CAPITULO PRIMERO
LA QUINTA OPERACIÓN MATEMÁTICA

Contenido:

1. La quinta operación
Con frecuencia se denomina al álgebra la «aritmética de las siete operaciones», queriendo subrayar con ello que a las cuatro operaciones matemáticas conocidas por todos, el álgebra añade tres más: la elevación a potencias y sus dos inversas.
Comencemos nuestras pláticas algebraicas por la «quinta operación»: la elevación a potencias.
¿Responde esta operación a una exigencia de la vida práctica? Indudablemente. Con ella tropezamos a menudo en la vida. Recordemos los innumerables casos en que para calcular superficies y volúmenes se precisa elevar los números a la segunda o tercera potencia. Otro ejemplo: la fuerza de gravitación universal, la acción recíproca electrostática y magnética, la luz y el sonido son inversamente proporcionales al cuadrado de las, distancia. La continuidad de la traslación de los planetas alrededor del Sol (o, de los, satélites alrededor dé los planetas) viene expresada también en forma de una potencia dependiente de la distancia que les separa de su centro de traslación: la relación entre los cuadrados de los tiempos de traslación es igual a la relación entre los cubos de las distancias.
Es un error pensar que en la práctica tropezamos tan sólo con segundas y terceras potencias, y que no existen exponentes de potencias superiores más que en los manuales de álgebra. Cuando un ingeniero busca el grado de solidez de un cuerpo se ve obligados operar a cada instante con cuartas potencias; y en otros cálculos (para hallar el diámetro de tubo conducto de vapor, por ejemplo) llega a operar incluso con la sexta potencia. Asimismo los técnicos hidráulicos se valen de las sextas potencias cuando tratan, de averiguar la fuerza con que son arrastradas las piedras por el agua: si la corriente de un río es cuatro veces más rápida que la de otro, el primero es capaz de arrastrar por su lecho piedras 4", es decir, 4.096 veces más pesadas que el segundo río[1].
Al estudiar la relación que existe entre la luminosidad de un cuerpo incandescente - el filamento de una lámpara, por ejemplo - y su temperatura, se opera con potencias aún mayores. Cuando la incandescencia es blanca, su luminosidad general aumenta en relación a la decimosegunda potencia de su temperatura; cuando es roja, en relación a la trigésima potencia de su temperatura (siendo ésta «absoluta», es decir, a partir de –273°). Esto significa que si calentamos un cuerpo de 2.000°' a 4.000° absolutos, por ejemplo, o sea, si elevamos su temperatura al doble, la luminosidad de dicho cuerpo aumentará en 2^{12} , es decir, en más de 4.000 veces. En otro lugar nos ocuparemos de la importancia que tienen para la técnica de fabricación de lámparas eléctricas estas proporciones tan singulares.

[1] En mi libro *Mecánica Recreativa,* capítulo IX, trato con más detalle de esta cuestión

Volver

2. Cifras astronómicas

Es probable que nadie haga tanto uso de la «quinta operación matemática» como los astrónomos. Los exploradores del firmamento manejan sin cesar cantidades formadas por una o dos cifras significativas seguidas de una larga fila de ceros. Sería muy incómodo expresar con los medios ordinarios tales cantidades, llamadas con razón «astronómicas» y, sobre todo, operar con ellas. Los kilómetros que nos separan de la nebulosa de Andrómeda se representan con la siguiente cifra:

95 000 000 000 000 000 000.

Por añadidura, al efectuar cálculos astronómicos, muchas veces hay que operar no con kilómetros u otras unidades aún mayores, sino con centímetros. En este caso, la distancia antes referida lleva cinco ceros más:

9 500 000 000 000 000 000 000 000.

La masa de las estrellas viene expresada en cifras todavía más considerables, sobre todo si hemos de registrarla en gramos, como exigen muchos cálculos. La masa del Sol, en gramos, es igual a:

1 983 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000.

Huelga ocuparse de los inconvenientes que representaría operar con números tan desmesurados y de lo fácil que sería incurrir en error en tales casos. Además, las cantidades referidas están muy lejos de ser las mayores en la astronomía.

La quinta operación matemática aligera los cálculos. La unidad seguida de varios ceros se expresa con el número 10 elevado a una determinada potencia

$$100 = 10^2;\ 1.000 = 10^3;\ 10.000 = 10^4;\ \text{etc.}$$

Los enormes números citados anteriormente pueden representarse como sigue:

el primero $950*10^{22}$
el segundo $1.983*10^{30}$

Se expresan así no sólo para economizar espacio, sino también para facilitar los cálculos. Si hubiera, por ejemplo, que multiplicar ambos número entre sí, bastaría hallar el producto de 950*1.983 = 1 883 850 y tras él colocar el factor 10^{22+30} 10^{52} de la forma siguiente:

$$950 * 10^{22} * 1\ 983\ 10^{30} = 188\ 385*10^{53}.$$

Es evidente que esto resulta más cómodo que escribir un número seguido de 22 ceros, otro de 30 ceros y, por último, un tercero acompañado de 53 ceros. Y no sólo más sencillo, sino también más seguro, por cuanto al escribir tal fila de ceros puede ser omitido alguno, obteniendo un resultado erróneo.

Volver

3. ¿Cuánto pesa el aire?

Para comprobar hasta qué punto se facilitan los cálculos al representar lo números en forma de potencias, pongamos el siguiente ejemplo: hallemos cuántas veces la masa del globo terrestre es mayor que la del aire que lo rodea.

