguiente se obtiene del anterior multiplicado por $\frac{1}{3}$, en el tercer ejemplo, multiplicado por $-\frac{1}{2}$.
El número por el que hay que multiplicar el término anterior para obtener el siguiente se llama *razón de la progresión*, y se designa por la letra q. Los términos de una progresión geométrica, análogamente a los términos de la progresión aritmética, los designaremos por a_1, a_2, a_3, etc. La progresión geométrica la vamos a designar por el signo $\div\!\div$, puesto ante sus términos.
Si la razón de la progresión q es mayor que 1, la progresión es creciente para $a_1 > 0$ y decreciente para $a_1 < 0$.
Si $q = 1$, todos los términos de la progresión geométrica son iguales entre sí. Estas progresiones no presentan interés. En los ejemplos antes citados, la primera progresión es creciente, la segunda, decreciente, y la tercera no es ni creciente ni decreciente (aquí el término consecutivo puede ser mayor o menor que el precedente).

§ 151. Fórmula de cualquier término de una progresión geométrica

Por definición de la progresión geométrica tendremos:

$$a_2 = a_1q;$$

$$a_3 = a_2q = a_1q^2;$$

$$a_4 = a_3q = a_1q^3.$$

Se pone de manifiesto una ley determinada; para obtener un término de una progresión geométrica de número determinado, hay que multiplicar el primer término de la progresión por la razón de la progresión con exponente igual al número de términos precedentes. Supongamos que esta ley se cumple para el término de número k:

$$a_k = a_1q^{k-1}; \tag{1}$$

demostremos que, en tal caso,

$$a_{k+1} = a_1q^k. \qquad (2)$$

En efecto, por definición de la progresión geométrica tendremos:

$$a_{k+1} = a_kq = a_1q^{k-1}q = a_1q^k,$$

con lo que la igualdad (2) queda demostrada.
El cumplimiento de la igualdad (1) lo hemos verificado hasta el valor de $k = 4$. En tal caso, por demostración, también es cierta para $k = 5$, y si se cumple para $k = 5$, entonces también es cierta para $k = 6$, etc., y, en general es cierta para cualquier valor natural de $k = n$:

$$a_n = a_1q^{n-1}.$$

Todo término de una progresión geométrica es igual al primer término multiplicado por la razón de la progresión con exponente igual al número de términos precedentes al que se determina.

Ejemplo 1. Determinar el 8° término de la progresión:

$$\div\div 1, 3, 9, 27, \ldots$$

En este ejemplo $a_1 = 1$; $q = 3$; por eso,

$$a_8 = a_1q^7 = 1 \cdot 3^7 = 2187.$$

Ejemplo 2. Hallar el 10° término de la progresión:

$$2, \ -\sqrt{2}, \ 1, \ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \ \ldots$$

La razón $q = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $a_1 = 2$.

$$a_{10} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^9 = -2 \cdot \frac{2^4\sqrt{2}}{2^9} = -\frac{\sqrt{2}}{16}.$$

§ 152. Media geométrica

Supongamos que a_{k-1}, a_k, a_{k+1} son tres términos consecutivos de una progresión geométrica, donde el subíndice k es un número natural cualquiera mayor que 1. En tal caso tendremos:

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_{k+1}}{a_k};$$

cada una de estas relaciones es igual a la razón de la progresión q. Por una propiedad de la proporción tendremos:

$$a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}.$$

El número cuyo cuadrado es igual al producto de dos números dados, se llama su *media geométrica*; por ejemplo, el número 6 es la media geométrica de los números 4 y 9, puesto que $6^2 = 4 \cdot 9$.
De este modo, *todo término de una progresión geométrica es la media geométrica de dos términos equidistantes a él.*

Ejemplo. Intercalar entre los números 2 y 1458 cinco medias geométricas.
La condición del problema es: hallar cinco números tales que junto con los números dados 2 y 1458 formen una progresión geométrica cuyo 1er término sea $a_1 = 2$ y el 7° término $a_7 = 1458$.
Tendremos que:

$$a_7 = a_1 q^6;$$
$$1458 = 2q^6; \ 729 = q^6;$$
$$q = \sqrt[6]{729} = \pm 3.$$

Son posibles dos progresiones:

$\div\!\div$ 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458

ó

$\div\!\div$ 2, −6, 18, −54, 162, −486, 1458.

§ 153. Suma de los n primeros términos de una progresión geométrica

Designemos por S_n la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n. \qquad (1)$$

Multipliquemos ambos miembros de la igualdad (1) por q; obtendremos:

$$S_n q = a_1 q + a_2 q + a_3 q + \ldots + a_{n-1} q + a_n q; \qquad (2)$$

puesto que

$$a_1 q = a_2, \ a_2 q = a_3, \ \ldots, \ a_{n-1} q = a_n,$$

la igualdad (2) toma la forma

$$S_n q = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_n q. \qquad (3)$$

Restamos de la igualdad (3) la igualdad (1):

$$S_n q - S_n = a_n q - a_1,$$

$$S_n (q - 1) = a_n q - a_1,$$

de donde

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} \quad (q \neq 1).$$

La fórmula de la suma se puede representar en otra forma, si en ella se sustituye a_n por $a_1 q^{n-1}$; obtendremos:

$$S_n = \frac{a_1 q^{n-1} q - a_1}{q - 1} = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1};$$

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1} \quad (q \neq 1).$$

Si la razón de la progresión es $|q| < 1$, es conveniente escribir la fórmula del siguiente modo:

$$S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q},$$

para que el numerador y el denominador de este cociente sean positivos para $a_1 > 0$.

Resolvamos un viejo problema del siglo XVIII.

► P r o b l e m a. Cierta persona vende su caballo con la condición de que por el primer clavo de la herradura se le pague 1 céntimo; por el segundo clavo, 2 céntimos; por el tercero, 4 céntimos, etc. Los clavos de las herraduras son 32. Se pregunta: ¿a cuánto valora su caballo?

Evidentemente, hay que hallar la suma de los 32 términos de la progresión geométrica, cuyo primer término es $a_1 = 1$; la razón $q = 2$;

$$a_{32} = 1 \cdot 2^{31};$$

$$S_{32} = \frac{2 \cdot 2^{31} - 1}{2 - 1} = 2^{32} - 1 = 4\,294\,967\,295 \text{ (céntimos)}.$$

Convertidos en rublos, esta cifra es aproximadamente de 2,15 millones de rublos (¡precio fantástico!).

E j e m p l o. La suma de los tres primeros términos de una progresión es igual a 6, y la suma de 2°, 3° y 4° términos es igual a −3. Hallar la progresión. Escribimos los datos:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 6;$$

$$a_2 + a_3 + a_4 = -3.$$

Expresando los términos de la progresión por el primero, obtendremos

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 = 6, \text{ ó } a_1(1 + q + q^2) = 6; \qquad (4)$$

$$a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = -3 \text{ ó } a_1q(1 + q + q^2) = -3. \qquad (5)$$

Dividimos la igualdad (5) por la igualdad (4), obtendremos: $q = -\frac{1}{2}$. El primer término lo hallamos de la correlación

$$a_1 = \frac{6}{1+q+q^2} = \frac{6}{\frac{3}{4}} = 8.$$

La progresión buscada es: $+8$; -4; 2; -1; . . .

§ 154. Método de inducción matemática

Al deducir la fórmula de cualquier término de las progresiones aritméticas y geométricas hemos aplicado los razonamientos que llevan el nombre de *método de inducción matemática*. La esencia de este método es la siguiente: si hay que establecer que una fórmula, en la que figura el número natural n, es cierta, entonces:

1) comprobamos que la ley supuesta se cumple para el caso particular de $n = 1$;

2) suponemos que la ley se satisface para cualquier valor arbitrario de $n = k$, y demostramos que, en este caso, ella es cierta también para $n = k + 1$; de aquí se deduce que la ley es en general cierta para cualquier valor de n, puesto que su validez se puso de manifiesto para $n = 1$, y por demostración ella es cierta también para $n = 2$, y si es cierta para $n = 2$, también lo es para $n = 3$, etc.

En ciertos casos estos razonamientos se llaman método de demostración de n a $n + 1$. Veamos el siguiente ejemplo.

E j e m p l o. Demostrar que para cualquier valor natural de n se cumple la igualdad

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

La fórmula es cierta para $n = 1$, puesto que

$$1^2 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6} = 1; \quad 1 = 1.$$

Supongamos que la fórmula es cierta para $n = k$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Demostramos que, en ese caso, ella es cierta también para $n = k + 1$, es decir,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

En realidad,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right] = (k+1)\,\frac{2k^2+k+6k+6}{6} =$$

$$= (k+1)\,\frac{2k^2+7k+6}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

puesto que $2k^2 + 7k + 6 = (k+2)(2k+3)$.

La verificación directa ha demostrado que la fórmula es cierta para $n = 1$; por demostración será también cierta para $n = 2$, y, por eso, también para $n = 3$, por lo tanto, y para $n = 4$; y, en general para cualquier n natural.

§ 155. Problemas de progresión

▶ Problema 1. Dos cuerpos que se encuentran a la distancia de 153 m uno del otro, se mueven al encuentro mutuo. El primero recorre 10 m por segundo, y el segundo recorrió 3 m en el primer segundo; en cada segundo siguiente recorre 5 m más que en el anterior. ¿Después de cuántos segundos los cuerpos se encuentran?

Supongamos que el encuentro se produce después de x segundos, en tal caso el primer cuerpo recorrió un camino igual a $10\,x$ (m), el segundo cuerpo recorrió un camino igual a la suma de los términos de la progresión aritmética:

$S = 3 + (3+5) + (3+5\cdot 2) + \ldots + [3 + 5(x-1)]$. Por los datos del problema $10x + S = 153$, ó $10x + \frac{5x+1}{2}\,x = 153$.

Resolviendo esta ecuación cuadrática, hallamos que $x = 6$.

▶ Problema 2. ¿Pueden los números que expresan las longitudes de los lados de un triángulo y su perímetro, formar una progresión aritmética?

Supongamos que las longitudes de los lados forman una progresión aritmética, en ese caso se los puede designar por a, $a + d$, $a + 2d$, siendo su perímetro igual a $3a + 3d$. La diferencia entre el perímentro y el lado mayor es $(3a + 3d) - (a + 2d) = 2a + d$, y, puesto que $2a + d > d$, el perímetro no es el cuarto término de la progresión aritmética.

▶ Problema 3. Cuatro números forman una progresión geométrica decreciente. Sabiendo que la suma de los términos extremos es igual a 27, y la suma de los términos medios, igual a 18, hallar esa progresión.

Tengamos el sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_1q^3 = 27, \\ a_1q + a_1q^2 = 9. \end{cases}$$

Dividamos la primera ecuación por la segunda: $\frac{1-q+q^2}{q} = 3$. Resolviendo esta ecuación cuadrática, obtendremos $q = 2 \pm \sqrt{3}$. Solamente $q = 2 - \sqrt{3}$ satisface las condiciones del problema dado, puesto que la progresión debe ser decreciente y, por eso, $|q| < 1$. El primer término de la progresión lo hallamos de la correlación $a_1(q + q^2) = 9$, $a_1 = \frac{3}{2} \cdot (9 + 5\sqrt{3})$.

▶ Problema 4. La suma de tres números positivos, que forman una progresión aritmética, es igual a 21. Si a estos números les sumamos respectivamente 2, 3 y 9, los nuevos números forman una progresión geométrica. Hallar esos números. Supongamos que x, y y z son los números buscados. En tal caso $x + y + z = 21$, y, puesto que los números x, y, z forman una progresión aritmética, tendremos que $2y = x + z$. Por las condiciones del problema $x + 2$, $y + 3$, $z + 9$ componen una progresión geométrica, es decir, $(y + 3)^2 = (x + 2)\cdot(z + 9)$.

Se obtuvo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 21, \\ 2y = x + z, \\ (y + 3)^2 = (x + 2)(z + 9). \end{cases}$$

De la primera ecuación hallamos que $x + z = 21 - y$, entonces la segunda ecuación toma la forma $2y = 21 - y$; $y = 7$. Sustituyendo en la tercera ecuación y por su valor 7, obtendremos $(x + 2)(z + 9) = 100$, pero, dado que $x + z = 14$, $z = 14 - x$, entonces

$$(x + 2)(14 - x + 9) = 100.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, obtendremos $x_1 = 3$; $x_2 = 18$. El segundo valor $x_2 = 18$ no nos sirve, puesto que la suma de los primeros números $x + y$ excede la suma de los tres, lo que no es admisible, puesto que los tres números son positivos. Así, pues, los números buscados son: 3, 7 y 11.

▲ **Ejercicios**

1. Escribir varios de los primeros términos de una sucesión, si el término general se expresa por la fórmula $a_n=\frac{1}{n+1}$.

2. Idem para cuando: 1) $a_n=\frac{1}{3n+1}$; 2) $a_n=\frac{1}{2^n-1}$; 3) $a_n=(-1)^n\frac{1}{n^2+1}$; 4) $a_n(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}$.

3. Escoger, en lo posible, una fórmula simple para el término general de las siguientes sucesiones: 1) 1, 3, 5, 7, 9, ...; 2) 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{6}{11}$, ...; 3) a^2, a^4, a^6, ...

4. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones son una progresión aritmética: 1) 3, 6, 9, 12, ... ; 2) 1, 8, 27, 64, ... 3) 1, 3, 7, 15, 31, ... ; 4) 5, 3, 1, —1, —3, ... ?

5. Dada la progresión

$\div$ 3, 7, 11, 15, ... ,

hallar: 1) el 7° término; 2) el k-ésimo término.

6. En la progresión

$\div$ 5, 2, —1, —4, ... ,

hallar: 1) a_{12}; 2) a_n.

7. Hallar el término general de la progresión

$\div$ $3b$, $5b$, $7b$, ... ($b\neq 0$).

8. Dada la progresión

$\div$ 3, 5, 7, 9, ... ,

¿cuál es la sucesión de números que forman los términos que quedan si se suprimen en ella los términos situados en los lugares pares?

9. Intercalar 8 medias aritméticas entre los números 4 y 40.

10. Los diámetros de las poleas asentadas en un eje común forman una progresión aritmética de cinco términos, cuyos términos extremos son iguales a 120 mm y 216 mm; hallar los diámetros de las poleas intermedias.

11. Hallar la suma de 12 términos de la progresión

$\div$ 4, 8, 12, 16, ...

12. ¿Cuántas veces suena un reloj por día si éste suena también en las medias horas?

13. Demostrar que la suma de los n primeros números impares es un cuadrado exacto.

14. Completar los lugares vacíos de la tabla en la pág. 295.

15. La suma del 2° y 5° términos de una progresión es igual a 14, la suma del 3° y 7° es igual a 8; hallar la progresión.

16. La suma del 3° y 6° términos de una progresión es igual a 3, y la suma de sus cuadrados es igual a 45; hallar la progresión.

17. Kupetsky es una persona que tiene 14 copitas de plata, cada una de las cuales se diferencia en 4 medias onzas según una progresión, la última pesa 59 medias onzas; hallar el peso de todas las copitas (de la aritmética de Magnitsky, año 1703).

	a_1	a_n	d	n	S_n
1	7	39		9	
2	8		-2		14
3	31		-7	10	
4	1	61	5		
5			12	40	9400
6	2		3		442
7		22	0,4	43	
8		25,7	1,3		266
9	$-4{,}5$	100			955
10		-15		11	0

18. Un cuerpo que cae libremente en el vacío recorre en el primer segundo aproximadamente 4,9 m, y en cada segundo siguiente 9,8 m más. ¿Qué camino recorre el cuerpo en 10 segundos? ¿Qué camino ha recorrido en el último segundo?

19. ¿Cuál es el número natural igual a la suma de todos los números naturales que le anteceden?

20. La suma de tres números que componen una progresión aritmética es igual a 16. El producto del primero por el segundo es igual a $12\frac{4}{9}$. Hallar esos números.

21. El sexto término de una progresión aritmética constituye el 60% del tercer término de la misma progresión, y su producto es igual a 15. ¿Cuántos términos hay que tomar de esta progresión para que su suma sea igual a $30\frac{1}{3}$?

22. Se ha dado la progresión

$\div\, 3;\ 3{,}2;\ 3{,}4;\ 3{,}6;\ \ldots$

¿Comenzando de qué número sus términos serán mayores de 1000?

23. Demostrar que la sucesión, cuyo término general se expresa por la fórmula $a_n = 2\cdot 3^n$, es una progresión geométrica. Escribir los primeros cuatro términos de esta progresión.

24. Determinar el 10° término de la progresión

$\div\!\div\, 2,\ 4,\ 8,\ \ldots$

25. ¿A qué es igual el 7° término de la progresión

$\div\!\div\, 15,\ -5,\ \frac{5}{3},\ \ldots$?

26. ¿A qué es igual la razón de la progresión geométrica

1) $2,\ \sqrt{2},\ 1,\ \ldots$; 2) $a^n,\ a^{n-1},\ a^{n-2},\ \ldots\ (a > 0)$?

27. Intercalar tres medias geométricas entre los números 12 y 972.

28. Intercalar cuatro medias geométricas entre los números 5 y 20.

29. Hallar la suma de diez términos de una progresión, si

1) $a_1 = 3;\ q = 2$; 2) $a_1 = 8;\ q = \frac{1}{4}$.

30. Hallar la razón y la suma de siete términos de la progresión geométrica, si $a_1 = 36$; $a_7 = \frac{4}{81}$

31. Dados $S_7 = 2186$, $q = 3$; hallar a_1 y a_7.

32. Hallar el número de términos de la progresión geométrica, si $a_1 = 3$; $q = 2$; $S_n = 189$.

33. Hallar la razón de la progresión, siendo $a = 1$; $n = 3$; $S_3 = 157$.

34. Dada la progresión geométrica, en la que

$$a_1 + a_2 = 9;\ a_1 - q = 2\frac{3}{4},$$

hallar a_3.

35. La suma de tres números que componen una progresión geométrica creciente es igual a 65. Si restamos del menor número 1, del mayor 19, los números nuevamente obtenidos componen una progresión aritmética. Hallar estos números.

36. Hallar cuatro números sabiendo que los tres primeros de ellos componen una progresión geométrica, y las últimas tres, una aritmética. Se sabe que $q = 2$; $d = 6$.

37. Hallar cuatro números positivos que componen una progresión geométrica, si $a_1 + a_2 = 15$; $a_3 + a_4 = 60$.

38. Demostrar que si tres números positivos a, b y c forman una progresión geométrica, entonces

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3.$$

39. Un cuerpo se mueve por una recta uniformemente acelerado. El camino recorrido en el primer segundo es de 1 m; en el segundo, de 1,2 m; en el tercero, de 1,4 m. De este modo, el camino recorrido en cada segundo siguiente es 0,2 m mayor. ¿Cuál será el camino recorrido por el cuerpo al final de dos minutos desde el instante de comenzar el movimiento?

40. Desde los puntos A y B se mueven simultáneamente dos cuerpos, uno al encuentro del otro. El primero de ellos recorre en el primer minuto 50 m, y en cada minuto siguiente dos metros más que en el precedente. El segundo cuerpo recorre en el primer minuto 40 m, y en cada minuto siguiente 4 m más que en el precedente. ¿Después de cuántos minutos se encuentran estos dos cuerpos si la distancia $AB = 510$ m? Dar la resolución gráfica del problema.

41. Resuélvase analítica y gráficamente el siguiente problema: Desde el punto A parte un ciclista. Supongamos que en el primer segundo haya recorrido 3,5 m, y en cada segundo siguiente de movimiento el camino recorrido aumenta 1 m en comparación con lo recorrido en el precedente. Tres segundos después, del mismo punto A y en la misma dirección parte el segundo ciclista. En el primer segundo éste recorre 4 m, y en cada segundo siguiente recorre 2 m más que en el precedente. ¿Después de cuántos segundos el segundo ciclista alcanza al primero y a qué distancia del lugar de partida ocurre esto?

42. Tres números positivos: a, aq, aq^2, que forman una progresión geométrica, pueden ser tomadas como longitud de los lados de un rectángulo. ¿En qué límites puede variar la razón de la progresión q? Examínese los dos casos:

1) $q > 1$ y 2) $0 < q < 1$.

CAPITULO XIII

FUNCION EXPONENCIAL Y LOGARITMOS

§ 156. Potencia de exponente irracional

En el cap. V se generalizó y extendió el concepto de potencia a cualquier exponente racional. Así, por ejemplo,

$a^{3/2} = \sqrt{a^3}$; $a^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Sin embargo, no hemos examinado el caso en que el exponente es un número irracional, lo que denota el símbolo a^α (α es el número irracional, $a > 0$; $a \neq 1$).

Sin examinar esta cuestión en forma general, aclaremos el sentido de este nuevo símbolo en el ejemplo de la expresión $2^{\sqrt{2}}$.

Al número irracional $\sqrt{2}$ se puede aproximar por dos sucesiones de números racionales:

(I) 1; 1,4; 1,41; 1,414; . . .

o bien

(II) 2; 1,5; 1,42; 1,415; . . .

La primera sucesión es monótona creciente; sus términos son valores aproximados de la raíz cuadrada de dos por defecto, tomados con el grado de exactitud creciente.

La segunda sucesión es monótona decreciente; sus términos son valores aproximados de la raíz cuadrada de dos por exceso; además, la exactitud de la aproximación crece a medida que crece el número de términos de la sucesión.

Formemos dos nuevas sucesiones:

(I') 2^1; $2^{1,4}$; $2^{1,41}$; $2^{1,414}$; . . .,

(II') 2^2; $1^{1,5}$; $2^{1,42}$; $2^{1,415}$; . . .

La primera de las nuevas sucesiones también es monótona creciente, y la segunda, monótona decreciente.

Se puede demostrar que ambas sucesiones tienden a un mismo número con el crecimiento ilimitado del número de términos de la sucesión. Este número se toma (por definición) como valor de $2^{\sqrt{2}}$.

Observación. Con las potencias de exponentes irracionales se opera según las mismas leyes que con las potencias de exponentes racionales, por ejemplo:

$a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$,

$a^{\alpha} : a^{\beta} = a^{\alpha-\beta}$, etc.

(α y β son dos números irracionales).

§ 157. Función exponenical

En muchos campos de la ciencia y la técnica al estudiar los fenómenos y procesos más variados se descubre una dependencia funcional común entre dos magnitudes variables que intervienen en el proceso dado. Veamos algunos ejemplos.

1) Con la variación de la altura h sobre el nivel del mar la presión atmosférica p varía según la ley: $p = p_0 a^h$, donde p_0 es la presión sobre el nivel del mar, a es una magnitud constante.

2) El crecimiento de un árbol se produce por la ley $A = A_0 a^{kt}$, donde t es el tiempo, A_0 es la cantidad de madera inicial, A es la cantidad de madera variable con el tiempo, expresada generalmente en m^3.

3) La reproducción de bacterias en un cultivo cualquiera (por ejemplo, en levadura de cerveza) se produce por la ley: $y = y_0 a^{kt}$, donde t es el tiempo, y es la cantidad variable de bacterias, y_0 es la cantidad inicial de bacterias en el instante $t = 0$, a y k son constantes.

4) El radio se desintegra por la ley: $x = x_0 a^{kt}$; aquí x_0 denota la cantidad inicial de radio para $t = 0$, a y k son números constantes.

En los ejemplos expuestos hemos tratado con procesos que llevan el nombre de proceso de *crecimiento orgánico*. Si nos abstraemos del sentido físico de las variables que intervienen en los procesos de crecimiento ogránico, y designamos estas variables por las letras x e y, se puede decir que todo crecimiento orgánico se representa (describe) por una función del tipo

$y = Ca^{kx}$.

Veamos al principio el caso elemental de tal función, cuando $C = k = 1$; luego $y = a^x$.

DEFINICIÓN. La función de tipo $y = a^x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$, se llama *exponencial*.

El estudio de esta función lo comenzamos construyendo su gráfica:

§ 158. Gráficas de las funciones exponenciales

Formemos la tabla de valores de las siguientes funciones exponenciales:

$$y = 2^x \quad (a = 2); \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \left(a = \frac{1}{2}\right);$$

$$y = 10^x \quad (a = 10); \quad y = \left(\frac{1}{10}\right)^x \quad \left(a = \frac{1}{10}\right).$$

	x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4					
I	$y = 2^x$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16					
I	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$					
II	x	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	1
II	$y = 10^x$	0,1	0,18	0,3	0,4	0,6	0,7	1	1,3	1,8	2,4	3,2	4,2	5,6	10
II	$y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$	10	5,6	3,2	2,4	1,8	1,3	1	0,7	0,6	0,4	0,3	0,24	0,18	0,1

La segunda parte de la tabla está compuesta del siguiente modo. Los valores positivos del argumento x forman una progresión aritmética de diferencia $d = \frac{1}{8}$; los valores de la función exponencial 10^x, en este caso componen una progresión geométrica de razón $q = 10^{1/8}$.

1) $10^{1/2} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$;

2 $10^{1/4} = \sqrt{10^{1/2}} \approx \sqrt{3{,}16} \approx 1{,}78$;

3) $10^{1/8} = \sqrt{10^{1/4}} \approx \sqrt{1{,}78} \approx 1{,}33 \quad (q = 1{,}33)$.

Las restantes potencias las hallamos por multiplicación:

4) $10^{\frac{3}{8}} = 10^{\frac{1}{4}} \cdot 10^{\frac{1}{8}} \approx 1{,}78 \cdot 1{,}33 \approx 2{,}37$, etc.

Para los valores negativos de los exponentes conviene utilizar las magnitudes inversas $\left(\frac{1}{n}\right)$:

$$10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{1}{3{,}16} \approx 0{,}316; \; 10^{-\frac{3}{8}} = \frac{1}{10^{\frac{3}{8}}} \approx \frac{1}{2{,}37} \approx 0{,}422, \text{ etc.}$$

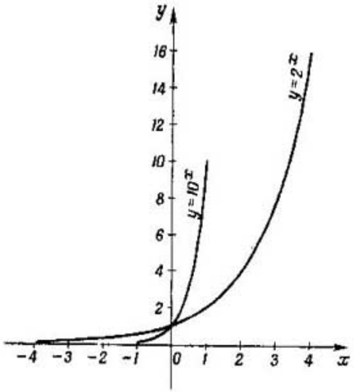

Fig. 110.

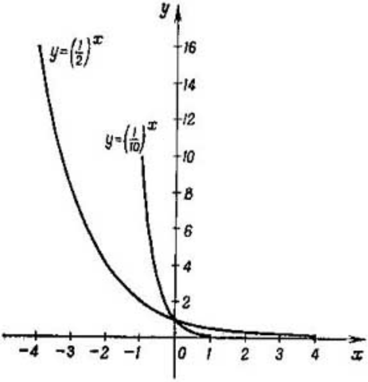

Fig. 111.

Los resultados redondeados con una cifra decimal han sido llevados a la tabla.
A base de las tablas compuestas en las figs. 110 y 111 se han construido las gráficas de estas cuatro funciones exponenciales en una misma escala.

§ 159. Propiedades de la función exponencial

Las gráficas construidas de las funciones exponenciales ilustran las siguientes propiedades de la función exponencial, las que admitimos sin demostración:

1) La función exponencial es positiva para cualquier valor del argumento (la gráfica está dispuesta encima del eje Ox).

2) Si la base $a > 1$ la función exponencial crece con el aumento del argumento x; además, $a^x < 1$ para $x < 0$ y $a^x > 1$ para $x > 0$.

3) Si la base es positiva $a < 1$, la función exponencial a^x decrece con el aumento del argumento x; además, $a^x > 1$ para $x < 0$ y $a^x < 1$ para $x > 0$.

4) Para cualquier base positiva $a^x = 1$, si $x = 0$ (todas las curvas intersecan el eje de ordenadas en un mismo punto (0; 1).

5) Si $a > 1$ la función a crece tanto más rápidamente cuanto mayor sea a (la curva $y = 10^x$ sube más rápidamente que $y = 2^x$).

6) Para un crecimiento ilimitado del argumento x, la función a^x $(a > 1)$ puede tomar valores tan grandes como se quiera.

Aunque esta propiedad no se deduce directamente del dibujo, se ve fácilmente que para

$$x = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$$

etc., la función

$$10^x = 10,\ 100,\ 1000\quad 10\,000,\ 100\,000,\ \text{etc.}$$

Esta propiedad de la función exponencial se expresa brevemente con la notación convencional: $y \to \infty$ para $x \to \infty$, donde el signo $\to \infty$ es el símbolo de crecimiento ilimitado de la variable; la frase «x tiende a infinito» significa el crecimiento ilimitado de la variable x.

7) Para valores negativos y grandes, en valor absoluto, del argumento, la función a^x $(a > 1)$ puede adquirir valores tan pequeños como se quiera, por ejemplo, cuando $x = -8$

$$10^{-8} = 0{,}00000001.$$

Esta propiedad se expresa brevemente con la notación convencional: $a^x \to 0$ cuando $x \to -\infty$ $(a > 1)$.

8) Si $a < 1$, entonces $a^x \to 0$ para $x \to \infty$ y $a^x \to \infty$ para $x \to -\infty$.

§ 160. Gráfica de la función exponencial $y = Ca^{kx}$

Como se señaló en el § 157, los procesos de crecimiento orgánico se representan por una función exponencial de tipo $y = Ca^{kx}$.

Construyamos la gráfica de esta función para valores particulares de los parámetros:

$C = 3$; $a = 2$; $k = 0{,}4$.

Luego $y = 3 \cdot 2^{0,4x}$.
Compongamos la tabla de valores en la que los valores de x forman una progresión aritmética; en tal caso los valores de la función y (calculado con la exactitud de hasta 0,1) forman una progresión geométrica:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$y = 3 \cdot 2^{0,4x}$	1	1,3	1,7	2,3	3	4,0	5,2	6,9	9	...

Los valores de la función están calculados mediante las tablas. La gráfica está representada en la fig. 112. Comparándola con la gráfica de la función $y = 2$ (fig. 110) se puede decir que el carácter general de ambas curvas es el mismo: ambas funciones son crecientes en todo el eje numérico y para ningún valor de x no adquieren valores negativos. Sin embargo, el ritmo de crecimiento de la función $y = 3 \cdot 2^{0,4x}$ retarda con respecto al ritmo de crecimiento de la función $y = 2^x$, lo que está motivado por el factor $k = 0{,}4$ en el exponente, menor que la unidad.
Mediante la gráfica de $y = 3 \cdot 2^{0,4x}$ se puede resolver la ecuación, por ejemplo:

$$3 \cdot 2^{0,4x} + \frac{4}{3}x - 1 = 0.$$

Para ello es suficiente representar la ecuación en la forma

$$3 \cdot 2^{0,4x} = -\frac{4}{3}x + 1$$

y trazar la recta $y = -\frac{4}{3}x + 1$, que corta la curva $y = 3 \cdot 2^{0,4x}$ en el punto M; la abscisa del punto M nos da el valor aproximado de la raíz de la ecuación dada, la que es igual a -1 (fig. 112).

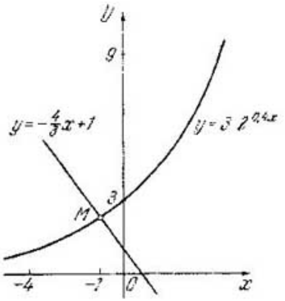

Fig. 112.

Observación. La función $y = Ca^{kx+b}$ se reduce a la forma $y = Aa^{kx}$, puesto que $Ca^{kx+b} = Ca^{kx} \cdot a^{b} = Aa^{kx}$, donde $A = C \cdot a^{b}$.

§ 161. Noción de logaritmo

Al formar la tabla de los valores de la función $y = 3 \cdot 2^{0,4x}$ (§ 160) surgió una dificultad: ¿cómo calcular por el valor dado de x, por ejemplo, para $x = 1$, el correspondiente valor de la función $y = 3 \cdot 2^{0,4 \cdot 1} = 3 \cdot 2^{2/5} = 3\sqrt[5]{2^2}$? El problema es que no existen tablas para la extracción de la raíz 5ª de un número.

Esta dificultad se puede vencer estudiando la variación del exponente en función de la magnitud de la misma potencia, pero esto requiere la introducción de un nuevo concepto matemático. Supongamos dada la igualdad $a^c = b$, donde $a > 0$, $b > 0$ y $a \neq 1$.

● DEFINICION. Se llama *logaritmo de un número b respecto de la base a* el exponente c a que hay que elevar la base a para obtener el número b. La notación $\log_a b = c$ se lee del siguiente modo: el logaritmo del número b de base a es igual a c. El número que sirve de base del logaritmo se escribe debajo del renglón.

De las igualdades	se deduce que
$2^5 = 32$,	$5 = \log_2 32$,
$10^2 = 100$,	$2 = \log_{10} 100$,
$3^4 = 81$,	$4 = \log_3 81$,

$$5^3 = 125, \qquad 3 = \log_5 125,$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8, \qquad -3 = \log_{\frac{1}{2}} 8,$$
$$a^c = b, \qquad c = \log_a b.$$

Las igualdades de ambas columnas son equivalentes: las primeras determinan las segundas igualdades y viceversa.

De la definición de logaritmo se deduce que

$$a^{\log_a b} = b.$$

Por ejemplo, $2^{\log_2 32} = 32$; $10^{\log_{10} 100} = 100$.

Examinemos la resolución de ejemplos de tipo

1) $a^x = b$; 2) $x^n = b$; 3) $a^c = x$,

donde por dos números dados hay que hallar el tercero.

Ejemplo 1. ¿A qué es igual el logaritmo del número 27 de base 9?

$\log_9 27 = x$, $9^x = 27$;

$(3^2)^x = 3^3$, $3^{2x} = 3^3$, de donde $2x = 3$; $x = \frac{3}{2}$.

Ejemplo 2. ¿Cuál es la base del logaritmo de 8 si éste es igual a 6? Tenemos que:

$\log_x 8 = 6$;

$x^6 = 8$; $x = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$.

Ejemplo 3. Hallar el número cuyo logaritmo de base 64 es igual a $-2/3$.

Designando el número buscado por x, tendremos que $\log_{64} x = -2/3$, de donde

$$64^{-\frac{2}{3}} = x, \quad \text{ó} \quad x = \frac{1}{\sqrt[3]{64^2}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{64})^2} = \frac{1}{16}; \quad x = \frac{1}{16}.$$

§ 162. Función logarítmica y su gráfica

● DEFINICION. La función inversa a la función exponencial se llama *logarítmica*.

Si $y = a^x$ ($a > 0$ y $a \neq 1$), entonces

$x = \log_a y$,

o, cambiando la designación del argumento y de la función

$y = \log_a x$.

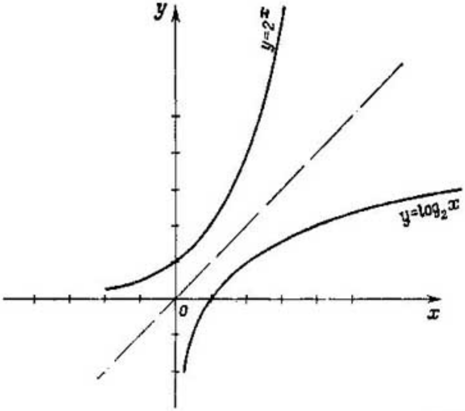

Fig. 113.

La gráfica de la función logarítmica se puede obtener por la regla general de la gráfica de la función exponencial, si se dobla la figura por la bisectriz de los ángulos de coordenadas primero y tercero.

En la fig. 113 se muestran las gráficas de la función exponencial $y = 2^x$ y de su inversa, la función $y = \log_2 x$.

§ 163. Propiedades de la función logarítmica

A cada propiedad de la función exponencial corresponde una propiedad determinada de la función logarítmica, lo que se puede apreciar de las siguientes comparaciones:

Función exponencial	*Función logarítmica*
1. La función exponencial es positiva para cualquier valor del argumento x.	1. La función logarítmica tiene valores reales sólo para valores positivos del argumento (la gráfica se encuentra a la derecha del eje de ordenadas).
2. Para $x = 0$ la función exponencial es igual a 1.	2. El logaritmo de 1 de cualquier base es 0.
3. Para valores negativos del argumento x la función $a^x < 1$	3. Los logaritmos de los números menores que 1, de base $a > 1$ son negativos; además

$(a>1)$; además $a^x \to 0$ cuando $x \to -\infty$.	$\log_a x \to -\infty$ cuando $x \to 0$.
4. La función exponencial crece y $a^x \to \infty$ cuando $x \to \infty$ $(a>1)$.	4. La función logarítmica crece; además, $\log_a x \to \infty$ cuando $x \to \infty$ $(a>1)$.

§ 164. Significado práctico de los logaritmos

Formemos la tabla de potencias enteras del número 2:

Exponente n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Potencia 2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048

Exponente n	12	13	14	15	16	17
Potencia 2^n	4 096	8 192	16 384	32 768	65 536	131 072

Exponente n	18	19	20	21
Potencia 2^n	262 144	524 288	1 048 576	2 097 152

Conviene hacer notar que en la primera y tercera líneas de la tabla se han dado los logaritmos de base 2 de los números de las segunda y cuarta líneas. Así, por ejemplo, $11 = \log_2 \cdot 2048$.

Mediante esta tabla rápidamente se puede multiplicar, dividir, elevar a potencia y extraer la raíz de los números puestos en las líneas con la notación «2^n», por ejemplo:

1) El producto de 2048 por 256 se puede sustituir por la suma de los correspondientes exponentes $(11 + 8 = 19)$, de acuerdo a este exponente buscamos el número y obtenemos:

$$2048 \cdot 256 = 524\ 288.$$

2) El cociente de 1 048 576 por 32 768 se sustituye por la sustracción de los exponentes $(20 - 15 = 5)$ y buscamos de acuerdo a esta diferencia el número (32), es decir,

$$1\ 048\ 576 : 32\ 768 = 32.$$

3) La potenciación de 128^3 puede ser realizada por multiplicación del exponente (7) correspondiente a la base por 3:

$7 \cdot 3 = 21$;

al exponente 21 corresponde el número 2 097 152:

$128^3 = 2\,097\,152$.

4) La radicación, por ejemplo, de $\sqrt{1\,048\,576}$ se reduce a la división del exponente (20) por el índice de la raíz (2):

$\sqrt{1\,048\,576} = 1\,024$.

En los cuatro casos las voluminosas operaciones con los mismos números las hemos sustituido por operaciones más simples con sus logaritmos.

§ 165. Propiedades generales de los logaritmos

1. *El logaritmo de un producto de dos o varios números positivos es igual a la suma de los logaritmos de los factores.*
Supongamos que N y N_1 son dos números positivos, luego por definición de logaritmo tendremos:

$$N = a^{\log_a N}, \quad N_1 = a^{\log_a N_1}. \tag{1}$$

Multiplicando miembro a miembro estas igualdades, obtendremos:

$$NN_1 = a^{\log_a N + \log_a N_1},$$

de donde

$$\log_a (NN_1) = \log_a N + \log_a N_1.$$

2. *El logaritmo de un cociente o una fracción es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.*
Dividamos miembro a miembro la primera de las igualdades (1) por la segunda, recordando que al dividir potencias de igual base los exponentes se restan: $\frac{N}{N_1} = a^{\log_a N - \log_a N_1}$,

de donde

$$\log_a \frac{N}{N_1} = \log_a N - \log_a N_1.$$

3. *El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.*
En efecto, si ambos miembros de la identidad $N = a^{\log_a N}$ los elevamos a la n-ésima potencia, obtendremos $N^n =$

$= a^{n \log_a N}$, de donde
$\log_a (N^n) = n \cdot \log_a N$.

4. *El logaritmo de una raíz de un número positivo es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz.*
En efecto, si se extrae la raíz n-ésima de ambos miembros de la igualdad $N = a^{\log_a N}$, tendremos que

$$\sqrt[n]{N} = \sqrt[n]{a^{\log_a N}} = a^{\frac{1}{n} \log_a N}.$$

Por lo tanto,

$$\log_a (\sqrt[n]{N}) = \frac{1}{n} \log_a N.$$

Las propiedades obtenidas se llaman generales, puesto que ellas no dependen de la base a (siempre que $a > 0$ y $a \neq 1$).

§ 166. Ejemplos de logaritmación del producto y del cociente

A base de las cuatro propiedades establecidas en el párrafo anterior, el logaritmo de cualquier expresión monomia puede expresarse por los logaritmos de los números que la componen.

Ejemplo 1. Hallar $\log x$, siendo $x = \frac{ab^3}{c\sqrt[3]{d^2}}$.

$$\log \frac{ab^3}{c\sqrt[3]{d^2}} = \log (ab^3) - \log (c\sqrt[3]{d^2}) =$$
$$= \log a + \log b^3 - (\log c + \log \sqrt[3]{d^2}) =$$
$$= \log a + 3 \log b - \left(\log c + \frac{2}{3} \log d\right) =$$
$$= \log a + 3 \log b - \log c - \frac{2}{3} \log d^{*)}.$$

Ejemplo 2.

$$\log \frac{\sqrt[5]{a(b-c)^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \log \sqrt[5]{a(b-c)^2} - \log \sqrt{a^2+b^2} =$$
$$= \frac{1}{5} \log [a(b-c)^2] - \frac{1}{2} \log (a^2+b^2) =$$
$$= \frac{1}{5} [\log a + 2 \log (b-c)] - \frac{1}{2} \log (a^2+b^2)$$

---

*) Aquí la base del logaritmo es un número positivo arbitrario, distinto de la unidad; para brevedad no la escribimos.

Cabe hacer notar que la suma y la diferencia no se exponen a logaritmación.

E j e m p l o 3. Dados: $\log_{10}2 \approx 0{,}3010$, $\log_{10}3 \approx 0{,}4771$, hallar $\log_{10}\sqrt[5]{12}$.

$$\log_{10}\sqrt[5]{12}=\frac{1}{5}\log_{10}12=\frac{1}{5}\log_{10}(2^2\cdot 3)=$$
$$=\frac{1}{5}(2\log_{10}2+\log_{10}3)\approx\frac{1}{5}(2\cdot 0{,}3010+0{,}4771)\approx 0{,}216.$$

E j e m p l o 4.

$$y=\frac{(a-b)^3\sqrt[3]{c}}{\sqrt[5]{(a+b)^2d^3}},$$

$$\log y=3\log(a-b)+\frac{1}{3}\log c-\frac{1}{5}[2\log(a+b)+3\log d].$$

§ 167. Potenciación

Si por el logaritmo de cierta expresión se busca la propia expresión, se dice que hay que realizar la potenciación, es decir, la operación inversa a la logaritmación.

E j e m p l o 1. Dado: $\log x=\log a+2\log b-\log c$, hallar x.

$$x=\frac{a\cdot b^2}{c}.$$

E j e m p l o 2.

$$\log x=\frac{1}{3}\left[\log a-\frac{1}{2}\log b+2\log(a+b)\right]+\log c;$$
$$x=c\sqrt[3]{\frac{a(a+b)^2}{\sqrt{b}}}.$$

En la potenciación nos valemos de las siguientes consideraciones: la suma de logaritmos es igual al logaritmo del producto, por ejemplo

$$\log m+\log n=\log(m\cdot n);$$

la diferencia de logaritmos es el logaritmo del cociente; el factor antepuesto al logaritmo indica que se ha tomado un logaritmo de potencia, por ejemplo:

$$3\log a=\log a^3,$$
$$\frac{1}{2}(\log a+\log b)=\log\sqrt[3]{ab}.$$

La correción de la potenciación siempre se puede verificar por la logaritmación.

§ 168. Sistema de logaritmos decimales

Los logaritmos de los números, calculados por una misma base, forman un *sistema de logaritmos*. En particular, si como base se toma el número 10, el sistema de logaritmos se llama *decimal*. Los logaritmos decimales se indican por el símbolo «lg» sin apuntar la base 10, es decir, en lugar de $\log_{10} A$ se escribe simplemente $\lg A$.
Los logaritmos decimales tienen una serie de propiedades, que los hacen extraordinariamente cómodos en los cálculos. Mencionemos estas propiedades.

Propiedad I. *El logaritmo decimal de un número entero, representado por la unidad con ceros consecutivos, es igual a tantas unidades como ceros tiene el número.* Esta propiedad es evidente, puesto que

$$
\begin{array}{ll}
10^1 = 10, & \text{es decir, } \lg 10 = 1; \\
10^2 = 100, & \text{es decir, } \lg 100 = 2; \\
10^3 = 1000, & \text{es decir, } \lg 1000 = 3; \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
10^n = \underbrace{100\dots0}_{n \text{ ceros}}, & \text{es decir, } \lg \underbrace{100\dots0}_{n \text{ ceros}} = n.
\end{array}
$$

Propiedad II. *El logaritmo de una fracción decimal propia, representada por la unidad precedida de ceros, es igual a tantas unidades negativas como ceros preceden a la unidad, considerando también cero de enteros.* En efecto,

$$
\begin{array}{ll}
10^{-1} = 0{,}1, & \text{de donde } \lg 0{,}1 = -1; \\
10^{-2} = 0{,}01, & \text{de donde } \lg 0{,}01 = -2; \\
10^{-3} = 0{,}001, & \text{de donde } \lg 0{,}001 = -3; \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
10^{-n} = \underbrace{0{,}00\dots01}_{n \text{ ceros}}, & \text{de donde } \lg \underbrace{0{,}00\dots01}_{n \text{ ceros}} = -n.
\end{array}
$$

Los logaritmos decimales de números racionales, que no son números de tipo 10^n y 10^{-n} (n es un número entero), no se pueden expresar exactamente ni por un número entero, ni por un fraccionario; éstos son números irracionales.

Vamos a demostrar, por ejemplo, que lg 2 no puede ser igual al número fraccionario $\frac{p}{q}$, donde p y q son números enteros positivos.
Si suponemos que $\lg 2 = \frac{p}{q}$, tendremos que tener la igualdad $10^{\frac{p}{q}} = 2$, ó $10^p = 2^q$. Esta igualdad no es posible, puesto que su primer miembro 10^p es un número representado por la unidad con p ceros, y está compuesto de los factores 2 y 5, repetidos p veces $[10^p = (2 \cdot 5)^p = 2^p \cdot 5^p]$; el segundo miembro 2^q no puede dar tal descomposición, por lo tanto, la suposición de que lg 2 es un número fraccionario no es cierta.
Sin embargo, se puede calcular aproximadamente lg 2, así como el logaritmo de cualquier otro número con cualquier grado de precisión, es decir, con cualquier número de cifras decimales. En el siguiente párrafo se dará un ejemplo de este cálculo. Aquí damos el modo de estimar aproximadamente el logaritmo, es decir, el modo de hallar entre qué números enteros está comprendido.
Supongamos que se quiera hallar lg 275,6; escribimos la desigualdad

$$100 < 275{,}6 < 1000;$$

luego

$$\lg 100 < \lg 275{,}6 < \lg 1000,$$

ó $2 < \lg 275{,}6 < 3$, de donde

$\lg 275{,}6 = 2 +$ una fracción propia positiva.

DEFINICIÓN. La parte entera de un logaritmo se llama *característica*, la parte fraccionaria, *mantisa*. En las tablas de cuatro decimales de Bradis hallamos: $\lg 275{,}6 = 2{,}4402$; aquí la característica es 2 y la mantisa 0,4402.

