CAPITULO SEGUNDO
EL IDIOMA DEL ÁLGEBRA

Contenido:

1. El arte de plantear ecuaciones

El idioma del álgebra es la ecuación. "Para resolver un problema referente a números o relaciones abstractas de cantidades, basta con traducir dicho problema, del inglés u otra lengua al idioma algebraico», escribió el gran Newton en su manual de álgebra titulado *Aritmética Universal.* Isaac Newton mostró con ejemplos cómo debía efectuarse la traducción. He aquí uno de ellos:

En la lengua vernácula:	En el idioma del álgebra:
Un comerciante tenía una determinada suma de dinero	x
El primer año se gastó 100 libras	$x - 100$
Aumentó el resto con un tercio de éste	$(x-100)+\frac{(x-100)}{3}=\frac{4x-400}{3}$
Al año siguiente volvió a gastar 100 libras	$\frac{4x-400}{3}-100=\frac{4x-700}{3}$
y aumentó la suma restante en un tercio de ella	$\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}=\frac{16x-2.800}{9}$
El tercer año gastó de nuevo 100 libras	$\frac{16x-2800}{9}-100=\frac{16x-3700}{9}$

Después de que hubo agregado su tercera parte	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27} = \frac{64x - 14800}{27}$
el capital llegó al doble del inicial	$\frac{64x - 14800}{27} = 2x$

Para determinar cuál es el capital inicial del comerciante no queda más que resolver la última ecuación.
La solución de una ecuación es, con frecuencia, tarea fácil; en cambio, plantear la ecuación a base de los datos de un problema suele ser más difícil. Hemos visto que el arte de plantear ecuaciones consiste, efectivamente, en traducir "la lengua vernáculo a la algebraica". Pero el idioma del álgebra es lacónico en extremo, por eso no todos los giros del idioma materno son de fácil traducción. Las traducciones pueden ser muy distintas por el grado de su dificultad, como puede convencerse el lector a la vista de los ejemplos de ecuación de primer grado expuestos.
Volver

2. La vida de Diofanto

Problema
La historia ha conservado pocos rasgos biográficos de Diofanto, notable matemático de la antigüedad. Todo lo que se conoce acerca de él ha sido tomado de la dedicatoria que figura en su sepulcro, inscripción compuesta en forma de ejercicio matemático. Reproducimos esta inscripción:

En la lengua vernácula	En el idioma del álgebra:
¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar, ¡oh, milagro!, cuán larga fue su vida,	x
cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia.	$x/6$
Había transcurrido además una duodécima parte de su vida, cuando de vello cubrióse su barbilla	$x/12$
Y la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.	$x/7$
Pasó un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito,	5
que entregó su cuerpo, su hermosa existencia, a la tierra, que duró tan sólo la mitad de la de su padre	$x/2$
Y con profunda pena descendió a la sepultura, habiendo sobrevivido cuatro años al deceso de su hijo	$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$
Dime cuántos años había vivido Diofanto cuando le llegó la muerte.	

Solución
Al resolver la ecuación y hallar el valor de la incógnita, 84, conocemos los siguientes datos biográficos de Diofanto: se casó a los 21 años, fue padre a los 38, perdió a su hijo a los 80 y murió a los 84.
Volver

3. El caballo y el mulo

Problema

He aquí un antiguo ejercicio muy sencillo y fácil de traducir al idioma de] álgebra.

"Un caballo y un mulo caminaban juntos llevando sobre sus lomos pesados sacos. Lamentábase el jamelgo de su enojosa carga, a lo que el mulo le dijo: "¿De qué te quejas? Si yo te tomara un saco, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio, si te doy un saco, tu carga se igualará a la mía". ¿Decidme, doctos matemáticos, cuántos sacos llevaba el caballo, y cuántos el mulo?".

Solución

Si yo te tomara un saco	*x-1*
mi carga	*y + 1*
sería el doble que la tuya.	*y + 1 =2 (x-1)*
Y si te doy un saco,	*y-1*
tu carga	*x + 1*
se igualará a la mía	*y - 1 = x + 1*

Hemos planteado el problema mediante un sistema de ecuaciones con dos incógnitas:

$$y + 1 = 2 * (x - 1)$$
$$y - 1 = x + 1$$

ó

$$2x - y = 3$$
$$y - x = 2$$

Una vez resuelto el sistema vemos que x = 5, y = 7. El caballo llevaba 5 sacos, y el mulo, 7.
Volver

4. Los cuatro hermanos

Problema

Cuatro hermanos tienen 45 rublos. Si el dinero del primero es aumentado en 2 rublos, el del segundo reducido en 2 rublos, se duplica el del tercero y el del cuarto se reduce a la mitad, todos los hermanos tendrán la misma cantidad de rublos. ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

Solución

Los cuatro hermanos tienen 45 rublos	*x + y + z + t = 45*
Si al dinero del primero se le agregan 2 rublos	*x + 2*
al del segundo se restan 2 rublos	*y - 2*
el del tercero se duplica,	*2z*
y el del cuarto se divide por dos	*t/2*
a todos los hermanos les quedará la misma cantidad de rublos	*x+2=y-2=2z=t/2*

La última ecuación nos permite plantear tres ecuaciones independientes:

$$x + 2 = y - 2,$$
$$x + 2 = 2z$$
$$x + 2 = t/2$$

de donde

$$y = x + 4$$
$$z = (x + 2) / 2$$
$$t = 2x + 4.$$

Colocando estos valores en la primera ecuación, tendremos:

$$x + x + 4 + (x + 2)/2 + 2x + 4 = 45$$

de donde $x = 8$. A continuación hallamos que $y = 12$, $z = 5$, $t = 20$. Por lo tanto, los hermanos tenían: 8, 12, 5 y 20 rublos.
Volver

5. Las aves de la orilla

Problema

En las obras de un matemático árabe del siglo XI hallamos el siguiente problema:

A ambas orillas de un río crecen dos palmeras, la una frente a la otra. La altura de una es de 30 codos, y la de la otra, de 20. La distancia entre sus troncos, 50 codos. En la copa de cada palmera hay un pájaro. De súbito los dos pájaros descubren un pez que aparece en la superficie del agua, entre las dos palmeras. Los pájaros se lanzaron y alcanzaron el pez al mismo tiempo. ¿A qué distancia del tronco de la palmera mayor apareció el pez?

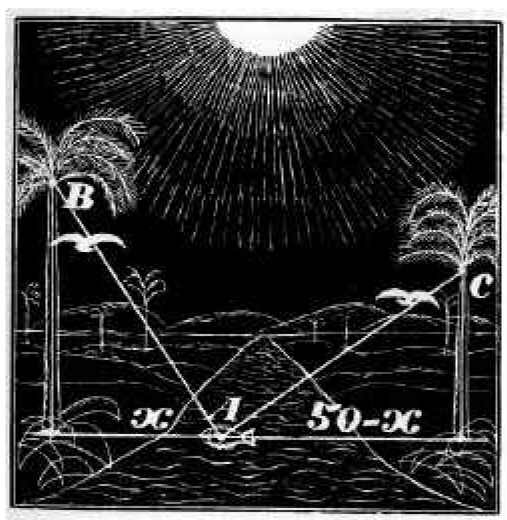

Figura 5

Solución

Mediante la figura 5 y aplicando el teorema de Pitágoras, establecemos:

$$AB^2 = 30^2 + x^2,\ AC^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$

Pero *AB* = *AC,* por cuanto los pájaros cubren esta distancia en un mismo tiempo. Por eso,

$$30^2 + x^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$

Al quitar los paréntesis simplificando la fórmula nos encontramos con una ecuación de primer grado:

$$100x = 2\ 000,$$

de donde

$$x = 20.$$

El pez apareció a 20 codos de la palmera que tenía 30 codos de altura.
Volver

6. El paseo
Problema
- Pase usted mañana por mi casa - dijo el viejo doctor a un conocido.
- Muy agradecido. Saldré mañana a las tres. Quizá desee usted dar también un paseo. En este caso salga a la misma hora y nos encontraremos a la mitad del camino.
- Usted olvida que soy ya viejo y ando tan sólo tres kilómetros por hora, en tanto que usted, jovenzuelo, cuando más despacio va, hace 4 kilómetros por hora. No sería ningún delito que me concediera alguna ventaja.
- Tiene razón - contestó el joven -. Comoquiera que yo recorro un kilómetro a la hora más que usted, le doy este kilómetro de ventaja, es decir, saldré de casa un cuarto de hora antes ¿le será suficiente?
- Es usted muy amable - aprobó al instante el anciano. El joven cumplió lo prometido y salió de su casa a las tres menos cuarto, marchando a 4 kilómetros por hora. El doctor salió a la calle a las tres en punto y anduvo a tres kilómetros por hora. Cuando se encontraron, el anciano dio la vuelta, yendo juntos a su domicilio.
Tan sólo cuando el joven regresó a su casa comprendió que debido a la ventaja concedida tuvo que caminar, no el doble, sino el cuádruplo de lo que anduvo el doctor.
¿A qué distancia de la casa del doctor estaba la de su joven conocido?