El aire presiona sobre cada centímetro cuadrado de superficie terrestre con la fuerza de un kilogramo aproximadamente. Esto quiere decir que el peso de la columna de aire que se apoya en 1 cm^2 es igual a 1 kg. La capa atmosférica de la Tierra se forma, por decirlo así, del conjunto de dichas columnas de aire, que son tantas como centímetros cuadrados forman la superficie de nuestro planeta, y como cantidad de kilos pesa la atmósfera en su conjunto Si consultamos los índices correspondientes, averiguaremos que la superficie terrestre mide 510 millones de kilómetros cuadrados, es decir, $51* 10^7$ km^2 Veamos cuántos centímetros cuadrados hay en un kilómetro cuadrado. E kilómetro lineal se forma de 1 000 metros y cada uno de éstos tiene 10 centímetros, o sea, un total de 105 cm, por lo cual, el kilómetro cuadrado lo formarán $(10^5)^2$ 10^{10} cm^2. De aquí que la superficie del globo terrestre ser igual a

$$51*10^7*10^{10} = 51 * 10^{17} \ cm^2.$$

Esta cifra representa también la cantidad de kilogramos que pesa la atmósfera de la Tierra. Transformando los kilogramos en tonelada resultarán:

$$51*10^{17} /1.000 = 51*10^{17}/10^3 = 51*10^{17 - 3} = 51*10^{14}$$

mientras que la masa del globo terrestre es de $6 *10^{21}$ toneladas.

Para conocer cuántas veces es más pesado nuestro planeta que la capa de aire que lo rodea, efectuemos la siguiente división:

$$6*10^{21}/51*10^{14} \approx 10^6,$$

de donde se deduce que la masa atmosférica es, aproximadamente, la millonésima parte de la del globo terrestre[2].
Volver

4. Combustión sin llama ni calor
Si se pregunta a un químico por qué la leña o el carbón arden únicamente a elevada temperatura, contestará que la combinación del carbono y el oxígeno tiene lugar a cualquier temperatura, pero que cuando ésta es baja, dicho proceso transcurre con excesiva lentitud (es decir, en la reacción toma parte un número insignificante de moléculas), y por ello escapa a nuestra observación. La ley que rige la velocidad de las reacciones químicas enseña que al descender la temperatura en 10°, la velocidad de la reacción (el número de moléculas que toma parte en ella) se reduce a la mitad.
Apliquemos dicha ley a la reacción que se produce al oxigenarse la madera, esto es, al proceso de combustión de la madera. Supongamos que un gramo de madera sometido a una temperatura de 600° se consume en un segundo. ¿Cuánto tardará en consumirse 1 g de leña a la temperatura de 20°? Es sabido que con una temperatura 580=58*10 grados menor, su reacción será 2^{58} veces más lenta, o lo que es lo mismo, un gramo de leña se consumirá en 2^{58} segundos. ¿A cuántos años equivale este lapso? Podemos calcularlo sin efectuar 57 multiplicaciones consecutivas en las que el multiplicador sea 2, y sin recurrir a la tabla de logaritmos. Es notorio que

$$2^{10} = 1.024 \approx 10^3,$$

de lo que se deduce que

$$2^{58} = 2^{60-2} = 2^{60}/2^2 = (¼)*2^{60} = (¼)* (2^{10})^6 \approx (¼))*10^{18},$$

es decir, aproximadamente la cuarta parte de un trillón de segundos. El año tiene cerca de 30 millones de segundos, o, lo que es igual, $3*10^7$ segundos; por esto

$$¼ * 10^{18} / 3*10^7 = (1/12) * 10^{11} \approx 10^{10}$$

¡Diez mil millones de años! Este es aproximadamente el tiempo que tardaría en consumirse un gramo de madera sin llama ni calor.
Así, pues, la madera y el carbón arden a la temperatura ordinaria, sin encenderlos. La invención de instrumentos para obtener el fuego aceleró este proceso, de enorme lentitud, en miles de millones de veces.
Volver

[2] El signo ≈ significa la igualdad aproximada.

5. Las variaciones del tiempo

Problema

Fijemos nuestra atención sólo en un elemento: si el tiempo es nublado o despejado; es decir, distinguimos los días por el hecho de si en el cielo hay nubes o no. ¿Qué piensa el lector? En estas condiciones, ¿habrá muchas semanas con diferente combinación de días nublados y despejados? Puede parecernos que éstas serán pocas y que pasados unos dos meses se agotarán todas las combinaciones de días nublados y despejados, repitiéndose entonces a la fuerza alguna de las combinaciones ya observadas. Mas, probemos a calcular exactamente el número posible de combinaciones que pueden darse en estas condiciones. Este es uno de los problemas que nos conducen inesperadamente a la quinta operación matemática. En fin, ¿de cuántas formas diversas pueden combinarse los días nublados y despejados en una misma semana?

Solución

El primer día de la semana puede ser despejado o nublado; lo que quiere decir que por el momento se tienen dos «combinaciones».

En el transcurso de dos días son posibles las siguientes combinaciones de días nublados y despejados:

Despejado y despejado
despejado y nublado
nublado y despejado
nublado y nublado.

En dos días se tienen ya 2^2 combinaciones diferentes. Al tomar tres días, a cada una de las cuatro combinaciones correspondientes a los dos primeros días, se une alguna de las dos combinaciones del tercer día, de esta forma obtenemos un total de variantes igual a

$$2^2 * 2 = 2^3.$$

En cuatro días, el número de combinaciones será de

$$2^3 * 2 = 2^4.$$

Al llegar al quinto día se producirán 2^5 combinaciones; al sexto, 2^6, y, por último, en la semana habrá 2^7 = 128 combinaciones.

De todo esto se deduce que hay 128 semanas con diferentes variantes de días despejados y nublados. Al cabo de 128 * 7 = 896 días se repetirá inevitablemente una de las combinaciones anteriores, aunque dicha repetición puede surgir antes, pero 896 días constituyen el período a partir del cual esta repetición es completamente inevitable. Y, por el contrario, pueden transcurrir dos años e incluso más (dos años y 166 días), sin que el estado atmosférico de una semana se parezca al de las otras.