Propiedad III. *La característica del logaritmo de un número, mayor o igual a 1, tiene tantas unidades como cifras en parte entera del número menos una.*
Al principio vamos a comprobar la veracidad del postulado enunciado en los distintos ejemplos, y luego veremos el caso general.
a) El número 32,185 tiene en la parte entera dos cifras comprendidas entre 10^1 y 10^2, es decir, $10^1 < 32{,}185 <$

$< 10^2$, pero al número mayor le corresponde un logaritmo mayor:

$\lg 10 < \lg 32{,}185 < \lg 10^2$,

ó $1 < \lg 32{,}185 < 2$,. de donde

$\lg 32{,}185 = 1 +$ una fracción propia.

La característica es igual a 1, es decir, una unidad menos que el número de cifras de la parte entera.

b) $\lg 5147{,}3 = 3 +$ una fracción propia, puesto que

$1000 < 5147{,}3 < 10\,000$,

ó $10^3 < 5147{,}3 < 10^4$, de donde

$3 < \lg 5147{,}3 < 4$.

c) Supongamos que el número A tiene en la parte entera n cifras, en tal caso tendremos la desigualdad

$10^{n-1} \leqslant A < 10^n$,

de donde $n - 1 \leqslant \lg A < n$, por lo tanto,

$$\lg A = \underbrace{n - 1}_{\text{característica}} + \underbrace{\text{una fracción propia}}_{\text{mantisa}}$$

Propiedad IV. *La característica de un logaritmo de fracción decimal propia contiene tantas unidades negativas como ceros preceden a la primera cifra significativa, considerando incluso el cero de los enteros; en este caso la mantisa es positiva.*

Ejemplo 1. La fracción 0,0475 está comprendida entre 0,01 y 0,1, es decir,

$$0{,}01 < 0{,}0475 < 0{,}1;$$
$$\lg 0{,}01 < \lg 0{,}0475 < \lg 0{,}1;$$
$$-2 < \lg 0{,}0475 < \lg -1.$$

Por lo tanto, $\lg 0{,}0475 = -2 +$ una fracción propia positiva. En este caso la característica es igual a -2. A la primera cifra significativa (4) le preceden dos ceros.

Ejemplo 2. $\lg 0{,}00054 = -4 +$ una fracción entera positiva, puesto que

$0{,}0001 < 0{,}00054 < 0{,}001$,

de donde

$\lg 0{,}0001 < \lg 0{,}00054 < \lg 0{,}001$;

$-4 < \lg 0{,}00054 < -3$.

Supongamos tener una fracción decimal propia α, a cuya primera cifra significativa preceden n ceros (considerando el cero de los enteros). En forma general, dicha fracción se puede representar así:

$$\alpha = \overbrace{0{,}000\ldots0}^{n\text{ ceros}}b_1b_2\ldots,$$

donde b_1 es la primera cifra significativa.
Tenemos la desigualdad

$$\overbrace{0{,}000\ldots0}^{n\text{ ceros}}1 \leqslant \alpha < \overbrace{0{,}000\ldots0}^{(n-1)\text{ ceros}}1$$

Por eso

$$\lg \overbrace{0{,}000\ldots0}^{n\text{ ceros}}1 \leqslant \lg\alpha < \lg \overbrace{0{,}000\ldots0}^{(n-1)\text{ ceros}}1;$$

$$-n \leqslant \lg\alpha < -(n-1).$$

El logaritmo de la fracción dada resultó comprendido entre dos números enteros negativos: $-n$ y $-(n-1)$, cuya diferencia es igual a 1, por lo tanto, éste es igual a un número menor + una fracción propia positiva:

$\lg\alpha = -n +$ una fracción propia positiva.

Así pues, la característica de $\lg\alpha$ es igual a $-n$.
Convenimos en escribir la suma algebraica de un número entero negativo y una fracción propia positiva, en forma abreviada, así:

$$-3 + 0{,}4317 = \bar{3}{,}4317;$$
$$-5 + 0{,}8205 = \bar{5}{,}8205$$

El signo menos de encima indica que sólo la parte entera es negativa, siendo la mantisa positiva (se lee: cinco bajo el signo menos). En esta forma se admite escribir los logaritmos de los números menores que 1; esta forma de logaritmo se llama *artificiosa.*
Todo logaritmo negativo se puede reducir a la forma artificiosa, por ejemplo:

a) $-2{,}1543 = -2 - 0{,}1543 = (-2-1) +$
$+ (1 - 0{,}1543) = -3 + 0{,}8457 = \bar{3}{,}8457;$
b) $-1{,}0647 = (-1-1) + (1 - 0{,}0647) = -2 +$
$+ 0{,}9353 = \bar{2}{,}9353;$
c) $-4{,}2564 = \bar{5}{,}7436.$

R e g l a. Para convertir un logaritmo negativo en la forma artificiosa se procede del siguiente modo: se aumenta en una unidad negativa la característica y sobre el resultado se pone el signo menos, todas las cifras de la mantisa se restan de 9, y la última, de 10.

Propiedad V. *Al multiplicar o dividir un número por 10, 100, 1000, etc. la mantisa de su logaritmo permanece invariable, y la característica se aumenta o se disminuye respectivamente en una, dos, tres, etc. unidades.*

Hay que señalar que los números 10, 100, 1000, . . . son potencias enteras positivas de 10, es decir, números de tipo 10^n.

a) Tenemos: $\lg (A \cdot 10^n) = \lg A + \lg 10^n = \lg A + n$.

Debido al producto del número A por 10^n el logaritmo aumentó n unidades, por lo tanto, la parte fraccionaria, la mantisa, quedó invariable.

b) $\lg \left(\frac{A}{10^n}\right) = \lg A - \lg 10^n = \lg A - n$;

el logaritmo disminuyó n unidades, por lo tanto, la mantisa permanece igual. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\lg 38{,}1 &= 1{,}5809;\\
\lg 381 &= 2{,}5809;\\
\lg 3810 &= 3{,}5809;\\
\lg 38\,100 &= 4{,}5809;\\
\lg 3{,}81 &= 0{,}5809;\\
\lg 0{,}381 &= \bar{1}{,}5809;\\
\lg 0{,}000381 &= \bar{4}{,}5809.
\end{aligned}$$

Corolario. 1) *La característica de un logaritmo depende solamente de la situación de la coma en el número dado, pero no depende de las cifras que representan este número.*

Los logaritmos de números tales como 278; 598,5; 110,7; 705,48; 142,845 tienen una misma característica, igual a 2.

2) *La mantisa no depende de la situación de la coma, sino solamente de las cifras significativas y su disposición mutua.*

Las mantisas de los logaritmos de números tales como 23,4; 2,34; 0,234; 2340, etc., son iguales.

§ 169. Cálculo de logaritmo

En el § 168 se demostró que lg 2 es un número irracional. Veamos el método que permite calcular el valor aproximado de lg 2 con el grado de precisión dado, por ejemplo, con la exactitud de hasta 0,001.

El método se reduce a lo siguiente: se hallan dos potencias enteras positivas de 10, cuyos exponentes se diferencian en 1; entre ellas debe estar comprendida la potencia del número 2 con un exponente suficientemente grande En otras palabras, hay que resolver la desigualdad de tipo

$$10^m < 2^p < 10^{m+1}, \tag{1}$$

donde m y p son los números enteros positivos buscados.

Si $p \geqslant 1000$, se logrará la exactitud requerida. En realidad, por logaritmación de la desigualdad (1) obtendremos:

$$m < p \lg 2 < m+1, \text{ ó } \frac{m}{p} < \lg 2 < \frac{m+1}{p}.$$

Las dos fracciones $\frac{m}{p}$ y $\frac{m+1}{p}$, entre las que está comprendido lg 2, se diferencian entre sí en la magnitud $\frac{1}{p}$. Cuando $p \geqslant 1000$ se alcanzará la precisión requerida.

Pasemos al cálculo, para lo cual utilizamos la tabla de cuadrados como medio auxiliar. Tendremos

$$\begin{aligned}
2^5 &= 32;\\
2^{10} &= 32^2 = 1024 = 1{,}024\cdot 10^3;\\
2^{20} &= (1{,}024\cdot 10^3)^2 \approx 1{,}04\cdot 10^6;\\
2^{40} &\approx (1{,}04\cdot 10^6)^2 \approx 1{,}08\cdot 10^{12};\\
2^{80} &\approx (1{,}08\cdot 10^{12})^2 \approx 1{,}16\cdot 10^{24};\\
2^{160} &\approx (1{,}16\cdot 10^{24})^2 \approx 1{,}34\cdot 10^{48};\\
2^{320} &\approx (1{,}34\cdot 10^{48})^2 \approx 1{,}79\cdot 10^{96};\\
2^{640} &\approx (1{,}79\cdot 10^{96})^2 \approx 3{,}20\cdot 10^{192};\\
2^{1280} &\approx (3{,}20\cdot 10^{192})^2 \approx 1{,}02\cdot 10^{385}.
\end{aligned}$$

Puesto que $1{,}02\cdot 10^{385} > 10^{385}$, pero $1{,}02\cdot 10^{385} < 10^{386}$, entonces tendremos la desigualdad

$$10^{385} < 2^{1280} < 10^{386}.$$

Procediendo a la logaritmación de la doble desigualdad, obtendremos:

$$385 < 1280 \lg 2 < 386;$$

$$\frac{385}{1\,280} < \lg 2 < \frac{386}{1\,280};$$

$$0{,}3001 < \lg 2 < 0{,}3017,$$

o bien

$$0{,}300 < \lg 2 < 0{,}302.$$

Tomando la semisuma de los límites superior e inferior, tendremos:

$$\lg 2 \approx 0{,}301.$$

Un cálculo más exacto nos dará:

$$\lg 2 = 0{,}3010299956\ \ldots$$

Las primeras tres cifras decimales las calculamos con completa exactitud. Existen otros métodos de cálculo de logaritmos más convenientes, sólo que ellos requieren conocimientos de matemática superior.

§ 170. Operaciones con logaritmos

Antes de pasar a calcular utilizando logaritmos hay que estudiar las cuatro operaciones aritméticas con logaritmos, puesto que la técnica de la logaritmación se reduce fundamentalmente a esto. Veamos cada operación por separado.

1. Suma.

Ejemplo 1.

$$\begin{array}{r} 2{,}1742 \\ +\ \bar{1}{,}5736 \\ \hline 1{,}7478 \end{array}$$

Ejemplo 2.

$$\begin{array}{r} \bar{3}{,}4832 \\ +\ \bar{1}{,}6758 \\ \hline \bar{3}{,}1590 \end{array}$$

La suma se realiza por las reglas de la suma de fracciones decimales con la diferencia de que las características se suman algebraicamente, y al resultado se suman unidades enteras obtenidas de la suma de las fracciones decimales de las mantisas.

2. Resta. Examinemos algunos casos.

Ejemplo 1.

$$\begin{array}{r} 2{,}4845 \\ -\ 3{,}1796 \\ \hline \bar{1}{,}3049 \end{array}$$

De la mantisa del minuendo (0,4845) restamos la mantisa del sustraendo (0,1796), obrendremos como resultado 0,3049, a continuación de la característica del minuendo (2) restamos la característica del sustraendo (3), obtendremos -1; ambos resultados de la sustracción las unimos en la inscripción $\bar{1},3049$.

E j e m p l o 2.

$$\begin{array}{r} 1{,}3516 \\ -\ \bar{2}{,}6432 \\ \hline 2{,}7084 \end{array}$$

Al restar las mantisas hemos tenido que tomar una unidad de la característica del minuendo, es decir, de 1,3561 se restó 0,6432, obteniéndose 0,7084; restando las características obtendremos $0 - (-2) = 2$.

E j e m p l o 3.

$$\begin{array}{r} \bar{3}{,}2534 \\ -\ \bar{5}{,}6718 \\ \hline 1{,}5816 \end{array}$$

A la característica del minuendo (-3) la representamos mentalmente como una suma ($-4 + 1$). la unidad positiva la unimos a la mantisa y de 1,2534 restamos la mantisa del sustraendo 0,6718, obtendremos 0,5816. A continuación restamos las características: $-4 - (-5) = 1$; siendo el resultado final 1,5816.

3. Multiplicación. Al multiplicar un logaritmo de característica negativa por un número natural se multiplica por separado la mantisa y la característica:

$$\bar{2},1853 \cdot 4 = (-\bar{2} + 0{,}1853) \cdot 4 = -8 + 0{,}7412 = \bar{8},7412.$$

Generalmente tal producto se realiza sin representar el logaritmo en forma de una suma algebraica, por ejemplo:

$$\bar{1},8916 \cdot 5 = \bar{1},4580.$$

Después de multiplicar las fracciones decimales de la mantisa por 5 se obtuvo 4 unidades enteras positivas, las que fácilmente se suman mentalmente a 5 unidades negativas obtenidas del producto de -1 por 5: $-5 + 4 = -1$; el resultado final será $\bar{1},4580$.

Si un logaritmo de característica negativa y mantisa positiva se multiplica por una fracción decimal positiva, conviene transformar el logaritmo de la forma artificiosa en la natural, multiplicar las dos fracciones decimales y convertir el resultado en la forma artificiosa.

E j e m p l o 1.

$\overline{1},1526 \cdot 0,23 = (-1 + 0,1526) \cdot 0,23 = -0,8474 \cdot 0,23 =$
$= -0,1949 = \overline{1},8051.$

E j e m p l o 2.
$\overline{3},6418 \cdot (-0,47) = -2,3582 \cdot (-0,47) = 1,1084.$

4. **División.** Al dividir un logaritmo de característica negativa por un número natural, hay que distinguir dos casos:
a) cuando la característica se divide enteramente, b) cuando la característica no se divide enteramente.

E j e m p l o 1. $\overline{2},1856 : 2 = \overline{1},0928.$
Aquí se dividió a la vez por 2 la característica y la mantisa.

E j e m p l o 2.

$\overline{2},4365 : 5 = (-2 + 0,4365) : 5 = (-5 + 3,4365) : 5 =$

$= -1 + 0,6873 = \overline{1},6873.$

Agregamos a la característica tantas unidades negativas (—3) a fin de obtener el número entero próximo que se divida enteramente por el divisor; al mismo tiempo agregamos a la mantisa la misma cantidad de unidades positivas y dividimos por separado los enteros obtenidos y la parte fraccionaria.

E j e m p l o 3. $\overline{5},4724 : 4 = \overline{2},8681.$

A la característica se le agregó — 3 y a la mantisa +3; con facilidad se divide mentalmente.

E j e m p l o 4.

$\overline{3},1832 : 0,658 = -2,8168 : 0,658 = -4,2809 = \overline{5},7191.$

E j e m p l o 5.
$\overline{1},6405 : (-1,3) = -0,3595 : (-1,3) = 0,3595 : 1,3 =$
$= 0,2765.$

§ 171. Logaritmo complementario

Como se sabe, los dos números N y $\frac{1}{N}$ se llaman *mutuamente inversos*, su producto es igual a 1.

● DEFINICIÓN. Se llama *logaritmo complementario del número* N el logaritmo del número $\frac{1}{N}$:

$\lg N$ ad. $= \lg \frac{1}{N}$.

Puesto que

$\lg \frac{1}{N} = -\lg N$,

luego

$\lg N$ ad. $= -\lg N$.

El logaritmo complementario del número N es el logaritmo del mismo número tomado con signo contrario; por ejemplo:

a) $\lg 17{,}18$ ad. $= -\lg 17{,}18 = -1{,}2350 = \bar{2}{,}7650$;

b) $\lg 0{,}0085$ ad. $= -\lg 0{,}0085 = -\bar{3}{,}9294 =$
$= -(-3 + 1 - 1 + 0{,}9294) = -(-2-0{,}0706) =$
$= 2{,}0706$.

Supongamos que $\lg N = c + m$, donde c es la característica y m la mantisa, en tal caso,
$\lg N$ ad. $= -\lg N = -c - m = -c - 1 - m + 1 =$
$= -(c + 1) + (1 - m)$.

Para hallar el logaritmo complementario según el logaritmo de N hay que agregar a la característica la unidad y tomar el resultado con signo contrario; la mantisa se resta de 1.

Ejemplos.

1) $-\lg 0{,}0672 = \lg 0{,}0672$ ad. $= -\bar{2}{,}8274 = 1{,}1726$;

2) $-\lg 13{,}8 = -1{,}1399 = \bar{2}{,}8601$;

3) $-\frac{2}{3}\lg 0{,}825 = -\frac{2}{3}\cdot\bar{1}{,}9165 = -\frac{\bar{1}{,}8330}{3} =$
$= -\bar{1}{,}9443 = 0{,}0557$.

§ 172. Tablas de logaritmos

Las tablas de Bradis dan los valores aproximados de las mantisas de los logaritmos de todos los números enteros de 1 a 9999 con cuatro cifras decimales exactas; la característica del logaritmo se pone a base de las propiedades señaladas de los logaritmos decimales. Puesto que la mantisa del logaritmo no depende del lugar de la coma en la representación del número, sino depende sólo de la sucesión de cifras significativas del número dado, estas tablas se pueden utilizar para buscar las mantisas de los números fraccionarios. A continuación se da una parte de la tabla.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5

Supongamos que se quiere hallar lg 65,4. Las dos primeras cifras del número (65) las tomamos de la primera columna de la izquierda, marcada encima con la letra «*N*», y corremos la vista desde el número 65 horizontalmente hasta la columna vertical donde se encuentra la tercera cifra significativa escrita encima (o debajo), es decir, la cifra 4. En la intersección de la vertical y la horizontal obtendremos la mantisa 8156, que designa las decimales, es decir, 0,8156, por lo tanto, $\lg 65{,}4 = 1{,}8156$. Las mantisas de los logaritmos de los números de dos cifras y de tres cifras, que terminan con ceros, se obtienen de la columna indicada encima por el cero; por ejemplo, la mantisa del logaritmo de 68 ó de 680 es igual a 0,8325.

Para hallar el logaritmo de un número de cuatro cifras, por ejemplo, el lg 6754, determinamos antes que nada la característica, es decir, escribimos $\lg 6754 = 3, \ldots$; las cifras desconocidas de la mantisa las hallamos del siguiente modo: como se explicó antes, primero encontramos la mantisa del logaritmo del número de tres cifras 675, es decir, el representado por las tres primeras cifras del número dado; obtenemos 0,8293; desde esta mantisa corremos la vista hacia la derecha por la línea horizontal, intersecando la raya vertical doble y continuando hasta encontrar la columna de la parte derecha de la tabla indicada encima con la cifra 4; en la intersección hallamos el número 3 (3 diezmilésimas); ésta es una corrección a la cuarta cifra significativa 4, que se suma con facilidad mentalmente a la mantisa ya hallada 0,8293; finalmente obtenemos: $\lg 6754 = 3{,}8296$.

§ 173. Tablas de antilogaritmos

El número correspondiente al logaritmo dado se llama *antilogaritmo*. Para hallar el número según su logaritmo dado se utilizan las tablas de antilogaritmos. El modo de su empleo no se diferencia en nada de las tablas de logaritmos descriptas antes. Si $\lg x = \bar{1}{,}5245$, hallaremos x (antilogaritmo) del siguiente modo: dejando de lado por ahora la característica, tomamos las dos primeras cifras de la mantisa, es decir, 52, de la primera columna de izquierda, indicada con la letra m (mantisa), y corremos la vista por esta horizontal hasta encontrarnos con la columna señalada encima con la tercera cifra de la mantisa 4; en su intersección hallamos el número 3342; para la cuarta cifra de la mantisa, 5, hallamos la corrección 4, que se encuentra en la intersección de la misma horizontal con aquélla de las columnas extremas de derecha, que está encabezada por la cifra 5; sumamos esta corrección (error) al número encontrado 3342 y obtendremos $x = 0{,}3346$. A la primera cifra significativa le antecede un cero, puesto que la característica es igual a $\bar{1}$.

§ 174. Ejemplos de cálculos con uso de logaritmos

Ejemplo 1. $x = \sqrt[3]{\dfrac{783\sqrt{41{,}3}}{0{,}815^2 \cdot 52{,}6}}$.

$$\lg x = \frac{1}{3}\left[\lg 783 + \frac{1}{2}\lg 41{,}3 - (2\lg 0{,}815 + \lg 52{,}6)\right],$$

o bien

$$\lg x = \frac{1}{3}\left(\lg 783 + \frac{1}{2}\lg 41{,}3 + 2\lg 0{,}815\ \text{ad.} + \lg 52{,}6\ \text{ad.}\right).$$

Cálculos preliminares

$$\frac{1}{2}\lg 41{,}3 = \frac{1{,}6160}{2} = 0{,}8080;$$

$$\lg 0{,}815\ \text{ad.} = -(\bar{1}{,}9112) = 0{,}0888;$$

$$\lg 52{,}6\ \text{ad.} = -1{,}7210 = \bar{2}{,}2790;$$

Cálculos finales

$$\begin{aligned} \lg 783 &= 2{,}8938 \\ \tfrac{1}{2}\lg 41{,}3 &= 0{,}8080 \\ 2\lg 0{,}815\ \text{ad.} &= 0{,}1776 \\ \lg 52{,}6\ \text{ad.} &= \bar{2}{,}2790 \\ \hline & \ 2{,}1584 \end{aligned}$$

$$\lg x = \frac{2{,}1584}{3} = 0{,}7195;$$

$$x = 5{,}242;$$

$$x \approx 5{,}24.$$

Ejemplo 2.

$$y=\sqrt[5]{0,178\cdot\sqrt[3]{0,4963}+4,727\sqrt{0,00283}}.$$

Calculamos cada sumando subradical por separado:

1) $N=0,178\sqrt[3]{0,4963}$;

$$\lg N=\lg 0,178+\frac{1}{3}\lg 0,4963;$$

$$\lg 0,178=\bar{1},2504$$

$$\frac{1}{3}\lg 0,4963=\frac{\bar{1},6958}{3}=\bar{1},8986$$

$$\lg N=\bar{1},1490$$

$$N=0,1409;$$

2) $M=4,727\cdot\sqrt{0,00283}$;

$$\lg M=\lg 4,727+\frac{1}{2}\lg 0,00283;$$

$$\frac{1}{2}\lg 0,00283=\frac{\bar{3},4518}{2}=\bar{2},7259$$

$$\lg 4,727=0,6745$$

$$\lg M=\bar{1},4004$$

$$M=0,2514;$$

3)
$$\begin{array}{r} 0,1409 \\ +\;0,2514 \\ \hline 0,3923; \end{array}$$

4) $y=\sqrt[5]{0,3923}$;

$$\lg y=\frac{\lg 0,3923}{5}=\frac{\bar{1},5936}{5}=\bar{1},9187;$$

$y=0,8292$; $y\approx 0,829$.

Ejemplo 3.

$$Z=\frac{(6,429)^{-0,32}\cdot(0,819)^{\frac{1}{3}}}{(4,27)^{-\frac{3}{5}}\cdot(0,00318)^{0,48}}$$

Representamos dicha expresión en la siguiente forma:

$$Z=\frac{(4,27)^{\frac{3}{5}}\cdot(0,819)^{\frac{1}{3}}}{(6,429)^{0,32}\cdot(0,00318)^{0,48}}.$$

Pasamos a la logaritmación:

$$\lg Z = \frac{3}{5}\lg 4{,}27 + \frac{1}{3}\lg 0{,}819 + 0{,}32\lg 6{,}429 \text{ ad.} +$$
$$+ 0{,}48\lg 0{,}00318 \text{ ad.}$$

Cálculos auxiliares

1) $0{,}32\lg 6{,}429 \text{ ad.} =$
$= -0{,}32\cdot 0{,}8081 =$
$= -0{,}2586 = \bar{1}{,}7414;$

2) $0{,}48\lg 0{,}00318 \text{ ad.} =$
$= -0{,}48\cdot(\bar{3}{,}5024) =$
$= -0{,}48\cdot(-2{,}4976) =$
$= 1{,}1988;$

3) $\frac{3}{5}\lg 4{,}27 = \frac{3\cdot 0{,}6304}{5} =$
$= \frac{1{,}8912}{5} = 0{,}3782;$

Cálculos finales

$$\frac{3}{5}\lg 4{,}27 = 0{,}3782$$
$$\frac{1}{3}\lg 0{,}819 = \frac{\bar{1}{,}9133}{3} = \bar{1}{,}9711$$
$$0{,}32\lg 6{,}429 \text{ ad.} = \bar{1}{,}7414$$
$$0{,}48\lg 0{,}00318 \text{ ad.} = 1{,}1988$$
$$\lg Z = 1{,}2895$$
$$Z = 19{,}47;$$
$$Z \approx 19{,}5.$$

§ 175. Módulo de paso de un sistema de logaritmos a otro

Planteamos la siguiente cuestión: ¿cómo hallar el logaritmo de un número positivo N de base b ($b > 0$ y $b \neq 1$), si se conoce el logaritmo de N de base a ($a > 0$, $a \neq 1$)?
Para responder a la pregunta planteada hay que saber hallar un *factor* de paso con el cual se obtiene un nuevo sistema de logaritmos.
Supongamos que $\log_a N = m$ (m es un número conocido). Hay que hallar el $\log_b N = x$ (x desconocido).
Siendo así

$$a^m = N,\ b^x = N,$$

de donde

$$a^m = b^x.$$

Tomamos logaritmos de ambos miembros de esta igualdad de base a:

$$m\log_a a = x\log_a b,$$

o bien

$$m = x\log_a b,$$
$$x = m\cdot\frac{1}{\log_a b}.$$

Sustituyendo x y m por sus valores, obtendremos

$$\log_b N = \log_a N \cdot \frac{1}{\log_a b}.$$

El factor $\frac{1}{\log_a b}$ se llama *módulo de paso* de un sistema de logaritmos de base a a otro sistema de base b.

Ejemplos.

1) $\log_5 2 = \lg 2 \cdot \frac{1}{\lg 5} = 0{,}3010 \cdot \frac{1}{0{,}6990} \approx 0{,}431.$

2) $\log_2 7 = \lg 7 \cdot \frac{1}{\lg 2} = 0{,}8451 \cdot 3{,}322 \approx 2{,}807.$

3) $\log_{\sqrt{a}} N = \log_a N \cdot \frac{1}{\log_a \sqrt{a}} = 2 \log_a N.$

Supongamos que a y b son dos números positivos distintos de 1, en tal caso se obtendrá la identidad

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1,$$

puesto que de la igualdad $a^{\log_a b} = b$ mediante su logáritmación de base b hallamos:

$$\log_a b \cdot \log_b a = \log_b b = 1.$$

Observación. Además de los logaritmos decimales, en matemáticas y sus distintas aplicaciones se utilizan ampliamente los logaritmos naturales (también llamados neperianos) la base de los cuales es el número irracional e, $e \approx 2{,}718$. Los logaritmos naturales se indican con «ln» sin indicar la base, por ejemplo

$$\ln 2 = \lg 2 \cdot \frac{1}{\lg e} \approx 0{,}3010 \frac{1}{\lg 2{,}718} = 0{,}3010 \cdot 2{,}303 \approx 0{,}6932.$$

Así, pues, el logaritmo natural de un número es aproximadamente 2,3 veces mayor que el logaritmo decimal del mismo número.

Veamos casos particulares del módulo de paso:

1) si la nueva base $b = \frac{1}{a}$, tendremos que $M = \frac{1}{\log_a \frac{1}{a}} = \frac{1}{-1} = -1$, por lo tanto, $\log_{\frac{1}{a}} N = -\log_a N$;

2) si $b = a^2$, $M = \frac{1}{\log_a a^2} = \frac{1}{2}$, $\log_{a^2} N = \frac{1}{2} \log_a N$;

3) si $b=\sqrt{a}$, $M=\frac{1}{\log_a \sqrt{a}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$, $\log_{\sqrt{a}} N=2\log_a N$;

4) si $b=a^n$, $M=\frac{1}{\log_a a^n}=\frac{1}{n}$.

De este modo,

$$\log_{a^n} N=\frac{1}{n}\log_a N.$$

El caso 4) generaliza las tres anteriores: para $n=-1$ tendremos el caso 1), cuando $n=2$ tendremos el caso 2), si $n=\frac{1}{2}$ tendremos el caso 3).

Ejemplo. Resolver la ecuación

$$\log_2 x+\log_{\frac{1}{2}} x+\log_4 x+\log_{\sqrt{2}} x=\frac{15}{2}.$$

Reducimos todos los logaritmos a la base 2:

$$\log_2 x-\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+2\log_2 x=\frac{15}{2},$$

$$\frac{5}{2}\log_2 x=\frac{15}{2},$$

$$\log_2 x=3,\ x=8.$$

§ 176. Ecuaciones exponenciales

Veamos las ecuaciones con la incógnita en el exponente. Generalmente estas ecuaciones se llaman *exponenciales*, por ejemplo:

$$\sqrt{3^x}=\frac{1}{\sqrt{27}};\ 5^{x+1}+5^x=750;\ 9^{x+1}-3^{x+3}=486.$$

Existen dos métodos fundamentales de resolución de las ecuaciones exponenciales.

1. Metodo de reducción a una base común. Si ambos miembros de una ecuación se puede representar como potencias de base a, donde a es un número positivo, distinto de 1, de la igualdad de las potencias y las bases se deduce que los exponentes deben ser iguales. Igualando los exponentes obtendremos un tipo de ecuación generalmente conocido.

Ejemplo 1. $\sqrt{3^x}=\frac{1}{\sqrt{27}}$.

Tendremos:

$$3^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{3\sqrt{3}};\quad 3^{\frac{x}{2}}=3^{-\frac{3}{2}},$$

de donde

$$\frac{x}{2}=-\frac{3}{2};\quad x=-3.$$

<u>Comprobación.</u>

$$\sqrt{3^{-3}}=3^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{27}}.$$

E j e m p l o 2. $5^{x+1}+5^{x}=750$.
Puesto que $5^{x+1}=5^{x}\cdot 5$ en el primer miembro se puede sacar fuera de paréntesis el factor común 5^{x}, por lo que obtendremos:

$$5^{x}\cdot(5+1)=750;\quad 5^{x}\cdot 6=750,\quad 5^{x}=125,$$

o bien

$$5^{x}=5^{3};\quad x=3.$$

<u>Comprobación.</u>

$$5^{3+1}+5^{3}=625+125=750;$$

$$750=750.$$

E j e m p l o 3. $\sqrt{9^{x(x+1)-\frac{1}{2}}}=\sqrt[4]{3}$.

Representemos ambos miembros de la ecuación como potencias de 3:

$$9^{\frac{1}{2}\left[x(x-1)-\frac{1}{2}\right]}=3^{\frac{1}{4}};$$

$$(3^{2})^{\frac{1}{2}\left[x(x-1)-\frac{1}{2}\right]}=3^{\frac{1}{4}};$$

$$3^{x(x-1)-\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{4}},$$

de donde

$$x(x-1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{4};$$

$$x^{2}-x-\frac{3}{4}=0.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, hallamos

$$x_1=-\frac{1}{2};\quad x_2=\frac{3}{2}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación dada comprobamos que ambas raíces satisfacen la misma.

2. Método de logaritmación de ambos miembros de una ecuación.

E j e m p l o 4. $2{,}3^x = 1{,}5^{x+1}$.
Aquí es más conveniente la logaritmación de ambos miembros de la ecuación, después de lo cual obtenemos

$$x \lg 2{,}3 = (x+1) \lg 1{,}5;$$
$$x \lg 2{,}3 - x \lg 1{,}5 = \lg 1{,}5;$$
$$x (\lg 2{,}3 - \lg 1{,}5) = \lg 1{,}5;$$
$$x = \frac{\lg 1{,}5}{\lg 2{,}3 - \lg 1{,}5} \approx \frac{0{,}1761}{0{,}1856} \approx 0{,}95.$$

En ciertos casos, al resolver una ecuación exponencial es conveniente introducir una incógnita auxiliar.

E j e m p l o 5. $4^{x-1} - 2^{x+3} + 28 = 0$.
Tendremos

$$(2^2)^{x-1} - 2^{x+3} + 28 = 0,$$

o bien

$$2^{2x} \cdot 2^{-2} - 2^x \cdot 2^3 + 28 = 0;$$

supongamos que $2^x = z$; en tal caso $2^{2x} = z^2$; la ecuación toma la forma

$$\frac{z^2}{4} - 8z + 28 = 0, \text{ ó } z^2 - 32z + 112 = 0$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, obtendremos
$z_1 = 4$; $z_2 = 28$,

de donde

$$2^x = 4; \qquad x_1 = 2;$$
$$2^x = 28; \; x \lg 2 = \lg 28;$$
$$x_2 = \frac{\lg 28}{\lg 2} \approx 4{,}81.$$

Ambas raíces satisfacen la ecuación dada.

E j e m p l o 6. Resolver el sistema

$$2^x \cdot 3^y = 12,$$
$$2^y \cdot 3^x = 18.$$

Dividimos miembro a miembro la primera ecuación por la segunda:

$\frac{2^x \cdot 3^y}{2^y \cdot 3^x}=\frac{2}{3}$, ó $2^{x-y} \cdot 3^{y-x}=\frac{2}{3}$, pero $3^{y-x}=\frac{1}{3^{x-y}}$,

y por eso $\frac{2^{x-y}}{3^{x-y}}=\frac{2}{3}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y}=\left(\frac{2}{3}\right)^1$, por lo tanto,

$x-y=1$, ó $y=x-1$.

Ahora la primera ecuación del sistema toma la forma

$2^x \cdot 3^{x-1}=12$, ó $6^x=36$,

de donde $x=2$, $y=1$.

§ 177. Ecuaciones logarítmicas

● DEFINICIÓN. La ecuación con la incógnita bajo el signo de logaritmo se llama *logarítmica.*

Ejemplos de tales ecuaciones son:

1) $\lg(x+6)-\frac{1}{2}\lg(2x-3)=2-\lg 25$,

2) $\sqrt{\lg x}=\lg\sqrt{x}$,

3) $\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$.

El método fundamental de resolución de las ecuaciones logarítmicas es la potenciación, a base de la que se obtiene comúnmente una ecuación algebraica. Las raíces halladas se deben verificar, ya que pueden aparecer raíces impropias.

Ejemplo 1. $\lg(x+6)-\frac{1}{2}\lg(2x-3)=2-\lg 25$.

Es evidente que

$$\lg(x+6)-\frac{1}{2}\lg(2x-3)=\lg\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}}$$

(el primer miembro de la ecuación),

$2-\lg 25=\lg 100-\lg 25=\lg 4$

(el segundo miembro de la ecuación). De este modo

$$\lg\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}}=\lg 4.$$

Pero a logaritmos iguales, tomados de una misma base, corresponden números iguales. Por lo tanto, $\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}}=4$.

Resolviendo esta ecuación irracional hallamos dos raíces: $x_1=6$; $x_2=14$. Verificación de la raíz $x_1=6$: $\lg 12 - \frac{1}{2}\lg 9=\lg 4$; $\lg\frac{12}{3}=\lg 4$ (es cierta).

Verificación de la raíz $x_2=14$; $\lg 20-\frac{1}{2}\lg 25=\lg 4$, $\lg\frac{20}{5}=\lg 4$ (es cierta).

Ejemplo 2. $\sqrt{\lg x}=\lg\sqrt{x}$.
Antes de hallar las raíces de esta ecuación hallamos el campo de valores admisibles de x: ambos miembros de la ecuación tienen sentido para $\lg x\geqslant 0$, $x\geqslant 1$; teniendo en cuenta que $\lg\sqrt{x}=\frac{1}{2}\lg x$, tendremos $\sqrt{\lg x}=\frac{1}{2}\lg x$; elevamos ambos miembros al cuadrado:

$\lg x=\frac{1}{4}\lg^2 x$, ó $\lg x(\lg x-4)=0$.

Por lo tanto,

$\lg x = 0$, $x_1=1$.
$\lg x = 4$, $x_2=10^4$.

Compruébese que ambas raíces satisfacen la ecuación dada.

Ejemplo 3. $\lg(x^{\lg x})=1$. Está claro que $x>0$ y $x\neq 1$.
Puesto que $\lg(x^{\lg x})=\lg x\cdot\lg x=\lg^2 x$, la ecuación toma la forma: $\lg^2 x=1$; $\lg x=\pm 1$; $x_1=0,1$; $x_2=10$; ambas raíces son ciertas.

Ejemplo 4. $2\lg\lg x=\lg(7-2\lg x)-\lg 5$.
Si se pone $\lg x=t$, tendremos que $2\lg t=\lg(7-2t)-\lg 5$, ó $\lg t^2=\lg\frac{7-2t}{5}$, de donde $t^2=\frac{7-2t}{5}$, $t_1=-7/5$ (no sirve, puesto que no existe $\lg t$), $t_2=1$; $x=10$. Se comprueba fácilmente que $x=10$ satisface la ecuación dada.

Ejemplo 5. Resolver el sistema $xy=a^2$, $\lg^2 x+\lg^2 y=\frac{5}{2}\lg^2 a^2$.
Es evidente que los valores buscados de las incógnitas deben ser números positivos: $x>0$; $y>0$.
Pasamos a la logaritmación de la primera ecuación: $\lg x+\lg y=2\lg a$. Suponemos que $\lg x=u$; $\lg y=v$, en tal

caso tendremos el sistema

$$\begin{cases} u + v = 2 \lg a, \\ u^2 + v^2 = \frac{5}{2} (2 \lg a)^2, \end{cases}$$

o bien

$$\begin{cases} u + v = 2m, \\ u^2 + v^3 = 10 m^2, \end{cases}$$

donde $m = \lg a$.

Resolviendo este sistema, hallamos:

$u_1 = -m = -\lg a$; $u_2 = 3 \lg a$;

$v_1 = 3m = 3 \lg a$; $v_2 = -\lg a$,

de donde $\lg x_1 = -\lg a$; $x_1 = \frac{1}{a}$;

$\lg y_1 = 3 \lg a$; $y_1 = a^3$.

Análogamente hallamos: $x_2 = a^3$, $y_2 = \frac{1}{a}$.

Verificación de la solución $x_1 = \frac{1}{a}$; $y_1 = a^3$;

$\frac{1}{a} \cdot a^3 = a^2$,

$(-\lg a)^2 + (3 \lg a)^2 = 10 \lg^2 a$.

§ 178. Resolución de desigualdades exponenciales y logarítmicas elementales

Las desigualdades que contienen la incógnita en el exponente o bajo el signo de logaritmo se llaman respectivamente *desigualdades exponenciales* o *logarítmicas*. En la mayoría de los casos estas desigualdades se reducen a algebraicas.

Ejemplo 1. Resolver la desigualdad $2^{3x-2} < 2^{x+3}$. Para una base mayor que 1, a un valor menor de la función exponencial corresponde un valor menor del exponente, es decir,

$$3x - 2 < x + 3,\ 2x < 5,\ x < \frac{5}{2}.$$

Ejemplo 2. Resolver la desigualdad $2 \cdot 3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 2 > 0$. Introducimos una incógnita auxiliar. Ponemos $z = 3^x$ $(z > 0)$. En tal caso $2z^2 - 5z + 2 > 0$, es decir, tendremos una desigualdad cuadrática de z. Las raíces del trinomio del primer miembro son iguales a $\frac{1}{2}$ y 2; por la regla conocida el trinomio es positivo para todos los valores de z comprendidos en el intervalo $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. Por lo tanto, $z > 2$ ó $z < \frac{1}{2}$. Puesto que $z > 0$, tendremos que $0 < z < \frac{1}{2}$ ó $z > 2$.

Así, pues, $0 < 3^x < \frac{1}{2}$ ó $3^x > 2$.

De este modo, después de la logaritmación (de base 10) tendremos

$x \lg 3 < \lg \frac{1}{2}$,

$x < \frac{\lg \frac{1}{2}}{\lg 3}$;

$x < -\frac{0,3010}{0,4771}$,

$x < -0,63$.

Resolviendo la segunda desigualdad $3^x > 2$, hallamos:

$x > \frac{\lg 2}{\lg 3}$, ó $x > 0,63$.

Ejemplo 3. $\log_{\frac{1}{3}} (2x+5) < -2$.

Señalemos que la desigualdad tiene sentido si $2x+5 > 0$, o cuando $x > -\frac{5}{2}$. Representemos el segundo miembro de la desigualdad, es decir, el número -2 en la forma de $\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, ó $-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$. Luego $\log_{\frac{1}{3}} (2x+5) < \log_{\frac{1}{3}} 9$, pero, puesto que cuando la base es positiva, menor que la unidad, a un logaritmo menor corresponde un número mayor, tendremos que

$2x+5 > 9$; $x > 2$.

Ejemplo 4. $\log_3 |3-4x| > 2$.

En dicha desigualdad x puede tomar cualquier valor, excepto $x = \frac{3}{4}$. Luego, por potenciación, tendremos:

$|3-4x| > 3^2 = 9$.

$|3-4x| > 9$.

1) Supongamos que $3-4x > 0$, ó $x < \frac{3}{4}$. En tal caso

$3-4x > 9$, $x < -\frac{3}{2}$.

2) Si $3-4x < 0$, entonces $|3-4x| = 4x-3$, $4x-3 > 9$, $x > 3$. De esta forma, la desigualdad $\log_3 |3-4x| > 2$ se satisface con los valores $x > 3$ ó $x < -\frac{3}{2}$.

Ejemplo 5. $\log_6 (x - 3\sqrt{x+1} + 3) < 1$.
Esta desigualdad tiene sentido, si se cumplen simultáneamente dos condiciones

$$\begin{cases} x - 3\sqrt{x+1} + 3 > 0, \\ x + 1 \geqslant 0, \text{ ó } x \geqslant -1. \end{cases}$$

Resolvemos la primera desigualdad del sistema:

$x+3>3\sqrt{x+1}$ para $x\geqslant -1$.

Aquí ambos miembros son positivos y se pueden elevar al cuadrado

$(x+3)^2>9(x+1)$, ó $x^2-3x>0$,

$x<0$, $x>3$.

De este modo, la expresión afectada del signo de logaritmo tiene sentido si $-1\leqslant x<0$ y $x>3$ Ahora resolvemos la propia desigualdad. Con la potenciación, recordando que la base de los logaritmos es mayor que 1, obtendremos $x-3\sqrt{x+1}+3<6$, ó

$$x-3<3\sqrt{x+1}. \qquad (1)$$

1) Para todo x del intervalo $-1\leqslant x<0$ la desigualdad (1) se cumple, puesto que el primer miembro es negativo, el segundo miembro no es negativo, y, en consecuencia, la desigualdad inicial también es cierta.

2) Cuando $x>3$ ambos miembros de la desigualdad (1) son positivos, se puede elevar al cuadrado, ya que el sentido de la desigualdad no cambia. Tengamos $(x-3)^2<9(x+1)$ Después de abrir paréntesis y pasar todos los términos al primer miembro obtendremos $x^2-15x<0$, de donde $0<x<15$. Puesto que $x>3$, las soluciones serán valores de x comprendidos en el intervalo $3<x<15$. De este modo, todos los puntos de los intervalos $-1\leqslant x<0$, $3<x<15$ son soluciones de la desigualdad inicial.

Ejemplo 6. $\log_x 2\cdot\log_{2x}2\cdot\log_2 4x>1$.

Por definición de función logarítmica las bases x y $2x$ deben ser positivas, no iguales a 1. De suerte que $x>0$, $x\neq\frac{1}{2}$, $x\neq 1$. Reducimos todos los logaritmos a una misma base, igual a 2:

$$\log_x 2=\frac{1}{\log_2 x};\quad \log_{2x}2=\frac{1}{\log_2 2x}=\frac{1}{1+\log_2 x}$$

(véase la identidad $\log_b a\cdot\log_a b=1$).

La desigualdad inicial adquiere la forma

$$\frac{1}{\log_2 x}\cdot\frac{1}{1+\log_2 x}\cdot(2+\log_2 x)>1.$$

Ponemos $\log_2 x=t$,

$$\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1+t}\cdot(2+t)>1;$$

después de simples transformaciones la desigualdad toma la forma

$$\frac{-t^2+2}{t(t+1)}>0,\quad \text{ó}\quad \frac{t^2-2}{t(t+1)}<0.$$

Resolviéndola, hallamos: $-\sqrt{2}<t<-1$, $0<t<\sqrt{2}$.

Sustituyendo t por $\log_2 x$, tendremos

1) $\log_2 2^{-\sqrt{2}}<\log_2 x<\log_2\frac{1}{2}$, de donde $2^{-\sqrt{2}}<x<\frac{1}{2}$;

2) $\log_2 1<\log_2 x<\log_2 2^{\sqrt{2}}$, de donde $1<x<2^{\sqrt{2}}$.

§ 179. Ejemplos de resolución gráfica de ecuaciones y desigualdades

Ejemplo 1. Resolver la ecuación $4x = 2^x$.
Trazamos la recta $y = 4x$ y la curva $y = 2^x$ (fig. 114). Las abscisas de los puntos de intersección de estas líneas son raíces de la ecuación dada. En la figura se aprecia que las abscisas de los puntos de intersección de estas gráficas son $x_1 = 4$ y $x_2 \approx \frac{1}{3}$. De este modo, dicha ecuación tiene dos raíces. De las siguientes consideraciones se puede comprobar que la ecuación dada no puede tener más de dos raíces: la gráfica de $y = 2^x$ es una curva cóncava, en tanto que la recta puede tener con esta curva dos puntos comunes, o un punto común, o bien ninguno.

Ejemplo 2. Resolver la ecuación $x \cdot 2^{3^x} = 1$.
Dado que para todos los valores reales de x la función 3^x es positiva, luego $2^{3^x} > 1$ (propiedad de la función exponencial cuando la base es mayor que la unidad y el exponente positivo). Escribimos la ecuación dada en la forma

$$x = \frac{1}{2^{3^x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3^x}.$$

Puesto que 2^{3^x} es positivo, tendremos que $x > 0$. Procediendo a la logaritmación de ambos miembros de la ecuación $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{3^x}$ de base $\frac{1}{2}$, obtenemos la ecuación $\log_{\frac{1}{2}} x = 3^x$, equivalente a la dada.
Construimos las gráficas de las funciones $\log_{\frac{1}{2}} x$ y 3^x (fig. 115). La abscisa del punto de intersección de estas gráficas es la solución de la ecuación dada. De la figura se desprende que la raíz de la ecuación es $x \approx \frac{1}{3}$.

Ejemplo 3. Resolver gráficamente la siguiente desigualdad $\left|\frac{x+2}{x+1}\right| > 1$. Si $x = -1$, el primer miembro de la desigualdad es indeterminado. Si $x \neq -1$, tendremos que $|x + 1| > 0$, por eso dicha desigualdad se puede escribir del siguiente modo: $|x + 2| > |x + 1|$. Construimos las gráficas de las funciones $y_1 = |x + 2|$ e $y_2 = |x + 1|$ (fig. 116). De la figura se deduce que todos los valores de x que se encuentran a la derecha del punto $x = -1{,}5$, las ordenadas de la gráfica de y_1 son mayores que las respectivas ordenadas de la gráfica y_2.

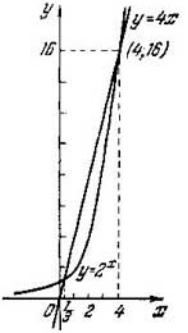

Fig. 114.

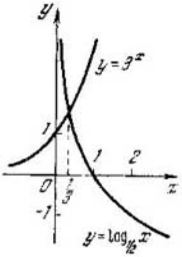

Fig. 115.

