CAPITULO TERCERO
EN AYUDA DE LA ARITMETICA

Contenido:

La aritmética es a menudo incapaz de demostrar categóricamente, con sus propios medios, la veracidad de algunas de sus afirmaciones. En tales casos tiene que remitirse a los métodos sintetizadores del álgebra. A este género de tesis aritméticas, fundamentadas en el álgebra, pertenecen, por ejemplo, muchas de las reglas empleadas en las operaciones abreviadas, las curiosas propiedades de algunos números, los caracteres de la divisibilidad, etc. Este capítulo lo dedicamos al examen de cuestiones de este tipo.

1. Multiplicación abreviada

Las personas con grandes hábitos calculatorios facilitan con frecuencia las operaciones mediante transformaciones algebraicas poco complejas. Por ejemplo, la operación 988^2 se efectúa como sigue:

$$988 * 988 = (988 + 12) * (988 - 12) + 12^2 = 1000*976 + 144 = 976\ 144$$

Es fácil comprender que en este caso se recurre ala siguiente transformación algebraica:

$$a^2 = a^2 – b^2 + b^2$$

En la práctica podemos aplicar esta fórmula para los cálculos mentales. Por ejemplo:

27^2 =	$(27 + 3)*(27 - 3) + 3^2$ =	729
63^2 =	$66 * 60 + 3^2$ =	3969
18^2 =	$20 – 16 + 2^2$ =	324
37^2 =	$40 * 34 + 3^2$ =	1369
48^2 =	$50 - 46 + 2^2$ =	2304
54^2 =	$58 * 50 + 4^2$ =	2916

La multiplicación 986 * 997 se realiza así:

$$986 * 997=(986-3) * 1000 + 3 * 14 = 983\ 042.$$

¿En qué se basa este método? Supongamos a los factores en forma de:

$$(1000-14)*(1000 - 3)$$

y multipliquemos estos factores según las reglas del álgebra:

$$1000*1000 – 1000*14 – 1000*3 + 14*3.$$

A continuación siguen las transformaciones:

$$1000*(1000 - 14) –1000*3 + 14*3 =$$
$$= 1000*986 – 1000*3 + 14*3 =$$
$$= 1000 (986 - 3) + 14*3$$

La última línea es la que expresa el método de dicho cálculo. Ofrece interés el procedimiento para multiplicar dos números compuestos de tres cifras, cuando el guarismo de las decenas es el mismo, y la suma de las unidades, 10.
Por ejemplo, la multiplicación

$$783*787$$

se efectuará de esta manera:

$$78*79 = 6162; 3*7 = 21$$

y su resultado es

616.221.

Este método se deduce de las siguientes transformaciones:

$$(780-1-3)*(780 -1-7) =$$
$$= 780*780 - 1- 7803 + 780*7 + 3*7=$$
$$= 780*780 + 780*10 + 3*7 =$$
$$= 780*(780 + 10) + 3*7 = 780*790 + 21 =$$
$$= 616.200 + 21$$

Existe otro medio, todavía más sencillo, para realizar multiplicaciones análogas:

$$783*787 = (785 - 2)*(785 + 2) = 785^2 - 4 =$$
$$= 616.225 - 4=616.221$$

En este ejemplo hemos tenido que elevar al cuadrado el número 785. Para elevar rápidamente al cuadrado un número acabado en 5, es muy cómodo el siguiente método:

35^2; 3*4 = 12; resultado 1225
65^2; 6*7 = 42; resultado 4225
75^2; 7*8 = 56; resultado 5625

Se efectúa la operación multiplicando la cifra de las decenas por otra mayor que ésta en una unidad, y escribiendo 25 a continuación del resultado.
El método se basa en lo siguiente: si el número de decenas es a, todo el número puede ser expresado así:

$$10a + 5.$$

El cuadrado de este número, como cuadrado de un binomio será igual a

$$100a^2 + 100a + 25 = 100a*(a + 1) + 25$$

La expresión a*(a + 1) es el resultado de multiplicar la cifra de las decenas por ella misma aumentada en urea unidad. Multiplicar el número por 100 y añadirle 25 es lo mismo que colocar 25 a la derecha del producto. De este mismo método se desprende el sencillo medio de elevar al cuadrado los números mixtos en los que la parte fraccionaria es 1/2.
Por ejemplo:

$$(3\ 1/2)^2 = 3.5^2 = 12.25 = 12\ 1/4$$
$$(7\ 1/2)^2 = 7.5^2 = 56.25 = 56\ 1/4$$
$$(8\ 1/2)^2 = 8.5^2 = 72.25 = 72\ 1/4$$