Solución
Expresemos la distancia que separa las casas con la x (km). El joven anduvo en total 2x, y el doctor, la cuarta parte, es decir x/2 . Desde que salió de casa hasta que se encontraron, el doctor recorrió la mitad de cuanto anduvo en total, es decir, x/4 , y el joven hizo el resto, es decir, 3x/4. El anciano caminó x/12 y el joven 3x/16 horas; además, sabemos que éste caminó ¼ de hora más que el doctor.
Establezcamos la siguiente ecuación

$$\frac{3x}{16} - \frac{x}{12} = \frac{1}{4}$$

de donde x=2,4 km.
Entre las dos casas mediaba una distancia de 2,4 km.
Volver

7. El artel de segadores
En los recuerdos acerca de L. Tolstoi, el conocido físico A. Tsínguer refiere el siguiente problema que agradaba en extremo al eminente escritor:

Problema
"Un artel de segadores debía segar dos prados, uno tenía doble superficie que otro. Durante medio día trabajó todo el personal del artel en el prado grande; después de la comida, una mitad de la gente quedó en el prado grande; y la otra mitad trabajó en el pequeño. Durante esa tarde fueron terminados los dos tajos, a excepción de un reducido sector del prado

pequeño, cuya siega ocupó el día siguiente completo a un solo segador. ¿Con cuántos segadores contaba el artel?".

Solución

En este ejercicio, además de la incógnita fundamental - número de segadores - que expresamos con la x, es conveniente introducir otra incógnita complementaria: la superficie del sector segado por un trabajador en un solo día, que expresamos con la y.

Aunque el problema no exige que se halle su valor, contribuye a encontrar la raíz de la x. Representemos la superficie del prado grande con x e y. Este prado lo segaron durante medio día x trabajadores, que segaron ½ *(x * y) = x*y/2

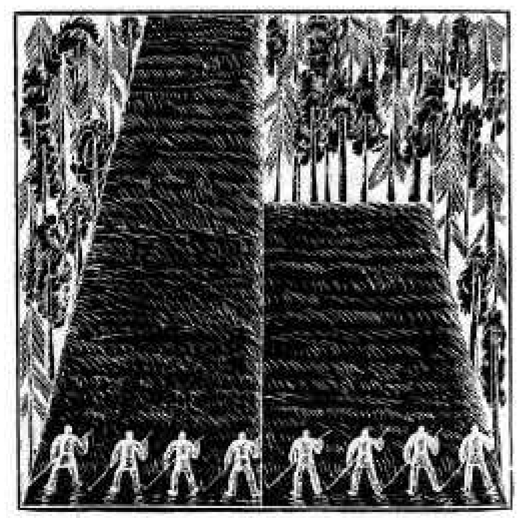

Figura 6

Durante la segunda parte del día trabajó allí la mitad del artel, es decir, x/2 y segaron

$$x/2 * ½ * y = x*y/4$$

Comoquiera que al final de la jornada había sido segado todo el prado, su área será:

$$x*y/2 + x*y/4 = 3*x*y/4$$

Expresamos ahora la superficie del prado menor mediante x e y. Durante medio día se ocuparon en él x trabajadores y segaron una superficie de

$$½ * x/2 * y = x*y/4$$

Agreguemos a esto el sector que quedó sin segar, que es igual a y (superficie segada por un trabajador en una jornada), y hallaremos la superficie del prado menor:

$$x*y/4 + y = (x*y +4 *y)/4$$

No nos queda más que traducir al idioma del álgebra la frase "el primer prado tiene doble superficie que el segundo", y la ecuación quedará establecida como sigue:

$$\frac{\frac{3xy}{4}}{\frac{xy+4y}{4}} = 2$$

$$\frac{3xy}{xy+4y} = 2$$

Dividiendo por y el numerador y denominador del quebrado de la segunda igualdad, se elimina la incógnita auxiliar, resultando la siguiente ecuación:

$$3x/(x+4) = 2, \text{ ó } 3x = 2x + 8$$

de donde

$$x = 8.$$

En el artel habla 8 segadores.
Después de haber sido publicada la primera edición del *Álgebra Recreativa,* el profesor A. Tsínguer me envió una información detallada y muy interesante, relacionada con este problema. El efecto esencial del problema, a su juicio, reside en que "no es algebraico en absoluto sino aritmético, y aunque es muy sencillo se tropieza conciertas dificultades en su resolución debido a que no es de tipo corriente ' ".
"La historia del presente problema es la siguiente - continúa el profesor A. Tsínguer -. En la facultad de matemáticas de la Universidad de Moscú, cuando estudiaban en ella mi padre e I. Raievski, mi tío, (amigo íntimo de L. Tolstoi), entre otras disciplinas se enseñaba algo semejante a la pedagogía. A este fin, los estudiantes debían ir a una escuela pública urbana, puesta a disposición de la universidad, y en colaboración con expertos y venerables maestros, hacían prácticas pedagógicas. Entre los compañeros de estudios de Tsínguer y Raievski había un tal Petrov, que, según cuentan, era persona muy inteligente y original en extremo. Este Petrov (fallecido en su juventud, creo que de tisis) afirmaba que en las clases de aritmética embrutecían a los escolares con problemas y métodos estereotipados. Para poner de evidencia su punto de vista, Petrov ingeniaba problemas que por salirse de las normas corrientes embarazaban a los "expertos y venerables maestros", pero que los alumnos más lúcidos, todavía no embotados por el estudio rutinario, resolvían con facilidad. Entre dichos problemas (Petrov discurrió varios) estaba el de los segadores. Los maestros con experiencia, claro, podían resolverlo con facilidad mediante ecuaciones, pero no daban con su sencilla resolución aritmética. Sin embargo, el problema es tan fácil que para resolverlo en absoluto no merece la pena servirse del álgebra.
Si el prado mayor fue segado por todo el personal del artel en medio día, y por la mitad de la gente en el resto de la jornada, es natural que medio artel segó en medio día 1/3 del prado. Por consiguiente, en el prado menor quedaba sin segar

$$1/2 - 1/3 = 1/6$$

Si un trabajador siega en un día 1/6 del prado, y si fue segado 6/6 + 2/6 = 8/6, esto quiere decir que había 8 segadores.
Tolstói, aficionado de siempre a los problemas que se resuelven utilizando algún subterfugio y ofrecen cierta dificultad, conocía desde la juventud éste, de los segadores, gracias a mi padre. Cuando tuve ocasión de hablar de dicho problema con Tolstoi, ya anciano, le agradaba, sobre todo, el hecho de que el problema se hace más comprensible si, al resolverlo, se emplea este sencillo diagrama (figura 7)".
Ofrecemos a continuación algunos problemas que, con cierta imaginación, son más fáciles de resolver por medio de la aritmética que valiéndose del álgebra.

Volver

8. Las vacas en el prado

Problema

"Al estudiar las ciencias, los ejercicios son más útiles que las reglas",escribía Newton en su Aritmética Universal, y acompañaba las indicaciones teóricas con una serie de ejemplos. Entre ellos hallamos el de los toros que pastan en el prado, que generó un tipo específico de problemas semejantes a éste:

"La hierba crece en todo el prado con igual rapidez y espesura. Se sabe que 70 vacas se la comerían en 24 días, y 30, en 60 días. ¿Cuántas vacas se comerían toda la hierba en 96 días?".

Este problema sirvió de argumento para un cuento humorístico, que recuerda el Maestro particular de Chéjov. Dos adultos, familiares del escolar a quien habían encargado resolver este problema, se esforzaban inútilmente por hallar su solución y se asombraban:

-¡Qué extraño es el resultado! - dijo uno -. Si en 24 días 70 vacas se comen la hierba, entonces, ¿cuántas vacas se la comerán en 96 días? Claro que 1/4 de 70, es decir, 17 1/2 vacas... ¡Este es el primer absurdo! El segundo todavía más extraño, es que si 30 vacas se comen la hierba en 60 días, en 96 se la comerán 18 3/4 vacas. Además, si 70 vacas se comen la hierba en 24 días,

30 vacas emplean en ello 56 días, y no 60, como afirma el problema.

-¿Pero tiene usted en cuenta que la hierba crece sin cesar? - preguntó otro.

La observación era razonable; la hierba crece incesantemente, circunstancia que no puede echarse en olvido, pues en ese caso no sólo no puede resolverse el problema, sino que sus mismas condiciones parecerán contradictorias.

¿Cómo debe resolverse pues, el problema?

Solución

Introduzcamos también aquí una segunda incógnita, que representará el crecimiento diario de la hierba, expresado en partes de las reservas de la misma en el prado. En una jornada hay un crecimiento de y; en 24 días será 24y. Si tomamos todo el pasto como 1, entonces, en 24 días las vacas se comerán

$$1 + 24y.$$

En una jornada las 70 vacas comerán

$$(1 + 24 y) / 24$$

y una vaca (de las 70) comerá

$$(1+ 24 y) / (24*70)$$

Siguiendo el mismo razonamiento: si 30 vacas acaban con toda la hierba del prado en 60 días, una vaca comerá en un día

$$1+ 60y / (30*60)$$

Pero la cantidad de hierba comida por una vaca en un solo día es igual para los dos rebaños. Por eso

$$(1+ 24y) / (24*70) = (1+ 60y) /(30*60)$$

de donde

$$y =1 / 480$$

Cuando se halla y (medida de crecimiento) es ya fácil determinar qué parte de la reserva inicial se come una vaca al día

$$(1 + 24y) / (24*70) = (1 + 24/480) / (24*70) = 1 / 1600$$

Por último establecemos la ecuación para la solución definitiva del problema: si el número de vacas es x, entonces,

$$\{1 + (96 / 480)\} / 96x = 1600$$

de donde x = 20
20 vacas se comerían toda la hierba en 96 días.
Volver

9. El problema de Newton
Examinemos ahora un problema del mismo tipo que el anterior: el problema de Newton acerca de los toros.