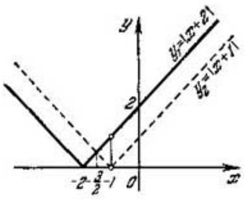

Fig. 116.

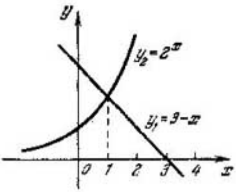

Fig. 117.

En consecuencia, $y_1 > y_2$, si $x > -1{,}5$. Pero, dado que $x \neq -1$, entonces $-1{,}5 < x < -1$ ó $x > -1$.

Ejemplo 4. Resolver la desigualdad $3 - x > 2^x$. Construimos las gráficas:

1) de la recta $y_1 = 3 - x$,

2) de la función exponencial $y_2 = 2^x$ (fig. 117).

Las líneas se cortan en el punto $x = 1$. Para todo $x < 1$ la ordenada de la recta es mayor que la correspondiente ordenada de la gráfica de la función exponencial. Por lo tanto, todo número real de $x < 1$ es solución de la desigualdad.

▲ Ejercicios

1. Escribir las siguientes igualdades exponenciales en forma logarítmica: 1) $3^6 = 729$; 2) $4^5 = 1024$; 3) $10^4 = 10\,000$;

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$; 5) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$; 6) $10^{-3} = 0{,}001$.

2. Escribir las siguientes igualdades logarítmicas en forma exponencial: 1) $\log_2 64 = 6$; 2) $\log_3 81 = 4$; 3) $\log_5 125 = 3$; 4) $\log_{10} 100\,000 = 5$; 5) $\log_{10} 0{,}01 = -2$; 6) $\log_{\frac{4}{3}} \frac{27}{64} = -3$;

7) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$.

3. Hallar los logaritmos de base 2 de los siguientes números: 1) 32; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{8}$; 4) $\sqrt{2}$; 5) $2\sqrt{2}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\sqrt[3]{4}$; 8) $\frac{4}{\sqrt[5]{2}}$.

4. Hallar los logaritmos de base 10 de los siguientes números: 1) 10; 2) 1000; 3) 0,1; 4) 0,0001; 5) 10^n; 6) $\sqrt{10}$; 7) $\sqrt[3]{10^2}$; 8) $\sqrt[5]{100}$; 9) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; 10) $\frac{1}{10\sqrt{10}}$.

5. Basándose en la definición de logaritmo hallar la incógnita de las siguientes igualdades: 1) $x = \log_3 27$; 2) $y = \log_2 16$; 3) $z = \log_5 625$; 4) $x = \log_9 27$; 5) $y = \log_5 0{,}04$; 6) $u = \log_2 0{,}125$; 7) $\log_3 x = 2$; 8) $\log_5 x = 0$; 9) $\log_4 y = \frac{2}{3}$; 10) $\log_8 z = -2$; 11) $\log_{\frac{3}{2}} u = 2$;

12) $\log_{\frac{1}{2}} N = -3$

¿Para qué bases:

1) $\log 36 = 2$; 2) $\log 27 = \frac{3}{2}$; 3) $\log 64 = 4$; $\log 2 = -0{,}5$?

6. ¿Entre qué números enteros están comprendidos los logaritmos de base 2 de los números: 7, 30, 120 y 495?

7. ¿Entre qué números enteros se encuentran los logaritmos de base 10 de los números: 3, 18, 134 y 1782?

8. ¿Entre qué números enteros negativos están comprendidos los logaritmos de base 10 de los números: 1) 0,07; 2) 0,018; 3) 0,00215 y 4) 0,00005?

9. ¿Entre qué números enteros negativos están comprendidos los logaritmos de base 2 de los números: 1) $\frac{1}{15}$; 2) $\frac{3}{80}$ y 3) $\frac{1}{120}$?

10. ¿A qué es igual el logaritmo de $\sqrt[6]{8}$ cuando la base es: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 4; 4) 16; 5) 64?

11. ¿Con qué base $\sqrt{27}$ tiene logaritmo igual a: 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{3}{4}$?

12. Componer una sucesión de números tal, que los logaritmos de los términos de esta sucesión de base 2 formen la progresión aritmética 1, 2, 3, . . ., 10.
¿Qué sucesión forman estos números?

13. Demostrar en forma general que si los números forman una progresión geométrica con términos positivos, los logaritmos de estos términos forman una progresión aritmética.

14. Construir en un mismo dibujo las gráficas de las funciones: 1) $y = \log_2 x$; 2) $y = \log_2 (x + 1)$; 3) $y = \log_2 x + 1$.

● Observación. Componer previamente la tabla de valores.

15. Expresar el logaritmo del número 15 por los logaritmos de los números 3 y 5.

16. Expresar el logaritmo de $2\frac{1}{3}$ por los logaritmos de los números 7 y 3.

17. Expresar: 1) $\log 8$ por el $\log 2$; 2) $\log 81$ por el $\log 3$.

18. Expresar: 1) $\log \sqrt{5}$ por el $\log 5$; 2) $\log \sqrt[3]{2}$ por el $\log 2$; 3) $\log \sqrt[5]{27}$ por el $\log 3$.

19. ¿Cuáles son los logaritmos de los números simples que hay que saber para hallar los logaritmos de los números:

$$40,\ \frac{27}{64},\ \frac{12}{25},\ \sqrt{80},\ \sqrt[3]{\frac{3}{16}}$$

de la misma base?

20. Hallar 1) $\log_2 (8 \cdot 128)$; 2) $\log_5 (25 \sqrt{125})$.

21. Sabiendo que $\log_{10} 2 = 0{,}3010$, $\log_{10} 3 = 0{,}4771$; $\log_{10} 5 = 0{,}6990$, hallar: 1) $\log_{10} 40$; 2) $\log_{10} 1{,}8$; 3) $\log_{10} 0{,}12$; 4) $\log_{10} 0{,}02$.

22. Logaritmación de las siguientes expresiones:

1) $x = 3ab$; 2) $x = \frac{2ab}{c}$; 3) $y = a^3b^2$; 4) $z = \frac{a^2b^5}{c^3}$; 5) $x = 3(a-b)$;

6) $y = \frac{2a}{a^2-b^2}$; 7) $x = \sqrt{ab}$; 8) $x = \frac{\sqrt[3]{ac}}{(a+c)^2}$; 9) $y = \frac{1}{a^3bc^3}$;

10) $x = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{c}}$; 11) $y = \frac{a^2\sqrt{bc}}{3\sqrt[5]{(a+b)^3}}$; 12) $z = \sqrt{\frac{4a\sqrt{ab}}{5b\sqrt[3]{a^2b}}}$;

13) $y = \sqrt[n]{\frac{1}{ab}\sqrt{\frac{b}{a}}}$; 14) $x = \frac{5ab\sqrt[3]{ab}}{\sqrt{a^2-b^2}}$;

15) $y = \left(\sqrt[3]{\frac{a^4\sqrt{ab}}{b^2\sqrt[3]{bc}}}\right)^2$; 16) $x = \sqrt{\frac{40\sqrt{2\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{5\sqrt{6}}}}$;

17) $y = \frac{a^{-\frac{1}{2}}b^3}{c^{-\frac{3}{4}}}$; 18) $x = \sqrt[n]{m\sqrt[p]{b^2}}$; 19) $z = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c}}}}$;

20) $y = \sqrt[m]{a^{n+1}\sqrt[n]{b^p}}$; 21) $x = (\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$;

22) $x = \log_a [(a+b)^{\log_a (a+b)}]$.

23. Hallar por el logaritmo de un número desconocido ese mismo número:

1) $\log x = \log 5 - \log 2 + \log 3$;
2) $\log x = \log 7 + \log 5 - \log 3$;
3) $\log y = 2\log 3 + 3\log 5$;
4) $\log z = 3\log 2 - 2\log 3 + \log 5$;

5) $\log y = \frac{1}{2}\log 3 + \frac{2}{3}\log 5 - \frac{1}{3}\log 2$;

6) $\log u = \frac{1}{3}\log(a+b) - [\log a + 2\log(b+c)]$;

7) $\log x = \frac{1}{2}\log(a^2+b^2) - \frac{1}{3}[\log(a+b) - \log(b-a)]$;

8) $\log z = \frac{3\log a - (3\log b + 2\log c)}{4}$;

9) $\log y = \frac{1}{5}[3\log(a-b) + 2\log(a+b) - 4\log a]$;

10) $\log z = \frac{1}{3}\left[\log a + \frac{1}{4}(\log a + 3\log c)\right] -$

$-[\log b + 3\log(c+a) - \log(b+1)]$.

24. Hallar: 1) lg 1000; 2) lg 0,1; 3) lg 0,0001.

25. Hallar la característica de los logaritmos de los siguientes números:
7; 125; 5832; 109,54; 0,083. 0,00012.

26. Sabiendo que lg 32 = 1,5051, hallar: lg 3,2, lg 3200, log 0,32, lg 0,0032.

27. Representar los siguientes logaritmos de característica negativa en forma de números negativos:
1) $\bar{1}$,1728; 2) $\bar{2}$,5893, 3) $\bar{4}$,0075; 4) $\bar{6}$,9917.

28. Representar los siguientes logaritmos negativos en forma artificiosa, es decir, con mantisa positiva:
1) −0,5618; 2) −1,0247; 3) −2,0019; 4) −3,9904; 5) −0,7328.

29. Hallar por las tablas los logaritmos de los siguientes números enteros:
1) 30; 2) 160; 3) 4800; 4) 72 000; 5) 252; 6) 493; 7) 109; 8) 649; 9) 1183; 10) 7845, 11) 5848, 12) 2007.
Hallar los logaritmos de las siguientes fracciones:
1) 0,007; 2) 0,03; 3) 0,0008; 4) 0,0002; 5) 0,12; 6) 0,019; 7) 0,0031; 8) 0,0078; 9) 3,18; 10) 0,0542; 11) 72,8; 12) 0,632; 13) 30,65; 14) 1,967; 15) 18,12; 16) 0,4343.

30. Sabiendo que lg 375 = 2,5740, hallar sin tablas los logaritmos de los números: 1) 37,5; 2) 0,375; 3) 3,75; 4) 0,00375, 5) 3750.

31. Redondeando los números de cinco cifras dados hasta cuatro cifras, hallar sus logaritmos:
1) 13407; 2) 32,742; 3) 0,058369; 4) 18396; 5) 0,070418.

32. Hallar los números que corresponden a los logaritmos:
1) 0,8140; 2) 1,6590; 3) $\bar{1}$,6454; 4) $\bar{2}$,7789; 5) 3,1580; 6) $\bar{3}$,1752; 7) 1,003; 8) 3,0463; 9) $\bar{2}$,0032.

33. Hallar los logaritmos de los números y realizar las operaciones indicadas:
1) lg 0,057 + lg 0,09; 2) lg 3,18 + lg 0,25; 3) lg 25,6 − lg 18,2; 4) lg 0,873 − lg 0,543; 5) lg $(2{,}17)^3$; 6) lg $(0{,}3725)^2$; 7) lg $\sqrt[4]{1{,}27}$; 8) 3 lg 0,728; 9) 2 lg 15,8 + 3 lg 0,263; 10) lg $\sqrt{32{,}7}$ + lg $\sqrt[3]{0{,}0253}$.

34. Hallar los logaritmos complementarios:
1) lg 18,23 ad.; 2) lg 0,0532 ad.; 3) lg 318,6 ad.; 4) $\frac{2}{3}$ lg 0,326 ad.; 5) $-\frac{1}{2}$ lg 13,6.

35. Calcular mediante las tablas de logaritmos de cuatro cifras:

1) $x=0,7545\cdot 2,457$; 2) $x=144,6\cdot 0,0256\cdot 0,75^3$; 3) $x=\dfrac{120,4\cdot 1,44}{300,1}$;

4) $x=\dfrac{17,6\cdot 2,85}{43,6\cdot 8,95}$; 5) $y=\dfrac{0,0795\cdot 15,4}{1,18^2\cdot 32,7}$; 6) $z=\sqrt[5]{17,32}$; 7) $x=$ $=\sqrt[4]{0,0386}$; 8) $y=\dfrac{1}{\sqrt[6]{0,724}}$; 9) $x=\dfrac{\sqrt[4]{27,32}}{0,4316}$; 10) $x=\sqrt[3]{\dfrac{23,6}{18,3}}$; 11) $y=$ $=\sqrt[4]{\dfrac{128}{9657}}$; 12) $z=\dfrac{37,26}{28,75}\sqrt{48,31}$; 13) $x=\sqrt[5]{0,42\sqrt{0,0275}}$;

14) $y=0,75^4\sqrt[3]{0,75^2}$;

15) $x=\sqrt[3]{0,275}\cdot\sqrt[4]{7,386}$; 16) $x=\dfrac{\sqrt[3]{2,5\sqrt[4]{0,0125}}}{\sqrt[4]{0,0125}\sqrt[3]{0,25}}$;

17) $y=\sqrt[5]{3,125-\sqrt[3]{0,75}}$; 18) $x=\sqrt[5]{1-\sqrt[3]{0,0814}}$;

19) $x=\dfrac{1,56^3\cdot 0,00364^2\sqrt[3]{\dfrac{3}{7}}}{4,658^2\sqrt{0,0467}}$; 20) $y=2,75^{0,6}$; 21) $z=0,463^{0,45}$;

22) $x=\dfrac{1}{7,45^{0,32}}$; 23) $A=0,00485^{0,0682}$; 24) $y=1+0,4893^{0,285}$;

25) $x=\sqrt[3]{\dfrac{7,83\sqrt{41}}{\dfrac{1}{4}}}$; 26) $y=\dfrac{(0,089)^{0,41}\cdot(3\ 726)^{-1,3}}{300^{\frac{1}{7}}\cdot(43,6)^{-0,7}}$;

27) $z=\sqrt{\dfrac{7,82^{\frac{1}{2}}(3,47)^{-0,71}}{(6,402)^{-\frac{3}{5}}\cdot(0,081)^{0,57}}}$.

36. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

1) $\sqrt[x]{2}=2^x$; 2) $2^{x-1}=4^5$; 3) $4^{-\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{2}$; 4) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^{0,8x}=\dfrac{64}{125}$;

5) $a^{x-7}=a^{7-x}$; 6) $9^{-3x}=\left(\dfrac{1}{27}\right)^{x+3}$; 7) $\sqrt[x]{16}=\sqrt{4^x}$.

37. Resolver las ecuaciones:

1) $13,2^x=8$; 2) $(0,785)^{2x}=3,18$; 3) $\sqrt[x]{22,1}=7^x$

38. Resolver las ecuaciones:

1) $3^{x+1}+\dfrac{18}{3^x}=29$; 2) $x^{x^2-7x+12}=1$; 3) $7^{2x}-6\cdot 7^x+5=0$;

4) $\dfrac{\lg 2x}{\lg(4x-15)}=2$; 5) $\dfrac{1}{5-\lg x}+\dfrac{2}{1+\lg x}=1$;

6) $\lg(x^3)-\dfrac{12}{\lg x}=5$; 7) $\lg\sqrt{7x+5}+\dfrac{1}{2}\lg(2x+7)=1+\lg 4,5$;

8) $x^{\lg x - 1} = 100$; 9) $x^{3-\frac{\lg x}{3}} = 900$;

10) $\lg(x-5) - \frac{1}{2}\lg(3x-20) = 0,3010$; 11) $x^{\lg x} = 100\,x$;

12) $\lg\left(\frac{1}{2} + x\right) = \lg\frac{1}{2} - \lg x$; 13) $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}} = 10$;

14) $\frac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)} = 3$; 15) $\lg(5x^2-14x+1) = \lg(4x^2-4x-20)$.

39. Resolver gráficamente las siguientes ecuaciones:

$\lg x - \frac{x}{2} + 4 = 0$; $2^x + x - 2 = 0$.

40. Calcular:

1) $4^{\log_{16}27}$; 2) $5^{\log_5 2}$; 3) $3^{\log_3 2 - 1}$.

41. Calcular sin utilizar las tablas, $10^{\frac{1}{2} - \lg 0,375\sqrt{10}}$

Resolver las ecuaciones:

42. $\left(2\sqrt{12} + 3\sqrt{3} + 6\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt{3^{2x^2-2x-2}}$

43. $10^{\log_a(x^2-3x+5)} = 3^{\log_a 10}$.

44. $(x^2-x-1)^{x^2-7x+2} = 1$.

45. $x^{3\lg^2 x - \frac{2}{3}\lg x} = 100\sqrt[3]{10}$. 46. $\lg[3 + 2\lg(1+x)] = 0$.

47. $2\lg\lg x = \lg(7-2\lg x) - \lg 5$.

48. $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16} + 2\log_3(x-3)\log_3(x+2) = \log_3^2(x-3) + \log_3^2(x+2)$.

49. $\sqrt[\frac{2}{9}-x]{m^{\frac{1}{3}+x}} = \sqrt[\frac{2}{9}+x]{m^{\frac{1}{3}-x}}\ \sqrt[\left(\frac{2}{9}\right)^2-x^2]{m^2}$; $m > 0$ y $m \neq 1$.

50. $2^{\log_x(x^2-6x+9)} = 3^{2\log_x\sqrt{x}-1}$

51. $25^{\sqrt{x}} - 124\cdot 5^{\sqrt{x}} = 125$.

52. $\log_2^2 x - 9\log_8 x = 4$.

53. $\lg 8 + 2\lg 4 = \lg 2^{3x^2-2x+1} - \lg 12 + 2\lg\sqrt{3}$.

54. $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}, \\ (x+y)\cdot 2^{y-x} = 48. \end{cases}$ 55. $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y = 576; \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4. \end{cases}$

56. $\log_x 5\sqrt{5} - 1,25 = (\log_x\sqrt{5})^2$. 57. $\left(\frac{9}{4}\right)^x\cdot\left(\frac{8}{27}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$.

58. $\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}}-\sqrt[3x-7]{8^{x-3}}=0.$ 59. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{9}{16}.$

60. $0{,}2^{x^2-16x+37{,}5}=5\sqrt{5}.$ 61. $\sqrt[x-4]{2^{x^2-7x+12}}=(2^{x-5})^{x-5}.$

62. $4^x+6^x-2\cdot 9^x=0.$

63. $2\lg\left(\sqrt{x+\frac{x}{24}}+\sqrt{\frac{x}{24}}\right)-1=\lg 3-\lg 2.$

64. $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)+\lg x=14.$

65. $4\lg^2\sqrt{ax}=\lg ax\ (a>0).$

66. $x+\lg(1+2^x)=x\lg 5+\lg 6.$

67. $\log_x\sqrt{5}+\log_x(5x)-2{,}25=(\log_x\sqrt{5})^2.$

68. $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10.$ 69. $\lg^{-1}x=2+\lg x^{-1}.$

70. $3^{x+1}+2\cdot 3^{2-x}-29=0.$ 71. $3+\log_x\left(\frac{x^{4x-6}+1}{2}\right)=2x.$

72. $16^{\log_x 2}=8x.$ 73. $9^{\log\sqrt{x}^{3}}=27x.$

74. $x^{(\lg x)^2-3\lg x+1}=10^3.$ 75. $\log_x(2\cdot x^{x-2}-1)=2x-4.$

76. $3^{1+\lg\operatorname{ctg}x}-3^{\lg\operatorname{tg}x+1}+8=0.$ 77. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2\log_2 x}+x\log_2 0{,}125=4.$

78. $(\sqrt[3]{x})^{\log_x(x^2+2)}=2\log_3\sqrt{27}.$ 79. $x^{2x}-(x^2+x)\cdot x^x+x^3=0.$

80. Resolver las desigualdades:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5)<-2;$

2) $\log_2(3x+2)-\log_2(1-2x)>2;$

3) $\log_3(3x+4)-\log_3(2x-1)>1;$

4) $\log_3|3-4x|>2;$

5) $\log_{\frac{1}{2}}|2x-3|>-3;$

6) $\log_2(|x-2|-1)>1;$

7) $\log_2\left(\left|\frac{x-2}{x-5}\right|+7\right)>3;$

8) $\log_3(x-1)+\log_3(2-3x)>2.$

81. Resolver gráficamente las ecuaciones (al construir las gráficas utilícense las tablas de valores de las funciones: e^x, e^{-x}, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, dadas al final del libro):

1) $e^x=2-x;$ 2) $x^2=e^{-x}+1;$ 3) $0{,}5+x+\operatorname{sen}x=0;$

4) $2\cos x+\frac{x}{2}=0;$ 5) $1+\lg x+\frac{x}{2}=0.$

82. Resolver gráficamente las desigualdades:

1) $e^x>3-x,$ 2) $e^{-x}+1<x;$

3) $\lg(x-2)>4-x;$

4) $\lg\operatorname{sen}x>\frac{2x}{\pi}-2\ (0<x<\pi).$

83. Resolver los sistemas:

1) $\begin{cases} 2^x-2^y=24; \\ x+y=8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4^x=16y, \\ 2^{x+1}=4y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^x-2^{y^2}=77, \\ 3^{\frac{x}{2}}-2^{\frac{y^2}{2}}=7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 64^{2x}+64^{2y}=40, \\ 64^{x+y}=12; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x^2+y=75, \\ 2\lg x-\lg y=2\lg 2+\lg 3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=512; \\ \lg\sqrt{xy}=1+\lg 2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} y+\lg x=\frac{2}{\pi}\operatorname{arcsen} 1, \\ x^y=2^{2\log_{0,5}10}; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^{x+y}=y^{x-y}, \\ x^2y=\frac{2}{\pi}\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{2}}+\right. \\ \left.+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4^{\sqrt{x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2-y}, \\ 3^{\log_9 x}=\frac{y}{3}. \end{cases}$

84. Resolver las desigualdades:

1) $\log_{0.5}\left(x^2-x-\frac{3}{4}\right)>2-\log_2 5;$

2) $\log_x\frac{x+3}{x-1}>1.$

CAPITULO XIV

REGLA DE CALCULO

Introducción. El aparato de cálculo más difundido entre los ingenieros y los técnicos es la regla de cálculo.

La regla de cálculo permite realizar las operaciones más variadas: multiplicación, división, potenciación, radicación, logaritmación, búsqueda de los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos dados y viceversa. En este caso se economiza considerablemente el tiempo y se facilita el cálculo. Empero, los resultados de todas las operaciones obtenidos mediante la regla son aproximados con una precisión de hasta tres cifras significativas.

§ 180. Partes de una regla de cálculo y denominaciones de las escalas

La regla de cálculo está compuesta de tres partes:

2) el cuerpo de la regla con las escalas;

2) la corredera, es decir, la parte móvil, que se desliza en la caja ad-hoc del cuerpo de la regla;

3) el cursor formado por un marco metálico con un cristal de aumento, que lleva un trazo visor para facilitar las lecturas. En la parte anterior o frontal de la regla y la corredera se encuentran las siguientes escalas (fig. 118):

1) La *escala de cubos* (marcada con la letra C), es la más superior.

2) La *escala de cuadrados* (marcada con la letra B), es la segunda de arriba; la misma está representada dos veces: una sobre el cuerpo de la regla (escala B) y la segunda, sobre la corredera (escala B_1).

3) La *escala fundamental* (marcada con la letra A), es la segunda de abajo; al igual que la escala de cuadrados, está marcada en el cuerpo (escala A) y en la corredera (escala A_1),

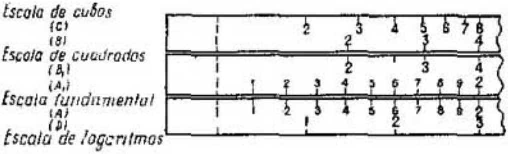

Fig. 118.

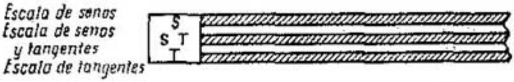

Fig. 119

4) La *escala de logaritmos* (marcada con la letra D), es la más inferior.

Las escalas fundamentales marcadas en el cuerpo y en la corredera coinciden en todas sus divisiones si ésta última no se desliza a derecha o a izquierda. Lo mismo se puede decir con respecto a las escalas de cuadrados en el cuerpo y en la corredera.

En el reverso de la corredera se tienen las siguientes escalas (fig. 119):

1) La *escala de senos* (marcada con la letra S), es la escala superior.

2) La *escala de* senos y tangentes (marcada con las letras S u T), es la escala media.

3) La *escala de tangentes* (marcada con la letra T), es la escala inferior.

§ 181. Escala logarítmica

Antes de pasar a estudiar las operaciones que se realizan con la regla, hay que saber cómo está construida la escala logarítmica, que constituye la base de la regla.

Tomemos la función $y = \lg x$. Si el argumento (x) varía de $x = 1$ a $x = 10$, el logaritmo de (y) varía de 0 a 1, puesto que $\lg 1 = 0$; $\lg 10 = 1$.

Tomemos convencionalmente un segmento de 250 mm de longitud como unidad y lo dividimos *proporcionalmente a los logaritmos de los números enteros de* 1 *a* 10.

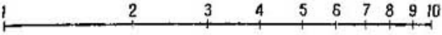

Fig. 120.

Compongamos previamente la siguiente tabla:

x	$y = \lg x$	$250 \lg x$ (mm)	x	$y = \lg x$	$250 \lg x$ (mm)
1	0,0000	0,00	6	0,7782	194,6
2	0,3010	75,3	7	0,8451	211,3
3	0,4771	119,3	8	0,9031	225,8
4	0,6021	150,5	9	0,9542	238,6
5	0,6990	174,7	10	1,0000	250,0

Basándonos en esta tabla construimos la escala de la función $y = \lg x$.

Sobre una recta arbitraria tomamos el punto origen O. Frente a él marcamos el 1, ya que el valor inicial de x es igual a 1. A continuación, desde el punto O hacia la derecha llevamos sucesivamente los segmentos de longitud iguales a 75,3 mm, 119,3 mm, 150,5 mm, . . ., 250 mm; marcamos sus extremos con los correspondientes números 2, 2, 3, 4, . . ., 10. De este modo se ha obtenido la escala logarítmica, sobre la que se ha marcado por ahora sólo las divisiones mayores, o las divisiones de primer orden. En la fig. 120 se ha representado esta escala en tamaño menor. Para precisión de la escala hay que dividir el intervalo entre cada dos divisiones (cotas) adyacentes en 10 partes proporcionales a los logaritmos de los números intermedios. Por ejemplo, para obtener en la escala la cota 1,5 hay que llevar desde el origen un segmento igual a $250 \text{ mm} \cdot \lg 1{,}5 \approx$ $\approx 250 \cdot 0{,}176 \approx 44$ (mm). De un modo semejante se pueden marcar en la escala las cotas 1,6; 1,7, etc.; éstas serán divisiones de segundo orden, correspondientes a las fracciones décimas de la unidad.

Así, pues, las marcas en la escala logarítmica: 1, 2, 3, 4, . . ., 10 expresan de por sí números, mientras que los segmentos 1—2, es decir, desde la cota 1 hasta la cota 2, 1—3, 1—4, . . ., 1—10 expresan respectivamente los logaritmos de estos números, más exactamente, los números proporcionales a los logaritmos, donde el coeficiente de proporcionalidad es la escala; en este caso la escala $M = 250$ mm.

Se obtuvo una escala irregular, puesto que los logaritmos de los números no son proporcionales a los mismos números. La escala logarítmica de 250 mm se llama *normal*.

§ 182. Propiedades de la escala logarítmica

Una de las propiedades más importantes de la escala logarítmica es que ella es *periódica*.

Analicemos esta enunciación. Si la escala logarítmica 1, . . ., 10 la continuásemos hacia la derecha para los números 10, 20, 30, . . ., 100, tendríamos que llevar, desde el origen de la escala (desde la cota 1) hacia la derecha, segmentos iguales, más exactamente, proporcionales respectivamente a $\lg 20$, $\lg 30$, $\lg 40$, . . ., $\lg 100$. Pero $\lg 20 = 1 + \lg 2$, $\lg 30 = 1 + \lg 3$, etc. De aquí se aprecia que la construcción de una escala suplementaria nos conduciría a que, a la escala original, cuya longitud es igual a la escala, se le añadiría la misma escala. De manera exactamente igual se repetiría nuevamente la escala para los números de 100 a 1000, etc. Lo mismo se puede deducir con respecto a la escala para los números que se encuentran a la izquierda de 1, por ejemplo, para los números: 0,1; 0,2; 0,3; . . .; 1; la escala representada en la fig. 119 estaría desplazada hacia la izquierda en toda su longitud (250 mm).

Esto era de esperar, partiendo de las propiedades de los logaritmos decimales: los logaritmos de los números 0,02; 0,2; 2; 20; 200; 2000, etc. tienen iguales mantisas, diferenciándose solamente en las características. Al realizar unas u otras operaciones con la regla, en realidad las hacemos con las mantisas, por eso es suficiente tener a mano una escala logarítmica de 1 a 10. Al calcular con la regla, el papel de las características lo juegan los órdenes, que se calculan sin la regla y permiten hallar el resultado buscado. De este modo, la propiedad de periodicidad permite sustituir la escala infinita por una de sus partes, por ejemplo, de 1 a 10.

§ 183. Divisiones en la escala fundamental

En la escala logarítmica fundamental las divisiones están marcadas de 1 a 2, a cada 0,01, es decir:

1,01; 1,02; 1,03; 1,04; 1,05; etc.;

de 2 a 4, a cada 0,02:

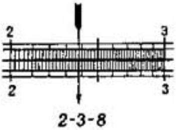

Fig. 121.

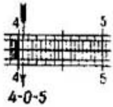

Fig. 122

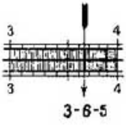

Fig. 123.

2,02; 2,04; 2,06; etc.; de 4 a 10, a cada 0,05: 4,05; 4,10; 4,15; etc.

Se admite decir que el «valor» de una división menor en la porción de 1 a 2 es igual a 0,01; el «valor» de la división menor en la porción de 2 a 4 es igual a 0,02, y en la porción de 4 a 10, es igual a 0,05.

§ 184. Instalación y lectura de los números en la escala fundamental

Antes de pasar a estudiar las distintas operaciones que se pueden realizar en la regla de cálculo es necesario saber establecer el número con ayuda del visor y leer el número que está debajo del trazo visor.

En este caso conviene recordar que en la regla de tipo normal se pueden poner o leer tres (raramente cuatro) cifras significativas sucesivas del número. Cuando se necesita poner en la regla un número con gran cantidad de cifras, previamente éste se debe redondear.

Al disponer el número ya redondeado no se tienen en cuenta los ceros que anteceden a la primera cifra significativa, y todos con que termina el número. Por ejemplo, la disposición de los números 238; 0,238; 238 000; 0,000238 será la misma en la regla. Cada uno de estos números lo consideramos en la regla como: 2—3—8. La fig. 121 muestra cómo hay que poner en la regla el número 2—3—8.

La primera cifra 2 corresponde a un número de divisiones mayores; la segunda cifra 3, a un número de divisiones de segundo orden; la tercera cifra 8, a un número de divisiones menores, es decir, a las divisiones de tercer orden, se han tomado 4, puesto que en el intervalo dado el valor de una división menor es igual a dos unidades de tercer orden.

En la fig. 122 se muestra la instalación del número 4—0—5. El cero refleja la falta de unidades de segundo orden.

Inversamente, si se quiere leer el número que está debajo del trazo visor, primero se lee la cifra inmediata de izquierda de primer orden, luego, la cifra inmediata de izquierda de segundo orden, y la cifra de tercer orden, que en la mayoría de los casos se lee a ojo. La fig. 123 representa el número 3—6—5 bajo el trazo visor.

Recordemos que hasta que el trazo visor salga de los límites, por ejemplo, del intervalo 1—2, todas las lecturas comenzarán con la cifra 1. Lo mismo ocurre con las divisiones de segundo orden.

De manera exactamente igual se instalan y se leen los números en la escala rozante de la corredera (reglilla móvil), la que llamaremos escala A_1.

§ 185. Multiplicación en la regla

El producto de dos números en la regla de cálculo está basado en la suma gráfica de los logaritmos de estos números, puesto que

$$\lg ab = \lg a + \lg b.$$

Examinemos dos casos.

1. Supongamos que se necesite multiplicar 2 por 3. Llevamos el trazo visor del cursor sobre la cota 2 de la escala fundamental A. Debajo del trazo visor colocamos la unidad, o sea, el origen de la escala A_1. A continuación deslizamos el cursor hasta llevar el trazo visor sobre la cota 3 de la escala A_1 y en la escala A leemos el producto 6.

Esta multiplicación está representada esquemáticamente en la fig. 124.

2. Supongamos querer multiplicar 8 por 5. Llevamos el trazo visor sobre la cota 8 de la escala A. Si colocamos bajo el trazo visor el origen de la escala A_1, tendremos que la cota 5 de la escala de la corredera A_1 resultará estar fuera de los límites de la escala A. Esto se comprende, puesto que al sumar las mantisas de los logaritmos de 8 y de 5 se obtendrá un número mayor que 1: $\lg 8 + \lg 5 = 0{,}903 + 0{,}699 = 1{,}602$. Medimos con un compás lo que excede la cota 5 de la escala A_1 fuera de los límites de la escala fundamental A y llevamos esta porción desde el origen de la escala A. Enfrente del extremo de esta porción o segmento se encuentra la cota 4 de la escala A. Esta lectura hay que aumentarla 10 veces, puesto que el número correspondiente al logaritmo 1,602 debe tener en la parte entera dos cifras. Al mismo resultado se llega más simplemente del siguiente modo: en lugar de la unidad inicial de la corredera colocamos el final de la corredera enfrente de la cota 8 de la escala A. Debajo de la cota 5 de la escala de la corredera leemos

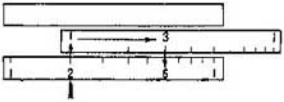

Fig. 124.

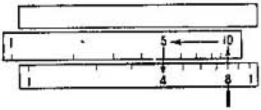

Fig. 125.

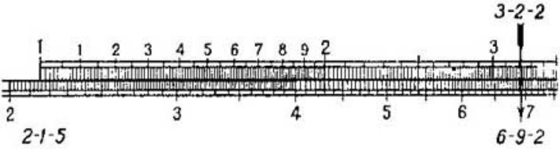

Fig. 126.

en la escala A el resultado 40. En la fig. 125 se muestra esquemáticamente esta multiplicación.

Los dos ejemplos antes expuestos han tenido como objeto explicar el principio de la multiplicación de números en la regla de cálculo.

Un caso más complejo de multiplicación es cuando el resultado no se puede obtener mentalmente, por ejemplo:

$$0{,}0215 \cdot 32{,}2.$$

Como se aprecia de la fig. 126 el resultado es igual a 6—9—2. Surge la pregunta: ¿dónde hay que poner la coma? Se puede estimar aproximadamente el resultado obtenido redondeando los datos hasta una cifra significativa:

$$0{,}02 \cdot 30 = 0{,}60.$$

De este modo

$$0{,}0215 \cdot 32{,}2 = 0{,}692.$$

Es evidente que la primera cifra del resultado denota las fracciones decimales. En los primeros tiempos se recomienda realizar, precisamente de este modo, un «cálculo» aproximado del resultado a esperar.

Cuando se quiere hallar el producto de un gran número de factores o realizar también otras operaciones, además de la multiplicación, surge la necesidad de estimar con otra regla la significación de la primera cifra, en el resultado, es decir, la estimación de que la primera cifra significativa represente centenas, decenas o, puede ser, milésimas, etc. Establezcamos el concepto de orden del número.

§ 186. Sobre el orden de los números

En adelante convendremos en decir, por ejemplo, que
1) el número 183,4 tiene el orden +3;
2) el número 34,87 tiene el orden +2;
3) el número 8,53 tiene el orden +1;
4) el número 0,784 tiene el orden 0;
5) el número 0,0215 tiene el orden —1;
6) el número 0,00012 tiene el orden —3, etc.
En consecuencia, el *orden* de todo número positivo, mayor que la unidad, se caracteriza por el número de cifras de la parte entera, tomado con signo positivo.
La cantidad de ceros entre el cero de los enteros y la primera cifra significativa, tomada con signo negativo, se admite como orden de cualquier número positivo menor que la unidad.

Observación. El concepto de «orden del número N» y el concepto «característica del logaritmo del número N» no es el mismo. Por ejemplo, el orden del número 48,7 es el número 2, en tanto que la característica del lg 48,7 es igual a 1, es decir, el orden de un número es una unidad mayor que la característica del logaritmo del mismo número.

§ 187. Cálculo del orden

Si al multiplicar dos números la corredera se desplaza a la derecha, el orden del resultado es igual a la suma de los órdenes de los factores menos la unidad. Si la corredera se desplaza hacia la izquierda, el orden del producto es igual a la suma de los órdenes de los factores.
Si el orden del multiplicando es m, y el orden del multiplicador es n, el orden del producto se calcula por el siguiente esquema:

Desplazamiento de la corredera al multiplicar	a derecha	a izquierda
Orden del producto	$m+n-1$	$m+n$

E j e m p l o 1. $3,\overrightarrow{2}\cdot 2,5 = 8,00$,

$1 + 1 - 1 = 1$.

La corredera se desplaza a la derecha, lo que está indicado por una flecha, por eso el orden del producto es igual a la suma de los órdenes de los factores menos 1.

E j e m p l o 2. $\overleftarrow{45}\cdot 8,2 = 369$,

$2 + 1 = 3$.

La corredera se desplaza a la izquierda, lo que está indicado por una flecha, por eso el orden del producto es igual a la suma de los órdenes de los factores.
Si se desea multiplicar varios números, se recomienda fijar el desplazamiento de la corredera en cada multiplicación poniendo la flecha dirigida hacia el lado de desplazamiento de la misma.

E j e m p l o 3. $0,007\overleftarrow{5}\cdot 4,\overleftarrow{2}\cdot 4,\overrightarrow{3}\cdot 150 = 20,3$,

$-2 + 1 + 1 + 3 - 1 = 2$.

Al multiplicar la corredera se desplaza dos veces a la izquierda y una vez a la derecha, por eso el orden del resultado es igual a la suma de los órdenes de los factores menos una unidad.

Observación. Cabe señalar que si el producto de las primeras cifras significativas es igual a 10 o mayor que 10, la corredera se desplazará, sin duda, a la izquierda. Por ejemplo: $4,8\cdot 0,327$; $54,8\cdot 2,1$, etc.

§ 188. División

Puesto que el logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor, la división en la regla se reduce a la sustracción gráfica de los logaritmos.

E j e m p l o 1. $6 : 3 = 2$.

D i s p o s i c i ó n. Disponemos con el visor el dividendo (6) en la escala A. Desplazamos la corredera de manera que el divisor (3) sobre ella resulta bajo el trazo visor.
Enfrente del origen de la escala de la corredera leemos en la escala A el resultado (2). Esta división está representada esquemáticamente en la fig. 127.

Fig. 127.

Fig. 128.

E j e m p l o 2. $40 : 5 = 8$.
Disponemos con el visor la cota 4—0 en la escala A. Debajo de él hacemos coincidir la cota 5 de la escala de la corredera. Enfrente de la cota 10 (o bien 1) del extremo de la escala A_1 leemos en la escala A el resultado 8. Esquemáticamente esta división se muestra en la fig. 128.
El cálculo del orden de un cociente, si el orden del dividendo es m y el orden del divisor es n, se realiza por el siguiente esquema:

Desplazamiento de la corredera al dividir	a izquierda	a derecha
Orden del cociente	$m-n$	$m-n+1$

E j e m p l o s. $8{,}75 \overset{\rightarrow}{:} 0{,}0025 = 3500$; $\quad 4{,}7 \overset{\leftarrow}{:} 0{,}065 = 72{,}3$;

$$1-(-2)+1=4; \qquad 1-(-1)=2.$$

Observación. Si la primera cifra del dividendo es mayor que la primera cifra del divisor, la corredera se desplaza a la derecha, y, en ese caso, al calcular el orden se agrega la unidad.

E j e m p l o. $0{,}0842 : 42{,}1 = 0{,}002$;
$-1-2+1=-2$.

§ 189. Ejemplos de multiplicación y división

E j e m p l o 1. $\dfrac{0{,}215\cdot 17{,}5}{0{,}019}=198$.

Las flechas indican la sucesión de las operaciones: primero la división y luego la multiplicación.
En este ejemplo la división y la multiplicación se efectuaron con una instalación de la corredera, por eso el orden del

resultado es igual a la suma de los órdenes de los factores del numerador menos el orden del denominador. En nuestro ejemplo tenemos:

$(0,\overrightarrow{215} : 0,\overrightarrow{019}) \cdot 17,5.$

El cálculo del orden es:

$[0 - (-1) + 1] + 2 - 1 = 3.$

Ejemplo 2. $\frac{54,2 \cdot 0,42}{0,0154} = 1480$

Dividiendo 54,2 : 0,0154 obtenemos el resultado enfrente de la unidad inicial de la corredera (no lo leemos). No logramos multiplicar el resultado obtenido por 0,42, puesto que la cota 4—2 en la corredera resulta estar fuera de los límites de la escala fundamental A. En este caso hay que «trasladar» la corredera, es decir, en lugar de la unidad de origen de la corredera debe ponerse la unidad final de ésta. Entonces, el orden es igual al orden del numerador menos el orden del denominador más la unidad, puesto que en la segunda operación (multiplicación) la corredera se desplaza a la izquierda.

Ejemplo 3. $\frac{0,486 \cdot 0,007 \cdot 26,4}{0,124 \cdot 2,5} = 0,29.$

$\{[0,486 : 0,124) \cdot 0,007] : 2,5\} \cdot 26,4.$

Durante las operaciones fue necesario trasladar la corredera a la izquierda; por lo tanto, el orden del resultado final es igual al orden del numerador menos el orden del denominador más la unidad:

$0 + (-2) + 2 - (0 + 1) + 1 = 0.$

§ 190. Sobre las divisiones en la escala de cuadrados

La escala de cuadrados está compuesta de dos partes (escalas) iguales en longitud y completamente idénticas, que se suceden una a otra: la mitad izquierda y la mitad derecha. Cada una de ellas tiene una escala de 125 mm.
La mitad derecha comienza de la cota media indicada 1 (a veces 10) y termina con la cota 1 (a veces 100) al final de la escala de cuadrados.

En cada una de estas escalas existen divisiones de tres órdenes.

1. Las divisiones mayores que están marcadas con las cifras 1, 2, 3, . . ., 1. (A veces en la mitad derecha estas divisiones están marcadas con los números 10, 20, 30, . . ., 100).
Estas divisiones corresponden a la primera cifra significativa de un número de tres cifras.

2. Los intervalos entre divisiones, marcados con cifras, están divididos en 10 partes; además, estas nuevas divisiones en la porción 1—5 sobresalen algo más arriba (en la corredera) y más abajo (en la propia regla) de las bandas horizontales. En la porción 5—1 (10) estas divisiones, fuera de la quinta, no sobresalen de las bandas. Las nuevas divisiones indicadas corresponden a la segunda cifra significativa de un número de tres cifras.

3. Los intervalos entre las últimas divisiones se dividen en cinco partes (entre 1 y 2), o en dos partes (entre 2 y 5) o no se dividen en absoluto (entre 5 y 1). El valor de la división en la escala de cuadrados de 1 a 2 es igual a 0,02; de 2 a 5, igual a 0,05 y de 5 a 10, igual a 0,1.
De esta manera, en esta escala la tercera cifra significativa se hace necesario con frecuencia establecerla y leerla a ojo.

§ 191. Multiplicación y división en la escala de cuadrados

También se puede multiplicar y dividir en la escala de cuadrados. Se opera de igual modo que al calcular mediante la escala fundamental, sólo que los resultados, por así decir, son menos precisos.

Hay que distinguir dos casos de cálculo del orden al multiplicar en la escala de cuadrados. *Si el producto de dos factores no se encuentra en la misma subescala, en la que se ha tomado el primer factor, su orden es igual a la suma de los órdenes de ambos factores. Si el producto resulta en la misma subescala, en la que se tomó el primer factor, el orden del producto es igual a la suma de los órdenes de los factores menos la unidad.*

E j e m p l o s. 1) $2,4 \cdot 0,0075 = 0,018$. Cálculo del orden del resultado: $1 + (-2) = -1$.
2) $0,0018 \cdot 0,0345 = 0,0000621$. Cálculo del orden del resultado: $-2 + (-1) - 1 = -4$.
El cálculo del orden también tiene dos casos al dividir en la escala de cuadrados.

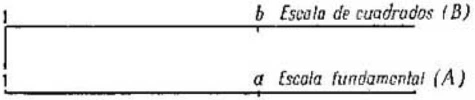

Fig. 129.

Si el cociente se encuentra a la derecha del dividendo, el orden del cociente es igual a la diferencia de los órdenes del dividendo y del divisor. Si el cociente se encuentra a la izquierda del dividendo, su orden es igual a la diferencia de los órdenes del dividendo y del divisor más la unidad.

E j e m p l o s. 1) $450 : 0{,}06 = 7500$. El cálculo del orden del resultado es: $3 - (-1) = 4$.
2) $3{,}6 : 2400 = 0{,}0015$. El cálculo del orden del resultado es: $1 - 4 + 1 = -2$.

§ 192. Elevación de un número al cuadrado

Supongamos que frente a la cota a de la escala fundamental A se encuentra la cota b de la escala de cuadrados B (fig. 129).

Esto significa que la porción desde 1 hasta a es igual a la porción de 1 a b. Pero la porción de 1 a a es igual a $250 \lg a$ mm, puesto que el tamaño de la escala fundamental de la regla es igual a 250 mm. La porción de 1 a b de la escala de cuadrados es igual a $125 \lg b$ mm, puesto que el tamaño de la escala de cuadrados es de 125 mm, como se dijo antes.
Basándonos en la igualdad de las porciones de 1 a a y de 1 a b, tenemos

$$250 \lg a = 125 \lg b,$$

o bien

$$2 \lg a = \lg b,$$

o bien

$$\lg a^2 = \lg b,$$

de donde

$$a^2 = b.$$

De este modo, *enfrente de cualquier lectura (cota) de la escala fundamental A en la escala B se encuentra el cuadrado de este número.*

Observación. Al elevar al cuadrado no interviene la corredera.

DISPOSICION AL ELEVAR UN NUMERO AL CUADRADO

1. Marcamos en la escala fundamental con el visor del cursor el número que se debe elevar al cuadrado.
2. Leemos en la escala de cuadrados, bajo el visor, el cuadrado del número dado.

El orden del cuadrado del número dado se determina del siguiente modo:

a) si el cuadrado del número dado se encuentra en la mitad derecha de la escala de cuadrados, el orden del resultado es igual a $2m$, donde m es el orden de la base;
b) si el cuadrado del número dado se lee en la mitad izquierda de la escala de cuadrados, su orden es igual a $2m - 1$:

Orden del número que se eleva al cuadrado	Orden del cuadrado, si éste se encuentra	
	en la mitad izquierda	en la mitad derecha
m	$2m-1$	$2m$

Ejemplos. 1) $200^2 = 40\,000$. Cálculo del orden $3 \cdot 2 - 1 = 5$.
2) $0{,}00855^2 \approx 0{,}000073$. Cálculo del orden $(-2) \cdot 2 = -4$.
3) $0{,}0295^2 \approx 0{,}00087$.
4) $0{,}604^2 \approx 0{,}365$.
5) $1{,}08^2 \approx 1{,}17$.

