K. RIBNIKOV

ANALISIS COMBINATORIO

PROBLEMAS Y EJERCICIOS

ANÁLISIS COMBINATORIO

PROBLEMAS Y EJERCICIOS

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Задачи и упражнения

Под редакцией К. А. Рыбникова

Москва «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы

ANÁLISIS COMBINATORIO

PROBLEMAS Y EJERCICIOS

Dirigido por el Prof. Dr. K. Ríbnikov

Editorial Mir Moscú

Colegio de autores: K. Ríbnikov, M. Ménshikov, A. Reviakin, A. Kopilova, Yu. Makárov, B. Stechkin

Traducido del ruso por K. Medkov

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-000603-1

ÍNDICE

PREFACIO

Tras la publicación en castellano de la obra de K. A. Ríbnikov «Análisis combinatorio», la editorial «Mir» presenta ahora la versión española de «Análisis combinatorio. Problemas y ejercicios». El colectivo de autores de este libro (incluso el autor del Prefacio) se ha formado en el transcurso del trabajo conjunto en la facultad mecánico-matemática de la Universidad Estatal de Moscú M. V. Lomonósov, en la que se lleva a cabo una iniciativa importante de preparación de cuadros y de desarrollo de investigaciones científicas en el campo de la matemática discreta.

El contenido de ambos libros está estrechamente ligado entre sí y obedece a un objetivo común: ayudar al lector a asimilar tanto los hábitos de investigación de los problemas teóricos del análisis combinatorio, como la técnica de resolución de los problemas combinatorios. La experiencia enseña que el uso de estos libros hace más amplia la erudición teórica y eleva la importancia de la preparación práctica de los matemáticos jóvenes.

En la edición rusa hicieron su aportación el doctor D. Katona (RP de Hungría) y V. N. Luzguín (URSS) quienes participaron en la preparación del capítulo VI y del § 5 del capítulo IV, respectivamente, lo que influyó positivamente en el contenido de éstos.

Especialmente para la versión española K. A. Ríbnikov, A. M. Reviakin y B. S. Stechkin prepararon dos capítulos nuevos: «Análisis combinatorio en los conjuntos parcialmente ordenados» y «Matroides», como también un nuevo párrafo, «Problemas extremales sobre la partición de los números» del capítulo VI. Han sido minuciosamente revisados los textos de los problemas, las resoluciones y las indicaciones. A nuestro parecer esto nos permitió tomar en consideración, en sumo grado, los avances ulteriores del análisis combinatorio.

Moscú, 1988 *K. A. Ríbnikov*

ESQUEMAS COMBINATORIOS

Introduzcamos las siguientes designaciones:

n-conjunto será un conjunto de n elementos distintos;

(n)-conjunto será un conjunto que contiene elementos de n tipos diferentes (se supone, si no se especifica de antemano, que el número de elementos de cada tipo es suficientemente grande);

r-muestra de cierto conjunto será una totalidad de r elementos (no forzosamente diferentes para el *(n)-conjunto*) de dicho conjunto.

El número de r-muestras de un n-conjunto (*r-combinaciones*) será:

$$\binom{n}{r} = C_n^r = \begin{cases} 0, \text{ si } r < 0, \text{ ó bien } 0 \leqslant n < r; \\ n!/(r!\,(n-r)!), \text{ si } n \geqslant r \geqslant 0. \end{cases}$$

El número de r-muestras ordenadas de un n-conjunto (*r-permutaciones*) será:

$$A_n^r = n!/(n-r)!, \quad n \geqslant r \geqslant 0.$$

El número de r-muestras de un (n)-conjunto (*combinaciones con repetición*) será:

$$C_{(n)}^r = C_{n+r-1}^r.$$

El número de r-muestras ordenadas de un (n)-conjunto es igual a

$$A_{(n)}^r = n^r.$$

El número de n-permutaciones de un n-conjunto (n-sustituciones), cada una de las cuales contiene k_1 ciclos de longitud 1, k_2 ciclos de longitud 2, etc., k_n ciclos de longitud n $(\sum_{i=1}^{n} ik_i = n)$ será:

$$P_1(k_1, \ldots, k_n) = \frac{n!}{1^{k_1}2^{k_2}\ldots n^{k_n}k_1!\,k_2!\ldots k_n!}.$$

El número de permutaciones de un (k)-conjunto que contiene n_1 elementos del primer tipo, n_2 elementos del segundo tipo, etc., n_k elementos del k-ésimo tipo $(\sum_{i=1}^{k} n_i = n)$, es igual a

$$P(n_1, \ldots, n_k) = n!/(n_1! \ldots n_k!)$$

(en particular, $P(r, n-r) = C_n^r$).

§ 1. Relaciones combinatorias

1.1. Demuéstrense, por medio de los razonamientos combinatorios (es decir, empleando solamente ciertos números de combinaciones), las identidades:

a) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, \quad n > 0;$

b) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{n-k-1}^0, \quad n > k.$

1.2. Demuéstrese la identidad

$$C_{n+m}^m = \sum_{k=0}^{m} C_{n+k-1}^k, \quad m, n > 0.$$

1.3. Demuéstrese, para cualquier $m = 0, 1, 2, \ldots, n$, la identidad

$$C_n^r = \sum_{k=0}^{n} C_{n-m}^k C_m^{r-k}.$$

1.4. Demuéstrense las identidades

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \quad n \geqslant 0;$

b) $\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k = n2^{n-1};$

c) $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = n(n+1)\, 2^{n-2}.$

1.5. Demuéstrese, con ayuda de los razonamientos combinatorios, la identidad

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (m-1)^{n-k} = m^n.$$

1.6. Demuéstrese la identidad

$$\sum \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!} = k^n,$$

donde la sumación se extiende a todas las particiones ordenadas de n en k sumandos: $n = n_1 + \ldots + n_k$, $n_i \geqslant 0$ son números enteros.

1.7. a) Demuéstrese la identidad

$$\sum_{m_1, \ldots, m_q} C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \ldots C_{n_q}^{m_q} = C_n^m,$$

donde $n=\sum_{i=1}^{q} n_i$, los números n_i son arbitrarios, y la sumación se extiende a todos los juegos de números $m_1, \ldots, m_q$ tales que $m=\sum_{i=1}^{q} m_i$, $0 \leqslant m_i \leqslant n_i$.

b) Demuéstrese que

$$\sum C_{n_1+m_1-1}^{m_1} C_{n_2+m_2-1}^{m_2} \ldots C_{n_q+m_q-1}^{m_q} = C_{n+m-1}^{m},$$

$$n=\sum_{i=1}^{q} n_i, \quad m=m_1+\ldots+m_q,$$

donde la sumación se realiza respecto de los juegos $(m_1, \ldots, m_q)$.

1.8. Demuéstrese que

$$\frac{(C_{n+1}^{r+1}-C_n^r)\, C_{n-1}^{r-1}}{(C_n^r)^2 - C_{n+1}^{r+1} C_{n-1}^{r-1}} = r, \quad n>1, \quad 0<r<n.$$

1.9. Demuéstrese que

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{2n-1}^{x}} = \frac{2}{n+1}, \quad n \geqslant 1.$$

1.10. Demuéstrese que

$$\sum_{x+1}^{n} \frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{n+q}^{x}} = \frac{n+q+1}{(q+1)(q+2)}, \quad n \geqslant 1.$$

1.11. Demuéstrese la identidad

$$\sum_{x=0}^{n} \frac{C_n^x C_n^r}{C_{2n}^{x+r}} = \frac{2n+1}{n+1}.$$

1.12. Demuéstrese que

a) $$\sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^{2i} 2^{n-2i} = \frac{3^n+1}{2};$$

b) $$\sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^{2i} k^{n-2i} = \frac{(k+1)^n+(k-1)^n}{2}.$$

1.13. Demuéstrese para cualquier $p=0, 1, \ldots, n$ la identidad

$$\sum_{x=0}^{m} C_{p+x-1}^{x} C_{n+m-p-x-1}^{m-x} = C_{n+m-1}^{m}.$$

1.14. Demuéstrese la identidad

$$\sum_{i_n=1}^{m} \sum_{i_{n-1}=1}^{i_n} \dots \sum_{i_2=1}^{i_3} \sum_{i_1=1}^{i_2} \sum_{i_0=1}^{i_1} 1 = C_{n+m}^{n+1}.$$

1.15. Demuéstrese la identidad

$$C_{n+m}^{m} = \sum P(k_1, \dots, k_m, n-k_1-k_2-\dots-k_m+1),$$

donde la sumación viene extendida a todas las soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m = m.$$

1.16. Supongamos que para $n, r > 0$ enteros se tiene: $C_{-n}^{r} = (-1)^r C_{n+r-1}^{r}$. Demuéstrese que para cualquier r natural y n entero se verifica la igualdad

$$C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}.$$

§ 2. Muestras y ordenaciones

1.17. n hombres ($n > 2$) se encuentran sentados a una mesa redonda. Convengamos en considerar coincidentes dos disposiciones respecto a los sitios, siempre que cada hombre tenga los mismos vecinos en ambos casos. ¿Cuántos son los modos de sentarse a la mesa?

1.18. ¿Mediante cuántos métodos pueden sentarse a una mesa redonda n hombres y n mujeres de tal modo que de cada dos personas de un mismo sexo ninguna esté sentada al lado de otra?

1.19. De una baraja que contiene 52 cartas se sacaron 10. ¿En cuántos casos entre las cartas sacadas habrá:

a) por lo menos un as; b) exactamente un as; c) no menos de dos ases; d) exactamente dos ases?

1.20. ¡Mediante cuántos procedimientos se pueden componer tres pares de n ajedrecistas?

1.21. ¿Cuántas funciones con valores en un conjunto de m elementos pueden construirse, si las funciones citadas dependen de n variables $x_1, \dots, x_n$, donde x_i puede tomar uno de k_i valores?

1.22. ¿Cuántos divisores tiene el número $q = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$, donde p_i son diferentes números primos distintos de la unidad y α_i son ciertos números naturales? ¿A qué es igual la suma de los divisores?

1.23. ¿Cuántas permutaciones pueden componerse de n elementos, en las cuales los m elementos dados no se disponen juntos en cualquier orden?

1.24. ¿Cuántos son los números desde 0 hasta 10^n, en los cuales no figuran cifras iguales sucesivas?

1.25. ¿Mediante cuántos métodos se pueden escoger 6 cartas de una baraja, que contiene 52 cartas, de tal modo que entre las cartas sacadas se encuentren cartas de cada palo?

1.26. ¿Cuántos son los números naturales de n cifras en los que éstas se disponen en orden no decreciente?

1.27. [1]) Hállese el número de métodos que permiten repartir n bolas diferentes entre m urnas distintas?

1.28. ¿Cuántos son los métodos que permiten colocar n bolas iguales en m urnas diferentes?

1.29. ¿Mediante cuántos métodos pueden colocarse n bolas iguales en m urnas diferentes, observándose las siguientes condiciones:

a) no hay urnas vacías;

b) en la segunda urna hay k bolas;

c) en las primeras s urnas hay $a_1, a_2, \ldots, a_s$ bolas, respectivamente $(a_1 + a_2 + \ldots + a_s \leqslant n)$;

d) en la i-ésima urna se encuentran no menos de a_i bolas $(i = 1, 2, \ldots, m)$?

1.30. ¿Cuántos son los métodos que permiten colocar en m urnas diferentes n_1 bolas blancas, n_2 bolas negras y n_3 bolas azules?

1.31. Hállese el número de métodos de distribución de n bolas iguales entre a) dos urnas, b) tres urnas, c) i urnas, todas ellas indistinguibles. Obténgase la relación recurrente para el caso c).

1.32. ¿Cuántos son los métodos para colocar $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ diferentes bolas en k urnas distintas de tal modo que en la primera urna caigan n_1 bolas, en la segunda k_2, etc., en la k-ésima urna, n_k bolas?

1.33. Hállese el número de métodos de colocación de n bolas diferentes en m urnas de tal modo que m_1 urnas contengan p_1 bolas cada una; m_2 urnas, p_2 bolas, etc., m_k urnas, p_k bolas $(m = m_1 + \ldots + m_k,\ n = m_1p_1 + \ldots + m_kp_k)$, si

a) las urnas son diferentes;

b) las urnas, en las que están contenidas un número igual de bolas, son indistinguibles.

1.34. a) ¿Cuántos son los números de n cifras, en los cuales la suma de las cifras es igual a k, donde $k \leqslant 9$ (la primera cifra es distinta de cero)?

b) El mismo problema, pero para los números de 0 a 10^n.

1.35. ¿Cuántos números de cinco cifras pueden componerse, empleando las cifras del número 75 226 522?

1.36. ¿Cuántas sucesiones de longitud $n + m$ pueden componerse a partir de n ceros y m unidades, en cuya notación el número total de pares 01 y 10 sería igual a: a) $2r - 1$; b) $2r$?

1.37. Hállese el número S tal que entre los números del primer millar haya exactamente 10 números, en cada uno de los cuales la suma de las cifras sea igual a S.

---

[1]) En los problemas 1.27—1.33 la capacidad de las urnas se considera ilimitada.

1.38. ¿Cuál es la probabilidad de que, al comprar un billete de lotería deportiva, puedan adivinarse:

a) k números ($k = 1, 2, \ldots, 6$) de 49;

b) por lo menos k números?

1.39. LOTERÍA GENOVESA. Los participantes de esta lotería compran billetes, en los cuales figuran los números del 1 al 90. Algunos billetes tienen a la vez 2, 3, 4 ó 5 números. En el día de sorteo se escogen al azar 5 fichas con los números del 1 al 90. Ganan aquellos participantes en los billetes de los cuales todos los números resultan ser entre los elegidos. ¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio en el caso de un billete comprado con un número? ¿Con k números ($1 \leqslant k \leqslant 5$)?

1.40. Se analizan todas las sucesiones de longitud n de los números $0, 1, \ldots, k$. ¿Cuántas son las sucesiones entre ellas que contienen un número par de ceros?

1.41. Para ingresar en un centro de enseñanza superior es necesario dar cuatro exámenes. Se supone que para el ingreso es suficiente adquirir 17 puntos. ¿De cuántas formas el que ingresa puede dar los exámenes acumulando no menos de 17 puntos y no sacando ni un solo dos?

1.42. En un portamonedas hay monedas de 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20 y 50 kopeks de valor, a razón de una moneda de cada valor. ¿De cuántos modos se puede pagar, empleando dichas monedas, por una compra de 73 kopeks de valor?

1.43. Por el envío de un impreso hay que pagar 18 kopeks. ¿De cuántos modos puede pagarse el envío con sellos de 4, 6 y 10 kopeks de valor, si dos modos que se diferencian en el orden de los sellos se consideran distintos?

§ 3. Particiones

1.44. Dese la explicación de las siguientes igualdades:

a) $$\prod_{n=1}^{\infty} (1+x^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n)\, x^n,$$

donde $\lambda(n)$ es el número de representaciones de n en forma de la suma no ordenada de los sumandos enteros positivos desiguales;

b) $$\prod_{n=1}^{\infty} (1+x^n z) = 1 + \prod_{n,\, m=1}^{\infty} \lambda(n,\ m)\, x^n z^m,$$

donde $\lambda(n,\ m)$ es el número de representaciones de n en forma de la suma no ordenada de m sumandos enteros positivos desiguales;

c) $$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(n)\, x^n,$$

donde $\overline{\mu}(n)$ es el número de representaciones no ordenadas de n en forma de la suma de sumandos enteros positivos iguales o desiguales;

$$\text{d)}\quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n z} = 1 + \sum_{n,\, m=1}^{\infty} \mu(n,\ m)\, x^n z^m,$$

donde $\mu(n,\ m)$ es el número de representaciones no ordenadas de n en forma de la suma de m sumandos enteros positivos, iguales o desiguales;

$$\text{e)}\quad \prod_{n=1}^{\infty} (1+x^{2n-1}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \nu(n)\, x^n,$$

donde $\nu(n)$ es el número de representaciones de n en forma de la suma no ordenada de sumandos impares positivos desiguales;

$$\text{f)}\quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2n-1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho(n)\, x^n,$$

donde $\rho(n)$ es el número de representaciones de n en forma de la suma no ordenada de sumandos impares positivos iguales o desiguales;

$$\text{g)}\quad \frac{1}{(1-x)^m} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_m(n)\, x^n,$$

donde $\sigma_m(n)$ es el número de particiones ordenadas o la cantidad de representaciones de n en forma de la suma ordenada de no más de m sumandos enteros no negativos iguales o desiguales, o bien el número de soluciones de la ecuación $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, donde $x_i \geqslant 0$ son los números enteros, $i = 1, \ldots, m$;

$$\text{h)}\quad \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1-x^{n_i}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n_1,\ \ldots,\ n_m,\ n)\, x^n,$$

donde $\sigma(n_1, \ldots, n_m, n)$ es el número de soluciones de la ecuación $n = n_1x_1 + \ldots + n_mx_m$ y $x_i \geqslant 0$ son los números enteros;

$$\text{i)}\quad \left(\frac{x}{1-x}\right)^m = \sum_{n=m}^{\infty} \sigma(m,\ n)\, x^n,$$

donde $\sigma(m,\ n)$ es el número de particiones ordenadas de n en m sumandos enteros positivos iguales o desiguales, o bien el número de soluciones de la ecuación $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ y $x_i \geqslant 1$ son números enteros.

1.45. Demuéstrese que el número de particiones ordenadas del número n en k sumandos naturales, es decir, el número de soluciones de la ecuación

$$n = x_1 + \ldots + x_k, \quad x_i > 0, \quad i = 1, \ldots, k,$$

es igual a

$$C_{n-1}^{k-1} = \sigma(k, n),$$

mientras que el número total de particiones ordenadas de n en sumandos es igual a 2^{n-1}.

1.46. Denotemos con $\lambda(n)$ el número de particiones no ordenadas de n en diferentes sumandos, y con $\rho(n)$, el número de particiones no ordenadas de n en sumandos impares (iguales o desiguales). Demuéstrese que $\lambda(n) = \rho(n)$.

1.47. Los números $w_k = (3k^2 - k)/2$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ se denominan *pentagonales*. Demuéstrese la siguiente afirmación (*teorema de Euler—Legendre*): la diferencia entre el número de representaciones no ordenadas de un número natural dado n en forma de la suma de números par e impar de los sumandos desiguales es igual a cero, si n es el número no pentagonal, y a $(-1)^k$, si n es el número pentagonal w_k.

1.48. Demuéstrese la siguiente afirmación: para todo $n > 0$ se tiene

$$\sum_{k\,:\,w_k \leqslant n} (-1)^k S(n - w_k) = \left\{ \begin{matrix} (-1)^{S-1} & n \\ n = w_S & \end{matrix} \right\},$$

donde $S(n)$ es la suma de divisores del número natural n; la suma en el primer miembro se toma respecto de todos los números $k \gtreqless 0$, para los cuales $w_k \leqslant n$, y el símbolo $\left\{ \begin{matrix} (-1)^{S-1} & n \\ n - w_S & \end{matrix} \right\}$ denota 0 para n distinto de un número pentagonal, y $(-1)^{S-1}n$, para $n = w_S$.

1.49. Designemos $\overline{\mu}(n)$, el número de representaciones no ordenadas de un número natural n, como la suma de números naturales iguales o desiguales. Demuéstrese que

$$\sum_{k\,:\,w_k \leqslant n} (-1)^k \overline{\mu}(n - w_k) = 0,$$

donde $w_k = (3k^2 - k)/2$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ son los números pentagonales, $\overline{\mu}(0) = 1$.

1.50. Sean $f(n)$ y $F(n)$ unas funciones de números enteros y supongamos que

$$\sum_{S\,:\,w_S \leqslant n/h} (-1)^S f(n - hw_S) = F(n).$$

donde $h > 0$ es un número entero prefijado. Demuéstrese la fórmula de inversión

$$f(n) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n/h} \overline{\mu}(k) F(n - hk),$$

donde $\mu(k)$ es la cantidad de particiones del número k en sumandos iguales o desiguales (análogo de la función de Moebius $\mu(n)$).

1.51. Sea $\lambda(n)$ el número de particiones de n en sumandos desiguales, $\lambda(0) = 1$. Demuéstrense las igualdades:

a) $$\sum_{k\,:\,w_k \leqslant n} (-1)^k \lambda(n - w_k) = \begin{cases} (-1)^S, & n = 2w_S, \\ 0, & n \neq 2w_S, \end{cases}$$

b) $$\lambda(n) = \sum_{k\,:\,2w_k \leqslant n} (-1)^k \overline{\mu}(n - 2w_k).$$

1.52. Sea $\nu(n)$ el número de particiones de n en una suma de sumandos positivos impares desiguales ($\nu(0) = 1$). Demuéstrense las desigualdades:

a) $$\sum_{k\,:\,2w_k \leqslant n} (-1)^k \nu(n - 2w_k) = \begin{cases} (-1)^{n+S}, & n = w_S, \\ 0, & n \neq w_S; \end{cases}$$

b) $$\nu(n) = \sum_{S\,:\,w_S \leqslant n} (-1)^{n+S} \overline{\mu}\left(\frac{n - w_S}{2}\right).$$

1.53. Hállese el número de soluciones no ordenadas de la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_p = m$, si todas las incógnitas satisfacen la desigualdad $0 \leqslant l \leqslant x_k \leqslant n$.

1.54. ¿En cuántas partes puede dividirse la superficie de una esfera mediante los planos que pasan por el centro de ella, a condición de que cualesquiera tres planos no pasan por un mismo diámetro?

1.55. Hállese el número de todos los polígonos convexos de k lados de cuyos vértices sirven k de n vértices del polígono convexo de n lados, con la particularidad de que dos vértices adyacentes han de estar separados al menos por s vértices del polígono de n lados.

1.56. ¿De cuántos modos puede dividirse un polígono convexo de $(n + 2)$ lados en triángulos mediante las diagonales que no se intersecan en el interior del polígono?

1.57. ¿En cuántas partes dividen un plano n rectas que se intersecan, si cualesquiera tres de ellas no se cortan en un mismo punto?

1.58. En un plano están trazadas n rectas. Se denominará *multiplicidad* de un punto al número de rectas que pasan por el punto citado. Están prefijados los números: k_2 que representa el número de vértices de multiplicidad dos, k_3 que expresa el número de vértices de multiplicidad tres, etc., k_n que expresa el número de vértices de multiplicidad n. Hállese el número de pares de rectas paralelas.

1.59. En un plano están trazadas n rectas. Están prefijados los números: k_2 que expresa el número de vértices de multiplicidad dos, k_3 que expresa el número de vértices de multiplicidad tres, etc., k_n que expresa el número de vértices de multiplicidad n. ¿En cuántas partes dividen el plano dichas rectas?

1.60. ¿En cuántas partes dividen un espacio n planos, de los cuales cualesquiera cuatro de ellos no pasan por un mismo punto, cualesquiera tres no pasan por una misma recta y cualesquiera dos no son paralelos, y cualesquiera tres planos tienen un punto común?

1.61. Por un punto A en un espacio pasan k planos, con la particularidad de que de tres de ellos ninguno pasa por una misma recta. ¿En cuántas partes los planos dividen el espacio?

1.62. En un espacio están trazados n planos. Se sabe: l_2 es el número de rectas de intersección de dos planos exactamente; l_3 es el número de rectas de intersección de tres planos exactamente, etc., l_n es el número de rectas de intersección de n planos exactamente. Hállese el número de pares de planos paralelos.

1.63. ¿En cuántas partes dividen un espacio n planos, si de tres de ellos ninguno pasa por una misma recta, de dos, ninguno es paralelo y k_3 es el número de puntos de intersección de tres planos, k_4 es el número de puntos de intersección de cuatro planos, etc., y k_n es el número de puntos de intersección de n planos.

§ 4. Problemas mixtos

1.64. Demuéstrese que los números que siguen más abajo son enteros:

a) $\frac{(2n)!}{2^n}$; b) $\frac{(3n)!}{2^n 3^n}$; c) $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$; d) $\frac{(k!)!}{(k!)^{(k-1)!}}$; e) $\frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}$

1.65. ¿Cuántos son los pares diferentes de números enteros x e y desde 1 hasta 1000, para los cuales $(x^2 + y^2)/49$ es un número entero. (Los pares (x, y) y (y, x) se consideran iguales.)

1.66. Partiendo de los números del 1 al n han sido compuestos toda clase de productos, que constan de k diferentes factores (k está fijado). ¿Cuántos productos obtenidos se dividen por un número primo $p \leqslant n$?

1.67. Teniendo por condición de que de tres diagonales del polígono conexo de n lados ($n \geqslant 5$) ninguna se interseca en un punto, hállese el número de segmentos en los cuales se dividen las diagonales mediante los puntos de intersección.

1.68. Se dan cinco puntos en un plano. Entre las rectas que unen dichos puntos no hay paralelas, perpendiculares y coincidentes. Por cada punto trazamos perpendiculares a todas las rectas que pueden construirse uniendo dos a dos los cuatro puntos restantes. ¿Cuál es el número máximo de puntos de intersección de las perpendiculares citadas entre sí sin tomar en consideración los cinco puntos dados?

1.69. En una circunferencia están dados n puntos y están trazadas toda clase de cuerdas que unen los puntos mencionados. Se sabe que de tres de las cuerdas trazadas ninguna se interseca en un punto. ¿En cuántas partes se divide el círculo?

1.70. En el campeonato de fútbol de un país participan 20 equipos. ¿Cuál es el número mínimo de partidos que deben jugarse, para que entre cualesquiera tres equipos haya dos que ya hayan jugado entre sí?

1.71. En un tablero de ajedrez están colocadas de un modo arbitrario dos torres (negra y blanca). ¿Qué es lo más probable: que dichas torres pueden comerse una a la otra o que no puedan?

1.72. Un tablero de ajedrez de 6×6 de dimensión está cubierto con 18 fichas de dominó de 2×1 de dimensión (de tal modo que cada ficha cubre dos casillas). Demuéstrese que, cualquiera que sea la forma en que las fichas cubren el tablero, éste puede ser cortado en dos partes horizontal o verticalmente sin perjudicar ni a una sola ficha de dominó.

1.73. Las casillas (escaques) de un tablero de ajedrez están enumeradas por orden con los números del 1 al 64: la primera fila horizontal con los números del 1 al 8 de izquierda a derecha; la segunda fila horizontal, con los números del 9 al 16 de izquierda a derecha, etc. En el tablero están colocadas 8 torres de tal modo que no se capten una a la otra. ¿Qué valor puede tomar la suma de números de los escaques en los cuales están colocadas las torres?

1.74. En cada escaque de un tablero de ajedrez de dimensión $n \times n$ se ha puesto un número que indica la cantidad de rectángulos que contienen dicho escaque. ¿A qué es igual la suma de todos los números escritos?

1.75. Demuéstrese que de cualesquiera cinco hongos que crecen en un bosque y que no están dispuestos en una recta, siempre hay cuatro hongos tales que sirven de vértices de un cuadrilátero convexo.

1.76. En la ciudad N vive un hombre que cada día realiza un paseo y cubre un camino de longitud n. La distancia entre los cruces

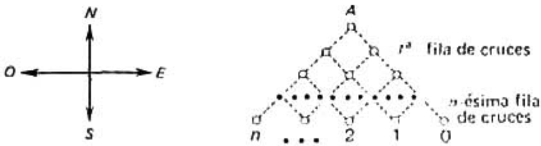


Fig. 1.1.

vecinos es igual a 1 (fig. 1.1). El hombre nunca se mueve en dirección del noroeste o del nordeste. En cada cruce él dobla, o bien al sudeste o bien al sudoeste, con una probabilidad igual a 1/2. Si el camino comienza en el punto A, entonces ¿cuál es la probabilidad de que el hombre llegue al final del paseo al k-ésimo cruce de la n-ésima fila?

1.77. Demuéstrese que la probabilidad de caer en los cruces pares de la n-ésima fila es igual a la probabilidad de caer en los cruces impares de la n-ésima fila (véase el dibujo del problema anterior). ¿Qué propiedad de las combinaciones C_n^k se deduce de lo descrito?

1.78. En la ecuación $ax = b$ los parametros a y b se eligen al azar de los segmentos $1 \leqslant a \leqslant m$, $1 \leqslant b \leqslant n$, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que la raíz de esta ecuación sea superior a 1, a condición de que m, n, a, b son todos números naturales?

1.79. (m, n) es un punto de coordenadas enteras no negativas m y n. Hállese el número de diferentes caminos de longitud $m + n$ que llevan desde el origen de coordenadas al punto (m, n) y que están compuestos de segmentos paralelos a los ejes de coordenadas, a condición de que de extremos de dichos segmentos sirven los puntos con coordenadas de números enteros.

1.80. En un papel cuadriculado está dibujado el rectángulo $ABCD$ cuyos lados yacen en la línea de un retículo, con la particularidad de que AD es k veces mayor que AB (k es un entero). Se examinan toda clase de caminos que pasan por las líneas del retículo y que son los más cortos entre A y C. Demuéstrese que entre los caminos que se consideran hay en k veces más aquellos, donde el primer eslabón yace en AD, que aquellos donde el primer eslabón yace en AB (fig. 1.2).

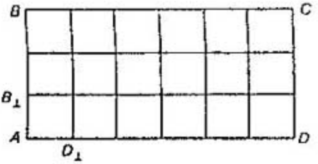


Fig. 1.2.

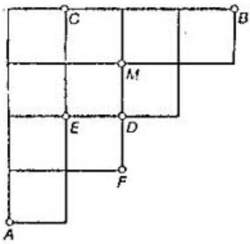


Fig. 1.3.

1.81. En la encrucijada A un automovilista rompió el vidrio del faro izquierdo y debe ahora dirigirse por el camino más corto al taller de reparación B, evitando en dicho camino el punto M (fig. 1.3). ¿Cuántos métodos existen para la elección de la ruta?

1.82. En un plano se han elegido 9 puntos dispuestos en forma del cuadrado 3×3. ¿Cuántos son los triángulos en los que un vértice se encuentra en el punto fijo A, y los otros dos, en los 8 puntos restantes?

1.83. Cierta comisión se reunía 40 veces. Cada vez en las sesiones estaban presentes 10 hombres, con la particularidad de que cualesquiera dos de los miembros de la comisión no presenciaban juntos las sesiones más que una vez. Demuéstrese que el número de miembros de la comisión es superior a 60.

1.84. En una oficina hay 25 empleados. Demuéstrese que de dichos empleados no pueden formarse más de 30 comisiones de 5 personas en cada una de tal modo que ningún par de comisiones tenga más de un miembro común.

1.85. Después de la presentación de 20 deportistas de patinaje artístico cada uno de 9 jueces distribuye según su propio parecer los puestos desde el 1 hasta el 20. Resultó que los puestos de cada deportista atribuidos a él por los distintos jueces difieren en no más de 3. Calculemos las sumas de los puestos obtenidos por cada deportista y dispongámoslas en orden de crecimiento: $C_1 \leqslant C_2 \leqslant \ldots \leqslant C_{20}$. ¿Qué valor máximo puede tener C_1?

1.86. La distancia de A a B es de 999 km. A lo largo del camino están instalados postes en los cuales la distancia entre A y B se marca de la manera siguiente:

$$\boxed{0 \mid 999}, \quad \boxed{1 \mid 998}, \quad \boxed{2 \mid 997}, \quad \ldots, \quad \boxed{999 \mid 0}.$$

¿Cuántos son los postes, en los cuales hay solamente dos cifras diferentes?

1.87. Imaginémonos un juego entre dos hombres. Sin ver el número de un coche que se aproxima el primero de ellos «toma para sí» dos cualesquiera cifras del número (por ejemplo, la primera y la tercera, o bien la segunda y la cuarta), dejando las otras dos cifras para el segundo jugador; cuando se detecta el número, ambos jugadores suman sus cifras y gana aquel de ellos cuya suma de las cifras da un mayor número de unidades (o en ella es mayor la última cifra). ¿Entre los números del 0001 al 9999 cuántos son tales que el juego termina con un empate independientemente de la elección del primer jugador?

1.88. Para pintar una cara de un cubo hacen falta 5 segundos. ¿Cuál es el tiempo mínimo en el transcurso del cual 3 hombres pueden pintar 188 cubos? (Se supone que dos hombres no pueden pintar simultáneamente un cubo).

1.89. En un campeonato gimnástico dos equipos contaban con un número igual de participantes. En total la suma general de tantos obtenidos por todos los participantes era igual a 156. ¿Cuál fue el número de participantes, si cada uno de ellos obtuvo notas sólo de 8 y 9 tantos.

1.90. Se tienen 9 palos de diferente longitud desde 1 hasta 9 cm. ¿De cuántos métodos y con qué lados pueden formarse cuadrados, haciendo uso de dichos palos? (No es obligatorio que se usen todos los palos; los métodos de formación de un cuadrado se consideran diferentes, si se emplean palos distintos.)

1.91. Un grupo de 41 estudiantes aprobó los exámenes de tres disciplinas. Las calificaciones posibles son: 5, 4 y 3. Demuéstrese que por lo menos cinco estudiantes aprobaron los exámenes con calificaciones iguales.

1.92. Conservando las condiciones del problema antecedente hállese la probabilidad de que en el grupo no resulten 8 estudiantes que hayan aprobado los exámenes con calificaciones iguales.

1.93. ¿Qué números hay más entre el primer millón: aquellos en cuya notación se encuentra 1, o aquellos en cuya notación la unidad no está contenida?

1.94. Escribamos una oración: "Cuatro caminantes cansados y tácitos estuvieron esperando durante mucho tiempo a que cesara la tormenta que se desató tan súbitamente". Vamos a tachar las palabras en esta oración de una manera tal que se obtenga cada vez, como resultado, una oración correcta (por ejemplo, no se puede tachar la palabra "cuatro", pero sí podemos eliminar la palabra "cansados"). Se permite tachar las palabras en cualquier orden una tras otra. ¿De cuántos modos se puede llegar a una oración, de la cual no se podrá tachar ya ninguna palabra?

1.95. Demuéstrese que si una partida de ajedrez se desarrolla llegando a un número infinito de jugadas, entonces por lo menos una posición se repetirá un número infinito de veces. Demuéstrese que existe una sucesión de jugadas de longitud tan grande como se quiera, la cual se repetirá un número infinito de veces.

1.96. Un tal A sabe $X \cdot Y$ (se conoce que $X + Y < 100$; $X, Y > 1$ son números enteros) y un tal B sabe $X + Y$. Entre A y B tiene lugar el diogálo siguiente:

A: no conozco X e Y,
B: esto yo lo sabía,
A: entonces conozco X e Y,
B: en tal caso también yo conozco X e Y.

Hállense los números X e Y.

1.97. Demuéstrese que en cada fracción decimal infinita existe una sucesión de signos decimales de longitud arbitraria, la cual en el desarrollo de la fracción se encuentra un número infinito de veces.

1.98. Demuéstrese que en el desarrollo del número $n!$ en factores primos un número primo p figura con el exponente

$$\alpha = [n/p] + [n/p^2] + [n/p^3] + \ldots$$

(los corchetes denotan la parte entera del número).

1.99. ¿Cuántos ceros tiene al final el número 3!!! en la notación decimal?

1.100. Supongamos que n números, 1, 2, . . ., n están dispuestos uno tras otro en círculo. Desplazándonos por el círculo, tachamos cada segundo número. Hállese el último número N no tachado. Demuéstrese que

$$N = 2n - 2^{[\log_2 n]+1} + 1.$$

MÉTODO DE FUNCIONES GENERATRICES

Se denomina *función generatriz*, o función generatriz ordinaria, de una sucesión de números $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ a una serie formal

$$A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots,$$

donde t es una variable formal. En este caso escribiremos $a_n = \mathrm{Coef}_{t^n}\{A(t)\}$. Por definición, dos funciones generatrices

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

son iguales, si $a_n = b_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Para las funciones generatrices ordinarias se introduce el álgebra de las series formales de potencias, o bien álgebra de Cauchy con operaciones de adición, multiplicación, superposición, sustitución, diferenciación o integración. En particular, una función generatriz $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ es, por definición, un producto de las funciones generatrices

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \quad C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

cuando y sólo cuando, para cualquier $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}.$$

Una sucesión de números $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ lleva el nombre de *convolución de sucesiones* $b_0, b_1, \ldots, b_n$ y $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots,$ si $A(t) = B(t)\,C(t)$.

Se llama *función generatriz exponencial* de la sucesión $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ a una serie

$$E(t) = a_0 + a_1 \frac{t}{1!} + \ldots + a_n \frac{t^n}{n!} + \ldots,$$

donde, al igual que en el caso anterior, t es una variable formal. Aquí, $a_n = \mathrm{Coef}_{t^n}\{E(t)\}$. En el álgebra de funciones generatrices exponenciales el producto $E(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ de funciones generatrices exponenciales $F(t)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}$ y $C(t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$ se define, a diferencia del álgebra de Cauchy, por la igualdad $a_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_n c_{n-k}$, $n=0, 1, 2, \ldots$

Observemos que si por t entendemos una variable compleja, entonces, para t inferior al radio de convergencia de la serie correspondiente, la función generatriz será analítica. Con este motivo surge un problema recíproco: hallar los coeficientes de un desarrollo potencial según la función analítica.

§ 1. Funciones generatrices: propiedades y operaciones

Hállense las funciones generatrices de las siguientes sucesiones:

2.1. $f(n)=\begin{cases} 1, & n=0, 1, \ldots, N, \\ 0, & n>N. \end{cases}$

2.2. $f(n)=\begin{cases} n+1, & n=0, 1, \ldots, N, \\ 0, & n\geqslant N+1. \end{cases}$

2.3. $f(n)=\begin{cases} (n+1)(n+2), & n=0, 1, \ldots, N-1, \\ 0 & n\geqslant N, \end{cases}$

2.4. $f(n)=1$, $n=0, 1, 2, \ldots$

2.5. $f(n)=\alpha^n$, $n=0, 1, 2, \ldots$

2.6. $f(n)=\alpha n$, $n=0, 1, 2, \ldots$

2.7. $f(n)=n^2$, $n=0, 1, 2, \ldots$

2.8. $f(n)=n^k$, $n=0, 1, 2, \ldots$

2.9. $f(n)=n\alpha^n$, $n=0, 1, 2, \ldots$

2.10. $f(n)=C_{n+p-1}^{n}\alpha^n$, $n=0, 1, 2, \ldots$

2.11. $f(n)=C_{n+p-2}^{n-1}\alpha^n$, $n=1, 2, \ldots$

2.12. $f(n)=\begin{cases} 0, & n=0, \\ \alpha^n/n, & n=1, 2, \ldots \end{cases}$

2.13. $f(n)=\begin{cases} 0, & n=0, \\ \alpha^n/n! & n=1, 2, \ldots \end{cases}$

2.14. $f(n)=\begin{cases} 0, & n \text{ es par}, \\ \alpha^n/n!, & n \text{ es impar}. \end{cases}$

2.15. $f(n)=\begin{cases} 0, & n \text{ es impar}, \\ \alpha^n/n!, & n \text{ es par}. \end{cases}$

2.16. $f(n) = \operatorname{sen} \alpha n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.17. $f(n) = \cos \alpha n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Hállese la función generatriz de la succsión $F(n)$ a través de la función generatriz de la sucesión $f(n)$, si

2.18. $F(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ f(n-1), & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$

2.19. $F(n) = f(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.20. $F(n) = f(n+k)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $k \in \mathrm{N}$, $k > 0$,

2.21. $F(n) = \alpha^n f(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.22. $F(n) = nf(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.23. $F(n) = \sum\limits_{i=0}^{n} f(i)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.24. $F(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, 1, \ldots, k-1, \\ f(n-k), & n \geqslant k. \end{cases}$

2.25. $F(n) = f(n+1) - f(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.26. $F(n) = \sum\limits_{r=0}^{n} f(r)\, g(n-r)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Hállese la función generatriz exponencial $F^e(z)$ de la sucesión $F(n)$ expresada a través de $f^e(z)$:

2.27. $F(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ f(n-1), & n = 1, 2 \ldots \end{cases}$

2.28. $F(n) = f(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.29. $F(n) = nf(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.30. $F(n) = \alpha^n f(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.31. $F(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, 1, 2, \ldots, k-1, \\ f(n-k), & n \geqslant k. \end{cases}$

2.32. $F(n) = f(n+1) - f(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.33. $F(n) = \sum\limits_{r=0}^{n} C_n^r f(n-r)\, g(r)$.

2.34. $F(n) = \sum \dfrac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_m!} f_1(k_1)\, f_2(k_2) \ldots f_m(k_m)$.

2.35. ¿Cómo son las sucesiones a las cuales corresponden las funciones generatrices

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1 + x + x^2 + \ldots)^n, \quad \frac{x^n}{(1-x)^n} = (x + x^2 + x^3 + \ldots)^n?$$

2.36. Sea $A(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$ una función generatriz corriente y sea α una raíz primitiva de n-ésima potencia de 1, $\alpha = \exp\{2\pi i/n\}$, donde i es la unidad imaginaria.

Dividamos $A(z)$ en n secciones, de las cuales la k-ésima será $A_k^{(n)}(z) = a_k z^k + a_{k+n} z^{k+n} + \ldots$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ (2.1) (*método de división en secciones de Morgan*). Muéstrese que

$$A_k^{(n)}(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha^{kj}} A(\alpha^j z). \tag{2.2}$$

2.37. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_k$ unas variables. Muéstrese que

$$(1 + x_1 z)(1 + x_2 z) \ldots (1 + x_k z) =$$
$$= 1 + \sigma_1(x_1, \ldots, x_k) z + \sigma_2(x_1, \ldots, x_k) z^2 + \ldots + \sigma_k(x_1, \ldots, x_k) z^k,$$

donde $\sigma_m(x_1, \ldots, x_k) = \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant k} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}$ $(m = 1, 2, \ldots, k)$ es la m-ésima función simétrica elemental. En particular, si

$$C_k^m = \binom{k}{m} = \sigma_m(x_1, \ldots, x_k)|_{x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 1}$$

es el número de combinaciones de k según m, entonces

$$C_k(z) = (1 + z)^k = \sum_{m=0}^{k} C_k^m z^k, \tag{2.3}$$

donde $C_k^0 = 1$.

2.38. Demuéstrense las siguientes propiedades de las combinaciones:

a) $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$, $n = 1, 2, \ldots$; $k = 1, 2, \ldots, n+1$; las condiciones iniciales son: $C_1^0 = C_1^1 = 1$;

b) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$;

c) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$;

d) para $m = 0, 1, \ldots, n-1$ es válida la identidad de Van der Monde

$$C_n^k = \sum_{j=0}^{k} C_{n-m}^j C_m^{k-j}.$$

2.39. Sean

$$S_m(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} x_i^m,$$

$$\sigma_m(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant k} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}, \quad 1 \leqslant m \leqslant k,$$

sumas potenciales y funciones simétricas elementales, respectivamente. Demuéstrese que

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m}\sigma_m(x_1,\ \ldots,\ x_h)\,z^m=$$

$$=\exp\left\{-\sum_{j=1}^{\infty}S_j(x_1,\ \ldots,\ x_h)\frac{z^j}{j}\right\}. \qquad (2.4)$$

(La fórmula (2.4) se llama a veces fórmula de Waring.) Observemos que el primer miembro de (2.4) contiene sólo un número finito de sumandos.

2.40. Sea $\pi=\pi(n)$ una partición no ordenada $\{1^{k_1}2^{k_2}\ \ldots\ n^{k_n}\}$ del número n, donde k_i es el número de partes iguales a i, de suerte que $n=k_1+2k_2+\ \ldots\ +nk_n$; $k(\pi)$ es el número de partes en la partición π, es decir. $k(\pi)=\sum_{i=1}^{n}k_i$, y para cada $j=1,\ 2,\ \ldots$

$$A_j(x)=a_0(j)+a_1(j)\,x+\ \ldots\ +a_h(j)\,x^h+\ \ldots$$

es una función generatriz de la sucesión $a_0(j)\,a_1(j),\ \ldots,\ a_h(j),\ \ldots$

Demuéstrese que

$$\prod_{j=1}^{\infty}A_j(x^j)=\prod_{j=1}^{\infty}a_0(j)+\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sum_{\pi(n)}a_{k_1}(1)\ \ldots\ a_{k_n}(n)\prod_{m=n+1}^{\infty}a_0(m), \qquad (2.5)$$

donde $\sum\limits_{\pi(n)}$ significa la sumación respecto de todas las particiones del número n.

