CAPITULO OCTAVO
PROGRESIONES

Contenido:

1. La progresión más antigua

Problema

El problema de progresiones más antiguo no es el de la recompensa al inventor del ajedrez, que tiene ya más de dos mil años, sino otro mucho más viejo, repartición del pan, registrado en el célebre papiro egipcio de Rind. Este papiro, hallado por Rind a fines del siglo pasado, fue escrito unos 2000 años antes de nuestra era y constituye una copia de otra obra matemática aún más remota que data seguramente del tercer milenio antes de nuestra era. Entre los problemas aritméticos, algebraicos y geométricos que figuran en dicho documento aparece el que transmitimos en traducción libre.

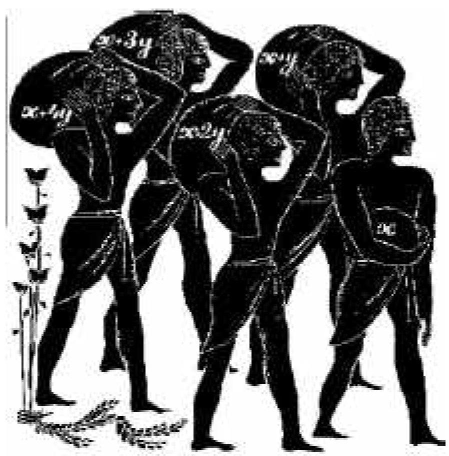

Figura 33.

Entre cinco personas se repartieron cien medidas de trigo, de tal suerte que la segunda recibió más que la primera tanto como le correspondió a la tercera más que a la segunda, a la cuarta más que a la tercera y a la quinta más que a la cuarta. Además, las dos primeras obtuvieron siete veces menos que las tres restantes. ¿Cuánto correspondió a cada una?

Solución

Es evidente que las cantidades de trigo distribuidas entre los cinco participantes en el reparto constituyen una progresión aritmética creciente. Supongamos que el primer miembro sea *x*, y la diferencia, *y*.

En ese caso tendremos:

Parte de la 1ª	x
2ª	$x + y$
3ª	$x + 2y$
4ª	$x + 3y$
5ª	$x + 4y$

De acuerdo con las premisas del problema establecemos estas dos ecuaciones:

$$x + (x + y) + (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y) = 100,$$
$$7[x + (x + y)] = (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y).$$

Después de su simplificación, la primera ecuación será

$$x + 2y = 20,$$

y la segunda:

$$11x = 2y.$$

Al resolver este sistema resultará

$$x = 1\ 2/3,\ y = 9\ 1/6$$

Por consiguiente, el trigo debe ser repartido en las siguientes proporciones:

1 2/3, 10 5/6, 29 1/6, 38 1/3

Volver

2. Álgebra en papel cuadriculado

A pesar de que este problema de progresiones tiene ya 50 siglos de antigüedad, en la práctica escolar, la progresión apareció hace relativamente poco lempo. Aunque en el manual de Magnitski, publicado hace doscientos años y empleado en Rusia durante medio siglo como texto en las escuelas, se trata de progresiones, no se dan fórmulas generales que liguen las magnitudes que figuran en las mismas. Por esa razón, el propio autor sale airoso de esos problemas sólo a costa de grandes esfuerzos. Y, sin embargo, la fórmula de la suma de los miembros de la progresión aritmética puede deducirse por un medio sencillo y gráfico, empleando para ello el papel cuadriculado. En éste, cualquier progresión aritmética puede expresarse con una figura escalonada. Por ejemplo, la figura ABDC, de la figura 34 representa la progresión: 2; 5; 8; 11; 14.

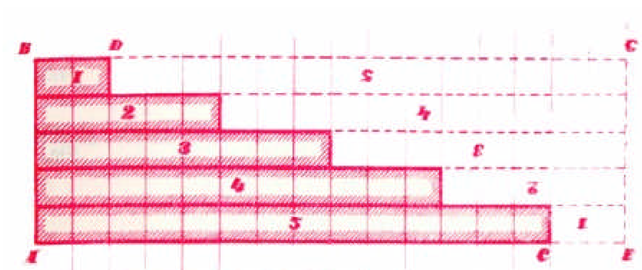

Figura 34.