Volver

2. Las cifras 1, 5 y 6

¿Quién no ha advertido que al multiplicar por sí misma una serie de números terminados en uno o cinco, el producto acaba en la misma cifra? Sin duda será menos conocido que lo expresado se refiere también al 6. Por esta razón, entre otras, la potencia de todo número terminado en seis, termina asimismo en seis.
Por ejemplo:

$$46^2 = 2116;\ 46^3 = 97.336.$$

Esta curiosa propiedad de las cifras 1, 5 y 6 puede ser fundamentada por vía algebraica. Examinémosla en el caso del seis.
Todo número terminado en seis se descompone de esta forma:
10a + 6; 10b + 6, etc;
donde a y b son números enteros. La multiplicación de dos enteros como éstos es igual a

$$100ab + 60b + 60a + 36 =$$
$$= 10(l0ab + 6b + 6a) + 30 + 6 =$$
$$= 10(10ab + 6b + 6a + 3) + 6$$

El resultado debe constar, pues, de algunas decenas y la cifra 6 en las unidades, la cual, ni que decir tiene, debe reaparecer al final.
Este mismo método de demostración puede ser empleado para el 1 y el 5. Lo expuesto permite afirmar que, por ejemplo,

386^{2567} termina en 6
815^{723} termina en 5
491^{1732} termina en 1, etc.

Volver

3. Los números 25 y 76

Hay números de dos cifras que también tienen la misma propiedad que las cifras 1,5 y 6: nos referimos a los números 25 y - lo más sorprendente al 76. El producto de dos números terminados en 76 acaba también en 76. Demostrémoslo. La expresión común para tales números es como sigue:

$100a + 76$, $100b + 76$, etc.

Multipliquemos dos números de este tipo entre sí y obtendremos:

$$10.000ab + 7600b + 7600a + 5776 =$$
$$= 10.000ab + 7600b + 7600a + 5700 + 76 =$$
$$= 100*(100ab + 76b + 76a + 57) + 76$$

El principio ha sido demostrado: el resultado terminará en 76.
De esto se desprende que toda potencia de un número acabado en 76, termina en el mismo número:

$$376^2 = 141.376,\ 576^3 = 191.102.976,\ \text{etc.}$$

Volver

4. "Números" infinitos

Existen también grupos de números con mayor cantidad de cifras que, al figurar al final de los mismos, se conservan también en su multiplicación. El número de tales grupos de cifras es infinitamente grande.
Conocemos ya dos grupos compuestos de dos cifras, que poseen propiedad análoga: el 25 y el 76. Para encontrar grupos semejantes con tres cifras hay que colocar delante del 25 o del 76 una cifra tal que nos dé un grupo de tres guarismos con la misma propiedad.
¿Qué cifra se debe colocar ante el 76? Expresémosla con k. En este caso, el número buscado de tres cifras será:

$$100k + 76$$

La expresión común para todo número que termine en este grupo de cifras deberá ser:

$$1000a + 100k + 76,\ 1000b + 100k + 76,\ \text{etc.}$$

Multipliquemos dos números de este tipo entre sí y tendremos:

$$1.000.000ab +- 100.000ak + 100.000bk + 76000a +$$
$$+ 76.000b + 10.000k^2 + 15.200k + 5.776$$

Todos los sumandos, menos los dos últimos, terminan, por lo menos, en tres ceros. Por esto, el resultado acaba en $100k + 76$ si la diferencia

$$15.200k + 5.776 - (100k + 76) = 15.100k + 5.700 =$$
$$= 15.000k + 5.000 + 100 (k + 7)$$

se divide por 1.000. Esto, evidentemente, ocurrirá cuando k sea igual a 3. Así pues, el grupo de cifras buscado es 376. A esto se debe que toda potencia de 376 termine en dicho número. Por ejemplo:

$$376^2 = 141.376.$$

Si nos interesa hallar un grupo de cuatro cifras que tenga la misma propiedad, debemos colocar delante de 376 una cifra más. Si expresamos esta cifra con l, se nos planteará el siguiente problema: ¿cuál debe ser la cifra L para que la multiplicación