2.41. Sea p_n el número de particiones no ordenadas de n, $n\geqslant 1$, $p_0=1$. Introduzcamos la función generatriz $p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n$. Demuéstrese que

$$p(x)=\prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^j}. \qquad (2.6)$$

2.42. Denotemos con $p_{n,k}$, para $n\geqslant 1$, el número de particiones de n en k partes; $p_{00}=1$. Demuéstrese que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}y^k\right)x^n=\prod_{j=1}^{\infty}(1-yx^j)^{-1}. \qquad (2.7)$$

2.43. Muéstrese que

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1-y_jx^j)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\pi(n)}y_1^{k_1}y_2^{k_2}\ \ldots\ y_n^{k_n}\right)x^n. \qquad (2.8)$$

2.44. Muéstrese que

$$\exp\left\{\frac{xy}{1-x}\right\}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n\sum_{\pi(n)}\frac{y^{k(\pi)}}{k_1!\,k_2!\,\ldots\,k_n!}\right). \tag{2.9}$$

2.45. Sea a_1, a_2 cierta sucesión numérica y supongamos que para toda partición $\pi=\{1^{k_1}2^{k_2}\,\ldots\,n^{k_n}\}$ del número n se verifica

$$L(\pi)=a_1k_1+a_2k_2+\ldots+a_nk_n.$$

Demuéstrese que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n\sum_{\pi(n)}L(\pi)\right)=p(x)\sum_{j=1}^{\infty}a_j\frac{x^j}{1-x^j}, \tag{2.10}$$

donde $p(x)$ es la función generatriz de las particiones definida en el problema 2.41.

2.46. Demuéstrese la identidad

$$\sum_{\pi(n)}\frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}{k_1!\,k_2!\,\ldots\,k_n!}=\binom{n-1}{k-1}, \tag{2.11}$$

donde la sumación se realiza respecto de todas las particiones $\pi=$ $=\{1^{k_1}2^{k_2}\,\ldots\,n^{k_n}\}$ del número n tal que $k(\pi)=k$.

2.47. Demuéstrese que en las designaciones de los problemas 2.41 y 2.45 tiene lugar la identidad

$$\sum_{\pi(n)}L(\pi)=\sum_{u+v=n}p_u\sum_{d\mid v}a_d,\quad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{2.12}$$

2.48. Pruébese que

$$np_n=\sum_{k=0}^{n-1}p_k\sigma_{n-k}, \tag{2.13}$$

donde $\sigma_v=\sum_{d\mid v}d$ es la suma de divisores v.

2.49. Demuéstrese que

$$\sum_{\pi(n)}(k_1+\ldots+k_n)=\sum_{k=0}^{n-1}p_k\tau(n-k),$$

donde $\tau(v)=\sum_{d\mid v}1$ es el número de divisores v.

2.50. Sea $\sigma(x)=\sigma_1+\sigma_2x+\ldots+\sigma_nx^{n-1},+\ldots$ una función generatriz de los números σ_n definidos en el problema 2.48. Demuéstrese que

a) $$dp(x)/dx=\sigma(x)\,p(x)$$

y que, por consiguiente,

b) $$p(x) = \exp\left\{\sigma_1 x + \frac{\sigma_2}{2} x^2 + \ldots + \frac{\sigma_n}{n} x^n + \ldots\right\};$$

c) $$p(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \frac{x^n}{n!},$$

donde $C_n(y_1, \ldots, y_n)$ es el índice cíclico del grupo simétrico de grado n; en particular,

d) $$p_n = \frac{1}{n!} C_n(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

2.51. Sean $E(x)$ y $F(x)$ funciones generatrices exponenciales de las sucesiones $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ y $b_0, b_1, \ldots, b_k$, respectivamente, donde $a_0 = 0$, $b_0 = 1$. Demuéstrese que $E(x)$ y $F(x)$ satisfacen la relación

$$F(x) = \exp\{E(x)\}, \tag{2.14}$$

cuando y sólo cuando para cada $n \geqslant 0$ se cumplen las igualdades

$$b_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j a_{j+1} b_{n-j}. \tag{2.15}$$

§ 2. Números especiales y funciones especiales

2.52. Denominemos $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$-*partición* del n-conjunto M a un juego ordenado $M_1, M_2, \ldots, M_k$ de subconjuntos M tales que $M_i \cap M_j = \varnothing$, siempre que $i \neq j$, y $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k = M$, con la particularidad de que $|M_1| = r_1, \ldots, |M_k| = r_k$. Los números r_i son no negativos y satisfacen la relación $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$. Demuéstrese que el número de $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$-particiones es

$$\sigma(r_1, r_2, \ldots, r_k) = n!/(r_1! r_2! \ldots r_k!).$$

2.53. Sean $k_1, k_2, \ldots, k_n$ unos números enteros no negativos tales que

$$k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n.$$

Muéstrese que el número de particiones de un n-conjunto que contienen k_i i-subconjuntos $(i = 1, 2, \ldots)$, es

$$B_n(k_1, \ldots, k_n) = \frac{n!}{(1!)^{k_1} (2!)^{k_2} \ldots (n!)^{k_n} k_1! k_2! \ldots k_n!}.$$

2.54. Designemos con $P_n(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ el número de permutaciones (sustituciones) de n símbolos que contienen k_1 ciclos de longitud 1, k_2 ciclos de longitud 2, etc., k_n ciclos de longitud n.

Muéstrese que

a) $P_n(k_1, \ldots, k_n) = (0!)^{k_1}(1!)^{k_2}(2!)^{k_3} \ldots$

$$\ldots ((n-1)!)^{k_n} B_n(k_1, \ldots, k_n)$$

y, por consiguiente,

b) $$P_n(k_1, \ldots, k_n) = \frac{n!}{k_1!\,k_2! \ldots k_n!\,1^{k_1}2^{k_2} \ldots n^{k_n}}.$$

2.55. Designemos con B_n el número de toda clase de particiones de un conjunto compuesto por $n \geqslant 1$ elementos. Estos números llevan el nombre de Bell. Pongamos, además, $B_0 = 1$. Demuéstrese que los números de Bell satisfacen la relación recurrente

$$B_{n+1} = \binom{n}{0} B_0 + \binom{n}{1} B_1 + \ldots + \binom{n}{n} B_n, \quad n \geqslant 0. \tag{2.16}$$

2.56. Muéstrese que el número de particiones diferentes de n-conjunto (número de Bell) puede escribirse en la forma

$$B_n = \sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} \frac{n!}{\prod_{s=1}^{n} (s!)^{k_s} k_s!},$$

donde la sumación se realiza respecto de diferentes particiones del número n tal que $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$.

2.57. Examinemos, para cada $n \geqslant 1$, un polinomio de n variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

a) $$Y_n(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} B_n(k_1, \ldots, k_n)\, y_1^{k_1} y_2^{k_2} \ldots y_n^{k_n}, \tag{2.17}$$

donde $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$, y los números $B_n(k_1, \ldots, k_n)$ están definidos en el problema 2.53. Muéstrese que la función generatriz exponencial de estos polinomios es

$$1 + \sum_{n=1} Y_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) \frac{z^n}{n!} = \exp\left\{\sum_{n=1} y_n \frac{z^n}{n!}\right\}. \tag{2.18}$$

(Estos polinomios llevan el nombre de *polinomios de Bell*).

b) Sea $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$ una función generatriz exponencial de los números de Bell, definidos en el problema 2.55. Muéstrese que

$$B(x) = \exp\{e^x - 1\}. \tag{2.19}$$

2.58. Sea $c_0 = 1$ y supongamos que para cada $n \geqslant 1$, $c_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ es un polinomio de las variables $y_1, \ldots, y_n$ de la forma

$$c_n(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} P_n(k_1, \ldots, k_n)\, y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n}, \qquad (2.20)$$

donde $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$, y los números $P_n(k_1, \ldots, k_n)$ están definidos en el problema 2.54. Muéstrese que la función generatriz exponencial de los polinomios $c_n(y_1, \ldots, y_n)$ es

$$1 + \sum_{n=1} c_n(y_1, \ldots, y_n)\frac{z^n}{n!} = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{z^n}{n}\right\}. \qquad (2.21)$$

2.59. Introduzcamos los polinomios de n variables:

$$Y_{n,k}(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} B_n(k_1, \ldots, k_n)\, y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n}, \qquad (2.22)$$

donde $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$, $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$, y los números $B_n(k_1, \ldots, k_n)$ están definidos en el problema 2.53. Muéstrese que

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} Y_{n,k}(y_1, \ldots, y_n)\, x^k \frac{z^n}{n!} = \exp\left\{x \sum_{i=1}^{\infty} y_i \frac{z^i}{i!}\right\} \qquad (2.23)$$

y, por consiguiente,

$$\sum_{k=1}^{n} Y_{n,k}(y_1, \ldots, y_n) = Y_n(y_1, \ldots, y_n), \qquad (2.24)$$

donde $Y_n(y_1, \ldots, y_n)$ son polinomios de Bell del problema 2.57, *a*); y, además, muéstrese que para $k \geqslant 1$

$$\sum_{n=k}^{\infty} Y_{n,k}(y_1, \ldots, y_n)\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left[\sum_{i=1}^{\infty} y_i \frac{z^i}{i!}\right]^k, \qquad (2.25)$$

es decir,

$$Y_{n,k}(y_1, \ldots, y_n) = n!\,\mathrm{Coef}_{z^n}\left[\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{\infty} y_i \frac{z^i}{i!}\right]^k. \qquad (2.26)$$

2.60. Demuéstrense las siguientes propiedades de los polinomios de Bell $Y_n(y_1, \ldots, y_n)$, definidos por la igualdad (2.17):

a) para $n = 0, 1, \ldots$ tiene lugar una relación recurrente

$$Y_{n+1} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} y_{s+1} Y_{n-s};$$

b) $Y_n(cy_1, c^2y_2, \ldots, c^ny_n) = c^nY_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$;

c$_1$) $\frac{\partial}{\partial y_j} Y_n(y_1, \ldots, y_n) = \binom{n}{j} Y_{n-j}(y_1, \ldots, y_{n-j}),\ j = 1, 2, \ldots, n$;

c$_2$) para $r = 1, 2, \ldots, [n/j]$

$$\frac{\partial^r}{\partial y_j^r} Y_n(y_1, \ldots, y_n) = \frac{n!}{(j!)^r (n-rj)!} Y_{n-rj}(y_1, \ldots, y_{n-rj});$$

c$_3$) para $r > [n/j]$

$$\frac{\partial^r}{\partial y_j^r} Y_n(y_1, \ldots, y_n) = 0;$$

d) los polinomios $Y_n(y_1, \ldots, y_n)$ satisfacen el teorema de adición

$$Y_n(y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} Y_k(y_1, \ldots, y_k) \times$$
$$\times Y_{n-k}(x_1, \ldots, x_{n-k}), \quad n = 1, 2, \ldots;$$

e)
$$Y_{n+1} = \left(y_1 + \sum_{s=1}^{n} y_{s+1} \frac{\partial}{\partial y_s}\right) Y_n.$$

2.61. Sea H un subconjunto de una serie natural $A_H(x) = \sum_{k \in H} \frac{x^k}{k!}$ y $B_n(H)$, el número de particiones del n-conjunto en partes, cuyas potencias representan precisamente los elementos de H. Entonces, para la función generatriz exponencial de los números $B_n(H)$ se verifica la relación

$$B_H(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(H) \frac{x^n}{n!} = \exp\{A_H(x)\}. \tag{2.27}$$

donde

$$B_n(H) = \sum_{\sum_{k=1}^{n} kl_k = n,\ k \in H} \frac{n!}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \in H}}^{n} (k!)^{l_k} l_k!}, \tag{2.28}$$

y para los números $B_n(H)$ es válida la relación recurrente

$$B_{n+1}(H) = \sum_{k+1 \in H} \binom{n}{k} B_{n-k}(H). \tag{2.29}$$

2.62. Designemos con $S_k^l(n, k)$ el número de particiones de un n-conjunto en k partes no vacías, $n = 1, 2, \ldots; k = 1, \ldots, n$. Pongamos, por definición, $S(0, 0) = 1$, $S(0, m) = 0$, si $m \neq 0$, y $S(n, k) = 0$, si $n > 0$ y $k \notin \{1, 2, \ldots, n\}$. Los números $S(n, k)$ se llaman *números de Stirling de 2° género.*

a) Cerciórese de que

$$S(n, 1) = 1, \quad S(n, n) = 1, \quad \sum_{k=0}^{n} S(n, k) = B(n), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

donde $B(n) = B_n$ son los números de Bell.

b) Muéstrese que para los números de Stirling de 2° género se verifica la relación recurrente

$$S(n, k) = kS(n-1, k) + S(n-1, k-1), \quad n \geqslant 1,$$

con las condiciones iniciales $S(0, 0) = 1$, $S(0, k) = 0$, $k \neq 0$.

c) Demuéstrese que tiene lugar la representación

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum \frac{n!}{r_1! \, r_2! \, \ldots \, r_k!},$$

donde la sumación se realiza respecto de todos los juegos de números enteros positivos $r_1, \ldots, r_k$ tales que $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$.

Demuéstrese que

$$S(n, k) = \sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} \frac{n!}{k_1! \ldots k_n! \, (1!)^{k_1} \ldots (n!)^{k_n}},$$

donde $k_1, k_2 + \ldots + k_n = k$, $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$.

e) Compruébese que

$$S(n, n-1) = \binom{n}{2}, \quad n \geqslant 2,$$

$$S(n, n-2) = \sum_{i=1}^{n-2} (n-i-1) \binom{n-i}{2}, \quad n \geqslant 3.$$

2.63. Llamemos *polinomios de Stirling* los siguientes

$$P_n(y) = \sum_{k=0}^{n} S(n, k) \, y^k, \quad P_n(1) = B_n,$$

y, además, pongamos $P_0(y) = 1$. Muéstrese que

$$P_n(y) = y \, [dP_{n-1}(y)/dy + P_{n-1}(y)] \tag{2.30}$$

y que (2.30) es equivalente a la solución

$$P_n(y) \, e^y / y = d \, [e^y P_{n-1}(y)]/dy. \tag{2.31}$$

2.64. Sea $S(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(y) \frac{x^n}{n!}$ una función generatriz exponencial de los polinomios de Stirling. Muéstrese que

$$S(x, y) = \exp\{y(e^x - 1)\}. \tag{2.32}$$

2.65. Introduzcamos para cada $k = 1, 2, \ldots$ las funciones generatrices exponenciales

$$Y_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n, k) \frac{x^n}{n!}. \qquad (2.33)$$

Muéstrese que

$$Y_k(x) = (e^x - 1)^k/k!, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (2.34)$$

2.66. Muéstrese que las funciones generatrices $Y_k(x)$ del problema 2,65 satisfacen la correlación

$$dY_k(x)/dx = kY_k(x) + Y_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (2.35)$$

2.67. Demuéstrese la identidad

$$S(n+1, k) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} S(j, k-1). \qquad (2.36)$$

2.68. Muéstrese que para los polinomios de Stirling $P_n(x)$ quedan cumplidas las relaciones

$$P_{n+1}(x) = x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k(x), \qquad (2.37)$$

$$\frac{d}{dx} P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} P_k(x). \qquad (2.38)$$

2.69. Demuéstrese la identidad

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{y^k}{k!} = e^y P_n(y), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.39)$$

donde $P_n(x)$ son polinomios de Stirling definidos en el problema 2.63, y, como consecuencia, para los números de Bell, la validez de la representación

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}. \qquad (2.40)$$

2.70. Demuéstrese la identidad

$$x \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^n \frac{x^s}{s!} = e^x P_{n+1}(x) \qquad (2.41)$$

y el caso particular:

$$B_{n+1} = \frac{1}{e} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^n \frac{1}{s!}. \qquad (2.42)$$

2.71. Introduzcamos las funciones generatrices $S_0(z) = 1$ también para $k = 1, 2, \ldots$

$$S_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n+k, k) z^n. \qquad (2.43)$$

Demuéstrese la relación recurrente

$$(1 - kz) S_k(z) = S_{k-1}(z), \qquad (2.44)$$

de suerte que

$$(1 - z)(1 - 2z) \ldots (1 - kz) S_k(z) = 1. \qquad (2.45)$$

2.72. Demuéstrese para los números de Stirling de 2° género las siguientes fórmulas

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n, \qquad (2.46)$$

$$S(n, k) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} i^n. \qquad (2.47)$$

2.73. Obténgase para los números de Stirling de 2° género la representación

$$S(n, k) = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_{n-k})} i_1 i_2 \ldots i_{n-k}, \qquad (2.48)$$

donde $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_{n-k} \leqslant k$, es decir, que $S(n, k)$ es igual a la suma de los productos de los elementos de las combinaciones de orden $n - k$ con repitición, mas sin permutaciones de los números $1, 2, \ldots, k$.

2.74. Muéstrese que los números de Stirling de 2° género $S(n, k)$ pueden ser definidos como coeficientes del desarrollo

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} x(x-1) \ldots (x-k+1) S(n, k), \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (2.49)$$

2.75. Sea $q_0 = 1$ y supongamos que para $n \geqslant 1$

$$q_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} B_k B_{n-k}.$$

Muéstrese que la función generatriz exponencial de los números q_n es

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n \frac{z^n}{n!} = e^{e^z + e^{-z} - 2}. \qquad (2.50)$$

2.76. Sea $C(0, 0) = 1$, $C(n, 0) = 0$ para cualquier $n \neq 0$ y $C(0, k) = 0$, siempre que $k \neq 0$. Para $n \geqslant 1$ designemos por

$C(n, k)$ el número de permutaciones de n símbolos con k ciclos. Los números

$$s(n, k) = (-1)^{n+k} C(n, k)$$

se denominan *números de Stirling de* 1^{er} *género*. Muéstrese que

$$C(n, k) = C(n-1, k-1) + (n-1) C(n-1, k), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.51}$$

y, por consiguiente,

$$s(n, k) = s(n-1, k-1) - (n-1) s(n-1, k), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.52}$$

2.77. Sea $C_0(x) = 1$ y supongamos que para $n \geqslant 1$

$$C_n(x) = \sum_{h=0}^{n} C(n, k) x^h.$$

Muéstrese que

$$\begin{aligned} C_n(x) &= (x+n-1) C_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots \\ C_n(x) &= x(x+1) \ldots (x+n-1), \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2.53}$$

2.78. Compruébese que los números de Stirling de 1^{er} género $s(n, k)$ son precisamente coeficientes en el desarrollo

$$(x)_n = x(x-1) \ldots (x-n+1) = \sum_{h=1}^{n} s(n, k) x^h. \tag{2.54}$$

2.79. Muéstrese que las magnitudes $(-1)^{n+h} s(n, k)$ son positivas para $n \geqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$ y son iguales a

$$(-1)^{n+h} s(n, k) = a_{n-h}(1, 2, \ldots, n-1) =$$
$$= \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_{n-h})} i_1 i_2 \ldots i_{n-h}, \text{ donde } 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-h} \leqslant n-1. \tag{2.55}$$

2.80. Muéstrese que la función generatriz exponencial

$$y_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s(n, k) \frac{x^n}{n!}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$(y_0(x) \equiv 1)$, satisface la relación diferencial recurrente

$$(1+x) \, dy_h(x)/dx = y_{h-1}(x), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.56}$$

Dedúzcase de aquí que

$$y_k(x) = [\ln(1+x)]^h/k!. \tag{2.57}$$

2.81. Muéstrese que la función generatriz

$$s(t, x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} s(n, k)\, x^k \frac{t^n}{n!}$$

es $s(t, x)=(1+t)^x$.

2.82. Demuéstrese la identidad

$$s(n+1, k)=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j j! \binom{n}{j} s(n-j, k-1). \qquad (2.58)$$

2.83. Muéstrese que los números de Stirling de 1er y 2° género están ligados entre sí mediante las relaciones

$$\sum_{k\geq 1} S(n, k)\, s(k, m)=\delta_{nm}, \qquad (2.59)$$

$$\sum_{k\geq 1} s(n, k)\, S(k, m)=\delta_{nm}, \qquad (2.60)$$

donde $\delta_{nm}=1$, si $n=m$, y $\delta_{nm}=0$, si $n\neq m$, y las sumas se toman respecto de todos los valores k, para los cuales $s(k, m)$ y $S(n, k)$ son distintas de cero.

2.84. Sean $a_1, a_2, \ldots$ y $A_1, A_2, \ldots$ dos sucesiones numéricas tales que

$$A_n=\sum_{\nu=1}^{n} s(n, \nu)\, a_\nu, \quad n=1, 2, \ldots \qquad (2.61)$$

Muéstrese que en este caso

$$a_n=\sum_{\nu=1}^{n} S(n, \nu)\, A_\nu, \quad n=1, 2, \ldots, \qquad (2.62)$$

y viceversa, de (2.62) se deduce (2.61).

2.85. Muéstrese que

$$\sum_{k=0}^{n} s(n, k)\, B_k=1, \quad n=0, 1, \ldots, \qquad (2.63)$$

donde $s(n, k)$ son los números de Stirling de 1er género; B_k son los números de Bell.

2.86. Demuéstrese que los números de Stirling de 2° género $s(n, k)$ y los polinomios de Stirling $P_n(x)$ (véase el problema 2.63) están ligados mediante la relación

$$\sum_{k=0}^{n} s(n, k)\, P_k(x)=x^n, \quad n=0, 1, \ldots \qquad (2.64)$$

2.87. Pongamos

$j_0(x)=1$, $j_n(x)=x(x-1)\ldots(x-n+1)$, $n=1, 2, \ldots$

Muéstrese que los polinomios $j_n(x)$ y los números de Stirling de 2° género están ligados mediante la relación

$$\sum_{k=0}^{n} S(n, k)\, j_k(x) = x^n, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.65}$$

2.88. Muéstrese que el número de métodos para alojar n diferentes objetos (mostacillas) en m diferentes células, a condición de que ninguna de las células esté vacía, es igual a

$$\mu(n, m) = m!S(n, m) \tag{2.66}$$

(donde $S(n, m)$ es el número de Stirling de 2° género),

$$\mu(n, m) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} (m-j)^n \tag{2.67}$$

y se expresa por la relación recurrente

$$\mu(n, m) = m\,[\mu(n-1, m) + \mu(n-1, m-1)]. \tag{2.68}$$

2.89. Muéstrese que el número de métodos para alojar n diferentes objetos en m cajones distinguibles, a condición de que p cajones estén ocupados y $(m-p)$ cajones libres, es igual a

$$\mu_p(n, m) = m(m-1)\ldots(m-p+1)\,S(n, p). \tag{2.69}$$

2.90. Dese la interpretación combinatoria de la identidad

$$m^n = \sum_{p=1}^{m} (m)_p\, S(n, p), \tag{2.70}$$

donde $(m)_p = m(m-1)\ldots(m-p+1)$, m es un número positivo entero.

2.91. Muéstrese que el número de métodos para distribuir n objetos distinguibles en m células iguales, a condición de que ninguna de ellas quede vacía, se determina por el número de Stirling de 2° género $S(n, m)$, y si la condición mencionada está ausente, por el número de Bell B_n.

2.92. Muéstrese que un número igual al producto de n diferentes factores simples puede ser representado en forma del producto de m factores mediante $S(n, m)$ diferentes métodos.

2.93. Introduzcamos los números generalizados de Stirling $S(n, m, k)$ que se definen como el número de métodos para alojar n objetos distinguibles en m células diferentes dividido por $k!$, a condición de que ninguna de las k células fijas citadas quede vacía. Muéstrese que

$$S(n, m, k) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (m-k)^{n-\nu} S(\nu, k). \tag{2.71}$$

2.94. Examinemos una función generatriz exponencial de los números generalizados de Stirling

$$\varphi_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n, m, k) \frac{x^n}{n!}. \tag{2.72}$$

Muéstrese que

$$\varphi_k(x) = e^{(m-k)x} (e^x - 1)^k / k! \tag{2.73}$$

§ 3. Teoría de Polya

Si la permutación (sustitución) de un n-conjunto se desarrolla en el producto de b_i ciclos de longitud i ($i = 1, \ldots, n$), suele decirse que la permutación es del tipo $(b_1, \ldots, b_n)$. Si G es un grupo de permutaciones del n-conjunto, entonces el polinomio

$$P_G(x_1, \ldots, x_n) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} x_1^{b_1} \ldots x_n^{b_n},$$

donde $(b_1, \ldots, b_n)$ es el tipo g, se denomina *índice cíclico del grupo G*. Si G es un grupo de permutaciones del conjunto S, entonces dos elementos s_1 y s_2 se llaman equivalentes (la notación es $s_1 \sim s_2$), si $\exists g \in G$: $gs_1 = s_2$. Las clases de equivalencia se llaman *conjuntos transitivos*, o bien *órbitas*.

LEMA DE BERNSAID. *El número de conjuntos transitivos es igual a*

$$|G|^{-1} \sum_{g \in G} \psi(g), \quad \textit{donde} \quad \psi(g) = |\{s \in S\colon\ gs = s\}|.$$

Sean D y R unos conjuntos finitos y sea G un grupo de permutaciones del conjunto D. Designemos con R^D un conjunto de funciones, para las cuales D será el campo de definición y R, el campo de valores. Para $f_1, f_2 \in R^D$

$$f_1 \sim f_2, \quad \text{si} \quad \exists g \in G\colon f_1(g\alpha) = f_2(\alpha) \quad \forall \alpha \in D.$$

A todo elemento $r \in R$ se le atribuye el peso $\omega(r)$, esto es, el elemento de un anillo conmutativo. El peso de la función $f \in R^D$ es, por definición, $W(f) = \prod_{d \in D} \omega(f(d))$. *El inventario* de cualquier conjunto Q con elementos provistos de peso será

$$\operatorname{Inv} Q = \sum_{q \in Q} \omega(q).$$

Si los elementos f_1 y f_2 son equivalentes, tienen un peso igual. Por eso resulta posible definir *el peso de la clase de equivalencia* $W(F)$ como el peso $W(f)$ de cualquier elemento $f \in F$.

TEOREMA FUDDAMENTAL DE POLYA. *El inventario de las clases de equivalencia es igual a*

$$\sum_{F} W(F) = P_G \left\{ \sum_{r \in R} \omega(r),\ \sum_{r \in R} [\omega(r)^2],\ \sum_{r \in R} [\omega(r)]^3,\ \ldots \right\}.$$

En particular, si los pesos se han elegido iguales a 1, entonces obtenemos el número de clases de equivalencia igual a $P_G(|R|, |R|, |R|, \ldots)$.

2.95. Sea $N = \{1, \ldots, n\}$, y S_n, un grupo simétrico sobre N.

Si $\pi \in S_n$ divide N en b_i ciclos de longitud i $(i = 1, \ldots, n)$, se dice que la permutación π es *del tipo* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Demuéstrese que el número de permutaciones con el tipo dado $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ es igual a

$$n! \Big/ \prod_{i=1}^{n} (i^{b_i} b_i!)$$

2.96. Sea G un subgrupo del grupo simétrico S_n. Para cada $g \in G$ formamos el producto $x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n}$, siempre que $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ es del tipo g.

Demuéstrese que

$$P_{S_n}(x_1, \ldots, x_n) = \sum{}^{*} \frac{x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n}}{\prod_{i=1}^{n} (i^{b_i} b_i!)},$$

donde el signo * significa que la sumación se realiza respecto de toda clase de números enteros no negativos $b_1, b_2, \ldots, b_n$ que satisfacen la condición $b_1 + 2b_2 + \ldots + nb_n = n$.

2.97. Demuéstrese el teorema de Cayley: todo grupo finito G es isomorfo a cierto subgrupo del grupo simétrico $S_{|G|}$. Dicho subgrupo lleva el nombre de *representación de Cayley* del grupo G.

2.98. Sea G un grupo finito. Se denomina *índice cíclico* P_G de este grupo el índice cíclico de su representación de Cayley. Demuéstrese que

$$P_G = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} [x_{k(g)}]^{n/k(g)} = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \nu(d) (x_d)^{n/d},$$

donde n es el orden del grupo G; $k(g)$ es el orden del elemento $g \in G$; $\nu(d)$, el número de elementos $g \in G$ cuyo orden es $k(g) = d$.

2.99. Sea G un grupo de todas las raíces de n-ésima potencia de la unidad, $G = \{e^{2\pi i j/n}\}$, donde $j = 1, \ldots, n$, e i, la unidad imaginaria.

Demuéstrese que $P_G = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (x_n/(n, j))^{(n, j)}$, donde (n, j) es el máximo común divisor de n y j.

2.100. Sea G el conjunto de todas las permutaciones de los vértices de un tetraedro que pueden obtenerse haciéndolo girar. Hállese el índice cíclico del grupo G.

2.101. Sea G un conjunto de todas las permutaciones de las aristas de un tetraedro que pueden ser obtenidas haciéndolo girar. Hállese el índice cíclico del grupo G.

2.102. Sea G un conjunto de todas las permutaciones de las caras de un tetraedro que pueden ser obtenidas haciéndolo girar. Hállese el índice cíclico del grupo G.

2.103. Sea G un conjunto de permutaciones de los vértices de un cubo que pueden ser obtenidas mediante sus revoluciones. Hállese el índice cíclico del grupo G.

2.104. Sea G un conjunto de todas las permutaciones de las aristas de un cubo que pueden ser obtenidas haciéndolo girar. Hállese el índice cíclico del grupo G.

2.105. Sea G un conjunto de todas las permutaciones de las caras de un cubo que pueden ser obtenidas haciéndolo girar. Hállese el índice cíclico del grupo G.

2.106. Demuéstrese que el índice cíclico de un grupo simétrico S_n es igual al coeficiente de z^n en el desarrollo

$$\exp \{zx_1 + z^2x_2/2 + z^3x_3/3 + \ldots\}.$$

2.107. Sea G un grupo de permutaciones del conjunto S, y H, un grupo de permutaciones del conjunto T. Supongamos que $S \cap T = \varnothing$, y $S \cup T = U$. A cualquier opción de $g \in G$ y $h \in H$ le corresponde la permutación $g \times h$ del conjunto U definida del modo siguiente:

$$u \to gu, \quad \text{si} \quad u \in S; \quad u \to hu, \quad \text{si} \quad u \in T.$$

a) Muéstrese que estas permutaciones forman un grupo cuyo orden es igual a $|G|\,|H|$. Este grupo lleva el nombre de *producto directo de los grupos* G y H y se denota $G \times H$.

b) Muéstrese que si $g \in G$ y $h \in H$ tienen los tipos $(b_1, \ldots, b_n)$ y $(c_1, \ldots, c_n)$, respectivamente, entonces $g \times h$ es del tipo $(b_1 + c_1, b_2 + c_2, \ldots)$.

c) Demuéstrese la fórmula $P_{G\times H} = P_G P_H$.

2.108. G es un grupo finito y S, un conjunto finito. Supongamos que existe una aplicación homomorfa π del grupo G en el grupo simétrico del conjunto S:

$$\pi\colon g \to \pi_g \quad \forall g \in G.$$

En este caso suele decirse que G actúa en S. Para $s_1, s_2 \in S$

$$s_1 \sim s_2 \Leftrightarrow \exists g \in G\colon \pi_g s_1 = s_2.$$

Demuéstrese que $\sim$ es una relación de equivalencia. (Las clases de equivalencia que le corresponden a esta relación se llaman conjuntos transitivos.)

2.109. Demuéstrese *el lema de Bernsaid*: el número de conjuntos transitivos definidos por el grupo G, que actúa sobre el conjunto S, es igual a

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi(g),\ \ \psi(g)=|\{s\in S:\ \pi_g s=s\}|,$$

2.110. Sea $S = \{a, b, c, d\}$ y $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$ donde

$$\pi_1=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d\end{pmatrix},\qquad \pi_2=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d\end{pmatrix},$$
$$\pi_3=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c\end{pmatrix},\qquad \pi_4=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c\end{pmatrix}.$$

La relación de equivalencia en S viene inducida por el grupo G. Hállese el número de clases de equivalencia.

2.111. Partiendo de las letras a y b se forman palabras de longitud 3. Ellas se consideran equivalentes, si se obtienen una de la otra al cambiar de lugar las letras extremas, por ejemplo, $abb \sim bba$. Determínese el número de clases de equivalencia sirviéndose del lema de Bernsaid.

2.112. Se hacen collares de abalorios (cuentas de vidrio) de tres colores. Cada collar está compuesto por cinco abalorios. Se consideran iguales aquellos que se obtienen uno del otro por revolución en un plano (no se admiten reflexiones especulares). Determínese el número de diferentes collares.

2.113. Se hacen collares de abalorios de k colores. Cada collar está compuesto por n abalorios. Se consideran iguales aquellos collares que se obtienen uno del otro por revolución en un plano (no se admiten reflexiones especulares). Determínese el número de diferentes collares aplicando el teorema de Polya.

2.114. n hombres se sientan alrededor de una mesa. ¿Cuántos son en este caso los diferentes modos de sentarse, si se consideran iguales aquellos que se obtienen por desplazamiento de todas las personas en sentido horario en un número arbitrario (pero igual para todos) de asientos? (Hágase uso del lema de Bernsaid.)

2.115. Los números del 1 al 10^5 están escritos cada uno en hojas sueltas. Los números inferiores a 10^5 comienzan por el número correspondiente de ceros, por ejemplo, $346 = 000346$. Convengamos en considerar que las cifras 0, 1, 8 significan lo mismo tanto en la inscripción directa (normal), como en la forma volcada, mientras que la cifra 6 se convierte, al volcarla, en 9, y viceversa. Por eso, para los números, por ejemplo, 89166 y 99168 podemos preparar tan solo una hoja. ¿Cuántas hojas nos harán falta?

2.116. D, R son unos conjuntos finitos. Designemos con R^D el conjunto de aplicaciones de D en R; G es el grupo de permutaciones del conjunto D. Se escribe

$$f_1 \sim f_2, \quad \text{si} \quad \exists g \in G: f_1(gd) = f_2(d) \quad \forall d \in D.$$

Demuéstrese que: a) $|R^D| = |R|^{|D|}$; b) $\sim$ es una relación de equivalencia en el conjunto R^D.

2.117. Las caras de un cubo están pintadas de dos colores: azul y rojo. Las coloraciones de dos cubos se consideran equivalentes, si uno de ellos se puede girar de un modo tal que los cubos dejen de parecer diferentes. ¿Cuántas son las clases de equivalencia y cuál es la potencia de cada una de ellas?

2.118. D, R son unos conjuntos finitos; G es un grupo de permutaciones del conjunto D. A todo elemento $r \in R$ se le está atribuido un peso $\omega(r)$, esto es, el elemento de un anillo conmutativo. El peso $W(f)$ de la función $f \in R^D$ se define como el producto $W(f) = \prod_{d \in D} \omega(f(d))$. Demuéstrese que si las funciones f_1 y f_2 son equivalentes, entonces tienen un peso igual.

2.119. Se denomina *inventario* Inv Q de un conjunto Q a

$$\operatorname{Inv} Q = \sum_{q \in G} \omega(q),$$

donde $\omega(q)$ es un elemento del anillo conmutativo.

Sean D y R unos conjuntos finitos. Demuéstrese que

a) $\operatorname{Inv} R^D = (\operatorname{Inv} R)^{|D|}$;

b) Si D está dividido en varios componentes disjuntos $D_1, \ldots, D_k$, y S es el conjunto de todas las funciones que son constantes en cada componente, entonces se verifica la relación

$$\operatorname{Inv} S = \prod_{i=1}^{k} \sum_{r \in R} [\omega(r)]^{|D_i|}.$$

2.120. Las caras de un tetraedro se pintan en dos colores: rojo y azul. Si dos tetraedros dispuestos paralelamente están pintados de un modo distinto, puede ocurrir que uno de ellos se pueda girar de tal manera que ambos dejen de parecer distintos. En este caso pertenecerán a una clase de equivalencia. Calcúlese el número de diferentes clases de equivalencia aplicando el teorema de Polya.

2.121. Determínese, aplicando el teorema de Polya: ¿mediante cuántos métodos se puede pintar un cubo en dos colores de tal modo que cuatro caras sean coloreadas de rojo, y dos caras, de azul? (Dos cubos en el espacio tridimensional se consideran coloreados igual, si uno de ellos se puede girar de tal manera que los cubos se hagan indistinguibles.)

Si X es un conjunto, la relación binaria en X es un subconjunto $P \subset X \times X$; escribimos $x \leqslant y$, si $(x, y) \in P$. La relación binaria recibe el nombre de orden parcial, si satisface las condiciones:

a) $x \leqslant x, \quad \forall x \in X$;

b) $x \leqslant y, \quad y \leqslant x \Rightarrow x = y, \quad \forall x, y \in X$;

c) $x \leqslant y$, $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$, $\forall x, y, z \in X$.

Se denomina *conjunto parcialmente ordenado* al conjunto X junto con el orden parcial en él. El conjunto parcialmente ordenado X se denomina anticadena, si para cualesquiera, $x, y \in X$ de $x \leqslant y$ se deduce que $x = y$. Se llama *automorfismo* del conjunto parcialmente ordenado X a tal permutación g del conjunto X que $x \leqslant y \Leftrightarrow gx \leqslant gy$ para cualesquiera $x, y \in X$.

2.122. Demuéstrese que el conjunto de todos los automorfismos del conjunto parcialmente ordenado X es un grupo respecto a la operación de composición llamado grupo de automorfismos del conjunto parcialmente ordenado X.

2.123. Sea L un subgrupo del grupo de automorfismos de un conjunto finito parcialmente ordenado X. Demuéstrese que las órbitas del grupo L son anticadenas.

Con $X/L = \{C\}$ se denota el conjunto de órbitas del grupo L. En este conjunto se introduce una relación binaria $\preccurlyeq$ del modo siguiente: $C \preccurlyeq C'$, si existen $x' \in C$, $x' \subset C'$ tales que $x \preccurlyeq x'$.

2.124. Demuéstrese que la relación binaria $\preccurlyeq$ en X/L es un orden parcial.

Sea D un conjunto finito parcialmente ordenado, R, una cadena finita y G, un subgrupo del grupo de automorfismos de D. La función $f \in R^D$ se denomina *isótona*, si de $d_1 \leqslant d_2$ se deduce que $f(d_1) \leqslant f(d_2)$ para cualesquiera $d_1, d_2 \in D$. El conjunto de todas las funciones isótonas de D en R se designa por $M(D, R)$.

2.125. Demuéstrese que de $f_1 \in M(D, R)$ y $f_1 \sim f_2$ se deduce $f_2 \in M(D, R)$.

2.126. Demuéstrese que el número de clases de equivalencia de las funciones isótonas de D en R es igual a $|G|^{-1} \sum_{g \in G} |M(D/\{g\}, R)|$, donde por medio de $\{g\}$ se designa un grupo cíclico engendrado por el elemento g.

2.127. Demuéstrese, haciendo uso de la afirmación del problema 2.126, que para los conjuntos finitos D y R con el grupo de permutaciones G sobre el conjunto D el número de clases de equivalencia de las funciones de D en R es igual a $P_G(|R|, |R|, \ldots)$.

MÉTODOS LÓGICOS

§ 1. Método de inclusión y exclusión

Examinemos un n-conjunto de elementos y un m-conjunto de propiedades $p_1, \ldots, p_m$, de las que pueden disponer o no los elementos citados.

Designemos por $N_{i_1, \ldots, i_h}$ $(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_h \leqslant m)$ el número de elementos que poseen las propiedades $p_{i_1}, \ldots, p_{i_h}$, y por $N(r)$ $(0 \leqslant r \leqslant m)$ el número de elementos que poseen exactamente r propiedades.

Siendo fijo k, $1 \leqslant k \leqslant m$, la suma $\sum\limits_{i_1, \ldots, i_h} N_{i_1, \ldots, i_h}$, extendida a toda clase de juegos de números naturales $i_1, \ldots, i_h$ tales que $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_h \leqslant m$, representa el número de elementos (tomando en consideración su multiplicidad) que poseen no menos de k propiedades. Si un elemento posee s propiedades, se contará en la suma mencionada C_s^h veces.

Tiene lugar la siguiente fórmula de inclusión y exclusión:

$$N(r) = \sum_{h=1}^{m} (-1)^{h-r} C_h^r \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_h \leqslant m} N_{i_1, \ldots, i_h}$$

En efecto, un elemento que posee exactamente s, $s \neq r$, propiedades no se tendrá en cuenta en la suma que figura en el segundo miembro de esta igualdad, mientras que el elemento que posee exactamente r propiedades se tendrá en cuenta una sola vez, puesto que

$$\sum_{h=r}^{m} (-1)^{h-r} C_h^r C_s^h = C_s^r \sum_{h=r}^{s} (-1)^{h-r} C_{s-r}^{h-r} = \begin{cases} 1, & r = s, \\ 0, & r \neq s. \end{cases}$$

De esta fórmula se deduce, en particular, que el número de elementos que no posee ninguna de las propiedades $p_1, \ldots, p_m$ es igual a

$$N(0) = \sum_{h=0}^{m} (-1)^h \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_h \leqslant m} N_{i_1, \ldots, i_h}.$$

Si a cada elemento le ponemos en correspondencia un número llamado su peso y si designamos por $V(0)$ la suma de pesos de todos los elementos, por $V(r)$ $(1 \leqslant r \leqslant m)$ la suma de pesos de los elementos (tomando en consideración la multiplicidad de éstos) que poseen no menos de r propiedades y por $W(r)$ la suma de pesos de los elementos que poseen exactamente r propiedades, entonces, razonando igual que anteriormente, podemos demostrar la igualdad

$$W(r) = \sum_{k=r}^{m} (-1)^{k-r} C_k^r V(k), \quad 0 \leqslant r \leqslant m,$$

de la cual se deduce la fórmula de inclusión y exclusión, si el peso de cada elemento es igual a la unidad.

3.1. Demuéstrese la igualdad

$$\left| \sum_{i=1}^{m} S_i \right| = \sum_{i_1=1}^{m} |S_{i_1}| - \sum |S_{i_1} S_{i_2}| + \ldots + (-1)^m |S_1 \ldots S_m|,$$

donde $S_1, \ldots, S_m$ son conjuntos finitos; $S_i + S_j$ y $S_i S_j$ significan la unión y la intersección de los conjuntos S_i y S_j, respectivamente; $|S|$ es el número de elementos del conjunto S, y la suma $\sum |S_{i_1} \ldots S_{i_k}|$ $(k = 1, \ldots, m)$ se extiende a toda clase de juegos de números enteros $i_1, \ldots, i_k$ de tal índole que $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m$.

3.2. Hállese el número de permutaciones de elementos de un m-conjunto que dejan en su lugar exactamente r $(0 \leqslant r \leqslant m)$ elementos.

3.3. Examinemos $m!$ permutaciones de elementos de un m-conjunto. Se pueden formar $(m!)^d$ diferentes juegos ordenados a partir de d permutaciones. Hállese el número de tales juegos, en cada una de d permutaciones de los cuales quedan en su lugar exactamente r $(0 \leqslant r \leqslant m)$ elementos.

3.4. Hállese el número de métodos de colocación de n bolas en m cajones de un modo tal que r $(0 \leqslant r \leqslant m)$ cajones queden vacíos.

3.5. De una urna que contiene m diferentes bolas se sacan simultáneamente s $(1 \leqslant s \leqslant m)$ bolas y se escriben sus números, después de lo cual las bolas se colocan de nuevo en la urna. Se pueden formar $(C_m^s)^d$ diferentes juegos que se obtienen como resultado de d extracciones. Hállese el número de juegos en los cuales

a) se encuentran todas las bolas;

b) no se encuentran exactamente r $(0 \leqslant r \leqslant m)$ bolas.

Demuéstrense las identidades:

3.6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_m^k C_{m-k}^{n-k} = 0, \quad 1 \leqslant n < m.$

3.7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k C_{m+n-k-1}^{n-k} = 0, \quad 1 \leqslant m \leqslant n.$

3.8. $\sum_{k=0}^{m-s} (-1)^k C_m^k (C_{m-k}^s)^d = 0, \quad 1 \leqslant sd < m.$

3.9. $\sum \frac{n!}{n_1! \ldots n_m!} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k (m-k)^n,$

donde la sumación en el primer miembro de la identidad se extiende a toda clase de juegos ordenados de los números enteros positivos $n_1, \ldots, n_m$ tales que $n = n_1 + \ldots + n_m$.

3.10. $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k (m-k)^n = 0, \quad 1 \leqslant n < m.$

3.11. $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k (m-k)^m = m!$

3.12. Designemos por $\varphi(n)$ (función de Euler) la cantidad de números naturales que son inferiores a n y recíprocamente primos respecto de éste. Demuéstrese que si el desarrollo del número n en factores simples $q_1, \ldots, q_m$ tiene por expresión $n = q_1^{k_1} \ldots q_m^{k_m}$ $(k_i \geqslant 1,\ i = 1, \ldots, m)$, entonces

$$\varphi(n) = n(1 - 1/q_1) \ldots (1 - 1/q_m).$$

3.13. Sea n un número natural arbitrariamente elegido. Designemos por $q_1, \ldots, q_m$ todos los números primos que no sobrepasan de $\sqrt{n}$, y por $\pi(x)$, la cantidad de números primos que no sobrepasan de $x > 0$. Demuéstrese que

$$\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) = n + 1 + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m} \left[\frac{n}{q_{i_1} \ldots q_{i_k}}\right],$$

donde $[x]$ denota la parte entera del número x.