Problema
El problema, en realidad, no fue ideado por Newton, sino que es de origen popular.
"Tres prados cubiertos de hierba de una misma espesura y con el mismo grado de crecimiento, tienen un área de 3 1/3 Ha, 10 Ha y 24 Ha. La hierba del primero es comida por 12 toros durante 4 semanas; la del segundo, por 21 toros durante 9 semanas. ¿Cuántos toros comerán la hierba del tercero durante 18 semanas?"

Solución
Introducimos la incógnita auxiliar *y*, que significa la parte de la reserva inicial de hierba que crece en 1 Ha durante una semana. En el primer prado crece durante la primera semana una cantidad de hierba iguala 3 1/3*y*; durante 4 semanas, 3 1/3*y**4= (40/3)*y* de la reserva de hierba que había inicialmente en 1 Ha. Esto equivale a un crecimiento del área inicial del prado igual a:

$$3\ 1/3 + (40/3)y$$

hectáreas. En otras palabras: los toros comen tanta hierba como se precisa para cubrir un prado de {3 1/3 +(40/3)*y*} hectáreas. En una semana 12 toros se comen un cuarto de esta cantidad, y un toro come en una semana 1/48, es decir, la reserva de hierba que hay en un área de

$$\{3\ 1/3 + (40/3)y\} / 48 = (10 + 40y) / 144 \text{ hectáreas.}$$

De esa misma manera, con los datos del segundo prado, hallamos el área de éste que alimenta a un solo toro durante una semana:

- crecimiento de la hierba en 1 Ha durante 1 semana = *y*
- crecimiento de la hierba en 1 Ha durante 9 semanas = 9*y*
- crecimiento de la hierba en 10 Ha durante 9 semanas = 90*y*

La superficie del sector que contiene hierba suficiente para alimentar 21 toros durante 9 semanas es igual a

$$10 + 90y.$$

El área necesaria para mantener un toro durante una semana será:

$$(10 + 90y)/ 9*21 = (10+90y)/189$$

hectáreas. Ambas normas de alimentación deben ser idénticas:

$$(10+40y)/144 = (10+90y)/189$$

Al despejar la incógnita encontramos que y = 1/12. Veamos ahora cuál debe ser el área del prado con hierba suficiente para mantener un toro durante una semana:

$$(10+40y)/144 = (10+40/12)/144 = 5/54$$

hectáreas. Ocupémonos, por último, de la pregunta del problema. Si representamos el número desconocido de toros con la *x*, tendremos:

$$\{24+(24*18/12)\}/18x = 5/54$$

de donde x = 36. El tercer prado puede mantener 36 toros durante 18 semanas.
Volver

10. El cambio de las manecillas del reloj
Problema
A. Moshkovski, biógrafo y amigo del famoso físico Albert Einstein, en su deseo de distraer a éste durante su enfermedad, le propuso resolver el problema siguiente (figura 8):
"Tomemos un reloj - dijo Moshkovski - que tenga las saetas en las 12. Si en esta posición el minutero y el horario cambiaran de función, la hora marcada sería la misma; pero a otras horas, por ejemplo, a las 6 esa permuta de las saetas daría lugar a un absurdo, a una situación que, en un reloj que marchara normalmente no podría producirse; el minutero no puede hallarse en las 6 cuando el horario se encuentra en las 12. De aquí surge la siguiente pregunta: ¿Cuándo y cada cuánto tiempo ocupan las manecillas de un reloj tal posición en la cual al cambiar éstas de función entre sí se producen nuevas situaciones posibles en un reloj normal?
- Sí, contestó Einstein, este problema es muy apropiado para un hombre obligado por su enfermedad a permanecer postrado en el lecho: despierta bastante interés y no es muy fácil. Me temo, sin embargo, que la distracción dure poco tiempo: he dado ya con la forma de resolverlo.
Se incorporó en el lecho y con unos cuantos trazos dibujó en un papel un esquema que reflejaba reflejaba las condiciones del problema. Einstein no necesitó para resolverlo más tiempo que el que he empleado yo en formularlo..." ¿Cómo se resuelve?

Solución
Midamos la distancia que recorren las manecillas, valiéndonos de 60 divisiones de la esfera, a partir de las 12. Supongamos que en una de las posiciones buscadas, el horario se encuentra a *x* fracciones a partir del número 12, y el minutero, a *y* divisiones.

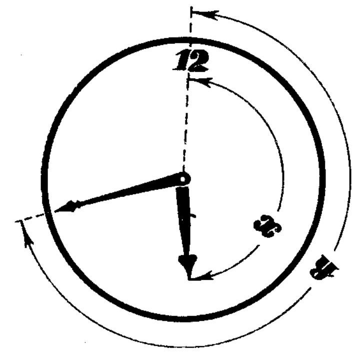

Figura 8

Como las 60 fracciones son recorridas por el horario en 12 horas, es decir, a 5 divisiones por hora, entonces, *x* partes de la esfera serán recorridas por el horario en *x*/5 horas. Dicho con otras palabras, habrán pasado *x*/5 horas desde que el reloj dio las 12. El minutero recorre *y* fracciones en *y* minutos, es decir, en *y*/60 horas. Expresado de otro modo: el minutero ha pasado la cifra 12 hace *y*/60 o al cabo de

$$x/5 - y/60$$

horas después de que ambas saetas se encontraban en las doce. Este número es entero (desde el cero al 11), ya que muestra cuántas horas completas han pasado desde las doce. Al cambiar las manecillas defunción encontraremos por analogía que a partir de las doce habrán pasado

$$y/5 - x/60$$

horas completas. Este número también es entero (desde el cero hasta el 11).
Planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{5} - \frac{y}{60} = m \\ \frac{y}{5} - \frac{x}{60} = n \end{array}\right]$$

donde *m* y *n* son números enteros comprendidos entre el 0 y el 11. En este sistema despejaremos las incógnitas:

$$x = \{60*(12\ m + n)\}/143$$

$$y = \{60*(12\ n + m)/143$$

Asignando a m y n un valor comprendido entre 0 y 11 determinaremos todas las posiciones requeridas de las saetas. Como cada uno de los 12 valores que tiene m, puede ser confrontado con cada uno de los 12 de n, quizás parezca que el número de soluciones posibles puede ser 12. 12=144; pero en realidad es igual a 143, porque cuando m = 0, n = 0, y si m = 11, n = 11, las manecilla ocupan la misma posición.
Cuando

$$m = 11, n = 11$$

tenemos:

$$x = 60, \quad y = 60,$$

es decir, las manecillas están en las 12, como en el caso de $m = 0$, $n = 0$.
No nos detendremos a examinar todas las posiciones posibles; ocupémonos de dos casos:
Primer caso:
$m = 1$, $n = 1$;

$$x = 60*13/143 = 5\ 5/11$$

es decir, señala 1 hora 5/11 minutos; en este momento las manecillas estár en el mismo sitio por lo que pueden cambiar de función (como siempre que coincidan).

Segundo caso:
$m = 8$, $n = 5$;

$$x = \{60*(5+12*8)\}/143 \approx 42.38 \quad y = \{90*(8+12*5)\}/143 \approx 28.53$$

Los momentos respectivos serán: las 8 horas y 28,53 minutos y las 5 horas 42,38 minutos.
El número de soluciones, como se indicó ya, es de 143. Para llegar a los puntos de la esfera donde se encuentran las posiciones requeridas de las saetas, hay que dividir la circunferencia de la esfera en 143 partes iguales, obteniendo 143 puntos que son los que buscamos. En los espacios intermedios no hay otras posiciones semejantes de las manecillas.
Volver

11. Coincidencia de las saetas
Problema
¿En cuántas posiciones pueden coincidir el horario y el minutero de un reloj que marche normalmente?