Volver

6. La cerradura secreta

Problema

En cierta institución soviética fue hallada una caja fuerte de tiempos anteriores a la revolución. Hallóse la llave de la misma, mas para poder abrirla se precisaba conocer el secreto de la cerradura: ésta se componía de cinco rodillos, en torno a los cuales había un alfabeto con 36 letras; los rodillos debían combinarse de tal manera que formasen una determinada palabra desconocida. Para evitar forzar la caja decidióse probar con dichas letras todas las combinaciones posibles. En cada una de estas combinaciones se invertían tres segundos. ¿Podía abrirse la cerradura en 10 jornadas?

Solución

Calculemos el número total de combinaciones posibles. Cada una de las 36 letras del primer rodillo puede unirse a cada una de las 36 letras del segundo rodillo. Así pues, el número de combinaciones posibles con dos letras de los dos rodillos será:

$$36 * 36 = 36^2$$

A cada una de estas combinaciones podemos añadir cualquiera de las 36 letras del tercer rodillo, con lo cual, el total de variantes con tres letras de los tres rodillos equivaldrá a:

$$36^2 * 36 = 36^3.$$

De esta misma manera hallemos la cantidad de combinaciones posibles con cuatro letras de los cuatro rodillos, que llegarán a 36^4 ; y con cinco letras de los cinco rodillos tendremos 36^5, o sea, 60 466 176. Para practicar estas 60 millones y pico de combinaciones, dedicando tres segundos a cada una, se necesitarán

$$3 * 60\,466\,176 = 181\,398\,528$$

segundos, es decir, más de 50 000 horas, lo que equivale a casi 6 300 jornadas de trabajo de ocho horas, ¡más de 20 años!
Esto quiere decir que existen 10 casos favorables entre 6 300, o 1 entre 630, de que la caja sea abierta en 10 jornadas de trabajo. Por lo tanto, la probabilidad es muy reducida.
Volver

7. Ciclista supersticioso
Problema
Hasta hace poco cada bicicleta debía tener una matrícula igual que el automóvil. Esta matrícula tenía seis guarismos.
Cierta persona muy supersticiosa adquirió una bicicleta con el propósito de aprender a manejarla. Cuando supo que a cierta avería, propia de éstas máquinas, se le denomina "ocho", se creyó condenado a algún contratiempo si en el número de su matrícula figuraba algún ocho. Al ir por ésta, le tranquilizó la siguiente reflexión: cualquiera que sea el número de la matrícula, debe formarse con guarismos del 0 al 9. De éstos, tan sólo el 8 es "aciago", por lo cual, de cada 10 casos existe uno en que la matrícula resulte "infausta". ¿Es acertada esta deducción?

Solución
El número de las matrículas se compone de seis guarismos. Por lo tanto, habrá 999 999 diferentes, desde el 000 001,000 002, etc. hasta el 999 999. Calculemos ahora cuántos números "afortunados" podríamos encontrar. El lugar de las unidades del número puede ser ocupado por alguna de las nueve cifras "felices": 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. En el segundo lugar también puede encontrarse una de estas cifras. De ahí que las dos primeras cifras den lugar a $9 * 9 = 9^2$ combinaciones "favorables". A cada una de estas combinaciones puede agregarse una tercera cifra de las nueve "bienhadadas"; por lo tanto las combinaciones "felices" de tres cifras llegan a $9^2 * 9 = 9^3$.
De esta misma manera se deduce que el número de combinaciones "satisfactorias", compuestas de seis cifras, es igual a 9^6. No obstante, hay que tener en cuenta que este número comprende la combinación 000 000, que no sirve para matrícula. Por consiguiente, la cantidad de matrículas "afortunadas" es de $9^6 - 1 = 531\,440$, lo que constituye algo más del 53% del total de números posibles, y no el 90%, como suponía el ciclista en cuestión.
El lector se convencerá de que en la serie de números con siete cifras, hay más "infaustos" que "bienhadados".
Volver

8. Resultados de la duplicación consecutiva
En la famosa leyenda en la que se habla de la recompensa concedida al inventor del ajedrez[3] puede encontrarse un ejemplo demostrativo del rápido incremento que se obtiene al duplicar repetidamente un número por pequeño que sea. Sin detenerme en este paradigma clásico, me remitiré a otros menos conocidos.

[3] Véase mi libro *Matemáticas Recreativas,* cap. VII

Problema

Cada 27 horas, como término medio, el infusorio paramecio se parte en dos. Si todos los infusorios surgidos de esta suerte quedaran vivos, ¿cuánto tiempo sería necesario para que los descendientes de un paramecio llegaran a tener el volumen del Sol?

Los datos necesarios para este cálculo son: la 40° generación, si se conservan todas desde la primera, ocupa después de su desdoblamiento, un volumen igual a un metro cúbico. El volumen del Sol es de 10^{21} m^3.

Solución

La tarea consiste en determinar cuántas veces 1 m^3 debe multiplicarse por dos para llegar a 10^{27} m^3

$10^{27} = (10^3)^9 \approx (2^{10})^9 = 2^{90}$,

puesto que $2^{10} \approx$ l 000.

De esta forma, la cuadragésima generación debe sufrir 90 nuevas divisiones sucesivas para alcanzar el volumen del Sol. El número total de generaciones, incluyendo la primera, es de 40+90= 130. No ofrece dificultad alguna precisar que esto tiene lugar el día 147.

El microbiólogo Metálnikov observó 8 061 divisiones sucesivas del paramecio. Que calcule el propio lector el colosal volumen que tendría la última generación si no hubiera muerto ni uno solo de estos infusorios...

La cuestión examinada en este problema puede ser presentada, como si dijéramos, desde el lado opuesto.