3.14. Calcúlese $S = \sum (1/2^k)$, donde la sumación se realiza respecto de todos los k naturales no múltiplos de 2, 3 y 5.

3.15. Sea dada una matriz cuadrada $A = (a_{i,j})$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ de orden m. Designemos por

$$\operatorname{per} A = \sum_{i_1, \ldots, i_m} a_{1, i_1} \ldots a_{m, i_m}$$

(donde la sumación se realiza respecto de toda clase de permutaciones de los números $1, \ldots, m$) el permanente de la matriz A. Demuéstrese que

$$\operatorname{per} A = S(A) + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_k)} S(A_{i_1, \ldots, i_k})$$

donde $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m$; $A_{i_1,\ldots,i_k}$ denota una matriz obtenida de A por sustitución de las columnas con los números $i_1, \ldots, i_k$ por las columnas compuestas de ceros; $S(A_{i_1,\ldots,i_k})$ es el producto de las sumas de las filas de la matriz $A_{i_1,\ldots,i_k}$, y la suma $\sum S(A_{i_1,\ldots,i_k})$ $(1 \leqslant k < m)$ está extendida a toda clase de muestras sin repetición de los números $i_1, \ldots, i_k$ de $1, \ldots, m$.

§ 2. Sistemas de representantes de los conjuntos

Sean dados un n-conjunto $S = (s_1, \ldots, s_n)$ y un m-conjunto $M(S) = \{S_1, \ldots, S_m\}$, cuyos elementos $S_i \subset S$ $(i = 1, \ldots, m)$.

La matriz $A = (a_{ij})$ de dimensión $m \times n$, en la cual

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & s_j \in S_i, \\ 0, & s_j \notin S_i, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n,$$

lleva el nombre de *matriz de incidencia* para $M(S)$ con relación a S. Se denomina *sistema de representantes distintos* (en la forma abreviada: *s.r.d.*) para $M(S)$ al m-conjunto de elementos $x_1, \ldots, x_m$ pertenecientes a tales S que $x_i \in S_i$, $x_i \neq x$ $(i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, m)$.

3.16. Sea A una matriz de incidencia para $M(S)$ con relación a S. Demuéstrese que el número de s.r.d. para $M(S)$ es igual a per A.

3.17. Hállese el número de s.r.d. para un sistema de m conjuntos

$$S_i = (1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m), \quad i = 2, \ldots, m-1,$$
$$S_1 = (2, \ldots, m), \quad S_m = 1, \ldots, m-1).$$

El siguiente teorema que se aduce aquí sin demostración ofrece la condición necesaria y suficiente de existencia del s.r.d. para $M(S)$.

TEOREMA DE HALL. *Una totalidad de conjuntos $M(S)$ tiene un sistema de representantes distintos cuando, y sólo cuando, para cualquier k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ y cualquier k-muestra sin repetición $i_1, \ldots, i_k$ de $1, \ldots, m$ se verifica*

$$\left| \sum_{\alpha=1}^{k} S_{i_\alpha} \right| \geqslant k,$$

es decir, el número de elementos de la unión de conjuntos $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ no es inferior a k.

3.18. Supongamos que la matriz de incidencia para $M(S)$ es de tal índole que la cantidad de unidades en cada fila y en cada columna es igual a un número fijo r $(1 \leqslant r \leqslant m)$. Demuéstrese que existe un s.r.d. para $M(S)$.

3.19. Sean A y B dos conjuntos finitos y sea $k \geqslant 1$ un número natural. Entre A y B se ha establecido tal correspondencia multiforme que a todo elemento del conjunto A le corresponden exactamente k elementos del conjunto B y a todo elemento de B le corresponden exactamente k elementos de A. Demuéstrese que entre A y B puede establecerse una correspondencia biunívoca sin que se agreguen nuevas conexiones.

3.20. Se tienen un cierto conjunto de cargos y un conjunto de pretendientes para ocupar dichos cargos. Demuéstrese que si para cada cargo pretenden exactamente k ($k \geqslant 1$ fijo) hombres y cada pretendiente puede trabajar en k cargos, entonces a cada candidato se le puede conceder un trabajo adecuado.

3.21. Veamos un rectángulo latino de dimensión $m \times n$ ($m < n$), es decir, una tabla rectangular de m filas y n columnas compuesta por los números $1, \ldots, n$ de un modo tal que en cada fila se encuentren todos los números de 1 a n, y en cada columna todos los números sean diferentes. Demuéstrese que siempre puede agregarse una fila más de la permutación de los números $1, \ldots, n$ de un modo tal que la tabla a obtener sea un rectángulo latino de dimensión $(m + 1) \times n$.

3.22. Demuéstrese que en una matriz numérica arbitraria el número mínimo de filas y columnas, en las que están contenidos todos los elementos no nulos, es igual al número máximo de elementos no nulos, de los cuales ningún par se contiene en una fila y en una columna.

3.23. Demuéstrese que si en una matriz cuadrada de orden m se contiene una submatriz nula de dimensión $s \times t$, y si $s + t > m$, entonces el determinante y el permanente de la matriz son iguales a cero.

3.24. Sean dadas dos particiones del conjunto S en m subconjuntos:

$$S = \sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{i=1}^{m} B_i$$

y supongamos que para cualquier número natural k ($1 \leqslant k \leqslant m$) y cualquier k-muestra de $1, \ldots, m$ se cumple la condición: el conjunto $A_{i_1} + \ldots + A_{i_k}$ contiene a lo sumo k conjuntos de los $B_1, \ldots, B_m$. En este caso existen los elementos $s_1, \ldots, s_m$ que representan un s.r.d. simultáneamente para $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$ y para $B_1, \ldots, B_m$, con la particularidad de que $i_1, \ldots, i_m$ es cierta permutación de los números $1, \ldots, m$ (la totalidad $s_1, \ldots, s_m$ se llama sistema de representantes comunes (o bien, en forma abreviada, s.r.c.) para $A_1, \ldots, A_m$ y $B_1, \ldots, B_m$).

3.25. Sean dadas dos diferentes particiones del conjunto finito S en m subconjuntos:

$$S = \sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{i=1}^{m} B_i$$

tales que $|A_i| = |B_j|$, $A_iA_j = B_iB_j = \varnothing$ $(i \neq j,\ i,\ j = 1, \ldots, m)$. Entonces existe un s.r.c. para $A_1, \ldots, A_m$ y $B_1, \ldots, B_m$.

3.26. Supongamos que G es un grupo finito y H, el subgrupo de éste. Demuéstrese que existe un conjunto de elementos $s_1, \ldots, s_m$ que son representantes de las clases contiguas derechas e izquierdas, simultáneamente, del grupo G en el subgrupo H, es decir,

$$G = \sum_{i=1}^{m} s_iH = \sum_{i=1}^{m} Hs_i, \quad m = |G|/|H|.$$

3.27. Supongamos que todo subconjunto S_i $(i = 1, \ldots, m)$ de un conjunto finito S contiene no menos de p, $p \geqslant 1$, elementos. El sistema $B_1, \ldots, B_m$ de p-subconjuntos del conjunto S se denominará sistema de p-representantes distintos, o bien, en forma abreviada, s.p-r.d., si $B_i \subset S_i$, $B_i \neq B_j$ $(i \neq j;\ i,\ j = 1, \ldots, m)$. Demuéstrese la siguiente condición necesaria de existencia del s.p-r.d.: para cualquier número natural k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ y para cualquier k-muestra de $1, \ldots, m$ se verifica la desigualdad $|S_{i_1} + \ldots + S_{i_k}| \geqslant n$, donde n es un número natural mínimo tal que $C_n^p \geqslant k$.

§ 3. Teorema y números de Ramsey

Examinemos n puntos en un plano, de los cuales cualesquiera tres no están situados en una misma recta; al unir cada dos puntos por el segmento de una recta, obtendremos el n-grafo completo. Supongamos que cada arista del grafo está pintada en uno de los m colores. Si todas las aristas del n-grafo están pintados de un mismo color, dicho grafo se llamará *monocromático*.

3.28. Demuéstrese que, cualquiera que sea la coloración de las aristas de un 6-grafo completo en dos colores, existe un 3-subgrafo monocromático.

3.29. Hállese tal coloración de las aristas de un 5-grafo completo con la cual ningún 3-subgrafo sea monocromático.

3.30. Demuéstrese que en una compañía de 6 hombres siempre se encontrarán tres hombres que se conocen o tres que no se conocen.

3.31. Sean $k \geqslant 2$ y $m \geqslant 2$ unos números naturales arbitrarios. Demuéstrese que existe un número natural $R = R(k, m; 2)$ que depende sólo de k y m y que es de tal índole que si el número de vértices de un n-grafo completo no es inferior a R, entonces cualquiera que sea la coloración de sus aristas en dos colores (rojo y azul), existe o bien un k-subgrafo rojo monocromático, o bien un m-subgrafo azul monocromático; y si $n < R$, existe tal coloración de las aristas que todo k-subgrafo no es rojo monocromático y todo m-subconjunto no es azul monocromático.

3.32. Demuéstrese que

$$R(k, m; 2) \leqslant R(k-1, m; 2) + R(k, m-1; 2),$$
$$k > 2,\ m > 2$$

y si los números $R(k-1, m; 2)$ y $R(k, m-1; 2)$ son pares, la citada desigualdad será rígida.

3.33. Demuéstrese la desigualdad

$$R(k, m; 2) \leqslant C_{m+k-2}^{k-1},\quad k \geqslant 2,\ m \geqslant 2.$$

3.34. Sean $k_1, \ldots, k_m$ números naturales arbitrarios distintos de cero y de la unidad. Demuéstrese que existe un número natural mínimo $R = R(k_1, \ldots, k_m; 2)$ que depende sólo de $k_1, \ldots, k_m$ y que es de tal índole que si el número de vértices de un n-grafo completo no es inferior a R, entonces, cualquiera que sea la coloración de sus aristas en m colores, existe o bien el k_1-subgrafo monocromático de primer color etc., o bien el k_m-subgrafo monocromático de m-ésimo color.

3.35. Demuéstrese la desigualdad

$$R(k_1+1, \ldots, k_m+1; 2) \leqslant (k_1+\ldots+k_m)!/(k_1! \ldots k_m!).$$

3.36. Hállese tal coloración en dos colores de las aristas de un 13-grafo completo para la cual ningún 3-subgrafo es rojo monocromático y ningún 5-subgrafo es azul monocromático.

3.37. Demuéstrese que

$$R(3, 4; 2) = 9,\quad R(3, 5; 2) = 14.$$

3.38. Hállese tal coloración en dos colores de las aristas de un 17-grafo completo para la cual ningún 4-subgrafo es monocromático.

3.39. Demuéstrese que $R(4, 4; 2) = 18$.

3.40. Demuéstrese que si para cierto número natural n existe el número p $(0 < p < 1)$ para el cual se verifica la desigualdad

$$C_n^k p C_k^2 + C_n^l (1-p) C_l^2 < 1,$$

entonces $R(k, l; 2) > n$.

3.41. Demuéstrese la desigualdad

$$R(k, k; 2) > ck2^{k/2},$$

donde $c > 0$ es una constante.

3.42. Demuéstrese que para cualquier número natural n existe un número $N = N(n)$ tal que entre cualesquiera N puntos en un plano, de los cuales ninguna combinación de tres yace en una recta, se pueden elegir n puntos que sean vértices de un polígono convexo de n lados.

CAPÍTULO IV

TABLAS Y ESQUEMAS COMBINATORIOS

§ 1. Matrices especiales

Sean dados un conjunto S de n elementos $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ y m subconjuntos de éste $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Se llama *matriz de incidencia* para un sistema dado de subconjuntos respecto de S a una matriz (a_{ij}) $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$, donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & s_j \in S_i, \\ 0, & s_j \notin S_i. \end{cases}$$

Llamaremos *matriz binaria* a la matriz que está compuesta por los elementos 0 y 1.

Se denomina *matriz de congruencia de* dos en dos para un conjunto de números $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ a una matriz (a_{ij}) $(i, j = 1, \ldots, n)$, donde $a_{ij} = 1$, si $b_i > b_j$, y $a_{ij} = 0$ en el caso contrario.

Se llama *matriz conmutable* (*de permutación*) $(k_1, \ldots, k_n)$ a una matriz de orden n, en la cual $a_{k_j j} = 1$ para $j = 1, \ldots, n$; $a_{ij} = 0$ para $i \neq k_j$.

Sea una matriz $A = (a_{ij})$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$. Se denomina *permanente* de esta matriz al número per $A = \sum a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{mi_m}$. Aquí la sumación se realiza respecto de todas las m permutaciones $(i_1, \ldots, i_m)$ de números enteros 1, 2, ..., n $(m \leqslant n)$. El permanente A no cambia al realizar la permutación de las filas o de las columnas de la matriz.

Se denomina *matriz de Hadamard* a una matriz cuadrada, compuesta por los elementos 1 y -1, en la cual cada fila es ortogonal a todas las demás filas y cada columna, ortogonal a todas las columnas restantes. La matriz de Hadamard en la cual la primera fila y la primera columna constan sólo de 1 se llama *normalizada*. Por ejemplo, la matriz $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ es de tal tipo.

Se denomina *producto directo de las matrices* A y B, la matriz de orden mn que tiene la forma siguiente $\begin{pmatrix} a_{11}B & \ldots & a_{1n}B \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1}B & \ldots & a_{nn}B \end{pmatrix}$, donde

$A = (a_{ij})$, $i, j = 1 \ldots n$
$B = (b_{lk})$, $l, k = 1 \ldots m$.

Se llama *traza de una matriz* la suma de elementos que forman su diagonal principal; el valor máximo de la traza, obtenido como resultado de toda clase de permutaciones de las filas y columnas de una matriz se llama *rango de frontera*. Llámase *α-anchura* de una matriz el número de sus columnas que pueden ser elegidas de ella de tal manera, que la suma de los valores de éstas sea en cada fila no menor de α.

4.1. Fórmese la matriz de permutación (3 2 4 1).

4.2. Demuéstrese que el permanente de una matriz de permutación de n elementos es igual a 1.

4.3. ¿A qué es igual el determinante de una matriz de permutación?

4.4. Fórmese una matriz de incidencia del sistema de ternas $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 6, 7\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{2, 5, 7\}$, $\{3, 4, 7\}$, $\{3, 5, 6\}$ con relación al conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Calcúlese el permanente de esta matriz.

4.5. Fórmese una matriz de incidencia para el sistema de subconjuntos $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4\}$, $\{4, 5\}$ del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Calcúlese el permanente de esta matriz.

4.6. ¿Cuántas matrices cuadradas simétricas binarias de orden n existen?

4.7. Determínese la cantidad de menores de k-ésimo orden en la $n \times n$-matriz $A = (a_{ij})$ que carece de elementos diagonales de la matriz.

4.8. Determínese el número de diferentes matrices cuadradas binarias de orden n, en cada fila y en cada columna de las cuales figura una sola unidad.

4.9. ¿Cuántas $m \times n$-matrices binarias existen, en cada una de las cuales la suma de todos los elementos es igual a r?

4.10. ¿Cuántas son las matrices cuadradas de orden n con elementos $+1$ y -1, en cada una de las cuales la suma de todos los elementos es igual a r?

4.11. ¿Cuántas matrices binarias de n-ésimo orden existen, en cada columna de las cuales figuran exactamente r unidades?

4.12. Una matriz se llama *equidiagonal*, si todos los elementos de su diagonal son iguales. ¿Cuántas son las matrices equidiagonales de orden n con los elementos $+1$ y -1?

4.13. Hállese el número de matrices equidiagonales simétricas binarias de orden n, en cada una de las cuales hay exactamente k unidades?

4.14. Hállese el número de matrices cuadradas binarias de orden n, en cada una de las cuales la diagonal está ocupada por ceros, debajo de la diagonal figuran k unidades y por encima de ella, l unidades. Calcúlese este número para $n = 4$, $k = 5$, $l = 2$.

4.15. Determínese el número de 5×7-matrices binarias, en cada una de las cuales las dos columnas primeras contienen juntas exactamente 7 unidades y cada una de las siguientes, exactamente dos unidades.

4.16. Sea M un n-conjunto y X su r-subconjunto. Determínese el número de tales m-subconjuntos del conjunto M que tienen en la intersección con X exactamente l elementos.

4.17. Demuéstrese que si una matriz de 3er orden consta de los elementos $+1$ y -1, su determinante es un número par.

4.18. Determínese el número de diferentes matrices cuadradas binarias de orden n que contienen en cada una de las primeras m filas r unidades, y en cada una de las filas restantes, q unidades.

4.19. Resuélvase el problema antecedente bajo la condición complementaria de que todos los elementos de la diagonal principal sean ceros.

4.20. Determínese el número de diferentes matrices binarias de dimensión $m \times n$, en las cuales cada una de las primeras r columnas tiene s unidades, mientras que el número total de unidades en las demás columnas es igual a k.

4.21. Fórmese una matriz de congruencia de dos en dos para el conjunto de números $\{3, 2, 1, 4, 5\}$.

4.22. Demuéstrese que el permanente de una matriz de congruencia de dos en dos es igual a cero.

4.23. Calcúlese el permanente de una matriz cuadrada de orden $n = 4$, en la cual en cada columna y en cada fila hay solamente un cero, y los demás elementos son unidades.

4.24. Calcúlense los permanentes de las siguientes matrices:

$$\text{a)}\ \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}; \quad \text{b)}\ \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}; \quad \text{c)}\ \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix};$$

$$\text{d)}\ \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}; \quad \text{e)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{f)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.25. Demuéstrese que para una matriz cuadrada A con elementos no negativos siempre per $A \geqslant |\det A|$.

4.26. Sea $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ una matriz cuadrada con elementos no negativos

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = b_j.$$

Demuéstrese que A^2 es una matriz nula cuando y sólo cuando, $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = 0$.

4.27. Hállese el valor máximo que puede tomar el determinante de una matriz de tercer orden, a condición de que todos sus elementos son $+1$ y -1.

4.28. Para una matriz de la forma

$$B_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

demuéstrese la validez de la relación recurrente

$$\operatorname{per} B_n = \operatorname{per} B_{n-1} + \operatorname{per} B_{n-2}.$$

4.29. Demuéstrese que para las $n \times n$-matrices, cuyos elementos de la diagonal principal son ceros y los demás elementos son unidades, el permanente es igual a

$$p_n = n!\,(1 - 1/1! + 1/2! - \dots + (-1)^n/n!).$$

4.30. ¿Serán matrices de Hadamard las siguientes:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

4.31. La primera fila de cierta matriz de Hadamard consta de n unidades. ¿Cuál es la cantidad total de unidades en esta matriz?

4.32. Verifíquese que los productos directos $H_2 \times H_2$ y $H_2 \times H_2 \times H_2$ de una matriz de Hadamard normalizada de orden 2 son matrices de Hadamard normalizadas de orden 4 y 8, respectivamente.

4.33. Hállese la traza, el rango de frontera y la α-anchura, donde $\alpha = 1, 2, 3$ y 4, de las siguientes matrices:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{d)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{e)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{f)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

4.34. Indíquese el grupo de tales permutaciones de columnas y de filas que no cambian la matriz f) del problema 4.33.

4.35. ¿Cuáles de los valores siguientes no varían al realizar cualesquiera permutaciones de columnas y filas de cualesquiera matrices cuadradas A:

a) la suma de todos los elementos de la matriz; b) la traza de la matriz; c) el per A; d) el det A; e) el per (A^2); f) el det (A^2); g) los valores propios de la matriz; h) el rango de la matriz A; i) el rango de la matriz A^2?

4.36. Escríbase el número máximo posible de matrices binarias de orden 2 que no se transforman una en otra por permutaciones de las columnas y de las filas.

§ 2. Rectángulos y cuadrados latinos

Se denomina *rectángulo latino* a una tabla rectangular de dimensión $m \times n$, en la cual en cada fila y en cada columna los elementos no se repiten. Se denomina *cuadrado latino* de orden n a una tabla cuadrada de dimensión $n \times n$ llena de n diferentes elementos de un modo tal que cada elemento figura una sola vez en cada fila y en cada columna.

Dos cuadrados (o rectángulos) latinos se llaman *equivalentes* (*isomorfos*), si uno se obtiene del otro por permutación de las columnas y de las filas y por designación de nuevo de los elementos. El isomorfismo se escribe en la forma $A \times B \times C$, donde A es una sustitución que define la permutación de las columnas; B, la permutación de las filas y C, la designación de nuevo de los elementos. Se denomina *automorfismo* de un cuadrado latino al isomorfismo que transforma el cuadrado en sí mismo. El conjunto de automorfismos del cuadrado dado forma un grupo. Un cuadrado latino se llama *cíclico*, si todas sus filas se obtienen a partir de su primera fila por desplazamientos cíclicos.

Dos cuadrados latinos (a_{ij}) y (b_{ij}) $(i, j = 1, \ldots, n)$ de orden n se denominan *ortogonales*, si todos los pares (a_{ij}, b_{ij}) son diferentes. Los pares de cuadrados latinos ortogonales existen para cualquier n, salvo para $n = 2$ y $n = 6$. El número de cuadrados latinos ortogonales dos a dos de orden n no es superior a $n - 1$. Si $n = p^\alpha$, donde p es un número primo y α, un número natural, entonces para $n \geqslant 3$ existe un conjunto completo de $n - 1$ cuadrados latinos ortogonales.

4.37. ¿De cuántos modos puede formarse una tabla de dimensión 2×9, cuya primera fila sea 1 2 3 4 5 6 7 8 9, y la segunda represente una permutación de estos números de una manera tal que no haya repeticiones de los números en ninguna columna de esta tabla?

4.38. Se tienen las siguientes figuras geométricas: un triángulo, un cuadrado, un trapecio y una circunferencia (cada figura en dos ejemplares). En la primera fila se disponen cuatro figuras diferentes.

Hállense todas las disposiciones posibles de las figuras restantes en la segunda fila de un modo tal que debajo de cada figura de la primera fila no haya una figura homónima de la segunda fila.

4.39. Hállense todos los rectángulos latinos 3×5 de los elementos 1, 2, 3, 4, 5 que contengan las dos primeras filas

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1. \end{array}$$

4.40. Se dan las tablas siguientes:

$$\text{(A)}\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \qquad \text{(B)}\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array}$$

a) ¿De cuántos modos puede elegirse la permutación a_1, a_2, a_3, a_4 de los números 1, 2, 3, 4 de una manera tal que en ninguna columna de la tabla (A) haya repetición de los números?

b) La misma pregunta para la tabla (B).

4.41. Las cifras 1, 2, . . ., 9 se disponen en forma de un rectángulo latino con 8 filas y 9 columnas. ¿Será cierto que

(A) puede agregarse una fila más para obtener un cuadrado latino: a) siempre por lo menos de dos modos, b) siempre exactamente de un solo modo;

(B) no se puede agregar una fila;

(C) el número de métodos que existen para agregar una fila depende de la forma del rectángulo dado?

4.42. ¿Cuántos rectángulos latinos de dimensión 3×5 de cinco elementos con la primera fila 1 2 3 4 5 existen?

4.43. Cómo puede dividirse un campo cuadrado en parcelas de tal manera que pueda sembrarse en él m variedades de trigo con el fin de comparar la fertilidad de dichas variedades, con la particularidad de que la comparación excluya la influencia de la variación de la fertilidad dentro de los límites de la parcela. Convengamos en considerar que la fertilidad decrece a medida que nos alejamos de un lado del campo (no se sabe de qué lado precisamente) hacia el lado opuesto.

4.44. Se tienen monedas de 1, 2, 3, 5 y 10 kopeks de valor. Dispónganse 16 monedas en forma de un cuadrado de dimensión 4×4 de un modo tal que en ninguna fila, ninguna hilera y ninguna diagonal del cuadrado hayan dos monedas de igual valor y que el coste total de todas las 16 monedas sea máximo. ¿Cuál es este coste?

4.45. En un torneo ajedrecístico participan cinco hombres. Cada ajedrecista juega una partida al día. Hágase la tabla de torneo de un modo tal que durante cinco días cada ajedrecista tenga un encuentro con todos los demás jugadores. Al completar la tabla obtenida con un elemento fijo, obténgase un cuadrado latino.

4.46. Constrúyanse dos cuadrados latinos cíclicos de orden 5. Demuéstrese que todos los cuadrados de esta índole son isomorfos de dos en dos.

4.47. Constrúyase un cuadrado latino no cíclico de orden 4, haciendo uso de cuadrados latinos de orden 2.

4.48. Muéstrese que los siguientes cuadrados latinos de orden 3 son isomorfos:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}$$

4.49. Demuéstrese que los siguientes cuadrados latinos son isomorfos:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{array}$$

4.50. Hállese el cuadrado latino B, isomorfo al cuadrado dado A, si está dado un isomorfismo p que convierte A en B:

$$p\colon (2\ \ 3) \times (1\ \ 3\ \ 4) \times (1\ \ 3), \qquad A\colon \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

4.51. Muéstrese que los siguientes cuadrados latinos de orden 4 no son isomorfos:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

4.52. Indíquense los automorfismos del primer cuadrado latino del problema 4.48.

4.53. Determínese el orden del grupo de automorfismos del cuadrado latino simétrico [1]) de orden 4:

$$\begin{array}{cccc} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{array}$$

[1]) Un cuadrado latino cuyos elementos simétricos respecto de la diagonal principal son iguales, se llama *cuadrado simétrico*.

4.54. Se da un sistema de grupos de pares

01	02	03	04	05
25	13	15	12	14
34	45	24	35	23

Aprovechando este sistema, constrúyase un cuadrado latino simétrico de orden 6.

4.55. Demuéstrese que un cuadrado latino simétrico cíclico de orden p es equivalente a la tabla de multiplicación del grupo cíclico del mismo orden.

4.56. Demuéstrese que un cuadrado latino de orden p es equivalente a la tabla de multiplicación de un casi grupo [1]) del mismo orden.

4.57. Demuéstrese que la tabla de multiplicar de un casi grupo es un cuadrado latino.

4.58. Calcúlense los permanentes de los cuadrados latinos cíclicos de orden 3, 4 y 5, compuestos por los elementos 0, 1, 2; 0, 1, 2, 3 y 0, 1, 2, 3, 4 respectivamente.

4.59. Calcúlense los permanentes de los cuadrados latinos del problema 4.51.

4.60. a) Dispónganse 16 cartas superiores de cuatro palos de un modo tal que ni los nombres de las cartas ni los palos se repitan ni en las filas, ni en las columnas, ni en las diagonales principales.

b) ¿Se podrá hacer de tal manera que en este caso los colores de los palos se dispongan escaqueados?

c) ¿Se podrá hallar, sin tener en cuenta la disposición de las cartas en las diagonales principales, una solución, en la cual los colores se alternen en forma escaqueada?

4.61. Tomemos un grupo abeliano de orden 9 que es un producto directo de dos grupos cíclicos de orden 3. A base de la tabla de multiplicación de dicho grupo abeliano construyamos otra tabla de multiplicar, sustituyendo la relación $a\cdot b = c$ por la $a\cdot c = b$. ¿Será la tabla de multiplicar obtenida un cuadrado latino? ¿Será este cuadrado ortogonal al de partida?

4.62. Constrúyase un conjunto completo de cuadrados latinos ortogonales de orden 3.

4.63. El problema 4.62 para cuadrados latinos de orden 5.

4.64. Hállese un conjunto completo de cuadrados latinos ortogonales de orden 4.

4.65. Hállense 6 cuadrados latinos cíclicos, ortogonales de dos en dos, de orden 9.

4.66. Constrúyanse dos cuadrados latinos no cíclicos de orden 6, haciendo uso de los cuadrados latinos de orden 2 y 3. ¿Serán ortogonales los cuadrados obtenidos?

---

[1]) Un conjunto M con una operación binaria ($\circ$) se llama casi grupo, si las ecuaciones $a \circ x = b$ e $y \circ a = b$ tienen soluciones únicas para cualesquiera a, b.

4.67. Muéstrese que $p-1$ cuadrados latinos, que representan el conjunto completo de cuadrados latinos ortogonales de orden p (p es un número impar), son isomorfos entre sí.

4.68. Demuéstrese que si p es un número primo impar, las matrices de orden p:

$$A_h = (a_{ij}^{(h)}),$$
$$i, j = 0, 1, \ldots, p-1; \quad k = 1, 2, \ldots, p-1,$$

donde $a_{ij}^{(h)} = ik + j$ (mód p), forman un sistema completo de cuadrados latinos ortogonales.

4.69. Sea G un grupo abeliano de orden 8 que representa un producto directo de tres grupos cíclicos de orden 2. Sea H un grupo de automorfismos del grupo G tales que dejan inmóvil sólo la unidad del grupo G (por supuesto, a excepción del automorfismo idéntico). Empleando el grupo H, constrúyase una familia de siete cuadrados latinos ortogonales de orden 8 que difieren uno de otro solamente en el orden de las filas.

4.70. Sea G un grupo abeliano de orden p^{α} que representa un producto directo de α grupos cíclicos de orden p, donde p es un número primo. Demuéstrese que existe un conjunto completo de cuadrados latinos ortogonales de orden p^{α} que difieren uno del otro sólo en el orden de las filas (columnas).

4.71. Sea $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_m^{\alpha_m}$. Demuéstrese que existe una familia de $\min \{(p_i^{\alpha_i} - 1) \mid i = 1, \ldots, n\}$ de cuadrados latinos de orden n ortogonales dos a dos.

El esquema se llama *resoluble* si los bloques pueden ser divididos en r conjuntos de tal manera, que en los bloques de cada uno de estos conjuntos cada elemento se encontrará exactamente una vez. Sea A una matriz de incidencia del bloque-esquema D. Entonces el bloque-esquema con la matriz de incidencia A^T se llamará dual al bloque-esquema D.

4.72. Constrúyase una familia de cuadrados latinos ortogonales de orden 9, empleando el campo de Galois.

§ 3. Sistemas de ternas de Steiner y juegos semejantes

Se denomina *sistema de ternas de Steiner* de n elementos tal juego de subconjuntos de dichos n elementos que

a) cada subconjunto consta de tres elementos distintos;

b) cualquier par de elementos se contiene en un y sólo en un subconjunto.

Las ternas de Steiner existen cuando, y sólo cuando, $n = 6t + 1 \geqslant 7$, o bien $n = 6t + 3 \geqslant 3$.

Dos sistemas de ternas de Steiner se denominan *isomorfos*, si uno de ellos puede obtenerse del otro mediante una nueva designación de los elementos y una permutación de las ternas y de los elementos en las últimas.

Se llama *automorfismo* de cierto sistema tal transformación que transfiere el sistema en sí mismo. Un conjunto de automorfismos de un sistema dado forma un grupo.

Se denomina *sistema de ternas de Kirkman* a un sistema de ternas de Steiner partido en tales grupos de ternas que cada uno de n elementos figura en una y sólo una terna de cada grupo.

Describamos el método de distinguir los sistemas de ternas de Steiner no isomorfos. Sea Δ_n un sistema de ternas de Steiner construido en un conjunto E, y supongamos que $x, y \in E$, $x \neq y$. Introduzcamos la designación

$$\Pi_y^x = \{(\alpha, \beta): (x, \alpha, \beta) \in \Delta_n, \ \alpha \neq y, \ \beta \neq y\}.$$

Un grafo Γ_{xy}, cuyo conjunto de vértices está representado por el conjunto E y el conjunto de aristas, por el conjunto $\Pi_x^y \cup \Pi_y^x$, lleva el nombre de *grafo de entrelazamiento* de los elementos x e y en Δ_n. Este grafo representa un juego de ciclos disjuntos de longitud par. A él se la puede poner en correspondencia la especificación $\pi_{xy} = (s_1^{r_1}, \ldots, s_m^{r_m})$, donde r_i es el número de ciclos de longitud $2s_i$ en el grafo Γ_{xy}. La especificación π_{xy} se denomina *tipo de entrelazamiento* de x e y en el sistema Δ_n. Es obvio que los tipos de entrelazamiento son especificaciones de las particiones del número $(n-3)/2$ en partes, cada una de las cuales no es inferior a dos. Denotemos con $q = q(n)$ el número de tales particiones.

Cuando $n = 13$, hay dos tipos posibles de entrelazamiento: $T_1 = (2, 3)$, $T_2 = (5)$. Cuando $n = 15$, hay cuatro tipos: $T_1 = (2^3)$, $T_2 = (2, 4)$, $T_3 = (3^2)$, $T_4 = (6)$. Convengamos en numerar los tipos de entrelazamiento en el orden lexicográfico.

Se denomina *vector índice* del elemento x en el sistema Δ_n a un vector q-dimensional $(t_1, t_2, \ldots, t_q)$, donde t_j significa el número de elementos en E que tienen el tipo de entrelazamiento T_j con el elemento x.

Al sistema Δ_n se le puede poner en correspondencia la tabla

$$T(\Delta_n) = \left|\begin{array}{cccc|c} t_1^{(1)} & t_2^{(1)} & \ldots & t_q^{(1)} & l_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ t_1^{(h)} & t_2^{(h)} & \ldots & t_b^{(h)} & l_h \end{array}\right|,$$

donde l_n denota el número de elementos en E que tienen en Δ_n el vector índice $(t_1^{(h)}, \ldots, t_q^{(h)})$. Los vectores índice en $T(\Delta_n)$ se disponen en el orden lexicográfico. La tabla $T(\Delta_n)$ se llama *T-tabla*.

Dos sistemas de ternas de Steiner a los cuales corresponden las T-tablas diferentes no son isomorfos.

Se llama *sistema de grupos de pares* $\Pi_{2\mu}$ de orden 2μ tal partición del conjunto $P(F)$ de pares no ordenados de elementos del conjunto F, $|F| = 2\mu$, en grupos de pares que cada elemento de F interviene exactamente en un par de cada grupo.

Dos sistemas de grupos de pares $\Pi_{2\mu}$ y $\Pi'_{2\mu}$ de orden 2μ, basados en los conjuntos F y F', se llamarán isomorfos, siempre que exista una correspondencia biunívoca φ: $F \leftrightarrow F'$, en la cual a todo grupo de pares de $\Pi_{2\mu}$ le corresponde un grupo de pares de $\Pi'_{2\mu}$.

Sea $\Pi_{2\mu}$ un sistema de grupos de pares $\tau_1, \ldots, \tau_{2\mu-1}$ de orden 2μ. El grafo G_{ij}, de cuyos vértices sirven los elementos del conjunto F y de aristas, los elementos del conjunto $\tau_i \cup \tau_j$ $(i \neq j,\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant 2\mu - 1)$, representa, evidentemente, un modelo de ciclos disjuntos de longitud par. El símbolo $(s_1^{r_1}, \ldots, s_m^{r_m})$, donde $0 < s_1 < \ldots < s_m$, $r_i \geqslant 0$ para cualquier $i = 1, \ldots, m$, recibe el nombre de *tipo de entrelazamiento de los grupos de pares* τ_i y τ_j, si en el grafo G_{ij} están contenidos exactamente r_k ciclos de longitud $2s_k$ y $\sum_{k=1}^{m} r_k s_k = \mu$. Los tipos posibles de entrelazamiento son, por consiguiente, especificaciones de las particiones del número μ en partes, cada una de las cuales no es inferior al número 2.

Llamemos *vector índice de un grupo de pares* Σ en el sistema de h grupos de pares $\Pi_{2\mu}$ un vector $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$, en el cual x_j denota el número de grupos de pares de este sistema que tienen el tipo de entrelazamiento T_j con el grupo Σ.

La especificación de los grupos de pares del sistema de h grupos de pares $\Pi_{2\mu}$ según sus vectores índices en este sistema la escribiremos en forma de la siguiente tabla

$$T(\Pi_{2\mu}) = \left|\begin{array}{cccc|c} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \ldots & x_q^{(1)} & \omega_1 \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_q^{(2)} & \omega_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(l)} & x_2^{(l)} & \ldots & x_q^{(l)} & \omega_l \end{array}\right|$$

donde $\omega_j > 0$ es el número de grupos de pares en $\Pi_{2\mu}$ que tiene el vector índice $(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_q^{(j)})$, mientras que los propios vectores mencionados están dispuestos en el orden de su crecimiento lexicográfico.

La tabla $T(\Pi_{2\mu})$ se denominará T-tabla del sistema $\Pi_{2\mu}$.

Dos sistemas de grupos de pares, a los que corresponden diferentes T-tablas, no son isomorfos. Lo recíproco no es siempre cierto.

4.73. Está dado un conjunto E de n elementos $1, 2, \ldots, n$. Fórmense las ternas de tal modo:

a) que cada par de E se contenga a lo sumo en una terna y que el número de ternas sea lo más grande posible, $n = 5$;

b) que cada par de E se contenga por lo menos en una terna y que el número de ternas sea lo más mínimo posible, $n = 5$;

c) que cada par de E se contenga exactamente en una sola terna; $n = 7$.

4.74. ¿Existirá al menos un sistema de ternas de Steiner con n elementos, si a) $n = 95$; b) $n = 100$; c) $n = 105$?

4.75. Demuéstrese que el número de ternas en un sistema de ternas de Steiner de n elementos es igual a $n(n-1)/6$.

4.76. Demuéstrese que no existen sistemas de ternas de Steiner de $n = 6k + 2$ elementos.

4.77. Compruébese si son sistemas de ternas de Steiner los siguientes juegos de ternas:

A)	0 1 2	1 3 7	2 3 8	3 4 5	4 8 9	5 7 b	6 7 9
	0 3 b	1 4 c	2 4 6	3 6 c	4 a b	5 a c	6 8 b
	0 4 7	1 5 6	2 5 9	3 9 c			7 8 c
	0 5 8	1 8 a	2 7 a				
	0 6 c	1 9 b	2 b c				
	0 9 a						
B)	0 1 a	1 2 b	2 3 c	3 5 a	4 6 b	5 7 c	6 9 a
	0 2 7	1 3 8	2 4 9	3 6 7	4 7 8	5 8 9	7 a b
	0 3 4	1 4 5	2 5 6	3 9 b	4 a c		8 b c
	0 5 b	1 6 c	2 8 a				
	0 6 8	1 7 9					
	0 9 c						
C)	0 1 4	1 2 9	2 3 8	3 4 6	4 5 a	5 7 8	6 7 a
	0 2 5	1 3 a	2 4 7	3 5 b	4 9 b	5 9 a	6 8 b
	0 3 c	1 4 8	2 5 6	3 7 9	4 6 c		
	0 6 9	1 6 b	2 8 b				
	0 7 b	1 7 c	2 a c				
	0 8 a						

4.78. ¿Qué ternas de las citadas en los pp. a) — d) deben agregarse al sistema de ternas 1 2 3, 1 4 5, 1 6 7, 2 5 6, 2 4 7 para obtener un sistema de ternas de Steiner:

a) 2 3 4, 5 6 7; b) 3 4 6, 3 5 7;
c) 3 4 5, 3 6 7; d) 4 5 6, 1 2 3?

4.79. Demuéstrese que para cada elemento de un conjunto inicial el número de ternas de Steiner, en las cuales él está presente, no depende de este elemento. Indíquese este número.

4.80. Sea Δ_n un sistema de ternas de Steiner y Δ_α, su subsistema de Steiner. Demuéstrese que $\alpha \leqslant (n-1)/2$.

4.81. Demuéstrese que dos subsistemas de Steiner de un sistema de ternas de Steiner o bien no se intersecan, o bien su intersección es también un subsistema de Steiner.

4.82. Constrúyase un sistema de ternas de Steiner para $n = 7$.

4.83. Dibújese un grafo de entrelazamiento de los elementos 3 y 9 en el sistema A) del problema 4.77. Indíquese el tipo de entrelazamiento de estos elementos.

4.84. Calcúlese el vector índice del elemento 3 en el sistema A) del problema 4.77.

4.85. Escríbase toda clase de tipos de entrelazamiento de los elementos del sistema Δ_n en el caso de $n = 19$.

4.86. Muéstrese que los siguientes sistemas de ternas de Steiner son isomorfos:

a)	123				b)	123			
	145	248	347			145	247	348	
	167	256	359	469		168	256	359	469
	189	279	368	578		179	289	367	578

4.87. Establézcase que los sistemas A) y B) del problema 4.77 no son isomorfos.

4.88. Establézcase si la permutación $\alpha = (0123456789abc)$ es o no es un automorfismo del sistema B) del problema 4.77.

4.89. Constrúyase un sistema de ternas de Steiner para $n = 9$ elementos con grupo cíclico de automorfismos.

4.90. Constrúyase un sistema de ternas de Kirkman a base de nueve elementos.

4.91. ¿Cuántos grupos de ternas están contenidos en un sistema de ternas de Kirkman de $n = 6k + 3$ elementos?

4.92. ¿Se podrá completar un juego de grupos de ternas:

1 2 3	1 4 7	1 5 15	1 9 13	1 6 10
4 5 6	2 5 8	2 9 10	2 4 12	2 11 15
7 8 9	3 10 13	3 4 14	3 5 11	3 7 12
10 11 12	6 11 14	6 8 12	6 7 15	4 8 13
13 14 15	9 12 14	7 11 13	8 10 14	5 9 14

hasta que se obtenga un sistema de ternas de Kirkman de orden 15? Indíquense los grupos que faltan.

4.93. ¿Será un sistema de ternas de Kirkman el siguiente juego de grupos de ternas de los elementos:

1 2 3	1 4 7	1 5 13	1 6 8
4 5 6	2 5 10	2 4 12	2 11 13
10 11 12	6 11 14	6 7 15	4 10 15
13 14 15	9 12 15	8 10 14	5 9 14
7 8 9	3 8 13	3 9 11	3 7 12

1 9 10	1 11 15	1 12 14
2 7 14	2 6 9	2 8 15
3 5 15	3 4 14	3 6 10
4 8 11	5 8 12	4 9 13
6 12 13	7 10 13	5 7 11?

4.94. Demuéstrese que no existe un sistema de ternas de Kirkman de $n = 6k + 1$ elementos.

4.95. Nueve inspectores deben revisar durante cuatro días 12 organizaciones. Cada organización se controla por una comisión de tres inspectores en el transcurso de un día. ¿Cómo realizar el control de las organizaciones de un modo tal que todas ellas sean controladas por las comisiones, pero que en éstas no se repitan ni los pares ni las ternas de inspectores?

4.96. Compruébese si son automorfismos del sistema del problema 4.93 las siguientes permutaciones:

$$\alpha = (1,\ 12)\ (2,\ 7)\ (5,\ 15)\ (8,\ 11)\ (6,\ 10)\ (9,\ 13)$$

$$\beta = (1,\ 2,\ 3)\ (4,\ 12,\ 7)\ (6,\ 10,\ 9)\ (5,\ 11,\ 8).$$

4.97. Demuéstrese que el grupo de automorfismos de un sistema de ternas de Kirkman es un subgrupo del grupo de automorfismos del correspondiente sistema de ternas de Steiner.

4.98. A partir de los elementos 0, 1, 2, 3, 4, 5 fórmense 5 juegos de a 3 pares en cada uno, de un modo tal que en cada juego sean distintos todos los elementos y en los diferentes juegos los pares no se repitan.

4.99. Se requiere distribuir 8 examinadores entre 4 comisiones, a dos examinadores en cada comisión, de un modo tal que cada día consecutivo en el transcurso de una semana (7 días) las composiciones de las comisiones no se repitan.

4.100. Sean los elementos $1, 2, \ldots, 2\mu$ los números de los jugadores. Los pares de jugadores que integran el primer grupo juegan en la primera jornada; los pares que integran el segundo grupo juegan en la segunda, etc. Se necesita hacer el horario de los juegos para 11 días por jornadas para $2\mu = 12$. Escríbase el sistema de grupos de pares de 12 elementos para obtener la tabla ajedrecística.

4.101. Sea dado un grupo de pares de elementos, por ejemplo,

$$\begin{array}{l} 0\ \ 1 \\ 2\ \ 2\mu - 1 \\ 3\ \ 2\mu - 2 \\ \cdots\cdots \\ k\ 2\mu - k + 1 \\ \cdots\cdots \\ \mu\ \mu + 1 \end{array}$$

¿Cuál de las permutaciones de 2μ elementos $(0\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ 2\mu - 1)$ y $(0)\ (1\ 2\ 3\ \ldots\ 2\mu - 1)$ dará un sistema de grupos de pares de tipo cíclico [1])?