Solución
Podemos valernos de las ecuaciones del problema anterior, ya que si las dos manecillas coinciden, pueden cambiar entre sí de función sin que se produzca alteración alguna. En este caso, ambas saetas habrán recorrido el mismo número de divisiones, a partir del número 12; es decir, $x = y$. Por esta causa, los razonamientos del problema precedente nos brindan la siguiente expresión:

$$x/5 - x/60 = m$$

donde m es un entero comprendido entre 0 y 11. Aquí podemos despejar la incógnita:

$$x = 60*m/11$$

De los doce valores de m (del 0 al 11) obtenemos en lugar de 12, sólo 11 posiciones diversas de las manecillas, toda vez que siendo $m = 11$ vemos que $x = 60$; es decir, ambas saetas han recorrido 60 divisiones y se hallan en la cifra 12; esto mismo sucede cuando $m = 0$.
Volver

12. El arte de adivinar números

Cada uno de Uds se encontraba indudablemente con "prestidigitadores" que pueden adivinar números. Como regla un prestidigitador propone realizar operaciones del siguiente carácter: pensar un número cualquiera, adicionar 2, multiplicar el resultado por 3, restar 5, restar el número pensado etc., en total cinco o una decena de operaciones. Luego el prestidigitador pide que le comuniquen el resultado y, al obtener la respuesta, en seguida comunica el número pensado.
Claro está que el secreto de la "prestidigitación" es muy fácil y se basa en las mismas ecuaciones.
Supongamos que el prestidigitador le haya propuesto a Ud. realizar un programa de operaciones indicado en la columna izquierda de la tabla siguiente:

piense un número	x
adicione 2	x + 2
el resultado multiplíquelo por 3	3x + 6
reste 7	3x - 1
reste el número pensado	2x + 1
multiplique por 2	4x + 2
reste 1	4x + 1

Luego el prestidigitador pide que le comuniquen el resultado final y-, al obtenerlo, dice al instante el número pensado. ¿Cómo lo hace?
Para comprender esto, hay que mirar la columna derecha de la tabla, donde las indicaciones del prestidigitador están traducidas al idioma del álgebra. Mirando esta columna se puede comprender, que si Ud. ha pensado cualquier número x, entonces realizadas todas las operaciones se obtendrá 4x- 1. Conociendo este resultado no es difícil "adivinar" el número.
Supongamos, por ejemplo, que Ud. haya dicho al prestidigitador que el resultado es 33.
Entonces el prestidigitador resuelve mentalmente muy rápido la ecuación $4x - 1 = 33$ y obtiene la respuesta: $x = 8$. Es decir, hace falta restar 1 del resultado final (33-1 -= 32) y luego el número obtenido se divide entre 4 ($32 : 4 = 8$), El resultado de esta división es el número pensado (8). Si el resultado final es 25, entonces el prestidigitador hace mentalmente las siguientes operaciones $25 - 1 = 24$, $24 / 4 = 6$ y le comunica que Ud. ha pensado el número 6.
Como se ve todo es muy fácil. El prestidigitador sabe de antemano qué hace falta hacer con el resultado para obtener el número pensado.
Después de comprender esto Ud. puede asombrar y desconcertar aún más a sus amigos proponiéndoles a ellos mismos escoger según su propio parecer, el carácter de operaciones sobre un número pensado. Ud. propone a su amigo pensar un número y realizar en cualquier orden operaciones del carácter siguiente: sumar o restar un número conocido (por ejemplo: sumar 2, restar 5, etc.), multiplicar[1] por un número conocido (por 2, por 3, etc.), sumar o restar el número pensado. Su amigo, para embrollarle, va a amontonar una serie de operaciones. Por ejemplo, él ha pensado el número 5 (el número pensado no se le comunica a Ud.) y realizando operaciones le dice:
- he pensado un número, lo he multiplicado por 2, al resultado he sumado 3, luego he sumado el número pensado, al resultado he sumado 1, todo lo he multiplicado por 2, he restado el número pensado, luego he restado 3, una vez más he restado el número pensado, he restado 2. Por fin, el resultado lo he multiplicado por 2 y he sumado 3.
Al decidir que él le ha embrollado por completo él comunica a Ud. con el aspecto triunfante:
- el resultado final es 49.

[1] Mejor que no le permita dividir, pues la división complica mucho la prestidigitación.

Para su asombro Ud. le comunica inmediatamente que él ha pensado el número 5.
¿Cómo lo hace Ud? Ahora todo eso es bastante claro. Cuando su amigo le comunica las operaciones que él está realizando con el número pensado, Ud. a la vez actúa mentalmente con la incógnita x. El le dice: "He pensado un número...", Ud. repite mentalmente: "entonces tenemos x". El dice: "...lo he multiplicado por 2..." (él de veras realiza la multiplicación de números), Ud. prosigue mentalmente; "...ahora tenemos 2x". El dice: "...al resultado he sumado 3...", Ud. le sigue inmediatamente: 2x+3 etc. Cuando él le "ha embrollado" completamente y ha realizado todas las operaciones mencionadas arriba, Ud. ha llegado al resultado indicado en la tabla siguiente (en la columna izquierda está escrito todo lo dicho en voz alta por su amigo y en la derecha - las operaciones que Ud. ha hecho mentalmente):

He pensado un número	x
lo he multiplicado por 2	2x
al resultado he sumado 3	2x + 3
luego he sumado el número pensado	3x + 3
ahora he sumado 1	3x + 4
el resultado lo he multiplicado por 2	6x + 8
he restado el número pensado	5x + 8
he restado 3	5x + 5
más he restado el número pensado	4x + 5
he restado 2	4x + 3
por fin, el resultado lo he multiplicado por 2	8x + 6
y he sumado 3	8x + 9

Ud. ha pensado por último: el resultado final es 8x+9. Ahora él dice: "El resultado final es 49". Ud. tiene ya la ecuación hecha: 8x+9=49. Resolverla es una futilidad y Ud. le comunica en el acto que él ha pensado el número 5. Esta prestidigitación es particularmente impresionante porque las operaciones que hace falta realizar con el número pensado no las propone Ud., sino su amigo las "inventa".
Sin embargo, hay un caso cuando la prestidigitación no tiene éxito. Si Ud. después de realizar (contando mentalmente) una serie de operaciones ha obtenido, por ejemplo, x + 14, y su amigo dice luego: "...ahora he restado el número pensado y el resultado final es 14". Ud. le sigue (x + 14)-x = 14, de verdad resulta 14, pero no hay ninguna ecuación y por eso Ud. no puede adivinar el número pensado. ¿Qué es necesario hacer en este caso? Obre así: tan pronto Ud. tenga el resultado que no contiene la incógnita x, interrumpa a su amigo, diciéndole: "¡Pare! Ahora puedo sin preguntar nada comunicarte el resultado que tienes. Es 14". Esto de veras va a desconcertar a su amigo, pues él no le ha dicho completamente nada. A pesar de que Ud. no supo adivinar el número pensado, la prestidigitación ha resultado espléndida.
He aquí un ejemplo más (como antes en la columna izquierda se encuentra lo dicho por su amigo):

He pensado un número	x
a este número he sumado 2	x + 2
el resultado lo he multiplicado por 2	2x + 4
ahora he sumado 3	2x + 7
he restado el número pensado	x + 7
he sumado 5	x + 12
luego he restado el número pensado	12

En el momento cuando el resultado ha sido 12, es decir, es una fórmula que no tiene más la incógnita x, Ud. interrumpe al amigo comunicándole que ahora el resultado es 12.

Después de practicar un poco Ud. podrá fácilmente mostrar a sus amigos semejantes "prestidigitaciones".
Volver

13. Un supuesto absurdo
Problema
He aquí un problema que puede parecer incongruente: ¿Cuál es la equivalencia de 84 si 8*8=54?
Esta insólita pregunta está muy lejos de carecer de sentido, y puede ser resuelta mediante ecuaciones.
Pruebe a descifrarla.

Solución
Probablemente habrán comprendido que los datos del problema no pertenecen al sistema decimal, pues en caso contrario, la pregunta "¿Cuál es la equivalencia de 84?" sería un absurdo. Supongamos que la base del sistema desconocido de numeración es x. El número "84" equivale entonces a 8 unidades de segundo orden y 4 unidades del primero, es decir

$$\text{“84"} = 8x + 4.$$

El número "54" equivale a 5x+4. Tenemos, por lo tanto, la ecuación

$$8*8 = 5x+4,$$

es decir, en el sistema de numeración decimal sería

$$64 = 5x + 4,$$

de donde

$$x = 12.$$

Este número está expresado en el sistema de base 12, y "84"=8*12+4=100. Por lo tanto, si

$$8*8=\text{"54"}$$

"84" será igual a 100.
De esta misma manera se resuelve otro de los problemas de este tipo: ¿Cuál es el equivalente de 100, si 5*6=33?
Respuesta: 81 (sistema de base 9).
Volver

14. La ecuación piensa por nosotros
Si no cree que las ecuaciones son a veces más previsoras que nosotros mismos resuelva este problema:
El padre tiene 32 años; el hijo, 5. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre diez veces mayor que la del hijo?
Expresemos el tiempo buscado con x. Al cabo de x años el padre tendrá 32+x años; y el hijo, 5+x años. Y como el padre debe tener 10 veces más años que el hijo, se establece la ecuación

$$32+ x =10*(5 + x).$$

Al resolverla hallamos que x = -2.
"Al cabo de menos 2 años" significa "hace dos años". Al plantear la ecuación no pensábamos que en el futuro la edad del padre no sería nunca 10 veces superior a la del hijo; esa

correlación pudo tener lugar sólo en el pasado. La ecuación ha sido más reflexiva que nosotros, y nos ha recordado nuestro descuido.
Volver

15. Curiosidades y sorpresas
Hay ocasiones en las que al resolver las ecuaciones tropezamos con soluciones que pueden desconcertar a un matemático poco ducho. Veamos algunos ejemplos:

I. Hallar un número de dos cifras que tenga las siguientes propiedades:
La cifra de las decenas debe ser 4 unidades inferior a la cifra de las unidades. Si ese mismo número se escribe invirtiendo el lugar de sus cifras y se le sustrae el número buscado, se obtiene 27. Expresando el guarismo de las decenas con la x, y el de las unidades con la y, formaremos fácilmente el siguiente sistema de ecuaciones para este problema:

$$x = y - 4$$
$$(10y + x) - (10x + y)$$

Si el valor que tiene x en la primera ecuación se coloca en la segunda, resultará que

$$10y + y – 4(10(y-4) + y) = 27$$

al operar tendremos que

$$36 = 27.$$

No se ha hallado el valor de las incógnitas, pero se ha visto que 36 = 27... ¿qué quiere decir esto? Esto significa que no existe ningún número compuesto de dos cifras que responda a las condiciones del problema, y que las ecuaciones planteadas se contradicen mutuamente. En efecto, multipliquemos ambos miembros de la primera igualdad por 9 y tendremos: 9y-9x- = 36, y de la segunda ecuación (después de abrir los paréntesis y reducir los términos semejantes) resulta:

$$9y - 9x = 27.$$

Según la primera ecuación 9y-9x es igual a 36 y de acuerdo con la segunda equivale a 27. Esto es a todas luces imposible, por cuanto $36 \neq 27$. Una confusión análoga espera a quien resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x^2 * y^2 = 8,$$
$$x * y = 4.$$

Al dividir la primera ecuación por la segunda obtendremos:

$$x * y = 2$$

y si confrontamos la ecuación obtenida con la segunda del sistema veremos que

$$x*y = 4, x*y = 2,$$

es decir, que 4=2. No hay cifras que satisfagan las condiciones de este sistema.

(Sistemas de ecuaciones, semejantes a los que acabamos de examinar que no pueden ser resueltos, se llaman no combinados.)

II. Si cambiamos un tanto las condiciones del problema anterior recibiremos otra sorpresa. Supongamos que la cifra de las decenas es menor en 3 unidades que la cifra de las unidades. Las demás condiciones del problema permanecen invariables ¿Cuál será este número? Planteemos la ecuación. Si expresamos la cifra de las decenas con la x, la de las unidades será x+3. Traduzcamos el problema al idioma del álgebra:

$$10*(x+3)+x-[10x+(x+3)]=27.$$

Al reducir se obtiene 27 = 27.
Esta igualdad es incuestionable, pero nada nos dice de la raíz de x ¿Significa esto que no existe ningún valor que responda a las condiciones del problema?
Por el contrario. Esto se debe a que la igualdad dada es una identidad, es decir, que es cierta cualquiera que sea la magnitud de la incógnita x. En efecto, las condiciones del problema son válidas para todo número compuesto de dos cifras siempre que el guarismo de las unidades sea mayor en 3 unidades que el de las decenas:

$$14+27=41,\ 47+27=74,\ 25+27=52,\ 58+27=85,\ 36+27=63,\ 69+27=96.$$

III. Hallar un número de tres cifras que responda a las siguientes condiciones:
1. La cifra de las decenas sea 7;
2. La cifra de las centenas sea inferior en 4 unidades a la cifra de las unidades;
3. Si las cifras del mismo se colocan en orden inverso, el nuevo número será 396 unidades mayor que el buscado.
Formemos la ecuación sustituyendo la cifra de las unidades con la x:

$$100x + 70 + x - 4 - [100(x - 4) + 70 + x] = 396.$$

Después de reducida esta ecuación se llega a la igualdad 396 = 396.
Los lectores conocen ya cómo hay que interpretar los resultados de este tipo. Esto significa que un número de tres cifras, en el que la primera es menor que la tercera[2] en 4 unidades, aumenta en 396 si se le coloca en orden inverso.
Hasta ahora hemos examinado problemas que tienen un carácter más o menos artificioso y teórico; su misión consiste en contribuir a que se adquiera hábito en el planteamiento y la solución de ecuaciones. Ahora, pertrechados teóricamente, ofreceremos algunos ejemplos relacionados con la producción, la vida cotidiana, y la actividad militar y deportiva.
Volver

16. En la peluquería

Problema
¿Puede el álgebra tener alguna aplicación en la peluquería? Resulta que puede darse esa circunstancia. Me convencí de ello en cierta ocasión, cuando encontrándome en un establecimiento de esa clase, se dirigió a mí un oficial con una inesperada petición:
- ¿No podrá resolvernos usted un problema que no sabemos cómo hacerlo? - ¡No se imagina cuánta agua oxigenada hemos echado a perder por esa causa! - agregó otro.
- ¿De qué se trata? - pregunté.
- Tenemos dos soluciones de agua oxigenada: al 30% una, y al 3%]a otra. Debemos mezclarlas de tal forma que obtengamos una solución al 12%. Pero no podemos hallar las proporciones correspondientes...
Me dieron un papel y encontré la proporción que buscaban. Resultó ser un problema muy fácil.

[2] La cifra de las decenas no juega ningún papel

Solución
El problema puede ser resuelto también por vía aritmética, pero mediante el álgebra se obtiene el resultado con más sencillez y prontitud. Supongamos que para formar la mezcla al 12% hay que tomar x gramos de solución al 3% e y gramos al 30% . Siendo así, la primera porción contendrá 0,03 x gramos de agua oxigenada pura y, la segunda, 0,3 y; en total habrá

$$0{,}03x + 0{,}3y$$

Con esto resultará (x + y) gramos de solución, en la que el agua oxigenada pura será 0,12 (x + y).
Tenemos la ecuación

$$0{,}03x + 0{,}3y = 0{,}12\,(x + y)$$

De esta ecuación hallamos: x = 2y, es decir, que deberá tomarse doble cantidad de solución al 3% que la empleada del 30%.
Volver

17. El tranvía y el peatón
Problema
Cuando marchaba a lo largo de la línea del tranvía observé que cada 12 minutos me alcanzaba uno de esos vehículos, y cada 4 minutos otro de ellos pasaba en dirección contraria. Tanto los vehículos como yo nos desplazábamos con velocidad constante ¿Cada cuántos minutos salían los tranvías de las estaciones terminales?

Solución
Si los tranvías salían cada x minutos, eso quiere decir que por aquel lugar donde yo me encontraba con un tranvía tenía que pasar el siguiente después de x minutos. Si el vehículo iba en mi dirección, entonces en 12-x minutos debía recorrer el camino que yo hacía en 12 minutos. Eso significa que el camino que yo andaba en un minuto el tranvía lo hacía en (12-x)/12 minutos.
Si el tranvía iba en dirección contraria nos cruzaríamos 4 minutos después de haberme encontrado con el anterior, y en el tiempo restante (x-4) minutos debía recorrer el camino hecho por mí en esos 4 minutos. Por lo tanto, el camino que yo andaba en 1 minuto lo hacía el tranvía en (x – 4) / 4 minutos. Tenemos pues la ecuación

$$(12-x)/12 = (x-4)/4$$

De donde se deduce que x = 6. Cada 6 minutos iniciaban los tranvías su itinerario.
Puede proponerse la siguiente resolución (en esencia es una solución aritmética).
Expresemos la distancia que separaba a los tranvías entre sí con la letra a. Entonces la distancia que mediaba entre el tranvía que iba a mi encuentro y yo, disminuía en a/4 cada minuto (por cuanto la distancia entre el tranvía que acababa de pasar y el siguiente, igual a a, la recorríamos en 4 minutos). Si el tranvía iba en mi dirección, la distancia entre nosotros se reducía cada minuto en a/12. Supongamos que yo marchara hacia delante durante un minuto y, después, anduviera otro minuto hacia atrás (es decir, regresara al punto de partida). En este caso la distancia que mediaba entre el tranvía - que iba a mi encuentro - disminuía durante el primer minuto en a/4 , y en el segundo minuto, en a/12. En consecuencia, en el lapso de 2
minutos, la distancia entre nosotros se reducía en a/4 + a/12= a/3. Lo mismo habría ocurrido si yo hubiera permanecido inmóvil en el sitio, ya, que, en fin de cuentas, volvería

hacia atrás. De esta manera, si yo no hubiera avanzado, en un minuto (no en dos) el tranvía se hubiese acercado hacia mí $a/3 : 2 = a/6$, y toda la distancia a la habría recorrido en 6 minutos. Por ello, para un observador inmóvil, los tranvías pasaban con intervalos de 6 minutos.
Volver

18. El barco y la balsa
Problema
Un barco se desplaza 5 horas sin interrupción río abajo desde la ciudad A a la ciudad B. De vuelta avanza contra la corriente (con su marcha ordinaria y sin detenerse) durante 7 horas. ¿Cuántas horas necesitará una balsa para desplazarse de la ciudad A a la B, yendo a la misma velocidad de la corriente?