$$(10.000a + 1000L + 376)*(10.000b + 1.000L + 376)$$

termine en 1.000L + 376? Si abrimos los paréntesis de esta multiplicación y prescindimos de todos los factores que terminan en cuatro ceros o más, nos quedará

$$752.000L + 141.376$$

La multiplicación termina con 1.000L + 376 si la diferencia

$$752.000L + 141.376 - (1.000L + 376) =$$
$$= 751.000L + 141.000 =$$
$$= (750.000L + 140\ 000) + 1.000*(L+1)$$

se divide por 10.000. Esto, sin duda, tendrá lugar solamente cuando L sea igual a 9.
El grupo de cuatro cifras buscado será 9376.
El grupo obtenido puede ser completado con una cifra más, para lo cual es preciso seguir idéntico razonamiento. Obtendremos 09.376. Si damos un paso más hallaremos el grupo de cifras 109.376 y, después, 7.109.376, etc. Una tal adición de cifras a la izquierda del número puede ser efectuada infinita cantidad de veces. En consecuencia obtendremos un "número" con infinidad de cifras:

...7 109 376.

Tales "cifras" pueden ser sumadas y multiplicadas de acuerdo con las reglas comunes: como se sabe, escríbense de derecha a izquierda, y en este mismo sentido se suman y multiplican los números "en columna"; por lo cual en la suma y en la multiplicación de dos de estos números se puede operar sucesivamente con todas las cifras que se quieran.
Y lo más interesante, por muy raro que parezca, es que ese número infinito satisface a la ecuación

$$x^2 = x$$

Y así es, en efecto; el cuadrado de este "número" (es decir, el resultado de multiplicarse por sí mismo) termina en 76 ya que cada uno de los factores termina en 76; por esa misma causa, el cuadrado del "número" escrito acaba en 376, en 9376, etc.
Es decir, operando sucesivamente con cada una de las cifras del "número" x^2, donde x = ... 7 109 376, obtendremos las mismas cifras que teníamos con el número x, por lo cual, $x^2 = x$.
Hemos examinado grupos de cifras que terminan en 76[1]. Si se aplica el mismo razonamiento para grupos de cifras terminados en 5 obtendremos los siguientes grupos de cifras:

5, 25, 625, 0625, 90625, 890 625, 2 890 625, etc.

Por ello podemos escribir otro "número" infinito:

2.890.625,

que también satisface la ecuación $x^2 = x$. Podríamos demostrar que este "número" infinito es "igual" a

[1] Observemos que el grupo de dos cifras 76 puede ser hallado con razonamientos análogos a los efectuados más arriba. Basta con resolver la cuestión de qué cifra debe ser colocada delante del 6 para obtener un grupo de dos cifras que tenga la propiedad señalada. Por eso, el "número"... 7 109 376 puede ser conseguido agregando sucesivamente cifras ante el 6.

$$(((5^2)^2)^2)^2)^{\cdots}$$

El interesante resultado obtenido en el idioma de los "números" infinitos se formula de esta manera: la ecuación $x^2 = x$ tiene (además de $x = 0$, $x = 1$), otras dos raíces "infinitas"

$$x = \ldots 7.109.376 \text{ y } x = \ldots 2.890.625;$$

sin ninguna otra solución (en el sistema de base diez)[2]
Volver

5. Compensación
Antiguo problema
En tiempos remotos ocurrió el siguiente hecho. Dos mercaderes vendieron una partida de toros, recibiendo por cada animal tantos rublos como toros había en la partida. Con el dinero recibido compraron un rebaño de ovejas, pagando 10 rublos por cada oveja, y un corderito. Al repartirse el rebaño en dos mitades, uno recibió una oveja más, y otro, el corderillo. El que recibió éste fue compensado por su socio con una suma complementaria correspondiente. Siendo dicho pago complementario una cantidad entera de rublos, ¿de cuántos rublos constará?