[1]) Un sistema de grupos de pares, en el que cada grupo de pares se obtiene a partir del grupo anterior de pares con ayuda de una misma permutación de elementos $0, 1, \ldots, 2\mu - 1$, lleva el nombre de sistema de grupos de pares del tipo cíclico.

4.102. Determínese, calculando las T-tablas, si se tienen sistemas isomorfos de grupos de pares de orden 8 entre los que siguen abajo

1)	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7
	2 3	1 5	1 4	1 7	1 3	1 2	1 6
	4 7	3 4	2 6	2 5	2 7	3 7	2 4
	5 6	6 7	5 7	3 6	4 6	4 5	3 5
2)	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7
	2 7	1 3	1 5	1 7	1 2	1 4	1 6
	3 6	4 7	2 4	2 6	3 7	2 3	2 5
	4 5	5 6	6 7	3 5	4 6	5 7	3 4
3)	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7
	2 3	1 3	1 2	1 6	1 4	1 7	1 5
	4 5	4 6	5 6	2 7	2 6	2 5	2 4
	6 7	5 7	4 7	3 5	3 7	3 4	3 6
4)	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7
	2 3	1 3	1 2	1 5	1 4	1 7	1 6
	4 5	4 7	4 6	2 6	2 7	2 4	2 5
	6 7	5 6	5 7	3 7	3 6	3 5	3 4
5)	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7
	2 3	1 6	1 5	1 7	1 3	1 2	1 4
	4 7	3 7	2 7	2 6	2 4	3 4	2 5
	5 6	4 5	4 6	3 5	6 7	5 7	3 6
6)	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7
	2 3	1 3	1 2	1 5	1 4	1 7	1 6
	4 5	4 7	4 6	2 7	2 6	2 5	2 4
	6 7	5 6	5 7	3 6	3 7	3 4	3 5

4.103. Hállese una permutación que convierta el primero de los sistemas de grupos de pares escritos más abajo en el segundo:

a)	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9
	2 3	1 3	1 4	1 7	1 8	1 9	1 6	1 5	1 2
	4 5	4 6	2 5	2 9	2 6	2 4	2 8	2 7	3 7
	6 7	5 8	6 9	3 5	3 9	3 8	3 4	3 6	4 8
	8 9	7 9	7 8	6 8	4 7	5 7	5 9	4 9	5 6
b)	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9
	2 3	1 3	1 4	1 9	1 6	1 5	1 2	1 7	1 8
	4 5	4 6	2 5	2 7	2 8	2 9	3 6	2 4	2 6
	6 7	5 8	5 9	3 5	3 7	3 8	4 8	3 9	3 4
	8 9	7 9	7 8	6 8	4 9	4 7	5 9	5 6	5 7

4.104. Pártanse los cuatro elementos 0, 1, 2, 3 en pares, sirviéndose para la división de tres modos. Determínese el grupo de automorfismos del sistema obtenido.

4.105. Determínese el orden del grupo de automorfismos del sistema obtenido en el problema 4.98.

4.106. Muéstrese que un grupo de automorfismos de los sistemas de grupos de pares de tipo cíclico contiene un subgrupo cíclico de orden $2\mu - 1$ con el elemento generatriz T, donde T es cierta permutación del problema 4.101.

4.107. Se tiene un sistema de grupos de pares de 4° orden de los elementos 4, 5, 6, 7:

$$\begin{matrix} 7 & 6 \\ 5 & 4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 7 & 5 \\ 6 & 4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 7 & 4 \\ 6 & 5 \end{matrix}$$

Continúese su construcción hasta que se obtenga un sistema de ternas de Steiner para siete elementos.

4.108. Constrúyase un sistema de grupos de pares, partiendo del siguiente cuadrado latino simétrico

$$\begin{matrix}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
1 & 0 & 7 & 2 & 3 & 9 & 8 & 4 & 6 & 5 \\
2 & 7 & 0 & 1 & 8 & 3 & 9 & 6 & 5 & 4 \\
3 & 2 & 1 & 0 & 6 & 4 & 5 & 9 & 7 & 8 \\
4 & 3 & 8 & 6 & 0 & 1 & 2 & 5 & 9 & 7 \\
5 & 9 & 3 & 4 & 1 & 0 & 7 & 8 & 2 & 6 \\
6 & 8 & 9 & 5 & 2 & 7 & 0 & 1 & 4 & 3 \\
7 & 4 & 6 & 9 & 5 & 8 & 1 & 0 & 3 & 2 \\
8 & 6 & 5 & 7 & 9 & 2 & 4 & 3 & 0 & 1 \\
9 & 5 & 4 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 & 1 & 0
\end{matrix}$$

§ 4. Bloque-esquemas

El bloque-esquema (esquema en bloque) es un sistema de subconjuntos de un conjunto finito que satisface ciertas condiciones ligadas con la frecuencia de aparición de los pares de elementos del conjunto en los subconjuntos del sistema. El bloque-esquema se define por un par de conjuntos (V, B), donde

$$V = \{a_1, a_2, \ldots, a_v\}, \quad B = \{B_1, B_2, \ldots, B_b\},$$
$$B_i \subseteq V, \quad i = 1, 2, \ldots, b.$$

Los elementos del conjunto V se llaman *elementos* del bloque-esquema, y los elementos del conjunto B reciben el nombre de *bloques* del bloque-esquema. El elemento a_i y el bloque B_j son *incidentes*, si $a_i \in B_j$. El número $|B_j|$ de elementos, incidentes con relación al bloque B_j, se denota por k_j, y el número de bloques incidentes con relación al elemento a_i, por r_i. Mediante λ_{il} se designa el número $|\{B_j: a_i \in B_j, \ a_l \in B_j\}|$.

Los números $v, b, r_i, k_j, \lambda_{il}$ $(i, l = 1, \ldots, v; j = 1, \ldots, b)$ se llaman *parámetros* del bloque-esquema. Si $r_i = r$ para cualquier $i = 1, \ldots, v$, y si $k_j = k$ para todos los $j = 1, \ldots, b$, y $\lambda_{il} = \lambda$, entonces (V, B) es un bloque-esquema *incompleto equilibrado*, o bien BIB-esquema.

Supongamos que entre los números λ_{il} $(i, l = 1, \ldots, v)$ se encuentran exactamente m diferentes: $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, y que en los elementos del conjunto V están introducidas m relaciones simétricas de conexión de un modo tal que se cumplen las siguientes condiciones:

a) el conjunto V^2 de todos los pares de elementos del conjunto V se parte en m subconjuntos disjuntos $V_1^2, V_2^2, \ldots, V_m^2$, con la particularidad de que si $(a, a') \in V_j^2$, suele decirse que los elementos a y a' son j-conexos;

b) $|\{B_j: a \in B_j, \ a' \in B_j, \ (a, a') \in V_i^2\}| = \lambda_i$;

c) $|\{a: \exists a' \ (a, a') \in V_i^2\}| = n_i, \ i = 1, \ldots, m$;

d) $|\{a'': (a'', a) \in V_j^2, \quad (a'', a') \in V_k^2, \ (a, a') \in V_i^2\}| = p_{jk}^i$,

con la particularidad de que, en virtud de la simetría, $p_{jk}^i = p_{jk}^i$ $(i, j, k = 1, \ldots, m)$.

El bloque-esquema con las propiedades a) ... d) se llama *bloque-esquema parcialmente equilibrado con m tipos de conexiones* o, simplemente, PBIB(m)-esquema. Los parámetros del bloque-esquema están ligados mediante relaciones determinadas. Para los BIB-esquemas son válidas las igualdades

$$vr = kb, \quad \lambda(v-1) = r(k-1). \tag{4.1}$$

Para los parámetros de los PBIB(m)-esquemas son válidas las igualdades (4.1) y las siguientes relaciones:

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = v - 1, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i n_i = r(k-1),$$

$$\sum_{k=1}^{m} p_{jk}^i = \begin{cases} n_j, & i \neq j, \\ n_j - 1, & i = j; \ i, \ j = 1, \ \ldots, \ m; \end{cases}$$

$$n_i p_{jk}^i = n_j p_{ik}^j = n_k p_{ij}^k, \quad i, \ j, \ k = 1, \ \ldots, \ m.$$

La matriz de incidencia de un BIB-esquema satisface la relación matricial principal

$$AA^T = (r - \lambda) E + \lambda J, \tag{4.2}$$

donde E es la matriz unidad de orden v, y J, la matriz de orden v formada por unidades. La existencia de la (0, 1)-matriz que satisface la condición (4.2) es una condición suficiente para la existencia de un BIB-esquema con los parámetros dados. De (4.2) se deduce la desigualdad $b \geqslant v$. Un BIB-esquema, para el cual $b = v$ (y, por tanto, $r = k$) se llama *bloque-esquema simétrico*, o bien (v, k, λ)-configuración.

4.109. a) Demuéstrese que si $B_1, B_2, \ldots, B_v$ son bloques de un BIB-esquema simétrico en el conjunto $X = \{x_1, \ldots, x_v\}$, entonces para cualquier i los conjuntos
$B_1 - B_i, B_2 - B_i, \ldots, B_{i-1} - B_i, B_{i+1} - B_i, \ldots, B_v - B_i$
forman en el conjunto $X - B_i$ un BIB-esquema. Hállense los parámetros de este esquema, si los parámetros del esquema de partida son v, k, λ.

b) El mismo problema, pero en lugar de la diferencia se tomará la intersección.

4.110. Constrúyase un BIB-esquema con los parámetros:

a) $v = b = 7, \quad k = r = 3, \quad \lambda = 1;$
b) $v = b = 13, \quad k = r = 4, \quad \lambda = 1;$
c) $v = 9, \quad b = 12, \quad r = 4, \quad k = 3, \quad \lambda = 1.$

4.111. ¿Existirán los BIB-esquemas con los parámetros:

a) $v = 15, \quad b = 21, \quad r = 7, \quad k = 5, \quad \lambda = 2;$
b) $v = b = 22, \quad r = k = 7, \quad \lambda = 2;$
c) $v = b = 43, \quad r = k = 7, \quad \lambda = 1;$
d) $v = 36, \quad b = 42, \quad r = 7, \quad k = 6, \quad \lambda = 1$?

4.112. Hállense la base y el grupo de automorfismos de un BIB-esquema con los parámetros:

a) $v = b = 7, \quad r = k = 3, \quad \lambda = 1;$
b) $v = 13, \quad b = 26, \quad r = 6, \quad k = 3, \quad \lambda = 1;$
c) $v = 25, \quad b = 100, \quad r = 12, \quad k = 3, \quad \lambda = 1.$

4.113. Compruébese la relación matricial principal para un BIB-esquema, donde D es: a) el $(7, 3, 1)$-esquema del problema 4.110, a); b) el $(13, 4, 1)$-esquema del problema 4.110, b). Escríbase para el esquema D la ecuación de incidencia en la forma cuadrática.

4.114. Constrúyase un bloque-esquema con los parámetros $v = 6$, $b = 10$, $r = 5$, $k = 3$, $\lambda = 2$.

4.115. Constrúyase un BIB-esquema simétrico partiendo de las siguientes igualdades de incidencia:

a) $L_1^2 + \ldots + L_7^2 = 2(x_1^2 + \ldots + x_7^2) + (x_1 + \ldots + x_7)^2;$

b) $L_1^2 + \ldots + L_{11}^2 = 3(x_1^2 + \ldots + x_{11}^2) + 2(x_1 + \ldots + x_{11})^2,$

donde $L_j = \sum_{i=1}^{v} n_{ij}x_i$, $j = 1, 2, \ldots, v$ y n_{ij} son los coeficientes de la matriz de incidencia del BIB-esquema.

4.116. Establézcase el cumplimiento de la condición necesaria de existencia de los (v, k, λ) BIB-esquemas simétricos:

a) 21, 5, 1; b) 15, 7, 3; c) 19, 9, 4; d) 29, 8, 2.

4.117. ¿Cuáles de los cinco poliedros regulares (tetraedro, octaedro, cubo, icosaedro y dodecaedro) son BIB-esquemas? Hállense los parámetros de estos bloque-esquemas.

4.118. Muéstrese la dualidad de los siguientes pares de bloque-esquemas: a) octaedro y cubo; b) dodecaedro y icosaedro. Muéstrese que el tetraedro es autodual.

4.119. Constrúyase el bloque-esquema de $PG(2, 2)$.

4.120. Constrúyase la matriz de Hadamard partiendo de $PG(2, 2)$.

4.121. Determínense los parámetros de un PBIB-esquema obtenido de un conjunto de diferencias: a) 1, 2, 3 (mod 5); b) 1, 3, 9 (mod 13).

4.122. Hállense las matrices de conexión de un esquema:

$$3478,\ 1234,\ 2367,\ 5678,\quad 1256,\quad 1458,$$
$$\lambda_0 = 3,\ \lambda = 2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 0.\ n_1 = n_2 = 3,\ n_3 = 1.$$

Determínense AA^T y todos los B_iB_j.

4.123. Constrúyase el PBIB-esquema de inversiones de un esquema residual obtenido a partir del siguiente BIB-esquema simétrico:

12345	12678	1379X	148XE
1569E	236XE	2479E	2589X
34689	3578E	4567X	

con los parámetros $v = b = 11$, $r = k = 5$, $\lambda = 2$. Hállense los parámetros del PBIB-esquema construido.

4.124. Constrúyase el (19, 9, 4)-esquema cíclico.

4.125. Constrúyase un BIB-esquema resoluble con $v = 9$, $b = 12$, $r = 4$, $k = 3$ partiendo de $EG(2, 3)$. ¿Cuál será el bloque-esquema dual?

4.126. Constrúyanse el plano parcial (r, k, t) y el PBIB(2)-esquema que le corresponde; hállense los parámetros de dicho bloque-esquema y señálese si éste posee la propiedad de resolubilidad:

a) $r = 3$, $k = 4$, $t = 2$; b) $r = 4$, $k = 5$, $t = 3$;

4.127. ¿Cuáles de los siguientes BIB-esquemas con los parámetros v, b, r, k, λ son resolubles:

a) 9, 12, 4, 3, 1; b) 6, 10, 5, 3, 2; c) 13, 26, 6, 3, 1; d) 10, 30, 9, 3, 2?

4.128. Constrúyase un BIB-esquema D 2-resoluble, si están dados un BIB-esquema D_1 con los parámetros $v_1 = b_1 = 3$, $r_1 = k_1 = 2$, $\lambda_1 = 1$ y un BIB-esquema resoluble D_2 con los parámetros $v_2 = 9$, $b_2 = 12$, $k_2 = 3$, $r_2 = 4$ y $\lambda_2 = 1$. Hállense los parámetros del esquema. Muéstrese que D es 2-resoluble.

4.129. Constrúyase un PBIB-esquema D 3-resoluble, si están dados un BIB-esquema D_1 con los parámetros $v_1 = b_1 = 4$, $r_1 = k_1 = 3$, $\lambda_1 = 2$ y un PBIB(2)-esquema resoluble con el esquema de conexión en forma del plano parcial (3, 4, 2) y con los parámetros $v_2 = 16$, $b_2 = 12$, $r_2 = 3$, $k_2 = 4$, $\lambda_{2.1} = 1$, $\lambda_{2.2} = 0$. Determínense los parámetros del esquema construido. Muéstrese que D es 3-resoluble.

4.130. Se tienen tres circunferencias concéntricas dentro de las cuales están trazados tres diámetros. Muéstrese que si los puntos de intersección de los diámetros con las circunferencias se toman por elementos del bloque-esquema D y los propios diámetros y circunferencias, por los bloques del mismo, entonces D es un PBIB(3)-esquema. Hállense los parámetros de D. ¿Será resoluble este esquema?

4.131. Resuélvase el problema 4.130 para el caso de cuatro circunferencias y cuatro diámetros.

4.132. Constrúyase y defínase el esquema de conexión y hállense los parámetros de un PBIB(4)-esquema cuyos elementos son todos los pares ordenados (x, y), $x \neq y$, $x, y = 1, \ldots, n$, y los bloques, nada más que los conjuntos $\{(x, 1)\}, \ldots, \{(x, n)\}, \{(1, y)\}, \ldots, \{(n, y)\}$, donde $x, y = 1, \ldots, n$; a) $n = 3$; b) $n = 4$

4.133. ¿Cuántos son los tipos de conexión y cómo pueden establecerse en un PBIB-esquema cuyos elementos son ternas ordenadas

$$(x, y, z), \quad x \neq y \neq z, \quad x, y, z = 1, \ldots, n,$$

y los bloques son nada más que los conjuntos $\{(x, y, 1)\}, \ldots, \{(x, y, n)\}, \{(x, 1, z)\}, \ldots, \{(x, n, z)\}, \{(1, y, z)\}, \ldots, \{(n, y, z)\}$?

Hállense v, b, r, k, n_i, λ_i para $n = 4$.

§ 5. Problema de Van der Waerden

Se denomina *cápsula convexa* de los puntos $P_0, P_1, \ldots, P_k \in \mathbf{R}^n$ el conjunto de puntos $M \in \mathbf{R}^n$ que pueden ser representados en la forma

$$M = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i P_i, \text{ donde } \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geqslant 0, \ i = 0, \ldots, k.$$

Los puntos $P_0, P_1, \ldots, P_k \in \mathbf{R}^n$ se llaman *independientes*, si los vectores $(P_i - P_0)$ son linealmente independientes $(i = 1, \ldots, k)$. La independencia de los puntos $P_0, P_1, \ldots, P_k \in \mathbf{R}^n$ es posible sólo cuando $k \leqslant n$. Los puntos $P_0, P_1, \ldots, P_k \in \mathbf{R}^n$ son independientes cuando y sólo cuando de la condición $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i P_i = 0$, $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 0$ se deduce que todos los λ_i son iguales a cero.

Supongamos que $P_0, P_1, \ldots, P_k \in \mathbf{R}^n$ son independientes. Se llama *símplice* con vértices en los puntos $P_0, P_1, \ldots, P_k$ a una cápsula convexa de puntos $P_0, P_1, \ldots, P_k$. Para cualquier punto M dispuesto en tal símplice una representación de la forma $M = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i P_i$, $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$ es unívoca ($i = 0, 1, \ldots, k$). Esto permite llamar el juego $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ coordenadas baricéntricas del punto M.

4.134. Supongamos que el punto M pertenece a una cápsula convexa de puntos $P_0, \ldots, P_k$ de $\mathbf{R}^n$. Entonces existen los números enteros no negativos $0 \leqslant i_0 < i_1 < \ldots < i_n$ y los números no negativos $\lambda_{i_0}, \lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_n}$ tales que $\sum_{j=0}^{n} \lambda_{i_j} = 1$, $M = \sum_{j=0}^{n} \lambda_{i_j} P_{i_j}$.

Una matriz $A = \|a_{ij}\|_1^n$ se denomina *dos veces estocástica*, si para cualesquiera i, j se cumplen las condiciones $a_{ij} \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$.

4.135. Demuéstrese que el producto de las matrices dos veces estocásticas es una matriz dos veces estocástica.

4.136. Demuéstrese que el permanente de una matriz dos veces estocástica no es superior a 1, y es igual a 1 cuando y sólo cuando la matriz es conmutable.

4.137. Demuéstrese que para las matrices cuadradas A y B de un mismo orden con elementos no negativos se verifica la desigualdad per $(A + B) \geqslant$ per A + per B.

4.138. Demuéstrese que el permanente de una matriz dos veces estocástica es superior a cero.

4.139. Pruébese que para cualquier matriz dos veces estocástica A de orden n se verifica el desarrollo $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$, donde P_i son matrices conmutables, $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ $(k \leqslant n^2 - n + 1)$.

4.140. Muéstrese que sobre un conjunto de matrices cuadradas de orden n, en las cuales la suma de elementos de cualquier fila o de cualquier columna es igual a 1, se puede introducir la estructura de un espacio lineal de dimensión $(n - 1)^2$.

4.141. Demuéstrese que para cualquier matriz dos veces estocástica A de orden n es válido el desarrollo $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$, donde P_i son matrices conmutables, $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ $(k \leqslant n^2 - 2n + 2)$.

4.142. Demuéstrese que el permanente de una matriz dos veces estocástica de orden n es superior o igual a $(n^2 - 2n + 2)^{1-n}$.

4.143. Sea $S(x_1, \ldots, x_n)$ un polinomio simétrico de las variables $x_1, \ldots, x_n$, lineal con relación a cada una de sus variables

$$\Omega = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \colon \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geqslant 0 \right\}.$$

Demuéstrese que

$$\min_{\Omega} S(x_1, \ldots, x_n) = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} S(\underbrace{1/k, \ldots, 1/k}_{k}, 0, \ldots, 0)$$

4.144. Determínese el valor mínimo de la expresión $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$, siendo limitados los valores de $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $x + y + z = 1$.

4.145. Demuéstrese que el mínimo del permanente de una matriz dos veces estocástica de orden 3 es igual a 2/9.

4.146. ¿Se podrá representar el permanente de una matriz dos veces estocástica de orden $n \geqslant 4$ en forma de una función que sea simétrica respecto de los elementos de cada fila?

4.147. Supongamos que una matriz dos veces estocástica A es tal que su permanente tiene el valor mínimo entre los permanentes de todas las matrices dos veces estocásticas del mismo orden.

a) Demuéstrese que si todos los elementos de la matriz A son positivos, entonces $\operatorname{per} A \geqslant n!/n^n$, donde n es el orden de la matriz A.

b) Muéstrese que la matriz A no puede ser representada en forma de una recta de otras dos matrices.

4.148. En un caso particular, cuando $n = 3$, obténgase la demostración directa (sin emplear la desigualdad de Cauchy—Buniakovski para el espacio de Minkowski) de la siguiente desigualdad de Alexándrov—Egórychev:

$$\operatorname{per}^2 \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n-2} & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn-2} & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \geqslant$$

$$\geqslant \operatorname{per} \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n-2} & a_{1n-1} & a_{1n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn-2} & a_{nn-1} & a_{nn-1} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \operatorname{per} \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n-2} & a_{1n} & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn-2} & a_{nn} & a_{nn} \end{bmatrix},$$

donde $a_{in} \geqslant 0$, a_{ij} son, para $1 \leqslant j \leqslant n-1$, números reales arbitrarios.

En la desigualdad se logra el signo de igualdad cuando y sólo cuando para cualesquiera $i = 1, 2, \ldots, n$ se cumple la igualdad $a_{in-1} = \lambda a_{in}$.

Empleando esta desigualdad, G. P. Egórychev demostró en 1980 el siguiente teorema (solución positiva del problema de Van der Waerden): el mínimo del permanente de una matriz dos veces estocástica de orden n es igual a $n!/n^n$ y se consigue en un punto único, a saber, en una matriz cuyos elementos son todos iguales a $1/n$.

Aún antes, en 1979, este hecho (sin unicidad) fue demostrado por D. E. Falikman. La demostración completa de la desigualdad y la solución del problema de Van der Waerden se aducen en [1].

CAPÍTULO V

MÉTODOS GEOMÉTRICOS

§ 1. Interpretaciones y problemas referentes a los grafos

En forma general un *grafo* puede definirse como una totalidad del conjunto V (de vértices) y la aplicación α del conjunto $V \times V$ en cierto conjunto M (el signo $\times$ es el indicio de un producto cartesiano).

Los pares $(a, b) \in V \times V$, para los cuales $\alpha(a, b) > 0$, se denominan *aristas*. Cuando $\alpha(a, b) > 1$, la arista (a, b) se denomina *múltiple* (o paralela), y el grafo G, que contiene aristas múltiples, se llama *multigrafo*; el número $\alpha(a, b)$ lleva el nombre de multiplicidad de la arista. Si $\forall(a, b)$: $\alpha(a, b) \leqslant 1$, se dice que el grafo está privado de aristas múltiples.

Si $|V| = n$ es un número finito, el grafo se llama *finito*, mientras que n se denomina *orden* del grafo.

Si $\forall(a, b) \in V \times V$: $\alpha(a, b) = \alpha(b, a)$, el grafo G es *no orientado*. De lo contrario, se denomina *orientado*. Si $\forall a \in V$: $\alpha(a, a) = 0$, suele decirse que el grafo G *no tiene bucles*.

Se denomina *subgrafo* $G(V, \alpha)$ a un grafo $G_1(V_1, \alpha_1)$ tal que

$$V_1 \subseteq V, \quad \forall(a, b) \in V_1 \times V_1: \alpha_1(a, b) \in [0, \alpha(a, b)].$$

Un grafo finito no orientado sin bucles y aristas múltiples se llama *grafo simple* (o simplemente *grafo*). El grafo se define por el juego de dos conjuntos V, X, donde $X \subseteq V \times V$, con la particularidad de que $X = \{(a, b) \in V \times V: \alpha(a, b) = 1\}$, $\forall(a, b) \in X$: $(b, a) \in X$, $\forall a \in V$: $(a, a) \notin X$ y este grafo es cómodo expresarlo en un plano en forma de cierto conjunto de puntos (vértices), algunos de los cuales están unidos mediante aristas.

Los vértices a, $b \in V$ del grafo $G(V, X)$ se denominan adyacentes, si $(a, b) \in X$. El vértice a y la arista $(b, c) \in X$ se llaman *incidentes*, si $a = b$ ó $a = c$. El número $|X|$ lleva el nombre de *dimensión* del grafo.

Se denomina *matriz de adyacencia* $A = (a_{ij})$ del grafo $G(V, \alpha)$ con $|V| = n$ la $(n \times n)$-matriz, en la cual $a_{ij} = \alpha(a_i, a_j)$, donde $a_i, a_j \in V$.

Sea G un grafo simple orientado con $|V| = n$ y $|X| = m$. La *matriz de incidencia* $B = (b_{ij})$ del grafo orientado G se llama tal

$(n \times m)$-matriz, cuyas filas corresponden a los vértices y las columnas a los arcos, que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el vértice } a_i \text{ es incidente a la arista } x_j \in X \text{ y } x_j = (a_i, a_k); \\ -1, & \text{si el vértice } a_i \text{ es incidente a la arista } x_j \in X \text{ y } x_j = (a_k, a_i); \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

(aquí a_k es cierto vértice del grafo G). La matriz de incidencia de un grafo no orientado G se determina de manera análoga, a excepción de que todos los elementos iguales a -1 se sustituyen por los iguales a $+1$.

Una sucesión alternativa de vértices y aristas a_0, (a_0, a_1), a_1, ..., a_{n-1}, (a_{n-1}, a_n), a_n del grafo G, donde $a_0, a_i \in V$, $(a_{i-1}, a_i) \in X$ y $i = 1, 2, \ldots, n$, se llama *cadena* si todas sus aristas son diferentes, y *cadena simple*, si todos sus vértices (y, por consiguiente, también sus aristas) son distintos. La cadena se llama *cerrada* si $a_0 = a_k$. Una cadena cerrada simple se llama *ciclo*, y el número de aristas en la cadena, *longitud de la cadena*. Designemos por C_n el grafo que consta de un ciclo de longitud n, y por P_n una cadena simple de longitud $n-1$. Se llama *cadena hamiltoniana* (respectivamente, *ciclo hamiltoniano*) a un ciclo simple (respectivamente, ciclo) que contiene todos los vértices del grafo G. El ciclo que contiene todos los vértices y todas las aristas del grafo G se llama *euleriano*. El grafo G es *hamiltoniano* (respectivamente, *euleriano*) si contiene el ciclo hamiltoniano (respectivamente, euleriano).

El grafo G se llama *conexo* si cada par de sus vértices está unido por una cadena simple. El subgrafo conexo máximo del grafo G se denomina *componente de conexión* de éste.

Se llama *grado* del vértice $a \in V$ un número $\deg a = |\{b \in \in V: (a, b) \in X\}|$. Si $\forall a \in V$: $\deg a = d$, el grafo se llama *homogéneo* (o *regular*) de *grado d*.

Si en el grafo G se tienen k_i vértices de grado i, la expresión $(1^{k_1} 2^{k_2} \ldots n^{k_n})$ se denomina *distribución de los vértices* del grafo G en grados.

El *grafo completo* K_n se llama grafo simple sobre n vértices, en el cual cada par de vértices es adyacente. Se denomina *clique de grafo G* al subgrafo completo máximo de éste. El *grafo bipartido G* es un grafo, cuyo conjunto de vértices V puede ser partido en dos subconjuntos V_1 y V_2 de tal manera, que cada arista del grupo G une los vértices de los diferentes subconjuntos. Si el grafo G contiene todas las aristas que unen los subconjuntos V_1 y V_2, entonces tal grafo se llama *bipartido completo*. Si en este caso $|V_1| = n$ y $|V_2| = m$, escribiremos $G = K_{n,m}$. Sean G_1 y G_2 grafos arbitrarios sobre los conjuntos de los vértices V_1 y V_2, respectivamente. Se llama *producto cartesiano* $G_1 \times G_2$ de los grafos G_1 y G_2 a tal grafo sobre el conjunto de los vértices $V_1 = V_1 \times V_2$, que dos de sus vértices (a_1 y a_2) y (b_1 y b_2) son adyacentes cuando y sólo cuando o bien $a_1 = b_1$ y el vértice a_2 es adyacente a b_2 en el grafo G_2, o bien $a_2 = b_2$ y el vértice a_1 es adyacente a b_1 en el grafo G_1. Supongamos que $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Entonces el grafo sobre el conjunto de vértices $V_1 \cup V_2$, cuyos conjuntos de aristas contienen todas las aristas de los grafos G_1 y G_2, así como también todas las aristas del tipo (a, b), donde $a \in V_1$ y $b \in V_2$, se denomina *unión* de los grafos G_1 y G_2 y se designa por $G_1 + G_2$. Se llama *subgrafo de esqueleto* el subgrafo del grafo G que contiene todos sus vértices.

Sea G un grafo simple arbitrario con la arista $e = (a, b)$. La eliminación de la arista e de G conduce al grafo de esqueleto que contiene todas las aristas del grafo G, a excepción de e, es decir $G - e$ es el subgrafo máximo del grafo G, que no contiene e. Por otra parte, si a y b no son vértices adyacentes del grafo G, la adición de la arista $e = (a, b)$ conduce al grafo $H = G + e$ en el mismo conjunto de vértices n, tal que $H - e = G$. Sea G el grafo con arista $e = (a, b)$. Designemos por G/e el grafo obtenido de G mediante el estrechamiento de la arista e, es decir, por identificación de los vértices adyacentes a y b, o, lo mismo separando a y b con la siguiente adición de un nuevo vértice c, adyacente a todos los vértices del grafo G, que han sido adyacentes a a, o bien a b.

El *complemento* $\overline{G}$ del grafo G es un grafo sobre el mismo conjunto de vértices que el grafo G, y dos vértices en $\overline{G}$ son adyacentes cuando y sólo cuando ellos no son adyacentes en G.

El grafo G se llama *planario*, si sus vértices y aristas pueden disponerse en un plano de tal modo que las aristas no se intersequen. Un grafo que no contiene ciclos se denomina *bosque*. Un *árbol* es un grafo conexo sin ciclos (circuitos). El *árbol radical* tiene un vértice (*raíz*) que se destaca entre los demás. El subgrafo de esqueleto del grafo conexo G, que es un árbol, se llama *esqueleto*.

El grafo $G_1 (V_1, X_1)$ se denomina *isomorfo* al grafo $G_2 (V_2, X_2)$ (la designación es: $G_1 \cong G_2$), si existe una aplicación biunívoca φ: $V_1 \to V_2$ que $(a, b) \in X_1$ cuando y sólo cuando $(\varphi(a), \varphi(b)) \in X_2$ para cualesquiera $a, b \in V_1$. En este caso la aplicación φ se llama *isomorfismo* de los grafos G_1 y G_2.

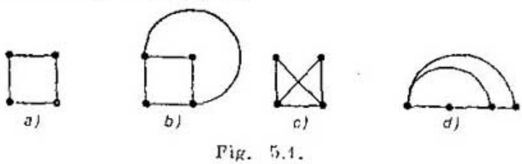


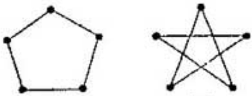
Fig. 5.1.

5.1. ¿Son isomorfos los grafos de las figs. 5.1...5.6?

5.2. Supongamos que φ es un isomorfismo de los grafos $G_1 (V_1, X_1)$ y $G_2 (V_2, X_2)$, que $|V_1| = |V_2| = n$, A_1 y A_2 son las matrices de adyacencia de los grafos G_1 y G_2, respectivamente, y que $P = (p_{ij})$ es la $(n \times n)$-matriz tal que

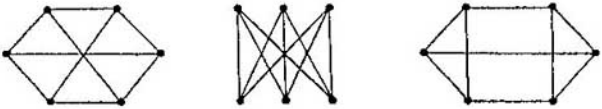
$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } \varphi\ (a_i = b_j), \text{ donde } a_i \in V_1 \text{ y } b_j \in V_2; \\ 0, & \text{en el caso contrario} \end{cases}$$

Convencerse de que P es la matriz de cierta k-permutación y $P^T A_1 P = A_2$, donde P^T es una matriz transpuesta a P.



a) b)

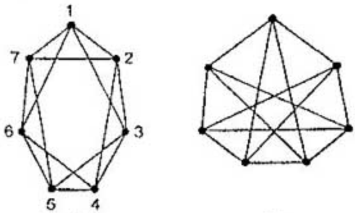
Fig. 5.2.



a) b) c)

Fig. 5.3.

5.3. Demuéstrese que si los grafos G_1 y G_2 son isomorfos, sus matrices de adyacencia tienen valores propios iguales. ¿Es justa la afirmación inversa?



a) b)

Fig. 5.4.

5.4. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) la suma de los grados de los vértices del grafo G es igual al número duplicado de sus vértices;

b) en cualquier grafo el número de vértices con grados impares es par;

c) cada grafo *cúbico* (es decir regular de grado 3) tiene un número par de vértices.

5.5. Sea B una matriz de incidencia de un grafo simple no orientado. Demuéstrese que su matriz de adyacencia A se obtiene de BB^T por sustitución de todos los elementos en la diagonal por ceros. Hállese el rango de la matriz B.

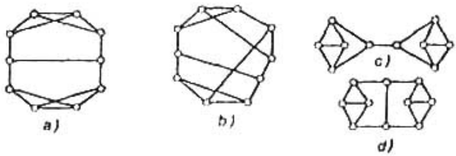


Fig. 5.5.

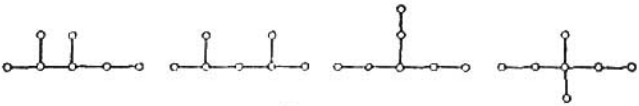


Fig. 5.6.

5.6. Demuéstrese que cada minor de la matriz de incidencia del *grafo orientado G sobre n vértices es igual a 1, −1 ó 0. Es cierto* que su minor de orden $(n-1)$ se diferencia de 0 cuando y sólo cuando las columnas de este minor corresponden a las aristas del esqueleto del grafo G.

5.7. Demuéstrese que el grafo es bipartido cuando y sólo cuando se cumple una de las siguientes condiciones:

a) todos sus ciclos son de longitud par;

b) para cualquier número impar n todos los elementos diagonales de la matriz A^n son iguales a cero.

5.8. Demuéstrese que un grafo simple finito es euleriano cuando y sólo cuando es conexo y todos sus vértices tienen un grado par. Constrúyanse 4 grafos eulerianos no isomorfos de orden 5.

5.9. Demuéstrese la siguiente afirmación:

a) si $p \geqslant 3$ y $\deg a + \deg b \geqslant p$ *para cualquier par a y b de vértices no adyacentes del grafo G*, entonces G es un grafo hamiltoniano;

b) si $p > 3$ y $\deg a \geqslant \frac{p}{2}$ para cualquier vértice a del grafo G, entonces G es un grafo hamiltoniano;

c) en cada grafo hamiltoniano cúbico existe por lo menos tres ciclos hamiltonianos diferentes.

5.10. ¿Cuántos ciclos hamiltonianos distintos hay en los grafos bipartidos completos $K_{3,3}$ y $K_{3,4}$?

5.11. Dese un ejemplo de un grafo que sea: euleriano y hamiltoniano; b) euleriano, pero no hamiltoniano; c) hamiltoniano, pero no euleriano; d) no euleriano y no hamiltoniano.

5.12. Muéstrese que un grafo con n vértices, cuyo número de aristas es superior a $(n-1)(n-2)/2$, es conexo.

5.13. Muéstrese que para todo t natural existe un grafo cúbico con $n = 6t$ vértices, y cada vértice pertenece a un y sólo un triángulo.

5.14. Muéstrese que para todo $n = 6t + 4$ $(t > 1)$ existe un grafo cúbico de n vértices y cada vértice del grafo, a excepción de uno, pertenece a un y sólo un triángulo.

5.15. ¿Existe un grafo simple finito en el cual no haya dos vértices con grados iguales?

5.16. ¿Existe un grafo con la siguiente distribución de vértices en grados? a) $(2^3 3^1 4^1 5^3 7^2)$; b) $(2^3 3^1 4^1 5^3 7^3)$?

5.17. Supongamos que un grafo simple G tiene la distribución de los vértices en grados $(1^2 3^4 4^2)$. Hállese la distribución del gra o $\overline{G}$.

5.18. Sean G_1 y G_2 unos grafos regulares de grado K_1 y K_2, respectivamente. ¿Es cierto que los grafos $G_1 \times G_2$ y $G_1 + G_2$ son también regulares?

5.19. Demuéstrese la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) G es un árbol;

b) cualesquiera dos vértices en G están unidos por una sola cadena;

c) el grafo G es conexo, pero la separación de cualquiera de sus aristas lo hace no conexo;

d) la adición de cualquier arista nueva al grafo G conduce a la aparición exactamente de un ciclo.

5.20. Indíquese el número de componentes conexos de un bosque que tiene 76 vértices y 53 aristas.

5.21. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) $G_1 \times G_2 = G_2 \times G_1$;

b) el grafo $G_1 \times G_2$ es conexo cuando y sólo cuando es conexo por lo menos uno de los grafos G_1 y G_2;

c) el grafo $G_1 \times G_2$ contiene subgrafos isomorfos a G_1 y G_2.

5.22. Hállese la distribución de los vértices en grados en el grafo $G_5 \times P_3$. Represéntese gráficamente este grafo.

5.23. ¿Es cierto que: a) $\overline{G_1 + G_2} = \overline{G}_1 + \overline{G}_2$; b) $\overline{G_1 \times G_2} = \overline{G}_1 \times \overline{G}_2$?

5.24. El grafo autocomplementario es un grafo isomorfo a su complemento. Dense ejemplos de grafos autocomplementarios para 4, 5 y 8 vértices. Demuéstrese que cada grafo autocomplementario tiene $4n$ ó $4n + 1$ vértices.

5.25. Sea A una $(n \times n)$-matriz simétrica con ceros en la diagonal principal, en cada fila de la cual se encuentran $2k + 1$ elementos no nulos. Demuéstrese que n es un número par.

5.26. Se denominará *grafo* de las *n-permutaciones* a un grafo cuyos vértices son todas las permutaciones de elementos de un n-conjunto, y dos vértices son adyacentes cuando y sólo cuando uno de ellos se transforma en el otro por transposición de dos elementos.

Indíquense el orden, la dimensión y el grado de cada vértice del grafo de las n-permutaciones. ¿Será el grafo regular? Exprésese en un plano el grafo de las 3-permutaciones.

5.27. Sea G un grafo de n-permutaciones y $n \geqslant 3$. Demuéstrese que G contiene una cadena hamiltoniana y no es un grafo planario.

5.28. Sea M un mn-conjunto y supongamos que $R(M)$ es una totalidad de todas las particiones de M en m-conjuntos. Las particiones R_1, R_2 de $R(M)$ se llamarán *ortogonales*, si la intersección de cualesquiera dos componentes, uno de los cuales se toma de R_1 y el otro de R_2, contiene a lo sumo un elemento. Un grafo con el conjunto de vértices $R(M)$, cuyos dos vértices R_1 y R_2 son adyacentes cuando y sólo cuando R_1 y R_2 son ortogonales, se denomina *grafo de (m, n)-particiones ortogonales*. Determínense el orden y la dimensión del grafo de las (m, n)-particiones ortogonales para $m \leqslant n$. ¿Será este grafo regular? Si es regular, indíquese la potencia de regularidad.

5.29. Muéstrese que el orden del clique en el grafo de (m, n)-particiones ortogonales no sobrepasa el número $[(mn-1)/(m-1)]$.

5.30. Indíquese el orden del clique y constrúyase el mismo:

a) en el grafo de las $(2, 3)$-particiones ortogonales;

b) en el grafo de las $(3, 4)$-particiones ortogonales.

5.31. Se denomina *cubo de Boole Q_m* de dimensión m un grafo cuyos vértices están representados por los vectores m-dimensionales de ceros y unidades, con la particularidad de que dos vectores semejantes son adyacentes cuando y sólo cuando se diferencian en un componente.

Demuéstrese que Q_m es un grafo hamiltoniano conexo.

5.32. Existe un grupo de n individuos y hay n obras. Cada miembro del grupo puede realizar sólo algunas de las obras mencionadas. Se necesita llenar todos los lugares de trabajo con obreros calificados. ¿Será suficiente para ello que cada miembro del grupo pueda realizar un mismo número $0 < k < n$ de obras (diferentes) y cada obra pueda ser efectuada por k individuos?

5.33. Hay n personas y cada dos de ellas tienen exactamente un conocido. Muéstrese que en el grafo de los conocidos existe al menos un triángulo y no existe ningún C_4.

5.34. Muéstrese que el número de particiones de un N entero en n partes de un modo tal que la parte mayor es igual a m, equivale al número de particiones de N en m partes de tal modo que la mayor parte es igual a n.

Sea A un cuadrado latino de orden 6. Determinemos dos grafos A_a y A_b, que tendrán por vértices las filas y las columnas del cuadrado latino A, respectivamente, con la particularidad de que dos vértices son adyacentes, si uno de los vértices se puede pasar a otro con ayuda de una permutación del siguiente tipo:

$$\alpha = (i_1 i_2)(i_3 i_4)(i_5 i_6);\ \beta = (i_1 i_2 i_3)(i_4 i_5 i_6);\ \gamma = (i_1 i_2) \times$$
$$\times (i_3 i_4 i_5 i_6);\ \delta = (i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6).$$

Las aristas que corresponden a α se representarán en la figura mediante ———, las que corresponden a β, a traves de - - - -, las que corresponden a γ, por ——— y δ, mediante ═══.

5.35. Dibújense los grafos de los siguientes cuadrados latinos:

$$A:\ \begin{array}{cccccc} 1&2&3&4&5&6\\ 2&1&4&3&6&5\\ 3&5&1&6&2&4\\ 4&6&2&5&1&3\\ 5&3&6&1&4&2\\ 6&4&5&2&3&1 \end{array} \qquad B:\ \begin{array}{cccccc} 1&2&3&6&5&4\\ 2&1&6&3&4&5\\ 3&4&5&2&1&6\\ 4&3&2&5&6&1\\ 5&6&1&4&3&2\\ 6&5&4&1&2&3 \end{array} \qquad C:\ \begin{array}{cccccc} 1&2&3&4&5&6\\ 2&3&4&5&6&1\\ 3&5&1&6&2&4\\ 4&6&5&1&3&2\\ 5&4&6&2&1&3\\ 6&1&2&3&4&5 \end{array}$$

5.36. Hállense las permutaciones de filas, columnas y elementos que conviertan el cuadrado latino A en el cuadrado latino B (problema 5.35).

Se llama *automorfismo* del grafo G el isomorfismo φ del grafo G consigo mismo.

5.37. ¿Es cierto que cada automorfismo φ del grafo G es una permutación del conjunto de vértices del grafo G que conserva la adyacencia de éstos? Compruébese que todos los automorfismos del grafo G referente a la operación de composición de las aplicaciones, forman un grupo. ¿Cómo están relacionados entre sí los grupos de permutaciones en n elementos y automorfismos del grafo G con el conjunto de los vértices V, donde $|V| = n$?

5.38. Hállese el grupo de automorfismos de los siguientes grafos: a) K_n; b) $K_{m,n}$; c) $P_2 + P_3$, si los vértices de P_2 son los números 3 y 5 y de P_3, 1, 2 y 4; d) $\overline{K}_2 + C_4$, si los vértices de $\overline{K}_2$ son los números 3 y 4, y de C_4, 1, 2, 4 y 5.

5.39. Hállense todos los grafos, con el número de vértices inferior o igual a 6, tales que su grupo de automorfismos sea trivial.

5.40. Sea G un grafo que consta de dos componentes conexos, uno de los cuales es K_n, y otro, K_m. Hállese el grupo de automorfismos del grafo H, si: a) $H = G$ y $m \neq n$; b) $H = G$ y $m = n$; c) $m = n$ y H es un grafo conexo, obtenido de G por adición de aristas de tal manera, que cada vértice del primer componente está unido con el único vértice del segundo componente y viceversa.