Solución
Expresemos con x el tiempo (en horas) que necesita el barco para recorrer la distancia que separa A de B en el agua estancada (es decir, con la velocidad del barco) y con y, el tiempo que se desliza la balsa. Siendo así, en una hora el barco recorre $1/x$ de la distancia AB, y la balsa (al igual que la corriente) $1/y$ de esta distancia. Por esta razón, el barco, marchando impulsado por la corriente, en una hora recorre $1/x + 1/y$ de la distancia AB, y hacia arriba (contra la corriente) $1/x - 1/y$. Por las condiciones del problema se deduce que hacia abajo el barco hace en una hora $1/5$ de la distancia, y, hacia arriba, $1/7$. De aquí el sistema:

$$1/x + 1/y = 1/5$$
$$1/x - 1/y = 1/7$$

Observamos que para solucionar este sistema no debemos hacer desaparecer los denominadores: es suficiente con restar la segunda ecuación de la primera. Operando resultará:

$$2/y = 2/35$$

de donde $y = 35$. Las balsas se deslizarán desde A hasta B en 35 horas.
Volver

19. Dos botes de café
Problema
Dos botes llenos de café tienen la misma forma y están hechos de la misma hojalata. El primero pesa 2 kg y tiene 12 cm de altura; el segundo pesa 1 kg y mide 9,5 cm de altura. ¿Cuál es el peso neto del café en los dos botes?

Solución
Expresemos el peso del contenido del bote grande con x, y el del pequeño con y. El peso de los botes lo expresaremos con z y t respectivamente. De donde se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$x + z = 2$$
$$y + t = 1$$

Teniendo en cuenta que los pesos del contenido de ambos botes repletos se relacionan entre sí como sus propios volúmenes es decir, como el cubo de sus alturas[3], resulta que

$$x / y = 12^3 / 9.5^3 \approx 2.02 \text{ ó } x = 2.02 y$$

El peso de los botes vacíos se relaciona entre sí como se relacionan sus superficies completas, es decir, como los cuadrados de sus alturas. Por ello

$$z / t = 12^2 / 9.5^2 \approx 1.6 \text{ ó } z = 1.60t$$

Sustituyendo los valores de x y de z en la primera ecuación resultará el sistema

$$2{,}02\,y + 1{,}60\,t = 2$$
$$y + t = 1$$

Al resolverlo tendremos:

$$y = 20/21 = 0.95,\ t = 0.05$$

Por lo tanto, x = 1,92, z = 0,08.
El peso del café sin el envase será: el del bote grande, 1,92 kg; el del pequeño, 0,94 kg.
Volver

20. Velada

Problema
A una velada asistieron 20 personas. María bailó con siete muchachos; Olga, con ocho; Vera, con nueve, y así hasta llegar a Nina, que bailó con todos ellos. ¿Cuántos muchachos había en la velada?

Solución
La solución del problema es muy sencilla si se elige con acierto la incógnita. Busquemos el número de las jóvenes, que expresaremos con la x:

1ª	María bailó con	6 + 1	muchachos
2ª	Olga bailó con	6 + 2	muchachos
3ª	Vera bailó con	6 + 3	muchachos
...	...	...	...
xª	Nina bailó con	6 + x	muchachos

Establezcamos la siguiente ecuación: $x + (6+x) = 20$, de donde $x = 7$, por lo tanto, el número de muchachos era 20 - 7 = 13.
Volver

21. Exploración marina

Primer problema
El explorador (la nave de reconocimiento), que marchaba con el resto de la escuadra, recibió la tarea de explorar el mar en una zona de 70 millas en la dirección en que marchaba la

[3] Esta proporción puede ser aplicada sólo en el caso en que los lados de los botes no sean demasiado gruesos, por cuanto la superficie, la interna y la externa del bote no son semejantes, y la altura de su parte interna tiene cierta diferencia con la altura de la propia caja.

escuadra. La velocidad de ésta era de 35 millas por hora; la del barco explorador, de 70 millas por hora. ¿Cuánto tiempo tardará éste en incorporarse de nuevo a la escuadra?

Solución
Designemos el número de horas buscadas con la x. Durante este tiempo la escuadra recorrió 35x millas; y la nave de reconocimiento, 70x. Esta navegó 70 millas hacia adelante y una parte de esta ruta al regreso; la otra parte fue hecha por el resto de la escuadra. Todos juntos recorrieron 70x + 35x, lo que es iguala 2 * 70 millas. De aquí la ecuación

$$70x + 35x = 140,$$

de donde

$$x = 140/105 \text{ horas.}$$

La embarcación exploradora se incorporó a la escuadra, aproximadamente, al cabo de hora 20 minutos.

Segundo problema
El barco explorador recibió la orden de hacer el reconocimiento en la dirección que llevaba la escuadra. Tres horas después, la nave debía incorporarse a la escuadra. ¿Al cabo de cuánto tiempo, a partir del momento en que sé distancia de la escuadra, debe iniciar el barco explorador el regreso, si su velocidad es de 60 nudos, y la de la escuadra de 40 nudos?

Solución
Supongamos que la nave de reconocimiento debía volver al cabo de x horas; eso significa que se alejó de la escuadra x horas, y marchó de vuelta, a su encuentro, 3 - x horas. Mientras todos los barcos marchaban en una misma dirección, en x horas pudo la embarcación exploradora alejarse a una distancia igual a la diferencia entre las distancias recorridas por cada uno, es decir, en

$$60x - 40x = 20x.$$

Cuando regresó el explorador había cubierto, en dirección a la escuadra, una distancia de 60*(3 - x), en tanto que la escuadra había recorrido 40*(3 - x). Uno y otra recorrieron juntos 10x. Por lo tanto

$$60*(3-x)+40*(3-x) = 20x,$$

de donde

$$x = 2\ 1/2.$$

El explorador tuvo que modificar el rumbo, iniciando el regreso, al cabo de 2 horas y 30 minutos a partir del momento en que abandonó la escuadra.
Volver

22. En el velódromo
Problema
Dos ciclistas corren por el velódromo a velocidades constantes. Al llevar direcciones opuestas se encuentran cada 10 segundos; cuando van en la misma dirección, un ciclista alcanza al otro cada 170 segundos, ¿Cuál es la velocidad que desarrolla cada ciclista si la longitud de la pista es de 170 m?

Solución
Si la velocidad del primer ciclista es x, en 10 segundos habrá recorrido 10x metros. El segundo (yendo al encuentro) recorre el resto de la vuelta en el intervalo que media entre dos cruces, es decir, 170 - 10x metros. Si la velocidad del segundo es y, esto constituye 10y metros; por lo tanto

$$170 - 10x = 10y.$$

Si los ciclistas marchan uno tras otro, en 170 segundos el primero recorre 170x metros, y el segundo, 170y metros. Si el primero marcha más de prisa que el segundo, de un encuentro al otro corre una vuelta más que el segundo, es decir,

$$170x - 170y = 170.$$

Al simplificar éstas ecuaciones, tenemos:

$$x + y = 17, x - y = 1$$

de donde

$$x = 9, y = 8 \text{ (metros por segundo).}$$

Volver

23. Carrera de motocicletas
Problemas
En una carrera de motocicletas, tres máquinas salieron simultáneamente. La segunda hace 15 km por hora menos que la primera, y 3 km más que la tercera y llega a la meta 12 minutos después que la primera y 3 minutos antes que la tercera. Durante el recorrido no se registraron paradas.
Hay que determinar:

a. La distancia de la carrera,
b. La velocidad de cada motocicleta y
c. El tiempo empleado por cada máquina.

Solución
Aunque las incógnitas llegan a siete, se emplean sólo dos para resolver el problema. Formemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Expresando la velocidad de la segunda moto con la x, la velocidad de la primera será x + 15, y la de la tercera x - 3. La distancia se expresa con la y. En este caso la duración de la carrera fue:

para la primera motocicleta	$y / (x + 15)$
para la segunda motocicleta	y / x
para la tercera motocicleta	$y / (x - 3)$

La segunda máquina hizo el recorrido en 12 minutos (1/5 de hora) más que la primera. Por ello

$$y/x - y/(x + 15) = 1/5$$

La tercera empleó en la carrera 3 minutos (1/20 de hora) más que la segunda. Por consiguiente,

$$y/(x-3) - y/x = 1/20$$

Multiplicando por 4 esta ecuación y restándola de la anterior, se obtiene:

$$y/x - y/(x+15) - 4[y/(x-3) - y/x] = 0$$

Dividimos todos los términos por y ($y \neq 0$) y quitamos los denominadores, con lo que se obtiene:

$$(x-15)*(x-3)-x*(x-3)-4x*(x+15)+4*(x+15)*(x-3) = 0$$

y al abrir paréntesis y reducir los términos semejantes, resultará:

$$3x - 225 = 0$$

de donde $x = 75$. Conociendo la x se obtiene el valor de la y en la primera ecuación.

$$y/75 - y/90 = 1/5$$

de donde $y=90$.
De aquí que la velocidad de las motocicletas sea: 90, 75 y 72 km por hora. La distancia será de 90 km.
Dividiendo la distancia por la velocidad de cada motocicleta se obtiene el tiempo invertido por cada máquina:

la primera 1 hora
la segunda 1 hora y 12 minutos
la tercera 1 hora y 15 minutos

De esta forma se ha encontrado el valor de las siete incógnitas.
Volver

24. Velocidad media
Problema
Un automóvil cubrió la distancia entre dos ciudades a 60 km por hora e hizo el viaje de regreso a 40 km por hora. ¿Cuál fue la velocidad media de su recorrido?