Solución
Este problema no se presta a la traducción directa al "idioma algebraico", pues no puede construirse la ecuación necesaria. Es preciso resolverlo mediante un procedimiento especial, el llamado razonamiento matemático libre. Más también aquí el álgebra presta a la aritmética una buena ayuda. El valor en rublos de todo el rebaño es un cuadrado exacto, por cuanto dicho rebaño ha sido adquirido con el dinero recibido por la venta de n toros, a n rublos por cabeza. Uno de los socios recibió una oveja más, por lo tanto, el número de ovejas es impar. También es impar, por lo mismo, el número de decenas en la cantidad n^2. ¿Cuál es la cifra de las unidades? Podemos demostrar que si en un cuadrado exacto, la cifra de las decenas es impar, la de las unidades debe ser sólo 6.
Efectivamente. El cuadrado de todo número compuesto de a decenas y b unidades, es decir, $(10a + b)^2$, será igual a

$$100a^2 + 20ab + b^2 = 10*(10a^2 + 2ab) + b^2$$

El número de decenas en esta cantidad es $10a^2 + 2ab$ más algunas decenas comprendidas en b^2. Pero $10a^2 + 2ab$ es divisible por dos, luego es un número par. Por eso, el número de decenas comprendidas en $(10a + b)^2$ resultará impar sólo cuando en el número b^2 haya un número impar de decenas. Recordemos lo que representa b^2. Este número es el cuadrado de la cifra de las unidades, es decir, una de las cifras siguientes:

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$$

Entre ellas, sólo 16 y 36, tienen decenas impares, y ambos terminan en 6. Esto quiere decir que el cuadrado exacto

$$100a^2 + 20ab + b^2$$

[2] Los "números" infinitos pueden ser examinados, no sólo en el sistema de base diez, sino también en otros sistemas de numeración. Estos "números" examinados en el sistema de numeración de base p se llaman números de base p.

puede tener un número impar de decenas sólo en el caso en que termine en 6. Ahora es ya fácil hallar la respuesta a la pregunta formulada en el problema.
Es evidente que el corderito costó 6 rublos. El socio a quien correspondió éste, recibió 4 rublos menos que el compañero. Para que el reparto sea equitativo, el poseedor del cordero debe ser compensado por su socio con 2 rublos. La compensación es igual a 2 rublos.
Volver

6. Divisibilidad por 11
El álgebra facilita en gran medida la búsqueda de indicios que permiten prever, sin recurrir a la división, si determinado número es divisible por uno u otro divisor. La divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 y 10 es ampliamente conocida. El caso del 11 es muy sencillo y práctico.
Supongamos que en un número de varias cifras, N, la cifra de las unidades es a, la de las decenas, b; la de las centenas, c; la de las unidades de millar d, etc., es decir

$$N = a + 10b + 100c + 1000d + \ldots = a + 10*(b + 10c + 100d + \ldots)$$

donde los puntos suspensivos representan la suma de las cifras siguientes. Restemos de N el número 11(b + l0c + l00d +...), múltiplo de 11. La diferencia es igual a

$$a - b - 10* (c + 10d + \ldots)$$

que dará el mismo residuo que N al dividirla por 11. Si a esta diferencia le agregamos 11*(b + 10c + 100d + ...), múltiplo de 11, obtendremos

$$a - b - 10*(c + 10 + \ldots)$$

que dividido por 11, da el mismo residuo que el número N. Al sustraer 11*(d + ...), múltiplo de 11, resultará

$$a - b + c - d + \ldots = (a + c + \ldots) - (b + d + \ldots)$$

que, dividido por 11 da el mismo resto que el número N. De aquí se desprende la siguiente regla de divisibilidad por 11: de la suma de las cifras que ocupan los lugares impares se resta la suma de las cifras que ocupan los lugares pares; si la diferencia es cero o múltiplo de 11 (negativo o positivo), el número que probamos será múltiplo de 11. En caso contrario no será divisible por 11. Probemos, por ejemplo, el número 87.635.064:

$$8 + 6 + 5 + 6 = 25,$$
$$7 + 3 + 0 + 4 = 14$$
$$25 - 14 = 0$$

En consecuencia, el número dado es divisible por 11.
Existe otro criterio de divisibilidad por 11, cómodo para números relativamente pequeños. Consiste en que el número que probamos se separa de derecha a izquierda en grupos de dos cifras y se suman estos grupos. Si la suma se divide por 11 sin residuo, el número probado será múltiplo de 11, en caso contrario, no lo será. Por ejemplo, necesitamos probar el número 528. Separamos el número en dos grupos (5 y 28) y los sumamos:

$$5 + 28 = 33$$

Como 33 se divide exactamente por 11, el número 528 es múltiplo de 11:

$$528/11 = 48$$

Demostremos este criterio de divisibilidad. Dividamos en grupos el número N, que tiene varias cifras. Obtendremos grupo de dos (o de una cifra[3] que designaremos de derecha a izquierda con a, b, c, etc., de forma que el número N puede ser expresado de la forma siguiente:

$$N = a + 100b + 10.000c + ... = a + 100*(b + 100c + ...)$$

Restemos de N el número 99*(b + 100c + ...), múltiplo de 11. El número obtenido

$$a + (b + 100c + ...) = a + b + 100*(c + ...)$$

dará, al dividirlo por 11, el mismo residuo que el número N. De este número descontemos el número 99*(c + ...), múltiplo de 11, etc.
Por todo ello vemos que el número N da el mismo resto al dividirlo por 11 que el número

$$a + b + c + ...$$

Volver

7. El número del automóvil

Problema

Cuando paseaban por la ciudad tres estudiantes de matemáticas, observaron que el conductor de un automóvil infringió el reglamento de tráfico. Ninguno de los estudiantes recordaba el número (de cuatro cifras) de la matrícula, pero como los tres eran matemáticos, cada uno de ellos advirtió alguna particularidad de dicho número. Uno de ellos advirtió que las dos primeras cifras eran iguales. El segundo se dio cuenta de que también coincidían las dos últimas cifras. Y, por último, el tercero aseguraba que todo el número de cuatro cifras era un cuadrado exacto. ¿Puede determinarse el número de la matrícula del automóvil valiéndose tan sólo de estos datos?

Solución

Expresemos la primera y la segunda cifra del número buscado con la a, y la tercera y la cuarta con la b. Entonces el número será igual a

$$1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11*(l00a + b)$$

Este número es divisible por 11 y, por eso, (siendo un cuadrado exacto) se divide también por 11^2. Con otras palabras, el número 100a + b se divide por 11. Al emplear cualquier de los criterios de divisibilidad expuestos, deduciremos que el número a + b es divisible por 11. Pero esto significa que

$$a + b = 11$$

por cuanto cada una de las cifras a, b es menor que diez.
La última cifra b que es un cuadrado exacto, puede tomar los siguientes valores:

0, 1, 4, 5, 6, 9

Por eso, para la cifra a, que es igual a 11 - b, se encuentran los siguientes valores posibles:

---

[3] Si el número N tuviera una cantidad impar de cifras, el último grupo (el extremo de la izquierda) tendría una sola cifra. Además, los grupos como 03 también deben ser considerados como de una sola cifra, cual si se tratara sólo del guarismo 3.

11, 10, 7, 6, 5, 2

Los dos primeros valores son inaceptables, quedando, pues, los siguientes:

b = 4	a = 7
b = 5	a = 6
b = 6	a = 5
b = 9	a = 2

Vemos, en consecuencia, que el número de la matrícula debe ser alguno de éstos:

7744, 6655, 5566, 2299

Pero como los tres últimos no son cuadrados - el número 6655 es divisible por 5, pero no por 25; el 5566 se divide por 2, pero no por 4, y 2299 (producto de 12*19) tampoco es cuadrado - no queda más que 7744, segunda potencia de 88, que nos ofrece la solución del problema.
Volver

8. Divisibilidad por 19
Problema
Ocupémonos del siguiente criterio de divisibilidad por 19.
Un número es múltiplo de 19 sólo en el caso en que sus decenas más el doble de sus unidades forme un múltiplo de 19.

Solución
Todo número N puede ser presentado como

$$N = 10x + y$$

donde x es el número de decenas (no la cifra que ocupa las decenas, sino la cantidad de decenas del número); y es la cifra de las unidades. Tenemos que demostrar que N es múltiplo de 19 tan sólo cuando

$$N' = x + 2y$$

es múltiplo de 19. Para esto multipliquemos N' por 10, y del producto restemos N de donde

$$10N' - N = 10*(x + 2y) - (10x + y) - 19y$$

Con esto se demuestra que si N' es múltiplo de 19, entonces
N = 10N' - 19y se dividirá exactamente por 19 y al contrario, si N se divide por 19, entonces

$$10N' = N + 19y$$

será múltiplo de 19, y en ese caso también N' será múltiplo de 19. Supongamos que se precisa saber si el número 47.045.881 se divide por 19. Apliquemos sucesivamente nuestro criterio de divisibilidad

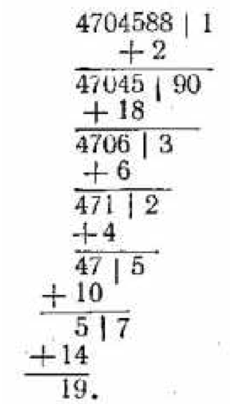

Figura 1.