5.41. Se denomina *epimorfismo* de un grafo sobre otro grafo a una aplicación sobreyectiva del conjunto de vértices del primer grafo sobre el conjunto de vértices del segundo, con la particularidad de que dicha aplicación conserva la relación de adyacencia. Muéstrese que existe el epimorfismo del grafo $\overline{K}_2 + C_4$ sobre C_3.

5.42. Se da cierto BIB-esquema. A todo elemento del conjunto pongámosle en correspondencia un vértice del grafo. Unamos dos vértices mediante una arista cuando y sólo cuando el par correspondiente pertenece no a cada bloque del BIB-esquema. Dese la interpretación del BIB-esquema en términos de la teoría de los grafos.

5.43. ¿Cuáles son los parámetros del BIB-esquema, correspondiente al grafo $\overline{K}_2 + C_4$? ¿Existirá el epimorfismo del BIB-esquema sobre el bloque-esquema para $v = 3$, $b = r = \lambda = 1$, $k = 3$?

5.44. Demuéstrese que existen los epimorfismos del grafo $C_4 + C_4$ sobre los grafos P_2, K_4 y C_4.

5.45. ¿Corresponderá el conjunto de subgrafos del tipo del grafo $C_4 + C_4$ del BIB-esquema? Dese la generalización del BIB-esquema para este caso (véase problema 5.42).

5.46. ¿Formarán los subgrafos del tipo $P_2 \times P_3$ del grafo $C_4 + C_4$ un BIB-esquema generalizado.

5.47. Constrúyase la tabla rectangular a partir de elementos de cinco tipos de una manera tal que los segmentos que unen los elementos iguales formen un retículo cuadrado.

5.48. Un plano está cubierto con unos hexágonos de n colores de un modo tal que los centros de los hexágonos de un mismo color forman los vértices de un retículo formado por triángulos regulares iguales. ¿Para qué número n de colores será posible tal construcción?

5.49. Un grafo, de cuyos vértices sirven todos los k-subconjuntos de cierto n-conjunto, y dos k-subconjuntos están unidos por una arista cuando y sólo cuando su intersección contiene exactamente l elementos, lleva el nombre de (n, k, l)-grafo. Determínense el orden y la dimensión del (n, k, l)-grafo. ¿Será este grafo regular?

5.50. Hállese el número cromático de los siguientes grafos: a) K_n; b) $K_{m,n}$; c) árbol T; d) grafo de n-permutaciones; e) cubo booleano Q_m; f) ciclo C_n.

5.51. Hállese el número cromático de un grafo obtenido de K_n por supresión de: a) una arista; b) dos aristas; c) tres aristas que forman un triángulo.

5.52. Hállese $\chi(Q_m + e)$ para $m > 1$.

5.53. Demuéstrese que $\chi(G \times P_k) = \chi(G)$, para un grafo arbitrario G con aristas.

5.54. Indíquese un grafo cúbico de 1004 vértices cuyo número cromático sea igual a 4.

Se llama *α-transformación* del grafo G la sustitución de cualesquiera dos de sus aristas (a, b) y (c, d) no adyacentes por dos nuevas aristas (a, c), (b, d) ó (a, d), (b, c).

5.55. ¿Varían los grados de los vértices del grafo G cuando tienen lugar las α-transformaciones? Constrúyase en la fig. 5.7 con ayuda de las α-transformaciones, el grafo H sin triángulos a partir del grafo G. Hállese $\chi(G)$ y $\chi(H)$.

5.56. ¿Se podrá obtener mediante las α-transformaciones, a partir de un árbol, un grafo conexo que no sea árbol?

5.57. Constrúayanse todos los grafos que se obtienen a partir de un grafo cúbico expuesto en la fig. 5.8, empleando las α-transformaciones.

Se denomina *distancia* entre los vértices a y b del grafo G la mínima longitud de una cadena simple que une a y b en el grafo G. Se llama *matriz de distancia* del grafo G sobre n vértices la $(n \times n)$-matriz $D = (d_{ij})$, en la cual d_{ij} son iguales a la distancia de a_i a a_j; si los vértices a_i y a_j yacen en distintos componentes conexos del grafo G, entonces $d_{ij} = \infty$.

5.58. Hállese el número de diferentes cadenas más cortas entre dos vértices del grafo Q_m que sean distintas en l componentes.

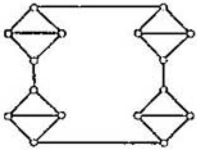


Fig. 5.7.

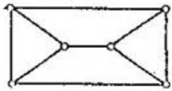


Fig. 5.8.

5.59. Escríbase la matriz de distancias para los siguientes grafos: a) K_3; b) C_4; c) $C_4 \times K_3$.

5.60. Sea $P(G; \lambda)$ un número de diferentes λ-coloraciones del grafo G. ¿Será cierto que $P(G; \chi(G)) > 0$ y $P(G, \lambda) = 0$ para todo $\lambda < \chi(G)$?

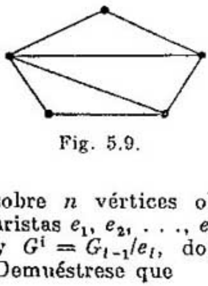


Fig. 5.9.

5.61. Demuéstrese que si G es simple y e, su arista arbitraria, entonces $P(G; \lambda) = P(G - e; \lambda) - P(G/e; \lambda)$, donde $G - e$ y G/e son los grafos obtenidos de G por eliminación y contracción de la arista e, respectivamente.

5.62. Sea G un grafo simple arbitrario sobre n vértices obtenido del grafo K_n por eliminación de las aristas $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Supongamos que $G_0 = K_n$, $G_i = G_{i-1} - e_i$, y $G^i = G_{i-1}/e_i$, donde $i = 1, 2, \ldots, k$. Es evidente que $G = G_k$. Demuéstrese que

$$P(G; \lambda) = P(K_n; \quad \lambda) + \sum_{i=1}^{k} P(G^i; \lambda).$$

Hállense $P(K_n; \lambda)$ y $P(G; \lambda)$ para el grafo G representado en la fig. 5.9. ¿Se podrá pintar de un modo regular en dos o tres colores los vértices del grafo G?

$P(G; \lambda)$ se denomina, según consideraciones evidentes, polinomio cromático del grafo G.

5.63. Sea $P(G; \lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i$ un polinomio cromático del grafo G con el conjunto de vértices $V(G)$ y el conjunto de aristas $E(G)$, y supóngase que $G_1, \ldots, G_k$ son sus componentes conexos. Demuéstrese que:

a) $n = |V(G)|$ y $a_n = 1$;

b) $a_{n-1} = -|E(G)|$;
c) $a_0 = 0$;
d) $P(G; \lambda) = \prod_{i=1}^{h} P(G_i; \lambda)$;
e) $a_i = 0$ para todo $i < k$.
¿Es cierto que si un polinomio satisface las condiciones a) ... e), entonces es cromático?

5.64. Sea $P(G; \lambda) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^i$ un polinomio cromático grafo G y sea $n = |V(G)|$. Demuéstrese que

a) la sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n = 1$ es de signos alternados;

b) si G es un grafo conexo, entonces $|a_i| \geqslant \binom{n-1}{i-1}$;

c) $a_k \sum_{j=0}^{|E(G)|} (-1)^j \mathrm{m}_{k_j}$ es el número de subgrafos engendrados del grafo G con k componentes conexos y j aristas.

5.65. Demuéstrese que el grafo G con n vértices es un árbol cuando y sólo cuando $P(G; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$.

§ 2. Problemas enumerativos en los grafos

5.66. Analicemos 8 clases de grafos con vértices marcados. Cada una de estas clases se define prefijando los parámetros α, β y γ toman los valores 0 ó 1; llamemos (α, β, γ)-grafos a sus elementos. En este caso, si $\alpha = 0$, se analizan los grafos sin bucles; si, en cambio, $\alpha = 1$, los bucles se admiten; si $\beta = 0$, se analizan los grafos sin aristas paralelas, y éstas se admiten, si $\beta = 1$; si $\gamma = 0$, se analizan los grafos no orientados, en cambio, si $\gamma = 1$, se introduce la orientación de las aristas.

Denotemos con $g_{\alpha,\beta,\gamma}(n, k)$ el número de (α, β, γ)-grafos con n vértices y k aristas. Demuéstrense las siguientes fórmulas:

$$g_{0.0.0}(n, k) = \binom{n(n-1)/2}{k}, \quad g_{1.0.0}(n, k) = \binom{n(n+1)/2}{k},$$

$$g_{0.1.0}(n, k) = \binom{n(n-1)/2+k-1}{k},$$

$$g_{1.1.0}(n, k) = \binom{n(n+1)/2+k-1}{k},$$

$$g_{0.0.1}(n, k) = \binom{n(n-1)}{k},$$

$$g_{1.0.1}(n, k) = \binom{n^2}{k},$$

$$g_{0.1.1}(n, k) = \binom{n(n-1)+k-1}{k},$$

$$g_{1.1.1}(n, k) = \binom{n^2+k-1}{k}.$$

¿Cuál es el número máximo de aristas que puede tener un (α, β, γ)-grafo?

5.67. Sea $G^{(n)}_{\alpha,\beta,\gamma}(y) = \sum_{k\geqslant 0} g_{\alpha,\beta,\gamma}(n, k)\, y^k$,

$n = 1, 2, 3, \ldots$ Aquí, el límite superior de sumación (véase el problema 5.66) es finito, si $\beta = 0$, y es igual a $n(n-1)/2$ cuando $\alpha = 0$, $\gamma = 0$; a $n(n+1)/2$ cuando $\alpha = 1$, $\gamma = 0$; a $n(n-1)$ cuando $\alpha = 0$, $\gamma = 1$; a n^2 cuando $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, y, por fin, es igual a ∞, siempre que $\beta = 1$. Por definición (y por el sentido) pongamos $g_{\alpha,0,\gamma}(n, k) = 0$, si k es mayor que la frontera superior (determinada en el problema 5.66) para el número de aristas en el $(\alpha, 0, \gamma)$-grafo. Por eso el límite superior de sumación respecto de k puede considerarse en todo caso igual a ∞.

Demuéstrese que

$$G^{(n)}_{0,0,0}(y) = (1+y)^{n(n-1)/2}, \quad G^{(n)}_{0,0,1}(y) = (1+y)^{n(n-1)},$$
$$G^{(n)}_{1,0,0}(y) = (1+y)^{n(n+1)/2}, \quad G^{(n)}_{1,0,1}(y) = (1+y)^{n^2},$$
$$G^{(n)}_{0,1,0}(y) = (1-y)^{-n(n-1)/2}, \quad G^{(n)}_{0,1,1}(y) = (1-y)^{-n(n-1)},$$
$$G^{(n)}_{1,1,0}(y) = (1-y)^{-n(n+1)/2}, \quad G^{(n)}_{1,1,1}(y) = (1-y)^{-n^2}.$$

5.68. Sea $c_{\alpha,\beta,\gamma}(n, k)$ el número de (α, β, γ)-grafos conexos con n vértices marcados y k aristas. Suponemos $c_{\alpha,0,\gamma} = 0$, si k es mayor que la frontera superior determinada en el problema 5.66.

Demuéstrese la relación recurrente

$$g(n+1, k) = \sum_{l=0}^{n} \sum_{m=0}^{k} \binom{n}{l} c(l+1, m)\, g(n-l, k-m) \quad (5.1)$$

(fórmula de Hilbert). Con el fin de simplificar la notación en (5.1) están omitidos los índices α, β y γ.

Las condiciones iniciales son las siguientes: $g(0, 0) = 1$ y $g(0, k) = 0$, si $k > 0$ (por acuerdo); $c(1, 0) = 1$ y $c(n, 0) = 0$, si $n > 1$ (según el sentido).

5.69. Introduzcamos las funciones generatrices

$$C^{(n)}_{\alpha,\beta,\gamma}(y) = \sum_{k\geqslant 0} c_{\alpha,\beta,\gamma}(n, k)\, y^k, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

donde el límite superior de sumación respecto de k es el mismo que figura en la definición de la función generatriz $G^{(n)}_{\alpha,\beta,\gamma}(y)$. Dedúzcase de la relación recurrente (5.1), que se refiere a los números $g_{\alpha,\beta,\gamma}(n, k)$ y $c_{\alpha,\beta,\gamma}(n, k)$, la siguiente relación recurrente para las funciones generatrices $G^{(n)}_{\alpha,\beta,\gamma}(y)$ y $C^{(n)}_{\alpha,\beta,\gamma}(y)$:

$$G^{(n+1)}_{\alpha,\beta,\gamma}(y) = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} C^{(l+1)}_{\alpha,\beta,\gamma}(y)\, G^{(n-l)}_{\alpha,\beta,\gamma}(y), \quad n = 0, 1, \ldots, \quad (5.2)$$

donde, de conformidad con las condiciones iniciales del problema 5.68, $G^{(0)}_{\alpha,\beta,\gamma}(y) = 1$.

5.70. Introduzcamos las funciones generatrices

$$G_{\alpha,\beta,\gamma}(z, y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} G^{(n)}_{\alpha,\beta,\gamma}(y)\frac{z^n}{n!},$$

$$C_{\alpha,\beta,\gamma}(z, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C^{(n)}_{\alpha,\beta,\gamma}(y)\frac{z^n}{n!},$$

Demuéstrese que para las funciones generatrices $G_{\alpha,\beta,\gamma}(z, y)$ y $C_{\alpha,\beta,\gamma}(z, y)$ se verifica la correlación

$$G_{\alpha,\beta,\gamma}(z, y) = \exp\{C_{\alpha,\beta,\gamma}(x, y)\}. \tag{5.3}$$

5.71. ¿Cuántos son los grafos (0, 0, 0) con $2n$ vértices y n aristas, cuyos componentes conexos son aristas aisladas?

5.72. Hállese la función generatriz exponencial de los números μ_n, donde $\mu_0 = 1$, $\mu_n = 0$, si n es impar y μ_{2n} es igual al número de grafos del problema antecedente.

5.73. Supongamos que $c(n, k) = c_{0,0,0}(n, k)$ es el número de (0, 0, 0)-grafos conexos con n vértices marcados y k aristas y que $F(n, k)$ es el número de tales grafos que no tienen vértices terminales, es decir, incidentes respecto de una sola arista. Muéstrese que para $n > 2$ los números $c(n, k)$ y $F(n, k)$ están ligados entre sí por la relación

$$F(n, k) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} c(n-i, k-i)(n-i)^i, \quad n > 2,$$

$$c(0, 0) = 1, \quad c(0, k) = 0 \quad \text{para } k > 0.$$

5.74. El (0, 0, 0)-grafo conexo sin ciclos es un árbol. El número de aristas en el árbol con n vértices es igual a $n - 1$. Haciendo uso del problema 5.73, demuéstrese que el número $T(n)$ de árboles con n vértices marcados es igual a

$$T(n) = n^{n-2}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.4}$$

(primera fórmula de Cayley).

5.75. ¿A qué es igual el número

$$T_n(P_{j_1}, \ldots, P_{j_r}), \quad r = 1, 2, \ldots; \quad n = r, r+1, \ldots,$$

de árboles con n vértices marcados $P_1, \ldots, P_n$, en los cuales los vértices $P_{j_1}, \ldots, P_{j_r}$ son terminales?

5.76. Demuéstrese que el número $T(n, r)$ de árboles con n vértices marcados, de los cuales r son terminales, se define por la fórmula

$$T(n, r) = \frac{n!}{r!} S(n-2, n-r), \quad n = 1, 2, \ldots; \quad r = 0, \ldots, n \tag{5.5}$$

(segunda fórmula de Renyi), donde $S(n-2, n-r)$ es el número de Stirling de 2° género.

5.77. Demuéstrese la fórmula (5.4), haciendo uso de la segunda fórmula de Rényi (véase el problema 5.76).

5.78. Demuéstrese para los números $T(n, r)$ del problema 5.76 la fórmula recurrente

$$\frac{r}{n} T(n, r) = rT(n-1, r) + (n-r) T(n-1, r-1)$$

$(n = 3, 4, \ldots; r = 1, \ldots, n)$, haciendo uso de la fórmula explícita (5.5).

5.79. Hállese el número

$T(n; P_{j_1}, \ldots, P_{j_r}), \quad r = 1, \ldots; \quad n = r, r+1, \ldots,$

de árboles con n vértices marcados $P_1, \ldots, P_n$, de los cuales exactamente r (a saber, los vértices $P_{j_1}, \ldots, P_{j_r}$) son terminales.

5.80. Obténgase la demostración combinatoria de la fórmula recurrente del problema 5.78.

5.81. Demuéstrese, para los números $T(n)$ del problema 5.74, la relación recurrente

$$2(n-1) T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} (n-i) T(i) T(n-i), \quad n = 2, 3, \ldots$$

La condición inicial es: $T(1) = 1$.

5.82. Demuéstrese la identidad

$$2(n-1) n^{n-2} = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} i^{i-1} (n-i)^{n-i-1}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

5.83. Designemos con $\tau(n)$ el número de árboles radicales con $n \geqslant 1$ vértices marcados e introduzcamos una función generatriz

$$\theta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{z^n}{n!}.$$

Demuéstrese que $\theta(z)$ satisface la ecuación

$$z = \theta(z) e^{-\theta(z)}$$

(ecuación de Polya) y en la forma explícita $\theta(z)$ es

$$\theta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-1} \frac{z^n}{n!}.$$

5.84. Sea

$$T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} T(n) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-2} \frac{z^n}{n!}.$$

Muéstrese que $T(z)$ y la función generatriz $\theta(z)$ del problema 5.83 están ligados entre sí por la correlación

$$T(z) = \theta(z) - \theta^2(z)/2$$

(primera fórmula de Renyi).

5.85. Demuéstrese la primera fórmula de Cayley (5.4) para un número de árboles con n vértices marcados, haciendo uso de los resultados del problema 5.83 (ecuación de Polya).

5.86. Supongamos que para $n = 1, 2, \ldots; k = 1, 2, \ldots, n$

$$A_{nk} = \sum \frac{n!}{j_1! \ldots j_k!} j_1^{j_1-1} j_2^{j_2-1} \ldots j_k^{j_k-1};$$

la sumación aquí se realiza respecto de los juegos $j_1, \ldots, j_k$ tales que $j_1 + \ldots + j_k = n$. Demuéstrese la identidad

$$A_{nk} = kn^{n-k}(n-1)!/(n-k)!.$$

5.87. Designemos, para $n = 1, 2, \ldots; k = 1, \ldots, n$, mediante $l_k(n)$ el número de bosques con $n + k - 1$ vértices marcados $P_1, \ldots, P_{n+k-1}$ y k componentes tales que los vértices $P_1, P_2, \ldots, P_k$ pertenezcan a los componentes diferentes. Demuéstrese que

$$l_k(n) = k(n + k - 1)^{n-2}$$

(segunda fórmula de Cayley).

5.88. Demuéstrese que el número de bosques radicales $l_k(n)$ con n vértices marcados y k componentes es

$$l_k(n) = \binom{n-1}{k-1} n^{n-k}, \quad n = 1, 2, \ldots; k = 1, 2, \ldots, n.$$

5.89. Supongamos que $T_k(n)$ denota el número de árboles con n vértices marcados $P_1, \ldots, P_n$, en los cuales el vértice P_1 es de grado k. Muéstrese que

$$T_k(n) = \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1}, \ n = 2, 3, \ldots; k = 1, \ldots, n-1$$

(fórmula de Clark).

5.90. Dése una nueva demostración de la primera fórmula de Cayley (5.4), haciendo uso de la fórmula de Clark del problema 5.89.

5.91. Demuéstrese la validez de la identidad

$$\sum_{p=k}^{n-1} \binom{n}{p} \binom{p-1}{k-1} p^{p-k} (n-p)^{n-p-1} = (k+1) \binom{n-1}{k} n^{n-k-1},$$

donde $n = k + 1, k + 2, \ldots; k = 1, 2, \ldots$ (Para $k = 1$ esta identidad se reduce a la identidad del problema 5.82).

5.92. Denotemos por $L_k(n)$ el número de bosques con n vértices marcados y k componentes. Demuéstrese que

$$L_k(n)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{\min(k,\,n-k)}\left(-\frac{1}{2}\right)^j\binom{k}{j}\binom{n-1}{k+j-1}(k+j)!\,n^{n-k-j},$$
$$n=1,\ \ldots;\ k=1,\ \ldots,\ n$$

(tercera fórmula de Rényi).

5.93. En un árbol con $n\geqslant 2$ vértices marcados $P_1,\ \ldots,\ P_n$ existe un único camino que une dos vértices arbitrarios. Supongamos que para $k\geqslant 2$, $\gamma_k(n)$ es el número de árboles con n vértices marcados, en los cuales los vértices P_1 y P_2 están unidos mediante un camino de longitud $k-1$ (es decir, mediante un camino que pasa por k vértices sucesivos, incluidos P_1 y P_2). Demuéstrese que

$$\gamma_k(n)=kn^{n-k-1}(n-2)(n-3)\ldots(n-k),\ n=2,\ 3,\ \ldots;$$
$$k=2,\ \ldots,\ n$$

(fórmula de Meir — Moon).

5.94. Demuéstrese que el número $t(n;\ v_1\ \ldots\ v_n)$ de árboles con $n\geqslant 2$ vértices marcados $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n$, en los cuales el vértice P_i es de grado $v_i\geqslant 1$, se determina por la fórmula

$$t(n;\ v_1,\ \ldots,\ v_n)=(n-2)!/(v_1-1)!\ \ldots\ (v_n-1)!)$$

(fórmula de Moon), con la particularidad de que los grados $v_1,\ \ldots,\ v_n$ satisfacen la correlación

$$v_1+v_2+\ldots+v_n=2(n-1).$$

5.95. Demuéstrese la primera fórmula de Cayley (5.4), la segunda fórmula de Rènyi y la fórmula de Clark (problema 5.89), haciendo uso del resultado del problema 5.94.

5.96. Se denominará *altura del vértice* Q de un árbol respecto de cierto vértice fijo P la longitud del único camino que une el vértice Q con el P. La altura del propio vértice P en este caso se considerará igual a cero. La altura del árbol por encima del vértice P se definirá como altura máxima de sus vértices con relación a P. Denotemos por $d_k(n)$ el número de árboles con n vértices marcados $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n$, cuya altura por encima del vértice P_1 no sobrepasa de k.

Demuéstrese que

$$d_k(n)=\sum_{p=1}^{n-1}\binom{n-1}{p}\sum\frac{(n-1-p)!}{(m_1-1)!\ \ldots\ (m_p-1)!}\,d_{k-1}(m_1)\ \ldots\ d_{k-1}(m_p),$$

donde $d_0(1)=1$ y $d_0(m)=0$, si $m>1$; la sumación se realiza respecto de los juegos $m_1,\ \ldots,\ m_p$ tales que $m_1+\ldots+m_p=$ $=n-1,\ m_i\geqslant 1$.

5.97. Sea

$$D_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{(n-1)!} z^n, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

donde $D_0(z) = z$. Demuéstrese que

$$D_{k+1}(z) = z \exp\{D_k(z)\}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

5.98. Muéstrese que para los números $d_k(n)$ (véase el problema 5.96) se verifica

$$d_k(n) = \sum \frac{(n-1)!}{m_1! \ldots m_k!} m_1^{m_2} m_2^{m_3} \ldots m_{k-1}^{m_k}, \; n = 2, 3, \ldots;$$
$$k = 1, 2, \ldots, n-1;$$

la sumación se realiza respecto de los juegos $m_1, \ldots, m_k$ tales que $m_1 + \ldots + m_k = n - 1$, $m_i \geqslant 0$.

5.99. Sea $\overline{d}_k(n)$ el número de árboles con n vértices marcados, cuya altura por encima del vértice P_1 es igual exactamente a k. Muéstrese que

$$\overline{d}_k(n) = d_k(n) - d_{k-1}(n),$$
$$\overline{d}_k(n) = \sum \frac{(n-1)!}{m_1! \ldots m_k!} m_1^{m_2} \ldots m_{k-1}^{m_k},$$
$$n = 2, 3, \ldots; \quad k = 1, \ldots, n-1;$$

la sumación se realiza respecto de tales juegos $m_1, \ldots, m_k$ que $m_1 + \ldots + m_k = n - 1$, $m_i \geqslant 0$.

5.100. Sea $S_k(n)$ el número de $(0, 0, 0)$-grafos con $n \geqslant 3$ vértices marcados y k aristas que tienen un único ciclo de longitud k $(3 \leqslant k \leqslant n)$ y $n - k$ vértices aislados. Muéstrese que

$$S_k(n) = \frac{1}{2k} \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{1}{2k} n(n-1) \ldots (n-k+1).$$

5.101. Designemos por $P_k(n)$ el número de grafos conexos con $n \geqslant 3$ vértices marcados que tienen un único ciclo de longitud k $(3 \leqslant k \leqslant n)$. Muéstrese que

$$P_k(n) = \frac{n!}{2k} \sum \prod_{j=1}^{k} \frac{(n_j+1)^{n_j-1}}{(n_j)!},$$

donde la sumación se realiza respecto de tales juegos $n_1, \ldots, n_k$ que $n_1 + \ldots + n_k = n - k$, $n_i \geqslant 0$.

5.102. Introduzcamos una función generatriz

$$P(z, y) = \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{k=3}^{\infty} P_k(n) y^k \frac{z^n}{n!}.$$

Demuéstrese que

$$P(z, y) = -\frac{1}{2}\left[\ln(1 - y\theta(z)) + \frac{y\theta(z)}{1!} + \frac{y^2\theta^2(z)}{2!}\right],$$

donde $\theta(z)$ es la función generatriz de los números de árboles radicales (véase el problema 5.83).

5.103. Demuéstrese la fórmula para los números de grafos conexos con n vértices marcados y un único ciclo de longitud k:

$$P_k(n) = \frac{(n-1)!\, n^{n-k}}{2(n-k)!}, \quad n \geqslant k \geqslant 3.$$

§ 3. Planos finitos

Un plano se llama *finito*, si contiene un número finito de puntos y rectas. En un plano proyectivo finito en cada recta yacen $n + 1$ puntos; por cada punto pasan $n + 1$ rectas; n recibe el nombre de *orden* del plano.

Un sistema que se obtiene de un plano proyectivo finito por supresión de una recta y de todos los puntos situados en ésta, lleva el nombre de plano *afín* del mismo orden que el plano proyectivo dado. Un plano afín de orden n tiene n^2 puntos, $n^2 + n$ rectas; en cada recta yacen n puntos y por cada punto pasan $n + 1$ rectas. El plano afín se interpreta por intermedio de un bloque-esquema equilibrado incompleto con los parámetros

$$v = n^2, \quad b = n^2 + n, \quad k = n, \quad r = n + 1, \quad \lambda = 1.$$

Un plano proyectivo lleva el nombre de Desargue, si en él se cumple el

TEOREMA DE DESARGUE. *Si las rectas que unen los correspondientes vértices de dos triángulos se intersecan en un punto, los puntos de intersección de los lados correspondientes yacen en una misma recta.*

Cualquier plano finito de Desargue es isomorfo a un plano de cierto orden n, construido sobre el campo de Galois $GF(n)$, donde $n = p^\alpha$ (p es un número primo y α, un número natural).

Se denomina *curva de segundo orden* (*cónica*) a un conjunto de puntos de un plano, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0,$$

donde mediante x, y, z vienen designadas las coordenadas homogéneas. La regularidad de la cónica se determina por la condición de regularidad de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & h_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Una curva de segundo orden se define por cinco elementos: o bien por cinco puntos, o bien por cuatro puntos y una tangente en uno de los puntos mencionados, o bien por tres puntos y las tangentes en dos de ellos, etc.

Se denominará *arco* de un plano proyectivo a cualquier conjunto de puntos, de los cuales cualesquiera tres no yacen en una misma recta (no colineares tres a tres); un arco, en el que están contenidos k puntos, se llama *k-arco*. Un arco que no puede ser ensanchado se denomina *completo*, y si el citado arco contiene un número máximo posible de puntos para el orden dado n del plano, se denominará *óvalo*.

Una recta que pasa por dos puntos de un arco se llama *secante* de dicho arco; los k-arcos con sus secantes llevan el nombre de polígonos de k lados (vértices) completos.

Si algún punto del plano no yace en ninguno de los secantes del arco dado, entonces este punto puede ser añadido al arco; en este caso se obtiene un arco nuevo que contiene el arco dado, por lo cual este último resulta ser incompleto. Viceversa, si todos los puntos del plano yacen en los secantes del arco dado, tal arco no podrá ser ensanchado.

Una recta que tiene con el arco sólo un punto común, se denomina *tangente*. Una recta que no tiene puntos comunes con el arco, se denomina *recta externa* de este arco.

Un óvalo en el plano de Desargue de orden impar representa una curva de segundo orden, mientras que en el plano de orden par consta de una curva de segundo orden y del núcleo de la misma, es decir, de un punto por el cual pasa toda tangente a la curva.

5.104. Trácese, valiéndose de una regla corta, una recta entre dos puntos alejados.

5.105. Hállese el número de todas las curvas de segundo orden que pasan por un punto prefijado en un plano proyectivo finito de Desargue en orden n.

5.106. Hállese el número de todas las curvas de segundo orden, que pasan por un par prefijado de puntos, en el plano proyectivo finito de Desargue de orden n.

5.107. Hállese el número de todas las curvas de segundo orden, que son tangentes a las dos rectas dadas en dos puntos prefijados, en un plano proyectivo finito de Desargue de orden n.

5.108. En un plano proyectivo finito de orden n se tienen $n^2 + n + 1$ rectas, de las cuales una es *impropia* y las restantes, *ordinarias*. La recta impropia es incidente con relación a los puntos impropios y sólo impropios. Por cuanto en cada recta de este plano yacen $n + 1$ puntos, en el plano hay $n + 1$ puntos impropios.

Una curva se llama *hiperbólica*, si corta la recta impropia, es decir, tiene con la misma dos puntos impropios comunes. Hállese el número de todas las curvas hiperbólicas de segundo orden, que pasan por dos puntos ordinarios dados, en un plano proyectivo finito de Desargue de orden n.

5.109. Una curva se denomina *parabólica*, si entra en contacto con la recta impropia (véase problema 5.108), es decir, tiene con esta última un punto común. Hállese el número de todas las curvas parabólicas de segundo orden, que pasan por el par dado de puntos ordinarios, en un plano proyectivo finito de Desargue de orden n.

5.110. Una curva se denomina *elíptica*, si no tiene puntos comunes con la recta impropia. Hállese el número de todas las curvas elípticas de segundo orden, que pasan por el par de puntos ordinarios dados, en un plano proyectivo finito de Desargue de orden n.

5.111. Hállese el número de todas las curvas de segundo orden en un plano proyectivo finito de orden n.

5.112. Determínese el número máximo k de puntos del arco de un plano proyectivo finito de orden n.

Indicaciones. Analícense los casos de los planos proyectivos de órdenes par e impar.

5.113. Demuéstrese que en un plano proyectivo de orden impar n por un punto no perteneciente a un óvalo pasan no más de dos tangentes de dicho óvalo; hállese el número de tales puntos (externos), por los cuales pasan dos tangentes al óvalo dado.

5.114. Hállense todos los valores de n tales que en un plano proyectivo de orden n existan los 4-arcos completos.

5.115. Determínese cómo depende de n el número de puntos tanto dispuestos en las secantes del 5-arco, como los que no yacen en él.

5.116. Demuéstrese que en cualquier plano proyectivo no existen 5-arcos completos.

5.117. Demuéstrese que en un plano de orden 4 existe al menos un 6-arco completo (óvalo). Hállese el número de ellos.

5.118. Demuéstrese que el $(n + 1)$-arco en un plano proyectivo de orden par n no puede ser completo.

5.119. Demuéstrese que todas las tangentes del $(n + 1)$-arco en un plano proyectivo de orden par n se intersecan en un punto.

5.120. Dése la explicación combinatoria del problema en el que una secante del óvalo en un plano proyectivo de orden n, se interseca en los puntos dispuestos fuera del óvalo con las secantes restantes.

5.121. Hállese el número K_i de puntos de tipos diferentes, admisibles para el k-arco de un plano proyectivo de orden n, donde $k = 1, 2, 3, 4, 5$, i es el número de secantes del k-arco que pasan por un punto del plano.

5.122. Hállense los números máximo y mínimo de puntos K_i $(i = 0, 1)$ para el 6-arco en un plano proyectivo de orden n, donde i es el número de secantes del 6 arco que pasan por estos puntos.

5.123. Demuéstrese que el n-arco en un plano proyectivo de orden impar n no es completo.

5.124. Hállese el número de puntos de un plano proyectivo de orden n que no están dispuestos en tres lados y tres diagonales de un cuadrilátero (polígono de 4 vértices) completo.

5.125. Demuéstrese que todos los puntos de un plano de orden 3 ó 5 se disponen en los lados y en las diagonales de un cuadrilátero completo.

5.126. Demuéstrese que en un plano proyectivo de orden 4 los puntos diagonales de cualquier cuadrilátero completo son colineares.

5.127. El subplano proyectivo de un plano proyectivo, distinto del último, se denomina *baeriano*, si por cada punto del plano pasa por lo menos una recta del subplano mencionado.

Hállese la relación existente entre el orden n del plano y el orden m de su subplano baeriano.

5.128. Muéstrese que el orden n de un plano y el orden m de su subplano no baeriano están ligados entre sí por la relación $n \geqslant m^2 + m$.

5.129. Muéstrese que un plano de orden 13 tiene un subplano de orden 3, y no tiene subplanos baerianos.

5.130. Demuéstrese que un plano afín finito es equivalente al conjunto completo de cuadrados latinos ortogonales de dos en dos.

5.131. Demuéstrese que la existencia de un plano afín finito es equivalente a la existencia de un plano proyectivo.

5.132. Demuéstrese que no existe un plano afín de orden 6.

5.133. Constrúyase un plano proyectivo finito de orden 2.

5.134. Se denomina *plano de Galois* $P(2, q)$, construido sobre el campo de Galois $GF(q)$, a un conjunto de elementos de los puntos y de sus subconjuntos determinados, los cuales se definen del modo siguiente: se llama punto a una clase de ternas ordenadas

$$(x, y, z) \backsim (\lambda x, \lambda y, \lambda z),$$

donde $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ es una terna fija de elementos de $GF(q)$, $\lambda \in GF(q)$, $\lambda \neq 0$, y la recta es un subconjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen la condición

$$ux + xy + wz = 0,$$

donde, además, $[u, v, w] \backsim [\mu u, \mu v, \mu w]$. Demuéstrese que el plano $P(2, q)$ forma un plano proyectivo finito.

5.135. Demuéstrese que una recta en el plano de Galois $P(2, q)$ puede ser definida también como un conjunto de puntos del tipo

$$(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2),$$

donde $A \backsim (x_1, y_1, z_1)$ y $B \backsim (x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos de la recta, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, $\lambda, \mu \in GF(q)$.

5.136. Demuéstrese que el plano de Galois $P(2, q)$ definido en el problema 5.134 tiene un orden igual a q.

5.137. Hállense todos los puntos y las ecuaciones de todos los tipos de rectas del plano $P(2, 2)$, tomando por elementos de $GF(2)$ los residuos 0, 1 según el módulo 2. Compárense los resultados con el problema 5.133.

5.138. Se denomina *transformación proyectiva* (*colineación*) del plano de Galois $P(2, p^h)$ la transformación de sus puntos definida por el sistema de ecuaciones

$$sx^1 = a_{11}x^{p^r} + a_{12}y^{p^r} + a_{13}z^{p^r},$$
$$sy^1 = a_{21}x^{p^r} + a_{22}y^{p^r} + a_{23}z^{p^r},$$
$$sz^1 = a_{31}x^{p^r} + a_{32}y^{p^r} + a_{33}z^{p^r},$$

donde

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \quad a_{ij},\ s \in GF(p^h), \quad s \neq 0,$$

donde r es un número entero no negativo cualquiera.

a) Compruébese lo correcto de esta definición: conservación de la incidencia del punto y de la recta en esta transformación.

b) Demuéstrese que en el sistema de ecuaciones podemos limitarnos a los valores siguientes: $r = 0, 1, 2, \ldots, h - 1$ (para cualquier $m \geqslant h$ llegamos a uno de los tipos de transformaciones proyectivas que corresponden a estos valores).

5.139. Demuéstrese que el número de diferentes triángulos en el plano $P(2, q)$ es igual a

$$(q^2 + q + 1)(q^2 + q)\, q^2.$$

5.140. Demuéstrese que el número de diferentes cuadriláteros (sistemas de cuatro puntos no conexos) del plano $P(2, q)$ es igual a

$$(q^3 + q + 1)(q^2 + q)\, q^2 (q - 1)^2.$$

5.141. Demuéstrese que el conjunto de todas las colineaciones del plano de Galois de orden $q = p^h$ forma un grupo finito con un orden de

$$h\,(p^{2h} + p^h + 1)(p^{2h} + p^h)\, p^{2h}(p^h - 1)^2.$$

Si en el plano $P(2, q)$ la colineación α, distinta de la idéntica ε, se repite m veces y $\alpha^m = \varepsilon$, entonces el valor mínimo del número natural k, para el cual tiene lugar tal igualdad, recibe el nombre de *período*.

Teorema de Singer. *En el plano $P(2, q)$ existe por lo menos una colineación cíclica del período $q^2 + q + 1$.*

5.142. Demuéstrese el teorema de Singer para $q = 3$.

5.143. Hállese la ecuación de la colineación en el plano $P(2, 5)$ definida por un par de cuaternas de puntos no conexos

$$(1, 0, 1) \mapsto (0, 0, 1), \quad (0, 1, 0) \mapsto (1, 0, 0),$$
$$(0, 0, 1) \mapsto (0, 1, 0), \quad (1, 1, 1) \mapsto (1, 0, 1).$$

5.144. Constrúyase un plano proyectivo de orden n a partir de un conjunto completo de cuadrados latinos recíprocamente ortogonales de orden n, donde $n = 2, 3$ y 4.

5.145. Un plano proyectivo sobre el campo de residuos según el módulo 2 contiene siete puntos: (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1) y siete rectas, con la particularidad de que en cada recta se disponen exactamente tres puntos y por cada punto pasan exactamente tres rectas. ¿Cuántas matrices de todo género de tercer orden pueden formarse a partir de las coordenadas de dichos puntos, si cada fila se compone de las coordenadas de un punto? ¿Cuántas matrices de las mencionadas serán regulares?

5.146. En el plano $P(2, p^h)$, $p \neq 2$, se llamará *curva de segundo orden (cónica)* a un conjunto de puntos del plano, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz = 0, \ a_{ij} \in GF(p).$$

El carácter regular de la cónica se determina por la condición de regularidad de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Demuéstrese que cualquier cónica regular en $P(2, q)$ contiene exactamente $q+1$ puntos.

CAPITULO VI

SISTEMAS DE CONJUNTOS

Los problemas de este capítulo están seleccionados y agrupados de tal manera que en el transcurso de su resolución se explique sucesivamente el contenido de algunas cuestiones del análisis combinatorio y se adquieran los hábitos correspondientes.

§ 1. Problemas extremales en los grafos e hipergrafos

En la preparación de este párrafo prestaron gran ayuda O. Borodín, D. Katona, A. Kóstochka, L. Mélnikov y A. Sidorenko. Su cooperación incluía tanto observaciones valiosas, como material concreto: hay problemas que fueron enunciados y resueltos especialmente para este párrafo; tales son, por ejemplo, los resultados obtenidos por Katona, Kóstochka y Sidorenko. A la exposición de algunos resultados cardinales, como son, por ejemplo, el teorema de Erdös — Ko-Rado y el teorema de Kruskal — Katona, contribuyó la preparación de textos para la demostración de éstos, realizada por D. Katona. Hay también problemas que por ahora no tienen resolución completa (estos últimos están marcados por el signo?).

Sea $S_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto no ordenado de vértices de n elementos y sea $C^l(S_n) = \{S \subset S_n;\ |S| = l\}$ el conjunto de l-subconjuntos del conjunto S_n, de suerte que $|C^l(S_n)| = C_n^l = \binom{n}{l}$, $C(S) = C|S|(S)$; $\mathcal{P}(S_n) = \sum_{i=0}^{n} xC^i(S_n)$, $|\mathcal{P}(S_n)| = 2^n$. Se denomina *hipergrafo* en el conjunto de vértices S todo subconjunto G del conjunto $\mathcal{P}(S)$. Los elementos del conjunto G representan los subconjuntos $e \subseteq S$ y llevan el nombre de *hiperaristas*, así que todo hipergrafo G es cierto conjunto $\{e_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, de $m = |G|$ hiperaristas $e_i \subset S$ sobre los vértices de S; un l-grafo es $G^l \subset C^l(S)$, y un grafo ordinario es el 2-grafo; sus elementos son simplemente las aristas.

A veces resulta cómodo no indicar los conjuntos de vértice; así, por ejemplo, un hipergrafo F puede ser definido mediante sus hiperaristas $\{A_1, \ldots, A_m\}$, cuya numeración, hablando en general, es de poca importancia.

6.1. ¿Cuán grande es el número de aristas que puede tener un grafo de n vértices sin triángulos?

6.2. ¿Cuán grande es el número de hiperaristas que puede tener un hipergrafo de n vértices sin hiperaristas encajadas una en otra?

6.3. ¿Cuán grande es el número de hiperaristas que puede tener un hipergrafo de n vértices en el que cualesquiera dos hiperaristas tienen una intersección no vacía?

6.4. ¿Cuál es el número mínimo de vértices que puede tener un k-grafo de m aristas?

6.5. Si un k-grafo $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ y un l-grafo $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ son tales que $A_i \cap B_j = \varnothing \Longleftrightarrow i = j$, entonces ¿cuán grande puede ser m?

6.6. ¿Cuán grande es el número de hiperaristas que puede tener un hipergrafo de n vértices, en el cual cualesquiera dos hiperaristas tienen una intersección no vacía y cualesquiera tres, una intersección vacía?

Se denomina *grado de un vértice* el número de aristas que lo contienen. Las aristas se llaman *independientes*, si no son adyacentes, es decir, no tienen vértices comunes. Un sistema de aristas independientes recibe el nombre de *combinación de pares*.

6.7. ¿Cuál es el número mínimo de colores que pueden aplicarse para colorar las aristas de un grafo (cada arista en un solo color) de tal modo que en cada vértice converjan las aristas de diferentes colores?

6.8. ¿Cuán grande es el número de aristas que puede tener un grafo de n vértices, en el que el grado de cualesquiera de ellos no sobrepasa de d?

6.9. ¿Cuán grande es el número de aristas que puede tener un grafo de n vértices, el cual posee no más de t aristas independientes?

6.10. ¿Cuán grande es el número máximo de aristas que puede tener un grafo, en el cual el grado de cada vértice no sobrepasa de d y el cual tiene no más de t aristas independientes?

6.11. ¿Cuán grande es el número de aristas que puede tener un grafo de n vértices, en el cual el grado de cada vértice no sobrepasa de y y el cual tiene no más de t aristas independientes?

6.12. ¿Cuán grande es el número de k-aristas que puede tener un k-grafo de n vértices, el cual posee t k-aristas independientes?