§ 193. Extracción de la raíz cuadrada de un número

Antes de proceder a la extracción de la raíz cuadrada en la regla, dividimos el número subradical (radicando) en grupos de dos cifras cada uno, comenzando de la coma a izquierda y a derecha. Si el último grupo a la derecha de la coma es incompleto, le adjudicamos a éste un cero. El primer grupo de la izquierda puede resultar también incompleto.

En el caso de una fracción decimal propia al primer grupo de la izquierda lo vamos a considerar un grupo que sigue a grupos puramente de ceros; éste puede comenzar de cero y en ese caso se considera incompleto.
Por ejemplo, en la fracción 0.00268 el primer grupo de la izquierda 26 es completo, en tanto que en la fracción 0,000169 el primer grupo de la izquierda 01 es incompleto.
Los ceros que anteceden las cifras significativas en la fracción decimal, como ya se dijo, no se toman en cuenta en la disposición. Estos se consideran al determinar el lugar de la coma en la respuesta, o sea, en la raíz.

Observación. Al extraer la raíz cuadrada de un número, de igual modo que al elevar al cuadrado, la corredera no interviene.

DISPOSICION AL EXTRAER LA RAIZ CUADRADA DE UN NUMERO

1. Señalamos en la escala de cuadrados con el visor del cursor las tres primeras cifras significativas (redondeadas) del número subradical; además, si el primer grupo de izquierda es completo, esta disposición o instalación del cursor la efectuamos en la mitad derecha; si el primer grupo es incompleto, la instalación la efectuamos en la mitad izquierda.
2. En la escala fundamental leemos las cifras de la raíz buscada: esta raíz está señalada por el mismo visor del cursor.

Esquemáticamente la disposición en la regla al extraer la raíz cuadrada de un número se anota del modo siguiente:

Primer grupo izquierdo	Mitad de la escala de cuadrados, en la que se dispone el número subradical
Incompleto 189, 0,0235, 0,00024	Izquierda
Completo 0,0012, 0,45, 0,4	Derecha

Para disponer el número subradical en la regla conviene, utilizando la tabla de multiplicación, determinar la primera

cifra de la raíz, es decir, extraer la raíz del primer grupo del radicando, y escribirla en su lugar en la raíz; esta cifra permite controlar la justeza de la disposición en la regla. El número de cifras en la parte entera o el lugar de la coma en la fracción decimal propia de la raíz cuadrada buscada se determina según la siguiente regla:
Para los números mayores que la unidad, la cantidad de cifras en la parte entera de la raíz es igual al número de grupos (completos e incompletos) de la parte entera del radicando; para los números menores que la unidad, la cantidad de ceros después de la coma es igual al número de grupos puramente de ceros en el radicando.

E j e m p l o s.

$\sqrt{49'00} = 70;$ $\sqrt{72',5} = 8,52;$

$\sqrt{7',25} = 2,69;$ $\sqrt{0',00'00'35'5'} = 0,00596;$

$\sqrt{0',00'01'69} = 0,013;$ $\sqrt{0',00'26'8} = 0,052.$

§ 194. Elevación de un número al cubo

En este caso utilizamos la escala de cubos (escala *C*).
La escala de cubos está dividida en tres subescalas consecutivas completamente iguales (izquierda, media y derecha). Las divisiones en cada una de estas subescalas tienen el mismo carácter que las subescalas de cuadrados, sólo que las primeras son respectivamente menores, puesto que el tamaño de la escala de cubos es igual a $\frac{250}{3}$ mm.

Observación. Cuando se eleva al cubo la corredera no interviene.

DISPOSICION AL ELEVAR UN NUMERO AL CUBO

1. Señalamos con el visor del cursor en la escala fundamental el número que se quiere elevar al cubo.
2. Leemos en la escala de cubos el cubo del número dado; éste está señalado por el mismo visor.
El orden del cubo de un número se determina por el siguiente esquema según en cuál de las tres subescalas de cubos se lee el mismo:

Orden del número a elevar al cubo	Orden del cubo de un número, si se encuentra		
	en la subescala izquierda	en la subescala media	en la subescala derecha
m	$3m-2$	$3m-1$	$3m$

Ejemplos. 1) $20^3 = 8000$. Cálculo del orden: $2\cdot 3 - 2 = 4$.
2) $0{,}003^3 = 0{,}000000027$. Cálculo del orden: $-2\cdot 3 - 1 = -7$.
3) $50^3 = 125\,000$. Cálculo del orden: $2\cdot 3 = 6$.
4) $0{,}123^3 = 0{,}00966$. Cálculo del orden: $0\cdot 3 - 2 = -2$.

§ 195. Extracción de la raíz cúbica de un número

Para disponer el número subradical en la regla lo dividimos en grupos de tres cifras cada uno, comenzando de la coma a derecha e izquierda. Si el último grupo a la derecha de la coma es incompleto, hay que añadirle uno o dos ceros para que el grupo sea completo. El primer grupo de izquierda puede ser incompleto, es decir, contener una o dos cifras. Conviene hacer notar que en el caso de una fracción decimal propia el primer grupo de izquierda se considera el que sigue los grupos puramente de ceros. Este grupo puede comenzar con uno o dos ceros y, en ese caso, éste también se considera incompleto; en consecuencia, los ceros de delante no se toman en cuenta como cifras.
Antes de pasar a disponer en la regla el número subradical, hay que aclarar si el primer grupo de la izquierda es completo o incompleto, y si es incompleto, contiene una o dos cifras.

Observación. Al extraer la raíz cúbica de un número la corredera no interviene.

DISPOSICION AL EXTRAER LA RAIZ CUBICA DE UN NUMERO

1. Según la cantidad de cifras del primer grupo de izquierda del número subradical la disposición de éste en la escala de cubos mediante el visor se realiza por el siguiente esquema:

Cantidad de cifras en el primer grupo de izquierda	una	dos	tres
Subescala de cubos, en la que se dispone el número	izquierda	media	derecha
Ejemplos	$\sqrt[3]{8}$	$\sqrt[3]{27}$	$\sqrt[3]{216}$
	$\sqrt[3]{1'728}$	$\sqrt[3]{42'300}$	$\sqrt[3]{156'000}$
	$\sqrt[3]{0',005}$	$\sqrt[3]{0',012}$	$\sqrt[3]{0',125}$
	$\sqrt[3]{0',000'002}$	$\sqrt[3]{0',000'095}$	$\sqrt[3]{0',000'125}$

2. El número buscado, o sea la raíz cúbica, se lee en la escala fundamental, donde está señalado por el mismo visor.

El número de cifras en la parte izquierda de la raíz cúbica buscada, así como el lugar de la coma en él, si es una fracción decimal propia se determinan por la siguiente regla:

Para los números mayores que la unidad, la cantidad de cifras en la parte entera de la raíz cúbica es igual a la cantidad de grupos en la parte entera del número subradical;

para las fracciones decimales propias la cantidad de ceros, después de la coma, en la raíz cúbica es igual a la cantidad de grupos puramente de ceros en el número subradical.

Ejemplos.

$\sqrt[3]{8000} = 20;$ $\quad\sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}2;$

$\sqrt[3]{0',000'027} = 0{,}03;$ $\quad\sqrt[3]{0{,}036} = 0{,}33;$

$\sqrt[3]{125'000'000} = 500;$ $\quad\sqrt[3]{0{,}7} = 0{,}888.$

§ 196. Operaciones combinadas elementales

Durante los cálculos nos encontramos frecuentemente con expresiones que contienen varias operaciones. En tal caso conviene efectuar las disposiciones en la regla que conduzcan rápidamente al fin deseado.

Examinemos algunos ejemplos.

E j e m p l o 1. Calcular $3{,}5^2 \cdot 720$.
Aquí la disposición es la siguiente: señalamos con el visor del cursor 3,5 en la escala fundamental. Multiplicamos por 720 en la escala de cuadrados llevando la unidad final de la corredera bajo el trazo visor, es decir, haciéndola coincidir con el cuadrado del número 3,5. A continuación en la escala de cuadrados hallamos la respuesta: 8800 (enfrente del número 720 en la escala de cuadrados de la corredera).

E j e m p l o 2. Calcular $\frac{2{,}3^2 \cdot 0{,}56}{0{,}0125}$.
Disponemos 2,3 en la escala fundamental y luego todo el cálculo se realiza en la escala de cuadrados. Respuesta: 237.

E j e m p l o 3. Calcular $\frac{\sqrt{3{,}85} \cdot 0{,}48}{25{,}6}$.
Se calcula del siguiente modo: señalamos con el visor del cursor el número 3,85 en la subescala izquierda de la escala de cuadrados, y llevamos bajo el visor el número 25,6 tomado de la escala fundamental de la corredera. Después de esto fijamos en la escala fundamental de la corredera mediante el visor el número 48. En esta posición el visor indica en la escala fundamental de la regla la respuesta buscada: 0,0368.

E j e m p l o 4. Calcular $\frac{3{,}35 \sqrt[3]{44{,}4}}{17{,}8 \cdot 0{,}09}$.
Comenzamos el cálculo disponiendo la raíz cúbica de 44,4. Descendiendo por el visor a la escala fundamental, en ella finalizamos el cálculo por analogía con el ejemplo 3. Respuesta: 7,40.

E j e m p l o 5. Calcular $\left(\frac{108 \cdot 0{,}208}{3{,}08}\right)^3$.
La expresión entre paréntesis se calcula en la escala fundamental y la respuesta la leemos en la escala de cubos. Ella está señalada por el visor en su última posición alcanzada en el cálculo del paréntesis. Respuesta: 388.

E j e m p l o 6. Calcular $\sqrt{\frac{48{,}8 \cdot 0{,}00506}{12{,}6 \cdot 0{,}0304}}$.
Está claro que todo el cálculo del radicando conviene realizarlo en la escala de cuadrados, para leer la respuesta final en la escala fundamental bajo la última posición del trazo visor. Respuesta: 0,803

E j e m p l o 7. En los problemas de carácter aplicado a veces se tropieza con la expresión de tipo $a^{2/3}$. Aquí el cálculo está basado en que $a^{2/3} = \sqrt[3]{a^2}$. En tal caso extraemos la raíz cúbica de a, utilizando la escala de cubos, y la respuesta final la leemos directamente en la escala de cuadrados, sin descender la vista hasta la escala fundamental.

Por ejemplo,

$$8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 4.$$

Calcular $42{,}5^{\frac{2}{3}}$. Disponemos 42,5 en la escala de cubos, y en la escala de cuadrados el mismo trazo visor indica la respuesta: 12,2.

Ejemplo 8. Calcular $(0{,}53)^{\frac{3}{2}}$.

En este ejemplo con el visor del cursor establecemos en la escala de cuadrados 0,53 y en la escala de cubos el mismo visor indica la respuesta: 0,385. No hace falta descender la vista hasta la escala fundamental.

§ 197. Búsqueda de los logaritmos decimales de los números

La escala de logaritmos (escala inferior) es una tabla de mantisas de logaritmos.

DIVISION EN LA ESCALA DE LOGARITMOS

La escala de logaritmos D, a diferencia de las demás escalas, es uniforme. Tiene 10 divisiones señaladas con cifras. Estas divisiones corresponden a la primera cifra de la mantisa del logaritmo. A diferencia de las restantes escalas, la primera división de izquierda es 0 y no 1.

Cada uno de los intervalos entre las divisiones indicadas está dividido también en 10 partes. Estas nuevas divisiones, que sobresalen un poco de la horizontal, corresponden a la segunda cifra de la mantisa del logaritmo.

Cada uno de los intervalos entre las últimas divisiones está dividido en cinco partes. De este modo, el valor de cada una de estas divisiones es igual a dos unidades de la tercera cifra significativa de la mantisa. Utilizando la escala D, se puede realizar cualquier tipo de operación, que requiere el uso de las tablas de logaritmos.

Observación. La corredera no participa al buscar los logaritmos de los números mediante la regla de cálculo.

DISPOSICION EN LA REGLA AL BUSCAR LA MANTISA DEL LOGARITMO DE UN NUMERO

1. Señalamos con el visor del cursor el número dado en la escala fundamental.
2. El mismo visor indica en la escala de logaritmos la mantisa del logaritmo buscada.

Ejemplos. 1) $\lg 6750 = 3{,}830$; 2) $\lg 3{,}14 = 0{,}497$; 3) $\lg 0{,}00873 = \bar{3}{,}941$.

§ 198. Hallar con la regla de cálculo un número dado su logaritmo

Observación. Al hallar un número dado su logaritmo la corredera no interviene.

DISPOSICION AL HALLAR UN NUMERO DADO SU LOGARITMO

1. Señalamos con el visor del cursor la mantisa del logaritmo dado en la escala de logaritmos.
2. En esa posición el visor indica simultáneamente, en la escala fundamental, las tres primeras cifras (a veces también cuatro) del número buscado. El lugar de la coma en este número o la cantidad de ceros después de las cifras halladas se determina por la característica del logaritmo del número dado de acuerdo a las reglas del álgebra.

Ejemplos. 1) $\lg x = 4{,}398$, $x = 25\,000$; 2) $\lg z = \bar{2}{,}714$, $z = 0{,}0518$; 3) $\lg N = 0{,}420$, $N = 2{,}63$.

§ 199. Ejemplos de cálculos con la escala de logaritmos

No tiene sentido calcular en la regla, mediante la escala de logaritmos, expresiones que contengan sólo multiplicación, división, potencias simples (cuadrados, cubos) o raíces cuadradas y cúbicas. Estas se calculan más simplemente con las escalas antes examinadas.
La escala de logaritmos se utiliza fundamentalmente al calcular expresiones exponenciales complejas o expresiones que contienen logaritmos.
Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Calcular la expresión $2{,}57^{0{,}344}$. Tenemos que:

$x = 2{,}57^{0{,}344}$.

Hallamos:

$\lg x = \lg (2{,}57^{0{,}344}) = 0{,}344 \ \lg 2{,}57 = 0{,}344 \cdot 041$.

Multiplicando en la regla, obtendremos

$\lg x = 0{,}141,$

de donde

$x = 1{,}38.$

E j e m p l o 2. Calcular $x = 0{,}00256^{0{,}00256}$. Procedemos a la logaritmación de ambos miembros. Obtendremos:

$\lg x = \lg\ (0{,}00256^{0{,}00256}) = 0{,}00256\ \lg\ 0{,}00256 =$
$= 0{,}00256 \cdot \bar{3}{,}408.$

El logaritmo de característica negativa y mantisa positiva lo representamos en forma de una fracción decimal negativa. Tendremos que:

$\bar{3}{,}408 = -3 + 0{,}408 = -2{,}592.$

Después de esto continuamos el cálculo:
$\lg x = 0{,}00256 \cdot (-2{,}592) = -0{,}00663.$

Transformamos el logaritmo obtenido de manera que su mantisa sea positiva, y la característica negativa. Obtendremos:

$\lg x = \bar{1}{,}993,$

de donde

$x = 0{,}985.$

E j e m p l o 3. Calcular $A = \left(\frac{231}{482}\right)^{0{,}41}$. Tendremos que:

$\lg A = \lg\ \left(\frac{231}{482}\right)^{0{,}41} = 0{,}41\ \lg \frac{231}{482}.$

La fracción $\frac{231}{482}$ no se expone a logaritmación. Dividimos en la escala fundamental 231 por 482 y frente al final de la corredera leemos en la escala de logaritmos la mantisa del logaritmo del cociente 68; la característica de este logaritmo es igual a -1. Por lo tanto, tendremos que
$\lg A = 0{,}41 \cdot \bar{1}{,}68 = 0{,}41\ (-0{,}32) = -0{,}132 = \bar{1}{,}868,$
de donde

$A = 0{,}738.$

E j e m p l o 4. Calcular

$v = 4{,}8 \left(\frac{20{,}5}{135}\right)^{\frac{1}{7}}.$

Al principio dividimos 20,5 por 135 y el cociente obtenido lo ponemos en la expresión dada. Así, obtendremos:

$$v = 4{,}8 \cdot 0{,}152^{\frac{1}{7}}.$$

Con la logaritmación de ambos miembros, tendremos:

$$\lg v = \lg\ 4{,}8 + \frac{1}{7} \lg 0{,}152 = 0{,}681\ \ + \frac{1}{7}\ \ \cdot \bar{1},182\ =$$
$$= 0{,}681 + \bar{1},883 = 0{,}564,$$

de donde

$$v = 3{,}66.$$

Ejemplo 5. Calcular

$$v = \frac{9{,}5}{\sqrt[1{,}75]{2{,}45}}.$$

Tenemos:

$$\lg v = \lg 9{,}5 - \frac{\lg 2{,}45}{1{,}75} = 0{,}978 - \frac{0{,}389}{1{,}75} = 0{,}978 - 0{,}222 =$$
$$= 0{,}756,$$

de donde

$$v = 5{,}70.$$

Ejemplo 6. $v = \dfrac{43{,}5}{0{,}75^{0{,}67} \cdot 6{,}5^{0{,}22}}$.

Tomando logaritmos, tendremos

$$\lg v = \lg 43{,}5 - (0{,}67 \cdot \lg 0{,}75 + 0{,}22 \lg 6{,}5) =$$
$$= 1{,}638 - (0{,}67 \cdot \bar{1},875 + 0{,}22 \cdot 0{,}813) =$$
$$= 1{,}638 - [0{,}67 \cdot (-0{,}125) + 0{,}179] =$$
$$= 1{,}638 - 0{,}095 = 1{,}543,$$

de donde

$$v = 34{,}9.$$

§ 200. Cálculo de la superficie del círculo y el problema inverso

Además de las divisiones de carácter general, muchas reglas de cálculo tienen rayas que indican números frecuentemente encontrados en los cálculos. Por ejemplo, en la escala fundamental y en la escala de cuadrados del cuerpo de la regla y de la corredera se indica especialmente el número π. Al comienzo de la escala fundamental de la corredera (entre las cotas 11 y 12) se tiene la raya c, que sirve para el cálculo de la superficie del círculo.

La superficie del círculo S puede expresarse mediante su diámetro d del siguiente modo:

$$S=\frac{\pi d^2}{4}=\left(\frac{d}{\sqrt{\frac{4}{\pi}}}\right)^2=\left(\frac{d}{c}\right)^2.$$

Como se aprecia, la magnitud $\sqrt{\frac{4}{\pi}}$ se ha designado por c. En consecuencia, tenemos que:

$$c=\sqrt{\frac{4}{\pi}}\approx 1{,}128.$$

Dado el diámetro, la superficie del círculo se determina mediante la raya c del siguiente modo:
1. Señalamos en la escala fundamental de la regla, mediante el visor del cursor, el diámetro dado.
2. Deslizamos la corredera de manera que la cota c quede bajo el visor del cursor.
3. Enfrente del comienzo o del final de las divisiones de la corredera leemos en la escala de cuadrados la superficie buscada.

El orden de la superficie del círculo se determina como el orden del cuadrado de un número. Si el orden del diámetro se designa por m, el orden de la superficie del círculo se determina conforme al siguiente esquema:

La superficie del círculo se encuentra en la escala de cuadrados	Al final de las divisiones de la corredera en la mitad derecha	Enfrente del comienzo de las divisiones de la corredera	
		en la mitad izquierda	en la mitad derecha
Orden de la superficie del círculo	$2m-2$	$2m-1$	$2m$

E j e m p l o s: 1) $d=103$ m, $S=8330$ m^2;
2) $d=0{,}195$ m, $S=0{,}0299$ m^2;
3) $d=457$ m, $S=164\,000$ m^2.

Para hallar el diámetro del círculo dada su superficie procedemos del siguiente modo:
1. Señalamos en la escala de cuadrados con el visor del cursor la superficie dada del círculo.
2. Llevamos bajo el visor del cursor el comienzo o el final de las divisiones de la corredera.

3. Enfrente de la raya c de la corredera hallamos en la escala fundamental el diámetro buscado.
El orden del diámetro del círculo se determina como el orden del producto $c\sqrt{S}$, donde S es la superficie del círculo.

E j e m p l o s. 1) $S = 57{,}7$ m², $d = 8{,}57$ m;
2) $S = 8330$ m², $d = 103$ m.
El cálculo de la superficie del círculo según su diámetro mediante la raya (cota) c permite calcular simplemente una serie de expresiones relacionadas con esta superficie.

E j e m p l o 1. Calcular el volumen de un cilindro circular conociendo el diámetro de su base d y la altura del mismo H.
Tenemos la siguiente fórmula para el volumen del cilindro:

$$V = S \cdot H = \frac{\pi d^2}{4} H, \text{ ó } V = \left(\frac{d}{c}\right)^2 H.$$

La disposición al calcular el volumen del cilindro por esta fórmula está clara. La superficie del círculo hallada según el diámetro dado en la escala de cuadrados la multiplicamos por H y obtendremos, de este modo, el volumen buscado en la escala de cuadrados.
Por ejemplo, si $d = 20{,}3$ dm y $H = 4{,}5$ dm, tendremos que $V = 1460$ dm³.

E j e m p l o 2. Dado el diámetro de una esfera d calcular su superficie Q.
Para la superficie de una esfera Q tenemos la fórmula

$$Q = 4\pi \frac{d^2}{4}, \text{ o bien } Q = 4\left(\frac{d}{c}\right)^2.$$

D i s p o s i c i ó n. Conforme al diámetro dado hallamos en la escala de cuadrados el área del círculo, que inmediatamente la multiplicamos por 4.
Por ejemplo, la superficie Q de una esfera de diámetro $d = 31{,}5$ cm se expresa del siguiente modo:

$Q = 3120$ cm².

E j e m p l o 3. Conocido el diámetro de la esfera d, calcular su volumen. La fórmula del volumen de la esfera es

$$V = \frac{1}{6}\pi d^3,$$

o bien

$$V = \frac{2}{3}\frac{\pi d^3}{4} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi d^2}{4}\right) d = \frac{2}{3}\left(\frac{d}{c}\right)^2 d.$$

D i s p o s i c i ó n. Hallamos en la escala de cuadrados el área del círculo mayor de la esfera dada y la multiplicamos por $\frac{2}{3}d$. Por ejemplo, el volumen de una esfera de diámetro igual a 146 cm es de 1 630 000 cm³.

§ 201. Escala de senos

En el borde superior del reverso de la corredera se encuentra la escala de senos S. En ella las longitudes de los segmentos de la escala, contadas desde su comienzo, son proporcionales a la suma $(1 + \lg \operatorname{sen} x)$, puesto que la escala está construida para la función

$$l = 250\,(1 + \lg \operatorname{sen} x).$$

La escala de senos contiene divisiones desde 5°44′ hasta 90°. El valor de cada división menor está dado en la siguiente tabla:

Intervalo	Valor de una división menor	Intervalo	Valor de una división menor
de 5°44′ a 10°	5′	de 40° a 70°	30′
de 10° a 20°	10′	de 70° a 80°	1°
de 20° a 40°	20′	de 80° a 90°	2,5°

Como se aprecia de la tabla expuesta, el valor de una división menor es variadísimo, es decir, la escala de senos resulta ser heterogénea, y al principio hay que acostumbrarse a sus divisiones para poner después con certeza los ángulos dados y leer rápidamente los ángulos correspondientes al valor dado del seno.

§ 202. Determinación del seno de un ángulo comprendido entre 5°44′ y 90°

DISPOSICION

1. Volvemos la regla al reverso.
2. Deslizamos la corredera hacia la derecha de manera que el ángulo dado en la escala de senos S resulte enfrente de la marca hecha en el recorte de la regla.
3. Damos vuelta la regla hacia el lado frontal.
4. En la escala fundamental de la corredera A_1 leemos enfrente de la unidad final (o bien 10) de la escala fundamental

de la regla A el valor del seno, recordando que la primera cifra significa las fracciones decimales.

E j e m p l o s. 1) sen 20° = 0,342; 2) sen 41°30′ = 0,663; 3) sen 65°30′ = 0,910.

§ 203. Determinación del ángulo según su seno si el orden del seno es 0

DISPOSICION

1. Mantenemos ante sí la parte frontal de la regla.
2. Deslizamos la corredera hacia la derecha de manera que en su escala fundamental A_1 el valor dado del seno resulte enfrente de la unidad final (o bien 10) de la escala A.
3. Volvemos la regla al reverso y en el recorte derecho de la regla, enfrente de la marca, leemos el ángulo en la escala de senos S.

E j e m p l o s. 1) sen $x = 0{,}45$, $x = 26°40'$; 2) sen $\alpha =$ $= 0{,}196$, $\alpha = 11°15'$; 3) sen $y = 0{,}898$, $y = 64°$.

§ 204. Determinación de la tangente de un ángulo comprendido entre 5°44′ y 45°

Utilizamos la escala de tangentes T que se encuentra en el borde inferior del reverso de la corredera. Esta escala contiene divisiones desde 5°44′ hasta 45°; además en el intervalo de 5°44′ a 20° las divisiones están trazadas cada 5′, en el intervalo de 20° a 45° el valor de una división menor es de 10′.

DISPOSICION

1. Damos vuelta la regla al reverso.
2. Deslizamos la corredera hacia la izquierda de manera que el ángulo dado, tomado en la escala de tangentes, resulte en el recorte izquierdo de la regla, enfrente de la incisión.
3. Damos vuelta la regla y en la parte frontal, frente a la unidad inicial de la escala A, leemos el resultado en la escala A_1. Delante del número leído hay que poner el cero entero y la coma.

E j e m p l o s. 1) tg 17° = 0,306; 2) tg 42°30′ = 0,916; 3) tg 8°40′ = 0,152.

§ 205. Determinación de un ángulo por el valor dado de la tangente, si el orden de la tangente es igual a cero

DISPOSICION

1. Deslizamos la corredera hacia la izquierda de manera que el valor de la tangente, tomado en la escala A_1, resulte enfrente de la unidad inicial de la escala A.
2. Damos vuelta la regla al reverso y en la escala T, frente a la marca del recorte de izquierda leemos el ángulo.
E j e m p l o s. 1) $\mathrm{tg}\, x = 0{,}348$, $x = 19°10'$; 2) $\mathrm{tg}\, \alpha = 0{,}85$, $\alpha = 40°20'$; 3) $\mathrm{tg}\, y = 0{,}152$, $y = 8°40'$.

§ 206. Determinación de la tangente del ángulo α si $45° < \alpha < 48°17'$

DISPOSICION

1. Damos vuelta la regla y deslizamos la corredera hacia la izquierda de manera que enfrente de la marca del recorte, de izquierda, en la escala T se encuentre el ángulo suplementario al dado.
2. Damos vuelta la regla hacia el lado frontal y en la escala fundamental de la regla A, enfrente de la unidad final de la escala de la corredera A_1 leemos el valor de la tangente, recordando que la primera cifra significa las unidades enteras.

E j e m p l o s. 1) $\mathrm{tg}\, 48°30' = 1{,}13$; 2) $\mathrm{tg}\, 65°10' = 2{,}16$; 3) $\mathrm{tg}\, 83° = 8{,}14$.

Observación. Si hay que resolver el problema inverso, es decir, dado el valor de la tangente hallar el correspondiente ángulo, las operaciones se realizan en el orden inverso.

E j e m p l o. Dada la $\mathrm{tg}\, \alpha = 2{,}54$, hallar α.
1. Disponemos con el visor 2—5—4 en la escala A y llevamos bajo el trazo visor la unidad final (10) de la escala A_1 de la corredera.
2. Damos vuelta la regla y en el recorte izquierdo, enfrente de la marca leemos el ángulo de 21°30'. Por lo tanto,

$$\alpha = 90° - 21°30' = 68°30'.$$

24-0207

§ 207. Determinación del seno y de la tangente de ángulos pequeños ($44' < \alpha < 5°44'$)

Si el ángulo α es pequeño y no supera $5°44'$, su seno y tangente se diferencian muy poco entre sí, y sus tres primeras cifras decimales coinciden; prácticamente se pueden considerar iguales entre sí. Por eso, en el reverso de la corredera, en la parte media, se encuentra la escala común para el seno y la tangente de ángulos pequeños, o sea, la escala *ST*.

El valor de cada división menor de esta escala está dado en la siguiente tabla:

Intervalo	Valor de la división menor
de 44′ a 3°	1′
de 3° a 5°	2′
de 5° a 5°44′	5′

Al utilizar esta escala, al igual que la escala de senos, hay que recordar que el orden del seno o de la tangente es igual a -1.

E j e m p l o s. 1) sen $2°40' = 0{,}0465$; 2) tg $3°20' = 0{,}0582$.
Inversamente, si dado el valor del seno o de la tangente, de orden -1, hay que hallar el correspondiente ángulo, deslizamos la corredera hacia la derecha y ponemos con el trazo visor el valor del seno o de la tangente en la escala A_1 enfrente de la unidad final de la escala A; damos vuelta la regla y en el reverso, en el recorte derecho, frente a la marca hallamos la magnitud del ángulo en la escala media para los senos y las tangentes.

E j e m p l o s. 1) sen $x = 0{,}0435$, $x = 2°30'$; 2) tg $y = 0{,}0740$, $y = 4°15'$.

Observación. Si mediante la regla de cálculo hay que hallar el coseno o la cotangente de un ángulo, buscaremos respectivamente el seno o la tangente del ángulo suplementario.

▲ Ejercicios

Calcular mediante la regla de cálculo

1. 1) $450 \cdot 48$; 2) $21{,}4 \cdot 2{,}38$; 3) $72{,}5 \cdot 0{,}306$; 4) $358 \cdot 472$; 5) $1{,}46 \cdot 0{,}0298$; 6) $51{,}5 \cdot 1{,}62$; 7) $0{,}202 \cdot 3{,}03$; 8) $8{,}05 \cdot 423$; 9) $419 \cdot 0{,}0358$; 10) $0{,}0177 \times \times 0{,}00785$; 11) $2{,}57 \cdot 0{,}00305$.

2. 1) $485 : 655$; 2) $62,5 : 1,25$; 3) $42,5 : 3,06$; 4) $0,305 : 0,00675$; 5) $246 : 0,188$; 6) $0,107 : 0,00315$; 7) $4,07 : 0,00805$; 8) $52\,300 : 19,8$; 9) $0,0344 : 75$; 10) $0,0404 : 3,25$; 11) $0,0543 : 0,00743$; 12) $2,02 : 0,001435$.

3. 1) $73,5 \cdot 0,124 \cdot 1,07$; 2) $73,5 \cdot 0,124 \cdot 4,3$; 3) $14,5 \cdot 0,00191 \cdot 7,78$; 4) $6,66 \cdot 5,55 \cdot 0,223$.

4. 1) $\dfrac{432 \cdot 0,0218}{0,00555}$; 2) $\dfrac{1,05 \cdot 42,4}{157}$; 3) $\dfrac{5,15 \cdot 0,0243}{0,00555 \cdot 66,8}$; 4) $\dfrac{0,0743 \cdot 4,36}{0,00045 \cdot 23,8}$; 5) $\dfrac{16,7 \cdot 0,952}{0,0044 \cdot 8,62}$; 6) $\dfrac{108 \cdot 0,208}{3080}$; 7) $\dfrac{0,00427 \cdot 6,45}{0,0196 \cdot 23,8}$; 8) $\dfrac{54,2 \cdot 0,42}{0,0154}$; 9) $\dfrac{2,74 \cdot 0,00515 \cdot 1,09}{85,6 \cdot 3,36 \cdot 0,0226}$; 10) $\dfrac{5,6 \cdot 0,27 \cdot 48,5}{0,07 \cdot 0,548}$.

5. 1) $13,5^2$; 2) $4,35^2$; 3) $0,222^2$; 4) $0,0308^2$; 5) 417^2; 6) 670^2; 7) $1,09^2$; 8) $0,0193^2$.

6. 1) $\sqrt{0,4}$; 2) $\sqrt{0,0777}$, 3) $\sqrt{4560}$; 4) $\sqrt{4,56}$; 5) $\sqrt{0,000248}$; 6) $\sqrt{0,00006}$.

7. 1) $\sqrt[3]{425}$; 2) $\sqrt[3]{4,25}$; 3) $\sqrt[3]{42,5}$; 4) $\sqrt[3]{0,425}$; 5) $\sqrt[3]{0,00425}$.

8. 1) $\dfrac{\sqrt{18,9} \cdot 4,56}{0,00735 \cdot 8,07}$; 2) $\dfrac{\sqrt[3]{0,0495} \cdot 6,08}{15,8 \cdot 0,00834}$; 3) $\dfrac{1920 \cdot 0,00509 \cdot \sqrt{6,24}}{4,07 \cdot 70}$; 4) $\dfrac{50,8 \cdot 0,0375 \sqrt[3]{4,95}}{1860 \cdot 0,00356 \cdot 4,03}$; 5) $\left(\dfrac{38,7 \cdot 1200 \sqrt[3]{0,07}}{51,8 \cdot 6,13 \cdot 9}\right)^2$.

9. 1) $0,275^{0,324}$; 2) $0,489^{0,285}$, 3) $0,62^{-0,01}$; 4) $0,157^{0,00485}$; 5) $0,215^{0,505}$; 6) $0,064^{0,0521}$.

10. 1) $24,8 \cdot 5^{0,28} \cdot 0,8^{0,87}$; 2) $30 \cdot \left(\dfrac{2}{9}\right)^{0,125}$; 3) $5,48 \cdot 0,6^{0,8} \cdot 75^{0,8} \cdot 55^{0,4}$; 4) $\dfrac{126\,500 \cdot 400^{0,12}}{5^{0,28} \cdot 0,6^{0,6} \cdot 45^{0,65} \cdot 55^{1,5}}$.

11. 1) $(0,125)^{\frac{2}{3}}$; 2) $(65)^{\frac{2}{3}}$; 3) $(0,55)^{\frac{3}{2}}$.

12. 1) $\sqrt[7,08]{0,427}$; 2) $24,8 \cdot 5^{0,22} \cdot 0,8^{0,87}$; 3) $\sqrt[3,25]{335}$; 4) $\left(\dfrac{1,85}{0,398}\right)^{0,25}$; 5) $\dfrac{0,289^{0,289} \cdot 0,625^{2,34}}{0,505^{2,48}}$.

13. Hallar x: 1) $\dfrac{23,5}{0,0246} = \dfrac{x}{0,00566}$; 2) $\dfrac{0,243}{x} = \dfrac{6,54}{0,0156}$.

CAPITULO XV

NUMEROS COMPLEJOS Y OPERACIONES CON ELLOS

§ 208. Números complejos

No todas las ecuaciones cuadráticas tienen raíces entre los números reales; por ejemplo, la ecuación $x^2 + 1 = 0$, o bien $x^2 = -1$, no tiene raíces, puesto que no existe un número real cuyo cuadrado sea igual a -1.

El problema de resolver la ecuación cuadrática de tipo $x^2 + b^2 = 0$ $(b \neq 0)$ ha servido como uno de los motivos para la introducción de los nuevos *números* llamados *imaginarios*.

Introduciremos el nuevo número i, *la unidad imaginaria*, que posee la propiedad de que su cuadrado sea igual a -1: $i^2 = -1$.

Vamos a admitir sin demostración que se pueden introducir los nuevos números, llamados *números complejos*, de manera que uniéndolos con los ya conocidos números reales, obtendremos un conjunto de números con los que se pueden realizar las operaciones aritméticas según las reglas ordinarias, y, además, entre los nuevos números se tendrá el número i, que posee la propiedad de ser

$i^2 = -1$.

● DEFINICION. *Los números $a + bi$, donde a* y *b son dos números reales, se llaman complejos.* El número a se llama *parte real*; *bi, parte imaginaria* del número complejo. Por ejemplo:

$$3 + 2i\ (a = 3;\ b = 2);\ \ \frac{1}{2} - i\sqrt{2}\ \left(a = \frac{1}{2};\ b = -\sqrt{2}\right).$$

Dos números complejos $a + bi$ y $a_1 + b_1 i$ se consideran *iguales* cuando y sólo cuando son iguales, por separado, sus partes reales e imaginarias, o sea, si

$a + bi = a_1 + b_1 i$, tendremos que $a = a_1$, $b = b_1$.

Si $a = 0$, $b \neq 0$, el número complejo $a + bi$ se convierte en un número imaginario puro bi; b se llama coeficiente de la unidad imaginaria.

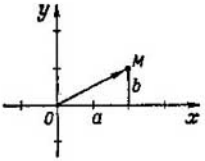

Fig. 130.

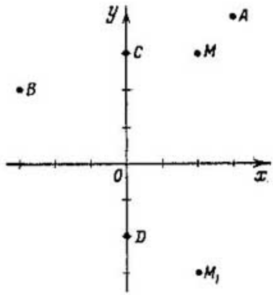

Fig. 131.

Si $b = 0$, el número complejo $a + bi$ deviene un número real igual a a.

El conjunto de números complejos contiene, como parte (subconjunto), tanto todos los números reales como todos los números imaginarios puros; en otras palabras, los números reales, así como los números imaginarios son casos particulares de números complejos.

Por ejemplo:

$$5 = 5 + 0 \cdot i \qquad (a = 5;\ b = 0);$$
$$-3i = 0 + (-3)\, i \quad (a = 0;\ b = -3).$$

Observación 1. La raíz cuadrada de un número negativo se puede expresar mediante la unidad imaginaria i. Por ejemplo:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4\,(-1)} = 2i; \quad \sqrt{-5} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} = i\sqrt{5}.$$

Observación 2. La introducción de los números complejos hace posible la resolución de ecuaciones cuadráticas con discriminante negativo; por ejemplo, la ecuación $x^2 - 6x + 13 = 0$ tiene dos raíces complejas: $x_{1,2} = 3 \pm 2i$.

§ 209. Representación geométrica de los números complejos

El número complejo $z = a + bi$ se admite representarlo por un punto M en el plano; la abscisa de este punto es igual a la parte real a, la ordenada es igual a b, es decir, al coeficiente de la unidad imaginaria (fig. 130). A todo número complejo corresponde un punto determinado del plano, y, viceversa, a cada punto del plano corresponde un número complejo determinado. De este modo, se establece una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano de coordenadas xOy y el conjunto de números complejos. A los puntos del eje Ox corresponden números reales ($b = 0$); a los puntos del eje de ordenadas Oy corresponden los números imaginarios. Así, por ejemplo, el número complejo $3 + 4i$ se representa por el punto A (fig. 131), el número complejo $-3 + 2i$ se representa por el punto B, el número $3i$ se representa por el punto C y el número $-2i$ se representa por el punto D.

● DEFINICIÓN. Los dos números complejos $z = a + bi$ y $\bar{z} = a - bi$ se llaman *conjugados*; se diferencian sólo por el signo ante la parte imaginaria.

Un par de números complejos conjugados se representa por los puntos M y M_1, simétricos respecto del eje de abscisas. En la fig. 131 los puntos M y M_1 representan los números complejos conjugados $2 + 3i$ y $2 - 3i$.

Al número complejo $a + bi$ se le puede dar también otra interpretación geométrica.

Unimos el origen de coordenadas O con el punto M (a; b) (fig. 130). En tal caso, el vector $\overrightarrow{OM}$ se puede admitir como figura geométrica del número complejo $z = a + bi$; además, la parte real a es la proyección del vector $\overrightarrow{OM}$ sobre el eje Ox, el coeficiente b antepuesto a la unidad imaginaria es la proyección del vector sobre el eje Oy:

$$a = \text{proy}_x\overrightarrow{OM}; \quad b = \text{proy}_y\overrightarrow{OM}.$$

Ambos métodos de representación geométrica de los números complejos son equivalentes, puesto que a todo punto M del plano xOy corresponde un vector determinado $\overrightarrow{OM}$, y, viceversa, a todo vector $\overrightarrow{OM}$, cuyo origen coincide con el origen de coordenadas, corresponde un punto determinado M, extremo del vector.

● DEFINICIÓN. Se llama *módulo del número complejo* $z = a + bi$ el número real $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Geométricamente el módulo o valor absoluto es la longitud del radio vector $\overrightarrow{OM}$. El número r es positivo y se anula sólo cuando $a = 0$, $b = 0$.

El módulo de un número complejo se designa con dos líneas verticales a cada lado del número, por ejemplo:

$$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5;$$
$$|-2 - i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

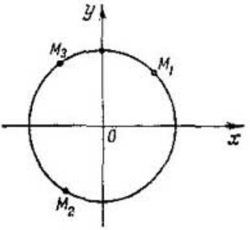

Fig. 132.

En el caso particular cuando $b = 0$, tendremos

$$| a + 0 \cdot i | = \sqrt{a^2 + 0^2} = | a |,$$

es decir, el módulo de un número real es el valor absoluto de ese número. Por eso, el módulo de un número complejo se llama también valor absoluto de ese número.

Todos los números complejos de módulo igual a la unidad se representan por los puntos de una circunferencia unitaria con centro en el origen de coordenadas; por ejemplo, los números

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i; \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i; \quad -0{,}6 + 0{,}8i$$

se representan por los puntos M_1, M_2 y M_3 (fig. 132).

§ 210. Adición de números complejos

● DEFINICION. Se llama *suma de dos números complejos* $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$ el número complejo $z = a + bi$, cuyas partes real e imaginaria son iguales respectivamente a la suma de las partes reales e imaginarias de los números sumandos z_1 y z_2, es decir, $z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i$.

Ejemplos.
1) $(2 + 3i) + (3 - i) = (2 + 3) + (3 - 1)\, i = 5 + 2i$;
2) $(4 - 5i) + (2 + 5i) = 6$;
3) $(2m + ni) + (m - 2ni) = 3m - ni$.

De los ejemplos expuestos se aprecia que la adición de números complejos se realiza por las reglas ordinarias de adición de polinomios.

De la interpretación geométrica de los números complejos como vectores se deduce que la adición de los números

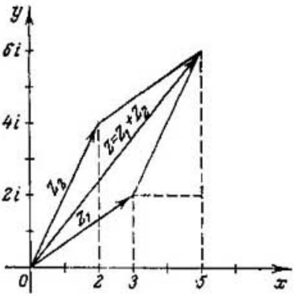

Fig. 133.

complejos se reduce a la adición de vectores según la regla dada en el § 88. En la fig. 133 se muestra la adición de los números complejos $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = 2 + 4i$.

§ 211. Sustracción de números complejos

● DEFINICIÓN. Por *sustracción* de un número complejo $z_1 = a_1 + b_1 i$ de otro número complejo $z_2 = a_2 + b_2 i$ se sobrentiende la determinación de un número $z = a + bi$ que sumado al sustraendo z_2 nos da el minuendo z_1.

En consecuencia,

$$z_1 - z_2 = z,$$

si $z + z_2 = z_1$, o bien

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = a + bi$$

a condición de que

$$a + bi + a_2 + b_2 i = a_1 + b_1 i.$$

Sumando obtendremos:

$$(a + a_2) + (b + b_2)\, i = a_1 + b_1 i.$$

Utilizando la condición de igualdad de dos números complejos, obtendremos:

$$a + a_2 = a_1, \text{ de donde } a = a_1 - a_2,$$
$$b + b_2 = b_1, \text{ de donde } b = b_1 - b_2.$$

En la sustracción de dos números complejos se restan separadamente sus partes reales e imaginarias.

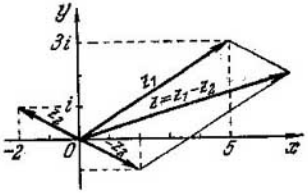

Fig. 134.

E j e m p l o.

$3 - 2i - (1 + 3i) = (3 - 1) + (-2 - 3)\, i = 2 - 5i.$

Geométricamente la sustracción de números complejos significa la resta de sus correspondientes vectores. En la fig. 134 se muestra la sustracción de $z_1 = 5 + 3i$ del número $z_2 = -2 + i$.

§ 212. Producto de números complejos

Dos números complejos $a + bi$ y $a_1 + b_1 i$ se multiplican según la regla ordinaria del producto de polinomios; en el resultado i^2 se sustituye por -1 y se separa la parte real de la imaginaria:

$$(a + bi)(a_1 + b_1 i) = aa_1 + a_1 bi + ab_1 i + bb_1 i^2 =$$

$$\underbrace{aa_1 - bb_1}_{\text{parte real}} + \underbrace{(a_1 b + ab_1)\, i}_{\text{parte imaginaria}}.$$

Tengamos en cuenta que el *producto de dos números complejos también es un número complejo.*

Esta regla de la multiplicación se extiende también a un número mayor de factores complejos

E j e m p l o s. 1) $(2 - 3i)(3 + 5i) = 6 - 9i + 10i - 15i^2 = 6 + i - 15\cdot(-1) = 21 + i$;

2) $(4 + i)\cdot 2i = 8i + 2i^2 = -2 + 8i$.

El producto de números complejos puede resultar un número real. En particular, esto ocurrirá al multiplicar dos números complejos conjugados:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = r^2,$$

donde r es el módulo de cada uno de los factores.

Así pues, el producto de dos números complejos conjugados es un número real, igual al cuadrado de su módulo común.
Veamos un nuevo ejemplo, que demuestra que debido a las operaciones con los números complejos pueden obtenerse interesantes correlaciones en el campo de los números reales. Tenemos dos productos:

$$(a + bi)\,(c + di) = ac - bd + (bc + ad)\, i$$

y

$$(a - bi)\,(c - di) = ac - bd - (bc + ad)\, i.$$

Multiplicando miembro a miembro estas igualdades, obtendremos:

$$(a^2 + b^2)\,(c^2 + d^2) = (ac - bc)^2 + (bc + ad)^2.$$

La última igualdad contiene exclusivamente números reales y expresa la siguiente correlación de la teoría de los números: al multiplicar dos números, cada uno de los cuales es la suma de dos cuadrados, se obtiene un producto que es también la suma de dos cuadrados

E j e m p l o s. 1) $(1 + 4)\,(9 + 25) = 5 \cdot 34 = 170 = 1^2 + 13^2$;

2) $(25 + 4)\,(1 + 9) = 29 \cdot 10 = 290 = 1^2 + 17^2$.

§ 213. División de números complejos

Se llama *cociente de la división de dos números complejos* $a + bi$ y $a_1 + b_1 i$ el número complejo $x + yi$ que multiplicado por el divisor nos da el dividendo.
De este modo, si los coeficientes a_1 y b_1 son simultáneamente distintos de cero, suponiendo que $\frac{a+bi}{a_1+b_1 i} = x + yi$, tendremos:

$$a + bi = (a_1 + b_1 i)\,(x + yi),$$

o bien

$$a + bi = a_1x - b_1y + (b_1x + a_1y)\, i.$$

De la condición de igualdad de dos números complejos se deduce que

$$\begin{cases} a_1x - b_1y = a; \\ b_1x + a_1y = b. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, hallamos que:

$$x=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}, \quad y=\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{a+bi}{a_1+b_1i}=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}\,i.$$

Este resultado se puede obtener más simplemente multiplicando el dividendo y el divisor por un número conjugado al divisor:

$$\frac{a+bi}{a_1+b_1i}=\frac{(a+bi)(a_1-b_1i)}{(a_1+b_1i)(a_1-b_1i)}=\frac{aa_1+bb_1+(a_1b-ab_1)\,i}{a_1^2+b_1^2}=$$

$$=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}\,i.$$

En adelante nos guiaremos con esta regla de la división.

E j e m p l o s.