Solución
La aparente sencillez del problema confunde a muchos. Sin pensar detenidamente en él, hallan la media aritmética de 60 y 40, es decir, la semisuma

$$(60 + 40) / 2 = 50$$

Esta "simple" solución sería cierta si la ida y la vuelta hubieran durado el mismo tiempo. Pero es evidente que el recorrido de vuelta (a menos velocidad) requiere más tiempo que la ida. Si tenemos esto en cuenta, veremos que la respuesta de 50 km es errónea.
Y así es, en efecto. La ecuación nos da otra solución. No resulta difícil establecer la ecuación si introducimos una incógnita auxiliar: la magnitud l, distancia entre las dos ciudades. Expresemos con x la velocidad media buscada y formemos la ecuación

$$2*l/x = l/60 + l/40$$

Comoquiera que $l \neq 0$, podemos dividir la ecuación por l, obteniendo,

$$2/x = 1/60 + 1/40$$

de donde

$$x = 2 / (1/60 + 1/40) = 48$$

De esta forma vemos que la respuesta acertada no es 50, sino 48 km por hora. Si resolviéramos este mismo problema con letras (en la ida, el automóvil marchaba a una velocidad de a por hora, y de vuelta, a b por hora y obtendríamos la ecuación

$$2l/x = l/a + l/b$$

de donde al despejar la x resultará

$$2/(1/a + 1/b)$$

Esto se denomina media harmónica de las magnitudes a y b.
Por lo tanto, la velocidad media del recorrido se expresa, no con la media aritmética, sino con la media harmónica de las velocidades. Para a y b; positivas, la media harmónica será siempre menor que la media aritmética a+b/2, como se ha visto en el ejemplo numérico (48<50).
Volver

25. Máquinas de cálculo rápido

Al tratar de las ecuaciones, Álgebra Recreativa no puede desentenderse de la solución de ecuaciones en máquinas de calcular. Ya se ha dicho que las calculadoras pueden "jugar" al ajedrez (o a las damas). Además pueden realizar también otras funciones; por ejemplo, la traducción, la orquestación de melodías, etc. Basta con elaborar el "programa" correspondiente, con arreglo al cual debe actuar la máquina.
Claro que no vamos a examinar aquí "programas" para el ajedrez ,o para la traducción, que son difíciles en extremo. Examinaremos tan sólo dos "programas" sencillos. Mas en principio hay que decir algunas palabras sobre la construcción de la máquina de cálculo.
En el capítulo primero se ha tratado de dispositivos que permiten hacer miles y decenas de miles de operaciones por segundo. La parte de la máquina que sirve para la ejecución directa de operaciones se llama aritmómetro. Además, la máquina tiene un dispositivo de dirección (que regula el trabajo de toda la máquina) y el dispositivo de memoria. La "memoria", es un depósito de números y signos convencionales. Por último, la máquina está equipada con dispositivos de entrada y de salida destinados a introducir nuevos datos numéricos y ofrecer los resultados definitivos. La máquina registra estos resultados (ahora ya en el sistema decimal) en tarjetas especiales.
Es notorio que el sonido puede ser registrado en discos o en cinta, y después reproducido. Pero la grabación del sonido en un disco puede hacerse tan sólo una vez: para realizar una nueva grabación se precisa otro disco. La impresión de sonidos en magnetófono tiene lugar de forma un tanto distinta, mediante el imantado de una cinta especial. El sonido registrado puede reproducirse las veces que sean precisas y, si la impresión resulta ya innecesaria, puede "desimantarse" y efectuar en ella una nueva grabación. Una misma cinta puede grabarse varias veces, con la particularidad de que cada nueva grabación "borra" la anterior.

El funcionamiento de la "memoria" se basa en un principio análogo. Los números y signos convencionales se registran eléctrica, magnética o mecánicamente en un tambor, una cinta u otro dispositivo. El número grabado puede ser "leído" en el momento oportuno; si no se necesita más puede ser borrado, grabándose otro en su lugar. La "extracción" y la "lectura" del número o el signo convencional dura sólo algunas millonésimas de segundo. La "memoria" puede constar de algunos miles de celdas y, cada celda, de varias decenas de elementos magnéticos, por ejemplo. Convengamos en que para registrar los números por medio del sistema de base dos, cada elemento imantado expresa el 1, y los no imantados, el 0. Supongamos, por ejemplo, que cada celda retentiva contiene 25 elementos (o como dicen 25 órdenes del sistema de base dos) y, además, el primer elemento de la celda sirve para expresar el signo del número (+ ó -), los siguientes 14 elementos sirven para imprimir la parte entera del número y, los últimos 10, para registrar la parte decimal.

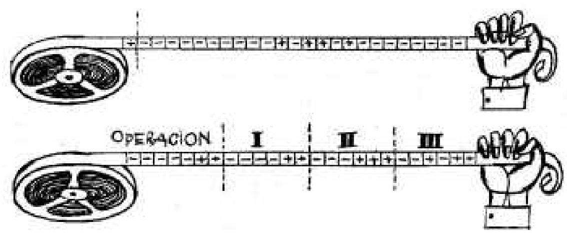

Figura 9

En la figura 9 se presentan esquemáticamente dos celdas de memoria, con 25 elementos en cada una, los imantados se expresan con el signo +; los desimantados, con el -. Examinemos la celda superior (la coma indica el lugar donde empieza la parte decimal, y la línea punteada separa el primer elemento - que sirve para fijar el signo - de los demás). En esa celda hay escrito (en el sistema de base dos) el número +1011,01, equivalente en el sistema decimal, al que estamos acostumbrados, al 11,25.
Además de los números, en las celdas retentivas se conservan las órdenes que componen el "programa". Veamos en qué consiste el sistema de órdenes a tres direcciones. En este caso, al escribir la orden, la celda retentiva se divide en 4 partes (las líneas de puntos en la celda inferior, figura 9). La primera parte sirve para indicar el signo de operación, que va cifrado. Por ejemplo:

Suma = operación I,
sustracción = operación II,
multiplicación = operación III, etc.
Las órdenes se descifran así: la primera parte de la celda es el número de la operación; la segunda y la tercera, los números de las celdas (direcciones), de las cuales hay que extraer las cifras para las operaciones; la parte cuarta es el número de la celda (dirección) adonde debe enviarse el resultado obtenido. Por ejemplo, en la figura 9 (fila inferior) hay escritos por el sistema binario los números 11, 11, 111,1011, en el sistema decimal, 3, 3, 7, 11, lo que significa la siguiente orden: la operación III (multiplicación) debe efectuarse con los números de las celdas tercera y séptima y almacenar el resultado (es decir, registrarlo) en la celda undécima.
En lo sucesivo inscribiremos números y órdenes, no con signos convencionales, como en la figura 9, sino directamente en el sistema decimal. Por ejemplo; la orden expuesta en la serie inferior de la figura 9, se escribe así:

multiplicación 3 7 11

Examinemos ahora dos sencillos ejemplos de programa.

Programa 1°
1. Suma 4 5 4
2. Multiplicación 4 4®
3. OD[4] 1
4. 0
5. 1

Veamos cómo funciona una máquina en cuyas cinco primeras celdas están almacenados los siguientes datos:

1ª orden: sumar los números de las celdas 4 y 5 y enviar el resultado a la celda 4 (en sustitución de lo que figuraba anteriormente). Por consiguiente, la máquina escribe el número 0+1=1 en la celda 4. Después de cumplida la la orden, en las celdas 4 y 5 se encontrarán los siguientes números:
4. 1
5. 1

2ª orden: multiplicar el número de la celda 4 por sí mismo (esto es, elevarlo al cuadrado) y registrar en la tarjeta el resultado, es decir, 1^2 (la flecha significa la salida de un resultado obtenido).

3ª orden: operación de dirección a la celda 1. En otras palabras la orden OD significa la repetición de todas las órdenes, empezando desde la primera. De forma que se ejecuta la primera orden.

lª orden: sumar los números de las celdas 4 y 5, y fijar la suma de nuevo en la celda 4. En consecuencia, en la celda 4 estará el número 1 + 1 = 2:

4. 2
5. 1

2ª orden: elevar al cuadrado el número de la celda 4 y el resultado, 2^2, registrarlo en la tarjeta (la flecha indica la salida del resultado).

3ª orden: operación de dirección a la celda 1 (es decir, volver de nuevo a la primera orden).

lª orden: el número 2 + 1 = 3 enviarlo a la celda 4:
4. 3
5. 1

2ª orden: registrar en la tarjeta el valor de 3^2.
3ª orden: operación de dirección a la celda 1, etc.