Para $X \cap S = \varnothing$ la notación $C^h(X)\, C^l(S)$ significa un $(k + l)$-grafo sobre el conjunto de vértices $X + S$ de la forma $\{e \subset X + S\colon |e \cap X| = k,\ |e \cap S = l\}$. Sea $\mathcal{F}_k$ un grafo de k vértices con $[k/2]$ aristas independientes, y sea $\mathcal{F}_k^*$ un grafo de k vértices con $[k/2]$ aristas independientes en la medida posible. Como siempre,

$$K_n + C^2(S_n), \quad K_{n,m} = C^1(S_n)\, C^1(S_m), \quad S_n \cap S_m = \varnothing.$$

6.13. ¿Cuál es el número mínimo de aristas $m = m(n; H_k)$ que puede tener un grafo $G_n \subset C^2(S_n)$ tal que sea

$$\forall S_k \subset S_n \quad (G_n \cap C^2(S_k)) \supset H_k,$$

donde $H_k \subset C^2(S_k)$ es un grafo de k vértices prefijado de antemano? Examínese este problema para los siguientes grafos H_k:

1) H_k es un grafo de k vértices con una arista: $|H_k| = 1$;

2) $H_k = C^2(S_q)\, C^0(S_k \setminus S_q)$, $S_q \subset S_k$;

3) $H_k = C^1(a)\, C^1(S_k \setminus a) = K_{1,k,1}$, $a \in S_k$ es una estrella;

4) H_k una «rueda», es decir, una estrella $C^1(a)\, C^1(S_k \setminus a)$ y un $(k-1)$-ciclo $C_{k-1} = C_{k-1}(S_k \setminus a)$ sobre los vértices $(S_k \setminus a)$;

5) H_k es un grafo de k vértices arbitrariamente prefijado que tiene un vértice de grado $k - 1$;

6) $H_k = C_k$ es un ciclo simple sobre k vértices;

7) $H_k = P_k$ es un simple camino en k vértices;

8) $H_k = \mathcal{F}_k^*$ es un grafo de k vértices con $]k/2[$ aristas independientes en la medida posible;

9) $H_k = \overline{C}_k = K_k - C_k$ es un grafo completo sin k-ciclo;

10) $H_k = \overline{P}_k = K_k - P_k$ es un grafo completo sin k-camino;

11) $H_k = \overline{\mathcal{F}}_k^* = K_k - \mathcal{F}_k^*$;

12) $H_k = C^2(S_l) + C^2(S_k \setminus S_l)$, $S_l \subset S_k$, $k \geqslant 3l + 1 \geqslant 7$;

13) $H_k = \underbrace{d+1, \ldots, d+1}_{2t/d}$ $2 \leqslant d < 2t$, $d \equiv 0 \pmod 2$, $d \mid 2t$, $k = 2t + 2t/d$;

14) (?) H_k se compone de t aristas independientes y $k - 2t$ vértices aislados $(2t \leqslant k)$;

15) (?) H_k se compone de un grafo H_q de q vértices y $(p - q)$ vértices aislados $(k = p)$.

6.14. ¿Cuál es el número mínimo de aristas que puede tener un grafo $G_n \subset C^2(S_n)$, si

$$\forall S_k \subset S_n\ \exists a \in S_n \setminus S_k : C^1(a)\, C^1(S_k) \subset G_n?$$

6.15. ¿Cuán grande es el número de aristas que puede tener un grafo plano de n vértices, es decir, un grafo que puede ser expresado en el plano sin que haya autointersecciones?

6.16. ¿Cuán grande es el número máximo de aristas que puede tener un grafo de n vértices, en el cual todo subgrafo engendrado de k vértices es plano?

6.17. HIPÓTESIS DE DIRAC. Si un grafo de n vértices tiene $3n - 5$ aristas, él tiene un subgrafo que es homeomorfo a K_5.

6.18. Problema de los subgrafos prohibidos. ¿Cuán grande puede ser el número $f = f(n; G^{(1)}, \ldots, G^{(2)}, \ldots)$ de aristas de un grafo de n vértices que no contiene en calidad de subgrafos. los grafos $G^{(1)}, \ldots, G^{(2)}, \ldots = \{G^{(i)}\}$?

1) **Teorema de Erdös — Shimanóvich**

$$f(n;\ \{G^{(i)}\}) = \left(1 + \frac{1}{1 - \min \chi(G^{(i)})}\right) \binom{n}{2} + o(n^2).$$

2) Si el número de subgrafos prohibidos es finito, entonces la igualdad $f(n;\ \{G^{(i)}\}) = O(n)$ se verifica cuando y sólo cuando entre los subgrafos prohibidos $\{G^{(i)}\}$ se tiene o bien un árbol o bien un bosque.

3) La igualdad $f(n;\ \{G^{(i)}\}) = O(1)$ se verifica cuando y sólo cuando entre los subgrafos prohibidos $\{G^{(i)}\}$ se tienen una combinación de pares y una estrella.

4) $\{G^{(i)}\} = K_{1,k-1}$.

5) $\{G^{(i)}\} = \mathcal{F}_k$.

6) $\{G^{(i)}\} = P_k$.

7) **Hipótesis de Erdös-Sos.** Para todo árbol de k vértices T_k se verifica la desigualdad

$$f(n;\ T_k) \leqslant (k-2)\, n/2.$$

8) $\{G^{(i)}\} = C_n$.

9) $\{G^{(i)}\} = C_k$.

10) $\{G^{(i)}\} = \{C_3, C_4, \ldots\}$ es un conjunto de todos los ciclos.

11) $\{G^{(i)}\} = \{C_3, C_5, \ldots\}$ es un conjunto de todos los ciclos no pares.

12) $\{G^{(i)}\} = \{C_4, C_6, \ldots\}$ es un conjunto de todos los ciclos pares.

13) $\{G^{(i)}\} = \{C_l, C_{l+1}, \ldots\}$ es un conjunto de todos los ciclos "largos".

14) $\{G^{(i)}\} = \{C_3, \ldots, C_l\}$ es un conjunto de todos los ciclos "cortos".

Un hipergrafo G^T se llama *dual* con relación al hipergrafo G, si la matriz de incidencia de G^T es matriz de incidencia transpuesta de G. La *cadena* es una sucesión de conjuntos encajados uno en el otro; la *longitud de una cadena* es el número de términos en tal sucesión. La *anticadena* es un sistema de conjuntos no encajados recíprocamente uno en el otro.

6.19. ¿Cuál es el número mínimo de hiperaristas que puede tener un hipergrafo $G(S_n)$ en el cual

$$\forall a_1, a_2 \in S_n\ \exists\, e_1, e_2 \in G(S_n)\colon a_i \in e_i,\ a_i \notin e_j,$$
$$i = 1, 2, \qquad j = 1, 2, \qquad i \neq j?$$

6.20. ¿Cuál es el número máximo de hiperaristas que puede tener un hipergrafo de n vértices sin cadenas de longitud $k+1$?

6.21. Si $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$ son anticadenas disjuntas de $\mathcal{P}(S_n)$, entonces ¿cómo puede ser de grande el número $\sum_{i=1}^{k} |\mathcal{A}_i|$?

6.22. ¿Cuán grande es el número de hiperaristas que puede tener $F \subset \mathcal{P}(S_n)$, si

$$\neg\exists A_i, A_j \in F: A_i \subset A_j, |A_j - A_i| \geqslant h?$$

6.23. ¿Cuán grande es el número de hiperaristas que puede tener $F \subset \mathcal{P}(S_n)$, si

$$\neg\exists A_i, A_j \in F: A_i \subset A_j, |A_j - A_i| = 1?$$

6.24. ¿Cuál es el número máximo de hiperaristas que puede tener $F \subset \mathcal{P}(S_n)$, si

$$\neg\exists A_i, A_j \in F: A_i \subset A_j, |A_j - A_i| < h \qquad (i \neq j)?$$

6.25. (?) ¿Cuál es el número máximo de hiperaristas que puede tener $F \subset \mathcal{P}(S_n)$, si

$$\neg\exists A_i, A_j \in F: A_i \subset A_j, |A_j - A_i| = h?$$

6.26. ¿Cuál es el número máximo de hiperaristas que puede tener $F \subset \mathcal{P}(S_n)$, si

$$\neg\exists A_i, A_j \in F: \ |A_i \Delta A_j| \leqslant h?$$

6.27. ¿Cuál es el número máximo de hiperaristas que puede tener $F \subset \mathcal{P}(S_n)$, si

$$\forall A_1, \ldots, A_t \in F: \left|\bigcap_{i=1}^{t} A_i\right| \geqslant r?$$

Analícense los siguientes casos:

a) $r = 1$, t es arbitrario;

b) $t = 2$, r es arbitrario;

c) $t = 3$, $r = 2$.

6.28. SUPOSICIÓN DE ERDOS – FRANKL. La construcción extremal para el problema 6.27 tiene la siguiente forma. Sea $S_n = S_{r+th} + S_{n-r-th}$, $S_{r+th} \cap S_{n-r-th} = \varnothing$. Pongamos

$$\mathcal{A}(n, t, r, h) = \sum_{i=r+(t-1)h}^{r+th} C^i(S_{r+th})\, \mathcal{P}(S_{n-r-th})$$

y escojamos h tal que maximice $|\mathcal{A}(n, t, r, h)|$.

6.29. ¿Cuál es el número máximo de k-aristas que puede tener $G_n^k \subset C^k(S_n)$, si $\forall e_1, e_2 \in G_n^k$, $e_1 \cap e_2 \neq \varnothing$? ¿Cómo variará la respuesta, si suponemos la ausencia de los vértices pertenecientes a todas las aristas?

6.30. ¿Cuál es el número máximo de k-aristas que puede tener $G_n^k \subset C^k(S_n)$, si $\forall e_1, \ldots, e_t \in G_n^k \bigcap_{i=1}^{t} e_i \neq \varnothing$?

6.31. ¿Cuál es el número máximo de k-aristas que puede tener $G_n^k \subset C^k(S_n)$, si $\forall e_1, e_2 \in G_n^k \mid e_1 \cap e_2 \mid \geqslant l$? Muéstrese que para n pequeños este número puede ser superior a $\binom{n-l}{k-l}$.

Se llama *sombra* (*l-sombra*) del k-grafo $F \subset C^k(S)$ al l-grafo $C_l(F) = \bigcup_{S_k \in F} C^l(S_k)$.

6.32. Demuéstrese que para cualesquiera m, k naturales existen y son únicos tales t naturales, $a_k > a_{k-1} > \ldots > a_t \geqslant t$, para los cuales se verifica la llamada representación binomial canónica

$$m = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \ldots + \binom{a_t}{t}.$$

6.33. Demuéstrese que si un k-grafo $F \subset C^k(S_n)$ es anticadena, entonces

$$\mid C_{k-1}(F) \mid \geqslant k \mid F \mid /(n-k+1).$$

6.34. Sea

$$f_k(0) = 0, \quad f_k(m) = \binom{a_k}{k-1} + \ldots + \binom{a_t}{t-1},$$

donde t, a_k, ..., a_t son componentes de la representación binomial canónica m. Constrúyase un k-grafo con m aristas tal que se verifique $\mid C_{k-1}(F) \mid = f_k(m)$.

6.35. Demuéstrese la desigualdad

$$f_k(m_1 + m_2) \leqslant \text{máx } \{f_k(m_1), m_2\} + f_{k-1}(m_2).$$

6.36. ¿Cuán pequeña será la potencia de la sombra $C_{k-1}(F)$ que puede tener un k-grafo F de m aristas? ¿Cómo variará la respuesta, si minimizamos la l-sombra?

6.37. Demuéstrese la desigualdad $f_k(m_1 + m_2) \leqslant f_k(m_1) + f_k(m_2)$.

6.38. ¿Cuán grande puede ser el número m, con el cual para todo k-grafo de m aristas $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ existe un $(k-1)$-grafo de m aristas $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$, para el cual $B_i \subset A_i$, $B_i \neq B_j$, $i \neq j$? ¿Cómo variará la respuesta, si $\mathcal{B}$ es un l-grafo?

6.39. ¿Cuán grande puede ser el número de pares de hiperaristas en $F = \{A_1, \ldots, A_m\} \subset \mathcal{P}(S_n)$, para las cuales $\mid A_i \Delta A_j \mid = 1$?

6.40. ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes de existencia de las anticadenas $F \subset \mathcal{P}(S_n)$ con parámetros fijos $p_i = \mid F \cap C^i(S_n) \mid$, $i = 0, 1, \ldots, n$?

6.41. HIPÓTESIS (B. S. Stechkin, P. Frankl). Si un k-grafo $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ y un l-grafo $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ son tales que $\mid A_i \cap B_j \mid \leqslant \lambda \Leftrightarrow i = j$, entonces m máximo es igual a $\binom{k+l-2\lambda}{l-\lambda}$.

6.42. Si los hipergrafos $\mathscr{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$, $\mathscr{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ son tales que $A_i \cap B_j = \varnothing$, $i = j$, entonces

$$\sum_{i=1}^{m} \binom{|A_i| + |B_i|}{|A_i|}^{-1} \leqslant 1.$$

6.43. ¿Cómo variará la respuesta del problema 6.41, si la condición $|A_i \cap B_j| \leqslant \lambda \Leftrightarrow i = j$ la sustituimos por la condición $|A_i \cap B_i| = \lambda$, $|A_i \cap B_j| > \lambda \Leftrightarrow i \neq j$, o bien por la condición $A_i \cap B_i = \varnothing$, $|A_i \cap B_j| > \lambda$, $i \neq j$?

6.44. Si un k-grafo $\mathscr{A} \subset C^k(S_n)$ y un l-grafo $\mathscr{B} \subset C^l(S_n)$ son tales que $A_i \cap B_j \neq \varnothing$, $k + l \leqslant n$, entonces o $|\mathscr{A}| \leqslant \binom{n-1}{k-1}$, o bien $|\mathscr{B}| \leqslant \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1-k}{l-1}$.

6.45. Si los hipergrafos $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son tales que $A \in \mathscr{A}$, $C \subset A \Rightarrow C \in \mathscr{A}$; $B \in \mathscr{B}$, $D \supset B \Rightarrow D \in \mathscr{B}$, resulta válida la desigualdad $|\mathscr{A} \cap \mathscr{B}| \leqslant |\mathscr{A}|\,|\mathscr{B}|\,2^{-n}$.

6.46. PROBLEMA DE TURÁN. ¿Cuál es el número mínimo de l-aristas $T(n, k, l)$ que puede tener un l-grafo $G_n^l \subset G^l(S_n)$, si $\forall S_k \subset S_n$ $\exists S_l \in G_n^l$: $S_l \subset S_k$?

Analícense los casos:

a) $l = 2$ (véase el problema 6.7, *a*));

b) $T(n, k, l) = n - k + 1 \Leftrightarrow n \leqslant (k - 1)\, l/(l - 1)$;

c) $k = n - 1$.

Al problema de Turán es similar el

Problema de empaques. ¿Cuál es el número máximo de l-aristas que puede tener un l-grafo de n vértices, en el cual entre cualesquiera k vértices hay no más de una l-arista?

6.47. Supongamos que un l-grafo G_n^l posee dos propiedades:

$$\forall S_k \subset S_n \quad \exists S_l \in G_n^l\colon\ S_l \subset S_k; \tag{T}$$

$$\forall e_1\ e_2 \in G_n^l \quad |e_1 \cap e_2| \geqslant r. \tag{D}$$

¿Cuál es el número mínimo de aristas que puede tener G_n^l? ¿Cuál es el número máximo de vértices que puede tener G_n^l?

6.48. ¿Cuál es el número mínimo de k-aristas que puede tener $G_n^k \subset C^k(S_n)$, si

$$\forall S_p \subset S_n \quad \exists S_q \subset S_p : C^k(S_q) \subset G_n^k?$$

6.49. Muéstrese que si $p \leqslant 2(q - 1)$, entonces el grafo $G_n^2 \subset C^2(S_n)$ posee la propiedad

$$\forall S_p \subset S_{n-p+q} \quad \exists S_q \subset S_p : C^2(S_q) \subset G_n^2,$$

si y sólo si

$$S_{n-p+q} \subset S_n : C^2(S_{n-p+q}) \subset G_n^2.$$

6.50. PROBLEMA DE ERDOS–KATONA. ¿Cuál es la cantidad máxima de hiperaristas que puede tener $G_i \subset \mathscr{P}(S_n)$, si todos los números $\{ |e_i \cap e_j| \}$, $e_i, e_j \in G$, $i \neq j$, son diferentes?

6.51. ¿Cuál es el número máximo de l-aristas que puede tener $G_n^l \subset C^l(S_n)$, si todos los números $\{| e_i \cap e_j | \}$, $e_i, e_j \in G_n^l$, $i \neq j$, son diferentes?

6.52. ¿Qué cantidad máxima de k-aristas puede tener $G_n^k \subset C^k(S_n)$, si $\forall e_i, e_j \in G_n^k \; | e_i \cap e_j | = 1$?

Un sistema de subconjuntos $F = \{e_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, del conjunto, S_n se llama *determinante* (o de reconstrucción) *en* S_n, si todo subconjunto se restablece unívocamente según un sistema no ordenado de números $\{ | T \cap e_i | \}$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

6.53. ¿Cuán pequeño por su potencia puede ser un sistema determinante de conjuntos en S_n?

6.54. Demuéstrese la unicidad del sistema de conjuntos mínimo, determinato en S_n.

6.55. Constrúyase un ejemplo de hipergrafo de n vértices con n hiperaristas, en el cual todos los grados son los números 1, 2, . . ., n y el cual es distinto de cero.

La *valencia* del conjunto de vértices S, de q entero y del hipergrafo G es el número $v(S, q; G) = | \{e \in G \colon | e \cap S | = q\} |$, de suerte que si a es un vértice de G, entonces $v(a, 1; G) = \deg_G(a)$ es el grado más corriente de dicho vértice en G.

6.56. Muéstrese que

$$\forall G \subset C^2(S) \sum_{a \in S} \deg_G(a) = 2\,|G|.$$

6.57. Demuéstrense las siguientes identidades de valencia:
a) Si G y F son dos hipergrafos, entonces

$$\sum_{s \in F} v(S, q; G) = \sum_{e \in G} v(e, q; F).$$

b) Si $G \subset \mathscr{P}(S_n)$ entonces

$$\sum_{S_p \subset S_n} v(S_p, q; G) = \sum_{j \geqslant q} \binom{j}{q} \binom{n-j}{p-q} v(S_n, j; G).$$

c) Si $G^l \subset C^l(S_n)$, entonces

$$\sum_{S_p \subset S_n} v(S_p, q; G^l) = \binom{l}{q} \binom{n-l}{p-q} |G^l|,$$

$$\sum_{S_r \subset S_p \subset S_n} v(S_p, q; G^l) = \sum_{j \leqslant q} \binom{l-j}{q-j} \binom{n-r-l+j}{p-r-q+j} v(S_r, j; G^l).$$

d) Si G es un hipergrafo, entonces

$$\sum_{a\in S} \deg_G(a) = \sum_{e\in G} |e \cap S|,$$

$$\sum_{S_p\subset S} v(S_p, q; G) = \sum_{e\in G} \binom{|e\cap S|}{q} \binom{|S|-|e\cap S|}{p-q},$$

$$\sum_{a\in S} \binom{\deg_G(a)}{k} = \sum_{\substack{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\in G \\ 1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant |G|}} \left| S \bigcap_{j=1}^{k} e_{i_j} \right|,$$

$$\sum_{S_p\subset S} \binom{v(S_p, p; G)}{k} = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant |G|} \binom{\left|S \bigcap_{j=1}^{k} e_{i_j}\right|}{p}.$$

6.58. Haciendo uso de las valencias, demuéstrense las identidades

$$\sum_{j_1\leqslant q} \sum_{j_2\geqslant q} \binom{j_2-j_1}{q-j_1} \binom{r_2-r_1-j_2+j_1}{p-r_1-q+j_1} \binom{r_1}{j_1} \binom{r_2-r_1}{j_2-j_1} \binom{n-r_2}{l-j_2} =$$

$$= \binom{p}{q} \binom{n-p}{l-q} \binom{r_2-r_1}{p-r_1},$$

$$\sum_{i\geqslant 0} (-1)^i \binom{q+i-r_1}{q-r_1} \binom{r_2-r_1}{q+i-r_1} \binom{n-q-i}{l-q-i} = \binom{n-r_2}{l-q} \binom{r_2-r_1}{q-r_1}.$$

6.59. Hállese la esperanza matemática $M(v(S_p, q; G_n))$ bajo el supuesto de que los subconjuntos S_p de S_n se eligen casualmente con probabilidades iguales.

6.60. ¿Cuál es el número mínimo de k-aristas que puede tener $G_n^k \subset C^k(S_n)$, si $S_n = S_p + S_{n-p}$ y

$$\forall S_q \subset S_p \quad \exists S_r \subset S_{n-p}\colon C^{k-l}(S_q)\, C^l(S_r) \subset G_n^k?$$

6.61. Supongamos que $\mathcal{A}$ es una propiedad arbitraria de los hipergrafos y que $m(n, l; \mathcal{A}) = \max\limits_{G_n^l \sim A} |G_n^l|$. Demuéstrese que si $\mathcal{A}$ es de tal género que

$$\begin{gathered} G^l(S_n) \sim \mathcal{A} \Rightarrow \forall S_{n-1} \subset S_n, \\ (G^l(S_n) \cap C^l(S_{n-1})) \sim \mathcal{A} \end{gathered} \tag{6.1}$$

y si existe una función de valores numéricos enteros $f(n)$ tal que

$$f(n_0) = m(n_0, l; \mathcal{A}), \quad n_0 \geqslant l, \tag{6.2}$$

$$0 \leqslant f(n) \leqslant m(n, l; \mathcal{A}), \quad n > n_0, \tag{6.3}$$

$$\frac{f(n-1)}{1+f(n)} \leqslant \frac{n-l}{n}, \quad n > n_0, \tag{6.4}$$

entonces para todo $n \geqslant n_0$ necesariamente se verifica $m(n, l; \mathcal{A}) = f(n)$.

6.62. Si el hipergrafo F y el sistema de hipergrafos $\mathcal{G} = \{G_1, \ldots\}$ son tales que $\forall G \in \mathcal{G}$, $|G \cap F| \leqslant 1$, entonces

$$\sum \frac{\deg_{\mathcal{G}}(S)}{|\mathcal{G}|} \leqslant 1, \text{ donde } \deg_{\mathcal{G}}(S) = |\{G \in \mathcal{G}: G \ni S\}|.$$

6.63. Sea $f(n)$ una función fija de valores reales; calcúlese $\max \sum_{A \in \mathcal{A}} f(|A|)$, donde el máximo se toma respecto de todas las anticadenas $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(S_n)$.

6.64. ¿Qué cantidad máxima de hiperaristas puede tener un hipergrafo $F \subset \mathcal{P}(S_n)$, si

$$\forall A \in F, \quad |A| \leqslant n/2, \quad \forall A_1, A_2 \in F, \quad A_1 \cap A_2 \neq \varnothing, \quad A_1 \not\subset A_2?$$

6.65. Si un hipegrafo $F = \{A_1, \ldots, A_m\}$ es el mismo que figura en el problema 6.64, entonces

$$\sum_{i=1}^{m} \binom{n-1}{|A_i|-1}^{-1} \leqslant 1.$$

6.66. ¿Cuál es el número máximo de l-aristas que puede tener un l-grafo de n vértices $F = \{A_1, \ldots, A_m\} \subset C^l(S_n)$, si

$$\forall A_i, A_j, A_k \in F, \quad A_k \not\supset A_i \Delta A_j,$$
$$i \neq j \neq k \neq i?$$

6.67. ¿Cuál es el número máximo de hiperaristas que puede tener $F \subset \mathcal{P}(S_n)$, si

$$\forall A_1, A_2 \in F \quad A_1 \not\subset A_2, \quad A_1 \cap A_2 \neq \varnothing,$$
$$A_1 \cup A_2 \neq S_n?$$

6.68. ¿Qué cantidad máxima de hiperaristas puede tener $F \subset \mathcal{P}(S_n)$, si

$$\forall A_1, A_2 \in F \quad A_1 \cap A_2 \neq \varnothing, \quad A_1 \cup A_2 \neq S_n?$$

6.69. ¿Cuál es el número máximo de l-aristas que puede tener un l-grafo crítico máximo de Turán, es decir, el l-grafo $C_n^l \subset C^l(S_n)$ que posee las dos propiedades siguientes:

$$\forall S_h \subset S_n \quad \exists S_l \in G_n^l : S_l \subset S_h; \qquad (T)$$
$$\forall S_l \in G_n^l \quad (G_n^l - C(S_l)) \not\vdash T. \qquad (K)$$

6.70. ¿Cuán pequeño es el número de aristas comunes que pueden tener dos grafos de n vértices de Turán $G_i \subset C^2(S_n)$, $i = 1, 2$, tales que

$$\forall S_3 \subset S_n \quad \exists S_2 \in G_i : S_2 \subset S_3, \ i = 1, 2?$$

6.71. Sea $n \equiv o(k)$. Demuéstrese que $C^k(S_n)$ puede ser representado en forma de una suma $C^k(S_n) = \sum G_i$, donde $G_i \cap G_j = \varnothing$, y cada G_i representa un k-grafo de n/k k-aristas independientes sobre los vértices de S_n.

6.72. ¿Es cierto que si un grafo G_n^2 tiene más de $k(n-k)+\binom{k}{2}$ aristas, se encontrará en él un subgrafo en el cual el grado de cada vértice será superior a k?

6.73. HIPÓTESIS DE BERGE. En todo grafo, cuyos grados de los vértices son todos iguales a cuatro, se encontrará un subgrafo, en el cual todos los grados de los vértices son iguales a tres.

§ 2. Problemas extremales sobre la partición de los números

Demos a conocer, ante todo, algunas situaciones prácticas relacionadas con los problemas extremales y la partición de números.

6.74. ¿Cuál es la cantidad mínima de pesas que se necesitan para poder pesar cualquier número entero de libras desde 1 hasta n?

6.75. ¿Cuál es el número mínimo de billetes de 1, 3, 5, 10 y 25 rublos que se necesitan para saldar las cuentas con una lechera, verdulera, lavandera y un carnicero, si en total hay que pagarles a todos 37 rublos? ¿Y si en este caso se conoce que las mujeres van a pedir un precio máximo de 3, 5 y 5 rublos, respectivamente?

6.76. En cierto lugar se inaugura un bar con un mostrador largo. Se sabe que los habitantes visitan el bar en familias (k_i personas en la i-ésima familia), y hay en total t familias. Cada familia se sienta al mostrador ocupando lugares seguidos sin que se queden por ambos lados de ella lugares desocupados. Habiendo permanecido sentada cierto tiempo, una de las familias se va, pero puede volver de nuevo cuando lo desee. ¿Qué capacidad debe tener el mostrador para que se garantice la ausencia de colas?

Si el bar tiene además un administrador que acomoda los visitantes en los asientos a su modo (sin separar las familias), entonces ¿qué parte del mostrador podrá economizar?

6.77. Veamos un esquema de alojamiento de n partículas indistinguibles en r células indistinguibles. ¿Podrán realizarse todos los resultados de este esquema alojando un número inferior a n de cualesquiera objetos?

6.78. Durante el funcionamiento de los sistemas de cómputo se observa un fenómeno de fragmentación de la memoria del ordenador, es decir, una situación en que toda la memoria está partida en pedazos (fragmentos) ocupados y libres; al mismo tiempo se necesita colocar la siguiente porción informativa en dichos fragmentos, con la particularidad de que la mencionada información puede ser dividida en una cantidad de bloques, no mayor que la determinada, de definido volumen (por ejemplo, por razón de una sola dirección de las tablas o ficheros). Resulta natural la cuestión sobre la determinación de la posibilidad de alojar la información requerida en el sistema de fragmentos dado, es decir, ¿si es alojable el sistema dado de interrogaciones dentro del sistema de fragmentos dado?

La **partición** de n natural se reduce a su representación en forma de una suma no ordenada de sumandos naturales: $n = n_1 + \ldots + n_r$; estos sumandos n_i llevan el nombre de partes de la partición y su número r, de rango de la partición. El concento de partición de un número surgió por primera vez en la correspondencia entre J. Bernoulli y G. Leibniz. Las particiones se escriben comúnmente en la forma vectorial: $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant t} = (x_1, \ldots, x_t) \mid - n$, es decir, $n = \sum_{i=1}^{t} x_i$; la notación $(n_1^{a}, \ldots, n_r^{a}) \mid - n$ denota una partición de n, en la cual la parte n_i interviene exactamente a_i veces, de modo que $\sum_{i=1}^{r} a_i n_i = n$, y el rango de esta partición es igual a $\sum_{i=1}^{r} a_i$. Para los números naturales que se designan por letras minúsculas, la notación $[r]$ significará un conjunto de los primeros r números naturales, es decir, $[r] = \{1, 2, \ldots, r\}$.

La composición es una representación de un número natural n por la suma ordenada de sumandos naturales. Así, pues, las composiciones pueden considerarse como "*particiones ordenadas*".

6.79. Escríbanse todas las particiones y composiciones del número 6.

6.80. Cerciórese de que el número de composiciones de un número natural n de rango r es igual a C_{n-1}^{r-1}, y el número total de composiciones del número n es igual a 2^{n-1}.

Los problemas de particiones son mucho más complejos que las cuestiones correspondientes referentes a las composiciones. Así, por ejemplo, incluso el cálculo de $p(n, r)$, esto es, del número de todas las particiones de n de rango r, es decir, el cálculo del número de soluciones de la ecuación $n = x_1 + \ldots + x_r$, $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_r$ en x_i naturales constituye uno de los aspectos fundamentales de la teoría enumerativa de particiones, la cual se da a conocer en los manuales clásicos de Mac-Mahon y Andrews. El problema extremal sobre las particiones se enuncia por lo general, en forma de pregunta: ¿son muchas o pocas las particiones existentes que se encuentran en la correspondencia dada? La elección de una correspondencia concreta entre las particiones se determina por las condiciones del problema práctico, precisamente de aquel, para el cual las particiones con la citada correspondencia sirven de esquema combinatorio.

Uno de los resultados extremales teórico-numéricos más tempranos pertenece, al parecer, a Sylvester, cuyo teorema afirma: sean $r_1, \ldots, r_t$ unos números naturales recíprocamente primos y sea $s(r_1, \ldots, r)$ un número entero máximo s que no puede ser representado en la forma $s = \sum_{i=1}^{t} a_i r_i$, donde $a_i \in N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Entonces $s(r_1, r_2) = r_1 r_2 - r_1 - r_2$.

Cuando $t \geqslant 3$, el problema de cálculo de los valores exactos de $s(r_1, \ldots, r_t)$ queda hasta ahora abierto y lleva el nombre del problema de Frobenius.

En términos de las particiones puede enunciarse también el principio ampliamente conocido de Dirichlet.

Principio de Dirichlet. Si $n(k, r)$ es n entero mínimo, para el cual en cada partición de este n en r partes existe una que no es inferior a k, entonces $n(k, r) = rk - r + 1$.

Este principio se enuncia con frecuencia en términos de alojamientos y se conoce como **principio de los cajones**. Cualquiera que sea el alojamiento de $(r + 1)$ objetos en r cajones, existe un cajón que contiene al menos dos objetos.

6.81. Definamos entre las particiones la correspondencia $\succcurlyeq$, rigiéndonos por la regla: la partición $(n_1, \ldots, n_r)$ se encuentra en correspondencia $\succcurlyeq$ respecto de la partición $(k_1, \ldots, k_r)$, si existe un i: $1 \leqslant i \leqslant r$, para el cual $k_i \leqslant n_i$, es decir, si en la segunda partición existe una parte que no sobrepasa la parte correspondiente de la primera partición. Entonces surge la pregunta ¿cuál es, para la partición dada $(k_1, \ldots, k_r)$, el $n = n(k_1, \ldots, k_r)$ mínimo, con el cual para cada partición de este n en r partes se cumplirá la correspondencia $(n_1, \ldots, n_r) \succcurlyeq (k_1, \ldots, k_r)$? No es difícil comprobar que el $n(k_1, \ldots, k_r)$ mínimo que se busca existe y se calcula por la fórmula $n(k_1, \ldots, k_r) = \sum_{i=1}^{r} k_i - r + 1$.

Puede calcularse también la característica inversa: calcular para una partición dada $(n_1, \ldots, n_r)$ el $k = k(n_1, \ldots, n_r)$ máximo, cada partición del cual en r partes poseerá la propiedad de que $(n_1, \ldots, n_r) \succcurlyeq (k_1, \ldots, k_r)$. Dicha característica se determina según la fórmula $k(n_1, \ldots, n_r) = \sum_{i=1}^{r} n_i + r - 1$.

6.82. Si n_a es el n mínimo, para el cual existen, cualquiera que sea la coloración en dos colores (2-coloración) de las aristas de un grafo completo K_n sobre n vértices, dos triángulos monocromáticos, quizás de diferentes colores, pero sin aristas comúnes, entonces $n_a = 7$.

6.83. Si n_b es el n mínimo, para el cual existen, cualquiera que sea la 2-coloración de las aristas de K_n, dos triángulos monocromáticos de un mismo color y sin aristas comúnes, entonces $n_a = 8$.

La correspondencia principal entre las particiones de los números en la que nos detendremos aquí, será su capacidad de encajarse: una partición $(k_1, \ldots, k_t)$ se encaja en la partición $(n_1, \ldots, n_r)$, si existe una aplicación $\varphi : \{1, \ldots, t\} \to \{1, \ldots, r\}$ en la cual se cumple el sistema de desigualdades

$$\sum_{j \in \varphi^{-1}(i)} k_j \leqslant n_i \quad i = 1, \ldots, r,$$

donde $\varphi^{-1}(i) = \{j : j \in \{1, \ldots, t\}, \varphi(j) = i\}$ es la preimagen completa del elemento i en la aplicación φ.

Dicho de otro modo, la partición $(k_1, \ldots, k_t)$ se encaja en la partición $(n_1, \ldots, n_r)$, si las partes k_i de la partición $(k_1, \ldots, k_t)$ pueden ser agrupadas en r grupos (cada parte k_i integra un solo grupo y los grupos vacíos se admiten) de un modo tal que, siendo sumadas todas las partes k_i, en cada grupo habrá r números $p_i \leqslant n_i$, $i = 1, \ldots, r$. Si la partición $(k_1, \ldots, k_t)$ se encaja en la partición $(n_1, \ldots, n_r)$, se escribirá este hecho empleando las designaciones para la inclusión de los conjuntos: $(k_1, \ldots, k_t) \subseteq (n_1, \ldots, n_r)$.

Por ejemplo, $(2,2,2) \subseteq (4,2)$, puesto que $(4,2) = (2+2, 2)$, pero $(2,2,2) \nsubseteq (3,3)$.

6.84. Compruébese que la relación binaria de encajamiento es una relación de orden parcial.

Introduzcamos algunas designaciones. P es un conjunto de todas las particiones de todos los números naturales; $P(n)$ es un conjunto de todas las particiones del número n; P_r es un conjunto de todas las particiones de rango r; $P_r(n)$ es un conjunto de todas las particiones de rango r del número n, de modo que $P_r(n) = P(n) \cap P_r$.

6.85. Lema del cambio. Si $k_i = n_j$, entonces $(k_1, \ldots, k_t) \subseteq \subseteq (n_1, \ldots, n_r) \Leftrightarrow (k_1, \ldots, \acute{k_i}, \ldots, k_t) \subseteq (n_1, \ldots, \acute{n_j}, \ldots \ldots, n_r)$, donde la virgulilla sobre el elemento de la sucesión quiere decir que éste está ausente en dicha sucesión.

6.86. Una partición (k^t) se encaja en la partición $(n_1, \ldots, n_r)$ cuando y sólo cuando se verifica la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{r} [n_i/k] \geqslant t.$$

Inténtese examinar una cuestión dual: ¿cuándo la partición $(k_1, \ldots, k_t)$ se encaja en la partición (n^r)?

6.87. Sea $n_a(k, t, r)$ el n máximo, para el cual ninguna partición del número k en t partes se encaja en ninguna partición del número n en r partes. Entonces

$$n_a(k, t, r) = \text{máx}\{k-1, k-1-t+r\}.$$

6.88. Si $n_b(k, t, r)$ es el n mínimo, para el cual $\forall p \in P_r(n)\ \forall \forall q \in P_t(k)\ p \not\subset q$, entonces $n_b(k, t, r) = \text{máx}\ \{k+1, k+1 - -t+r\}$.

6.89. Sea $n_c(q_1, \ldots, q_t; r)$ el n mínimo, para el cual ninguna partición de n en r partes se encaja en la partición $(q_1, \ldots, q_t)$, $q_1 \geqslant \ldots \geqslant q_t$. Entonces

$$n_c(q_1, \ldots, q_t; r) = 1 + \sum_{i=1}^{\text{mín}(r,\, t)} q_i.$$

6.90. Si $q \in P_t(k)$ y $n_d(q; r)$ es el n máximo, para el cual la partición del número q no se encaja en ninguna partición del número n en r partes, entonces $n_d(q; r) = \text{máx}\ \{k-1, k-1-t+r\}$.

6.91. Si $n_e(k, t, r)$ es el n mínimo, para el cual $\forall p \in P_r(n)\ \forall \forall q \in P_t(k)\ q \subset p$, entonces $n_e(k, t, r) = \text{máx}\ \{k, r(k-t) + +1\}$.

6.92. Si $n_f(k, t, r)$ es el n máximo, para el cual $\forall p \in P_r(n)\ \forall \forall q \in P_t(k)$, $p \subset q$, entonces $n_f(k, t, r) = \text{mín}\ \{k,]k/t \times [+r-1\}$.

6.93. **Principio de alojamiento completo.** Sean $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \ldots, \geqslant k_t$, r unos números naturales y sea $n(k_1, \ldots, k_t; r)$ el n mínimo, para el cual la partición $(k_1, \ldots, k_t) \mid - k$ se encaja en cada partición de este n en un número de partes que no sea superior a r. Entonces

$$n(k_1, \ldots, k_t; r) = \text{máx}_{1 \leqslant i \leqslant t} \left(\sum_{j=1}^{i} k_j + (k_i - 1)(r-1)\right).$$

El principio puede formularse también en la forma dual, a saber, como fórmula para r máximo con n fijo.

6.94. Si para los números naturales $k_1 > 1$, $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_t$, $(k_1, \ldots, k_t) \mid -k \leqslant n$, por $r(k_1, \ldots, k_t; n)$ está designado el r máximo, para el cual en cada partición n en r partes se encaja la partición $(k_1, \ldots, k_t)$, entonces

$$r(k_1, \ldots, k_i; n) = \min_{i:\, k_i > 1} \left[\frac{n - \sum_{j=1}^{i} k_j}{k_i - 1}\right] + 1.$$

6.95. Hállese la magnitud $m(n, H_k)$ (véase el problema 6.13) para un grafo no vacío H_k, que consta de t componentes conexos, respecto de k_i vértices en el i-ésimo componente conexo, con la particularidad de que $k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_t \geqslant 1$, $k_1 + \ldots + k_t = k$.

6.96. Compruébese que

$$\max_{(k_1 \ldots k_t) \mid -k} n(k_1, \ldots, k_t; r) = \max(k, r(k-t) + 1) =$$
$$= n((k - t + 1, 1^{t-1}); r).$$

6.97. (?) Calcúlese, para $n_1, \ldots, n_r$, t dados, $k(n_1, \ldots, n_r; t)$, esto es, el k máximo para el cual $\forall (k_1, \ldots, k_t) \mid -k$ se cumple la capacidad de encaje $(k_1, \ldots, k_t) \subset (n_1, \ldots, n_r)$.

La magnitud $n(k_1, \ldots, k_t, r)$ se denominará frontera, y la función $\max_{1 \leqslant i \leqslant t}(\sum_{j=1}^{i} x_j + (x_i - 1)\cdot(r - 1))$, función de alojamiento completo, designándola con $f(x_1, \ldots, x_t; r)$ o bien con $f(X)$, cuando el valor de r es evidente del contexto.

6.98. Compruébense las siguientes propiedades de la función de alojamiento completo:

Si X e Y son dos vectores reales de igual dimensión, entonces $f(X + Y; r) \leqslant f(X; r) + f(Y; r) + r - 1$.

Si l es un número natural, se verifican las siguientes igualdades:

$$f(lk_1, \ldots, lk_t; r) = lf(k_1, \ldots, k_t; r) + (r - 1)(l - 1),$$
$$f((k_1^l, \ldots, k_t^l); rl - l + 1) = lf(k_1, \ldots, k_t; r),$$
$$f((k_1^l, \ldots, k_t^l); r) = lf(k_1, \ldots, k_t; 1 + (r - 1)/l.$$

Analícese la validez de estas mismas igualdades también para la frontera del alojamiento completo.

Sea $X = (x_1, \ldots, x_t) \in R^t$, entonces

$$\text{si } \sum_{i=1}^{t} x_i = p \geqslant 0 \quad \text{y} \quad f(X; r) = \sum_{j=1}^{i} x_j + (x_i - 1)(r - 1),$$

entonces $x_i \geqslant 0$;

si $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_l > 0 > x_i$, $i = l + 1, \ldots, t \geqslant l \geqslant i$ y si S_t es un grupo simétrico de todas las permutaciones del conjunto $[t] = \{1, 2, \ldots, t\}$, entonces

$$\max_{s \in S_t} f(x_{s(1)}, \ldots, x_{s(t)}; r) = \sum_{j=1}^{l} x_j + (x_1 - 1)(r - 1);$$

si, en este caso, $\sum_{i=1}^{l} x_i \geqslant 0$, entonces

$$\min_{s \in S_t} f(x_{s(1)}, \ldots, x_{s(l)}; r) = \sum_{j=l+1}^{t} x_j + f(x_1, \ldots, x_l; r).$$

Si $\sum_{i=1}^{t} x_i = 0$, $\sum_{i=1}^{t} |x_i| = d$, entonces

$$\max_X f(X; r) = 1 - r + dr/2, \quad \min_X f(X; r) = \frac{d(r-1)^{t-1}}{r^{t-1} - (r-1)^{t-1}} - r + 1.$$

Si $\sum_{i=1}^{t} x_i = p \in R^1$ y $1 \leqslant r \in R^1$, entonces

$$\min_X f(X; r) = \frac{pr^t}{r^t - (r-1)^t} - r + 1.$$

6.99. La partición $(k_1, \ldots, k_t)$ se encaja en cualquier partición de $P_r(n)$ cuando y sólo cuando la partición $(lk_1, \ldots, lk_t)$ se encaja en cualquier partición de $P_r(nl + (r-1)(l-1))$.

6.100. La partición $(k_1, \ldots, k_t)$ se encaja en cualquier partición de $P_r(n)$ cuando y sólo cuando la partición $(k_1^l, \ldots, k_t^l)$ se encaja en cualquier partición de $P_{rl-l+1}(nl)$.

6.101. Si la partición $(k_1, \ldots, k_t)$ se encaja en cualquier partición de $P_r(n)$, entonces la partición $(k_1^l, \ldots, k_t^l)$ se encaja en cualquier partición de $P_r(nl + (r-1)(l-1))$.

6.102. Si para $r, t, n_1, \ldots, n_r, k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_t$ naturales se verifica la desigualdad

$$\max_{l \mid k_t} \{\sum_{i=1}^{r} l[n_i/l] + (r-1)(l-1)\} \geqslant$$

$$\geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant t} \{\sum_{j=1}^{i} k_j + (r-1)(k_i - 1)\},$$

entonces la partición $(k_1, \ldots, k_t)$ se encaja en la partición $(n_1, \ldots, n_r)$.

6.103. Si $p(k_1, \ldots, k_t; r)$ es un p mínimo, para el cual $(k_1, \ldots, k_t, r) \subset (p^r)$, entonces

$$p(k_1, \ldots, k_t; r) \leqslant \,]\, n(k_1, \ldots, k_t; r)/r\,[.$$

6.104. Si $M(k, t, r)$ es un M máximo, para el cual $\forall q \in P_t(k)\ \exists\, p \in P_r(M)$ es tal que $p \not\supset q$, entonces para r suficientemente grande

$$M(k, t, r) = ([k/[k/t]] + r - 1)\,]\, k/t\,[- r.$$

6.105. Si $N(k, t, r)$ es un N mínimo, para el cual $\forall p \in P_r(N)\ \exists\, q \in P_t(k)$ es tal que $p \subset q$, entonces

$$N(k, t, r) = k + (]k/t[- 1) \max\{0, r - t\}.$$

6.106. Cualquiera que sea el alojamiento de n partículas indistinguibles en r células indistinguibles, existe t grupos de partículas $[(n + r - 1)/(t + r - 1)]$ partículas en cada grupo) situadas íntegramente en las células.

6.107. Si $k = n(k_1, \ldots, k_t; r)$, entonces cada alojamiento de k partículas en r células se realiza mediante el alojamiento de t grupos de partículas en k_j partículas en el j-ésimo grupo ($j = 1, 2, \ldots, t$), a condición de que cada grupo se dispone íntegramente en una célula.

6.108. Sean $n_2, \ldots, n_r, k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_t, r$ unos números naturales y supongamos que $n(k_1, \ldots, k_t; n_2, \ldots, n_r)$ representa el n mínimo, para el cual cada partición $(p_1, \ldots, p_r)$ de este n en r partes es tal que $p_i \leqslant n_i$, $i = 2, \ldots, r$, posee la propiedad de que $(k_1, \ldots, k_t) \subseteq (p_1, \ldots, p_r)$. Entonces

$$n(k_1, \ldots, k_t; n_2, \ldots, n_r) = \\ = \max_{1 \leqslant i \leqslant t} \left(\sum_{j=1}^{i} k_j + \sum_{l=2}^{r} \min(n_l, k_i - 1) \right).$$

6.109. Si $\sum_{i=1}^{r} n_i \geqslant n(k_1, \ldots, k_t; n_2, \ldots, n_r)$, entonces $(k_1, \ldots, k_t) \subseteq (n_1, \ldots, n_r)$.