1) $\dfrac{2+3i}{2+i}=\dfrac{(2+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{4-3i^2+6i-2i}{2^2+1}=\dfrac{7}{5}+\dfrac{4}{5}\,i;$

2) $\dfrac{3-4i}{4+3i}=\dfrac{(3-4i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\dfrac{12-12-16i-9i}{16+9}=\dfrac{-25i}{25}=-i.$

§ 214. Potencia de la unidad imaginaria

Utilizando la igualdad $i^2=-1$, se puede determinar fácilmente una potencia entera positiva cualquiera de la unidad imaginaria. Así, tendremos:

$$i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i;\quad i^4=i^2\cdot i^2=1;$$

$$i^5=i^4\cdot i=i;\quad i^6=i^4\cdot i^2=-1;\quad i^7=-i;\quad i^8=1,\ \text{etc.}$$

Esto demuestra que los valores de la potencia i^n, donde n es un número entero positivo, se repiten periódicamente al aumentar el exponente en 4. Por eso, para elevar el número i a una potencia entera positiva, hay que dividir el exponente por 4 y elevar i a la potencia cuyo índice es igual al resto de la división.

E j e m p l o s.

$$i^{25}=i^{4\cdot 6+1}=i^{24}\cdot i^1=1\cdot i=i;$$

$$i^{38}=i^{36+2}=i^2=-1,\quad i^{51}=i^{48}\cdot i^3=-i.$$

En general

$$i^{4n+1}=i;\quad i^{4n+2}=i^2=-1,\quad i^{4n+3}=i^3=-i,\quad i^{4n}=1.$$

§ 215. Potenciación de un número complejo

La elevación de un número complejo a una potencia entera positiva se realiza por la regla de potenciación de un binomio, puesto que es un caso particular del producto de factores complejos iguales.

E j e m p l o s. $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$; $(a + bi)^3 = a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)\, i$.

§ 216. Extracción de la raíz cuadrada de un número complejo

Supongamos que se quiera extraer la raíz cuadrada del número $a + bi$. Quiere decir que debemos hallar un número complejo $x + yi$ tal que su cuadrado sea igual a $a + bi$. Tendremos que:

$$\sqrt{a + bi} = x + yi,$$

donde x e y son números reales. En tal caso,

$$a + bi = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

Utilizando la condición de igualdad de dos números complejos, obtendremos:

$$x^2 - y^2 = a, \ 2xy = b.$$

Resolvemos este sistema con respecto a las incógnitas x e y. De la segunda ecuación hallamos que $y = \frac{b}{2x}$. En tal caso,

$$x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a,$$

de donde

$$4x^4 - b^2 - 4ax^2 = 0,$$

o bien

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0;$$

por lo tanto,

$$x^2 = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 + 4b^2}}{4}; \quad x^2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Puesto que $\sqrt{a^2 + b^2} \geqslant a$, ante el radical hay que tomar el signo más para que x^2 sea un número positivo o cero; por lo tanto,

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}. \tag{1}$$

Sustituimos este valor de x^2 en la ecuación $x^2 - y^2 = a$ y obtendremos:

$$y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}. \tag{2}$$

Los valores de x e y los hallamos de las igualdades (1) y (2):

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \tag{3}$$

y

$$y = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}. \tag{4}$$

La ecuación $2xy = b$ demuestra que el producto xy tiene el mismo signo que el número b. Por lo tanto, si $b > 0$, x e y tienen signos iguales; si $b < 0$, x e y tienen diferentes signos. Por eso, para $b > 0$ tendremos:

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\right).$$

para $b < 0$, tendremos:

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\right).$$

En la práctica estas fórmulas no se utilizan, sino se realiza el paso dado de los cálculos de x e y en cada caso separado.

E j e m p l o 1.

$$\sqrt{1 + 2i} = x + yi;$$

$$1 + 2i = x^2 - y^2 + 2xyi;$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ xy = 1; \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{x}; \quad x^2 - \frac{1}{x^2} = 1; \quad x^4 - x^2 - 1 = 0; \quad x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2};$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}; \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - y^2 = 1;$$

$$y^2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \quad y = \pm\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

Finalmente

$$\sqrt{1 + 2i} = \pm\left(\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}\right).$$

Ejemplo 2.

$$\sqrt{i}=x+yi,$$
$$i=x^2-y^2+2xiy;$$
$$\begin{cases} x^2-y^2=0, \\ 2xy=1; \end{cases}$$
$$y=\frac{1}{2x};\ x^2-\frac{1}{4x^2}=0;\ 4x^4-1=0;\ x^4=\frac{1}{4};\ x^2=\frac{1}{2};$$
$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}};\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i).$$

Verificación.

$$\left[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right]^2=\frac{1}{2}(1+2i+i^2)=\frac{1}{2}(1+2i-1)=i.$$

En el § 222 se demostrará un método más conveniente de radicación de un número complejo.

§ 217. Forma trigonométrica de un número complejo

Como ya se expresó en el § 209, el número complejo $a+bi$, distinto de cero, se representa por el radio vector $\overrightarrow{OM}$ además la longitud de este vector es el módulo del número complejo (fig. 135):

$$r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

El ángulo φ entre el sentido positivo del eje Ox y el vector $\overrightarrow{OM}$ se llama *argumento del número complejo* $a+bi$. Este ángulo se cuenta desde el eje Ox al vector $\overrightarrow{OM}$, lo que está indicado en el dibujo por una flecha. Si el número complejo es igual a cero, el vector $\overrightarrow{OM}$ se convierte en un punto (vector nulo) y no hay necesidad de hablar de su sentido. Por eso, se considera que el nulo no tiene argumento.

Es evidente que cada número complejo, distinto de cero, tiene un conjunto infinito de valores del argumento; estos valores se diferencian entre sí en un número entero de vueltas completas, es decir, en la magnitud $2\pi k$, donde k es un número entero cualquiera; por ejemplo, los argumentos del número complejo $2+2i$ son los ángulos de tipo $\frac{\pi}{4}+2\pi k$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots)$.

El valor del argumento, tomado en los límites de la primera circunferencia, es decir, de 0 a 2π se llama *principal*.

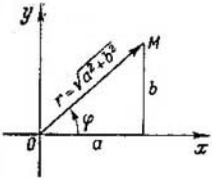

Fig. 135.

Así, por ejemplo, para el número complejo $2+2i$ el valor principal del argumento es igual a $\frac{\pi}{4}$, para el número $-2+2i$ el valor principal del argumento es igual a $\frac{3}{4}\pi$. Para los números $3, -3, i, -i$ los valores principales son respectivamente $0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$.

Por la fig. 135 tendremos:

$a = r\cos\varphi, \ b = r \operatorname{sen}\varphi,$

de donde

$a + bi = r\cos\varphi + ir\operatorname{sen}\varphi = r\ (\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi).$

La expresión $r\ (\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$ se llama *forma trigonométrica* del número complejo, a diferencia de la forma $a+bi$ que se llama *algebraica*.

Para determinar el argumento φ utilizamos las fórmulas

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} \text{ y } \operatorname{sen}\varphi = \frac{b}{r}\ (r = \sqrt{a^2+b^2}).$$

En función del signo de las partes real e imaginaria se toma el correspondiente cuadrante, en el que debe terminar el ángulo φ.

E j e m p l o 1. Representar en forma trigonométrica el número $-1 + i\sqrt{3}$.

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2; \ \cos\varphi = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\left(\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} \text{ y } \cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}\right).$$

Puesto que $\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, φ debe tomarse igual a $\frac{2\pi}{3}$. Por lo tanto,

$$-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right).$$

Ejemplo 2. Representar en forma trigonométrica el número $-1-i$.
Tenemos que:

$$r=\sqrt{2};\ \cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \operatorname{sen}\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto, $\varphi=\frac{5\pi}{4}$.

De este modo, $-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$.

Ejemplo 3. Representar en forma trigonométrica el número 1.
Tenemos que $r=1$, $\varphi=0$; por lo tanto, $1=1(\cos 0+ i\operatorname{sen}0)$, o bien $1=\cos 2\pi k+i\operatorname{sen}2\pi k$.

§ 218. Producto de números complejos dados en forma trigonométrica

Multipliquemos los dos números complejos:

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\operatorname{sen}\varphi_1)$$

y

$$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\operatorname{sen}\varphi_2).$$

Obtendremos:

$$z_1\cdot z_2 = r_1r_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + ir_1r_2\operatorname{sen}\varphi_1\cos\varphi_2 + ir_1r_2\cos\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2 - r_1r_2\operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2.$$

En forma reducida:

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2)].$$

El resultado nos muestra que *el módulo del producto es igual al producto de los módulos de los factores, y el argumento del producto es igual a la suma de los argumentos de los factores.*

§ 219. Interpretación geométrica del producto de números complejos

En la fig. 136 el vector $\overrightarrow{OM_1}$ corresponde al número complejo $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\operatorname{sen}\varphi_1)$, y el vector $\overrightarrow{OM_2}$, al número $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\operatorname{sen}\varphi_2)$.

El vector $\overrightarrow{OM}$ corresponde al producto $z_1z_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2)]$.

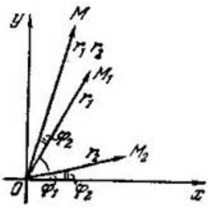

Fig. 136.

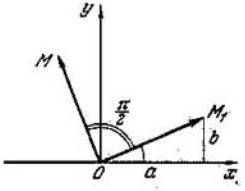

Fig. 137.

El vector $\vec{OM}$ se obtiene del vector $\vec{OM_1}$ girando el ángulo φ_2 y variando su longitud (r_1) r_2 veces. Si $r_2 > 1$, se dice que el vector $\vec{OM_1}$ *se dilata*, y si $r_2 < 1$, *se contrae*. En el caso particular, cuando el número complejo z_1 se multiplica por i, el vector $\vec{OM_1}$ gira un ángulo recto $\left(\frac{\pi}{2}\right)$, conservando, en este caso, la longitud r_1 sin variación (fig. 137).

Ejemplo.

$2(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)\, 5(\cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi) = 10(\cos 3\varphi + i \operatorname{sen} 3\varphi)$.

La regla obtenida sirve para un número cualquiera de factores.

§ 220. División de números complejos dados en forma trigonométrica

Hallamos el módulo y el argumento del cociente

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i \operatorname{sen}\varphi_2)} \cdot$$

Multiplicamos el numerador y el denominador del segundo miembro por $(\cos\varphi_2 - i \operatorname{sen}\varphi_2)$; obtendremos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i \operatorname{sen}\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \operatorname{sen}^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Por lo tanto, *el módulo del cociente es igual al cociente de los módulos del dividendo y divisor, y el argumento del cociente, es igual a la diferencia de los argumentos del dividendo y del divisor.*

Utilizando esta regla se puede demostrar que

$$(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^{-1} = \frac{1}{\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi} = \frac{\cos 0 + i \operatorname{sen} 0}{\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi} =$$
$$= \cos(-\varphi) + i \operatorname{sen}(-\varphi).$$

En forma reducida:

$$(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^{-1} = \cos\varphi - i \operatorname{sen}\varphi.$$

§ 221. Potenciación de un número complejo dado en forma trigonométrica

Puesto que la n-ésima potencia, donde n es un número entero positivo, es el producto de n factores iguales, por la regla de la multiplicación de números complejos obtenemos

$$[r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi),$$

o bien

$$r^n(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi).$$

Después de la reducción, tendremos que:

$$(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^n = \cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi. \qquad (1)$$

Esta fórmula se llama *fórmula de Moivre*. En particular, nos permite obtener el coseno y el seno de los arcos, múltiplos del dado.
Supongamos que $n = 2$, en tal caso $(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi$,
o bien,

$\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi + 2i \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi = \cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi$, de donde

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} 2\varphi = 2 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi.$$

Cuando $n = 3$, tendremos que:

$$(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i \operatorname{sen} 3\varphi,$$

o bien

$$\cos^3\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi + i(3\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi) = \cos 3\varphi + i \operatorname{sen} 3\varphi,$$

de donde

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi,$$

o bien

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi;$$
$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi,$$

o también

$$\operatorname{sen} 3\varphi = 3\operatorname{sen}\varphi - 4\operatorname{sen}^3\varphi.$$

Si ambos miembros de la última igualdad del párrafo anterior los elevamos a la potencia n, obtenemos:

$$[(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^{-1}]^n = [\cos(-\varphi) + i\operatorname{sen}(-\varphi)]^n,$$

o bien

$$(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^{-n} = \cos(-n\varphi) + i\operatorname{sen}(-n\varphi).$$

La última igualdad muestra que la fórmula (1) se cumple también para los exponentes enteros negativos.

§ 222. Radicación de números complejos dados en forma trigonométrica

Supongamos que se quiere extraer la raíz n-ésima del número complejo $Z = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$.
Esto significa que se debe hallar un número complejo $z = \rho(\cos\theta + i\cos\theta)$, que elevado a la n-ésima potencia nos dé el número Z, es decir,

$$[\rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]^n = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi),$$

o bien

$$\rho^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta) = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi).$$

Basándonos en la condición de igualdad de dos números complejos deducimos que sus módulos deben ser iguales, y los argumentos se pueden diferenciar en un número múltiplo de 2π, es decir, $r = \rho^n$; $n\theta = \varphi + 2\pi k$, donde k es un número entero, de donde obtenemos:

$$\rho = \sqrt[n]{r};\ \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}.$$

De este modo, el resultado de la radicación se presenta de la siguiente forma:

$$z = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \tag{1}$$

donde $\sqrt[n]{r}$ es el valor aritmético de la raíz.

Si en la fórmula (1) damos al número k los valores 0, 1, 2, 3, ..., $n-1$, obtendremos los siguientes n valores de la raíz:

$$\text{si } k=0,\ z_0=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\,\text{sen}\,\frac{\varphi}{n}\right);$$

$$\text{si } k=1,\ z_1=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)\right];$$

$$\text{si } k=2,\ z_2=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{4\pi}{n}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{4\pi}{n}\right)\right];$$

. . . .

$$\text{si } k=n-1,\ z_{n-1}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)+\right.$$
$$\left.+i\,\text{sen}\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right].$$

Los argumentos de estos valores de la raíz, es decir, los ángulos

$$\frac{\varphi}{n};\ \frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n};\ \frac{\varphi}{n}+\frac{4\pi}{n};\ \ldots;\ \frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n},$$

van en orden creciente; se comprueba fácilmente que cada uno de ellos es menor que un ángulo completo, o bien 2π. Para ello es suficiente demostrar que el mayor de ellos

$$\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}<2\pi.$$

En realidad, el valor principal del argumento de un número complejo es menor que un ángulo completo: $0\leqslant\varphi<2\pi$, y por eso,

$$\frac{\varphi}{n}+\frac{2(-n)\pi}{n}<\frac{2\pi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}=2\pi;$$

$$\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}<2\pi.$$

De la trigonometría se sabe que en los límites de una circunferencia dos ángulos distintos no pueden tener simultáneamente valores iguales del seno y valores idénticos del coseno; *por lo tanto, todos, los n valores de la raíz serán distintos.*

Con el aumento ulterior del número k ($k=n,\ n+1,\ n+2,\ \ldots$), ya no se obtienen nuevos valores de la raíz;

por ejemplo, para $k=n$ tendremos:

$$z_n=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi n}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\varphi+2\pi n}{n}\right)=$$

$$=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)\right]=$$

$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\varphi}{n}\right)=z_0.$$

Se ha obtenido el mismo valor que para $k=0$. Si $k=n+1$, obtenemos z_1, para $k=n+2$, obtenemos z_2, etc.

Ejemplo 1. $\sqrt{i}$. Representemos i en forma trigonométrica:

$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$ (r es igual a 1);

$$\sqrt{i}=\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}\right).$$

Para $k=0$, obtendremos:

$$\sqrt{i}=\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

Para $k=1$, obtendremos:

$$\sqrt{i}=\cos\frac{5\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

Este ejemplo se resolvió de otro modo en el § 216.

Ejemplo 2. $z=\sqrt[4]{-1}$. Tenemos que:

$-1=\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi.$

Luego

$$\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi}=\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi+2\pi k}{4};$$

para $k=0$, obtendremos:

$$z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);$$

para $k=1$, obtendremos:

$$z_2=\cos\frac{3\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i);$$

para $k=2$, obtendremos:

$$z_3=\cos\frac{5\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);$$

para $k=3$, obtendremos:

$$z_4=\cos\frac{7\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Ejemplo 3. Hallar cuatro valores de $x=\sqrt[4]{1}$.

$$\sqrt[4]{1}=\sqrt{1(\cos 0+i\operatorname{sen} 0)}=$$
$$=\sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{4}+i\operatorname{sen}\frac{0+2\pi k}{4}\right)=$$
$$=\cos\frac{k\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}=x_k.$$

Si $k=0;\ 1;\ 2;\ 3$, obtendremos:

$$x_1=\cos 0+i\operatorname{sen} 0=1;$$
$$x_2=\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=i;$$
$$x_3=\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi=-1;$$
$$x_4=\cos\frac{3\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}=-i.$$

Vamos a dar una interpretación geométrica a los resultados obtenidos. Construimos los puntos correspondientes a los cuatro valores hallados.

Estos serán los puntos A_1, A_2, A_3, A_4, que representan los vértices del cuadrado inscripto en la circunferencia dada (fig. 138).

De un modo semejante, extrayendo la raíz cúbica de 1, hallamos tres números complejos:

$$\cos 0+i\operatorname{sen} 0,\quad \cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\quad \text{y}\quad \cos\frac{4\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}.$$

Si construimos sus puntos correspondientes, éstos estarán sobre una circunferencia de radio unitario y serán los vértices de un triángulo equilátero inscripto (fig. 139).

Geométricamente la extracción de la raíz n-ésima de 1 se reduce a la construcción de un polígono regular de n vértices inscripto en el círculo de radio unitario; además, si n es impar, uno de los vértices se encontrará sobre el eje de abscisas a la derecha de 0; si n es par, se tendrán dos vértices sobre el eje de abscisas.

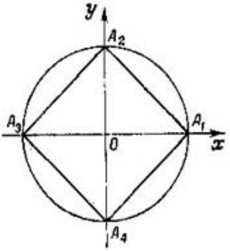

Fig. 138.

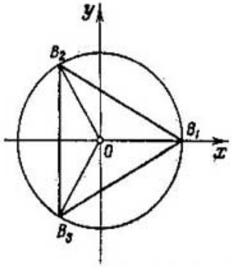

Fig. 139.

§ 223. Forma exponencial de un número complejo

En las diferentes partes de la moderna matemática, así como en sus aplicaciones (electrotecnia, radiotécnica, hidráulica, etc.) se utiliza la *forma exponencial* del número complejo, basada en la fórmula de Euler, que relaciona las funciones trigonométricas del argumento real con la función exponencial del argumento imaginario.

Exponemos la *primera fórmula de Euler* sin deducción:

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi, \tag{1}$$

donde el número e, tomado como base de los logaritmos naturales (véase los §§ 175 y 240), es irracional ($e \approx 2{,}718$; este número es tan importante en la matemática como el número π).

Si en la fórmula $z = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ sustituimos la expresión $\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$ por $e^{\varphi i}$, obtendremos $z = re^{\varphi i}$. Precisamente ésta es la forma exponencial del número complejo z.

En esta notación r es el módulo del número complejo, φ es el argumento del número complejo z.

Sustituyendo en la fórmula de Euler (1) φ por $(-\varphi)$, obtendremos la *segunda fórmula de Euler*

$$e^{-\varphi i} = \cos(-\varphi) + i \operatorname{sen}(-\varphi),$$

o bien

$$e^{-\varphi i} = \cos\varphi - i \operatorname{sen}\varphi. \tag{2}$$

Ejemplo 1. Representar en forma exponencial el número complejo $z = 3 + 4i$.

El módulo $r=\sqrt{3^2+4^2}=5$. Hallamos el argumento φ. Puesto que $\operatorname{tg}\varphi=\frac{4}{3}$, tendremos que $\varphi=\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{4}{3}\approx 0{,}93$, $3+4i=5e^{0{,}93i}$.

Ejemplo 2. $z=\sqrt{3}-i$.
Hallamos el módulo: $|z|=\sqrt{3+1}=2$. El argumento φ (valor principal) lo hallamos de la correlación $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Por lo tanto, $\varphi=-\frac{\pi}{6}$; $\sqrt{3}-i=2e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

Ejemplo 3. $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=e^{\frac{\pi}{2}i}$.

Ejemplo 4. $-1=\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi=e^{\pi i}$

Ejemplo 5. Calcular e^{2+i}.
Tenemos que $e^{2+i}=e^2\cdot e^i=e^2(\cos 1+i\operatorname{sen} 1)=$
$=e^2(0{,}540+i\cdot 0{,}842)=7{,}39\,(0{,}540+i\cdot 0{,}842)\approx 3{,}99+$
$+6{,}22i$.
De la fórmula de Euler

$$e^{\varphi i}=\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi. \tag{1}$$
$$e^{-\varphi i}=\cos\varphi-i\operatorname{sen}\varphi \tag{2}$$

se pueden obtener importantes resultados.
Sumando miembro a miembro las igualdades (1) y (2), obtenemos

$e^{\varphi i}+e^{-\varphi i}=2\cos\varphi$, de donde

$$\cos\varphi=\frac{e^{\varphi i}+e^{-\varphi i}}{2}. \tag{3}$$

Restando miembro a miembro de la igualdad (1) la (2), tendremos

$e^{\varphi i}-e^{-\varphi i}=2i\operatorname{sen}\varphi$, de donde

$$\operatorname{sen}\varphi=\frac{e^{\varphi i}-e^{-\varphi i}}{2i}. \tag{4}$$

Las igualdades (3) y (4) se llaman también *fórmulas de Euler*; ellas expresan las funciones trigonométricas del argumento real φ por las funciones exponenciales del argumento imaginario. Las fórmulas (3) y (4) se cumplen también cuando φ se sustituye por un número complejo z cualquiera; esta sustitución nos da:

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \tag{5}$$

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}; \tag{6}$$

las igualdades (5) y (6) se toman como definición del seno y del coseno de argumento complejo.

E j e m p l o. Calcular $\cos i$.
Poniendo en la igualdad (5) $z = i$, obtendremos:

$$\cos i = \frac{e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}}{2} = \frac{e^{-1} + e^{1}}{2}.$$

Resultó que $\cos i$ es un número real, mayor que 1, lo que no nos debe extrañar.
Calculemos $\operatorname{sen} i$:

$$\operatorname{sen} i = \frac{e^{-1} - e^{1}}{2i} = \frac{i\,(e^{-1} - e^{1})}{-2}.$$

En consecuencia, $\operatorname{sen} i$ es un número imaginario.
Demostremos que las funciones trigonométricas de argumento complejo también son periódicas, de período $T = 2\pi$. En efecto,

$$\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{(z+2\pi)i} + e^{-(z+2\pi)i}}{2} =$$

$$= \frac{e^{zi} \cdot e^{2\pi i} + e^{-zi} \cdot e^{-2\pi i}}{2} = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = \cos z,$$

puesto que por las fórmulas de Euler

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi = 1,$$

$$e^{-2\pi i} = \cos 2\pi - i \operatorname{sen} 2\pi = 1.$$

La periodicidad de la función exponencial de argumento complejo se revela fácilmente; su período es $T = 2\pi i$. En efecto,

$$e^{z+2\pi i} = e^{z} \cdot e^{2\pi i} = e^{z} \cdot 1 = e^{z}.$$

Se observa que todas las fórmulas de la trigonometría ordinaria son válidas en el campo complejo. Por ejemplo,

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1,$$

Esto se verifica fácilmente

$$\left(\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}\right)^2=$$

$$=\frac{e^{2zi}+2+e^{-2zi}}{4}+\frac{e^{2zi}-2+e^{-2zi}}{-4}=$$

$$=\frac{e^{2zi}+2+e^{-2zi}-e^{2zi}+2-e^{-2zi}}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

Exactamente del mismo modo se puede verificar que sen $2z = 2$ sen $z \cdot \cos z$, $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 -$ sen $z_1 \times$ $\times$ sen z_2, y una serie de otras fórmulas conocidas para las funciones trigonométricas de argumento real.

§ 224. Distintos problemas de números complejos

Ejemplo 1. Hallar dos números reales x e y que satisfagan la igualdad

$$\frac{2i}{x}+iy-2=3i-\frac{3}{x}+y.$$

Dicha igualdad la escribimos en la forma

$$-2+\left(\frac{2}{x}+y\right)i=\left(y-\frac{3}{x}\right)+3i.$$

Basándonos en la condición de igualdad de dos números complejos, tendremos el sistema

$$\begin{cases} y-\dfrac{3}{x}=-2, \\ \dfrac{2}{x}+y=3, \end{cases}$$

de donde hallamos:

$x = 1$, $y = 1$.

Ejemplo 2. Hallar el número complejo z, igual al cuadrado del número complejo conjugado a él, es decir,

$$z = \bar{z}^{2}. \qquad (1)$$

Supongamos que $z = x + yi$, en tal caso $\bar{z} = x - yi$. La igualdad (1) toma la forma

$$x + yi = (x - yi)^2,$$
$$x + yi = x^2 - y^2 - 2xyi,$$

de donde

$$\begin{cases} x=x^2-y^2, \\ y=-2xy, \end{cases}$$

donde nuevamente hemos utilizado las condiciones de igualdad de dos números complejos.
Si el sistema toma la forma

$$\begin{cases} x^2-y^2=x, \\ y(1+2x)=0, \end{cases}$$

su resolución se reduce a la resolución de los siguientes dos sistemas más elementales:

$$\begin{cases} x^2-y^2=x, \\ y=0 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} x^2-y^2=x. \\ 1+2x=0. \end{cases}$$

Resolviendo cada uno de ellos, obtendremos:

$$\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=0; \end{cases} \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=0; \end{cases} \begin{cases} x_3=-\frac{1}{2}, \\ y_3=\frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \begin{cases} x_4=-\frac{1}{2}, \\ y_4=-\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

De este modo, los cuatro valores satisfacen la condición establecida:

$$z_1 = 0+0\cdot i = 0,$$
$$z_2 = 1+0\cdot i = 1,$$
$$z_3 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$
$$z_4 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

E j e m p l o 3. Interpretar geométricamente el producto $(2+2i)\,i$. Al número complejo $z_1=2+2i$ corresponde el vector $r_1=\{2, 2\}$; además, el vector r_1 forma con el eje Ox el ángulo

$$\varphi=\frac{\pi}{4}\left(\operatorname{tg}\varphi=\frac{2}{2}=1\right).$$

El número complejo i se representa por el vector unitario $r_2=\{0, 1\}$, dirigido bajo el ángulo $\frac{\pi}{2}$ al eje Ox. De acuerdo a la explicación dada en el § 219, el producto de $(2+2i)$ por i significa el giro del vector r_1 el ángulo $\frac{\pi}{2}$ en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, conservándose la longitud del vector.

Por lo tanto, al producto dado corresponde el vector r_3, que forma con el eje un ángulo igual a $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$.

La longitud del vector r_3 es igual a la longitud del vector r_1, es decir, $|r|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

Verificación: $(2+2i)\,i=-2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$

Ejemplo 4. ¿Cuál es el sentido geométrico de la desigualdad $|z|<1$?

El módulo del número complejo z, es decir, $|z|$, significa la distancia del origen de coordenadas al punto z; ya que esta distancia es menor que 1, describimos del origen de coordenadas una circunferencia de radio $r=1$.

Todos los puntos interiores del círculo representan los números complejos z, para los cuales $|z|<1$. Para los puntos de la circunferencia, tendremos que $|z|=1$. Los puntos externos son números complejos que satisfacen la desigualdad $|z|>1$.

Ejemplo 5. ¿Cómo están dispuestos los puntos complejos que satisfacen la desigualdad $|z-2|<3$?

El módulo de la diferencia de los números z y 2, o sea, $|z-2|$, denota la distancia del punto $z_1=2$ al punto z, que debe ser menor que 3. Por eso, desde el punto 2 trazamos una circunferencia de radio igual a 3 unidades; los puntos complejos interiores de esta circunferencia son soluciones de la desigualdad $|z-2|<3$.

▲ **Ejercicios**

1. Escribir en forma reducida las siguientes expresiones:
a) $i+i+i+i$; b) $5i-9i+12i$; c) $ai+bi$;
d) $10i-10i$; e) $ai+bi-ai$; f) $ai-ai$.

Calcular:

2. a) $(3+5i)+(2+i)$; b) $(7-5i)+(7+5i)$; c) $(2+5i)+$ $+(-2+3i)$.
3. a) $(1+4i)+(-1-4i)$; b) $(-6+3i)+(6+3i)$; c) $(5+3i)+$ $+(12+i)$.
4. a) $(-7+2i)+(7+2i)$; b) $(m+ni)+(x+yi)$; c) $i+(a+bi)$.
5. a) $(3+5i)-(2+i)$; b) $(7-5i)-(7+5i)$; c) $(2+5i)-$ $-(-2+3i)$.
6. a) $1+4i-(-1-4i)$; b) $-6+3i-(6+3i)$; c) $(5+3i)-$ $-(5-3i)$.

7. a) $(0{,}25-i)-(0{,}75+i)$; b) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}i\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}i\right)$; c) $(a+bi)-i$.

8. a) $5(2-3i)$; b) $-3(1+i)$; c) $i(4+5i)$.

9. a) $-2(3-i)$; b) $i(1-i)$; c) $-0{,}5i(1+2i)$.

10. a) $(3+2i)(4-i)$; b) $(1-i)(2+i)$; c) $(0{,}2-0{,}3i)(0{,}5+0{,}6i)$.

11. a) $(3+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})$; b) $(a+mi)(2a-mi)$; c) $(x-i\sqrt{y})\times$ $\times(-x-2i\sqrt{y})$.

12. a) $(3+5i)(4-i)$; b) $(6+11i)(7+3i)$; c) $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i\right)$.

13. a) $(\sqrt{3}+i\sqrt{2})(\sqrt{3}-i\sqrt{2})$; b) $(p-2qi)(2p+qi)$; c) $(a-$ $-i\sqrt{b})(a+2i\sqrt{b})$.

14. a) $(a+i\sqrt{b})(a-i\sqrt{b})$; b) $(3+2i\sqrt{2})(3-2i\sqrt{2})$ c) $(\sqrt{a}+$ $+i\sqrt{b})(\sqrt{a}-i\sqrt{b})$.

Descomponer en pares de factores complejos

15. a) x^2+y^2; b) a^2+9b^2; c) $4m^2+9n^2$.

16. a) $a^2+\frac{b^2}{4}$; b) p^2+1; c) $16+9$.

17. a) $25+1$; b) 5; c) 65.

Calcular los cocientes:

18. a) $\frac{10i}{2}$; b) $\frac{15i}{5i}$; c) $8i:(-16i)$.

19. a) $\frac{21-i}{i}$; b) $\frac{1+i}{i}$; c) $-\frac{12}{5i}$.

20. a) $\frac{5}{1+2i}$; b) $\frac{1+i}{1-i}$; c) $-\frac{17-6i}{3-4i}$.

21. a) $\frac{63+16i}{4+3i}$; b) $\frac{4}{1+i\sqrt{3}}$; c) $\frac{5i}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$.

22. a) $\frac{1-20i\sqrt{5}}{7-2i\sqrt{5}}$; b) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$; c) $\frac{m+ni}{m-ni}$.

23. a) $\frac{1-i^2}{(1+i)^3}$; b) $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}$;

c) $\frac{\sqrt{1+a}+i\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-i\sqrt{1-a}}-\frac{\sqrt{1-a}+i\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}-i\sqrt{1+a}}$.

24. a) $\frac{32}{1+3i\sqrt{7}}$; b) $\frac{21}{4+3i\sqrt{6}}$; c) $\frac{5}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$.

25. a) $\frac{3}{\sqrt{2}-i}$; b) $\frac{7}{\sqrt{5}+i\sqrt{2}}$; c) $\frac{10i}{3+i}$.

Elevar a potencia:

26. a) i^{24}; b) i^{37}; c) i^{49}; d) $(-i)^{10}$; e) $(-i)^{9}$; f) $-i^{10}$.

27. a) i^{21}; b) i^{11}; c) i^{25}; d) i^{44}; e) i^{58}; f) i^{136}.

28. a) $(2-i\sqrt{2})^2$; b) $(x+yi)^2+(x-yi)^2$; c) $(1+i)^3$.

29. a) $(-0{,}5-0{,}5i\sqrt{3})^2$; b) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^3$;

c) $\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^4+\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^4$.

30. a) $(4+3i)^2$; b) $(2-i\sqrt{3})^2$; c) $(1-i)^3$.

Extraer la raíz:

31. a) $\sqrt{ai}$; b) $\sqrt{5+12i}$.

32. a) $\sqrt{21+20i}$; b) $\sqrt{-13+84i}$.

33. a) $\sqrt{15+8i}$; b) $\sqrt{-77+36i}$.

34. a) $\sqrt{3{,}75+2i}$; b) $\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i}$.

35. Construir los puntos que representan los números: a) $3+5i$; b) $4-i$; c) $-3+2i$; d) $-2-2i$; e) 5; f) $-4i$; g) $5i$; h) $0{,}2-0{,}5i$; i) $-5i-5$.

36. ¿Cómo se dispone en el plano la representación de dos números complejos conjugados?

Hallar el módulo y el argumento de los números:

37. a) $1+i$; b) $1-i$; c) $-1+i$; d) $-1-i$.

38. a) $\sqrt{3}+i$; b) $5+2i$; c) $-2i$; d) $3-3i$.

Representar en forma trigonométrica los números:

39. a) i; b) $-i$; c) -3; d) $\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$.

40. a) $3+2i$; b) $3+4i$.

41. a) $3-4i$; b) $8+5i$.

42. a) $2+3i$; b) $-12+5i$.

43. a) $-2-7i$; b) $4-3i$.

Construir los sumandos y la suma de los números complejos:

44. a) $3+4i$ y $5+3i$; b) $1-5i$ y $2+3i$; c) $-4+2i$ y $4+2i$.

45. a) $5+3i$ y $3+5i$; b) $1-3i$ y $1+3i$; c) $-5+2i$ y $5+2i$

Formar el minuendo, el sustraendo y la diferencia de los números complejos:

46. a) $3+4i$ y $2+i$; b) $7-2i$ y $5-3i$; c) $4+5i$ y $5+4i$.

47. a) $3+6i$ y $6+3i$; b) $6+3i$ y $3+6i$; c) $1-i$ y $3i$.

Calcular los productos:

48. $2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)\cdot 3(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$.

49. $2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)\cdot 3(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$.

50. $2(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)\cdot(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$.

51. $(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)\cdot(\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ)$.

52. $(\cos 40^\circ + i \operatorname{sen} 40^\circ)\cdot(\cos 50^\circ + i \operatorname{sen} 50^\circ)$.

Demostrar que

53. $(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)^2 = \cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ$.

54. $(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)^3 = i$ ó sea $\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ$.

55. $(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)^{\frac{1}{2}} = \cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ$.

Calcular

56. a) $(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)^3$; b) $(\cos 25^\circ + i \operatorname{sen} 25^\circ)^5$.

57. a) $(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)^4$; b) $(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)^4$.

58. $\sqrt{i}$. 59. $\sqrt{-i}$. 60. $\sqrt{1+i}$. 61. $\sqrt{1-i}$. 62. $\sqrt[3]{i}$. 63. $\sqrt[5]{1}$.

64. $\sqrt[6]{1}$. 65. $\sqrt[4]{-1}$.

66. Representar en forma de vectores los siguientes números: $1{,}5$; -2; i; $-3i$; $2+i$; $-2+i$; $2-i$; $-2-i$.

67. Interpretar geométricamente cada una de las siguientes operaciones con números complejos:
1) $(2+3i)+(-1+i)$; 2) $(-4+2i)-(2-3i)$;
3) $2i\cdot 3$; 4) $(1+2i)\,i$;
5) $(1+i)\cdot(1+\sqrt{3}i)$; 6) $(1-\sqrt{3}i)^2$.

68. Hallar los números reales x e y de las ecuaciones:
1) $3+2xi+3yi = 8i+x-2y$; 2) $(1-i)\,x+(2+i)\,y = 4+2i$;
3) $\frac{8i}{x}+iy-2 = 7i-\frac{10}{x}+y$.

69. Hallar las raíces complejas de las siguientes ecuaciones cuadráticas:
1) $x^2-6x+13=0$; 2) $2x^2+5x+6=0$; 3) $x^2-2(1+i)\,x+$
$+(2i-1)=0$.

70. Cómo están distribuidos en el plano los puntos complejos z, para los cuales:

1) $\varphi=\frac{\pi}{4}$; 2) $\varphi=\frac{2}{3}\pi$; 3) $\varphi=1{,}2$; 4) $|z|>1$; 5) $|z|<5$;

6) $2<|z|<4$; 7) $|z+1|<3$; 8) $|z-i|>2$.

71. Representar en forma exponencial los siguientes números complejos:
1) $2+3i$; 2) $1-i$; 3) $2i$; 4) $-\sqrt{3}+i$; 5) -2; 6) i.

72. Transformar en la forma algebraica:

1) $2\cdot e^{\frac{\pi}{8}i}$; 2) e^{2+i}; 3) $2\cdot e^{1-\frac{\pi}{4}i}$.

73. Utilizando la igualdad $a^x = e^{x\ln a}$, $a>0$ y $a\neq 1$ (verificar por logaritmación), representar en forma exponencial los siguientes números:

1) 2^{3i}; 2) $3^{-\frac{1}{2}}$; 3) 5^{1+i}; 4) 10^{1-i}.

74. Calcular los valores de las funciones trigonométricas de argumento complejo:

1) $\cos(2-i)$; 2) $\operatorname{sen}(1+0{,}5i)$; 3) $\cos\left(\frac{1}{2}+3i\right)$; 4) $\operatorname{sen}(-3i)$.

75. Demostrar la validez de las igualdades

1) $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$;

2) $\operatorname{sen}(z_1+z_2)=\operatorname{sen} z_1 \cos z_2+\cos z_1 \operatorname{sen} z_2$;
3) $\cos 2z=\cos^2 z-\operatorname{sen}^2 z$;
4) $\operatorname{sen} 2z=2 \operatorname{sen} z \cos z$.

76. Demostrar que las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, para a, b y c reales y discriminante negativo, son un par de números complejos conjugados.

77. ¿Cuál debe ser la dependencia entre x e y para que el producto $(x+yi)\cdot(2+3i)$ sea un número real?

78. Demostrar que si z y $\bar{z}$ es un par de números complejos conjugados, entonces z^3 y $\bar{z}^3$ son también mutuamente conjugados.

79. ¿Cómo están distribuidos en el plano xOy los puntos complejos z, que satisfacen la desigualdad:

$$\log_{\frac{1}{2}}|z|+\log_{\frac{1}{2}}(|z|+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2|z|+5)?$$

80. Resolver la desigualdad:

$$-2<2\log_{\frac{1}{3}}|x+1-i\sqrt{5}|<-\log_3 2-1.$$

CAPITULO XVI

ELEMENTOS DE LA TEORIA DE LOS LIMITES

§ 225. Ejemplos de repetición del concepto de función y propiedades generales de las funciones

En el capítulo VI fueron dados los conocimientos fundamentales sobre funciones. Sin llegar a repetir las definiciones y formulaciones dadas antes, veamos una serie de ejemplos concretos, que en conjunto abarcan todos los momentos importantes del estudio de las funciones dentro de los límites previstos por el programa.

Ejemplo 1. Dada la funcion $f(x)=2x^3-\frac{1}{x}+1$, calcular: $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $\frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)+3}$; $f\left(\frac{1}{x}\right)$. Demostrar que el número $x=-1$ es una raíz de la función $f(x)$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{3}\right)^3-\frac{1}{\frac{1}{2}}+1=-\frac{3}{4};$$

$$\frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)+3}=\frac{1}{-\frac{3}{4}+3}=\frac{4}{9};$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3-\frac{1}{\frac{1}{x}}+1=\frac{2}{x^3}-x+1.$$

Puesto que $f(-1)=2\cdot(-1)^3-\frac{1}{-1}+1=0$, tendremos que el número -1 realmente es una raíz de la función $f(x)$.

Ejemplo 2. La magnitud de la presión atmosférica p (kgf/cm^2) varía según la ley $p=e^{-0,12h}$ en función de la altura h (km) sobre el nivel del mar. Hallar la presión a la altura $h=10$ km.

Utilizando la tabla dada al final del libro hallamos $e^{-0,12\cdot 10}=e^{-1,2}\approx 0,3012\approx 0,3$.

De este modo, la presión atmosférica a la altura $h=10$ km es, aproximadamente, igual a 0,3 kgf/cm^2.

E j e m p l o 3. Expresar la superficie de un triángulo rectángulo de hipotenusa constante, igual a c, como función del ángulo agudo α. ¿Para qué magnitud de α la superficie alcanza el valor máximo?

Si designamos los catetos por a y b, $S=\frac{ab}{2}$, pero $a=$ $=c \operatorname{sen} \alpha$, $b=c\cos\alpha$, luego

$$S=\frac{c^2}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=\frac{c^2}{4}\operatorname{sen}2\alpha.$$

Así, pues, la función buscada es $S=\frac{c^2}{4}\operatorname{sen}2\alpha$. La superficie será máxima si $\operatorname{sen}2\alpha=1$, es decir, cuando $\alpha=45°$. En consecuencia; si la hipotenusa es constante la superficie mayor corresponde al triángulo rectángulo isósceles; esta superficie mayor es igual a $\frac{c^2}{4}$.

E j e m p l o 4. Hallar el campo de definición de cada uno de las siguientes funciones:

1) $y=\sqrt{2-\lg(4-x)}$;

2) $y=\operatorname{arc\,sen}\frac{x-3}{\sqrt{2}}$;

3) $y=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$.

1) La función $\sqrt{2-\lg(4-x)}$ está definida para todo x que satisfaga el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} 2-\lg(4-x)\geqslant 0; \\ \qquad 4-x>0. \end{cases}$$

o bien

$$\begin{cases} \lg(4-x)\leqslant 2, \\ \qquad x<4. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema hallamos $-96\leqslant x<4$. El campo de definición es el semisegmento $[-96, 4)$.

2) la función $\operatorname{arc\,sen}\frac{x-3}{\sqrt{2}}$ está definida para todo x que satisfaga la desigualdad $\left|\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right|\leqslant 1$, lo que es equivalente a la doble desigualdad $-1\leqslant\frac{x-3}{\sqrt{2}}\leqslant 1$, o bien $-\sqrt{2}\leqslant$ $\leqslant x-3\leqslant\sqrt{2}$. Sumando 3 a todos los miembros de la

desigualdades obtendremos $3-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 3+\sqrt{2}$. La región de definición de la función dada es el segmento $[3-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}]$. 3) La función $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$ está definida para todos los valores del argumento, para los cuales $\cos x \neq 0$ y $\operatorname{sen} x \neq 0$; por lo tanto, $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$ y $x \neq \pi k$. En consecuencia, la región de definición es todo el eje numérico, con exclusión de los puntos $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, donde $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, y los puntos $x=\pi k$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Se puede decir de otro modo, que la región de definición está compuesta de un conjunto infinito de intervalos:

$$\ldots, \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right), \ldots$$

Ejemplo 5. Demostrar que: 1) la función $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ es par; 2) la función $\varphi(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ es impar.

1) $f(-x)=\frac{e^{-x}+e^x}{2}=f(x)$.

La igualdad obtenida $f(-x)=f(x)$ demuestra que la función es par (véase la definición de la función par).

2) $\varphi(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{2}=-\frac{e^x-e^{-x}}{2}=-\varphi(x)$.

De la igualdad $\varphi(-x)=-\varphi(x)$ se deduce quo la función $\varphi(x)$ es impar (por definición de la función impar).

Ejemplo 6. Demostar que: 1) la función $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ tiene el valor mínimo igual a 1, para $x=0$; 2) la función $\varphi(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ es monótona creciente en todo el eje numérico.

1) Representar $f(x)$ en la siguiente forma:

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\left[\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2+2\right]$$

(¡ verifíquese !). La expresión $\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 \geqslant 0$ (el cuadrado de un número real es un número no negativo), y por eso, la suma entre corchetes no es menor que 2. Esta suma toma el valor de 2, si el primer sumando $\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2=0$, lo que ocurre cuando $x=0$. Luego,

$$f(0)=f_{\text{menor}}=\frac{1}{2}[0+2]=1.$$

2) Para demostrar que la función $\varphi(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ es monótona creciente en todo el eje numérico es suficiente comprobar que para los dos valores cualesquiera del argumento x_1 y x_2, donde $x_2>x_1$, se cumple la desigualdad $\varphi(x_2)>\varphi(x_1)$ (es decir, a un gran valor del argumento corresponde un gran valor de la función), lo que es equivalente a la desigualdad $\varphi(x_2)-\varphi(x_1)>0$. Vamos a demostrar la validez de esta desigualdad. Tenemos que:

$$\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=\frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{2}-\frac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}[e^{x_2}-e^{-x_2}-e^{x_1}+e^{-x_1}]=\frac{1}{2}\left[(e^{x_2}-e^{x_1})+(e^{-x_1}-e^{-x_2})\right].$$

La primera diferencia entre paréntesis es positiva, puesto que de $x_2>x_1$ se deduce que $e^{x_2}>e^{x_1}$ (véase el § 159). El segundo sumando entre corchetes, es decir, $e^{-x_1}-e^{-x_2}$, también es positivo, puesto que $e^{-x_1}-e^{-x_2}=\frac{1}{e^{x_1}}-\frac{1}{e^{x_2}}>0$ (de dos fracciones positivas con igual numerador es mayor aquella cuyo denominador es menor). De lo dicho se deduce que la expresión entre corchetes, es un número positivo para todo $x_2>x_1$.
De este modo, $\varphi(x_2)-\varphi(x_1)>0$, o bien $\varphi(x_2)>\varphi(x_1)$, lo que se quería demostrar.

Ejemplo 7. Demostrar que la gráfica de la función par es simétrica respecto del eje de ordenadas, y la gráfica de la función impar es simétrica respecto del origen de coordenadas.
Supongamos que $f(-x)=f(x)$, luego, a dos valores contrarios cualesquiera del argumento x y $-x$ corresponde un mismo valor de la funcion y, es decir, los puntos $M(x;\ y)$ y $M_1(-x;\ y)$ son simétricos respecto del eje de ordenadas, y dado que el conjunto de todos los puntos de este tipo forma la gráfica de la función, de aquí se deduce, precisamente, su simetría respecto del eje Oy.
En el caso de la función impar tendremos la igualdad $f(-x)=-f(x)$ o que es equivalente a ésta la igualdad $-f(-x)=f(x)$. A todo punto $M(x;\ y)$ de la gráfica le corresponde el punto $M_1(-x;\ -y)$ de la misma gráfica. Estos dos puntos son simétricos respecto del origen de coordenadas O, puesto que el segmento MM_1 pasa por el origen de coordenadas O y aquí se divide por la mitad (trácese el dibujo y demuéstrese geométricamente).

E j e m p l o 8. Dada la función $y(t) = 2 \operatorname{sen}(10\pi t - 0{,}3)$, hallar: 1) el período de esta función; 2) su menor raíz positiva.

