CAPÍTULO QUINTO
LA SEXTA OPERACIÓN MATEMÁTICA

Contenido:

1. Sexta operación

La suma y la multiplicación tiene cada una su operación inversa, la sustracción y la división. La quinta operación aritmética, la potenciación o elevación a potencias, tiene dos operaciones inversas: la que tiene por objeto encontrar la base y la dedicada a hallar el exponente. Cuando la incógnita es la base, tenemos la sexta operación matemática, denominada radicación; si se trata del exponente, efectuamos la séptima operación, llamada cálculo logarítmico. Es fácil comprender por qué la potenciación tiene dos operaciones inversas, en tanto que la suma y la multiplicación no tienen más que una. Los sumandos (el primero y el segundo) pueden alterar su orden entre sí. Otro tanto sucede con la multiplicación. En cambio, los elementos de la potenciación, es decir, la base y el exponente, no gozan de esa propiedad por lo que no pueden invertirse sus funciones (por ejemplo, $3^5 \neq 5^3$). De ahí que para hallar cada uno de los términos de la suma o la multiplicación se empleen los mismos procedimientos en tanto que la base de la potencia se halla por un procedimiento distinto al utilizado para encontrar su exponente.

La sexta operación, la radicación, se expresa con el signo $\sqrt{}$. No todos conocen que este signo es una variante de la letra latina *r*, primera de la palabra latina *radix,* que significa "raíz". En otros tiempos (en el siglo XVI), el signo de raíz, no era la *r* minúscula, sino la mayúscula, la *R,* y junto a ella se escribía la primera letra de las palabras latinas *quedratus, la q,* o la primera de *cubus,* la *c*, señalando con ello que la raíz a extraer era cuadrada o cúbica[1].

Escribían, por ejemplo,

$$R.q.4352$$

en lugar de la moderna expresión

$$\sqrt{4352}$$

Si a esto añadimos que a la sazón no eran empleados en general los signos actuales de *más* y *menos,* y en su lugar se colocaban las letras *p*. (de plus) y *m.* (de minus), y que los paréntesis eran expresados con los signos $\lfloor \ \rfloor$, comprenderemos el extraño aspecto que las expresiones algebraicas ofrecerían al lector contemporáneo.

Véase una de ellas tomada, por ejemplo, de un libro del antiguo matemático Bombelly (año 1572):

$$R.c.\ \lfloor R.q.4352p.\ 16\ \rfloor\ \ m.R.c.\ \lfloor R.q.4352m.\ 16\ \rfloor$$

Lo que nosotros escribiríamos como sigue:

[1] En el manual de matemáticas escrito por Magnitski que era libro de texto en Rusia durante la primera mitad del siglo XVIII no existe en absoluto un signo especial para la operación de la extracción de raíces.

$$\sqrt[3]{\sqrt{4352}+16}-\sqrt[3]{\sqrt{4352}-16}$$

Para la operación $\sqrt[n]{a}$, además de esta expresión, empléase la de $a^{1/n}$, muy cómoda para generalizar gráficamente la idea de que toda raíz no es otra cosa que una potencia con un exponente fraccionario. Esta segunda variante fue propuesta por Stevin, notable matemático holandés del siglo XVI.

Volver

2. ¿Qué raíz es mayor?

Primer problema
¿Qué es mayor

$$\sqrt[5]{5} \quad ó \quad \sqrt{2}$$

Resuélvase éste y los problemas que le siguen con la condición de que no se hallen las raíces.

Solución
Elevando ambas expresiones a la décima potencia, obtendremos:

$$(\sqrt[5]{5})^{10}=5^2=25 \text{ y } (\sqrt{2})^{10}=2^5=32$$

y como 32 > 25, entonces

$$\sqrt[5]{5}<\sqrt{2}$$

Segundo problema
¿Qué raíz es mayor:

$$\sqrt[4]{4} \quad ó \quad \sqrt[7]{7}$$

Solución
Elevemos ambas expresiones a la potencia de grado 28 y tendremos:

$$(\sqrt[4]{4})^{28}=4^7=2^{14}=2^7 * 2^7=128^2$$

$$(\sqrt[7]{7})^{28}=7^4=2^{14}=7^2 * 7^2=49^2$$

Como 128 > 49, resultará que

$$\sqrt[4]{4}>\sqrt[7]{7}$$

Tercer problema
¿Qué raíz es mayor:

$$\sqrt{7}+\sqrt{10} \quad ó \quad \sqrt{3}+\sqrt{19}$$

Solución
Elévense ambas expresiones al cuadrado y resultará:

$$(\sqrt{7}+\sqrt{10})^2 = 17 + 2\sqrt{70}$$
$$(\sqrt{3}+\sqrt{19})^2 = 22 + 2\sqrt{57}$$

De ambos términos restemos 17 y tendremos

$$7 + 2\sqrt{70} \text{ y } 5 + 2\sqrt{57}$$

Si después elevarnos ambas expresiones al cuadrado, obtendremos 280 y $253 + \sqrt{57}$.
Restando 253 podremos comparar los resultados 27 y $20\sqrt{57}$ **20** .
Corno $\sqrt{57}$ es mayor que 2, entonces $20\sqrt{57} > 40$; por consiguiente

$$\sqrt{7}+\sqrt{10} \quad < \quad \sqrt{3}+\sqrt{19}$$

Volver

3. Resuélvase al primer golpe de vista

Problema
Obsérvese la ecuación $x^{x^3} = 3$ atentamente y dígase cuál es el valor de x.