Si $n(k_1, \ldots, k_t; n_2, \ldots, n_r) > \sum_{i=1}^{r} n_i \geqslant \max_{2 \leqslant j \leqslant r} n(k_1, \ldots, k_t; n_2, \ldots, n_j - 1, \ldots, n_r)$, entonces $(k_1, \ldots, k_t) \not\subseteq (n_1, \ldots, n_r)$.

6.110. La función $n(k_1, \ldots, k_t; n_2, \ldots, n_r)$ no es sólo semejante a la función $n(k_1, \ldots, k_t; r)$, sino que a veces se expresa en términos de la última. Demuéstrese la siguiente igualdad

$$n(k_1, \ldots, k_t; (m^{r-1})) = \sum_{j=1}^{l} k_j + n(m+1, k_{l+1}, \ldots, k_t; r) - m - 1,$$

donde $k_{l+1} \leqslant m < k_l$.

6.111. Estímese el valor mínimo posible de la frontera de encajamiento completo:

$$m(k, t, r) = \min_{(k_1, \ldots, k_t) \vdash k} n(k_1, \ldots, k_t; r).$$

Si $k \equiv 0 \pmod{r^t - (r-1)^t}$, entonces

$$m(k, t, r) = \frac{kr^t}{r^t - (r-1)^t} - r + 1,$$

y este valor se alcanza en la partición

$$\left(\frac{kr^{t-i}(r-1)^{i-1}}{r^t - (r-1)^t} \right) 1 \leqslant i \leqslant t.$$

Si $k \not\equiv 0 \pmod{r^t - (r-1)^t}$, entonces

$$\frac{kr^t - r + 1}{r^t - (r-1)^t} \geqslant m(k, t, r) \geqslant \frac{kr^t + r - 1}{r^t - (r-1)^t} - r + 1.$$

6.112. La magnitud $m(k, t, r)$ es el C entero mínimo, con el cual para un vector $y_i = \left[\left(C + r - 1 - \sum_{j=1}^{i-1} y_j\right)/r\right]$, $i = 1, 2, \ldots, t$, definido de un modo recurrente, se verifica la igualdad $\sum_{j=1}^{t} y_j = k$.

Sea $t(k, r)$ un t mínimo, para el cual existe una partición del número k en t partes, que se encaja en todas las particiones de este k en r partes.

6.113. La magnitud $t(k, r)$ es el t entero mínimo, con el cual para un vector $y_i = [(k+r-1-\sum_{j=1}^{i-1} y_j)/r]$, $i = 1, 2, \ldots, t$, definido de un modo recurrente, se verifica la igualdad $\sum_{j=1}^{t} y_j = k$.

6.114. Hay l balanzas de palanca de brazos iguales con dos platillas y un sistema unificado de t pesas cuyas masas son $k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_t$. Es necesario asegurar el pesaje simultáneo de l cargas en estas l balanzas, es decir, una pesa colocada en una balanza ya no puede estar colocada en las otras. El peso sumario de las cargas que se pesan nunca es superior al peso sumario de las pesas. ¿Qué condiciones son las que debe satisfacer el sistema de pesas $k_1, \ldots, k_t$ para asegurar tal peso simultáneo y cuál es la cantidad mínima de pesas que bastan para operar?

§ 3. Constantes geométricas extremales

La temática de las constantes geométricas extremales incluye tanto el cálculo de las características numéricas extremales de los sistemas de vectores, como también la descripción espacial de los sistemas de vectores extremales con relación a cualesquiera propiedades. Esta temática que se remonta históricamente a la conocida disputa entre Newton y Gregory sobre el significado de un número de contacto en $\mathbb{R}^3$, representando un círculo amplio de cuestiones de la geometría métrica, ha ofrecido últimamente sus nuevas aplicaciones en los problemas no geométricos, continuos y discretos, y forma hoy día una temática individual. Las constantes representadas en este párrafo están destinadas a ilustrar precisamente muchos aspectos de la cuestión en consideración; en primer lugar esto se refiere a las constantes del tipo δ, las cuales están directamente vinculadas con las constantes de empaque, los números de contacto y sus aplicaciones.

Sea X un espacio normado lineal sobre el campo de números reales; denotemos con $\sigma_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un sistema de n vectores, no forzosamente diferentes, $x_i \in X$, y supongamos que

$$(\sigma) = \sum_{x \in \sigma} x, \| \sigma \| = \| (\sigma) \| = \left\| \sum_{x \in \sigma} x \right\|.$$

La operación de elección de un subsistema de vectores $\sigma_l \subset \sigma_n$ se entiende como una elección de $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}\} = \sigma_l$, donde $x_{i_j} \subset \sigma_n$, y $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_l \leqslant n$, de suerte que siempre hay exactamente $\binom{n}{l}$ posibilidades para tal elección.

6.115. Demuéstrese que

a) entre cualesquiera tres vectores unitarios (versores) del espacio de Hilbert siempre existen dos vectores cuya norma de la suma será no inferior a uno;

b) entre cualesquiera tres vectores unitarios de un espacio lineal normado siempre existen dos vectores cuya norma de la suma será no inferior a 2/3;

c) entre cualesquiera tres vectores de un espacio lineal normado siempre existen dos vectores cuya norma de la suma no será inferior a 2/3 respecto de la norma de la suma de todos los tres vectores;

d) entre cualesquiera tres vectores de un espacio lineal normado siempre existen dos vectores, cuya norma de la suma no será inferior a 2/3 de la norma del vector restante.

6.116. Sea $A(k, l; X)$ el A máximo, para el cual $\forall \sigma_k \subset X \exists \sigma_l < < \sigma_k \| \sigma_l \| \geqslant A \| \sigma_k - \sigma_l \|$. Calcúlese $A(k, l; X)$.

6.117. ¿Cuál es $B = B(k, l, r; X)$ máximo, para el cual $\forall \sigma_k \subset X \forall \sigma_r \subset \sigma_k \exists \sigma_l \subset \sigma_k \| \sigma_l \| \geqslant B \| \sigma_r \|$?

6.118. Calcúlese el $\delta = \delta(l, k; X)$ máximo, para el cual $\forall \sigma_k \subset X \exists \sigma_l \subset \sigma_k \| \sigma_l \| \geqslant \delta$ ($\| x_l \| \geqslant 1$).

6.119. Sean $k \geqslant l \geqslant 1$ unos números naturales, y sean $v_1, v_2, \ldots, v_l, w_1, \ldots, w_k$ los números reales. Supongamos que $C(\bar{v}_l, \bar{w}_k)$ es el C máximo, para el cual $\forall \sigma_k \subset X \exists \sigma_l = \{x_{i_1} \ldots x_{i_l}\} \subset \sigma_k$:

$$\| \sum_{j=1}^{l} v_j x_{i_j} \| \geqslant C \| \sum_{i=1}^{k} w_i x_i \|.$$

Calcúlese $C(\bar{v}_l, \bar{w}_k)$.

6.120. Sean $k \geqslant l \geqslant 1$ unos números naturales y $v_1, \ldots, v_l$, números reales, mientras que $\sum_k$ es un símplice de k vértices inscrito en la esfera unitaria del espacio R^{k-1}. Demuéstrese que si $\{x_1, \ldots, x_l\} \subset \sum_k$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{l} v_i x_i \right| = \left(\frac{k \sum_{i=1}^{l} v_i^2 - (\sum_{i=1}^{l} v_i)^2}{k-1} \right)^{1/2}.$$

6.121. Sean $v_1, \ldots, v_n$ unos números reales. Calcúlese la constante

$$\delta(\bar{v}_n, x) = \inf_{\substack{\sigma_n \subset X \\ \|x_i\| \geqslant 1}} \max_{\pi} \left\| \sum_{i=1}^{n} v_{\pi(i)} x \right\|,$$

donde π es una permutación de los números $\{1, 2, \ldots, n\}$.

6.122. El sistema de vectores unitarios σ_n se denoninará L-sistema (se escribe $\sigma_n \sim L$), si $\forall \sigma_p \subset \sigma_n \exists \sigma_q \subset \sigma_p \; \forall \sigma_k \subset \sigma_q \| \sigma_k \| = c \in \mathrm{R}^1$. Calcúlese o estímese la constante

$$\Delta_c(n, p, q, k; X) = \sup_{\sigma_n \sim L} \| \sigma_n \|.$$

6.123. Sea $T(n, k, l)$ un número combinatorio de Turán (véase el problema 6.46). Demuéstrese que en cualquier $\sigma_n \subset X$ ($\| x_i \| \geqslant 1$) existen al menos $T(n, k, l)$ subsistemas $\sigma_l < \sigma_n$ tales que $\| \sigma_l \| \geqslant \delta(l, k; x)$, donde δ se toma del problema 6.118.

6.124. Calcúlese $\delta(t, k; \mathbf{R}^2)$ (véase el problema 6.118).

6.125. Demuéstrese que la matriz de Hadamard de orden $4n$ existe cuando y sólo cuando $\delta(2, 4n; l_1^{4n-1}) = (4n - 2)/(4n - 1)$.

6.126. Problema sobre el tornillo sin fin. En un plano se dispone la línea de longitud unitaria. ¿Cuán pequeña ha de ser el área de un campo con el que se pueda cubrir completamente cualquier configuración de dicha línea?

CAPÍTULO VII

ANÁLISIS COMBINATORIO SOBRE LOS CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

Los sistemas de conjuntos son el objetivo de los problemas de este capítulo. Estos sistemas, más complejos que los grafos e hipergrafos, son, precisamente, los conjuntos ordenados. Los propios problemas están destinados para dar a conocer las propiedades estructurales de los conjuntos ordenados y señalar los diferentes tipos de problemas combinatorios sobre los mismos.

§ 1. Conjuntos parcialmente ordenados

Sea P un conjunto arbitrario no vacío. La relación binaria $\leqslant$ sobre el conjunto P se denomina *relación de orden*, si

1) $a \leqslant a$ para cualquier $a \in P$ (reflexividad);
2) si $a \leqslant b$ y $b \leqslant c$, entonces $a \leqslant c$ (transitividad);
3) si $a \leqslant b$ y $b \leqslant a$, entonces $a = b$ (antisimetría).

Un conjunto P se llama *parcialmente ordenado* y se denota $(P, \leqslant)$, si es no vacío y si está fijada en él una relación de orden $\leqslant$. Por supuesto, sobre un mismo conjunto se pueden fijar órdenes diferentes.

Los conjuntos parcialmente ordenados $(P, \leqslant)$ y $(Q, \preccurlyeq)$ se denominan *isomorfos* y se designan por $(P, \leqslant) \cong (Q, \preccurlyeq)$, si existe una aplicación biunívoca φ del conjunto P sobre el conjunto Q tal que $a \leqslant b$ tiene lugar cuando y sólo cuando $\varphi(a) \preccurlyeq \varphi(b)$. Notemos que la biunivocidad de la aplicación φ puede ser deducida de la última condición. Una aplicación $\varphi : P \to Q$ se llama *isótona*, si $a \leqslant b$ lleva consigo $\varphi(a) \preccurlyeq \varphi(b)$ para todos los $a, b \in P$.

Un elemento M del conjunto parcialmente ordenado P se llama *máximo*, si en P no hay un elemento p que sea «mayor» que M, es decir, $p \geqslant M$ no se cumple, cualquier que sea $p \in P$ distinto de M; por analogía, un elemento m se llama *mínimo*, si en P no hay un elemento $p \in P$, distinto de m y tal que $p \leqslant m$. Un elemento $a \in P$ se denomina maximal, si $\forall p \in P \; p \geqslant a$. Un elemento $b \in P$ se llama minimal, si $\forall p \in P \; p \geqslant b$. Para los elementos maximal y minimal se usan, a veces, las designaciones 1 y 0, respectivamente.

Un par de elementos $p, q \in P$ se denomina *comparable*, si $p \geqslant q$, o $p \leqslant q$. Si en un conjunto parcialmente ordenado P es comparable todo par de sus elementos, P se denominará *conjunto linealmente ordenado* o *cadena*. A diferencia de las cadenas se llama anticadena a todo conjunto parcialmente ordenado Q que sólo consta de elementos incomparables uno con otro.

El elemento a de un conjunto parcialmente ordenado P *cubre* el elemento $b \in P$ (designación: $b \prec a$), si $b < a$ y no existe $c \in P$ tal que $b < c < a$. Una cadena en el conjunto parcialmente ordenado se llama *saturada*, si dicha cadena no puede ser encajada en ninguna otra cadena distinta de ella misma. De un modo análogo se define la anticadena saturada. Por *cadena máxima* (anticadena máxima) se entiende una cadena (anticadena) máxima por el número de sus elementos.

El *diagrama de Hasse* de un conjunto parcialmente ordenado P es el grafo orientado, de cuyos vértices sirven los elementos de P, mientras que el arco (x, y) está presente cuando y sólo cuando x cubre y. En el grafo citado se acostumbra a expresar los arcos orientados hacia abajo. En tal representación se ponen de manifiesto de manera ilustrativa los niveles del diagrama de Hasse, es decir, del conjunto de elementos de un mismo rango, es decir, del conjunto de aquellos elementos que distan de los elementos mínimos en un camino de longitud igual.

7.1. Dénse ejemplos de conjuntos con órdenes diferentes fijos sobre ellos.

7.2. Demuéstrese que existen exactamente dos conjuntos no isomorfos parcialmente ordenados que constan de dos elementos.

7.3. Indíquense todas las relaciones de orden no isomorfas sobre un conjunto de cinco elementos.

7.4. Dése la definición formal de relación de orden que se emplea para ordenar las palabras en los diccionarios (este orden se denomina lexicográfico).

7.5. Sea $\leqslant$ una relación de orden sobre A y sea B un subconjunto del conjunto A. Para $a, b \in B$ pongamos $a \leqslant_B b$, si $a \leqslant b$. Demuéstrese que la relación $\leqslant_B$ es una relación de orden sobre el subconjunto B ($(B, \leqslant_B)$ y lleva el nombre de subconjunto parcialmente ordenado del conjunto $(A, \leqslant)$).

7.6. Sea S una familia de todos los subconjuntos del conjunto $\{a, b, c, d\}$. Diremos que $A \subseteq B$, donde $A, B \in S$, si A es un subconjunto del conjunto B. Compruébese que $\subseteq$ es una relación de orden. Dibújese el diagrama de Hasse y indíquense los elementos máximos y mínimos. Dénse los ejemplos de cadenas (máximas) y de anticadenas en $(S, \subseteq)$.

7.7. Sea S un conjunto de todos los divisores enteros positivos del número 20, ordenados según la divisibilidad, es decir, $a \leqslant b$ cuando y sólo cuando $a \mid b$ (a divide b). Compruébese que $\leqslant$ es una relación de orden. Dibújese el diagrama de Hasse, indíquense los elementos máximos y mínimos. Dénse los ejemplos de cadenas (máximas) y anticadenas en $(S, \leqslant)$.

7.8. Sea A un conjunto no vacío y sea P el conjunto de todas las relaciones de orden sobre A. Para ρ, $\sigma \in P$ pongamos $\rho \leqslant \sigma$, si $a\rho b$ lleva consigo $a\sigma b$ (a, $b \in A$). Demuéstrese que ($P, \leqslant$) es un conjunto parcialmente ordenado.

7.9. Muéstrese que el elemento maximal, si existe, es máximo y el minimal, mínimo.

7.10. ¿Será cierto que si el elemento máximo es único. es también maximal?

Sea P un conjunto parcialmente ordenado con 0 y 1. Un elemento a de P se denomina *átomo*, si $0 \prec a$, y *coátomo*, si $a \prec 1$. Sea $P(n)$ un conjunto de particiones de un número natural n, ordenado de una manera tal que si λ, $\mu \in P(n)$, entonces $\lambda \leqslant \mu$ cuando y sólo cuando puede obtenerse la partición μ sumando las partes separadas de la partición λ. Por ejemplo, $3 + 1 + 1 = (1^2, 3)$, $4 + 1 = (1, 4)$; $3 + 2 = (2, 3)$ son las particiones del número 5; en este caso $(1^2, 3) \leqslant (1, 4)$ y $(1^2, 3) \leqslant (2, 3)$, mientras que $(1,4)$ y $(2,3)$ son elementos incomparables en $P(5)$.

7.11. Sea $P(n)$ un conjunto parcialmente ordenado de particiones de un número natural n. Dibújese el diagrama de Hasse para $P(5)$, indíquense todos los átomos y coátomos suyos. Hállese el número de elementos en $P(n)$ para $n = 2, 3, 4, 5, 6$ y 10.

7.12. Demuéstrese que los conjuntos a seguir son parcialmente ordenados:

a) el conjunto de toda la gente y $a < b$ significa que a es un descendiente de b;

b) A es un conjunto de todas las funciones reales definidas en el conjunto X, y $f \leqslant g$, donde f, $g \in A$ cuando y sólo cuando $f(x) \leqslant g(x)$ para cualquier $x \in X$;

c) A es un conjunto de todas las funciones reales cóncavas continuas definidas en cierto intervalo de un conjunto de números reales, y $f \leqslant g$ está definida del mismo modo que en b).

7.13. Sea ($A, \leqslant$) un conjunto parcialmente ordenado. Definamos sobre el conjunto A una relación ρ, suponiendo $a\rho b$, si $b \leqslant a$. Compruébese que (A, ρ) es un conjunto parcialmente ordenado que se denomina *dual* respecto del conjunto parcialmente ordenado ($A, \leqslant$).

Si a y b son elementos del conjunto parcialmente ordenado ($A, \leqslant$), con la particularidad de que $a \leqslant b$, entonces el conjunto $[a, b] = \{x \in A \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ se llamará *intervalo*. El conjunto parcialmente ordenado ($A, \leqslant$) se denomina *localmente finito*, si $|[a, b]| < \infty$ para todos los a, $b \in A$.

7.14. Dénse los ejemplos de conjuntos parcialmente ordenados finitos y localmente finitos.

7.15. Demuéstrese que en todo conjunto finito parcialmente ordenado existen tanto elementos máximos, como mínimos.

7.16. Dénse ejemplos de conjuntos parcialmente ordenados: a) sin 0; b) sin 1; c) sin 0 y sin 1.

7.17. Demuéstrese que un elemento que es mínimo y máximo simultáneamente no es comparable con ningún elemento distinto de él.

7.18. Sea $\mathcal{P}(S)$ una familia de todos los subconjuntos del conjunto S. Para A, $B \in \mathcal{P}(S)$ pongamos $A \subseteq B$, si A es un subconjunto del conjunto B. Demuéstrese que $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado llamado *booleano*. Hállense: 0,1, conjuntos de átomos y coátomos del pooseano. Represéntese el diagrama de Hasse del booleano en $\mathcal{P}(S_n)$, si $|S_n| = n$. ¿Será el booleano $\mathcal{P}(S)$ un conjunto localmente finito, si S es un conjunto infinito?

Se denomina *longitud* $l(C)$ de una *cadena finita* C a un número igual a $|C| - 1$. Suele decirse que un conjunto parcialmente ordenado P es de *longitud* n, si en P existe una cadena de longitud n y todas las demás cadenas en P tienen longitud no superior a n. Diremos que la *anchura del conjunto parcialmente ordenado* P es igual a n, si en P existe una anticadena compuesta de n elementos, mientras que todas las anticadenas restantes de P contienen no más de n elementos. Es evidente que la longitud del conjunto parcialmente ordenado P es igual a $|P| - 1$, y la anchura, a 1.

7.19. Sea $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ una anticadena arbitraria en el booleano $\mathcal{P}(S_n)$. Demuéstrese la *desigualdad* de *Yamamoto—Lubel—Meshalkin*:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leqslant 1.$$

7.20. Demuéstrese el teorema de Sperner: la anchura del booleano $\mathcal{P}(S_n)$ es igual a $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$, donde $[x]$ es la parte entera de x.

7.21. Demuéstrese que toda cadena de longitud n es isomorfa al subconjunto $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ de números enteros ordenados de un modo corriente.

Se denomina *producto directo* $P \times Q$ de los conjuntos parcialmente ordenados P y Q a un conjunto de todos los pares del tipo (x, y), donde $x \in P$, $y \in Q$, con la particularidad de que $(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2)$ en $P \times Q$ cuando y sólo cuando $x_1 \leqslant x_2$ en P e $y_1 \leqslant y_2$ en Q.

7.22. Demuéstrese que el booleano $\mathcal{P}(S_n)$ es isomorfo a un producto cartesiano de n cadenas, donde la longitud de cada cadena es igual a 2.

7.23. Compruébese que la unión de una sucesión creciente de cadenas encajadas una en otra de cierto conjunto parcialmente ordenado es una cadena.

7.24. Si φ es un isomorfismo y a, un elemento maximal (minimal, máximo, mínimo, respectivamente), entonces $\varphi(a)$ será también un elemento maximal (minimal, máximo, mínimo, respectivamente). Constrúyanse los ejemplos que muestran lo ilícito de la afirmación para una aplicación isótona arbitraria.

7.25. ¿Cómo se pueden ordenar los vértices de un cubo unitario n-dimensional, para que los mismos, junto con dicha ordenación, sean isomorfos al booleano $\mathscr{P}(S)$? ¿Será única tal ordenación?

7.26. Sea $\mathscr{D}(n)$ un conjunto de todos los divisores enteros no negativos de un número natural n ordenados según la divisibilidad $|$. Compruébese que $(\mathscr{D}(n), |)$ es un conjunto parcialmente ordenado, hállense sus 0 y 1 y los conjuntos de átomos y coátomos. Dibújese su diagrama de Hasse.

7.27. Sea $(B(S_n), \subset)$ un belliano, es decir, un conjunto de todas las particiones de Bell (particiones no ordenadas tanto en el interior de los bloques, como también en los propios bloques) del conjunto $S_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$, ordenadas por la unión de los bloques: para las particiones $\pi_1, \pi_2 \in B(S_n)$ pongamos $\pi_1 \subset \pi_2$ cuando y sólo cuando cualquier bloque de π_1 está contenido en cierto bloque de π_2. Compruébese que $(B(S_n), \subset)$ es un conjunto parcialmente ordenado, hállense su 0 y 1 y descríbanse los niveles de su diagrama de Hasse.

7.28. Sea $(P(n), \leqslant)$ un conjunto de particiones del número n en sumandos naturales ordenados de un modo tal que si $p_1, p_2 \in \in (P(n), \leqslant)$, entonces $p_1 \leqslant p_2$ cuando y sólo cuando se puede obtener p_2 sumando las partes separadas de la partición p_1. Compruébese que dicho conjunto es parcialmente ordenado, descríbanse los niveles de su diagrama de Hasse.

7.29. Sea $(V_n(q), \subset)$ un conjunto de todos los subespacios del espacio vectorial n-dimensional V_n sobre un campo finito con q elementos, ordenado por inclusión. Demuéstrese que este conjunto es parcialmente ordenado y descríbase su diagrama de Hasse.

7.30. Sea $(\Pi_n, \subset)$ un conjunto de todas las aristas de un poliedro Π_n, ordenado por inclusión. Demuéstrese que este conjunto es parcialmente ordenado y descríbase su diagrama de Hasse.

7.31. ¿Cómo están ligados entre sí los conjuntos $(B(S_n), \subset)$ y $(P(n), \leqslant)$?

7.32. Sea $\mathscr{D}(n)$ un conjunto de todos los divisores naturales de un número natural n, ordenado según la divisibilidad $|$, y $n = = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$, donde p_i son diferentes números primos y α_i, los números naturales. Demuéstrese que

$$\mathscr{D}(n) \cong \mathscr{D}(p_1^{\alpha_1}) \times \mathscr{D}(p_2^{\alpha_2}) \times \ldots \times \mathscr{D}(p_s^{\alpha_s}).$$

7.33. Sea $(A, \leqslant)$ uno de los conjuntos parcialmente ordenados citados en los problemas 7.18 y 7.26—7.30, y sea, $(A, \leqslant)_k$ un conjunto de todos los elementos del k-ésimo nivel de su diagrama de Hasse. Dése la respuesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos elementos distintos hay en $(A, \leqslant)$?

b) ¿Cuántos elementos de nivel dado hay en $(A, \leqslant)$?

c) ¿Cuál es el número de cadenas máximas entre el cero y la unidad en el conjunto parcialmente ordenado $(A, \leqslant)$?

d) ¿Cuál es el número de cadenas máximas entre el cero y la unidad que pasan por un elemento fijo $a \in (A, \leqslant)$?

e) ¿Cuál es la anchura del conjunto parcialmente ordenado $(A, \leqslant)$?

7.34. Sea $(A, <)$ un conjunto finito parcialmente ordenado. Demuéstrese que los elementos de A pueden enumerarse del modo siguiente: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, de suerte que de $a_i < a_j$ se desprenderá $i < j$.

Una cadena, en la cual cada subconjunto no vacío posee un elemento mínimo lleva el nombre de conjunto *bien ordenado*. El conjunto bien ordenado lo constituye cada cadena finita.

7.35. Dése un ejemplo de conjunto que *no* está bien ordenado.

7.36. Demuéstrese que si una cadena C y una cadena dual respecto de C en un conjunto dual parcialmente ordenado están bien ordenadas, entonces C contiene un número finito de elementos.

Se dice que un conjunto parcialmente ordenado P satisface la condición de mínimo (de máximo, respectivamente), siempre que cada subconjunto no vacío de P sea un conjunto parcialmente ordenado que contiene elementos mínimos (máximos, respectivamente).

7.37. ¿Satisface cualquier conjunto bien ordenado P la condición del mínimo? ¿Qué puede decirse sobre el cumplimiento de la condición de máximo en P y en un conjunto P^*, dual respecto a P?

Un conjunto parcialmente ordenado P satisface la *condición de rotura de las cadenas decrecientes* (*condición de rotura de las cadenas crecientes, respectivamente*), si para una sucesión numerable arbitraria $\{a_n | n = 1, 2, \ldots\}$ de elementos de P tal que $a_1 \geqslant a_2 \ldots \geqslant a_n \geqslant \geqslant \ldots (a_1 \leqslant a_2 \ldots \leqslant a_n \ldots)$, respectivamente existe un número k tal que $a_n = a_k$ para cualquier $n \geqslant k$.

7.38. Demuéstrese que en un conjunto parcialmente ordenado P la condición de mínimo es equivalente a la de rotura de las cadenas decrecientes. ¿Será cierto que la condición de máximo es equivalente a la condición de rotura de las cadenas crecientes?

7.39. Demuéstrese que si un conjunto parcialmente ordenado no contiene ni cadenas infinitas ni anticadenas infinitas, es finito.

7.40. Demuéstrese que un conjunto finito satisface las condiciones de mínimo y de máximo.

7.41. Demuéstrese que si una cadena no es bien ordenada, contiene una subcadena dual respecto de una serie natural.

7.42. Demuéstrese que un conjunto parcialmente ordenado localmente finito satisface la condición de mínimo.

7.43. Demuéstrese el *teorema de Dilworth*: el número mínimo de cadenas disjuntas que contienen todos los elementos de un conjunto finito parcialmente ordenado P es igual a la anchura de P.

7.44. Sea P un conjunto finito parcialmente ordenado. Demuéstrese que el número máximo de elementos en la cadena de P es igual al número mínimo de anticadenas disjuntas, que contienen todos los elementos del conjunto P.

7.45. Sea $G(V, E)$ un grafo orientado sin contornos. Diremos que a es superior a b, donde $a, b \in V$, si en G existe una cadena orientada desde a hacia b. Formúlese el teorema de Dilworth en términos del grafo orientado sin contornos.

El teorema de Dilworth, demostrado en 1950, cuenta con un amplio dominio de aplicación. Es equivalente [1]) a los teoremas fundamentales del análisis combinatorio tales como, por ejemplo, el teorema de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos (véase el cap. III, § 2), los teoremas de Ford y Fulkerson sobre el flujo máximo expresado en números enteros y el corte mínimo, los teoremas de tipo de Menger, Konig y otros que ocupan el lugar central en la matemática combinatoria.

Se denomina red a un grafo conexo orientado $G(V, E)$ con el conjunto de vértices V y el conjunto de arcos E, en el cual a todo arco $(x,y) \in E$ se le ha puesto en correspondencia un número no negativo $c(x, y)$ llamado *capacidad del arco* (x, y). Sean s, t dos vértices distintos de G, $\Gamma(x) = \{y \in V \mid (x, y) \in E\}$ y $\Gamma^{-1}(x) = \{y \in V \mid (y, x) \in E\}$. Se denomina *flujo estacionario de la magnitud* v de s a t la función real f que está definida sobre el conjunto de arcos E y que satisface las siguientes correlaciones

$$\sum_{y \in \Gamma(x)} f(x, y) - \sum_{y \in \Gamma^{-1}(x)} f(y, x) = \begin{cases} v, & \text{si } x = s; \\ 0, & \text{si } x \neq s, t; \\ -v, & \text{si } x = t; \end{cases} \tag{7.1}$$

$$0 \leqslant f(x, y) \leqslant c(x, y) \text{ para todos los } (x, y) \in E. \tag{7.2}$$

En este caso el vértice s se llama *fuente* y t, salida (vertedero). En el *problema sobre el flujo máximo* entre dos vértices se requiere construir un flujo estacionario desde el vértice s al vértice t, que tenga la magnitud máxima posible v. Sea X un subconjunto de vértices de la red G tal que $s \in X$, $t \notin X$. En este caso el conjunto de todos los arcos $(x, y) \in E$ tales que $x \in X$, y y $\notin X$, se llama *corte* de la red G y se designa $(X, \bar{X})$. La capacidad del corte se llama magnitud $\sum\limits_{x \in X, y \in \bar{X}} c(x, y)$.

Resulta válido el siguiente teorema de Ford y Fulkerson sobre el flujo máximo y corte mínimo: la magnitud máxima de un flujo en una red arbitraria es igual a la capacidad mínima de sus cortes.

Si la función de la capacidad de los arcos se expresa en números enteros, existe un flujo máximo que también se mide en números enteros (*teorema sobre el flujo* en números enteros).

Muchos problemas de la optimización discreta se reducen al problema sobre el flujo máximo entre dos vértices.

En la fig. 7.1 está representada una red, en la cual el primer número en el arco es igual a la capacidad de éste, y el segundo, al valor

[1]) Es decir, puede obtenerse directamente de la validez de cada uno de los teoremas citados más abajo, y viceversa, cada uno de estos últimos se deduce, a su vez, directamente del teorema de Dilworth.

de la función del flujo f. Con línea s punteadas están designados dos cortes cuyas capacidades son iguales a 4. El valor del flujo en esta red es igual a 4 y este flujo es máximo.

Se denomina *sistema de representantes distintos* (o transversal) de una familia de subconjuntos $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ del conjunto X a tal sistema de elementos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que $x_i \in X_i$, y $x_i \neq x_j$ para cualesquiera $i \neq j$.

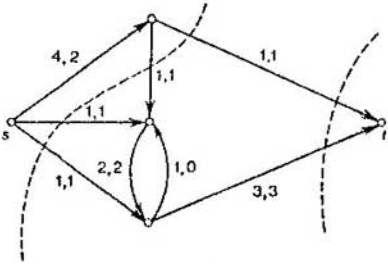


Fig. 7.1.

TEOREMA DE P. HALL SOBRE EL SISTEMA DE REPRESENTANTES DISTINTOS: para una familia arbitraria de subconjuntos $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ del conjunto X una transversal existe cuando y sólo cuando para cualesquiera $i_1, i_2, \ldots, i_n$ tales que $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant n$, se verifica la desigualdad $|X_{i_1} \cup \ldots \cup X_{i_k}| \geqslant k$.

Se denomina *combinación de pares* en el grafo $G(V, E)$ un subconjunto de sus aristas M, $M \subseteq E$, dos cualesquiera de las cuales no

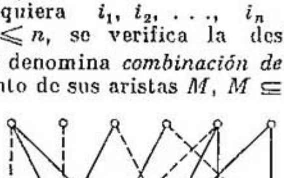


Fig. 7.2.

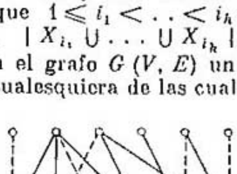


Fig. 7.3.

tienen vértices comunes. Dicho de otro modo, una combinación de pares es una familia de aristas no adyacentes de dos en dos. Un *grafo bipartido*, es el grafo $G(V, E)$, en el cual el conjunto de vértices V puede dividirse en dos subconjuntos disjuntos S y T (es decir, $V = S \cup T$, $S \cap T = \varnothing$) de un modo tal que cada arista une cierto vértice de S con un vértice de T. En las figs. 7.2 y 7.3 se muestran los grafos bipartidos, en los cuales las aristas de las combinaciones de pares se expresan mediante líneas punteadas. El conjunto de vértices del grafo $G(V, E)$ lleva el nombre de *conjunto de vértices* (A, B)*-separador*, donde $A, B \subseteq V$ y $A \cap B = \varnothing$, si la supresión en el grafo de dichos vértices junto con las aristas incidentes a ellos (o arcos) rompe todas las cadenas que van de los vértices del conjunto A a los vértices del conjunto B. Análogamente, se denomina conjunto de aristas (o de arcos) (A, B)-separador a tal familia de aristas (arcos) del grafo $G(V, E)$, cuya supresión de G rompe todas las cadenas que van de los vértices del conjunto A a los del conjunto B. Supongamos que en el grafo representado en la fig. 7.4 $A = \{a, b\}$ y $B = \{c, g\}$. Entonces $\{f, b, d\}$ es un conjunto de vértices (A, B)-separador, y $\{(a, f);\ (b, e);\ (b, d);\ (b, c)\}$, un conjunto de aristas (A, B)-separador.

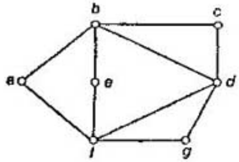


Fig. 7.4.

TEOREMA DE KONIG: el número máximo de aristas de una combinación de pares en un grafo bipartido arbitrario $G(S \cup T, E)$ es igual a la potencia mínima del conjunto de vértices (S, T)-separador del grafo G.

TEOREMA DE MENGER: sean s y t dos vértices de un grafo orientado G. Entonces el número máximo de caminos que no se intersecan en los arcos de s a t en G, es igual a la potencia mínima del conjunto de arcos (s, t)-separador del grafo G.

7.46. Demuéstrese el *análogo matricial del teorema de Konig:* el número mínimo de filas y columnas de una matriz que contienen todos los elementos no nulos, es igual al número mínimo de dichos elementos no dispuestos de dos en dos en una misma fila o en una misma columna.

7.47. Demuéstrese el *análogo de vértice del teorema de Menger:* sean s y t dos vértices no adyacentes en un grafo orientado G. Entonces, la potencia mínima del conjunto de vértices (s, t)-separador en el grafo G es igual al número máximo de caminos de s a t, que no tienen vértices comunes.

7.48. Demuéstrese que las afirmaciones del teorema de Menger y de su análogo concerniente a los vértices (problema 7.47) son válidas también para los grafos no orientados.

7.49. Demuéstrese una variante más del análogo de vértices del teorema de Menger: sea $G(V, E)$ un grafo (orientado) y sea $S, T \subseteq V$. Entonces la potencia mínima del conjunto de vértices (S, T)-separador es igual al número máximo de cadenas que van de los vértices del conjunto S a los vértices del conjunto T y que no tienen vértices comúnes.

7.50. Dedúzcase el teorema de Konig:

a) del teorema de Dilworth;

b) del teorema de Ford y Fulkerson sobre el flujo máximo expresado en números enteros y de corte mínimo:

c) del teorema de Menger;

d) del teorema de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos.

7.51. Demuéstrese, basándose en el teorema de Konig, la validez:

a) del teorema de Dilworth;
b) del teorema de Menger;
c) del teorema de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos.

7.52. Dedúzcase el teorema de Menger a partir del teorema de Ford y Fulkerson sobre el flujo máximo expresado en números enteros y el corte mínimo.

7.53. Dedúzcase el teorema de Ford y Fulkerson sobre el flujo máximo expresado en números enteros y el corte mínimo a partir del teorema de Menger.

Todas las implicaciones, establecidas en los problemas 7.50—7.53, entre los teoremas principales de míni—máx del análisis combinatorio están reducidas a un grafo orientado expresado en la fig. 7.5; en dicho grafo los vértices corresponden a los teoremas y el arco

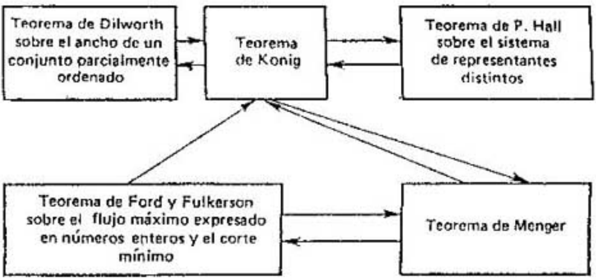


Fig. 7.5.

(A, B) está presente en el grafo mencionado cuando y sólo cuando el teorema B ha sido obtenido directamente del teorema A. Cabe indicar que al haber resuelto todos los problemas 7.50—7.53, el lector mismo establecerá el hecho de equivalencia de los teoremas de Ford y Fulkerson sobre el flujo máximo expresado en números enteros y el corte mínimo, de Dilworth sobre el ancho de un conjunto parcialmente ordenado, de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos, de Menger sobre la separación de las aristas y vértices y de Konig sobre la combinación máxima de pares en un grafo bipartido.

Representa interés el problema de hallar (demostrar) todas las implicaciones entre los teoremas del análisis combinatorio mencionados más arriba. Proponemos que el mismo lector halle todas las implicaciones que faltan, es decir, resuelva el siguiente problema:

7.54. Demuéstrense todas las implicaciones necesarias para que el grafo representado en la fig. 7.5 se haga grafo orientado completo sin bucles (lazos).

§ 2. Retículos

Sea $(A, \leqslant)$ un conjunto arbitrario parcialmente ordenado y B su subconjunto no vacío. El elemento $a \in A$ se llama *cota superior exacta (supremo)* del conjunto B, si $a \geqslant b$ para todos los $b \in B$ y si de la validez de la relación $v \geqslant b$ para todo $b \in B$ se deduce que $v \geqslant a$. De un modo dual se define la *cota inferior exacta (ínfimo)* del conjunto B: el elemento $a \in A$ se denomina cota inferior exacta, si $a \leqslant b$ para todo $b \in B$ y si de la condición $u \leqslant b$ para cualquier $b \in B$ se deduce que $u \leqslant a$. Las cotas exactas superior e inferior del conjunto B en $(A, \leqslant)$ se designarán por los símbolos $\sup_A B$ e $\inf_A B$, respectivamente. Un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leqslant)$ se denomina *retículo* (o *estructura*), si para todos los $a, b \in A$ existen sup $\{a, b\}$ y inf $\{a, b\}$. En los retículos se emplearán también las designaciones $a \wedge b = \inf \{a, b\}$, $a \vee b = \sup \{a, b\}$; llamaremos $\wedge$ intersección, $\vee$, unión.

7.55. Sea $A \subseteq \mathscr{P}(S)$. Demuéstrese que sup A coincide con la unión de los subconjuntos que integran A, mientras que inf A, con su intersección.

7.56. Sea $A \subseteq B \subseteq P$ y supongamos que existen sup A y sup B (inf A y inf B). Demuéstrese que $\sup A \leqslant \sup B$ ($\inf A \geqslant \inf B$).

7.57. Demuéstrese que si $a \leqslant b$, entonces $\sup \{a, b\} = b$ e $\inf \{a, b\} = a$.

7.58. Sea $\{A_\alpha\}$ cierta totalidad de subconjuntos del conjunto parcialmente ordenado P, $A = \bigcup A_\alpha$, y supongamos que existen sup A y sup A_α (inf A y inf A_α) para todo α. Demuéstrese que en este caso

$$\sup A = \sup \{\sup A_\alpha\} \ (\inf A = \inf \{\inf A_\alpha\}).$$

7.59. Sea Q un subconjunto del conjunto parcialmente ordenado P. Demuéstrese que si $A \subseteq Q$ y existe $a = \sup_P A \in Q$ ($b = \inf_P A \in Q$, respectivamente), entonces $a = \sup_Q A$ ($b = \inf_Q A$, respectivamente).

7.60. Dése un ejemplo en que de la existencia de $\sup_Q A$ (en las condiciones del problema 7.59) no se deduce que existe $\sup_P A$.

7.61. Demuéstrese que si a y b son elementos máximos, entonces sup $\{a, b\}$ existe cuando y sólo cuando $a = b$.

7.62. Dése un ejemplo de conjunto parcialmente ordenado en el cual no existe inf $\varnothing$.

7.63. Demuéstrese que si inf B existe para cualquier subconjunto no vacío B del conjunto parcialmente ordenado P, entonces en P existe también sup $\varnothing$.

7.64. Demuéstrese que si L es un retículo con $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ y $a \vee b = \sup \{a, b\}$, entonces las operaciones binarias $\wedge$ y $\vee$ para cualesquiera $a, b, c \in L$ satisfacen las siguientes propiedades:

a) $a \wedge a = a$; $a \vee a = a$ (idempotencia);

b) $a \wedge b = b \wedge a$; $a \vee b = b \vee a$ (conmutatividad);

c) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$,
$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (asociatividad);

d) $a \wedge (a \vee b) = a$; $a \vee (a \wedge b) = a$ (absorción).

7.65. ¿Cuáles de los conjuntos parcialmente ordenados, correspondientes a los diagramas de Hasse representados en las figs. 7.6, 7.7 y 7.8, son retículos?

7.66. Compruébese que los conjuntos parcialmente ordenados de los problemas 7.18, 7.26, 7.27, 7.29, 7.30 son retículos.

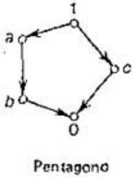


Fig. 7.6.

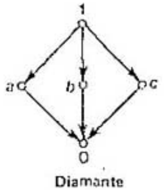


Fig. 7.7.

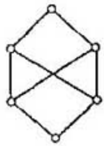


Fig. 7.8.

7.67. Demuéstrese que el conjunto parcialmente ordenado del problema 7.28 no es un retículo, cuando $n \geqslant 5$.

7.68. ¿Qué conjuntos parcialmente ordenados del problema 7.12 son retículos? Calcúlense $a \wedge b$ y $a \vee b$ para aquellos que son retículos.

7.69. Muéstrese que cualquier cadena es un retículo.

7.70. Demuéstrese que si un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leqslant)$ es un retículo, entonces el conjunto parcialmente ordenado $(A, \geqslant)$, dual respecto a $(A, \leqslant)$, también lo es.

7.71. Sea A un conjunto de todos los subgrupos (normales) del grupo G y para $X, Y \in A$ supongamos que $X \leqslant Y$ significa que $X \subseteq Y$. Demuéstrese que $(A, \leqslant)$ es un retículo; calcúlense $X \wedge Y$, $X \vee Y$.

7.72. Sea $(A, \leqslant)$ un conjunto parcialmente ordenado en el que $\inf B$ existe para cualquier $B \subseteq A$. Muéstrese que $(A, \leqslant)$ es un retículo.

7.73. Demuéstrese que todo elemento mínimo (máximo) de un retículo es un cero (unidad).

7.74. Demuéstrese que si a, b, c son elementos de un retículo y $a \vee b \vee c = a \wedge b \wedge c$, entonces $a = b = c$.

7.75. Sea A un conjunto con dos operaciones binarias $\wedge$ y $\vee$, que son idempotentes, conmutativas, asociativas y satisfacen las propiedades de absorción; además, $a \leqslant b$ significa que $a \vee b = b$. Demuéstrese que la relación $\leqslant$ es relación de orden sobre el conjunto A y el conjunto parcialmente ordenado que surge resulta ser un retículo, con la particularidad de que

$$a \vee b = \sup \{a, b\},$$
$$a \wedge b = \inf \{a, b\}.$$

7.76. ¿Qué cambiará, si en el problema 7.75 ponemos $a \leqslant b$ cuando y sólo cuando $a \wedge b = a$?

7.77. ¿Serán retículos los conjuntos parcialmente ordenados representados en la fig. 7.9?

7.78. Muéstrese que en la fig. 7.10 está representado dos veces un mismo retículo.

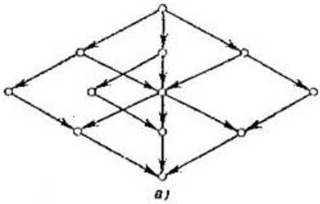


Fig. 7.9.

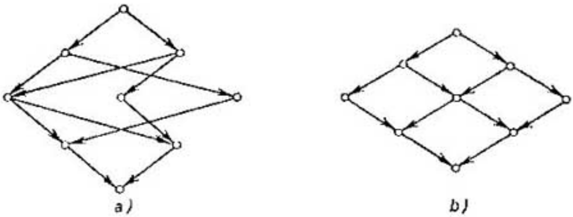


Fig. 7.10.