Para determinar la suma de los miembros completamos el diseño hasta formar el rectángulo *ABGE* y obtendremos dos figuras iguales: *ABDC y DGEC.* La superficie de cada una representa la suma de los miembros de nuestra progresión. De ahí que la doble suma de los miembros sea igual a la superficie del rectángulo *ABGE,* es decir:

$$(AC + CE) \times AB.$$

Pero AC + CE expresa la suma de los miembros 1° y 5° de la progresión; AB representa el número de miembros de la progresión, por eso, el doble de la suma.

2S = (suma del primero y el último término) × (número de términos) o

S = (primer término + último término) × (número de términos) / 2

Volver

3. El riego de la huerta

Problema

En una huerta hay 30 caballones; cada uno de ellos tiene 16 m de largo y 2,5 m de ancho. Durante el riego, el hortelano lleva los cubos de agua desde el pozo situado a 14 metros del extremo de la huerta *(figura 35)* y da la vuelta al caballón por el surco. El agua que carga cada vez le sirve para regar un solo caballón.

Figura 35.

¿Cuál es la longitud del camino que recorre el hortelano para regar toda la huerta? El camino comienza y termina junto al pozo.

Para regar el primer caballón, el hortelano ha de recorrer un camino igual a

$$14 + 16 + 2{,}5 + 16 + 2{,}5 + 14 = 65 \text{ m.}$$

Para regar el segundo recorre

$$14 + 2{,}5 + 16 + 2{,}5 + 16 + 2{,}5 + 2{,}5 + 14 = 65 + 5 = 70 \text{ m.}$$

Cada nuevo caballón exige andar 5 metros más que para ir al anterior. Por ello tendremos la siguiente progresión:

$$65;\ 70;\ 75;\ldots\ ;\ 65 + 5 \times 29.$$

La suma de sus miembros será

$$(65 + 65 + 29 \times 5) \times 30 / 2 = 4.125 \text{ m}$$

Para regar toda la huerta, el hortelano necesita recorrer 4,125 km
Volver

4. La comida para las gallinas
Problema
Para 31 gallinas se ha preparado una cantidad de reservas de comida a base de un decalitro semanal para cada una. Esto se hacía en el supuesto de que el número de gallinas permaneciera invariable. Pero, debido a que cada semana disminuía en una el número de aves, la comida preparada duró doble tiempo del proyectado.
¿Qué cantidad de comida prepararon como reserva y para cuánto tiempo fue calculada?

Solución
Supongamos que la reserva fue de x decalitros de comida para y semanas. Como el alimento se calculó para 31 gallinas a razón de 1 decalitro por cabeza a la semana, resulta que

$$x = 31 \times y$$

En la primera semana fueron consumidos el 31 Dl; en la segunda, 30; en la tercera, 29, y así sucesivamente hasta la última semana del plazo doble, cuando se consumió

$$(31 - 2y + 1) \text{ Dl}$$

La reserva, por consiguiente, sería de

$$x = 31y = 31 - 30 + 29 + \ldots + (31 - 2y + 1).$$

La suma de 2y miembros de la progresión, el primero de la cual es 31, y el último 31 - 2y +1, será igual a

$$31y = \frac{(31 + 31 - 2y + 1) \times 2y}{2} = (63 - 2y)y$$

Y como y no puede ser igual a cero, entonces tenemos derecho a dividir por y ambos miembros de la igualdad, con lo que tendremos

$$31 = (63 - 2y)$$
$$y = 16$$

de donde

$$x = 31;\ y = 496.$$

Fueron preparados 496 Dl de comida para 16 semanas.
Volver

5. Brigada de cavadores

Problema

Un grupo de alumnos de la secundaria se hizo cargo de construir una zanja en la huerta de la escuela y para eso formaron una brigada. Si hubiera trabajado toda la brigada, la zanja habría sido cavada en 24 horas. Mas el trabajo fue comenzado por un solo miembro de la brigada. Poco después se le unió otro y más tarde un tercero, al cabo del mismo tiempo se incorporó un cuarto, y así sucesivamente, hasta el último. Cuando se hizo el balance del trabajo efectuado, resultó que el primero había invertido en el trabajo 11 veces más de tiempo que el último.

¿Cuánto trabajó el último?