Solución
Todo el que esté familiarizado con los símbolos algebraicos deducirá que

$$x = \sqrt[3]{3}$$

En efecto,

$$x^3 = (\sqrt[3]{3})$$

por consiguiente

$$x^{x^3} = x^3 = 3$$

que era lo que se buscaba.
Aquellos a quienes esta solución "al primer golpe de vista" les resulte difícil, pueden valerse, para despejar con más sencillez la incógnita, del siguiente razonamiento:
Admitimos que

$$x^3 = y$$

Entonces

$$x = \sqrt[3]{y}$$

por lo que la ecuación presentará esta forma

$$(\sqrt[3]{y})^y = 3$$

elevando la expresión al cubo

$$y^y = 3^3$$

Es pues evidente que y = 3, y, por consiguiente,

$$x = \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{3}$$

Volver

4. Comedias algebraicas

La sexta operación aritmética permite representar auténticas comedias y farsas algebraicas con los siguientes argumentos: 2 : 2 = 5; 2 = 3, etc. La gracia de tales representaciones algebraicas reside en un error, harto elemental, pero que, por hallarse muy oculto, tarda en ser descubierto.

Mostremos dos piezas de este repertorio cómico del álgebra.

Primer problema

$$2 = 3$$

En primer lugar aparece en escena una igualdad indiscutible:

$$4 - 10 = 9 - 15$$

En el siguiente "cuadro" se suma a ambos miembros de esta igualdad una misma cantidad, 6 ¼

$$4 - 10 + 6 \tfrac{1}{4} = 9 - 15 + 6 \tfrac{1}{4}$$

El ulterior desarrollo de la comedia se reduce a transformaciones:

$$2^2 - 2 * 2 * (5 / 2) + (5 / 2)^2 = 3^2 - 2 * 3 * (5 / 2) + (5 / 2)^2$$

$$(2 - 5/2)^2 = (3 - 5/2)^2$$

Extraída la raíz cuadrada de ambos miembros de la igualdad, resulta:

$$2 - 5/2 = 3 - 5/2$$

Sumando 5/2 a uno y otro miembro, llegamos a la igualdad absurda:

$$2 = 3$$

¿En qué consiste el error?

Solución

El error consiste en que de la expresión

$$(2 - 5/2)^2 = (3 - 5/2)^2$$

se dedujo que

$$2 - 5/2 = 3 - 5/2$$

Aunque los cuadrados sean iguales, no por eso son idénticas las primeras potencias, pues

$$(-5)^2 = 5^2$$

pero -5 no es igual a 5. Los cuadrados pueden ser iguales cuando las primeras potencias tienen distinto signo. En nuestro ejemplo se ofrece precisamente este caso:

$$(-1/2)^2 = (1/2)^2$$

pero ½ no es igual a –½

Segundo problema

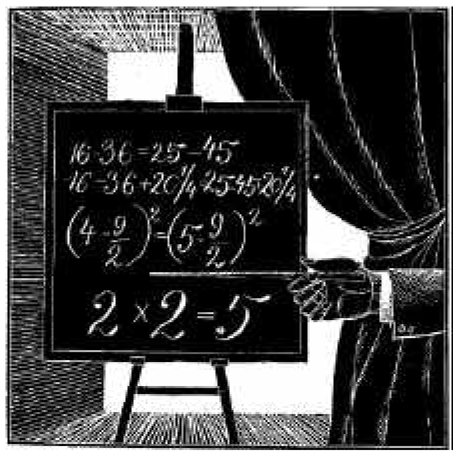

Figura 14. Una farsa matemática

Nueva farsa algebraica

$$2 * 2 = 5$$

La acción se desarrolla en forma semejante al caso anterior y se basa en el mismo truco. En escena aparece una igualdad que no despierta ninguna desconfianza

$$16 - 36 = 25 - 45.$$

Se suma a cada miembro una misma cantidad:

$$16 – 36 + 20 \tfrac{1}{4} = 25 – 45 + 20 \tfrac{1}{4}$$

A continuación se hacen las transformaciones siguientes:

$$4^2 – 2 * 4 * 9/2 + (9/2)^2 = 5^2 – 2 * 5 * 9/2 + (9/2)^2$$

Después, mediante el absurdo razonamiento anterior se llega a

$$4 – 9/2 = 5 – 9/2$$

$$4 = 5$$

$$2 * 2 = 5$$

Estos divertidos ejemplos deben prevenir a los matemáticos con poca experiencia contra toda actitud descuidada hacia las ecuaciones que tengan su incógnita en el radical.
Volver