Imaginémonos que se ha dividido el Sol en dos mitades, que una de estas mitades también se ha dividido en dos, etc. ¿Cuántas operaciones semejantes serían precisas para que resultara el tamaño de un infusorio?

Aunque el lector conoce ya la contestación, 130, no por eso deja de asombrar lo reducido de este número.

A mí me fue planteado este problema en la siguiente forma:

Una hoja de papel es dividida en dos, y una de las mitades obtenidas es, a su vez, dividida por la mitad, etc. ¿Cuántas divisiones serían precisas para llegar a la dimensión del átomo?

Supongamos que la hoja de papel pesa 1 gramo y que tomamos $1/(10^{24})$ de gramo como peso del átomo. Como quiera que 10^{24} puede sustituirse por 2^{80}, de valor aproximado, se hace evidente que, se necesitan tan sólo unos 80 desdoblamientos, y no millones, como se contesta con frecuencia cuando se da a conocer este problema.

Volver

9. Millones de veces más rápido

El aparato eléctrico, llamado basculador, contiene dos lámparas electrónicas[4]. La corriente puede entrar en el basculador sólo a través de una lámpara: bien por la de la "izquierda" o por la de la "derecha". El aparato tiene dos contactos, a los que puede enviarse desde afuera una señal eléctrica instantánea (impulso) y dos contactos a través de los cuales transmite el basculador la señal de respuesta. En, el momento en que llega el impulso eléctrico exterior, el basculador cambia el contacto: la lámpara por la cual ha pasado la corriente se desconecta y la corriente comienza a pasar por la otra lámpara. El basculador envía el impulso de respuesta al desconectar la lámpara de la derecha y conectar la de la izquierda.,

Veamos ahora cómo funcionará el basculador si le enviamos varios impulsos consecutivos. Fijemos la situación del basculador basándonos en la lámpara de la derecha: si la corriente no pasa por ella convengamos en que el basculador se encuentra en la "posición 0"; y si la corriente pasa por ella (la derecha), el aparato se halla en la "posición 1".

[4] Si en vez de las lámparas electrónicas uno va a utilizar transistores o, los así llamados, circuitos sólidos (de capas) no se cambiará el resultado.

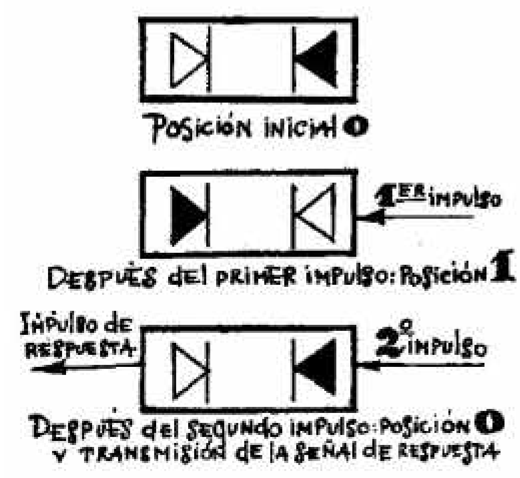

Figura 1

Supongamos que el basculador se encuentra en la posición 0, es decir, que la corriente pasa por la lámpara izquierda (figura l). Después del primer impulso la corriente entra por la lámpara derecha, es decir, el basculador pasa a la posición 1. Entre tanto, el aparato no emite el impulso de respuesta, por cuanto ésta se produce sólo cuando se desconecta la lámpara derecha (no la izquierda).

Después del segundo impulso, la corriente entra ya por la lámpara izquierda, es decir, el basculador toma de nuevo la posición 0. Mas en ese instante, el basculador lanza la señal de respuesta (impulso).

A continuación (después de los dos impulsos), el aparato torna de nuevo a su posición inicial. Por eso, después del tercer impulso, el basculador vuelve a la posición 1, como lo hizo después del primero; después del cuarto vuelve (como después del segundo) a la posición 0, enviando al mismo tiempo la señal de respuesta, y así sucesivamente. Cada dos impulsos se repite la situación del basculador.

Supongamos ahora que tenemos varios basculadores, y que los impulsos del exterior se envían sólo al primero de ellos, los impulsos de respuesta del primer basculador se transmiten al segundo, los del segundo al tercero, etc. (en la figura 2 se presentan los aparatos conectados en serie de derecha a izquierda). Veamos cómo funcionará esa cadena de basculadores.

Impulso	Combinación
1°	00001
2°	00010
3°	00011
4°	00100
5°	00101
6°	00110
7°	00111
8°	01000

Supongamos que en el momento inicial, todos los basculadores se hallan en la posición 0. Por ejemplo, para la serie de cinco basculadores tendremos la combinación 00000. Después del primer impulso el primer basculador (el del extremo de la derecha) toma la posición 1, mas como en este caso no se da el impulso de contestación, todos los demás aparatos permanecen en la posición 0, es decir, la combinación se caracterizará por la posición 00001. Después del segundo impulso, el primer basculador se desconecta (vuelve a la posición 0), pero éste da la señal de respuesta, en virtud de la cual se conecta el segundo basculador sin producir cambios en el resto de los aparatos, es decir, obtenemos la posición 00010. Después del tercer impulso se conecta el primer basculador; los demás no cambian de posición. Tendremos la combinación 00011. Con el cuarto impulso se desconecta el primer basculador; éste da la señal de respuesta que sirve de impulso desconectador del segundo basculador que también da el impulso de respuesta; finalmente, con este último impulso se conecta el tercer basculador. El resultado de todo esto será la combinación 00100.