Como 19 se divide exactamente por 19, los números 57, 475, 4.712, 47.063, 470.459, 4.704.590, 47.045.881 son múltiplos de 19. Por lo tanto, también se divide el número propuesto por 19.
Volver

9. Teorema de Sofía Germain
Problema
He aquí un problema propuesto por Sofía Germain, conocida matemática francesa:
Demuéstrese que los números del tipo a^4+4 son compuestos, (con la condición de que a no sea igual a 1).

Solución
La demostración se desprende de las siguientes transformaciones:

$$a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - 4a^2 =$$
$$= (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 2 - 2a)*(a^2 + 2 + 2a)$$

De aquí se desprende que, el número $a^4 + 4$ puede ser expresado en forma de dos factores que no sean iguales a él ni a la unidad[4], es decir, es un número compuesto.
Volver

10. Números compuestos
Los números primos, es decir, aquellos que son mayores que 1 y no se dividen exactamente más que por sí mismo y la unidad, son infinitos.
A partir de 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 ..., su serie es interminable. Intercalados entre los números compuestos, dividen la serie de números naturales en series más o menos prolongadas de números compuestos.
¿Cuál es la continuidad de estas series? ¿Puede encontrarse alguna que abarque, por ejemplo, hasta mil números compuestos sucesivos?
Puede demostrarse, aunque parezca inverosímil, que las series de números compuestos, situadas entre los primos, pueden ser de cualquier extensión. No hay límites para la prolongación de tales grupos, ya que pueden estar formados por miles, millones, trillones, etc., de números compuestos.
Para mayor facilidad no serviremos del signo convencional n!, que representará el producto de todos los números consecutivos, del 1 a n inclusive. Por ejemplo, 5!=1*2*3*4*5.
Demostremos como la serie

[4] Esto último, debido a que $a^2 + 2 - 2a = (a^2 - 2a + 1) = (a-1)^2 + 1 \neq 1$, si $a \neq 1$

$$[(n + l)! + 2],\ [(n + 1)! + 3],\ [(n + 1)! + 4],\ \ldots$$
$$\ldots\text{hasta } [(n + 1)! + n + 1] \text{ inclusive}$$

está formada por n números compuestos consecutivos.
Estos números van sucediéndose uno tras otro en serie natural, por cuanto cada uno es superior en una unidad al que le antecede. Queda tan solo por demostrar que todos ellos son compuestos.

El primero

$$[(n + l)! + 2] = 1*2*3*4*5*6*7*\ldots*[(n + l) + 2],$$

es par, ya que en sus dos sumandos contiene el factor 2. Y todo número par mayor que 2 es compuesto.

El segundo

$$[(n + 1)! + 3] = 1*2*3*4*5*6*7*\ldots*[(n + 1) + 3],$$

consta de dos sumandos, cada uno de los cuales es múltiplo de 3. Por lo tanto, este número también es compuesto.

El tercero

$$[(n + 1)! + 4] = 1*2*3*4*5*6*7*\ldots*[(n + 1) + 4]$$

es divisible por 4, ya que se compone de sumandos múltiplos de 4. De manera análoga establecemos que el número $(n + 1)! + 5$
es múltiplo de 5, etc. En otras palabras, cada uno de estos números contiene un factor, además del mismo número y de la unidad, por lo tanto será compuesto. Si se desea obtener 5 números compuestos consecutivos basta sustituir la n por el 5 en la serie anterior. De este modo resultará

722, 723, 724, 725, 726

Por ésta no es la única serie de cinco números compuestos consecutivos. Existen también, como por ejemplo:

62, 63, 64, 65, 66

O números todavía menores:

24, 25, 26, 27, 28

Intentemos resolver ahora un problema: Escribir diez números compuestos consecutivos.

Solución
En virtud de lo expuesto, el primero de los diez números buscados puede ser

$$1*2*3*4*\ldots*10*11 + 2 = 39.816.802$$

Por consiguiente, para la serie de números buscada, nos sirve

39.816.802, 39.816.803, 39.816.804, etc.