Hemos visto cómo la máquina calcula sucesivamente los cuadrados de números enteros y los registra en la tarjeta. Obsérvese que no es preciso elegir cada vez el nuevo número: la máquina misma escoge uno tras otro los números enteros y los eleva al cuadrado. Actuando de acuerdo con este programa la máquina obtiene el cuadrado de todos los números enteros desde 1 hasta el 10 000, en algunos segundos (o en partes de segundo). Debe hacerse notar que, en realidad, el programa para el cálculo de los cuadrados de números enteros debe ser algo más complejo que el mencionado más arriba. Esto se refiere, en particular, a

---
[4] OD operación de dirección

la 2ª orden. Para registrar el resultado en tarjeta se requiere mucho más tiempo que el que precisa la máquina para ejecutar una operación. Por eso, los resultados se almacenan primero en las celdas libres de la "memoria", y sólo después ("sin precipitarse") se registran en las tarjetas. De esta suerte, el primer resultado definitivo se almacena en la celda la de la "memoria" que se encuentra libre; el segundo en la celda 2ª; el tercero, en la 3ª, etc. En el programa simplificado expuesto anteriormente, todo ello había sido omitido.
Por añadidura, la máquina no puede dedicarse durante largo tiempo al cálculo de cuadrados pues no bastan las celdas de la "memoria", y es imposible "adivinar" cuándo ha obtenido la máquina los cuadrados que necesitamos, a fin de desconectarla, (ya que la máquina ejecuta miles de operaciones por segundo). Por esa razón se prevén órdenes especiales para detener la máquina en el momento oportuno. Por ejemplo, el programa puede ser compuesto de tal manera que la máquina calcule los cuadrados de todos los números enteros, del 1 al 10 000, y después se pare automáticamente.
Hay también otra clase de órdenes más complicadas, de las cuales no nos ocuparemos.
He aquí qué aspecto tiene el programa para el cálculo de cuadrados del 1 al 10 000:

Programa I.a
1) suma 8 9 8
2) multiplicación 8 8 10
3) suma 2 6 2
4) OC[5] 8 7 1
5) stop
6) 0 0 1
7) 10 000
8) 0
9) 1
10) 0
11) 0
12) 0

Las dos primeras órdenes se diferencian poco de las que se han expuesto en el programa simplificado. Después de cumplir estas dos órdenes, en las celdas 8, 9 y 10 habrá los siguientes números:

8) 1
9) 1
10) 12

La tercera orden es muy interesante: hay que sumar el contenido de las celdas 2 y 6, registrar otra vez el resultado en la celda 2, después de lo cual, ofrecerá el siguiente aspecto:

2) multiplicación 8 8 11.

De aquí que, después de cumplida la 3a orden, cambia la segunda orden, mejor dicho, cambia una de las direcciones de la 2ª orden. A continuación aclararemos las razones a que obedece esto.
La cuarta es la operación de comparación (en sustitución de la tercera orden del programa examinado anteriormente). Esta se cumple así: si el número almacenado en la celda 8 es menor que el de la 7, la operación de dirección la transmite a la celda l; en caso contrario,

[5] OC = operación de comparación

se efectúa la orden siguiente, (la 5). En nuestro caso como 1 < 10 000, la operación de dirección se le encarga a la celda 1.
Por consiguiente, volvemos otra vez a la orden primera. Una vez cumplida ésta en la celda 8 se encontrará el número 2. La segunda orden, que se presentará como

2) multiplicación 8 8 11,

consiste en que 2^2 se envía a la celda 11. Ahora queda claro para qué fue cumplida anteriormente la 3ª orden: el nuevo 2^2 no puede ir a parar a la celda 10 que ya está ocupada, sino a la siguiente. Una vez cumplidas las órdenes lª y 2ª, tendremos los siguientes números:

8) 2
9) 1
10) 12
11) 22

Después de ejecutada la orden 3ª, la celda 2, aparecerá así:

2) multiplicación 8 8 12

es decir, la máquina "se preparó" para anotar el nuevo resultado en la celda 12. Y como en la celda 8 sigue habiendo un número menor que en la 9, la 4ª orden significa que se encarga a la celda 1 la operación de dirección.
Ahora, cumplidas ya las órdenes lª y 2ª, obtendremos:

8) 3
9) 1
10) 12
11) 2
12) 3

¿Hasta cuándo continuará la máquina calculando los cuadrados según el programa? Hasta que en la celda 8 aparezca el número 10 000, es decir, mientras no hayan sido obtenidos los cuadrados de los números comprendidos entre el 1 y el 10 000. Después, la 4ª orden ya no transmite la operación de dirección a la celda 1 (por cuanto en la celda 8 habrá un número no menor, sino igual al almacenado en la celda 7), es decir, después de la 4ª orden, la máquina cumple la 5ª orden: cesa de funcionar (se desconecta). Examinemos ahora un proceso más complicado de programación para resolver sistemas de ecuaciones. Veamos un programa simplificado. Si se desea puede imaginarse el aspecto completo del programa.
Supongamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$ax+by=c$$
$$dx+ey=f$$

Este sistema es fácil de resolver:

$$x = (ce-bf)/(ae-bd)$$
$$y = (af-cd)/(ae-bd)$$

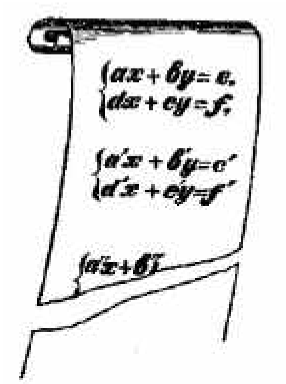

Figura 10

Este sistema (con los valores numéricos de los coeficientes a, b, c, d, e, f) podría resolverse en menos de un minuto. La máquina, en cambio, puede dar en un segundo la solución de miles de tales sistemas de ecuaciones. Examinemos el programa correspondiente.

Consideremos que han sido dados simultáneamente varios sistemas: con valores numéricos para los coeficientes a, b, c, d, e, f, a', b', ...

He aquí el correspondiente programa:

Programa II

1)	*28	30	20	14)	+3	19	3	26)	a
2)	*27	31	21	15)	+4	19	4	27)	b
3)	*26	30	22	16)	+5	19	5	28)	c
4)	*27	29	23	17)	+6	19	6	29)	d
5)	*26	31	24	18)	OD		1	30)	e
6)	*28	29	25	19)	6	6	0	31)	f
7)	-20	21	20	20)	0			32)	a’
8)	-22	23	21	21)	0			33)	b’
9)	-24	25	22	22)	0			34)	c’
10)	/20	21	→	23)	0			35)	d’
11)	/22	21	→	24)	0			36)	e’
12)	+1	19	1	25)	0			37)	f’
13)	+2	19	2					38)	a’’

1ª orden: plantear la multiplicación de los números almacenados en las celdas 28 y 30, y enviar el resultado a la celda 20. Dicho en otras palabras: en la celda 20 se almacenará el número ce.

De manera análoga serán realizadas las órdenes desde la 2ª hasta la 6ª. Después de ejecutarlas, desde la celda 20 hasta la 25 encontraremos los siguientes números:

20) ce
21) bf
22) ae
23) bd
24) af
25) cd

7ª orden: del número de la celda 20, restar el de la 21, y el resultado, (es decir, ce - bf), volver a almacenarlo en la celda 20.
De la misma forma se cumplen las órdenes 8ª y 9ª En consecuencia, en las celdas 20, 21 y 22 aparecerán los siguientes números:
20) ce-bf
21) ae-bd
22) af-cd

Ordenes l0ª y 11ª: se forman los siguientes quebrados:

(ce-bf)/(ae-bd)
(af-cd)/(ae-bd)

que se registran el la tarjeta (es decir, se presentan como resultados definitivos). Estos son los valores de las incógnitas obtenidas del primer sistema de ecuaciones.
Como vemos, el primer sistema ha sido resuelto. ¿Para qué hacen falta nuevas órdenes? La parte siguiente del programa (desde la celda 12 hasta la 19) está destinada a obligar a la máquina a "pasar" al segundo sistema de ecuaciones. Veamos su proceso.
Las órdenes desde la 10 hasta 17 consisten en agregar al contenido desde la celda 1 hasta la 6 lo almacenado en la celda 19, y los resultados vuelven otra vez a las celdas desde la 1 hasta la 6. De tal manera, después de cumplir la orden 17ª, las primeras seis celdas tendrán el siguiente contenido:

1) *34 36 20
2) *33 37 21
3) *32 36 22
4) *33 35 23
5) *32 37 24
6) *34 35 25

Orden 18ª: operación de dirección a la primera celda.
¿En qué se diferencian las nuevas anotaciones de las primeras seis celdas de las anteriores? En que las dos direcciones primeras tienen en estas celdas los números que van del 32 al 37 y no del 26 al 31, como antes. En otras palabras, la máquina realizará de nuevo las mismas operaciones, pero las cifras no serán tomadas, de las celdas 26 a la 31, sino de la 32 a la 37 donde están los coeficientes del segundo sistema de ecuaciones. Después de resolver éste, la máquina pasa al tercero, etc.
Lo dicho hasta aquí patentiza la importancia de "programar" con acierto. La máquina, "de por sí", no "sabe" hacer nada. Sólo puede cumplir el programa que se la encomiende. Hay programas para calcular raíces, logaritmos y senos, para resolver ecuaciones de grados superiores, etc. Se ha indicado ya que existen programas para jugar al ajedrez, para la traducción de un idioma a otro, etc. Es claro que cuanto más difícil sea el problema a resolver, tanto más complejo será el programa correspondiente.
Añadamos, como conclusión, que existe la programación de programas, es decir, aquélla con ayuda de la cual la misma máquina puede componer el programa para resolver el problema. Esto facilita en gran medida la programación, que con frecuencia es bastante laboriosa.
Volver