Si se continúan estos razonamientos resultará

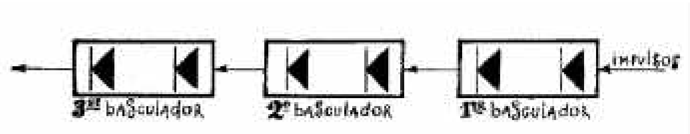

Figura 2

Se aprecia cómo esta serie de basculadores "cuenta" el número de señales recibidas del exterior y lo "anota" a su manera. No es difícil advertir que la anotación del número de impulsos recibos no se produce de acuerdo con el sistema de base diez, sino con el sistema de base dos.
En este sistema, la numeración se forma mediante unos y ceros. La unidad del segundo lugar no es diez veces mayor que la del primero, sino sólo dos veces. La unidad que en el sistema de base dos ocupa el último puesto (el de la derecha) es una unidad ordinaria. La unidad del siguiente orden (la que ocupa el segundo lugar contando desde la derecha) representa un dos; la siguiente unidad, un cuatro; la otra, un ocho, etc.
Por ejemplo, el número 19=16+2+1 se registra en el sistema de base dos en forma de 10011.
Quedamos pues en que la serie de basculadores "cuenta" el número de señales recibidas y las «anota» con el sistema de numeración de base dos. Obsérvese que el cambio de posición del basculador, es decir, el registro de uno de los impulsos llegados, dura en total ¡algunas millonésimas de segundo! Los contadores de basculador modernos pueden "contar" decenas de millones de impulsos por segundo, lo que abrevia la operación unas 100 000 de veces en relación con dicho cálculo hecho por una persona que no disponga de aparato alguno: la vista humana puede distinguir con claridad señales que se sucedan con una frecuencia que no sea superior a 0,1 segundo.
Si se forma una serie de veinte basculadores, es decir, si se registra la cantidad de señales dadas en números que no tengan más de veinte cifras del sistema de base dos, entonces se puede «contar» hasta $2^{20}-1$ o sea, más de un millón. Y si se forma una serie de 64 basculadores, se puede registrar la famosa «cifra del ajedrez».
La posibilidad de contar centenares de miles de señales en un segundo reviste gran importancia para los trabajos experimentales relacionados con la f física nuclear. Puede ser registrado, por ejemplo, el número de partículas de uno u otro tipo que salgan despedidas en la desintegración del átomo.
Volver

10. 10.000 operaciones por segundo
Merece destacar que los esquemas de basculadores permiten también realizar operaciones con cifras. Veamos, por ejemplo, cómo se efectúa la adición de dos números.

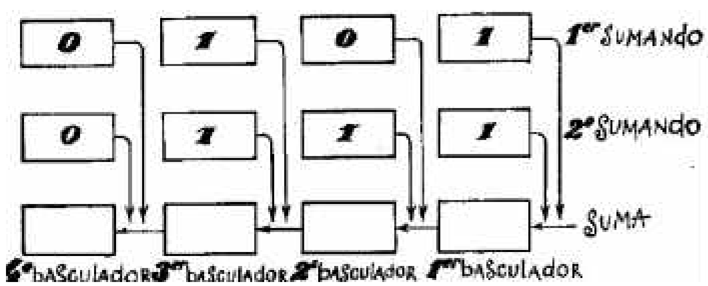

Figura 3

Supongamos que tres series de basculadores se encuentran unidas como se indica en la figura 3. La serie superior sirve para registrar el primer sumando; la segunda serie, para el segundo sumando, y la inferior, para la suma. En el momento de conectar el aparato, a los basculadores de la serie inferior llegan impulsos de los basculadores de la serie superior y de la media que se encuentran en la posición 1.

Admitamos que, como se señala en la figura 3, las dos primeras series presentan los sumandos 101 y 111 (con el sistema de numeración de base dos). En este caso, cuando conectemos el aparato llegarán al primer basculador de la serie inferior (el del extremo de la derecha) dos impulsos: los del primer basculador de cada uno de los sumandos. Es sabido que al recibir dos impulsos, el primer basculador queda en la posición 0, pero responde con un impulso que envía al segundo basculador. A éste llega, además, una señal del segundo sumando. De esta forma, al segundo basculador llegan dos impulsos; con esto queda en la posición 0 y envía el impulso de respuesta al tercer basculador. Asimismo, al tercero llegan otros dos impulsos de cada uno de los sumandos. En consecuencia, a cada una de las tres señales, el tercer basculador pasa a la posición 1 y despide un impulso de respuesta. Este último impulso traslada el cuarto basculador a la posición 1 (al cuarto no llegan más señales). Así es cómo en el aparato representado en la figura 3 se ha realizado, mediante el sistema de numeración de base dos, una suma de dos números "en columna":

$$\begin{array}{r} 101 \\ \underline{+111} \\ 1100 \end{array}$$

o, según la suma del sistema decimal, 5 + 7 = 12. Al darse la señal de respuesta en la serie inferior de basculadores parece como si el aparato "llevara una unidad" de la columna anterior y la pasara a la siguiente, es decir, hace lo mismo que cuando sumamos en "columna".

Si en cada serie hubiera en lugar de cuatro, 20 basculadores, por ejemplo, podríamos realizar sumas de números inferiores a un millón y, si se aumentara todavía más el número de basculadores, sería posible sumar cantidades mayores.

Debemos advertir que en la práctica, el esquema de este mecanismo debe ser mucho más complicado de lo que aparece en la figura 3. Entre otras cosas, la máquina debe tener un aparato especial que asegure el "retardo" de las señales. En efecto: en la máquina representada en el esquema, las señales de los dos sumandos le llegan simultáneamente (en el instante que se conecta la máquina) al primer basculador de la serie inferior. Por ello ambas señales se fundirán en una sola, siendo registradas por el basculador, no como dos, sino como una señal única. Para evitar esto es preciso que las señales de los sumandos no lleguen a la vez, sino unas más «tarde» que las otras. La presencia de este "retardador" determina que en la suma se emplee más tiempo del necesario para el registro de una señal en el contador de los basculadores.