1) Supongamos que el período es igual a T. En ese caso, de acuerdo a la definición del período (véase el § 112) para todo número t debe tenerse la igualdad

$$y(t + T) = y(t) \tag{1}$$

o bien $2 \operatorname{sen}[10\pi(t + T) - 0{,}3] = 2 \operatorname{sen}(10\pi t - 0{,}3)$, lo que es equivalente a que la diferencia se anula:

$$\operatorname{sen}[\underbrace{10\pi(t+T)-0{,}3}_{x}] - \operatorname{sen}(\underbrace{10\pi t - 0{,}3}_{y}) = 0.$$

El primer miembro de la igualdad se puede transformar en un producto según la fórmula $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen}\frac{x-y}{2} \times \cos\frac{x+y}{2}$. Luego, obtendremos:

$$2 \operatorname{sen} 5\pi T \cos[10\pi t - 0{,}3 + 5\pi T] = 0.$$

El segundo factor $\cos[10\pi t - 0{,}3 + 5\pi T]$ no puede ser idénticamente (para todos los valores de t) igual a cero.

Por lo tanto, $\operatorname{sen} 5\pi T = 0$, $5\pi T = \pi k$, $5T = k$. Pero, dado que el período es el menor número que satisface la correlación (1), entonces $k = 1$, de donde $T = \frac{1}{5}$.

2) Para hallar la raíz de la función $y(t)$ resolvemos la ecuación

$$2 \operatorname{sen}(10\pi t - 0{,}3) = 0,$$

de donde $10\pi t - 0{,}3 = 0$; $t = \frac{0{,}3}{10\pi} = \frac{0{,}03}{\pi} \approx 0{,}0095$.

Como suplemento a lo dicho en el § 48 sobre los métodos de planteo de las funciones, conviene agregar que además de los métodos tabular, analítico y gráfico, existen también otros procedimientos de planteo. Así, por ejemplo, la función se la puede dar por una regla verbal cualquiera, por la que a cada número x se le puede poner en correspondencia otro número y.

Por ejemplo, definimos la función $E(x)$ por la siguiente regla: el valor de la función es igual al mayor número entero contenido en el argumento x y que no lo supera. Basándonos en esta regla tendremos: $E(3,2) = 3$; $E(-1{,}5) = -2$; $E(5) = 5$; $E(0{,}8) = 0$, etc. $E(x)$ toma (de acuerdo a la difinición) sólo valores enteros. A esta función se le ha dado la denominación especial «entero de x». En la literatura matemática se tropieza con otra notación de esta función, por ejemplo $[x]$. Constrúyase individualmente la gráfica de la función $E(x)$.

Para adquirir experiencia en la resolución de ejemplos, semejantes a los expuestos en este párrafo, al final del capítulo se da una cantidad suficiente de ejercicios; el manejo libre de este material ayuda a dominar mejor los elementos de la teoría de los límites, que es el contenido fundamental de este capítulo.

§ 226. Algunos métodos de construcción de las gráficas de las funciones

Al construir la gráfica del trinomio cuadrático $y = ax^2 + bx + c$, así como de la función $y = A \cdot \text{sen}\,(kx + a)$ hemos utilizado los mismos métodos. Formulemos la comunidad de estos procedimientos-lo que permite utilizarlos también en otros casos, es decir, al construir las gráficas de las funciones que aún desconocemos.

1) Si conocemos la gráfica de la función $y = f(x)$, la gráfica de la función $y = f(x) + c$ se obtiene de la gráfica de la función inicial desplazada $|c|$ unidades hacia arriba en dirección al eje de ordenadas Oy, si $c > 0$, y hacia abajo, si $c < 0$ (fig. 140).

2) Si $y = mf(x)$, la gráfica de esta función se puede obtener de la inicial alargando todas las ordenadas m veces, si $m > 1$ (fig. 141), y comprimiéndolas $\frac{1}{m}$ veces, si $0 < m < 1$ (fig. 142). Cuando $m < 0$, para $|m| > 1$ (respectivamente $|m| < 1$), al principio se alargan las ordenadas $|m|$ veces (respectivamente se comprimen $\frac{1}{|m|}$ veces), y a continuación la gráfica se representa de modo especular respecto del eje Ox.

3) $y = f(x - a)$. Esta gráfica se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ desplazándola a $|a|$ unidades de la escala hacia la derecha en dirección al eje Ox, si $a > 0$, y hacia la izquierda si $a < 0$ (fig. 143).

4) La gráfica de la función $y = f(kx)$, $k > 0$, se puede obtener si todas las abscisas de la gráfica de $y = f(x)$ se reduce k veces, manteniendo las ordenadas constantes. Cuando $k < 1$, las abscisas de hecho aumentarán $\frac{1}{k}$ veces. Puede servir de ejemplo la gráfica de $y = \text{sen}\, 2x$ obtenida de la gráfica de $y = \text{sen}\, x$ (§ 138).

5) La gráfica de la función $y = |f(x)|$ se puede obtener de la gráfica de $y = f(x)$, si los arcos de curva, que se encuentran bajo el eje de abscisas, se representan especularmente respecto del eje Ox (fig. 144).

E j e m p l o. Construir la gráfica de la función $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

Dicha función está definida en todo el eje numérico, salvo el punto $x = 1$ Transformemos la expresión fraccionaria $\frac{2x+1}{x-1}$, para ello

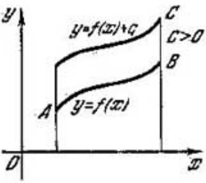

Fig. 140.

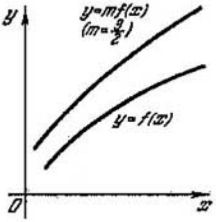

Fig. 141.

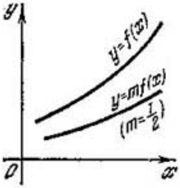

Fig. 142.

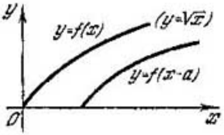

Fig. 143.

dividimos el numerador por el denominador. Obtendremos $y = 2 + \frac{3}{x-1}$ (¡verifíquese!)

Ahora se puede suponer que para construir la gráfica de la función dada hay que tomar como base la gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$, es decir, la hipérbola.

Realizamos con la hipérbola $y = \frac{1}{x}$ las siguientes operaciones:

1) Desplazamos una unidad de la escala en el sentido positivo del eje Ox; a la nueva situación de la hipérbola respecto de los ejes de ordenadas le corresponde la ecuación $y = \frac{1}{x-1}$.

2) Alargamos todas sus ordenadas tres veces, en tal caso la nueva ecuación toma la forma $y = \frac{3}{x-1}$.

3) Desplazamos dos unidades de la escala en el sentido positivo del eje Oy (fig. 145), lo que nos conduce a la gráfica de la función

$y = 2 + \frac{3}{x-1}$, o bien $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

El ejemplo examinado es un caso particular de la función

de tipo $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ para $x \neq -\frac{d}{c}$.

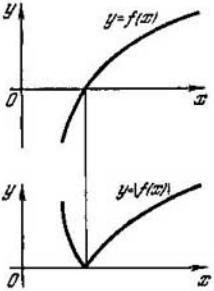

Fig. 144.

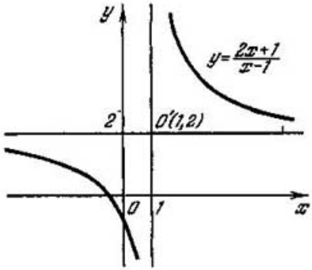

Fig. 145.

Esta función se llama fraccionaria lineal, puesto que es la relación de dos funciones lineales. En forma general se puede demostrar (de modo análogo como se efectuó en el ejemplo examinado antes) que la gráfica de la función fraccionaria lineal es una hipérbola.

§ 227. Funciones elementales

Como se sabe el título de este libro es «Algebra y funciones elementales», por lo que los lectores se preguntarán, naturalmente, ¿qué significa función elemental? Es que, hasta ahora, sobre la misma no se ha dicho ni una palabra. En realidad este concepto no se podía definir, mientras no se estudiasen las funciones fundamentales.

Se consideran *funciones elementales fundamentales*:

1) $y = C$, donde C es un número real
2) la función potencial $y = x^{\alpha}$, α es un número real;
3) la función exponencial $y = a^x$ $(a > 0$ y $a \neq 1)$;
4) la función logarítmica $y = \log_a x$ $(a > 0$ y $a \neq 1)$;
5) las funciones trigonométricas: $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$;
6) las funciones trigonométricas inversas: $\operatorname{arc\,sen} x$, $\operatorname{arc\,cos} x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,ctg} x$.

En este libro se ha dedicado considerable lugar al estudio de las funciones antes enumeradas. Las funciones obtenidas de las funciones elementales fundamentales mediante las cuatro operaciones aritméticas y la operación de tomar la función de la función, se llaman *elementales*. En particular, entre ellas se encuentran:

1) la función lineal $y = ax + b$;
2) la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$;

3) las funciones: a) $\sqrt{2}\cdot 2^x \cos x$, b) $\frac{x^2}{\operatorname{arc\,sen} x}$ y otras.

Las funciones elementales se utilizan ampliamente en la ciencia y en la técnica.

§ 228. Propiedades de las magnitudes absolutas

En los capítulos anteriores ya hemos operado con la magnitud absoluta de los números reales. Recordemos que se llama magnitud absoluta de un número real a el propio número a, si éste no es negativo, y el número inverso $(-a)$, si el número a es negativo:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Por ejemplo, $|-5| = 5$; $|12| = 12$.

Propiedad 1. *La magnitud absoluta de una suma no es mayor que la suma de las magnitudes absolutas de los sumandos:*

$|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

Se tendrá el signo igual sólo cuando ambos sumandos son de signo igual.

Ejemplos. 1) $|(-2) + (-8)| = |-2| + |-8|$, $10 = 10$;
2) $|15 + (-3)| < |15| + |-3|$, $12 < 18$. Esta propiedad se extienda a un número finito cualquiera de sumandos.

Propiedad 2. *La magnitud absoluta de la resta de dos números reales no es menor que la diferencia de las magnitudes absolutas de estos números:*

$|a - b| \geqslant |a| - |b|$.

Ejemplos. 1) $|15 - 9| = |15| - |9|$, $6 = 6$;
2) $|3 - (-1)| > |3| - |-1|$, $4 > 2$.

§ 229. Límite de una sucesión

En el § 141 se dieron los conocimientos iniciales de las sucesiones. Antes de estudiar este párrafo recomendamos leer todo lo dicho antes sobre las sucesiones. Veamos al principio algunos ejemplos de determinación del *límite* de una sucesión.

E j e m p l o 1. Supongamos que el término común de una sucesión es $x_n = \frac{n}{n+1}$; para $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 100, \ldots 1000, \ldots$

Los primeros términos de la sucesión serán:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{100}{101}, \ldots, \frac{1000}{1001}, \ldots$$

Notamos que con el crecimiento del número de término de la sucesión la magnitud del término común se aproxima más y más al número 1. Así, por ejemplo, el 100-ésimo término $x_{100} = \frac{100}{101}$ se diferencia de 1 en $\frac{1}{101}$; el 1000-ésimo término $x_{1000} = \frac{1000}{1001}$ se diferencia de 1 en $\frac{1}{1001}$, etc. Se puede prever que el cienmilésimo término se diferenciará de 1 en $\frac{1}{100\,001} < 10^{-5}$.

En este ejemplo vemos que la diferencia entre el número 1 y el término común de la sucesión, en magnitud absoluta, se hace y queda tan pequeña como se quiera en el crecimiento ilimitado del número de término; en tal caso se dice, que *la sucesión tiende al límite, igual a 1.*

E j e m p l o 2. $x_n = 2 + (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Escribamos los primeros términos de la sucesión, dando n los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . :

$$x_1 = \frac{3}{2}; \quad x_2 = 2\frac{1}{4}; \quad x_3 = 1\frac{7}{8}; \quad x_4 = 2\frac{1}{16}; \quad x_5 = 1\frac{31}{32};$$

$$x_6 = 2\frac{1}{64}; \ \ldots$$

Se aprecia fácilmente que la magnitud de los términos de la sucesión oscila alrededor del número 2, desviándose de él, a ambos lados, cada vez menos a medida que crecen los números de términos de la sucesión. Comprobamos que esta desviación se hace tan pequeña como se quiera para números suficientemente grandes de términos de la sucesión. Queremos, por ejemplo, conocer el término de la sucesión, comenzando del cual la desviación del número 2 se hace menor que 10^{-5}, es decir, $|x_n - 2| < 10^{-5}$:

$$\left|2 + (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\right| < 10^{-5},$$

o bien

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-5}, \quad 2^{-n} < 10^{-5}.$$

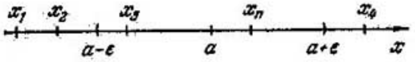

Fig. 146.

Resolvamos esta desigualdad exponencial respecto de n: $-n \lg 2 < -5$, $n \lg 2 > 5$,

$$n > \frac{5}{\lg 2} = \frac{5}{0,3010} \approx 16,6.$$

Por consiguiente, comenzando del número $n = 17$, todos los términos siguientes se diferenciarán del número 2 en menos de 10^{-5}. Es evidente que si fijamos una desviación aún menor, por ejemplo, la desviación $\varepsilon = 10^{-20}$, razonando como antes, tendremos que $n > 66,4$, es decir, 67-ésimo término ya satisface la condición establecida.

● DEFINICIÓN. El número a se llama *límite de la sucesión* $\{x_n\}$, si para un número positivo cualquiera tan pequeño como se quiera ε se puede fijar un número N del término de la sucesión tal que, comenzando de él, el valor absoluto de la diferencia $|x_n - a|$ se hace y se conserva menor que el numero ε con el crecimiento ulterior de n, o sea, si

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ para } n \geqslant N.$$

Si a es el límite de la sucesión $\{x_n\}$, se escribirá:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \text{ o bien } x_n \to a \text{ para } n \to \infty.$$

§ 230. Ilustración geométrica de la aproximación de una sucesión al límite

Convengamos en llamar *ε-entorno* (se lee «epsilon entorno») *del número a* al conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $|x - a| < \varepsilon$, es decir, la doble desigualdad

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon,$$

donde $\varepsilon > 0$.

Por ejemplo, si $a = 3$, $\varepsilon = 0,1$, ε-entorno del número 3 es el intervalo (2,9; 3,1).

Geométricamente el ε-entorno del número a (o como se dice también, del punto a) representa el intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (fig. 146).

Ahora se puede obtener fácilmente la ilustración geométrica del hecho de que el número a es el límite de una sucesión numérica. En efecto, si los términos de la sucesión se representan por puntos del eje numérico, cualquier ε-entorno del número a que tomemos, comenzando de un número determinado, todos los términos de la sucesión caen en este ε-entorno y no salen de él, continuando acumularse alrededor del punto a, que representa el límite de la sucesión numérica.

§ 231. Límite de una función

Estudiemos la variación de la función $f(x) = 0,5x^2 + 3$, cuando el argumento x se aproxima ilimitadamente al valor de $x = 2$, sin hacerse igual a 2 ($x \neq 2$), lo que se admite en designar por: $x \to 2$ («x tiende a 2»).

Se puede tender a 2 por distintos métodos. Por ejemplo, el argumento x puede tomar los valores

1,5; 1,9; 1,99; 1,999; . . .

o los valores

2,2; 2,01; 2,001; . . .

La tabla expuesta a continuación nos muestra que los valores de la función antes dada tienden al número 5.

x	1,5	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,2
y	4,125	4,805	4,980	4,998	5	5,002	5,02	5,42

Vamos a demostrar que los valores de la función se diferenciarán muy poco del número 5, solo si x es suficientemente próximo a 2 ($x \neq 2$).

Fijemos un número positivo pequeño ε, por ejemplo, $\varepsilon = 0,001$ y nos preguntamos: ¿cuán pequeño debe ser δ-entorno del punto 2, para que a cualquier valor de x de este entorno $(2 - \delta,\ 2 + \delta)$ se cumpla la desigualdad

$|f(x) - 5| < 0,001$?

Escribimos esta desigualdad para nuestra función:

$$|0,5x^2 + 3 - 5| < 0,001,$$

$$0,5\,|x^2 - 4| < 0,001,$$

$$|x^2 - 4| < 0,002,$$

de donde

$$-0,002 < x^2 - 4 < 0,002,$$

$$3,998 < x^2 < 4 < 4,002$$

(después de sumar 4 a todos los términos de la desigualdad), o bien

$$1{,}999 < x < 2{,}001,$$

o sea

$$2 - 0{,}001 < x < 2 + 0{,}001.$$

Por lo tanto, es suficiente poner $\delta = 0{,}001$.
De este modo, hemos hallado un entorno pequeño del punto $x = 2$ tal que a cualquier valor del argumento x de este entorno corresponden valores de la función que se diferencian del número 5 menos de 0,001.

● DEFINICION. El número A se llama *límite de la función* $f(x)$ para $x \to a$, si a cualquier número positivo $\varepsilon > 0$ se puede fijar un δ-entorno (delta entorno) tal del punto a, que sólo cuando $|x - a| < \delta$ $(x \neq a)$, tendremos que

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Esto se escribe así:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ o bien } f(x) \to A \ (x \to a).$$

§ 232. Función infinitamente pequeña

En matemática tienen gran importancia las funciones, cuyo límite es igual a cero.

● DEFINICION. La función $f(x)$ se llama *función infinitamente pequeña* (o *magnitud infinitamente pequeña*) para $x \to a$, si $\lim f(x) = 0$ para $x \to a$.

E j e m p l o. Demostremos que la función $f(x) = x^2 - 4$ para $x \to 2$ es una función infinitamente pequeña. De acuerdo a la definición de límite, es suficiente comprobar que los valores de la función, en magnitud absoluta, se pueden hacer, tan pequeños como se quiera, menores que un número positivo cualquiera ε, si sólo los valores del argumento x son suficientemente próximos al número 2 (es decir, se toman del correspondiente δ-entorno del número 2).
Supongamos que

$$|x^2 - 4| < \varepsilon,$$

de donde

$$-\varepsilon < x^2 - 4 < \varepsilon.$$

Sumando 4 a todos los miembros de la desigualdad, obtendremos:

$$4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon.$$

Después de extraer la raíz cuadrada de todos los miembros de la desigualdad, tendremos

$$\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon};$$

para $\varepsilon = 0{,}01$

$$\sqrt{3{,}99} < x < \sqrt{4{,}01};\ 1{,}997 < x < 2{,}002,$$

es decir, $\delta = 0{,}002$.

§ 233. Función infinitamente grande

Ejemplo 1. Demostrar que la función de argumento natural $f(n) = 2^n$ es capaz de hacerse y mantenerse mayor que un número positivo M cualquiera, tan grande como se quiera. Los valores de la función dada, dispuestos en orden creciente del argumento n, forman una sucesión numérica que es una progresión geométrica.

n	1	2	3	4	5	...
$f(n)$	2	4	8	16	32	...

Fijemos un número positivo grande cualquiera, por ejemplo $M = 10^8$ (cien millones). Hallemos el número del término de la sucesión, desde el cual se cumplirá constantemente la desigualdad

$$2^n > 10^8.$$

Resolvemos esta desigualdad, considerando como incógnita n. Tomamos logaritmo de base 10:

$$n \lg 2 > 8,$$

de donde

$$n > \frac{8}{\lg 2} \approx 26{,}6.$$

Por consiguiente, el 27-ésimo término de la progresión y todos los términos siguientes superan en magnitud el número 10^8.

Es evidente que si se fija como límite otro número, por ejemplo $M = 10^{30}$, de cualquier modo se hallará un término de la sucesión desde el cual $2^n > 10^{30}$; precisamente, el 100-ésimo término y los términos que le siguen satisfacen esta desigualdad.

E j e m p l o 2. Estudiar la variación de la función $f(x) = \frac{1}{x-2}$ para $x \to 2$.

Por ejemplo, vamos a dar al argumento x los valores sucesivos: 2,1; 2,01; 2,001; 2,0001; . . . (cabe señalar que cada término de esta sucesión es mayor que 2; en tal caso se dice que x tiende a 2 desde la derecha), luego los correspondientes valores de la función $f(x)$ serán: 10, 100, 1000, . . . Si, ahora, $x = 1{,}9$; $1{,}99$; $1{,}999$; . . . (es decir, x tiende a 2 desde la izquierda), los correspondientes valores de las funciones serán: -10, -100, -1000, . . . Esto indica que los valores absolutos de la función crecen ilimitadamente. En efecto, si queremos que el valor absoluto de la función satisfaga la desigualdad

$$\left|\frac{1}{x-2}\right| > 10^5,$$

entonces, resolviendo esta desigualdad, hallamos:

$$|x-2| < 10^{-5},$$

es decir, los valores de x se deben tomar del intervalo $1{,}99999 < x < 2{,}00001$.

● DEFINICION. La función $f(x)$ se llama *función infinitamente grande* (o *magnitud infinitamente grande*) para $x \to a$, si sus valores, tomados en magnitud absoluta, superan un número positivo M cualquiera, antes dado, sólo cuando los valores del argumento x caen en un entorno suficientemente pequeño del punto a; en este caso se escribe:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

En pocas palabras, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, si para cualquier $M > 0$ se halla $\delta > 0$ tal que $|f(x)| > M$ para $a - \delta < x < a + \delta$.
Por consiguiente: 1) el término común de la sucesión $f(n) = 2^n$ es una magnitud infinitamente grande, cuando el

número del término crece ilimitadamente, lo que se escribe del siguiente modo:

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty;$$

2) la función $f(x)=\frac{1}{x-2}$ es infinitamente grande cuando $x\to 2\ (x\neq 2)$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=\infty.$$

Cuando es importante indicar también el signo de una función infinitamente grande, ante el símbolo ∞ se escribe respectivamente el signo más o menos. Por ejemplo, para la función $f(x)=\frac{1}{x-2}$.

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}=-\infty.$$

Aquí la notación $x\to 2+0$ sustituye la frase «x tiende a 2 por la derecha», es decir, manteniéndose mayor que 2; $x\to 2-0$ significa la aproximación al número 2 por la izquierda.

Cabe señalar que no se puede decir anticipadamente que la función es infinitamente pequeño o infinitamente grande si no se indica para qué variación del argumento x se examina esta función. Por ejemplo, la función $f(x)=(x-1)^2$ es infinitamente pequeña, si $x\to 1$, pero esta función es infinitamente grande, si x crece ilimitadamente:

1) $\lim_{x\to 1}(x-1)^2=0,$

2) $\lim_{x\to\infty}(x-1)^2=\infty.$

§ 234. Relación entre las magnitudes infinitamente pequeña e infinitamente grande

Con el ejemplo de la función $y=\frac{1}{x}$ vamos a explicar la relación existente entre las magnitudes infinitamente pequeña e infinitamente grande. Si $x\to 0$ (x es infinitamente pequeña), la magnitud inversa $\frac{1}{x}$ es una función infinitamente grande, o una magnitud infinitamente grande.

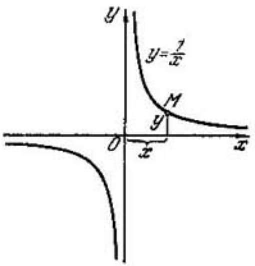

Fig. 147.

Evidentemente esto lo ilustra la rama derecha de la hipérbola $y = \frac{1}{x}$ (fig. 147); al moverse el punto M por la curva de derecha a izquierda la abscisa $x \to 0$ (x es infinitamente pequeña), su magnitud inversa $\frac{1}{x} = y$, es decir, la ordenada de la curva, en este caso, crece ilimitadamente: $\frac{1}{x} \to \infty$, y viceversa, al moverse el punto M por la curva de izquierda a derecha la abscisa $x \to \infty$ y la ordenada $y = \frac{1}{x} \to 0$. De este modo, la magnitud, inversa a la infinitamente pequeña, es la infinitamente grande y viceversa.

Veamos otro ejemplo: la $\operatorname{tg} x$ para $x \to \frac{\pi}{2}$ es una magnitud infinitamente grande; su magnitud inversa, es decir, la $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, tiende a cero cuando $x \to \frac{\pi}{2}$.

§ 235. Propiedades de las funciones infinitamente pequeñas

Para simplificar la escritura introducimos notaciones abreviadas: las funciones infinitamente pequeñas $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ en adelante las vamos a designar por α, β, γ, recordando que estas tres funciones dependen del argumento x, y que se hacen infinitamente pequeñas sólo cuando el argumento x tiende a un número determinado $a (x \to a)$.

P r o p i e d a d 1. *La suma algebraica de un número finito de funciones infinitamente pequeñas es una función infinitamente pequeña.* Si

$\alpha \to 0,\ \beta \to 0,\ \gamma \to 0,$

tendremos, por ejemplo, que

$$(\alpha - \beta + \gamma) \to 0,$$

o bien, en otra notación

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to 0\\ \gamma\to 0}} (\alpha - \beta + \gamma) = 0.$$

En efecto, para que la suma algebraica $(\alpha - \beta + \gamma)$ se haga, en valor absoluto, menor que un número positivo cualquiera ε dado con anterioridad, tan pequeño como se quiera, sólo se requiere que

$$\left.\begin{aligned} &|\alpha| < \frac{\varepsilon}{3},\\ &|-\beta| < \frac{\varepsilon}{3},\\ &|\gamma| < \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

lo que es completamente posible, de lo contrario α, β, y γ no serían infinitamente pequeños. Sumando las desigualdades (1), obtendremos:

$$|\alpha| + |-\beta| + |\gamma| < \varepsilon,$$

y por eso, sin lugar a dudas (véase el § 228)

$$|\alpha - \beta + \gamma| < \varepsilon \text{ *)}.$$

Las demás propiedades no las demostraremos, sino explicaremos sólo sus sentidos con ejemplos.

P r o p i e d a d 2. *El producto de una función infinitamente pequeña por una limitada es una función infinitamente pequeña.*

La funcion $f(x)$ se llama *limitada* en un cierto entorno del punto $x = a$, si existe un número positivo M tal que para todos los puntos x de ese entorno, los valores absolutos de la funcion $f(x)$ son menores que el número M:

$$|f(x)| < M.$$

En forma reducida la propiedad 2 se escribe así: si $a \to 0$ y $|f(x)| < M$, entonces $a \cdot f(x) \to 0$.

---

*) Se tiene en cuenta que las desigualdades (1) se cumplen respectivamente en ciertos δ_1-, δ_2- y δ_3-entornos del punto a. La desigualdad resultante se cumple, por lo tanto, en el menor de estos tres entornos

E j e m p l o s. 1) Las funciones sen x y cos x están limitadas en el entorno de un punto cualquiera de su región de definición (todo el eje numérico), puesto que

$$|\operatorname{sen} x| < 1{,}1; \quad |\cos x| < 1{,}1.$$

Aquí se ha tomado por M el número 1,1, pero en general se puede tomar cualquier otro número mayor que 1.
De acuerdo a la propiedad 2 podemos afirmar que el producto $(x-3)\operatorname{sen} x \to 0$, si $x \to 3$, dado que $(x-3) \to 0$, para $x \to 3$, y sen x es una función limitada.

2) La función $\frac{1}{x-2}$ no está limitada en el entorno del punto $x = 2$, pero en un entorno suficientemente pequeño de otro punto cualquiera, por ejemplo, del punto $x = 5$, ella está limitada, puesto que $\left|\frac{1}{x-2}\right| < \frac{1}{2}$ para todos los valores de x del intervalo (4,5; 5,5).

Corolario. Toda magnitud constante es limitada de por sí, y por eso, el producto de una constante por una infinitamente pequeña es una magnitud infinitamente pequeña. Basándonos en esto podemos escribir, que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 100\pi \cos x = 0,$$

puesto que $\cos x \to 0$ para $x \to \frac{\pi}{2}$, es decir, cos x es una magnitud infinitamente pequeña en el entorno del punto $x = \frac{\pi}{2}$; 100π es constante, y por eso, el producto $100\pi \cos x$ es una magnitud infinitamente pequeña.

§ 236. Teoremas sobre límite

Las demostraciones de los teoremas sobre límites están basadas en el siguiente postulado: toda variable, que tiende a un límite, puede ser representada en forma de suma de su límite y de una cierta magnitud infinitamente pequeña. Esto deriva de la misma definición de límite: si $z \to A$, es decir, el número A es el límite de z, entonces en el proceso de aproximación ilimitada la diferencia $z - A$ se hace tan pequeña como se quiera, en valor absoluto, es decir, esta diferencia es infinitamente pequeña:

$$z - A = \alpha \text{ o bien } z = A + \alpha.$$

Inversamente: si la magnitud variable z está representada en forma de una suma de «constante + infinitamente pequeña», la constante A es el límite de la variable z.

T e o r e m a 1. *El límite de la suma algebraica de dos o varias variables es igual a la suma algebraica de los límites de los sumandos.*

Aquí y en adelante, se tendrá en cuenta que tales límites (sumandos, factores, etc.) existen.

■ DEMOSTRACIÓN. Dado
$z \to A,\ y \to B,\ u \to C,$

demostraremos, por ejemplo, que
$(z + y - u) \to A + B - C.$

Si α, β, γ son infinitamente pequeños, y z, y, u son funciones del argumento x, podemos escribir:

$$\left.\begin{aligned} z &= A + \alpha, \\ y &= B + \beta, \\ u &= C + \gamma, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$z + y - u = A + B - C + (\alpha + \beta - \gamma). \tag{2}$$

La igualdad (2) se ha obtenido de las igualdades (1) sumando las dos primeras y restando la tercera.
El primer miembro de la igualdad (2) es una magnitud variable, el segundo miembro es la suma de la constante $(A + B - C)$ y del infinitamente pequeño $(\alpha + \beta - \gamma)$, y por eso, esta constante es el límite de la magnitud variable:

$(z + y - u) \to A + B - C,$

o en otra notación

$\text{lím}\,(z + y - u) = \text{lím}\,z + \text{lím}\,y - \text{lím}\,u = A + B - C.$

Los restantes teoremas sobre límites sólo los formularemos dejando su demostración a los lectores.

T e o r e m a 2. *El límite del producto de dos o varias variables es igual al producto de los límites de cada factor:*

$\text{lím}\,(zyu) = \text{lím}\,z \cdot \text{lím}\,y \cdot \text{lím}\,u = A \cdot B \cdot C,$

o bien

$zyu \to ABC.$

C o r o l a r i o. Si una de las magnitudes variables es constante, tendremos que

$$\lim (My) = M \lim y = MB,$$

puesto que el límite de una constante es igual a la propia constante. *El factor constante se puede sacar fuera del signo de límite.*

E j e m p l o. $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 + 3)(3x + 2) =$
$= \lim\limits_{x\to 1} (x^2 + 3) \lim\limits_{x\to 1} (3x + 2) = (\lim\limits_{x\to 1} x^2 + 3)(3 \lim\limits_{x\to 1} x + 2) =$
$= (1 + 3)(3\cdot 1 + 2) = 20.$

T e o r e m a 3. *El límite del cociente de dos variables es igual al cociente de los límites del dividendo y del divisor, si el límite del divisor no es igual a cero.*
Si

$$z \to A, \ y \to B \ (B \neq 0),$$

se tendrá

$$\frac{z}{y} \to \frac{A}{B},$$

o en otra notación

$$\lim \frac{z}{y} = \frac{\lim z}{\lim y} = \frac{A}{B}.$$

E j e m p l o.

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2+3}{x^3-1} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} (2x^2+3)}{\lim\limits_{x\to 2} (x^3-1)} = \frac{11}{7}.$$

T e o r e m a 4. *El límite de la potencia de una variable es igual a la misma potencia del límite de la base:*

$$\lim (z^n) = (\lim z)^n$$

E j e m p l o s. 1) $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = (\lim\limits_{x\to 2} x)^3 = 2^3 = 8;$

2) $\lim\limits_{x\to 6} \sqrt{2x-3} = \lim\limits_{x\to 6} (2x-3)^{\frac{1}{2}} = [\lim\limits_{x\to 6} (2x-3)]^{\frac{1}{2}} =$

$= (2\cdot 6-3)^{\frac{1}{2}} = 3.$

T e o r e m a 5. *Si la variable z está entre otras dos variables y y u, que tienden a un límite común, entonces z tiende al mismo límite.*

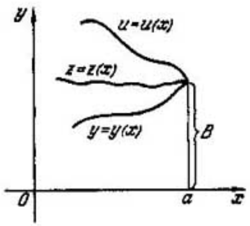

Fig. 148.

Si $y < z < u$ e $y \to B$, $u \to B$, tendremos que $z \to B$. El sentido de este teorema se puede interpretar claramente: en la fig. 148 se muestran gráficamente tres funciones de argumento x. La gráfica de la función $z = z(x)$ se encuentra entre las gráficas $y = y(x)$ y $u = u(x)$; si $x \to a$, las ordenadas de y y u tienden al límite B; luego, está claro que la ordenada de la curva media $z = z(x)$ tiende al mismo límite B.

§ 237. Criterio de existencia del límite de una sucesión

En muchos casos al buscar el límite de una sucesión es importante saber que este límite existe independientemente de que estemos en condición de hallarlo o no.

Para formular el criterio de existencia del límite, formularemos previamente algunas definiciones.

Una sucesión se llama *limitada o acotada superiormente* si todos sus términos son menores que un mismo número. Análogamente, una sucesión se llama *limitada o acotada inferiormente* si todos sus términos son mayores que un mismo número.

E j e m p l o s. 1) La sucesión $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ está acotada superiormente por el número 2 o por un número cualquiera mayor que 2:

$a_n < 2$ para todo n,

2) La sucesión $x_n = 2 + \frac{1}{n}$ está acotada inferiormente por el número 2 o por cualquier número positivo menor que 2:

$x_n > 2$ para todo n.

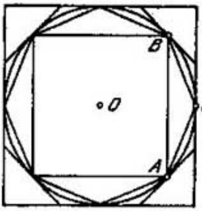

Fig. 149.

Una sucesión se llama *monótona creciente*, si cualquier término es mayor que cualquier precedente (o igual a él). La sucesión se llama *monótona decreciente*, si cualquier término es menor que cualquier precedente (o igual a él). De las sucesiones dadas en los ejemplos de este párrafo la primera es monótona creciente, y la segunda, monótona decreciente.

Formulemos ahora el criterio de existencia del límite de una sucesión.

Una sucesión monótona creciente, limitada superiormente, tiene límite; del mismo modo, la sucesión monótona decreciente, limitada inferiormente, tiene límite.

§ 238. Longitud de una circunferencia como límite

Construimos una circunferencia de radio unitario, inscribimos en ella y la circunscribimos de cuadrados (fig. 149). A continuación, duplicando el número de lados de cada nuevo polígono construimos octágonos regulares inscrito y circunscrito y así continuamos ilimitadamente inscrito o circunscrito obtenido. Luego, la sucesión compuesta de los perímetros de los polígonos inscritos $p_1, p_2, p_3, \ldots$, es la sucesión monótona creciente, limitada superiormente.

El perímetro de un cuadrado inscrito es menor que el perímetro de un octágono regular inscrito, es decir, $p_1 < p_2$, puesto que la suma de dos lados del octágono es mayor que el lado del cuadrado: $AC + CB > AB$.

Exactamente del mismo modo $p_2 < p_3$, $p_3 < p_4$, etc. Pero, sea cual fuere el modo de crecimiento de esta sucesión, ella está limitada superiormente por el perímetro de un cuadrado circunscrito, es decir, por el número $P_1 = 8$, ya que el cuadrado circunscrito, como quebrada envolvente, es mayor que la quebrada inscrita y así cualquier polígono inscrito. La sucesión de perímetros de los polígonos regulares circunscritos

$P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$

es monótona decreciente, puesto que el cuadrado circunscrito es envolvente con respecto al octágono circunscrito. Por lo tanto, $P_1 > P_2$. Sobre la misma base $P_2 > P_3$, etc.
La limitación de la sucesión inferiormente se deduce de que cualquier de los números de la sucesión $P_1, P_2, P_3, \ldots$ es mayor que cualquier término de la sucesión $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$
En consecuencia, ambas sucesiones tienen límite. Como se verá en el § 241 (ejemplo 6), este límite es común y se toma como longitud de la circunferencia.

● DEFINICIÓN. Se toma como *longitud de una circunferencia* el límite común de las sucesiones de los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos, cuando el número de lados de los polígonos crece ilimitadamente. La longitud de la circunferencia se designa por la letra C.

§ 239. Cálculo de la longitud de una circunferencia

Los matemáticos de los siglos XVI, XVII y XVIII, sin saber que la circunferencia rectificada es un segmento inconmensurable con su radio, trataron de hallar con gran exactitud la longitud de la circunferencia por el método de los perímetros. Para ello utilizaron la llamada *fórmula de duplicación*:

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

Sigamos su ejemplo.
Se sabe que el lado de un cuadrado inscrito $a_4 = R\sqrt{2}$; $a_4 = \sqrt{2}$ cuando $R = 1$. Por la fórmula de duplicación, tendremos: $a_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}}$, $a_{16} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $a_{32} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$, etc. Si el número de lados es bastante grande, por el lado calculado hallamos el perímetro y lo tomamos como longitud aproximada de la circunferencia.

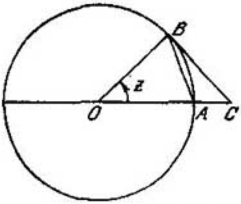

Fig. 150.

De este modo, se calculó el perímetro de los polígonos inscrito y circunscrito con un número de lados $2n = 3072$ (como polígono inicial se tomó un hexágono, y no un cuadrado, como lo hicimos nosotros).
Resultó que cuando $R = 1$

$$p \approx 6{,}2831842, \quad P \approx 6{,}2831876.$$

De aquí

$$\pi = \left.\frac{C}{2R}\right|_{R=1} \approx 3{,}141592.$$

Sólo en el siglo XIX se demostró que el número π es irracional.

§ 240. Dos límites notables

1) $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1$. El límite de la relación entre el seno de argumento infinitamente pequeño y el propio argumento es igual a 1.
Tracemos una circunferencia de radio unitario (fig. 150) y en ella un ángulo central agudo $\angle AOB = z$; unimos los puntos A y B con una cuerda y en el punto B trazamos la tangente a la circunferencia, el punto C es la intersección de la tangente con la prolongación del radio OA. Podemos escribir las siguientes desigualdades:

sup. $\triangle\ AOB <$ sup. del sector $AOB <$ sup. $\triangle\ OBC$,

o bien

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \operatorname{sen} z < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot z < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} z. \qquad (1)$$

[Aquí se utilizaron casos conocidos de geometría y trigonometría:

a) la superficie de un triángulo es igual al semiproducto de dos lados por el seno del ángulo comprendido entre ellos; b) la superficie de un sector es igual al semiproducto de la longitud del arco por el radio; c) la superficie de un triángulo rectángulo es igual al semiproducto de los catetos, donde el cateto $BC = \operatorname{tg} z$.]
Multiplicamos todos los términos de la desigualdad (1) por 2, y luego dividimos por sen z (sen $z > 0$). Obtenemos una desigualdad del mismo sentido

$$1 < \frac{z}{\operatorname{sen} z} < \frac{1}{\cos z},$$

o bien

$$1 > \frac{\operatorname{sen} z}{z} > \cos z \tag{2}$$

$\left(\text{si } a < b, \text{ tendremos que } \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \text{ cuando } a > 0\right)$.

Si $z \to 0$ los términos extremos de la doble desigualdad (2) tienden a un límite común, igual a 1, por lo tanto, la relación comprendida entre ellos $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$ tiene el mismo límite, es decir

$$\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1.$$

Observación. En lugar de z se puede poner cualquier otra magnitud infinitamente pequeña. Por ejemplo

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} = 1, \ z = 5x;$

2) $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi y}{3}}{\frac{\pi y}{3}} = 1, \ z = \frac{\pi y}{3};$

3) $\lim \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1, \ z = \frac{1}{x}.$

Pero

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} \neq 1,$$

puesto que aquí no hay concordancia: bajo el signo de seno tenemos $3x$ infinitamente pequeño, y en el denominador de la fracción se encuentra x, también infinitamente pequeño, pero diferente. Luego, el límite se encuentra del siguiente modo:

$$\frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3 \, \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3 \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = 3\cdot 1 \quad (z = 3x).$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Examinemos la sucesión, cuyo término general es

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

donde n es número natural.

La siguiente tabla nos muestra como varía x_n cuando n crece:

x_n	1	2	3	...	10	100	10 000	1 000 000	...
x_n	2,00000	2,2500	2,3704	...	2,59982	2,70481	2,71815	2,71828	...

De esta tabla se nota que con el crecimiento de n, x_n también crece, aunque el ritmo de crecimiento se atenúa: al comienzo, cuando n varía de 1 a 2, x_n varía de 2 a 2,25, es decir, en 0,25; en cambio al variar n de 10^4 a 10^6, x_n aumenta en total 0,00013.

Admitamos sin demostración que la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tiende a un límite determinado al crecer ilimitadamente n $(n\to\infty)$ (se puede demostrar que la sucesión $\{x_n\}$ es monótona creciente y está limitada superiormente, por ejemplo, por el número 3). Este límite se designa por la letra e.

El número e es irracional; sus primeras cifras decimales son:

$$e = 2{,}7182818284590\ \ldots, \text{ o bien } e \approx 2{,}718.$$

Antes dijimos que los logaritmos de base e se llaman *naturales* y se designan por «ln».

Se puede demostrar también que

$$\lim_{\alpha\to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Para ello es suficiente poner $\frac{1}{\alpha}=n$, en tal caso $n\to\infty$ cuando $\alpha\to 0$.
El número e es de suma importancia tanto en matemáticas como en otras ciencias.

§ 241. Ejemplos de determinación de límites

Ejemplo 1. Hallar $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-3x^2+8x+5)$.
Al comienzo utilizamos el teorema del límite de una suma algebraica y simultáneamente sacamos los factores constantes fuera del signo de límite, después, el teorema del límite de una potencia:

$$\lim_{x\to 2}(x^3-3x^2+8x+5)=$$
$$=\lim_{x\to 2}x^3-3\lim_{x\to 2}x^2+8\lim_{x\to 2}x+5=$$
$$=2^3-3\cdot 2^2+8\cdot 2+5=17.$$

En este caso el límite se podía haber obtenido con más sencillez si se hubiera sustituido directamente x por su valor límite:

$$\lim_{x\to 2}(x^3-3x^2+8x+5)=2^3+3\cdot 2^2+8\cdot 2+5=17.$$

Ejemplo 2. Hallar $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$.

Si en este ejemplo ponemos en lugar de x su límite 3, obtendremos una indeterminación:

$$\frac{3^2-9}{3-3}=\frac{0}{0},$$

lo que nos dice que el teorema del límite de un cociente no es aplicable (el límite del denominador es igual a 0), pero

$$\frac{x^2-9}{x-3}=x+3. \qquad (1)$$

La igualdad (1) se cumple para todo $x\neq 3$. En este caso se considera que los límites de ambos miembros deben ser iguales:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6.$$

Ejemplo 3. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

Puesto que el límite del denominador nuevamente es igual a cero cuando $x \to 0$, no podremos utilizar el teorema del límite de un cociente; transformemos la fracción dada hasta el paso al límite:

$$\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1} = \frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{(\sqrt{1+3x}-1)(\sqrt{1+3x}+1)} =$$
$$= \frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{3x} = \frac{1}{3}(\sqrt{1+3x}+1).$$

Por consiguiente,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}(\sqrt{1+3x}+1) =$$
$$= \frac{1}{3}(\sqrt{1+3\cdot 0}+1) = \frac{2}{3}.$$

Ejemplo 4. Hallar $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+2}{x^2+x+1}$.

Puesto que con el signo ∞ no se puede tratar como con un número, hay que transformar la fracción dada:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2}{x^2+x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{3+0}{1+0+0} = 3,$$

ya que $\frac{1}{x} \to 0$ cuando $x \to \infty$ y $\frac{1}{x^2} \to 0$ para $x \to \infty$.

Ejemplo 5. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$.

Representemos la expresión bajo el signo de límite en la siguiente forma:

$$\frac{3x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} = \frac{6\cdot\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} = 6\,\frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}.$$

En tal caso

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\left(6\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}\right)=6\cdot\frac{1}{1}=6$$

$$\left(\text{puesto que } \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1\right).$$

E j e m p l o 6. Demostrar que las sucesiones, compuestas de los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos, durante la duplicación ilimitada del número de sus lados tienden al mismo límite C.

Supongamos que p_n es el perímetro del n-ésimo polígono inscrito y P_n es el perímetro del n-ésimo polígono circunscrito. Examinemos cómo varía su relación

$$\frac{p_n}{P_n}=\frac{h_n}{R}$$

(los perímetros de semejantes polígonos regulares son proporcionales a sus apotemas)

Teniendo en cuenta que el apotema h_n del polígono regular inscrito tiende a R cuando $n\to\infty$, tendremos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p_n}{P_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}h_n}{R}=\frac{R}{R}=1.$$

Dado que el límite de la relación de los perímetros es igual a 1, se deduce que C es su límite común.

E j e m p l o 7. Deducir la fórmula de la superficie de un círculo, considerando la superficie del círculo como el límite común de dos sucesiones de las superficies de los polígonos regulares inscritos y circunscritos, cuando el número de sus lados se duplica ilimitadamente.

La superficie del n-ésimo polígono regular inscrito es igual al semiproducto del perímetro por el apotema:

$$q_n=\frac{1}{2}p_nh_n,$$

donde q_n es la superficie; p_n, el perímetro; h_n, el apotema del n-ésimo polígono. Luego

$$\lim_{n\to\infty}q_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(p_nh_n)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}p_n\lim_{n\to\infty}h_n=\frac{1}{2}CR=\pi R^2.$$

Aquí se aplicó el teorema del límite de un producto. Para el polígono circunscrito tendremos que $Q_n = \frac{1}{2} P_n \cdot R$, de donde

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \frac{1}{2} R \lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{2} RC = \frac{1}{2} R \cdot 2\pi R = \pi R^2.$$

§ 242. Suma de una progresión geométrica infinitamente decreciente

● DEFINICIÓN. La progresión geométrica cuyo denominador, según el módulo, es menor que la unidad ($|q| < 1$), se llama *infinitamente decreciente* o *convergente*. La suma de sus n primeros términos se puede calcular por la fórmula

$$S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}.$$

Representemos S_n en la siguiente forma:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} q^n. \tag{1}$$

Supongamos que el número de términos n crece ilimitadamente ($n \to \infty$). En tal caso,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^n.$$

Pero $q^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ ($|q| < 1$); por lo tanto

$$\frac{a_1}{1-q} q^n \to 0$$

como producto de una constante por una magnitud infinitamente pequeña, y por eso

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

● DEFINICIÓN. El límite al que tiende la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica infinitamente decreciente al crecer ilimitadamente el número de términos n se llama *suma de una progresión geométrica infinitamente decreciente*. Por consiguiente

$$S = \frac{a_1}{1-q}, \quad \text{donde } S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

La suma de una progresión geométrica infinitamente decreciente es igual al primer término a_1 dividido por la diferencia entre la unidad y el denominador (o razón) de la progresión q.