Sin embargo, existen series de diez números compuestos consecutivos considerablemente más pequeños. Incluso puede señalarse una serie no de diez, sino de trece números, comprendidos entre la primera y la segunda centena:

114, 115, 116, 117, etc. hasta el 126, inclusive.
Volver

11. Acerca de los números primos

El hecho de que existan infinitas series muy prolongadas de números compuestos consecutivos puede inducir a la creencia de que las series de números primos son limitadas. Por ello, no será de más demostrar que la cantidad de dichas series de números primos es infinita.
Esta demostración se debe al matemático Euclides, de la antigua Grecia, figura en sus célebres Principios. Pertenece a la categoría de demostraciones por reducción al absurdo. Supongamos que la serie de números primos es limitada y que representamos con la N el último número de ella. Desarrollemos la factorial de N:

$$1*2*3*4*5*6*7*...*N = N!$$

Al sumarle la unidad, resultará N!+1
Este número, al ser entero, debe contener por lo menos un factor primo, es decir, debe ser divisible, aunque no sea más que por un número primo. Pero todos los números primos, de acuerdo con el supuesto no superan el número N; mientras que el número N!+1 no es múltiplo de ninguno de los números menores o iguales a N, pues su división siempre da un resto equivalente a la unidad.
Por lo tanto, no puede aceptarse que la serie de números primos sea limitada: tal suposición conduce al absurdo. Por consiguiente, por muy considerable que sea el grupo de números consecutivos compuestos que nos encontremos en la serie de números naturales, puede tenerse la seguridad de que al remontarse por ella se encontrarán infinitos números primos.
Volver

12. El mayor número primo conocido

Una cosa es estar convencido de que existen números primos tan grandes como se quiera, y otra saber cuáles son esos números. Cuanto mayor sea el número natural, tanto más operaciones hay que realizar para conocer si es primo o no. He aquí el número primo más grande de cuantos se conocen:

$$2^{2281}-1$$

Este número tiene cerca de setecientas cifras del sistema decimal. Los cálculos que sirvieron para demostrar que este número es primo fueron realizados en las máquinas modernas de calcular. (Véanse los capítulos I y II).
Volver

13. Un cálculo muy laborioso

En la práctica del cálculo se encuentran operaciones matemáticas cuya realización sería extraordinariamente difícil si para ello no se aplicaran los métodos simplificadores del álgebra. Supongamos que sea necesario efectuar las siguientes operaciones:

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90.000.000.000}}$$

(Este cálculo es necesario para establecer si la técnica relacionada con las velocidades de los movimientos de los cuerpos - pequeñas en comparación con la velocidad de la difusión de las ondas electromagnéticas - puede valerse de las antiguas leyes que regulan la suma de velocidades, sin tener en cuenta aquellos cambios que la teoría de la relatividad ha introducido en la mecánica. De acuerdo con la mecánica antigua, el cuerpo sometido a dos movimientos, efectuados en una misma dirección, con velocidades de v_1 y v_2 kilómetros por segundo, tiene una velocidad de (v_l + v_2) kilómetros por segundo. La nueva teoría aplica la siguiente fórmula para la velocidad de los cuerpos

$$\frac{v_1 - v_2}{1+\frac{v_1 * v_2}{c^2}}$$

kilómetros por segundo, donde c es la velocidad de difusión de la luz en el vacío, aproximadamente igual a 300 000 kilómetros por segundo. Un cuerpo sometido a dos movimientos, efectuados en una misma dirección, y a una velocidad de kilómetro por segundo cada uno, según la antigua mecánica desarrollaba 2 kilómetros por segundo de velocidad y, según la nueva,

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90.000.000.000}}$$

¿Cuál es la diferencia entre esas dos fórmulas? ¿Es perceptible esa diferencia para los aparatos más sensibles de medición? A fin de aclarar esta importante cuestión es preciso realizar el cálculo indicado).

Empleemos dos métodos: primero, el aritmético, y después, mostremos cómo se puede efectuar mediante el álgebra. Basta con echar un vistazo a la larga serie de cifras que figuran más abajo para convencerse de la indiscutible superioridad del procedimiento algebraico.

En primer lugar transformemos el quebrado

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90.000.000.000}} = \frac{180.000.000.000}{90.000.000.001}$$

Efectuamos ahora la división del numerador por el denominador:

```
180 000 000 000       | 90 000 000 001
 90 000 000 001       | 1, 999 999 999 977 ...
 899 999 999 990
 810 000 000 009
  899 999 999 810
  810 000 000 009
   899 999 998 010
   810 000 000 009
    899 999 980 010
    810 000 000 009
     899 999 800 010
     810 000 000 009
      899 998 000 010
      810 000 000 009
       899 980 000 010
       810 000 000 009
        899 800 000 010
        810 000 000 009
         898 000 000 010
         810 000 000 009
          880 000 000 010
          810 000 000 009
           700 000 000 010
           630 000 000 007
            70 000 000 003
```

Esta operación resulta agotadora y laboriosa, siendo muy fácil confundirse e incurrir en error, en tanto que para la solución del problema tiene mucha importancia saber con exactitud dónde termina el período del nueve y comienza el de otra cifra.