Si se cambia el esquema de la máquina cabe efectuar la sustracción en lugar de la adición. Puede emplearse también para la multiplicación (que consiste en la adición consecutiva de sumandos, lo que exige más tiempo), la división y otras operaciones.

Los aparatos a que nos hemos referido se emplean en las máquinas modernas de cálculo. Estas pueden realizar en un segundo ¡decenas e incluso centenares de miles de operaciones numéricas! Esta vertiginosa rapidez operativo puede parecernos superflua. ¿Qué diferencia puede haber, por ejemplo, en que la máquina eleve un número de 15 cifras al cuadrado en una diezmilésima de segundo o, supongamos, en un cuarto de segundo? Lo uno y lo otro nos parecerán soluciones "instantáneas" del ejercicio... sin embargo, no hay que apresurarse en las conclusiones. Tomemos el siguiente ejemplo: Un buen ajedrecista, antes de mover una pieza analiza decenas e incluso centenares de variantes posibles. Si suponemos que el análisis de una variante le ocupa algunos segundos, para el examen de centenares de ellas precisará minutos y decenas de minutos. No es raro que en las partidas complicadas, los jugadores resulten en «zeitnot», es decir, se vean obligados realizar las últimas jugadas apresuradamente porque al meditar los planes anteriores han agotado casi todo el tiempo destinado a la partida. ¿Y si encargamos a la máquina el examen de las variantes de jugada en la partida de ajedrez? La máquina, como sabemos, no puede caer nunca en "zeitnot", ya que hace miles de operaciones por segundo y puede analizar todas las variantes “instantáneamente"...

Podrá objetarse que una cosa es efectuar operaciones por complicadas que y otra, jugar ajedrez: ¡la máquina no puede hacer esto! ¡Al analizar las variantes, el ajedrecista no opera, sino que piensa! Mas no divaguemos ahora; volveremos a esto más adelante.

Volver

11. Cantidad posible de partidas de ajedrez

Hagamos el cálculo más o menos exacto del número de partidas de ajedrez posibles. Como carece de sentido la determinación precisa, ofreceremos al lector un intento de determinar aproximadamente el número de partidas de ajedrez posibles. En el libro *La matemática de los juegos y distracciones matemáticas,* de M. Kraitchik, matemático belga, encontramos el siguiente cálculo:
"Al mover la primera pieza, las blancas tienen 20 jugadas a elegir (16 jugadas con los ocho peones, cada uno de los cuales puede avanzar un escaque o dos; y dos jugadas de cada caballo). A cada jugada de las blancas, las negras pueden contestar con cualquiera de esas variantes. Combinando cada movimiento de las blancas con cada uno de las negras tendremos 20*20=400 variantes después de la primera jugada por ambas partes.
Después del primer movimiento, el número de jugadas posibles es aún mayor. Si las blancas han movido, por ejemplo, *e2 - e4*, para la segunda jugada, tienen ya 29 variantes a elegir. En lo sucesivo, el número de jugadas posibles es todavía mayor. Tan sólo la reina, encontrándose, por ejemplo, en el escaque *d5*, puede hacer 27 movimientos (suponiendo que todas las casillas donde puede ir estén libres). Sin embargo, para simplificar el cálculo, nos atendremos a las siguientes cifras medias: 20 variantes para cada una de las partes en las primeras cinco jugadas; 30 variantes para cada parte en todas las demás jugadas.
Admitamos, además, que el total de jugadas en una partida normal, como término medio, sea 40. Partiendo de este supuesto, las partidas posibles serán:

$$(20 * 20)^5 * (30 * 30)^{35}$$

Para determinar la magnitud aproximada de esta expresión nos valdremos de las siguientes transformaciones y simplificaciones:

$$(20 * 20)^{5} * (30 * 30)^{35} = 20^{10} * 30^{70} = 2^{10} * 3^{70} * 10^{80}.$$

Sustituyamos 2^{10} por 1 000, que es una magnitud parecida, es decir, por 10^3.
Presentamos la potencia 310 en la forma que sigue:

$$3^{70} = 3^{68} * 3^2 \approx 10 * (3^4)^{17} \approx 10 * 80^{17} = 10 * 8^{17} * 10^{17} = 2^{51} * 10^{18} =$$

$$= 2 * (2^{10})^5 * 10^{18} \approx 2 * 10^{15} * 10^{18} = 2 * 10^{33}$$

por consiguiente,

$$(20 * 20)^5 * (30 * 30)^{35} \approx 10^3 * 2 * 10^{33} * 10^{80} = 2 * 10^{116}.$$

Este número deja muy atrás a la consabida cantidad de granos de trigo pedida como premio por la invención del ajedrez ($2^{64} - 1 \approx 18 * 10^{18}$). Si toda la población del globo terrestre jugara al ajedrez el día entero, moviendo una pieza cada segundo, para agotar todas las posibles partidas de ajedrez, ese juego general y permanente duraría ¡no menos de 10^{100} siglos!
Volver

12. El secreto de la máquina de jugar al ajedrez

Sin duda asombrará al lector enterarse de que en cierta época existían máquinas automáticas de ajedrez. En efecto, ¿cómo concebir semejantes aparatos si el número de combinaciones de las piezas en el tablero de ajedrez es prácticamente infinito?
Su explicación es muy sencilla. No era una máquina lo que existía, sino la fe en ella. Un aparato que gozó de gran popularidad fue el del mecánico húngaro Wolfgang von Kempelen (1734-1804), que lo presentó en las cortes austriaca y rusa y después hizo con él exhibiciones públicas en París y Londres. Napoleón I jugó con esta máquina creyendo que se enfrentaba de verdad con ella. A mediados del pasado siglo el célebre aparato fue a parar a América, destruyéndolo un incendio en Filadelfia.
La fama de las demás máquinas fue menos ruidosa. No obstante, ni aún en tiempos posteriores se perdió la fe en la existencia de tales aparatos.