§ 243. Conversión de una fracción decimal periódica en ordinaria

Representemos la fracción decimal periódica infinita $\alpha = 0{,}3151515\ldots$ en la forma:
$\alpha = 0{,}3 + 0{,}015 + 0{,}00015 + 0{,}0000015 + \ldots,$
$\alpha = 0{,}3 + 15 \cdot 10^{-3} + 15 \cdot 10^{-5} + 15 \cdot 10^{-7} + \ldots$
El segundo miembro de esta igualdad, comenzando del segundo término, es la suma de una progresión geométrica infinitamente decreciente de denominador o razón $q = 10^{-2}$, y, por eso,

$$\alpha = 3 \cdot 10^{-1} + \frac{15 \cdot 10^{-3}}{1 - 10^{-2}},$$

$$\alpha = \frac{3}{10} + \frac{15}{990} = \frac{3 \cdot 99 + 15}{990} = \frac{3(100-1)+15}{990} = \frac{315-3}{990},$$

$$\alpha = \frac{312}{990} = \frac{52}{165}.$$

R e g l a. *Para convertir una fracción periódica mixta en una ordinaria, hay que restar del número, que se encuentra hasta el segundo período, el número que se encuentra hasta el primer período, y tomar esta diferencia como numerador; en calidad de denominador se escribe la cifra* 9 *tantas veces como cifras hay en el período y se agrega a ellas tantos* 0 *como cifras hay hasta el período.*

E j e m p l o. Convertir $\beta = 0{,}42777\ldots$ en una fracción ordinaria

$$\beta = \frac{427-42}{900} = \frac{385}{900} = \frac{77}{180}.$$

Observación. Es más fácil convertir una fracción períodica pura, por ejemplo, $1{,}272727\ldots$, en una ordinaria:

$$1{,}272727\ldots = 1 + \frac{27-0}{99} = 1\,\frac{27}{99} = 1\,\frac{3}{11}.$$

§ 244. Comparación de magnitudes infinitamente pequeñas

Las distintas magnitudes infinitamente pequeñas o infinitésimas tienen de común, que durante su variación cada una de ellas tiende indefectiblemente a cero, en caso contrario no serían infinitamente pequeñas.
Resulta que el proceso de tender a cero de las diferentes magnitudes infinitamente pequeñas no es idéntico: unas se aproximan a cero «más rápidamente» que otras. Esto se aprecia del siguiente ejemplo elemental.

Si $x \to 0$, tendremos que x^2 tambien tiende a cero. Supongamos que x recorre la sucesión numérica $x = 1; 0{,}1; 0{,}01; 0{,}001; 0{,}0001; \ldots$ En tal caso, $x^2 = 1; 0{,}01; 0{,}0001; 0{,}000001; \ldots$

Se nota inmediatamente que x^2 se aproxima a cero más rápidamente que x. Pero el hecho de que una magnitud se aproxima a cero más rápidamente que otra, por ahora carece aún de sentido matemático exacto: queda sin explicación lo que se entiende por «rapidez» con la cual las magnitudes infinitamente pequeñas tienden a cero, ¿cómo se mide?

Introduzcamos nuevos conceptos matemáticos, con los que discribiremos el distinto carácter de aproximación a cero de las magnitudes infinitamente pequeñas o infinitésimas. Los nuevos conceptos se basan en la idea de comparación de dos infinitésimas mediante la determinación del límite de su relación (cociente).

● DEFINICION 1. Dos magnitides infinitamente pequeñas α y β se llaman infinitésimas de *igual orden* si el límite de su relación es igual a un número A distinto de 0.

Por consiguiente, si el $\lim \frac{\beta}{\alpha} = A$ ($A \neq 0$, $A \neq \infty$), α y β son infinitésimas de igual orden.

Ejemplo. $\alpha = 3(x-1)$ y $\beta = x - 1$ son infinitésimas de igual orden cuando $x \to 1$, puesto que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{3(x-1)} = \frac{1}{3}.$$

● DEFINICION 2. La magnitud infinitamente pequeña β se llama infinitésima de *orden superior* en comparación con la infinitésima α si el límite de su relación es igual a cero. En la notación matemática esta definición se expresa del siguiente modo: si $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, $\beta = 0(\alpha)$. La notación $\beta = 0(\alpha)$ se lee así: β es infinitésima de orden superior respecto de la infinitésima α.

Ejemplos. 1) x^2 es una infinitésima de orden superior respecto a x al tender x a cero, puesto que

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0.$$

2) $\beta = (2x-1)^3$ y $\alpha = (2x-1)^2$. Aquí $\beta = o(\alpha)$ para $x \to \frac{1}{2}$, puesto que $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\beta}{\alpha} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (2x-1) = 0.$

§ 245. Infinitésimas equivalentes

Entre las distintas infinitésimas de las matemáticas aplicadas son importantes aquellas cuyo límite de la relación es igual a 1.

● DEFINICIÓN. Dos infinitésimas α y β se llaman *equivalentes* si el límite de su cociente es igual a 1.

Si $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, $\beta \sim \alpha$. Aquí el signo $\sim$ sustituye la palabra «equivalente» y se llama signo de equivalencia.

Veamos algunos ejemplos:

1) $\operatorname{sen} x \sim x$, 2) $\operatorname{tg} x \sim x$, 3) $\operatorname{sen} x \sim \operatorname{tg} x$ cuando $x \to 0$.

Por eso, para los valores de x próximos a cero, los valores de $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{tg} x$ se pueden considerar iguales al número x, es decir, a la medida del ángulo en radianes.

Por ejemplo: 1) $\operatorname{sen} 2^\circ = \operatorname{sen} 0{,}035 \approx 0{,}035$,

2) $\operatorname{tg} 1^\circ 40' = \operatorname{tg} 0{,}029 \approx 0{,}029$.

La equivalencia del seno y de la tangente está reflejada en la disposición de la escala común para el seno y la tangente de ángulos pequeños en el reverso de la corredera de la regla de cálculo (véase § 207).

Señalemos un importante par de infinitésimas equivalentes más. Comprobemos que

$\ln(1+x) \sim x$ cuando $x \to 0$.

En efecto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} [\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln [\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln e = 1.$$

De aquí, por ejemplo, se deduce que:

1) $\ln 0{,}9985 = \ln(1 - 0{,}0015) \approx -0{,}0015$,

2) $\ln 1{,}043 = \ln(1 + 0{,}043) \approx 0{,}043$.

En consecuencia, podemos hallar fácilmente los logaritmos naturales de los números próximos a la unidad.

Se demuestra fácilmente que

$$\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2} \text{ cuando } x \to 0,$$

puesto que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{\frac{x}{2}(\sqrt{1+x}+1)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{x}{2}(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+1} = 1.$$

Por eso en los cálculos aproximados se utiliza la fórmula $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}$ (x es un número próximo a 0).

De origen análogo es la fórmula $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1-\frac{x}{2}$, deducida de la equivalencia de las infinitésimas

$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1$ y $\beta = -\frac{x}{2}$ cuando $x \to 0$.

Ejemplos.

$$\sqrt{0,992} = \sqrt{1+(-0,008)} \approx 1-0,004 = 0,996,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1,082}} \approx 1-\frac{0,082}{2} = 1-0,041 = 0,959.$$

§ 246. Incremento del argumento y de la función

Supongamos dada la función $y = 3x^2 - 5x + 8$. Si el argumento x toma el valor $x_1 = 2$, el valor correspondiente de la función es $y_1 = 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 8 = 10$.
Para otro valor del argumento $x_2 = 4$, la función adquiere el valor $y_2 = 3 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 + 8 = 36$.
Al variar el argumento en la magnitud $x_2 - x_1 = 2$ la función dada varía en la magnitud $y_2 - y_1 = 26$.

● DEFINICION. La diferencia de dos valores del argumento se llama *incremento del argumento* y se designa por: $x_2 - x_1 = \Delta x$ («delta x»).
Análogamente, la diferencia de los dos valores correspondientes de la función se llama *incremento de la función*, cuya notación es: $y_2 - y_1 = \Delta y$ («delta y»). En nuestro ejemplo $\Delta x = 2$; $\Delta y = 26$.
Los incrementos del argumento y de la función pueden ser positivos, negativos y nulos. Por ejemplo, si $y = 1/x$, y el argumento x pasa del valor $x_1 = 5$ al valor $x_2 = 1$, $\Delta x = x_2 - x_1 = 1 - 5 = -4$. En este caso el incremento de la función es

$$\Delta y = y_2 - y_1 = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

En este ejemplo al incremento negativo del argumento corresponde un incremento positivo de la función.
Es muy importante aprender a hallar los incrementos de distintas funciones en forma general, cuando no se fija en forma de un número determinado el valor inicial (x_1) o final (x_2) del argumento. En tal caso, se utilizan con más frecuen-

cia las siguientes designaciones: el valor inicial del argumento se designa simplemente por x (sin subíndice); el valor final por $(x + \Delta x)$.
El valor inicial de la función se designa por y o bien $f(x)$; el valor final por $(y + \Delta y)$ o bien $f(x + \Delta x)$.

Ejemplo 1. Hallar en forma general el incremento de la función

$$y = x^3 - 2x + 5. \tag{1}$$

En el segundo miembro de la igualdad (1) el argumento x lo sustituimos por $(x + \Delta x)$ y realizamos con $(x + \Delta x)$ todas las operaciones que se deben realizar con x. Al mismo tiempo en el primer miembro y se sustituye por $(y + \Delta y)$:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x) + 5$$

o bien

$$y + \Delta y = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2x - 2\Delta x + 5. \tag{2}$$

Cabe hacer notar que $(y + \Delta y)$ se llama *incremento del valor* de la función. De la igualdad (2) restamos la igualdad (1):

$$\Delta y = (3x^2 - 2)\,\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Precisamente ésta es la fórmula general para el incremento de la función dada. Si $x = 5$, $\Delta x = -1$, tendremos que $\Delta y = -73 + 15 - 1 = -59$.

Ejemplo 2. $f(x) = \operatorname{sen} x$. Hallar el incremento de $f(x)$ cuando x se incrementa en Δx:

$$f(x + \Delta x) = \operatorname{sen}(x + \Delta x),$$
$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x,$$

o bien, transformando la diferencia de dos senos en un producto, obtenemos finalmente:

$$\Delta f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}.$$

En la fig. 151 se muestra la gráfica de la función $y = f(x)$. En la curva se ha tomado el punto $M(x, y)$ de abscisa x y ordenada y. Si el punto M se mueve por la curva a una nueva posición M_1, sus nuevas coordenadas serán $x + \Delta x$ e $y + \Delta y$. Por consiguiente, *el incremento del argumento Δx es el incremento de la abscisa, y el incremento de la función*

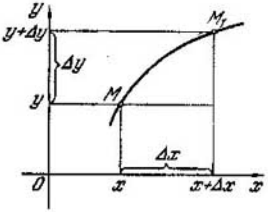

Fig. 151.

Δy es el incremento de la ordenada del punto M en la curva $y = f(x)$.

§ 247. Continuidad de una función

Detengámonos en una importante propiedad de la función, que utilizamos numerosas veces al construir las gráficas, pero que aún no le hemos dado una definición matemática exacta. Supongamos que $y = f(x)$ es una función arbitraria, x_0 es un punto del campo de definición de la función dada, de manera que $f(x_0)$ es un número real. Considerando x_0 como valor inicial del argumento, le daremos un incremento Δx.

Este incremento puede ser un número positivo o negativo: en los razonamientos ulteriores su signo no tendrá importancia. Al valor incrementado del argumento, igual a $x_0 + \Delta x$, corresponde un valor incrementado de la función, igual a $f(x_0 + \Delta x)$. La diferencia $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ es el incremento de la función:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Vamos a reducir lentamente el valor absoluto del incremento del argumento, haciendo que $\Delta x \to 0$. Si en este caso el incremento de la función Δy también tiende a cero, se dice que: la función $f(x)$ es continua en el punto $x = x_0$.

● DEFINICIÓN 1. Una función se llama *continua* en el punto $x = x_0$, si a un incremento infinitésimo del argumento, en ese punto, corresponde un incremento infinitésimo de la función. Conviene señalar que en la propia definición de continuidad no se tiene claramente el requisito de que la función esté definida en el punto x_0. En efecto, si en el punto x_0 la función no estuviese definida, no tendría

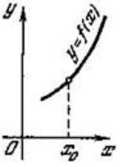

Fig. 152.

sentido hablar de incremento de la función en ese punto, y, por lo tanto, de continuidad.
En la interpretación geométrica la continuidad de la función en el punto $x = x_0$ significa que la gráfica de la función en el entorno del punto x_0 es una curva continua sin discontinuidades (fig. 152).

● DEFINICIÓN 2. Si la función es continua en cualquier punto del intervalo (a, b), se llama *continua en ese intervalo.*

● DEFINICIÓN 3. El punto, en el cual no se cumple la condición de continuidad se denomina *punto de discontinuidad* y la función se denomina *discontinua* en ese punto.

E j e m p l o 1. Vamos a comprobar que, para todo $x \neq 0$, la función $y = \frac{1}{x}$ es continua.
Hallamos el incremento de la función en el punto $x \neq 0$.
Tendremos que $\Delta y = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.
Hacemos tender el incremento Δx a cero y hallamos el límite del incremento Δy:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)} = \frac{0}{x^2} = 0.$$

Aquí aplicamos el teorema del límite de un cociente y de un producto. Resultó que cuando $\Delta x \to 0$, simultáneamente también $\Delta y \to 0$, lo que denota la continuidad de la función para todo $x \neq 0$.

E j e m p l o 2. Demostrar que en el punto $x = 4$ la función $y = \frac{x}{\lg(x-3)}$ es discontinua.
La discontinuidad de la función en el punto $x = 4$ se debe a que la $f(x)$ no está definida en dicho punto (el denominador $\lg(x-3)\,|_{x=4} = \lg 1 = 0$, y por cero no se puede dividir).

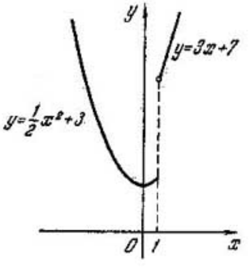

Fig. 153.

E j e m p l o 3. La función $f(x)$ está dada por dos fórmulas

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+3 & \text{para } x\leq 1,\\ 3x+7 & \text{para } x>1.\end{cases}$$

Demostrar que en el punto $x = 1$ la función es discontinua. En este ejemplo, a diferencia del anterior, la función está definida en el punto $x = 1$: $f(1)=\frac{1}{2}\cdot 1^2+3=3{,}5$. Queda verificar si Δy tiende o no a 0 cuando $\Delta x \to 0$, sea cual fuere el signo del incremento Δx.

1) Supongamos que el argumento x al principio adquiere un incremento negativo $(-\Delta x)$, en tal caso el incremento de la función en el punto $x = 1$ es igual a $f(1-\Delta x) - f(1) = \left[\frac{1}{2}(1-\Delta x)^2+3\right]-3{,}5$, o bien $\Delta y = -\Delta x + \frac{(\Delta x)^2}{2}$. Si $(-\Delta x)\to 0$, tendremos que Δy, como suma algebraica de dos infinitésimas, también tiende a cero.

2) Si Δx es positivo el valor del argumento es igual a $1+\Delta x$, el incremento de la función es

$$\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1).$$

Pero $1+\Delta x > 1$ y, por eso, de acuerdo a la regla de planteamiento de dicha función (cuando $x > 1$, la función es $f(x) = 3x + 7$)$f\quad(1+\Delta x) - f(1) = [3(1+\Delta x)+7] - 3{,}5$, $\Delta y = 3\cdot\Delta x + 6{,}5$.

Si $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 6{,}5$. Por consiguiente, en el punto $x = 1$ la función es discontinua (fig. 153).

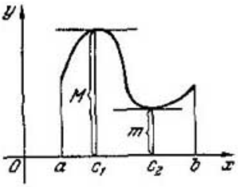

Fig. 154.

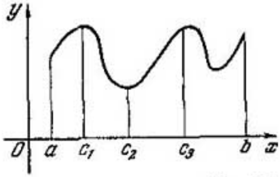

Fig. 155.

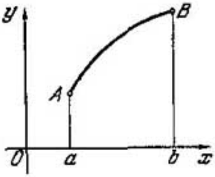

Fig. 156.

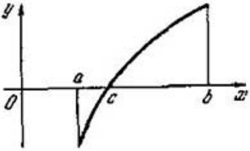

Fig. 157.

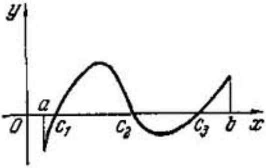

Fig. 158.

§ 248. Propiedades de una función continua en un segmento

1. La función continua en el segmento $[a, b]$ toma su valor mayor (M) aunque sea en un punto de este segmento, y su valor menor (m) aunque sea en un punto:

1) En la fig. 154 el valor mayor corresponde al punto $x = c_1$; el valor menor, al punto $x = c_2$.

2) En la fig. 155 se muestra que se alcanza el valor mayor en dos puntos c_1 y c_3, y el valor menor, sólo en el punto c_2.

3) Si la función en el segmento dado crece en todas las partes (la gráfica es la curva ascendente), el valor menor de la función corresponde al extremo izquierdo del segmento, el valor mayor, al extremo derecho (fig. 156); en el caso de la curva descendente, es al contrario.

2. Si en los extremos del segmento $[a, b]$ la función continua toma valores de signos contrarios, al menos en un punto intermedio del segmento ella se anula (la gráfica de la curva corta el eje Ox). En la fig. 157 se muestra que en el extremo izquierdo del segmento $[a, b]$ la función es negativa; en el extremo derecho es positiva, y en el punto intermedio c $(a < c < b)$ la función se anula $f(c) = 0$.
En la fig. 158 se muestran tres puntos de intersección con el eje Ox.
En general los puntos de intersección con el eje Ox puede ser sólo un número impar.

▲ Ejercicios

1. Citar ejemplos de funciones tomados de geometría y de física.
2. Expresar la longitud de la cuerda de una circunferencia de radio R (R es constante) en función de la distancia del centro de la circunferencia a la cuerda.
3. Dada la función $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, calcular: $f(0)$; $f(-2)$; $\frac{1}{f(1)}$; $f^2(1)$; $[1+f(1)]^2$; $\lg f\left(\frac{1}{2}\right)$; $\operatorname{sen} f(0)$.
4. Demostrar que si $\varphi(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$, entonces $\varphi(x_1)\cdot\varphi(x_2)=\varphi(x_1+x_2)$, $\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}=\varphi(x_1-x_2)$.
5. $f(x)=\lg x$; demostrar que $f(ab)=f(a)+f(b)$, $f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a)-f(b)$.
6. Hallar el campo de definición para cada una de las funciones:

1) $y=\frac{3x-2}{x+5}$; 2) $y=\frac{2}{x^2+3x}$; 3) $y=\sqrt{3-2x}$;

4) $y=\frac{1}{\sqrt{2-3\cos x}}$; 5) $y=\sqrt{x^2-5x+6}$; 6) $y=\lg(x^2-4)$;

7) $y=\lg(-3x^2+5x+2)$; 8) $y=\operatorname{arc\,sen}\frac{2x-5}{3}$; 9) $y=\frac{2+\operatorname{sen} x}{2-\sqrt{8\cos x}}$;

(10) $y=2^{\frac{1}{x-1}}$; 11) $y=\arccos\frac{3}{x^2+1}$; 12) $y=\sqrt{\lg(x+3)}$.

7. Indicar cuales de las funciones dadas a continuación son pares, impares, o ni una ni otra:

1) $y=\frac{x}{x^2+1}$; 2) $y=\frac{\operatorname{sen} x}{2x+1}$; 3) $y=3^x+3^{-x}$; 4) $y=x\sqrt{9-x^2}$;

5) $y=2x-3\operatorname{sen} x$; 6) $y=2^x-2^{-x}$; 7) $y=3\operatorname{arc\,tg} x+1$;

8) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$; 9) $y=\operatorname{arc\,sen}\frac{x+1}{\sqrt{2}}$; 10) $y=\operatorname{sen}(x^2)$;

11) $y=\frac{\cos x}{\operatorname{tg} x}$; 12) $y=\operatorname{sen}^2 2x+\sqrt{4-x^2}$.

8. Demostrar que el producto y el cociente de dos funciones impares es una función par.

9. Demostrar que la suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos funciones pares es una función par.

10. Construir las gráficas de las siguientes funciones:

1) $y=\lg(x-3)$; 2) $y=\lg|x-3|$; 3) $y=\frac{x}{x-3}$;

4) $y=2^{-x}$; 5) $y=2^{|x|}$;

6) $y=x^2-3|x|+2$; 7) $y=\arccos\frac{x}{x^2+1}$;

8) $y=\lg\frac{3-x^2}{1+x^2}$; 9) $y=\operatorname{sen} x+\cos 2x-1$; 10) $x=\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

11) $y=|\operatorname{sen} x|$; 12) $y=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1$.

11. Escribir los primeros cinco términos de las sucesiones:

1) $a_n=\frac{2n}{n+3}$; 2) $a_n=\frac{(-1)^n n}{2n-1}$; 3) $a_n=\frac{\cos\frac{\pi}{2}n}{n^2+1}$.

12. Demostrar que el apotema del polígono regular inscrito en un círculo tiende al radio del círculo para $n\to\infty$. 13. Demostrar que la sucesión $a_n=\frac{3n-1}{n+2}$ tiende al límite $a=3$ para $n\to\infty$.

14. Hallar los límites de las siguientes funciones:

1) $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2+1)$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

15. ¿A qué valor numérico menor no negativo debe tender el argumento x para cada una de las funciones indicadas más abajo por separado, para que ellas sean infinitamente grandes:

1) $f(x)=\frac{1}{x-2}$; 2) $y=\operatorname{tg} x$; 3) $y=\frac{2}{1-\cos x}$; 4) $y=\frac{3}{1+\lg x}$?

16. Hallar los límites de las funciones

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-2x}{x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{2x^2-3}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x^3+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-1})$; 6) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{4}{x^2-4}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} ?x}{2x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{2x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

17. Demostrar que cuando $x \to 0$

1) $\operatorname{sen} 2x \sim 2x$; 2) $\operatorname{tg} 3x \sim 3x$; 3) $\sqrt[3]{1+x}-1 \sim \frac{1}{3}x$.

18. Hallar los puntos de discontinuidad de las funciones y mostrar la forma de sus gráficas

1) $y=\frac{x}{x^2-4}$; 2) $y=2^{\frac{1}{x-1}}$; 3) $y=\frac{1}{1-\cos x}$.

19. Demostrar que las funciones dadas a continuación son continuas en todo el eje numérico:

1) $y=ax^2+bx+c$; 2) $y=\frac{x}{1+x^2}$; 3) $y=\operatorname{sen} x$; 4) $y=\sqrt[3]{x}$.

CAPITULO XVII

DERIVADA

§ 249. Introducción

Al estudiar la función lineal $y = kx + b$ (§ 51) se indicó que el camino S recorrido por un cuerpo en movimiento uniforme es una función lineal del tiempo: $S = vt + S_0$ Aquí en lugar del coeficiente de proporcionalidad k está la velocidad v, constante en dicho movimiento e interpretada como el camino recorrido en la unidad de tiempo.

Todo proceso uniforme se caracteriza por una función lineal y tiene la particularidad de que la variación de la función es proporcional a la variación del argumento:

$$\Delta y = k\Delta x. \qquad (1)$$

En realidad, si

$$y = kx + b, \qquad (2)$$

entonces

$$y + \Delta y = k (x + \Delta x) + b. \qquad (3)$$

Restando de la igualdad (3) la igualdad (2), llegamos a la correlación (1). Es natural llamar al número $k \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *velocidad de la función lineal* independientemente del sentido físico que tengan las variables x e y, en cada caso particular, puesto que cuando $\Delta x = 1$ simpre el incremento $\Delta y = k$ denota la variación de la función, que se produce en la unidad de variación del argumento, lo que por analogía con el movimiento uniforme es la velocidad de variación de dicha función.

Se presenta de un otro modo cuando nos encontramos con procesos no uniformes (irregulares), tales, por ejemplo, como el movimiento irregular, el enfriamiento de un cuerpo caliente en un medio de temperatura constante, la salida de un líquido de un orificio a una presión variable y otros fenómenos.

Aquí surgen dos preguntas:
1) ¿qué se denomina velocidad de un proceso irregular?
2) ¿cómo calcular esta velocidad después de dar la propia definición de velocidad?
Las respuestas a estas preguntas se dan en el siguiente párrafo.

§ 250. Problemas que conducen al concepto de derivada

1. Problema de determinación de la velocidad de un movimiento irregular. Después de conectar, un ascensor se mueve por la ley
$S = 1{,}5t^2 + 2t + 12,$

donde t es el tiempo en segundos, S es el camino recorrido en metros. Hallar la velocidad del movimiento al final del cuarto segundo, considerando desde el instante inicial de movimiento.
Formemos el siguiente cuadro

t	0	1	2	3	4	5
S	12	15,5	22	31,5	44	59,5
Δt	1	1	1	1	1	
ΔS	3,5	6,5	9,5	12,5	15,5	

De aquí se aprecia que en distintos intervalos de tiempo el ascensor recorre distintos caminos: en el primer segundo 3,5 m, en el segundo 6,5 m, en el tercero 9,5 m, etc. El movimiento del ascensor se acelera y, por ahora, no sabemos qué admitir como velocidad del movimiento al final del cuarto segundo y, en general, para cualquier otro instante de tiempo.
Examinemos el intervalo de tiempo desde el final del cuarto segundo hasta $(4 + \Delta t)$ s. El camino recorrido en este intervalo de tiempo se calcula fácilmente:
para $t = 4$ el camino $S = 1{,}5 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 12 = 44$ (m),
para $t = 4 + \Delta t$ el camino $S + \Delta S = 1{,}5 \cdot (4 + \Delta t)^2 + 2(4 + \Delta t) + 12$ (m). Restando tendremos que:
$\Delta S = 14 \cdot \Delta t + 1{,}5\,(\Delta)^2.$

Introducimos el concepto de velocidad media.

● DEFINICIÓN. *Se llama velocidad media en el intervalo de tiempo* Δt (s) *el cociente de dividir el incremento del camino* ΔS *entre el incremento del tiempo* Δt:

$$v_{\text{med}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \qquad (1)$$

En nuestro ejemplo

$$v_{\text{med}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{14\Delta t + 1,5\,(\Delta t)^2}{\Delta t},$$

$$v_{\text{med}} = 14 + 1,5\Delta t \text{ (m/s)}.$$

Vamos a hallar la velocidad media en intervalos de tiempo cada vez menores, uttilizando la fórmula (1):

Δt	1	0,1	0,01	0,001
v_{med}	15,5	14,15	14,015	14,0015

Hallamos la velocidad *instantánea* si el intervalo Δt lo consideramos una magnitud infinitésima, es decir, $\Delta t \to 0$; luego

$$v_{\text{inst}} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{med}} = \lim_{\Delta t \to 0} (14 + 1,5 \cdot \Delta t) = 14 \text{ (m/s)}.$$

De este modo, *la velocidad instantánea es el límite de la velocidad media en un intervalo de tiempo infinitésimo*:

$$v_{\text{inst}} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{med}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

2. Problema de determinación de la densidad lineal de una barra heterogénea. Se llama *barra* un cuerpo físico tal, que por su forma se parece a un segmento de recta, por ejemplo, un alambre, una vara delgada; en este caso se supone que las secciones transversales de la barra a lo largo de toda su longitud son iguales y pequeñas en comparación con su longitud.

Si la barra es homogénea, a lo largo de su longitud la masa está distribuida uniformemente y, en ese caso, se llama su *densidad lineal* el cociente de su masa sobre la longitud: $\gamma = \frac{M}{l}$.

Si la barra es heterogénea, es decir, la masa está distribuida irregularmente a lo largo de su longitud (la barra está hecha de distintos materiales), no se puede hablar de densidad de la barra, en general, puesto que su masa por 1 cm

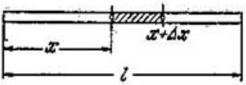

Fig. 159.

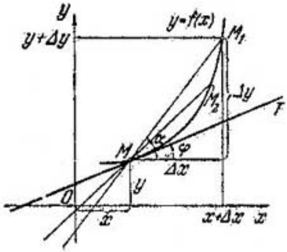

Fig. 160.

de longitud será diferente, según a qué distancia del origen de la barra se toma una porción de barra del largo de 1 cm. Supongamos que conocemos la ley de distribución de la masa: $M = f(x)$. La masa es función de la distancia al origen de la barra. Hay que determinar la densidad en la sección x (fig. 159). Tomamos una sección próxima a la distancia $x + \Delta x$. Al incremento Δx de la longitud de la barra corresponde el incremento de la masa ΔM. En consecuencia, $\frac{\Delta M}{\Delta x}$ es la densidad media lineal de la porción de barra entre las secciones x y $x + \Delta x$.

El límite de la densidad media, a condición de que el incremento de la longitud de la barra $\Delta x \to 0$, se llama *densidad lineal de la sección* x:

$$\gamma_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta x}.$$

3. Problema del trazado de una tangente a la curva. Dada la parábola $y = 0{,}5x^2$, hay que trazar una tangente a esta curva en el punto de abscisa igual a x.

Previamente hay que precisar el mismo concepto de «tangente a una curva». Supongamos que $y = f(x)$ es una función continua, cuya gráfica está representada en la fig. 160. Tomemos en la curva un punto arbitrario $M(x; y)$, que consideraremos inmóvil, un punto fijo. Nos desplazamos por la curva del punto M a la nueva posición M_1; las coordenadas del punto M_1 las designamos por $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, de manera que $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$. Uniendo los puntos M y M_1 por una recta, obtendremos la secante MM_1. Hacemos que el punto M_1 se aproxime ilimitadamente al punto M

(el punto M_2 es una posición intermedia), en tal caso, la secante MM_1 girará alrededor del punto M y en el instante de confluencia del punto M_1 con el punto M llegará a ser *tangente* MT a la curva en punto M.

DEFINICIÓN. Se llama *tangente a una curva en un punto dado* M la posición límite de la secante MM_1.

El punto M de la curva, en el que se traza la tangente, generalmente se determina por su abscisa x, puesto que conociendo la abscisa y la ecuación de la curva se determina fácilmente el propio punto M.

Partiendo de esta definición de la tangente, se puede hallar por medio de cálculos la posición de la tangente: la recta (la tangente es una recta) en el sistema de coordenadas se determina completamente por el punto, a través del cual ella pasa, y por su dirección, es decir, por el coeficiente angular $k = tg\,\varphi$. Teniendo en cuenta esta consideración, resolvemos el problema concreto de trazado de una tangente a la parábola $y = 0,5x^2$ en un punto arbitrario de abscisa x. Tomemos dos puntos de la parábola: $M\ (x; y)$ y $M_1\ (x + \Delta x; y + \Delta y)$. La secante MM_1 forma con el sentido positivo del eje Ox el ángulo α; además, el coeficiente angular de la secante, es decir, la $\operatorname{tg}\alpha$, es igual a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (véase la fig. 160).

Pero

$$y = 0,5\cdot x^2, \quad y + \Delta y = 0,5\,(x + \Delta x)^2,$$

de donde restando hallamos:

$$\Delta y = 0,5\,[(x + \Delta x)^2 - x^2],$$

o bien

$$\Delta y = 0,5\cdot[2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2],$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,5\,(2x + \Delta x) = x + 0,5\cdot\Delta x,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = x + 0,5\cdot\Delta x.$$

Si el punto M_1 se aproxima ilimitadamente al punto M, tendremos que $\Delta x \to 0$ y el ángulo α, en este caso tiende al ángulo límite φ, formado por la tangente MT con el eje Ox. Por lo tanto,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0}(x + 0,5\cdot\Delta x) = x,$$

o bien $\operatorname{tg}\varphi = x$.

De este modo encontramos que el coeficiente angular (pendiente) de la tangente a la parábola $y = 0,5x^2$ en un punto

arbitrario es igual a x, es decir, a la abscisa del punto de tangencia.
Si $x = 1$, tendremos que $\operatorname{tg} \varphi = 1$, $\varphi = 45°$ o sea, en el punto de abscisa $x = 1$ la tangente está inclinada en un ángulo de 45° (pendiente de la tangente) respecto del eje Ox.
Los tres problemas examinados son diferentes por su contenido físico y geométrico, sin embargo su resolución requirió la aplicación de iguales razonamientos: en cada problema la magnitud buscada (incógnita) resultó ser el límite de la relación de dos incrementos. Se podía haber expuesto una serie de otros problemas de la técnica y de las ciencias naturales, que se resolverían por el mismo método.
Teniendo en cuenta la importancia extraordinaria del límite antes señalado para las matemáticas y las ciencias aplicadas, a éste se le ha dado una denominación especial.

§ 251. Definición de derivada

Supongamos que $y = f(x)$ es una cierta función.

DEFINICIÓN 1. El límite de la relación entre el incremento de la función y el incremento del argumento, cuando el incremento del argumento tiende a cero, se llama *derivada de la función dada*:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} \text{ — derivada.}$$

Aquí se han dado tres notaciones distintas de la derivada: y' (se lee «i griega prima»); $f'(x)$ («efe prima de x»); $\frac{dy}{dx}$ («de i griega sobre de equis» o «dy respecto de dx»).
Ahora se puede decir:
1) Si con la fórmula $S = f(t)$ se da la ley del movimiento rectilíneo, la velocidad del movimiento (velocidad instantánea) para cualquier instante de tiempo es la derivada del camino (espacio) respecto del tiempo:

$$v_{\text{inst}} = \frac{dS}{dt} \qquad \text{(problema 1).}$$

2) Si se da la ley de distribución de la masa respecto de la longitud de la barra heterogénea, es decir, $M = f(x)$, la densidad lineal de la barra en la sección x es la derivada de la masa respecto de la distancia (respecto de la longitud):

$$\gamma_x = \frac{dM}{dx} \qquad \text{(problema 2).}$$

3) Si la ecuación de la curva es $y = f(x)$, la derivada de la ordenada respecto de la abscisa es el coeficiente angular (pendiente) de la tangente MT, trazada a la curva en el punto M:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = k_{\text{tang}} \qquad \text{(problema 3).}$$

En esta formulación se da el *sentido geométrico de la derivada.*

Conviene hacer notar que fijado el valor del argumento ($x = x_0$) la derivada de la función dada es un número determinado. Este número se designa por $y'(x_0)$ ó $f'(x_0)$. Así se obtuvo al resolver el problema 1 sobre el movimiento del ascensor. Aquí hubo que hallar la velocidad en el instante de tiempo $t = 4$ s; respuesta:

$$S'(4) = 14, \text{ o bien } \left.\frac{dS}{dt}\right|_{t=4} = 14.$$

Si no se fija el valor inicial del argumento, conservándose arbitrario, la derivada de la función dada es la función del mismo argumento, sólo que la ley de dependencia de y' respecto de x, en general, es distinta que la ley de dependencia de y respecto de x. Esto se aprecia de la resolución del problema 3: aquí la función es $y = 0{,}5x^2$, su derivada $y' = x$.

● DEFINICIÓN. La función que tiene derivada finita en todos los puntos de un cierto intervalo (a, b), se llama *diferenciable en ese intervalo.*

La gráfica de la función diferenciable se llama *curva plana* y la propia función se llama *plana.*

Existen funciones que en ciertos puntos (o incluso en todos los puntos) no tienen derivada. Un ejemplo de tal función está representado en la fig. 161: aquí, en el punto $x = c$ se puede trazar a la curva dos tangentes distintas: la izquierda CP, cuando $\Delta x < 0$, y la derecha CT, cuando $\Delta x > 0$. En estos casos se dice que no existe ninguna tangente, puesto que el $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ no debe depender de que Δx tienda a cero por la derecha o por la izquierda, es decir, las tangentes derecha e izquierda deben coincidir.

En adelante se hablará sólo de funciones diferenciables. Las frases «hallar la derivada» y «diferenciar una función» por su sentido son equivalentes.

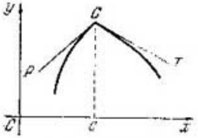

Fig. 161.

§ 252. Regla general de determinación de la derivada

La derivada de cualquier función diferenciable $y = f(x)$ se halla por el siguiente esquema:

1) Incrementamos el argumento x en Δx y hallamos el valor incrementado de la función: $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

2) Del valor incrementado de la función restamos el valor inicial de la función: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

3) Hallamos la razón del incremento de la función al incremento del argumento: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ (ésta es la velocidad media de variación de la función).

4) Hallamos el límite de la razón del incremento de la función al incremento del argumento, cuando éste tiende a cero.

Este límite es la derivada de la función dada:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$

Ejemplo 1. Hallar la derivada de la función $y = \sqrt{x}$:

$$\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Antes de pasar al límite, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ejemplo 2. ¿Cuál es la pendiente (ángulo de inclinación) de la tangente a la hipérbola $y = 4/x$ en el punto $x = 2$?

Al principio hallamos la derivada y' en un punto cualquiera $x\,(x \neq 0)$ de la función $y = 4/x$:

$$\Delta y = \frac{4}{x+\Delta x} - \frac{4}{x} = \frac{4\,(x - x - \Delta x)}{x\,(x+\Delta x)}, \quad \Delta y = -\frac{4\Delta x}{x\,(x+\Delta x)};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{4}{x\,(x+\Delta x)};$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4}{x\,(x+\Delta x)} = -\frac{4}{x^2}, \quad y' = -\frac{4}{x^2}.$$

Ahora $y'(2) = -\frac{4}{2^2} = -1$.

Por lo tanto, $\operatorname{tg}\varphi = -1$, es decir, $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ (o bien 135°).

▲ **Ejercicios**

1. Se sabe que el camino recorrido por un cuerpo que cae libremente se calcula por fórmula $S = gt^2/2$, donde S es el camino en metros, g es la aceleración de la gravedad, igual a 9,8 m/s², t es el tiempo en segundos.
1) Hallar la velocidad media del cuerpo en el intervalo de tiempo de $t_1 = 2$ a $t_2 = 5$; 2) hallar la velocidad v del cuerpo en el instante $t = 2$, calculando $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}$; 3) demostrar que la velocidad v del cuerpo que cae libremente en cualquier instante de tiempo t es igual a $v = gt$.

2. Un cuerpo se mueve rectilínea y uniformemente acelerado según la ley $S = 5t^2 + 8t + 10$, donde t es el tiempo en segundos, S es el camino recorrido en metros. Hallar: 1) la velocidad del movimiento al final del 8º segundo; 2) ¿al final de cuántos segundos la velocidad alcanza 128 m/s?

3. Calculando $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{y\Delta}{\Delta x}$, hallar las derivadas de las funciones:

1) $y = x^3$; 2) $y = \frac{1}{x^2}$; 3) $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$; 4) $y = 2x^2 - 5x + 8$;

5) $y = \frac{x^3}{2} + 3x + 1$; 6) $y = \cos x$; 7) $y = \frac{x+1}{1-4x}$.

4. Calcular $f'(0)$, si $f(x) = \sqrt{1} + x$.

5. Hallar los ángulos de inclinación de las tangentes trazadas a la parábola $y = 0{,}5x^2 + 1$ en los puntos de abscisas $x = \pm 1$.

6. ¿Bajo que ángulo se intersecan las parábolas: $y = 3x^2$ e $y = 4 - x^2$?

▲ Observación. Se llama ángulo de intersección de dos curvas el ángulo formado por las tangentes trazadas en el punto de intersección de las curvas.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS

Capítulo I

2. 6400; 6360; 6357. 3. La segunda escritura indica una medición más precisa. 5. Con precisión de hasta 0,02 m. 6. 5,286. 7. 18,6 y 18,8. 8. 0,05%. 9. El segundo. 10. Es más preciso $3\frac{1}{7}$. 11. 18,8. 12. 6,829. 13. 615 km (± 5 km). 14. 164 kg. 15. 0,25. 16. 2%. 17. Con tres cifras exactas 18. Con precisión de hasta 0,5%. 19. 14,1 quintales métricos. 20 Con exactitud de hasta 0,1 cm.

Capítulo II

1 1) $\frac{4}{3}$; 3) $2b$. 2. 1) 0; $-\frac{8}{3}$; 3) 6; 8; 5) 0,7; 0,3;

7) $\frac{3m+8}{m^2+6}$; $\frac{4m-9}{m^2+6}$; 9) $(a+b)^2$; $(a-b)^2$; 11) $\frac{ab(a-b)}{a^2+b^2}\;\frac{ab(a-b)}{a^2+b^2}$;

a y b no son iguales a 0; 13) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$;

15) $-\frac{m(D+Aa+Bb+Cc)}{Am+Bn+Cp}+a$; $-\frac{n(D+Aa+Bb+Cc)}{Am+Bn+Cp}+b$;

$-\frac{p(D+Aa+Bb+Cc)}{Am+Bn+Cp}+c$ con la condición de que $Am+Bn+Cp\neq$ $\neq 0$; 16) -5; 2 y 3; 2. 3. $k\neq 7{,}5$. 4. $k=2$. 5. $k=8$.

Capítulo III

1. 1) $x>2$; 3) $x<7$; 5) $x>\frac{2(1-k)}{3-6k}$ si $k<0$; 7) $\frac{2}{3}<x<\frac{8}{3}$;

9) $x<-1$ y $x>4$.

2. 1) $x>\frac{3}{2}$; 3) $\frac{53}{4}<x<20$. 3. $-\frac{3}{2}<a<4$.

4. $\frac{26}{3}<m<\frac{91}{5}$; 5. $10<a<12$.

6. $m<-4$ y $m>2$. 7. Si $n=0;\cdot 1$.

5. 3) x^{2n-2}; 6) a^{18}; 8) a^{8m}. 6. $\dfrac{c-d}{(a+b)^3}$.

7. 2) $\sqrt{15}$; 5) $\sqrt{abx}$; 8) $\sqrt[3]{10}$; 10) $\sqrt{\dfrac{a}{4c}}$; 13) $\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}$.

8. 1) Mayor que $3\sqrt{2}$; 2) más de $3\sqrt{10}$. 9. 3) $\dfrac{6}{7}\sqrt{2}$; 6) $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$; 11) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; 12) $|x-1|\sqrt{2}$; 15) $\sqrt[3]{1+b}$. 11. 7) $0{,}7\sqrt[3]{xy^2}$ y $0{,}3\sqrt[3]{xy^2}$; 8) $\dfrac{1}{a-b}\sqrt{a-b}$ y $\dfrac{2}{b}\sqrt{a-b}$. 12. 1) $20\sqrt{2}$; 6) 0.

13. 3) $\sqrt[6]{a^3}$, $\sqrt[6]{9a^2b^2}$, $\sqrt[6]{8c^3}$. 14. 1) $\sqrt[4]{2^3}$; 4) $2\sqrt[12]{2}$. 15. 3) $\sqrt{10}$; 5) $x\sqrt[15]{x}$; 9) $0{,}4\,ab$; 11) 7; 13) 1; 15) a^2-b; 17) $(a+b)^2$; 19) $102+9\sqrt{6}$; 21) 1; 23) y. 16. 4) a^2b^2; 7) $a+b+2\sqrt{ab}$; 10) $2(x+\sqrt{x^2-y^2})$; 13) $\dfrac{(x+y)^2}{xy}$; 19) $(p^2-q^2)^2$. 18. 2) $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$; 5) $\dfrac{2}{3}\sqrt{5}$; 9) $2-\sqrt{3}$. 19. $4x\sqrt{x^2-1}$. 24. m. 26. 2) $a^{\frac{2}{3}}$; 6) $(x-y)^{\frac{1}{3}}$; 8) $a^{-\frac{1}{2}}$; 11) $3(x-y)^{-\frac{1}{3}}$; 12) $3ab(a+b)^{-\frac{2}{5}}$. 27. 4) $\dfrac{1}{8}$; 10) $\dfrac{1}{81}$; 13) $12\dfrac{4}{9}$.

28. 3) $x-y$; 6) a^2+a+1; 10) x^2+2; 12) a. 29. 1) $\dfrac{2y}{\sqrt{x^2-y^2}}$; 2) $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{4\sqrt{xy}}$; 3) $\dfrac{x+y}{x-y}$; 4) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; 5) $\dfrac{4}{a+\sqrt{a}+1}$.

30. $\dfrac{a^3}{2(a-1)}$. 31. 1) x^4; 2) $a^{-\frac{8}{5}}b^{-1}$; 3) $-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$; 4) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

Capítulo VI

1. $f(-1)=0$; $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. 2. $\dfrac{f(2)}{\varphi(2)}=\dfrac{5}{8}$; $f(1)\cdot\varphi(3)=39$.

3. 1) Todo el eje real; 2) $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$; 3) $x \leqslant 0$; 4) todo el eje real, excepto los puntos $x=\pm 1$; 5) $|x| \geqslant 2$; 6) todo el eje real, excepto el punto $x=\dfrac{3}{2}$; 7) todo el eje real, excepto el punto $x=0$.

4. Serán pares las funciones dadas en los ejemplos 1) y 6); impares en los ejemplos 4) y 7). 6. 1) $y=x^2+1$; 2) $y=x^2-2$. 7. 1) Para $q>0$ el vértice se encuentra sobre el eje Ox, si $q<0$, debajo del eje Ox, si $q=0$ el vértice coincide con el origen de coordenadas. 8. 1) $y=(x-4)^2$; 2) $y=(x+3)^2$. 9. 1) Desplazamiento a la derecha a 2 unidades y hacia arriba a 1 unidad; 2) desplazamiento a la

izquierda a 1 unidad y hacia abajo a 4 unidades. 10. 1) $y=(x-3)^2+2$; 4) $y=(x+1,5)^2-2,5$. 11. Desplazamiento a 4 unidades a la derecha y a 9 unidades hacia abajo, el vértice de la parábola está en el punto (4; −9); 2) desplazamiento a 2 unidades a la izquierda y a 1 unidad hacia abajo, el vértice de la parábola está en el punto (−2; −1). 12. 1) Las parábolas son simétricas respecto del eje Ox y tienen vértice común en el origen de coordenadas; 3) las parábolas tienen el vértice común (−2; 3) y son simétricas respecto de la recta $y=3$. 13. $a=2$. 14. $a=-1$. 15. $a=\frac{3}{8}$; $c=-\frac{27}{8}$. 16. $x=\frac{7}{2}$. 17. $x=4$.