Solución

Supongamos que el último miembro de la brigada trabajó x horas; siendo así, el primero habrá trabajado 11x horas. Prosigamos. Si el número de miembros de la brigada es y, el número global de horas de trabajo se determina como la suma de y miembros de una progresión decreciente, cuyo primer término es 11x, y el último, x, es decir

$$\frac{(11x + x)y}{2} = 6xy$$

Sabemos también que la brigada, compuesta por y personas, trabajando simultáneamente hubiera terminado la zanja en 24 horas, lo que quiere decir que para realizar ese trabajo hacen falta 24y horas de trabajo. Por tanto

$$6xy = 24y.$$

Como y no es igual a 0, la ecuación puede ser simplificada por ese factor, después de lo cual obtendremos:

$$6x=24 \text{ y } x = 4.$$

Por lo tanto, el último miembro de la brigada trabajó 4 horas.

Hemos contestado a la pregunta del problema, mas si quisiéramos saber el número de obreros con que cuenta la brigada no podríamos determinarlo, aunque en la ecuación figuraba este último con la y. Para resolver esta cuestión no se cuenta con datos suficientes.

Volver

6. Las manzanas

Problema

Un hortelano vendió al primero de sus compradores la mitad de las manzanas de su jardín más media manzana; al segundo, la mitad de las restantes más media; al tercero, la mitad de cuantas quedaron más media, etc. El séptimo comprador adquirió la mitad de las manzanas que quedaban más media, agotando con ello la mercancía ¿Cuántas manzanas tenía el jardinero?

Solución

Si el número inicial de manzanas era *x*, el primer comprador adquirió

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$$

el segundo

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{x+1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^2}$$

el tercero

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{x+1}{2}-\frac{x+1}{2^2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^3}$$

el séptimo

$$\frac{x+1}{2^7}$$

Tenemos la ecuación

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{2^2}+\frac{x+1}{2^3}+\ldots+\frac{x+1}{2^7}=x$$

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{2^2}+\frac{x+1}{2^3}+\ldots+\frac{x+1}{2^7}=x$$

$$(x+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^7}\right)=x$$

Hallada la suma de los miembros de la progresión geométrica comprendida en los paréntesis, resultará:

$$\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{2^7}$$

$$x=2^7-1=127$$

El hortelano tenía 127 manzanas.

Volver

7. La compra del caballo

Problema

En la aritmética de Magnitski encontramos un divertido problema que damos a conocer sin sujetarnos al lenguaje del original:

Problema.

Cierta persona vendió su caballo por 156 rublos. Mas el comprador se arrepintió de haberlo adquirido y devolvió el caballo diciendo: - No me interesa comprar el caballo por ese precio, pues no lo merece. El vendedor le propuso nuevas condiciones:

- Si te parece elevado ese precio, compra sólo los clavos de las herraduras y conseguirás de balde el caballo. En cada herradura hay 6 clavos; por el primer clavo me pagas tan sólo 1/4 de kopek; por el segundo, 1/2; por el tercero, 1 kopek, etc.

El comprador, deslumbrado por las nuevas condiciones, en su afán de tener gratis un caballo, aceptó la propuesta, creyendo que tendría que pagar por los clavos no más de 10 rublos.

¿Cuál fue el importe de la compra?

Solución

Por los 24 clavos hubo de pagar:

$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{24} \text{ kopeks}$$

cuya suma será igual a

$$\frac{2^{21} \times 2 - \frac{1}{4}}{2 - 1} = 2^{22} - \frac{1}{4} = 4.194.303{,}75 \text{ kopeks}$$

Es decir, cerca de 42 000 rublos. En tales condiciones no da pena entregar el caballo de balde.
Volver

8. La recompensa del soldado
Problema
De otro antiguo manual ruso de matemáticas, que lleva el ampuloso título de *Curso completo de matemáticas puras elaborado por Efim Voitiajovski, cadete de artillería y profesor particular, para uso y provecho de la juventud y cuantos se ejercitan en matemáticas* (1795), copió el siguiente problema.

Problema
"Un soldado veterano recibe como recompensa 1 kopek por la primera herida sufrida; 2, por la segunda; 4, por la tercera, etc. Cuando se hizo el recuento, el soldado resultó recompensado con 655 rublos 35 kopeks. Deséase saber el número de heridas".

Solución
Planteamos la ecuación

$$65.535 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{x-1}$$

ó

$$65.535 = \frac{2^{x-1} \times 2 - 1}{2 - 1} = 2^x - 1$$

de donde obtendremos:

$$65.535 = 2^x$$

y

$$x = 16$$

resultado que obtenemos fácilmente por tanteo.
Con este generoso sistema de recompensa, el soldado debía ser herido 16 veces, quedando además vivo, para obtener 655 rublos y 35 kopeks.
Volver