Figura 4

En realidad, ni una sola máquina de ajedrez actuaba automáticamente. En su interior se ocultaba un adiestrado ajedrecista que movía las piezas. Este seudo automático lo formaba un voluminoso cajón en cuyo interior había un complejo mecanismo. El cajón tenía también un tablero de ajedrez con sus piezas que movía la mano de un gran muñeco. Antes de empezar el juego se permitía al público que se cerciorara de que en el cajón no había más que las piezas del mecanismo. Sin embargo, en dicho cajón quedaba sitio suficiente para ocultar a un hombre de baja estatura (ese papel fue desempeñado en su tiempo por los célebres ajedrecistas Johann Allgaier y William Lewis). Es probable que mientras se iban mostrando sucesivamente al público diferentes departamentos del cajón, la persona escondida pasara con sigilo de un lugar a otro sin ser vista. El mecanismo de por sí no tornaba parte en el funcionamiento del aparato, sirviendo tan sólo para velar la presencia
del jugador de carne y hueso.

De lo dicho puede concluirse lo siguiente: el número de partidas de ajedrez es prácticamente infinito, por lo cual sólo en la imaginación de personas cándidas pueden existir máquinas indicadoras del movimiento más acertado. De ahí que no deba temerse crisis alguna en el juego del ajedrez.

No obstante, en los últimos años se han producido acontecimientos que ponen en duda la veracidad de tal afirmación. Ya existen máquinas que "juegan" al ajedrez. Nos referimos a las complicadas máquinas de cálculo que permiten efectuar miles de operaciones por segundo. De ellas hemos hablado más arriba. Mas, ¿cómo pueden "jugar" al ajedrez estas máquinas? Claro es que ninguna máquina de cálculo puede hacer otra cosa que operar con números. Mas el aparato efectúa las operaciones siguiendo un esquema previo y de acuerdo con un programa elaborado de antemano. El "programa" de ajedrez lo confeccionan los matemáticos a base de una determinada táctica de juego; entendiendo por táctica el sistema de reglas que permite elegir, en cada posición, la salida más efectiva (la "mejor" desde el punto de vista de la táctica dada).

He aquí uno de los ejemplos de la misma. A cada trebejo se le adjudica un determinado número de puntos, que determina su valor.

El rey	+200 puntos	El peón	+1 punto
La reina	+9	Un peón atrasado	-0,5
La torre	+5	Un peón aislado	-0,5
El alfil	+3	Un peón doblado	-0,5
El caballo	+3	-	-

Además se fija una determinada valoración a las posiciones más favorables (movilidad de las figuras, colocación de éstas más cerca del centro que de los costados, etc.) que son expresadas en décimas de punto. Del número global de puntos que tienen las blancas, se descuenta la suma de puntos de las negras. La diferencia reflejará, hasta cierto punto, la superioridad material y de posición que tienen las

blancas sobre las negras. Si esta diferencia es positiva, la situación de las blancas será más ventajosa que la de las negras; si es negativa, será menos ventajosa.
La máquina de calcular señala cómo puede cambiar en el curso de tres jugadas la diferencia registrada. Indica la combinación de tres lances más ventajosa y la registra en una tarjeta especial; con ello, la "jugada" está hecha[5]. Para ello la máquina emplea muy poco tiempo (dependiendo éste del programa y de la velocidad operativo de la máquina), de forma que no hay motivo para temer el "zeitnot".
Es cierto que el hecho de "prever" una partida sólo con tres jugadas por anticipado caracteriza a la máquina como "jugador" bastante mediocre[6]. Pero podemos estar seguros de que con el rápido perfeccionamiento actual de la técnica de calcular, las máquinas "aprenderán" a "jugar" al ajedrez mucho mejor.
Nos sería difícil exponer con más detalle la composición de programas de ajedrez para la máquina de cálculo. Algunos tipos sencillos de programas serán examinados esquemáticamente en el próximo capítulo.
Volver

13. Los tres doses
Con seguridad que todos sabrán cómo deben escribirse tres cifras para que se alcance con ellas su máximo valor. Deben tomarse tres nueves y colocarlos así:

$$9^{9^{9}}$$

es decir, escribiendo la potencia de una potencia.
Este número es tan enormemente grande que es imposible encontrar con qué compararlo. El número de electrones que forman todo el Universo visible es una insignificancia respecto a este número. En mis *Matemáticas Recreativas* (cap. X) me ocupé del particular. He insistido en este ejemplo porque me propongo ofrecer aquí otro ejercicio del mismo tipo:
Véase la forma de alcanzar el número más alto con tres doses sin emplear signo alguno.

Solución
El ejemplo anterior inducirá sin duda a colocar los doses del mismo modo, es decir:

$$2^{2^{2}}$$

Sin embargo, en este caso no se logra el efecto deseado. El resultado es incluso menor que 222. En efecto, hemos escrito tan sólo 2^4, es decir, 16.
El número mayor, entre los que pueden formar tres doses, no es 222 ni 22^2 (es decir, 484), sino

$$2^{22} = 4\ 194\ 304.$$

El ejemplo es muy aleccionador, y enseña que en matemáticas resulta peligroso servirse de analogías: éstas pueden conducirnos fácilmente a conclusiones erróneas.
Volver

14. Los tres treses
Problema
Después de esto, quizá se proceda con mayor precaución al resolver el siguiente problema:

---

[5] Existen también otros tipos de "táctica" de ajedrez. Por ejemplo, en el cálculo pueden tenerse en cuenta no todas las jugadas con que puede replicar el adversario, sino sólo las más "serias" (el jaque, la toma de alguna pieza, el ataque, la defensa, etc.). En otros casos, cuando las jugadas del adversario sean muy peligrosas, puede practicarse el cálculo no sólo de tres, sino de un número mayor de lances por adelantado. También es posible el empleo de otra escala distinta para los valores de las piezas. En dependencia de una u otra táctica cambia el ,,estilo de juego" de la máquina.
[6] En las partidas de los mejores maestros de ajedrez se calculan combinaciones de 10 o más jugadas por anticipado.