Compárese ahora con qué brevedad cumple su tarea el álgebra, valiéndose del siguiente planteamiento: si a es un quebrado muy pequeño, entonces

$$1/(1 + a) \approx 1 - a$$

donde el signo ≈ significa "aproximadamente igual".

Es muy fácil convencerse de la veracidad de este aserto: comparemos el dividendo 1 con el producto del divisor por el cociente:

$$1 = (1 + a)*(1 - a)$$

es decir, $1 = 1 - a^2$.

Como a es una fracción muy pequeña (por ejemplo 0,001), el valor de a^2 será todavía inferior (0,000001), pudiendo ser despreciado.

Apliquemos lo expuesto a nuestro cálculo[5]:

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90.000.000.000}} = \frac{2}{1+\frac{1}{9*10^{10}}} \approx 2*(1-0.111\ldots*10^{-10} =$$
$$= 2 - 0.0000000000\ 222\ldots = 1.9999999999\ 777\ldots$$

Se llega, pues, al mismo resultado, pero el procedimiento es mucho más corto.

[5] Nos valemos a continuación de la siguiente aproximación:
$A/(1 + a) \approx A*(1 - a)$.

(Quizás tenga interés el lector en conocer la importancia que reviste el resultado del problema. Por él se deduce que en virtud de la escasa magnitud de las velocidades examinadas - en comparación con la de la luz -, no se observa en la práctica ninguna desviación de la antigua ley de la suma de velocidades: esa desviación se pone de manifiesto sólo en la cifra undécima del número hallado, en tanto que las mediciones de longitud más exactas no rebasan la novena cifra, y en la práctica, la técnica se limita a 4 o 6 cifras. En consecuencia, podemos afirmar sin ninguna reserva que la nueva mecánica, la de Einstein, no altera los cálculos técnicos relativos al movimiento "lento" de los cuerpos en el espacio (en comparación con la velocidad de difusión lumínica).
Pero existe una rama de la vida actual, donde esta conclusión incondicional hace falta tomarla con cuidado. Se trata de la cosmonáutica. Ahora hemos alcanzado ya las velocidades de 10 km por segundo (durante los vuelos de sputniks y cohetes). En este caso la divergencia de la mecánica clásica y de la de Einstein se pone de manifiesto ya en la cifra novena. Hay que tener en cuenta qué velocidades mayores no están tan lejos.
Volver

14. En ocasiones es preferible no recurrir al álgebra

Junto a los casos en los que el álgebra presta un gran servicio a la aritmética, hay otros en que su aplicación da lugar a complicaciones innecesarias. El verdadero conocimiento de las matemáticas consiste en saber emplear los recursos matemáticos de tal suerte que sirvan para encontrar el camino más corto y seguro, sin reparar en que el método de solución pertenezca a la aritmética, al álgebra, a la geometría, etc. Por eso será útil examinar un caso en que el empleo del álgebra tan solo embaraza la solución. Como ejemplo aleccionador puede servirnos el siguiente problema:

Problema

Encontrar el número más pequeño entre los que divididos

por	2	dan de residuo	1
por	3	dan de residuo	2
por	4	dan de residuo	3
por	5	dan de residuo	4
por	6	dan de residuo	5
por	7	dan de residuo	6
por	8	dan de residuo	7
por	9	dan de residuo	8

Solución

Propusiéronme este problema acompañándolo con las siguientes palabras: "¿Cómo lo resolvería usted? Aquí hay demasiadas ecuaciones y resulta muy lioso"
La cosa es sencilla. Para la solución del problema no hacen falta ni ecuaciones ni álgebra. Se resuelve con un sencillo razonamiento aritmético.
Agreguemos una unidad al número buscado. ¿Cuál será el residuo de este número si lo dividimos por dos? Será 1 + 1 = 2; es decir, el número se divide por 2 sin residuo. De esta misma manera se divide sin residuo por 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. El menor de estos números será 9*8*7*5 = 2.520, y el número buscado, 2.519, lo que es fácil comprobar.
Volver