Capítulo VII

1. 1) $-3,5$ y 3; 3) 2; 5) $-2a$ y $2b$; 7) $-\frac{a}{7}$ y $\frac{a}{8}$; 8) $-\frac{89}{14}$ y 1; 9) $\frac{b\pm\sqrt{b^2-4a}}{2}$; 10) $\frac{b}{a}$ y $\frac{a}{b}$; 11) $\frac{a-b}{a+b}$ y $\frac{a+b}{a-b}$; 12) $\frac{a+b+c\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc)}}{3}$; 13) no hay raíces reales; 14) $\frac{m}{m-n}$ y -1; 17) $-\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\pm 2$; 19) $a+b$ y a^2-b^2. 2. 8 puntos. 3. $\frac{1+\sqrt{8m+1}}{2}$. 4. 15 m y 25 m. 5. 30 cm y 12,5 cm. 6. No hay. 7. En el pentágono. 8. Son posibles triángulos rectángulos conformemente con los lados; 3, 4; 5 y 6, 8, 10, sin embargo 3) no existe un triángulo rectángulo, cuyos lados se expresen por tres números pares sucesivos, puesto que la suma de los cuadrados de los números impares es un número par, que no puede ser igual al cuadrado de un tercer número impar, es decir, a un número impar. 9. 5 km y 6 km. 10. 3 horas y 5 horas. 11. 20 km/hora. 12. 48 km/hora y 36 km/hora. 13. 20 horas y 30 horas. 14. 2400 rublos. 15. 630 km y 420 km. 16. 180 km y 60 km. 18. 3) 1,23 y −0,40; 4) 0,42 y 0,72. 19. 1) $x^2-8x+15=0$; 3) $2x^2-7x-4=0$; 4) $x^2-9=0$; 6) $x^2-\frac{b}{a}x=0$; 8) $12x^2-25x+12=0$; 9) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$; 10) $4x^2-4mx+m^2-n^2=0$; 11) $x^3-4x+1=0$; 12) $2x^2-2x-1=0$; 13) $x^2-2ax+a^2-b=0$ 21. 1) $m=\pm 12$; 2) $m=4$; 3) $m=\frac{-10}{9}$ y $m=2$. 22. 1) $b^2-4ac\geqslant 0$, $a>0$, $c>0$, $b<0$; 3) $b^2-4ac>0$, $a>0$ y $c<0$. 23. 1) $m=a^2-b^2$; 3) $m=-2$; 4) $m=-(2a+5)$. 24. 1) $k=-\frac{27}{4}$; 2) $k=-\frac{13}{16}$; 4) $k=-\frac{25}{2}$. 25. $a=-\frac{8}{25}$. 26. $a^4x^2-(2b^2-4ac)a^2x+b^4-4ab^2c=0$. 27. 1) 0; 5; −3; 3) 0; −4; −7; 4) 3; −1; 1; 6) $x=2$, y dos raíces más son números imaginarios; 8) 0; $\pm\sqrt{2}$. 28. $(x-1)(x-2)(x+3)=0$; 3) $(x^2-4)(x^2-9)=0$; 5) $(x-a)(x-b)\times(x+c)(x-d)=0$. 29. 1) ± 1; $+4$; 3) $\pm\sqrt{5}$; $\pm\sqrt{6}$; 5) ± 2; dos raíces más son números imaginarios. 30. 1) 4; 3) 24; 4) 77; 6) 7;

7) 40; 8) 4; 9) 4; 10) 6; 11) $3a$; 12) 3; 14) 64; 16) 4; 18) $\frac{5}{4}$; 20) 3; 22) $3a$ y $4a$ $(a>0)$; 23) 0; 24) $\frac{a+\sqrt{a^2+8b^2}}{4}$ $(a>0$ y $|b|\leqslant a)$; 25) si $a<0$ y $b^2-a^2\geqslant 0$ $x=0$; si $a>0$ y $a\geqslant|b|$ $x=\frac{5a^2-b^2}{4a}$; si $a=b=0$ todo número positivo x satisface la ecuación; 26) $\frac{2a\sqrt{b}}{b+1}$ $(b>0)$; 28) $\frac{3}{4}a$ $(a>0)$. **31.** 1) $(7;\ 5)$ y $(-5;\ -7)$; 3) $(9;\ 5)$ y $(-9;\ -5)$; 5) $\left(\sqrt{\frac{5}{2}};\ 2-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ y $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}};\ 2+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$; 7) $(2;\ 2)$ 9) $(5;\ 3)$ y $\left(\frac{3}{4};\ -\frac{5}{4}\right)$; 10) $(3;\ 1)$; $(-3;\ -1)$; $(2\sqrt{2};\ \sqrt{2})$ y $(-2\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$; 11) $(2;\ 2)$; $(-2;\ -2)$; $(2;\ -2)$ y $(-2;\ 2)$; 12) $(7;\ 4)$; $(4;\ 7)$; $(-7;\ -4)$ y $(-4;\ -7)$; 13) $(8;\ 4)$ y $(4;\ 8)$; 14) $(6;\ 3)$; $(3;\ 6)$; $\left(-9;\ -\frac{9}{2}\right)$ y $\left(-\frac{9}{2};\ -9\right)$; 15) $(6;\ 3)$ y $(-6;\ -3)$; 17) $(10+4\sqrt{6};\ 10-4\sqrt{6})$; 18) $(8;\ 2)$ y $(2;\ 8)$; 19) $(9;\ 4)$ y $(4;\ 9)$; 20) $\left(\frac{b}{(1-m)\sqrt{m}};\ \frac{b\sqrt{m}}{1-m}\right)$, donde $m=\frac{a^2-2\pm\sqrt{a^2(a^2-4)}}{2}$; 21) $\left(\frac{a}{2};\ \frac{b}{2}\right)$; 22) $(8;\ 64)$ y $(64;\ 8)$; 23) $(4;\ 9)$ $(9;\ 4)$; $(-4;\ -9)$ y $(-9;\ -4)$; 24) $\left(\frac{a^2+2b+\sqrt{a^2(a^2+4b)}}{2};\ \frac{a^2+2b-\sqrt{a^2(a^2+4b)}}{2}\right)$; 25) $(6;\ 3)$, $\left(-3;\ -\frac{3}{2}\right)$; $\left(\frac{12+\sqrt{351}}{23};\ 12+\sqrt{351}\right)$ y $\left(\frac{12-\sqrt{351}}{23};\ 12-\sqrt{351}\right)$; 26) $(4;\ 2)$. **32.** $(15;\ 9)$ y $(-15;\ -9)$. **33.** 12 y 8. **34.** $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$; **35.** 1) $1<x<4$; 2) $x<1$ y $x>2$; 3) $1<x<7$; 4) $x\leqslant 1$ y $x\geqslant 4$; 5) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}<x<1$ y $x>\frac{3+\sqrt{13}}{2}$; 6) $-3<x<3$; 7) $\frac{5-\sqrt{41}}{2}<x<1$ y $4<x<\frac{5+\sqrt{41}}{2}$; 8) $x\leqslant-\sqrt{12}$; $-6\leqslant x\leqslant 6$ y $x\geqslant\sqrt{12}$. **36.** 1) $-4<x<-1$ y $2<x<3$; 2) $2<x<5$; 3) $-1{,}5<x\leqslant-1$.

Capítulo VIII

3. $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$. 6. $\text{proy}_l\,\mathbf{a}=-4$. 7. $\overrightarrow{AB}=4\mathbf{i}$; $\overrightarrow{BC}=6\mathbf{j}$; $\overrightarrow{CD}=-4\mathbf{i}$; $\overrightarrow{DA}=-6\mathbf{j}$; $\overrightarrow{AC}=4\mathbf{i}+6\mathbf{j}$; $\overrightarrow{BA}=-4\mathbf{i}$. 8. $\overrightarrow{AM}=2\mathbf{i}+6\mathbf{j}$; $\overrightarrow{AN}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}$; $\overrightarrow{MN}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$. 9. Resultante $\overrightarrow{OM}=\{8;\ -2\}$; $|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{68}$. 12. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-5$. 13. $\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{17\cdot 13}}$. 14. $\text{proy}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}=\frac{9}{\sqrt{73}}$; $\text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}=\frac{9}{\sqrt{34}}$.

15. $\cos\varphi=\frac{21}{5\sqrt{37}}$. 16. $y=-6$. 19. 1. 20. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Capítulo IX

2. 1) $\frac{\pi}{90}$; 4) $\frac{5\pi}{72}$; 7) $\frac{16\pi}{9}$; 4. 1) 120°; 3) 270°; 5) 22°30′; 17) 18°. 6. 102°. 7. $\frac{2\pi}{5}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5}{3}\pi$; $\frac{4}{5}\pi$; $\frac{22}{15}\pi$; 2π; $3{,}5\pi$; $0{,}06\pi$; $0{,}01\pi$; $0{,}75\pi$. 8. $\frac{3}{4}$ (rad). 11. 15,9 cm. 13. $P=44{,}1$ cm; $S=106$ sm². 15. 1) $\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{8\pi}{9}$. 22. 1) $\operatorname{sen} 285°<0$; 4) $\operatorname{tg} 327°20'<0$. 24. 1) $\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}$; 3) $60°\leqslant x\leqslant 300°$. 25. 1) $\cos\alpha=-0{,}8$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$; 3) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a}$; $\operatorname{sen}\alpha=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\alpha=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$. 26. 1) -7; 3) $-p$. 27. 1) $\operatorname{sen} 15°$; 3) $-\operatorname{tg} 45°=-1$; 5) $\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) $-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 9) $-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$. 28. 1) $\operatorname{sen} 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $-\operatorname{tg} 60°=-\sqrt{3}$; 5) $\operatorname{sen} 0{,}4\pi$; 8) $-\operatorname{ctg} 0{,}3\pi$. 29. 1) $\operatorname{tg} 10°\cdot\operatorname{sen} 10°$; 3) 1; 5) $\cos 0{,}1\pi\cdot\operatorname{sen}^2 0{,}1\pi$; 6) 0; 7) $\cos A$; 8) $-\operatorname{sen} 0{,}5$; 9) 0; 10) $\cos^2 10°$; 11) $2\operatorname{tg} B$; 12) $\operatorname{tg} x\cdot(\operatorname{sen} x-\cos x)$. 31. 1) $0<x<\pi$; 2) $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ y $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$; 4) $0\leqslant x<\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}<x<\frac{3\pi}{2}$ y $\frac{11\pi}{6}<x\leqslant 2\pi$; 5) $\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$ y $\frac{4\pi}{3}<x<\frac{3\pi}{2}$; 6) $\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}$; 7) $\frac{\pi}{8}<x<\frac{7\pi}{8}$ y $\frac{9\pi}{8}<x<\frac{15\pi}{8}$; 8) $0<x<\frac{\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3}<x<\pi$; 9) $0<x<\frac{\pi}{4}$ y $\frac{7\pi}{4}<x<2\pi$; 10) $0<x\leqslant\frac{\pi}{6}$ y $\pi<x\leqslant\frac{7\pi}{6}$; 11) $\frac{7\pi}{12}<x<\frac{3\pi}{4}$ y $\frac{7\pi}{4}<x<\frac{23\pi}{12}$; 12) $0\leqslant x<\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}<x<\frac{7\pi}{6}$ y $\frac{11\pi}{6}<x\leqslant 2\pi$; 13) $0\leqslant x<\frac{11\pi}{24}$ y $\frac{43\pi}{24}<x\leqslant 2\pi$; 14) $\frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{12}<x<\frac{11\pi}{12}$; $\frac{13\pi}{12}<x<\frac{17\pi}{12}$ y $\frac{19\pi}{12}<x<\frac{23\pi}{12}$.

Capítulo X

1. 1) $-\frac{4}{5}$; 4) $-\frac{117}{125}$; 6) $\frac{44}{117}$. 2. $\cos(\alpha-\beta)=\frac{140}{221}$. 3. 1) $-\cos(a-b)$, 3) $\operatorname{sen} x$; 5) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 7) $\operatorname{ctg} 2\alpha$; 8) $\operatorname{tg}^2\alpha$. 4. 1) 3; 3) $-\frac{7}{25}$; 5) $\sqrt{\frac{10+3\sqrt{10}}{20}}$.

5. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) 1. 7. 1) $\frac{1}{72}(28\sqrt{2}+7\sqrt{15})$. 9. 1) $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 3) $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 5) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 7) $x=\frac{\pi}{3}k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 9) $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 11) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 13) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. 10. 1) 1,5; 2) $\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$. 11. 1) $2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$; 2) $2\operatorname{sen}\frac{3a}{2}\cos a\cos\frac{a}{2}$; 3) $\frac{4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{\operatorname{sen}4\alpha}$; 4) $2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}$; 5) $\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$; 6) $\frac{4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos^2\alpha}$.

Capítulo XI

1. 1) $\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 5) $-\frac{\pi}{2}$. 2. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 4) $\frac{3}{2}\pi$. 3. 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2}$. 5. 1) $x=\operatorname{arc\,sen} y$; 2) $x=\operatorname{arc\,sen} 2y$; 4) $x=\operatorname{arc\,ctg} 4y$; 5) $x=2\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{3}$. 6. 1) $x=2\operatorname{sen} y$; 3) $x=\cos 2y$; 4) $x=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{y}{3}$. 7. 1) 0,6; 2) $\sqrt{3}$; 3) $2x\sqrt{1-x^2}$. 9. 1) $x=(-1)^k\operatorname{arc\,sen}\frac{2}{3}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 3) $x=\pm\frac{1}{2}\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{5}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 5) $x=(-1)^k\operatorname{arc\,sen}\frac{4}{5}+\pi k+\frac{\pi}{8}$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. 10. 1) $2\operatorname{sen}55^\circ\cos 25^\circ$; 3) $2\operatorname{sen}4\cos 1$; 5) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\sec\frac{3\pi}{5}$; 7) $2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)$; 11) $2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$; 14) $4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$. 11. 1) $\operatorname{sen}60^\circ+\operatorname{sen}20^\circ$; 3) $\frac{1}{2}(\operatorname{sen}4\alpha+\operatorname{sen}2\alpha)$; 5) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}\right)$; 8) $\frac{1}{2}\left[\cos 3x+\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$. 13. 1) $\frac{\pi}{2}(4k+1)$; $-2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}+2\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 4) $x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 5) $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{4}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 7) $x=\frac{\pi}{10}(2k+1)$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 8) $x=\pm 60^\circ+180^\circ k-15^\circ$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 10) $x_1=\frac{\pi}{4}(8k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{5}(2k+1)-\frac{\pi}{20}$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 13) $x=$

$=\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 15) $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $x_2=\operatorname{arc\,tg} 5+\pi^k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 17) $x_1=\pi(2k+1)$; $x_2=\pm\frac{4}{9}\pi+\frac{4}{3}\pi k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 19) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}k$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 21) $x=\frac{2k\pi}{3}$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 22) $x_1=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $x_2=\frac{\pi}{2}-(-1)^k\frac{\pi}{3}+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 23) $x_1=\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{24}$; $x_2=(2k+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 24) $x_1=\frac{k\pi}{2}$; $x_2=\frac{k\pi}{5}$; $x_3=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 25) $x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 26) $x=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 27) $x_1=\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x_2=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{5}+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 28) $x_1=\frac{\pi}{2}(4k+1)$; $x_2=(2k+1)\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 29) $x_1=2k\pi$; $x_2=\frac{3\pi}{4}+k\pi$; $x_3=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 30) $x_1=k\pi$; $x_2=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{6}+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 31) $x=(-1)^k \operatorname{arc\,sen}\frac{3}{5}+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$; 32) $x_1=(2k+1)\pi$; $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{3}+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$.

Capítulo XII

3. 2) $a_n=\frac{n}{2n-1}$. 10. 144, 168, 192. 14. 1) $d=4$; $S_n=207$; 2) $a_n=-4$; $n=7$; 3) $a_n=-32$; $S_n=-5$; 4) $n=13$; $S_n=403$; 5) $a_1=1$; $a_n=469$; 6) $n=17$; $a_n=50$; 7) $a_1=5{,}2$; $S_n=584{,}8$; 8) $a_1=2{,}3$; $n=19$; 9) $d=5{,}5$; $n=20$; 10) $a_1=15$, $d=-3$. 15. $\div$ 12, 10, 8, ... 16. $\div$ 12. 9, 6, 3, ... ó $\div -9$, -6, -3, 0, ... 19. 3. 20. $2\frac{1}{3}$; $5\frac{1}{3}$; $8\frac{1}{3}$. 21. 7 ó 13. 30. $q=\frac{1}{3}$; $S_7=53\frac{79}{81}$. 31. $a_1=2$, $a_7=1458$. 32. $n=6$. 33. $q_1=12$; $q_2=-13$. 34. $6\frac{1}{4}$ ó $-56\frac{1}{4}$. 35. 5; 15; 45. 37. 5; 10; 20; 40. 39. 154,8 m. 40. 5 min. 41. 9 s; 108 m. 42. 1) $1<q<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<q<1$.

Capítulo XIII

3. 6) $-\frac{1}{2}$; 7) $\frac{2}{3}$; 8) $\frac{9}{5}$. 4. 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{2}{3}$; 9) $-\frac{1}{2}$; 10) $-\frac{3}{2}$. 5. 10) $\frac{1}{64}$; 11) $\frac{9}{4}$; 12) 8. 8. 1) Entre -2 y -1; 3) entre -3 y -2; 4) entre -5 y -4. 9. 1) Entre -4 y -3; 2) entre -5 y -4

3) entre -7 y -6. 10. 1) $\frac{3}{5}$; 2) $-\frac{3}{5}$; 3) $\frac{3}{10}$; 4) $\frac{3}{20}$; 5) $\frac{1}{10}$.
11. 1) 3; 2) $3^{\frac{9}{4}}$; 3) $\frac{1}{27}$; 4) $\frac{1}{9}$. 12. Progresión geométrica: 2, 4, 8, 16, ... 19. 2,3 y 5. 22. 15) $\lg y=3\lg a-\frac{11}{9}\lg b-\frac{2}{9}\lg c$; 17) $\lg y=3\lg b+\frac{3}{4}\lg c-\frac{1}{2}\lg a$; 18) $\lg x=\frac{1}{n}\left(\lg m+\frac{2}{p}\lg b\right)$; 19) $\lg z=-\frac{1}{2}\left(\lg a+\frac{1}{2}\lg b+\frac{1}{4}\lg c\right)$; 20) $\lg y=\frac{1}{m}\left[(n+1)\lg a+\frac{p}{n}\lg b\right]$; 21) $\lg x=\frac{\sqrt{2}}{2}\lg 3$; 22) $\lg x=\lg\log_a^3(a+b)$. 23. 8) $x=\sqrt[4]{\frac{a^3}{b^3c^2}}$; 9) $y=\sqrt[5]{\frac{(a-b)^3(a+b)^2}{a^4}}$; 10) $x=\frac{\sqrt[3]{a\cdot\sqrt[4]{ac^3}\,(b+1)}}{b\cdot(c+a)^3}$. 27. 3) $-3{,}9925$; 4) $-5{,}0083$. 28. 3) $\bar{3}{,}9981$; 4) $\bar{4}{,}0096$; 5) $\bar{1}{,}2672$. 34. 4) 0,3245; 5) $\bar{1}{,}4333$. 35. 2) 1,56; 11) 0,339; 12) 9,00; 13) 0,587; 14) 0,26; 15) 1,072; 16) 4,47; 17) 1,17; 18) 0,893; 19) $8{,}09\cdot10^{-6}$; 23) 0,706; 24) 1,816; 25) 5,85; 26) 0,417. 36. 1) $x=\pm1$; 2) $x=11$; 3) $x=2$; 4) $x=\frac{-15}{4}$; 5) $x=7$; 6) $x=3$; 7) $x=\pm2$. 37. 1) $x\approx0{,}806$; 2) $x\approx-2{,}4$; 3) $x=\pm\sqrt{\frac{\lg 22{,}1}{\lg 7}}$. 38. 1) 2 y $\frac{\lg 2-\lg 3}{\lg 3}$; 2) 1, 3 y 4; 3) 0 y $\frac{\lg 5}{\lg 7}$; 4) $\frac{9}{2}$; 5) 100 y 1000; 6) 1000 y $\frac{10}{10\sqrt[3]{10}}$; 7) $x=10$; 8) 0,1 y 100; 9) 13,34 y $7499\cdot10^4$; 10) 7 y 15; 11) 100 y 0,1; 12) $x=\frac{1}{2}$; 13) 100 y 0,01; 14) 2 y 3; 15) 3 y 7. 41. $\frac{8}{3}$. 42. 2 y -1.
43. 1 y 2. 44. $-1{,}2$, $\frac{7\pm\sqrt{41}}{2}$. 45. 10. 46. $-0{,}9$. 47. 10. 48. $\frac{29}{8}$.
50. 2 y 4. 51. 9. 52. $\frac{1}{2}$ y 16. 53. 2 y $-\frac{4}{3}$. 54. $x=5$; $y=7$.
55. $x=2$; $y=6$. 56. 5, $\sqrt[5]{5}$. 57. 4. 58. $\frac{5}{3}$. 59. $\frac{7}{2}$. 60. 3 y 13.
61. 7. 62. $x=0$. 63. $x=10$. 64. $x=10$ y $10^{-\frac{9}{2}}$. 65. $x_1=\frac{1}{a}$; $x_2=\frac{10}{a}$.
66. 1. 67. $\sqrt[5]{5}$ y 5. 68. 100 y 0,01. 69. 10. 70. $x_1=2$; $x_2=\frac{\lg\frac{2}{3}}{\lg 3}$.
71. $x=\frac{3}{2}$. 72. $x_1=2$; $x_2=\frac{1}{16}$. 73. $x_1=\frac{1}{81}$; $x_2=3$. 74. $x=10^3$.
75. $x=2$. 76. $x=\operatorname{arc\,tg}10+\pi k$. 77. $x=4$. 78. $x=5$. 79. $x_1=1$; $x_2=2$.
80. 1) $x>2$; 2) $\frac{2}{11}<x<\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}<x<\frac{7}{3}$; 4) $x<-\frac{3}{2}$ y $x>3$; 5) $-\frac{5}{2}<x<\frac{3}{2}$ y $\frac{3}{2}<x<\frac{11}{2}$; 6) $x<-1$ y $x>5$; 7) $\frac{7}{2}<x<5$ y $x>5$; 8) no tiene soluciones. 83. 1) $x=5$; $y=3$; 2) $x=3$; $y=4$;

3) $x=4$; $y=\sqrt{2}$ y $x=4$; $y=-\sqrt{2}$; 4) $x=\frac{\lg 6}{6\lg 2}$; $y=\frac{1}{6}$ y $x=\frac{1}{6}$; $y=\frac{\lg 6}{6\lg 2}$; 5) $x=6$; $y=3$; 6) $x=25$; $y=16$ y $x=16$; $y=25$; 7) $x=\frac{1}{10}$; $y=2$ y $x=100$; $y=-1$; 8) $x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; $y=\sqrt[3]{9}$ y $x=1$; $y=1$; 9) $x=4$; $y=6$. **84.** 1) $-1<x<-\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}<x<2$; 2) $1<x<3$.

Capítulo XIV

1. 2) 51; 5) 0,0435; 7) 0,612; 10) 0,000139; 11) 0,00785. **2.** 1) 0,74; 2) 50; 3) 13,9; 4) 45,2; 5) 1310; 6) 34; 7) 505; 8) 2640; 9) 0,000458; 10) 0,0124; 11) 7,32; 12) 1410. **3.** 1) 9,75; 2) 39,2; 3) 0,216; 4) 8,25. **4.** 1) 1700; 2) 0,284; 3) 0,338; 4) 30,2; 5) 419; 6) 0,00729; 7) 0,059; 8) 1480; 9) 0,00237; 10) 1910. **5.** 1) 182; 2) 18,9; 3) 0,493; 4) 0,00095; 5) 174 000; 6) 449 000; 7) 1,19; 8) 0,000372. **6.** 1) 0,632; 2) 0,279; 3) 67,6; 4) 2,14; 5) 0,0158; 6) 0,00775. **7.** 1) 7,52; 2) 1,62; 3) 3,49; 4) 0,752; 5) 0,162. **8.** 1) 334; 2) 16,95; 3) 0,0854; 4) 0,122; 5) 44,7. **9.** 1) 0,660; 2) 0,815; 3) 1,55; 4) 0,991; 5) 0,460; 6) 0,867. **10.** 1) 33,5; 2) 23,2; 3) 570; 4) 46,9. **11.** 1) 0,25; 2) 16,2; 3) 0,41. **12.** 1) 0,886; 2) 30,4; 3) 5,97; 4) 1,47; 5) 1,275. **13.** 1) 5,4; 2) 0,00058.

Capítulo XV

2. c) $8i$. **3.** c) $17+4i$. **4.** c) $a+(b+1)\,i$. **5.** c) $4+2i$. **6.** c) $6i$. **7.** c) $a+(b-1)\,i$. **8.** c) $-5+4i$. **9.** b) $1-0,5i$. **10.** c) $0,28-0,03i$. **11.** c) $-(x^2+2y)-ix\sqrt{y}$. **12.** c) $\frac{5}{12}-\frac{1}{12}\,i$. **13.** c) $(a^2+2b)+a\sqrt{b}i$. **14.** c) $a+b$. **15.** c) $(2m+3ni)\,(2m-3ni)$. **16.** c) $(4+3i)\,(4-3i)$. **17.** $(8+i)\,(8-i)$. **18.** c) $-\frac{1}{2}$. **19.** c) $2,4i$. **20.** a) $1-2i$; b) i; c) $-3-2i$. **21.** a) $12-5i$; b) $1-i\sqrt{3}$; c) $i\sqrt{2}-\sqrt{3}$. **22.** a) $3-2i\sqrt{5}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}\,i-\frac{1}{2}$; c) $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}+\frac{2mn}{m^2+n^2}\,i$. **23.** a) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,i$; b) 0; c) $2a$. **24.** c) $\sqrt{2}+i\sqrt{3}$. **25.** b) $\sqrt{5}-i\sqrt{2}$. **26.** d) -1; e) $-i$; f) 1. **27.** e) -1; f) 1. **28.** a) $2-4i\sqrt{2}$; b) $2\,(x^2-y^2)$; c) $2\,(i-1)$. **29.** a) $0,5\,(-1+i\sqrt{3})$; b) 1; **30.** c) $-2-2i$. **31.** a) $\sqrt{\frac{a}{2}}+i\sqrt{\frac{a}{2}}$; b) $3+2i$. **32.** a) $5+2i$; b) $6+7i$. **33.** a) $4+i$; b) $2+9i$. **34.** a) $2+\frac{i}{2}$; b) 4. **37.** a) $\sqrt{2}$ y $\frac{\pi}{4}$; e) $\sqrt{2}$ y $\frac{5\pi}{4}$. **39.** a) $\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$; b) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$; c) $3\,(\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi)$; d) $\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$.
40. a) $\sqrt{13}\,(\cos 33°40'+i\operatorname{sen} 33°40')$; b) $5\,(\cos 53°10'+i\operatorname{sen} 53°10')$.
41. a) $5\,(\cos 306°50'+i\operatorname{sen} 306°50')$; b) $9,434\,(\cos 32°+i\operatorname{sen} 32°)$.
42. a) $\sqrt{13}\,(\cos 56°20'+i\operatorname{sen} 56°20')$; b) $13\,(\cos 157°20'+i\operatorname{sen} 157°20')$.
3. a) $\sqrt{53}\,(\cos 254°+i\operatorname{sen} 254°)$; b) $5\,(\cos 323°10'+i\operatorname{sen} 323°10')$.

58. $\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi n}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi n}{2}$; $n=0,\ 1$. 59. $\pm\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$.

60. $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi n}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi n}{2}\right)$; $n=0,\ 1$.

61. $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{7}{4}\pi+2\pi n}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\frac{7}{4}\pi+2\pi n}{2}\right)$; $n=0,\ 1$. 62. $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$; $\frac{1}{2}(i-\sqrt{3})$; $-i$. 63. $\cos\frac{2\pi n}{5}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi n}{5}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$. 64. $\cos\frac{2\pi n}{6}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi n}{6}$ $(n=0,\ 1,\ \ldots,\ 5)$. 65. $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$; $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$ y $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

67. 1) Suma de vectores: $r_1=\{2,\ 3\}$ y $r_2=\{-1,\ 1\}$, lo que nos da $r=\{1,\ 4\}$; 3) multiplicación del vector $r=\{0,\ 2\}$ por el escalar 3, lo que nos da $r_1=\{3\cdot 0,\ 3\cdot 2\}$, ó $r_1=\{0,\ 6\}$; 4) giro del vector $r=\{1,\ 2\}$ alrededor del origen de coordenadas en un ángulo recto, en sentido positivo; 5) giro del vector $r=\{1,\ 1\}$ alrededor del origen de coordenadas en el ángulo $\varphi=60°$, en sentido positivo con su alargamiento ulterior de 2 veces. 68. 1) $x=\frac{25}{7}$; $y=\frac{2}{7}$; 2) $x=0$; $y=2$; 3) $x=2$; $y=3$. 69. 1) $x_{1,2}=3\pm 2i$; 2) $x_{1,2}=-\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{23}i}{4}$; 3) $x_1=i$; $x_2=2+i$. 70. Los puntos complejos z se encuentran en el rayo que parte del origen de coordenadas bajo un ángulo de 45° respecto del sentido positivo del eje Ox; 4) fuera de la circunferencia de radio unitario con centro en el origen de coordenadas; 5) dentro de la circunferencia de radio $r=5$ con centro en el origen de coordenadas; 6) dentro del anillo formado por dos circunferencias concéntricas de radios $r_1=2$ y $r_2=4$ con centro común en el origen de coordenadas; 8) fuera del círculo de radio $r=2$ con centro en el punto (0; 1).

71. 1) $\sqrt{13}e^{0,983i}$; 2) $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$; 3) $2e^{\frac{\pi}{2}i}$; 4) $2e^{\frac{5\pi}{6}i}$; 5) $2e^{\pi i}$; 6) $e^{\frac{\pi}{2}i}$. 72. 1) $1,85+0,77i$; 2) $e^2(\cos 1+i\,\mathrm{sen}\,1)=7,4\,(0,54+i\cdot 0,84)$. 73. 1) $e^{3i\ln 2}=e^{2,079i}$; 3) $5e^{i\ln 5}=5e^{1,609i}$; 4) $10e^{-i\cdot 2,303}$. 74. 1) $\cos(2-i)=-0,64+1,07i$; 4) $\mathrm{sen}(-3i)=-10,02i$. 77. $y=-\frac{3}{2}x$. 79. Los puntos complejos z se encuentran fuera del círculo de radio $r=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ con centro en el origen de coordenadas. 80. $-3<x<-2$ y $0<x<1$.

Capítulo XVI

2. $y=\sqrt{R^2-x^2}$. 3. $\frac{1}{f(1)}=2$; $[1+f(1)]^2=\frac{9}{4}$; $\lg f\left(\frac{1}{2}\right)=\lg 0,8\approx -0,0969$. 6. 1) Todo el eje real excepto el punto $x=$

$= -5$; 2) todo el eje real, excepto los puntos $x=-3$ y $x=0$; 3) $x \leqslant \frac{3}{2}$; 4) $2\pi k + \arccos\frac{2}{3} < x < 2\pi(k+1) - \arccos\frac{2}{3}$; 5) $x \leqslant 2$ y $x \geqslant 3$; 6) $|x| > 2$; 7) $-\frac{1}{3} < x < 2$; 8) $1 \leqslant x \leqslant 4$; 10) todo el eje real, excepto el punto $x=1$; 11) $|x| \geqslant \sqrt{2}$; 12) $x \geqslant -2$. **7.** En los ejemplos: 1), 4), 5), 6), 11) están dadas funciones impares, en los ejemplos 3) 8), 10) y 12) funciones pares; las funciones de los ejemplos 2), 7) y 9) no son pares, ni impares. **11.** 2) $-1, \frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, \frac{4}{7}, -\frac{5}{9}$; 3) $0, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{17}, 0$. **13.** $a_n = 3 - \frac{7}{n+2}$, pero $\frac{7}{n+2} \to 0$ cuando $n \to \infty$, por lo tanto $a_n \to 3$. **14.** 4) $\frac{3}{2}$; 5) 2. **15.** 1) $x \to 2$; 2) $x \to \frac{\pi}{2}$; 3) $x \to 0$; 4) $x \to \frac{1}{10}$. **16.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) -2; 3) $\frac{3}{2}$; 4) 0; 5) 0; 6) $-\frac{1}{4}$; 7) 1; 8) $\frac{3}{2}$; 9) 1; 10) $\frac{1}{2}$. **17.**

3) $$\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\frac{1}{3}x} = \frac{x}{\frac{1}{3}x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)} \to 1 \text{ si } x \to 0.$$ **18.** 1) $x = \pm 2$; 2) $x=1$; 3) $x = 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Capítulo XVII

1. 1) $v_{med} = 3{,}5\,g$ (m/s); 2) $v = 2g$ (m/s). **2.** 1) 88 (m/s); 2) 12 s. **3.** 1) $3x^2$; 2) $-\frac{2}{x^3}$; 3) $-\frac{1}{x\sqrt{x}}$ $(x>0)$; 4) $4x-5$; 5) $\frac{3}{2}x^2+3$; 6) $-\operatorname{sen} x$; 7) $\frac{5}{(1-4x)^2}$. **4.** $f'(0) = \frac{1}{2}$. **5.** Si $x=1$, $\varphi = 45°$; si $x=-1$, $\varphi = 135°$. **6.** En los puntos de intersección cuando $x = \pm 1$ las tangentes a la parábola forman un ángulo agudo $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{8}{11}$.

FÓRMULAS FUNDAMENTALES DE CONSULTA

Ecuaciones cuadráticas

1. $x^2+px+q=0$; $\quad x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$.

$ax^2+bx+c=0$; $\quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $(a\neq 0)$.

$ax^2+2kx+c=0$; $\quad x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$ $(a\neq 0)$.

2. Fórmulas de Viète:

$x_1+x_2=-p=-\frac{b}{a}$; $\quad x_1 \cdot x_2=q=\frac{c}{a}$

3. $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$; $\quad ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Progresiones

a) *Progresión aritmética.*

1. Término general de una progresión aritmética

$a_n=a_1+(n-1)d$.

2. Suma de n términos de una progresión aritmética:

$S_n=\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)n=\left[\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\right]n$,

donde d es la diferencia.

b) *Progresión geométrica.*

1. Término general de una progresión geométrica:

$u_n=u_1q^{n-1}$.

2. Suma de n términos de una progresión geométrica:

$S_n=\frac{u_1-u_nq}{1-q}=u_1\frac{1-q^n}{1-q}=u_1\frac{q^n-1}{q-1}$,

donde q es la razón de la progresión o denominador de la progresión $(q\neq 1)$.

3. Suma de una progresión geométrica infinitamente decreciente:

$S=\frac{u_1}{1-q}$.

Logaritmos

1. La notación $\log_a N=x$ es equivalente a la notación $a^x=N$ $(a>0,\ a\neq 1,\ N>0)$, de manera que $a^{\log_a N}=N$

2. $\log_a 1=0$. 3. $\log_a a=1$. 4. $\log_a (N\cdot M)=\log_a N+\log_a M$.

5. $\log_a \frac{N}{M}=\log_a N-\log_a M$. 6. $\log_a N^n=n\log_a N$.

7. $\log_a \sqrt[n]{N}=\frac{1}{n}\log_a N$. 8. $\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}$.

Tabla de signos y de ciertos valores de las funciones trigonométricas

Denominación de la función	Cuadrantes				I					II	III	IV
	I	II	III	IV	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sen α	+	+	−	−	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos α	+	−	−	+	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tg α	+	−	+	−	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
ctg α	+	−	+	−	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

Tabla de las fórmulas de reducción

Función \ Angulo	$-\alpha$	$90° \mp \alpha$	$180° \mp \alpha$	$270° \mp \alpha$	$360° k \mp \alpha$
sen	$-\operatorname{sen}\alpha$	$+\cos\alpha$	$\pm\operatorname{sen}\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mp\operatorname{sen}\alpha$
cos	$+\cos\alpha$	$\pm\operatorname{sen}\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mp\operatorname{sen}\alpha$	$+\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$

Relaciones entre las funciones trigonométricas de un mismo ángulo

1. $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$
2. $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$
3. $\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$
4. $\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = 1.$
5. $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1.$
6. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$
7. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha.$
8. $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha.$

Transformaciones de expresiones trigonométricas

1. $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta;$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta;$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

2. $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$;

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$;

$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

3. $\operatorname{sen} \dfrac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$; $\cos \dfrac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$;

$\operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}$.

4. $\operatorname{sen} x = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$; $\cos x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$; $\operatorname{tg} x = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$.

5. $\cos^2 \alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$; $\operatorname{sen}^2 \alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

6. $\operatorname{sen} \alpha \pm \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \dfrac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha \mp \beta}{2}$;

$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \dfrac{\alpha+\beta}{2} \cos \dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \operatorname{sen} \dfrac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{sen} \dfrac{\alpha-\beta}{2} = 2 \operatorname{sen} \dfrac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{sen} \dfrac{\beta-\alpha}{2}$;

$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$; $\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \dfrac{\operatorname{sen}(\beta \pm \alpha)}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}$.

7. $\cos mx \cdot \cos nx = \dfrac{1}{2} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$;

$\operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{sen} nx = \dfrac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$;

$\operatorname{sen} mx \cdot \cos nx = \dfrac{1}{2} [\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x]$.

Funciones trigonométricas inversas

1. $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arc\,sen} x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x) = x$.
2. $0 \leqslant \operatorname{arc\,cos} x \leqslant \pi$, $\cos(\operatorname{arc\,cos} x) = x$.
3. $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} x < \dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x$
4. $0 < \operatorname{arc\,ctg} x < \pi$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} x) = x$.

Ecuaciones trigonométricas elementales

1. $\operatorname{sen} x = a$, $x = (-1)^n \operatorname{arc\,sen} a + \pi n$.
2. $\cos x = a$, $x = \pm \operatorname{arc\,cos} a + 2\pi n$.
3. $\operatorname{tg} x = a$, $x = \operatorname{arc\,tg} a + \pi n$.
4. $\operatorname{ctg} x = a$, $x = \operatorname{arc\,ctg} a + \pi n$.

$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

Tabla de valores de las funciones e^x, e^{-x}, sen x y cos x para el valor numérico de x

x	e^x	e^{-x}	sen x	cos x	x	e^x	e^{-x}	sen x	cos x
0,00	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,40	1,4918	0,6703	0,3894	0,9211
01	1,0101	0,9900	0,0100	1,0000	41	1,5068	0,6637	0,3986	0,9171
02	1,0202	0,9802	0,0200	0,9998	42	1,5220	0,6570	0,4078	0,9131
03	1,0305	0,9704	0,0300	0,9996	43	1,5373	0,6505	0,4169	0,9090
04	1,0408	0,9608	0,0400	0,9992	44	1,5527	0,6440	0,4259	0,9048
0,05	1,0513	0,9512	0,0500	0,9988	0,45	1,5683	0,6376	0,4350	0,9004
06	1,0618	0,9418	0,0600	0,9982	46	1,5841	0,6313	0,4439	0,8961
07	1,0725	0,9324	0,0699	0,9976	47	1,6000	0,6250	0,4529	0,8916
08	1,0833	0,9231	0,0799	0,9968	48	1,6161	0,6188	0,4618	0,8870
09	1,0942	0,9139	0,0899	0,9960	49	1,6323	0,6126	0,4706	0,8823
0,10	1,1052	0,9048	0,0998	0,9950	0,50	1,6487	0,6065	0,4794	0,8776
11	1,1163	0,8958	0,1098	0,9940	51	1,6653	0,6005	0,4882	0,8727
12	1,1275	0,8869	0,1197	0,9928	52	1,6820	0,5945	0,4969	0,8678
13	1,1388	0,8781	0,1296	0,9916	53	1,6989	0,5886	0,5055	0,8628
14	1,1503	0,8694	0,1395	0,9902	54	1,7160	0,5827	0,5141	0,8577
0,15	1,1618	0,8607	0,1494	0,9888	0,55	1,7333	0,5769	0,5227	0,8525
16	1,1735	0,8521	0,1593	0,9872	56	1,7507	0,5712	0,5312	0,8473
17	1,1853	0,8437	0,1692	0,9856	57	1,7683	0,5655	0,5396	0,8419
18	1,1972	0,8353	0,1790	0,9838	58	1,7860	0,5599	0,5480	0,8365
19	1,2092	0,8270	0,1889	0,9820	59	1,8040	0,5543	0,5564	0,8309
0,20	1,2214	0,8187	0,1987	0,9801	0,60	1,8221	0,5488	0,5646	0,8253
21	1,2337	0,8106	0,2085	0,9780	61	1,8404	0,5434	0,5729	0,8196
22	1,2461	0,8025	0,2182	0,9759	62	1,8589	0,5379	0,5810	0,8139
23	1,2586	0,7945	0,2280	0,9737	63	1,8776	0,5326	0,5891	0,8080
24	1,2712	0,7866	0,2377	0,9713	64	1,8965	0,5273	0,5972	0,8021
0,25	1,2840	0,7788	0,2474	0,9689	0,65	1,9155	0,5220	0,6052	0,7961
26	1,2969	0,7711	0,2571	0,9664	66	1,9348	0,5169	0,6131	0,7900
27	1,3100	0,7634	0,2667	0,9638	67	1,9542	0,5117	0,6210	0,7838
28	1,3231	0,7558	0,2764	0,9611	68	1,9739	0,5066	0,6288	0,7776
29	1,3364	0,7483	0,2860	0,9582	69	1,9937	0,5016	0,6365	0,7712
0,30	1,3499	0,7408	0,2955	0,9553	0,70	2,0138	0,4966	0,6442	0,7648
31	1,3634	0,7334	0,3051	0,9523	71	2,0340	0,4916	0,6518	0,7584
32	1,3771	0,7261	0,3146	0,9492	72	2,0544	0,4868	0,6594	0,7518
33	1,3910	0,7189	0,3240	0,9460	73	2,0751	0,4819	0,6669	0,7452
34	1,4049	0,7118	0,3335	0,9428	74	2,0959	0,4771	0,6743	0,7385
0,35	1,4191	0,7046	0,3429	0,9394	0,75	2,1170	0,4724	0,6816	0,7317
36	1,4333	0,6977	0,3523	0,9359	76	2,1383	0,4677	0,6889	0,7248
37	1,4477	0,6907	0,3616	0,9323	77	2,1598	0,4630	0,6961	0,7179
38	1,4623	0,6839	0,3709	0,9287	78	2,1815	0,4584	0,7033	0,7109
39	1,4770	0,6771	0,3802	0,9249	79	2,2034	0,4538	0,7104	0,7038

x	e^x	e^{-x}	sen x	cos x	x	e^x	e^{-x}	sen x	cos x
0,80	2,2255	0,4493	0,7174	0,6967	1,20	3,3201	0,3012	0,9320	0,3624
81	2,2479	0,4449	0,7243	0,6895	21	3,3535	0,2982	0,9356	0,3530
82	2,2705	0,4404	0,7311	0,6822	22	3,3872	0,2952	0,9391	0,3436
83	2,2933	0,4360	0,7379	0,6749	23	3,4212	0,2923	0,9425	0,3342
84	2,3164	0,4317	0,7446	0,6675	24	3,4556	0,2894	0,9458	0,3248
0,85	2,3396	0,4274	0,7513	0,6600	1,25	3,4903	0,2865	0,9490	0,3153
86	2,3632	0,4232	0,7578	0,6524	26	3,5254	0,2837	0,9521	0,3058
87	2,3869	0,4190	0,7643	0,6448	27	3,5609	0,2808	0,9551	0,2963
88	2,4109	0,4148	0,7707	0,6372	28	3,5966	0,2780	0,9580	0,2867
89	2,4351	0,4107	0,7771	0,6294	29	3,6328	0,2753	0,9608	0,2771
0,90	2,4596	0,4066	0,7833	0,6216	1,30	3,6693	0,2725	0,9636	0,2675
91	2,4843	0,4025	0,7895	0,6137	31	3,7062	0,2698	0,9662	0,2579
92	2,5093	0,3985	0,7956	0,6058	32	3,7434	0,2671	0,9687	0,2482
93	2,5345	0,3946	0,8016	0,5978	33	3,7810	0,2645	0,9711	0,2385
94	2,5600	0,3906	0,8076	0,5898	34	3,8190	0,2618	0,9735	0,2288
0,95	2,5857	0,3867	0,8134	0,5817	1,35	3,8574	0,2592	0,9757	0,2190
96	2,6117	0,3829	0,8192	0,5735	36	3,8962	0,2567	0,9779	0,2092
97	2,6379	0,3791	0,8249	0,5653	37	3,9354	0,2541	0,9799	0,1994
98	2,6645	0,3753	0,8306	0,5570	38	3,9749	0,2516	0,9819	0,1896
99	2,6912	0,3716	0,8360	0,5487	39	4,0149	0,2491	0,9837	0,1798
1,00	2,7183	0,3679	0,8415	0,5403	1,40	4,0552	0,2466	0,9854	0,1700
01	2,7456	0,3642	0,8468	0,5319	41	4,0960	0,2441	0,9871	0,1601
02	2,7732	0,3606	0,8521	0,5234	42	4,1371	0,2417	0,9887	0,1502
03	2,8011	0,3570	0,8573	0,5148	43	4,1787	0,2393	0,9901	0,1403
04	2,8292	0,3535	0,8624	0,5062	44	4,2207	0,2369	0,9915	0,1304
1,05	2,8577	0,3499	0,8674	0,4976	1,45	4,2631	0,2346	0,9927	0,1205
06	2,8864	0,3465	0,8724	0,4889	46	4,3060	0,2322	0,9939	0,1106
07	2,9154	0,3430	0,8772	0,4801	47	4,3492	0,2299	0,9949	0,1006
08	2,9447	0,3396	0,8820	0,4713	48	4,3929	0,2276	0,9959	0,0907
09	2,9743	0,3362	0,8866	0,4625	49	4,4371	0,2254	0,9967	0,0807
1,10	3,0042	0,3329	0,8912	0,4536	1,50	4,4817	0,2231	0,9975	0,0707
11	3,0344	0,3296	0,8957	0,4447	51	4,5267	0,2209	0,9982	0,0608
12	3,0649	0,3263	0,9001	0,4357	52	4,5722	0,2187	0,9987	0,0508
13	3,0957	0,3230	0,9044	0,4267	53	4,6182	0,2165	0,9992	0,0408
14	3,1268	0,3198	0,9086	0,4176	54	4,6646	0,2144	0,9995	0,0308
1,15	3,1582	0,3166	0,9128	0,4085	1,55	4,7115	0,2122	0,9998	0,0208
16	3,1899	0,3135	0,9168	0,3993	56	4,7588	0,2101	0,9999	0,0108
17	3,2220	0,3104	0,9208	0,3902	57	4,8066	0,2080	1,0000	+0,0008
18	3,2544	0,3073	0,9246	0,3809	58	4,8550	0,2060	1,0000	−0,0092
19	3,2871	0,3042	0,9284	0,3717	59	4,9037	0,2039	0,9998	−0,0192

A NUESTROS LECTORES:

Bugrov Ya., Nikolski S.

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS SUPERIORES

La presente colección de problemas corresponde a los manuales de los mismos autores "Cálculo diferencial e integral", "Elementos de álgebra lineal y geometría analítica", "Ecuaciones diferenciales. Integrales múltiples. Series. Funciones de variable compleja" que ya han sido publicados en español por la Editorial Mir en 1984—1985.

En el comienzo de cada parágrafo se mencionan los capítulos y parágrafos de los respectivos manuales donde el estudiante puede encontrar el correspondiente material teórico.

A cada apartado del manual corresponde un número mínimo de problemas por lo tanto para la asimilación exitosa del material teórico y adquisición de hábitos prácticos es necesario obligatoriamente resolver todos los problemas.

Recomendamos esta colección a los estudiantes de los centros de enseñanza técnica superior.

Formato 12,5 × 20,0 cm. Encuadernado en tela con sobrecubierta. 240 págs. con figuras. (1 tr.).

Krutítskaya N., Shishkin A.

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DEL ÁLGEBRA LINEAL

La colección de problemas del álgebra lineal que se presenta en este libro está basada en las conferencias y seminarios que sus autores dictaron durante muchos años en la facultad de física de la Universidad Estatal Lomonósov de Moscú.
El material que se expone en el mismo abarca todos los apartados y aspectos del álgebra lineal.
En el comienzo de cada capítulo que corresponde a un tema dado, se exponen brevemente las nociones y fórmulas teóricas imprescindibles para la solución de problemas, brindándose también problemas concretos que contribuyen a la asimilación del material teórico.
Los autores ofrecen modelos de solución de los problemas estándares y originales, así como problemas y ejercicios para el trabajo autodidáctico de los estudiantes, con respuestas e indicaciones.
Recomendamos la presente colección para los estudiantes universitarios y de los centros de enseñanza técnica superior. Formato 14,3 × 22,0 cm. En rústica. 128 págs. con figuras (1 tr.).