Escríbanse tres treses de forma que adquieran su máximo valor sin emplear ningún signo.

Solución

La potencia de potencia no ofrece aquí el efecto deseado porque 3^{3^3}, es decir, 3^{27} es menor que 3^{33}.
La última disposición de los treses es la que responde a la pregunta formulada.

Los tres cuatros
Problema
Escríbanse tres cuatros de forma que adquieran su máximo valor sin recurrir a signos.

Solución
Si se sigue el ejemplo de los dos ejercicios anteriores, es decir,

$$4^{44}$$

no se obtiene la solución más favorable, puesto que en este caso, la potencia de potencia,

$$4^{4^4}$$

proporciona el valor máximo posible. Ya que $4^4 = 256$, y 4^{256} es mayor que 4^{44}.
Volver

15. Con tres cifras iguales
Procuremos profundizar en este intrigante fenómeno y aclarar por qué, cuando con las cifras se establece una potencia de potencia, unas veces se obtienen números enormemente altos y otras, no. Examinemos el caso general.. Obténgase el número más elevado posible dado por tres cifras iguales prescindiendo de todo signo.
Representemos la cifra con la letra *a*. A la distribución

$$2^{22},\ 3^{33},\ 4^{44}$$

corresponde la expresión

$$a^{(10a + a)} \text{, es decir } a^{11a}$$

La potencia de potencia, en su aspecto general, se presenta así:

$$a^{a^a}$$

Determinemos cuál ha de ser el valor de *a* para que la última variante sea de mayor magnitud que la primera. Como quiera que ambas potencias tienen idéntica base entera, a mayor exponente corresponderá mayor valor. ¿En qué caso

$$a^a > 11a?$$

Dividamos ambos miembros de la desigualdad por a, y tendremos

$$a^{a-1} > 11.$$

Es fácil determinar que a^{a-1} es mayor que 11 sólo en el caso en que *a* sea mayor que 3, puesto que

$$4^{4-1} > 11$$

en tanto que las potencias

$$3^2 \text{ y } 2^1$$

son menores que 11.
Quedan, pues, explicadas las sorpresas con que hemos tropezado al resolver los problemas precedentes: para los doses y los treses había que servirse de potencias con exponentes de dos cifras, para los cuatros y cifras mayores tiene que emplearse la potencia de potencia
Volver

16. Los cuatro unos
Problema
Obténgase la cantidad más elevada posible con cuatro unos sin emplear ningún signo.

Solución
El número 1.111 no responde a las exigencias del problema, por ser mucho más pequeño que 11^{11}
Sería muy laborioso encontrar este número mediante 11 multiplicaciones consecutivas por 11. Sin embargo, puede hacerse el cálculo con mucha mayor rapidez utilizando las tablas de logaritmos.
Este número rebasa los 285 000 millones y, por lo tanto, es más de 25 millones de veces mayor que 1.111.
Volver

17. Los cuatro doses
Problema
Resolvamos este problema tratándose de doses. ¿Cómo deben disponerse cuatro doses para que adquieran su máximo valor?

Solución
Las combinaciones posibles son 8:

$$2222,\ 222^2,\ 22^{22},\ 2^{222},$$

$$((22)^2)^2,\ ((2)^{22})^2,\ ((2)^2)^{22},\ (((2)^2)^2)^2$$

¿Cuál de estos valores es el mayor?
Examinemos la primera fila.
El primer número, 2.222, es a todas luces menor que las tres potencias que le siguen. Para establecer una comparación entre las dos siguientes

$$222^2 \text{ y } 22^{22},$$

transformemos la segunda de ellas:

$$22^{22} = 22^{2*11} = (22^2)^{11} = 484^{11}.$$

Esta última es mayor que 222^2, ya que tanto la base como el exponente son mayores que los de 222^2.
Comparemos ahora 22^{22} con 2^{222}. Sustituyamos 22^{22} por otra magnitud superior, 32^{22} y veremos que incluso ésta es menor que 2^{222}.
En efecto,

$$32^{22} = (2^5)^{22} = 2^{110}$$

que es menor que 2^{222}.

Quedamos, pues, en que el valor más elevado de la primera fila es 2^{222}. Comparemos ahora la mayor potencia de la primera fila y las cuatro de la segunda:

$$((22)^2)^2,\ ((2)^{22})^2,\ ((2)^2)^{22},\ (((2)^2)^2)^2$$

La última potencia es sólo igual a 2^{16}, por lo que queda eliminada. Prosigamos. La primera de esta fila equivale a 22^4 y es menor que 32^4 o que 2^{20}, por cuya razón es inferior a las dos que la siguen. Quedan sólo tres potencias a comparar, todas de base 2. Es evidente que será mayor aquella que tenga mayor exponente. De los tres

$$222,\ 484 \text{ y } 2^{20+2} \quad (= 2^{10*2} * 2^2 \approx 10^6 * 4)$$

el último es el mayor.
Por eso, el valor más elevado que pueden tomar los cuatro doses vendrá expresado como sigue:

$$((2)^2)^{22}$$

Sin recurrir a la tabla de logaritmos podernos imaginarnos aproximadamente la magnitud de esta potencia valiéndonos de un número aproximado:

$$2^{10} \approx 1\ 000.$$

Y así es, en efecto:

$$2^{22}=2^{20} * 2^2 \approx 4 * 10^6$$

$$((2)^2)^{22} \approx 2^{4000000} > 10^{1200000}.$$

Este número consta de más de un millón de cifras.
Volver