7.79. Dibújense los diagramas de todos los retículos que se componen de no más de seis elementos.

7.80. Demuéstrese que el producto directo $P \times Q$ (como conjuntos parcialmente ordenados) de cualesquiera dos retículos P y Q es un retículo llamado *producto directo de retículos*.

Un conjunto parcialmente ordenado se denomina *retículo completo*, siempre que todo su subconjunto no vacío tiene tanto cota superior exacta, como cota inferior exacta.

7.81. Dénse los ejemplos de retículos completos.

7.82. ¿Formará el retículo completo un conjunto de todos los números enteros con orden corriente según su valor?

7.83. Compruébese que todo retículo completo es un retículo. ¿Es cierto que todo retículo es retículo completo?

7.84. Compruébese que el belliano $\mathscr{B}(S_n)$ es un retículo completo.

7.85. Demuéstrese que un producto directo de retículos completos es un retículo completo.

7.86. Demuéstrese que si un conjunto parcialmente ordenado P tiene la cifra 1 y si cada su subconjunto no vacío tiene cota inferior exacta, entonces P es un retículo completo.

Para los retículos hay dos conceptos equivalentes de isomorfismo:

a) Los retículos L_0 y L_1 se llaman *isomorfos*, si son isomorfos como conjuntos parcialmente ordenados.

b) Los retículos L_0 y L_1 se llaman isomorfos, si existe un isomorfismo φ del conjunto L_0 sobre el conjunto L_1 tal que para cualesquiera a, $b \in L_0$ tiene lugar:

$$\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b);$$
$$\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b).$$

Se denomina *homomorfismo* del retículo L_0 en el retículo L_1 la aplicación $\varphi: L_0 \to L_1$ que satisface, para cualesquiera a, $b \in L_0$, las condiciones:

$$\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b);$$
$$\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b).$$

7.87. Demuéstrese que todo homomorfismo de los retículos es una aplicación isótona. ¿Será cierta la afirmación inversa de que toda aplicación isótona de los retículos es un homomorfismo?

Un subconjunto B del retículo L se denominará también *pentágono* o *diamante*, si es un subretículo isomorfo al pentágono (véase fig. 7.6) o al diamante (véase fig. 7.7). De este modo, afirmando que $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ es un pentágono (diamante, respectivamente) suponemos que la aplicación φ: $b_1 \to 0$; $b_2 \to a$; $b_3 \to b$; $b_4 \to c$, $b_5 \to 1$ es un isomorfismo del retículo B sobre el retículo representado en la fig. 7.6 (en la fig. 7.7, respectivamente).

7.88. Muéstrese que la imagen homomorfa de un diamante la constituye el propio diamante o un retículo de un solo elemento.

Una aplicación isótona φ del conjunto parcialmente ordenado P en sí mismo lleva el nombre de *operador de clausura*, si $\varphi(x) \geqslant x$ y $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$ para todo $x \in P$. El elemento $\varphi(x)$ se llama *φ-clausura* de x. Un elemento que coincide con su φ-clausura se llama *φ-cerrado*.

7.89. Dénse ejemplos de operadores de clausura sobre los conjuntos parcialmente ordenados e indíquense todos los elementos cerrados en estos conjuntos parcialmente ordenados.

7.90. Sea φ un operador de clausura sobre el conjunto parcialmente ordenado P; el subconjunto $A \subseteq P$ consta de elementos φ-cerrados y $a = \inf A$ existe. Demuéstrese que en este caso a es un elemento φ-cerrado.

7.91. Sea φ un operador de clausura sobre el retículo completo P. Demuéstrese que un conjunto parcialmente ordenado L de todos los elementos φ-cerrados, considerado como un subcojunto del conjunto parcialmente ordenado P, es también un retículo completo y que en tal caso para cualquier subconjunto no vacío A del conjunto L tiene lugar $\inf_L A$ $\inf_P A$ y $\sup_L A = \varphi(\sup_P A)$.

7.92. Demuéstrese que si φ es un operador de clausura sobre el conjunto parcialmente ordenado P, todos los elementos máximos de P son φ-cerrados.

Un retículo L se llama *modular*, si para cualesquiera a, b, $c \in L$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c))$$

o bien, lo que es equivalente a la condición siguiente:

$$a \geqslant c \text{ lleva consigo } a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c.$$

7.93. Muéstrese que los retículos que siguen:

a) diamante (véase fig. 7.7);

b) retículo del problema 7.29;

c) retículo dual respecto del retículo modular;

d) subretículo de un retículo modular;

e) producto directo de los retículos modulares;

f) imagen homomorfa de un retículo modular son todos modulares.

7.94. Dénse ejemplos de retículos no modulares.

7.95. Demuéstrese que un belliano $\mathscr{B}(S_n)$ es un retículo modular, si y sólo si $k \leqslant 3$.

7.96. Demuéstrese que el retículo L es modular si y sólo si no contiene pentágonos.

7.97. Demuéstrese que el retículo L es modular cuando y sólo cuando para todos los a, b, $c \in L$ de $b \geqslant a$, $a \wedge c = b \wedge c$ y de $a \vee c = b \vee c$ se deduce que $a = b$.

7.98. Demuéstrese que si a y b son elementos de un retículo modular L, los intervalos $[a \wedge b, a]$ y $[b, a \vee b]$ son isomorfos. En este caso el isomorfismo se realiza mediante las aplicaciones:

$$\varphi(x) = x \vee b, \quad \text{si } x \in [a \wedge b, a]$$
$$\psi(y) = a \wedge y, \quad \text{si } y \in [b, a \vee b]$$

7.99. Demuéstrese que si L es un retículo modular y si a, $b \in L$: entonces para cualesquiera x, $y \in [a \wedge b, b]$ se verifica la igualdad

$$a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y).$$

Un retículo L se llama distributivo, si para cualesquiera a, b, $c \in L$ se verifica una de las siguientes identidades:

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = a \vee (b \wedge c);$$
$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c).$$

7.100. Muéstrese que los retículos que siguen:

a) booleano; b) toda cadena finita; c) retículo compuesto por no más de 4 elementos; d) retículo de números enteros no negativos ordenados según la divisibilidad; e) dual respecto del retículo distributivo; f) subretículo de un retículo distributivo; g) imagen homomorfa de un retículo distributivo; h) producto directo de los retículos distributivos son todos distributivos.

7.101a. Dénse ejemplos de retículos no distributivos.

7.101b. ¿Será cierto que un belliano $\mathscr{B}(S_n)$ es retículo distributivo, si y sólo si $n \leqslant 2$?

7.102. Demuéstrese que un retículo modular L es distributivo cuando y sólo cuando no contiene diamantes.

7.103. Demuéstrese que un retículo L es distributivo cuando y sólo cuando para cualesquiera $a, b, c \in L$ de $a \wedge c = b \wedge c$, $a \vee c = b \vee c$ se deduce que $a = b$.

7.104. Demuéstrese que el retículo L es distributivo si y sólo si para cualesquiera $a, b, c \in L$ se verifica

$$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \wedge a).$$

Escribamos $a \preccurlyeq b$ $(b \succcurlyeq a)$, si $a \prec b$, ó $a = b$. Se dice que el retículo L satisface la *condición de recubrimiento por arriba* si para cualesquiera $a, b, c \in L$ de $a \prec b$ se deduce que $a \vee c \preccurlyeq b \vee c$. La *condición de recubrimiento por debajo* se define de un modo dual.

7.105. Demuéstrese que un retículo modular arbitrario satisface las condiciones de recubrimiento por arriba y por debajo.

El retículo L se denominará *semimodular*, si satisface la condición de recubrimiento por arriba.

7.106. ¿Serán semimodulares los retículos representados en la fig. 7.11?

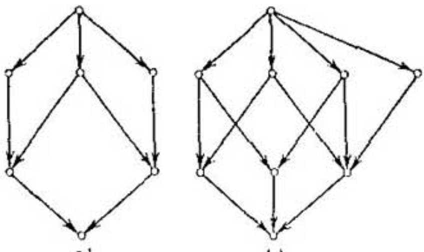


Fig. 7.11.

7.107. Demuéstrese que el producto directo de los retículos semimodulares, la imagen homomorfa del retículo semimodular finito y el belliano $\mathscr{B}(S_n)$ son retículos semimodulares.

7.108. Dénse ejemplos de retículos semimodulares que no son modulares.

Sea L un retículo con 0. Definamos en él una *función de rango* $r(a)$ del modo siguiente: $r(a)$ es igual a la longitud de la cadena máxima más larga en el intervalo $[0, a]$, si tal cadena existe, y

$r(a) = \infty$ en el caso contrario. Diremos que L es un retículo de longitud finita, si $r(a) < \infty$, cualquiera que sea $a \in L$.

7.109. Demuéstrese que en un retículo semimodular L de longitud finita se cumple la condición de Jordan—Hölder: cualesquiera dos cadenas máximas entre los elementos arbitrarios del retículo L son de igual longitud.

7.110. ¿Se cumplirá la condición de Jordan—Hölder en un retículo de longitud finita que satisface la condición de recubrimiento por debajo?

Así pues, en virtud de la condición de Jordan—Hölder, que se cumple en los retículos semimodulares de longitud finita, el rango $r(a)$ coincide con la longitud de la cadena máxima arbitraria en el intervalo $[0, a]$.

7.111. Demuéstrese que:

a) si en un conjunto parcialmente ordenado A con O se cumple la condición de Jordan—Hölder, entonces su función de rango $r(a)$, definida para todo $a \in A$, satisface las siguientes condiciones: $r(0) = 0$ y de $a \prec b$ se deduce que $r(b) = r(a) + 1$;

b) si sobre un conjunto parcialmente ordenado A, está definida una función r tal que $r(0) = 0$ y si de $a \prec b$ se deduce que $r(b) = r(a) + 1$, entonces A satisface la condición de Jordan—Hölder y esta función coincide con su función de rango.

7.112. Demuéstrese que en el retículo L de longitud finita son equivalentes las siguientes condiciones:

a) L es un retículo semimodular;

b) si $a, b \in L$, $a \neq b$, y los elementos a, b cubren el elemento $a \wedge b$, entonces el elemento $a \vee b$ cubre los elementos a y b;

c) si $a, b, c \in L$, $a \leqslant b$ y C es una cadena máxima en el intervalo $[a, b]$, entonces $\{x \vee c \mid x \in C\}$ es la cadena máxima en el intervalo $[a \vee c, b \vee c]$;

d) para cualesquiera $a, b \in L$ se verifica la desigualdad

$$r(a) + r(b) \geqslant r(a \wedge b) + r(a \vee b).$$

7.113. Demuéstrese que si en un retículo de longitud finita L se cumple la condición de recubrimiento por debajo, entonces para cualesquiera $a, b \in L$ se verifica la desigualdad

$$r(a) + r(b) \leqslant r(a \wedge b) + r(a \vee b).$$

7.114. Demuéstrese que el retículo L es semimodular cuando y sólo cuando para cualesquiera $x, y \in L$ de $x \succ x \wedge y$ se deduce $x \vee y \prec y$.

7.115. Demuéstrese que para los retículos semimodulares resulta válido el axioma de sustitución de Mac Lane—Steinitz: si p y q son átomos del retículo L y si $a \in L$, $a < a \vee q \leqslant a \vee p$, entonces $a \vee p = a \vee q$.

7.116. Demuéstrese que para el retículo L de longitud finita son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) L es un retículo modular;

b) el retículo L satisface las condiciones de recubrimiento tanto por arriba, como por debajo;

c) L no contiene pentágonos;

d) para cualesquiera $a, b \in L$ se verifica la igualdad

$$r(a) + r(b) = r(a \vee b) + r(a \wedge b).$$

7.117. Demuéstrese que en un retículo semimodular L de longitud finita para cualesquiera $x_i \in L$, $i = 1, 2, \ldots, n$, se verifica la desigualdad

$$r(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) \leqslant r(x_1) + r(x_2) + \ldots + r(x_n).$$

7.118. Demuéstrese que en un retículo semimodular L de longitud finita, si p es un átomo tenemos: $p \leqslant a$ ó $a \vee p \succ a$.

Un par de elementos (a, b) del retículo L se llama modular y se denota aMb, si de $x \leqslant b$ se deduce, para cualquier $x \in L$, que $x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b$.

Inmediatamente de la definición se desprende que el retículo L es modular cuando y sólo cuando aMb para cualesquiera $a, b \in L$.

7.119. Demuéstrese que para los elementos a y b de un retículo arbitrario L y las aplicaciones φ y ψ, definidas en el problema 7.98, son equivalentes las siguientes condiciones:

a) aMb;

b) φ es la aplicación de $[a, a \vee b]$ sobre $[a \wedge b, b]$;

c) ψ es la aplicación biunívoca de $[a \wedge b, b]$ en $[a, a \vee b]$;

d) $\varphi\psi(x) = x$ para todo $x \in [a \wedge b, b]$.

7.120. Demuéstrese que en un retículo semimodular L de longitud finita aMb cuando y sólo cuando

$$r(a) + r(b) = r(a \vee b) + r(a \wedge b).$$

Un retículo L se llama M-simétrico, si aMb lleva consigo bMa para cualesquiera $a, b \in L$.

7.121. Muéstrese que en el retículo representado en la fig. 7.11 a) de aMb no se desprende bMa.

7.122. Demuéstrese que un retículo arbitrario L de longitud finita es semimodular cuando y sólo cuando es M-simétrico.

Sea L un retículo con 0. El subconjunto X del conjunto $L \setminus \{0\}$ se denomina *independiente*, si para cualesquiera subconjuntos finitos suyos A y B es válida la igualdad

$$\inf \{\sup A, \sup B\} = \sup (A \cap B).$$

7.123. Demuéstrese que un subconjunto X del retículo L es independiente cuando y sólo cuando la aplicación $\varphi: A \to \sup A$, definida para todos los $A \in \mathcal{P}(X)$, es un ismorfismo entre el retículo del booleano $\mathcal{P}(X)$ y un subretículo del retículo L, engendrado por el conjunto X.

7.124. Sea L un retículo modular con 0. Demuéstrese que el subconjunto de n elementos $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq L - \{0\}$ es independiente, si y sólo si para cualesquiera $i = 1, 2, \ldots, n-1$ son válidas las correlaciones

$$(a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_i) \wedge a_{i+1} = 0.$$

7.125. Sea L un retículo modular con 0. Demuéstrese que

a) si $a_i \leqslant b_i$, $a_i, b_i \in L$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son independientes en L, entonces $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son también independientes;

b) Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son elementos independientes del retículo L y si $a_i = a_{i1} \vee a_{i2} \vee \ldots \vee a_{ih_i}$ donde $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ih_i}$ también son elementos independientes del retículo L y $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces los elementos $a_{11}, \ldots, a_{1h_1}, a_{21}, \ldots, a_{2h_2}, \ldots$ $\ldots, a_{nh_n}$ son independientes.

El conjunto $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de elementos de un retículo semimodular de longitud finita será independiente, si satisface la siguiente condición

$$r(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) = r_1(x_1) + r(x_2) = \ldots + r(x_n).$$

7.126. Demuéstrese que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son elementos independientes del retículo semimodular L de longitud finita, entonce para todos los $i = 1, 2, \ldots, n-1$ se verifican las siguientes correlaciones:

a) $(x_1 \vee \ldots \vee x_i) \wedge x_{i+1} = 0$;

b) $(x_1 \vee \ldots \vee x_i) M x_{i+1}$;

c) $x_1, \ldots, x_i$, son elementos independientes.

7.127. ¿Será cierta la afirmación del problema 7.124 para los retículos semimodulares de longitud finita?

7.128. Demuéstrese que si $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es un conjunto de átomos de un retículo semimodular, entonces serán equivalentes las siguientes condiciones:

a) X es un conjunto independiente;

b) $(a_1 \vee \ldots \vee a_i) \wedge a_{i+1} = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

c) $r(a_1 \vee \ldots \vee a_n) = n$.

7.129. Muéstrese que si en un retículo semimodular los átomos $p_1, \ldots, p_s$ son independientes y los átomos $q_1, \ldots, q_{s+1}$ también son independientes, será independiente también cierto conjunto $p_1, \ldots, p_s, q_i$.

Un retículo L con 0 y 1 se llama *retículo con complementos*, si para cualquier $x \in L$ existe tal elemento $x^* \in L$ que $x \wedge x^* = 0$ y $x \vee x^* = 1$, con la particularidad de que el elemento x^* se denomina *complemento del elemento* x en L. Un retículo L recibe el nombre de retículo con complementos relativos, si de que $a \leqslant x \leqslant b$, donde a y b son elementos arbitrarios del retículo L, y $x \in L$ se deduce la existencia de tal elemento $y \in L$ que $x \wedge y = a$, $x \vee y = b$, y en este caso el elemento y se denomina *complemento relativo del* *elemento* x en el intervalo $[a, b]$. De acuerdo con las definiciones dadas, cada retículo L con complementos relativos que posee 0 y 1 será retículo con complementos.

7.130. Sea L un retículo representado en la fig. 7.12. Hállense los complementos relativos: a) del elemento b en el intervalo $[e, 1]$; b) de los elementos a y e en el intervalo $[0, b]$. ¿Será el retículo L un retículo con complementos o complementos relativos? ¿Podrá un elemento tener varios complementos (relativos)?

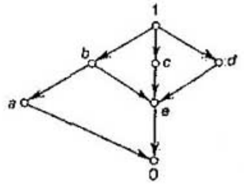


Fig. 7.12.

7.131. ¿Será cierto que cada retículo con complementos es un retículo con complementos relativos? Arguméntese la respuesta.

7.132. ¿Será un pentágono (véase fig. 7.6): a) retículo con complementos; b) retículo con complementos relativos?

7.133. Muéstrese que todos los retículos con complementos relativos que tienen no más de 8 elementos son modulares.

7.134. Demuéstrese que si en un retículo modular con 0 y 1 el elemento a tiene complemento, poseerá también complemento relativo en cualquier intervalo que lo contiene.

7.135. Demuéstrese que en un retículo de longitud finita L con complementos relativos, cada elemento a es una unión de átomos en él contenidos. ¿Será cierto que en un retículo modular de longitud finita con complementos, cada elemento es una unión de átomos en él contenidos?

7.136. Sea L un retículo modular con complementos y sea $a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_n = 1$ una cadena en L. Supongamos, además, que $b_1 = a_1$, b_2 es un complemento relativo de a_1 en el intervalo $[0, a_2]$, ..., b_n es un complemento relativo del elemento a_{n-1} en el intervalo $[0, a_n]$. Demuéstrese que el conjunto $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ es independiente en L.

7.137. Sea L un retículo con 0 y 1; $a, b, c, x, y, z, t \in L$; supongamos que x es un complemento relativo del elemento a en el intervalo $[b, c]$, y es un complemento relativo del elemento c en el intervalo $[x, 1]$, z es un complemento relativo del elemento b en el intervalo $[0, x]$ y t es un complemento relativo del elemento x en el intervalo $[z, y]$. Compruébese que t es un complemento del elemento a en L.

7.138. Demuéstrese que en un retículo distributivo L con 0 y 1 cualquier elemento a tiene a lo sumo: a) un complemento relativo en cada intervalo; b) un complemento en L.

7.139. Demuéstrese que si en un retículo distributivo L los elementos a y b tienen complementos a^* y b^*, respectivamente, entonces los elementos $a \wedge b$ y $a \vee b$ también poseen los complementos $(a \wedge b)^*$ y $(a \vee b)^*$, respectivamente; además, son válidas en este caso las *identidades de Morgan*:

$$(a \wedge b)^* = a^* \vee b^* \text{ y } (a \vee b)^* = a^* \wedge b^*.$$

7.140. Sea L un retículo distributivo con 0 y 1; a, $b \in L$. Demuéstrese que si los elementos $(a \wedge b)$ y $(a \vee b)$ tienen complementos, los elementos a y b también tienen complementos en L.

7.141. Demuéstrese que un retículo semimodular de longitud finita L es un retículo con complementos, si y sólo si su 1 es una unión de sus átomos.

7.142. Demuéstrese que un retículo semimodular L es un retículo con complementos relativos, si y sólo si cada elemento x de él es tal que $x > 0$, es una unión de átomos.

7.143. Demuéstrese que si a_1, a_2, . . ., a_n son elementos independientes del retículo modular L con 0, entonces el subretículo H del retículo L, engendrado por los intervalos $[0, a_i]$, donde $i = 1, 2, \ldots, n$, es isomorfo al producto $[0, a_1] \times [0, a_2] \times \ldots \times [0, a_n]$.

Se llama *retículo de Boole* un retículo distributivo con complementos. En vista del problema 7.138, cada elemento del retículo de Boole B tiene un único complemento, y en virtud del problema 7.134, el retículo de Boole cuenta con complementos relativos. Por ser simétrico el complemento, tenemos $x^{**} = x$ para todo $x \in B$ (esta propiedad lleva el nombre de *involutividad*). Un retículo de Boole, en el cual 0, 1 y * (operación de complementar) se consideran como operaciones principales, recibe el nombre de álgebra de Boole. De este modo el álgebra de Boole es en realidad un sistema algebraico $(B; \wedge, \vee, {}^*, 0, 1)$, donde $\wedge$, $\vee$ son operaciones binarias, * es operación monaria, y 0, 1, las constantes de operaciones que satisfacen las propiedades de: idempotencia, conmutatividad, asociatividad, absorción (retículo), modularidad, (retículo modular), distributividad (retículo distributivo), fronteras universales (retículo con 0 y 1), complementariedad (retículo con complementos), involutividad e identidades de Morgan (retículo de Boole).

7.144. Muéstrese que los retículos: a) booleano $\mathscr{P}(S)$; b) el retículo modular con complementos únicos; c) cualquier subretículo del retículo de Boole; d) el producto directo de retículos de Boole, son todos retículos de Boole.

7.145. Demuéstrese que un retículo de Boole finito es isomorfo a cierto booleano $\mathscr{P}(S_n)$.

Dos intervalos $[x, y]$ y $[x', y']$ del retículo L se llaman *transpuestos*, si $[x, y] = [b, a \vee b]$ y $[x', y'] = [a \wedge b, a]$ para ciertos a, $b \in L$. Diremos que los intervalos $[x, y]$ y $[x', y']$ son *proyectivos* (la designación es: $[x, y] \sim [x', y']$), si existe una sucesión finita de intervalos

$$[x, y], [x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n], [x', y'],$$

en la cual cualesquiera dos intervalos vecinos son transpuestos.

7.146. Demuéstrese que en los retículos modulares de longitud finita se cumple la *condición reforzada de Jordan—Hölder*: cualesquiera dos cadenas máximas entre los elementos arbitrarios del retículo modular L de longitud finita tienen longitud igual; si a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n y $b_0 = a_0$, b_1, . . ., b_{n-1}, $b_n = a_n$ es un par de tales cadenas máximas, existe una permutación σ de índices $\{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $[a_{i-1}, a_i] \sim [b_{\sigma(i)-1}, b_{\sigma(i)}]$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Además, si L es un retículo modular, la permutación σ está definida del modo unívoco.

7.147. Sea S un conjunto finito; L, un subretículo del retículo de Boole $\mathcal{P}(S)$; S^-, el elemento minimal del subretículo y S^+, el complemento en S de su elemento maximal. Demuéstrese que si $A_0 = S^-, A_1, \ldots, A_n = S \setminus S^+$ es la cadena máxima en L y $\mathcal{F} = \{A_i \setminus A_{i+1} \mid i = 1, \ldots, n\}$, entonces $(S^-, \{F: F \in \mathcal{F}\}, S^+)$ será partición del conjunto S que no depende del modo de elegir la cadena máxima entre S^- y $S \setminus S^+$ en L (los conjuntos S^- y S^+ pueden ser vacíos, todos los $F \in \mathcal{F}$ no son conjuntos vacíos).

Una cadena se denomina *puntual*, si cada uno de sus elementos es una unión de átomos. Un retículo semimodular puntual de longitud finita se llama *geométrico* (o bien matroidal). De este modo, en virtud del problema 7.142, el retículo geométrico es un retículo semimodular de longitud finita con complementos relativos.

7.148. Muéstrese que los retículos: a) booleano $\mathcal{P}(S_n)$; b) belliano $\mathcal{B}(S_n)$; c) el conjunto parcialmente ordenado del problema 7.29; d) el intervalo arbitrario $[a, b]$ del retículo geométrico L; e) el producto directo de los retículos geométricos, son todos geométricos.

7.149. Sea G un retículo geométrico y A, cierto conjunto de sus átomos. Demuéstrese que el conjunto L de toda clase de uniones de átomos $p \in A$ es un retículo geométrico, si le agregamos un elemento más 0 y ponemos $0 = \sup \varnothing$.

7.150. ¿Será posible despreciar en las afirmaciones de los problemas 7.141 y 7.142 el requisito de semimodularidad de los retículos? Arguméntese la respuesta.

7.151. Demuéstrese que un retículo L de longitud finita con complementos relativos es geométrico, si y sólo si se cumple en él una de las siguientes condiciones:

a) si $a, b \in L$, $a \neq b$, y los elementos a, b cubren el elemento $c\ (= a \wedge b)$, entonces el elemento $a \vee b$ cubre los elementos a y b;

b) si p es un átomo del retículo L, entonces para un elemento arbitrario $a \in L$ o bien $p \leqslant a$, o bien $a \vee p$ cubre a;

c) si p, q son los átomos del retículo L y $a < a \vee q \leqslant a \vee p$, donde $a \in L$, entonces $a \vee q = a \vee p$.

d) la propiedad de independencia de los átomos es simétrica (es decir, invariante respecto de todas las permutaciones de átomos).

7.152. Demuéstrese que un retículo puntual de longitud finita es semimodular (geométrico) cuando y sólo cuando para cualquier elemento $a \in L$ y para cada átomo $p \in L$: pMa.

7.153. Supongamos que en un retículo geométrico los elementos $c \leqslant b$ son complementos de a. Demuéstrese que si aMb y aMc, entonces $b = c$.

7.154. Sea G un grupo abeliano. Denotemos con L el retículo de todos los subgrupos H tales que el grupo cociente G/H no tiene elementos de orden finito, salvo el cero. Demuéstrese que L es un retículo geométrico.

7.155. Sea a^* un complemento del elemento arbitrario a de un retículo geométrico L. Demuéstrese que $a^* \, Ma$.

Sea A un conjunto de todos los átomos del retículo geométrico L y sea B un subconjunto arbitrario suyo. Se llama *rango* $r\,(b)$ *del subconjunto* B el rango del elemento sup B en el retículo L.

7.156. Demuéstrese que la función de rango r de los subconjuntos del conjunto A de átomos del retículo geométrico L satisface las siguientes condiciones:

a) $r\,(\varnothing) = 0$;

b) $r\,(B) \leqslant r\,(B \cup \{p\}) \leqslant r\,(B) + 1$;

c) si $r\,(B) = r\,(B \cup \{p\}) = r\,(B \cup \{q\})$, entonces $r\,(B) = r\,(B \cup \{p\} \cup \{q\})$, cualesquiera que sean $B \subseteq A$ y $p, q \in A$.

Es evidente que el subconjunto B de átomos del retículo geométrico L será independiente cuando y sólo cuando $r\,(B) = |\,B\,|$ (véa-

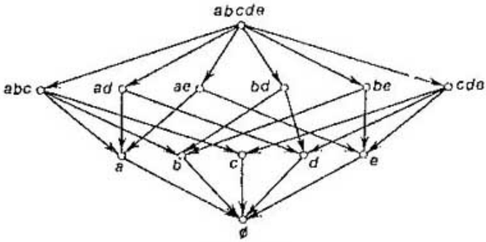


Fig. 7.13.

se el problema 7.128). Los conjuntos independientes máximos (por inclusión) son bases del retículo geométrico L. Los subconjuntos $B \subseteq A$, que no son independientes, se llamarán *dependientes* y los conjuntos dependientes mínimos (por inclusión), *ciclos*. Por ejemplo, en el retículo geométrico representado en la fig. 7.13 los subconjuntos de átomos *ab*; *bcd*, *ade* son independientes; los *abc*; *cde*; *abcd* son dependientes; *abc*; *cde* son ciclos, y *ace*; *bcd*; *acd*, bases.

7.157. Demuéstrese que para el conjunto de todas las bases del retículo geométrico L se cumplen las siguientes condiciones:

a) ningún subconjunto propio de una base será base;

b) para cualesquiera bases B_1 y B_2 y para cada $a \in B_1$ existe un átomo $b \in B_2$ tal que $(B_1 \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ también será una base.

7.158. Demuéstrese que para el conjunto de todos los ciclos de un retículo geométrico L se cumplen las siguientes condiciones:

a) ningún ciclo no es subconjunto propio de otro ciclo;

b) si C_1 y C_2 son ciclos diferentes y $a \in C_1 \cap C_2$, existe un ciclo C_3 tal que $C \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}$;

c) si C_1 y C_2 son ciclos diferentes, $a \in C_1 \cap C_2$ y $b \in C_1 \setminus C_2$, entonces existe un ciclo C_3 tal que $b \in C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}$.

Dos elementos a y b del retículo L con complementos se denominan *perspectivos*, si tienen un complemento común, es decir, $a \vee c = b \vee c = 1$, y $a \wedge c = b \wedge c = 0$ para cierto elemento $c \in L$. En este caso el elemento c lleva el nombre de *eje de la perspectiva*.

Si L es un retículo modular con complementos y si sus elementos a y b son perspectivos con el eje de perspectiva c, entonces, al emplear sucesivamente las aplicaciones φ y ψ del problema 7.98:

$$[0, a] = [a \wedge c, a] \to [c, a \vee c] = [c, 1] =$$
$$= [c, b \vee c] \to [b \wedge c, b] = [0, b],$$

establezcamos el isomorfismo entre los intervalos $[0, a]$ y $[0, b]$. Además, los intervalos $[0, a]$ y $[0, b]$ son proyectivos. Por eso, teniendo en cuenta la analogía con los intervalos proyectivos, emplearemos la designación $a \sim b$ para escribir los elementos perspectivos a y b.

7.159. Sea L un retículo geométrico. Muéstrese que $a \sim b$ en el retículo L cuando y sólo cuando $a \vee x = b \vee x$, y $a \wedge x = b \wedge x$ para cierto elemento $x \in L$.

7.160. Sean a y b los átomos del retículo geométrico L. Demuéstrese que $a \sim b$, cuando y sólo cuando existe un ciclo C del retículo L que contenga a y b simultáneamente.

7.161. Demuéstrese que la relación de perspectividad de los átomos de un retículo geométrico es una relación de equivalencia.

7.162. Compruébese que en los problemas 7.85, 7.93 e), 7.100 h), 7.107 y 7.148 e) son válidas también las afirmaciones inversas.

Diremos que un retículo L con 0 y 1 es *desarrollable*, si existen intervalos no triviales $L_1 = [0, z_1]$ y $L_2 = [0, z_2]$ tales que para cada elemento $x \in L$ se encuentre un único par $(x_1, x_2) \in L_1 \times L_2$ de tal índole que $x = x_1 \vee x_2$. Indiquemos que esto es equivalente a la afirmación de que L es isomorfo a $L_1 \times L_2$.

7.163. Demuéstrese que un retículo geométrico es indesarrollable cuando y sólo cuando dos de sus átomos cualesquiera son perspectivos.

7.164. Demuéstrese que cualquier retículo geométrico es isomorfo al producto directo de los retículos geométricos indesarrollables.

7.165. Sean x e y los elementos arbitrarios de un retículo modular geométrico M, y sea z uno de sus átomos tal que $z \leqslant x \vee y$, y $z \not\leqslant y$. Demuéstrese que se encontrará un átomo x' tal que $x' \leqslant x$ y $z \leqslant x' \vee y$.

7.166. Sean a y b dos átomos distintos de un retículo geométrico modular M. Demuéstrese que $a \sim b$ cuando y sólo cuando el elemento $a \vee b$ contiene el tercer átomo $c \in M$.

Se denomina *estructura de incidencia* a un par (P, L) de conjuntos disjuntos P y L, donde P es un conjunto de *puntos* y L, una familia de *rectas* relacionadas entre sí por la *relación de incidencia*. Se llamará *subespacio* de la estructura de incidencia (P, L) al subconjunto S del conjunto P, para el cual si $p, q \in S$ y $p \neq q$, entonces el conjunto de puntos de una recta que pasa por los puntos p y q también pertenecen a S. Un subespacio se considera *engendrado* por el conjunto de puntos A, si es un subespacio minimal de la estructura de incidencia que contiene el conjunto A. Dos rectas *se intersecan*, si son incidentes respecto de un mismo punto. Una estructura de incidencia se llama *geometría proyectiva de dimensión proyectiva* $n-1$, si satisface los siguientes cuatro axiomas:

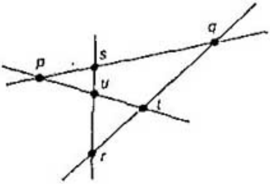


Fig. 7.14.

$PG1$) dos puntos diferentes se ubican en una y sólo una recta;

$PG2$) si una recta corta dos lados de un triángulo (no en el punto de su intersección), entonces corta también su tercer lado (véase fig. 7.14);

$PG3$) cada recta contiene por lo menos tres puntos;

$PG4$) el conjunto de todos los puntos está engendrado por un subconjunto que contiene n puntos, y no es engendrado por ningún subconjunto con número inferior de puntos.

7.167. Muéstrese que una familia de subespacios de la geometría proyectiva forma un retículo puntual.

7.168. Muéstrese que cualesquiera dos rectas distintas de la geometría proyectiva de dimensión proyectiva $n-1$ se intersecan en un punto, si $n \leqslant 3$.

7.169. Demuéstrese que un retículo de los subespacios de la geometría proyectiva de dimensión proyectiva $n-1$ es isomorfo al retículo de subespacios de cierto espacio vectorial n-dimensional para $n \geqslant 4$.

7.170. Demuéstrese que el retículo de los subespacios de la geometría proyectiva es modular.

Así pues, en los problemas 7.167—7.170 se ha establecido que los retículos de los subespacios de una geometría proyectiva son retículos geométricos modulares.

Sea ahora M un retículo geométrico modular. Llamemos *recta* al elemento $x \in M$ con $r(x) = 2$ y *puntos* de la recta x a los átomos del intervalo $[0, x]$. De este modo, hemos difenido la estructura de incidencia $PG(M)$.

7.171. Demuéstrese que la estructura de incidencia $PG(M)$ satisface los axiomas $PG1$, $PG2$ y $PG4$. ¿Podrá ser que en $PG(M)$ no se cumpla el axioma $PG3$?

7.172. Demuéstrese que un retículo geométrico modular M es indesarrollable cuando y sólo cuando la estructura de incidencia $PG(M)$ es una geometría proyectiva.

7.173. ¿Será cierto que cada retículo geométrico modular es un producto directo de un número finito de geometrías proyectivas?

Los retículos L que satisfacen para todos los a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, $b_2 \in L$ la desigualdad

$$(a_0 \vee b_0) \wedge (a_1 \vee b_1) \wedge (a_2 \vee b_2) \leqslant$$
$$\leqslant ((c \vee a_1) \wedge a_0) \vee ((c \vee b_1) \wedge b_0),$$

donde $c = ((a_0 \vee a_1) \wedge (b_0 \vee b_1)) \wedge (((a_0 \vee a_2) \wedge (b_0 \vee b_2)) \vee \vee ((a_1 \vee a_2) \wedge (b_1 \vee b_2)))$, se denominan *arguesanos*.

7.174. Demuéstrese que del carácter arguesano de un retículo se deduce su modularidad.

7.175. Sea M un retículo geométrico modular. Demuéstrese que en la geometría proyectiva $PG(M)$ se verifica el teorema de Desargue (véase el capítulo V, § 3) cuando y sólo cuando el retículo M satisface la identidad arguesana.

7.176. Sea M un retículo geométrico indesarrollable de longitud no inferior a 4. Demuéstrese que M es un retículo arguesano.

Sea L un retículo geométrico de longitud finita. Denotemos por $E(i)$ el conjunto de todos los elementos de retículo L de rango i, y supongamos que $W_i = |E(i)|$. Es evidente que el conjunto $E(i)$ es una anticadena del retículo L.

7.177. Sea L un retículo geométrico de longitud finita, en el cual cualquier elemento a de rango i se cubre por k_i elementos y cubre m_i elementos (los números k_i y m_i sólo dependen del rango i). Demuéstrese que la anchura de L es igual a $\max\limits_{i:0 \leqslant i \leqslant r(L)} W_i$.

7.178. Demuéstrese que si L es un retículo geométrico de rango n, entonces

$$W_1 \leqslant W_t \quad \text{para } t = 2, 3, \ldots, n-1$$

y

$$W_1 + \ldots + W_k \leqslant W_{n-k} + \ldots + W_{n-1}, \text{ para } k = 1, 2, \ldots, n-2.$$

7.179. Sea L un retículo geométrico de rango n. Demuéstrese que para cualquier $k = 1, 2, \ldots, n-2$ la igualdad

$$W_1, \ldots + W_k = W_{n-k} + \ldots + W_{n-1}$$

se verifica si y sólo si el retículo L es modular.

7.180. Sea L un retículo geométrico modular de rango n. Demuéstrese que $W_k = W_{n-k}$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n$.

§ 3. Funciones de incidencia e inversión de Moebius

Sea P un conjunto parcialmente ordenado y localmente finito y sea K un campo de característica 0 (habitualmente, un campo de los números reales). Veamos una clase $A(P)$ de funciones $f(x, y)$ que toman valores en el campo K y que están definidas para cualesquiera $x, y \in P$. Exijamos que $f(x, y) = 0$, si no se cumple la condición

$x \leqslant y$. La *suma* de dos tales funciones, como también la *multiplicación por los escalares* se definirán del modo siguiente:

$$(f+g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$$
$$(\alpha \cdot f)(x, y) = \alpha \cdot f(x, y);$$

mientras que el *producto* (o *convolución*) $f * g$ se definirá así:

$$(f * g)(x, y) = \sum_{z: x \leqslant z \leqslant y} f(x, z)\, g(z, y).$$

La convolución está definida correctamente, pues, por ser localmente finito el conjunto parcialmente ordenado P, en el segundo miembro es finito el número de sumandos y $(f*g)(x, y) = 0$ cada vez que $x \nleqslant y$.

El conjunto $A(P)$ con operaciones de sumación, multiplicación por escalares y convoluciones recibe el nombre de *álgebra de incidencia del conjunto parcialmente ordenado P sobre el campo K*, y sus elementos, de *funciones de incidencias* del conjunto P. Entre las funciones de incidencia en $A(P)$ destaquemos las siguientes:

función de Kronecker (o bien función delta)

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y; \\ 0, & \text{en el caso contrario;} \end{cases}$$

función zeta

$$\xi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leqslant y; \\ 0, & \text{en el caso contrario;} \end{cases}$$

función lambda

$$\lambda(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y, \text{ o bien } y \text{ cubre } x; \\ 0, & \text{en el caso contrario} \end{cases}$$

función de las cadenas (o bien función eta)

$$\eta(x, y) = \xi(x, y) - \delta(x, y);$$

función de recubrimiento (o bien función kappa)

$$\varkappa(x, y) = \lambda(x, y) - \delta(x, y);$$

función de Moebius

$$\mu(x, y) = \xi^{-1}(x, y);$$

función de la longitud (o bien función rho)

$$\rho(x, y) = l(x, y),$$

donde $l(x, y)$ es la longitud del intervalo $[x, y]$ en P. Las razones que nos hacen destacar estas funciones y sus nombres se aclararán después de resolver algunos problemas correspondientes.

7.181. Compruébese que la convolución de las funciones de incidencia es asociativa y la función de Kronecker sirve de elemento neutral respecto de la convolución.

7.182. Pruébese que una convolución en $A(P)$ es conmutativa cuando y sólo cuando P es una anticadena.

7.183. Demuéstrese que una función de incidencia f en $A(P)$ tiene tanto la función inversa izquierda como la función inversa derecha respecto de la operación de convolución cuando y sólo cuando $f(x, x) \neq 0$ para todo $x \in P$. ¿Coincidirán entre sí las funciones inversas derecha e izquierda?

7.184. ¿Por qué es correcta la definición de la función de Moebius como función inversa de la función zeta?

7.185. Compruébese que la función de Moebius $\mu(x, y)$ de un conjunto parcialmente ordenado localmente finito P puede ser calculada de un modo recurrente con ayuda de la fórmula:

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \not\leqslant y; \\ 1, & \text{si } x = y; \\ -\sum\limits_{z: x < z \leqslant y} \mu(z, y) = -\sum\limits_{z: x \leqslant z < y} \mu(x, z), \end{cases}$$

si $x < y$.

7.186. Sea P^* un conjunto parcialmente ordenado dual respecto de P y supongamos que $f(x, y) \in A(P)$, y $f^*(x, y) \in A(P^*)$. Compruébese que $f^*(x, y) = f(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in P$, cuando $f(x, y)$ es una de las funciones de incidencia analizadas más arriba.

7.187. Demuéstrense las siguientes identidades:

a) $\zeta^n(x, y) = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \eta^i(x, y);$

$$\eta^n(x, y) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{k}{i} \zeta^i(x, y);$$

b) $\lambda^n(x, y) = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \varkappa^i(x, y);$

$$\varkappa^n(x, y) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \lambda^i(x, y);$$

c) $(\varkappa * \zeta)(x, y) =$ al número de todos los átomos en el intervalo $[x, y]$ de P;

d) $(\zeta * \varkappa)(x, y) =$ al número de todos los coátomos en el intervalo $[x, y]$ de P;

e) $\eta^k(x, y) =$ al número de todas las cadenas de longitud k entre x e y en P;

f) $\varkappa^k(x, y)$ = al número de todas las cadenas máximas de longitud k entre x e y en P;

g) $\zeta^2(x, y) = |[x, y]|$.

7.188. Demuéstrese el *teorema de Stanly*: sean P y Q los conjuntos parcialmente ordenados localmente finitos y sea K cierto campo. Entonces, si las álgebras de incidencia $A(P)$ y $A(Q)$ sobre el campo K son isomorfas, lo serán también los conjuntos parcialmente ordenados P y Q.

Muy a menudo se considera en las aplicaciones no toda el álgebra de incidencia $A(P)$ en su integridad, sino ciertas subálgebras, exigiendo que las funciones de incidencia tengan o valores constantes en los intervalos isomorfos del conjunto ordenado P, o bien la llamada multiplicatividad. Supongamos que P es un retículo. La función de incidencia $f \in A(P)$ se llama multiplicativa, si para cualesquiera $x, y \in P$ de la condición

$$[x \wedge y, x \vee y] \cong [x \wedge y, x) \times [x \wedge y, y]$$

se deduce que

$$f(x \wedge y, x \vee y) = f(x \wedge y, x) \cdot f(x \wedge y, y).$$

Como ejemplos de funciones multiplicativas de incidencia para los retículos intervienen δ, ζ y ζ^2.

7.189. Demuéstrese que si f es una función inversa multiplicativa de $A(P)$, entonces $f(x, x) = 1$, cualquiera que sea $x \in P$.

7.190. Sea $S(P)$ un subconjunto de todas las funciones de incidencia $f \in A(P)$, para las cuales del isomorfismo de cualesquiera intervalos $[x, y]$ y $[a, b]$ en un conjunto parcialmente ordenado P se deduce que $f(x, y) = f(a, b)$. Demuéstrese que $S(P)$ es una subálgebra del álgebra de incidencia $A(P)$ que lleva el nombre de *álgebra estándar*.

7.191. Compruébese que si una función de incidencia pertenece al álgebra estándar $S(P)$ y es invertible en $A(P)$, será invertible también en $S(P)$.

7.192. ¿Pertenecerán al álgebra estándar $S(P)$ de un conjunto parcialmente ordenado P todas las funciones examinadas más arriba?

7.193. Sea P un retículo. Demuéstrese que todas las funciones invertibles multiplicativas de $S(P)$ forman un grupo respecto de la operación de convolución.

7.194. Calcúlense las funciones de Moebius para los siguientes conjuntos parcialmente ordenados:

a) anticadena;

b) subconjunto $N = \{0, 1, \ldots, k\}$ de números enteros con orden corriente;

c) booleano $\mathscr{P}(S_n)$;

d) conjunto de todos los divisores enteros no negativos de un número natural n, ordenado según la divisibilidad;

e) belliano $B(S_n)$ sobre el conjunto S_n, donde $|S_n| = n$;

f) conjunto de todos los subespacios de un espacio vectorial n-dimensional V_n sobre un campo finito con q elementos, ordenado por inclusión;

g) conjunto de todas las caras de un poliedro Π_n ordenado por inclusión.

7.195. Demuéstrese la *1ª fórmula de inversión de Moebius*: supongamos que g y f son las funciones definidas en el conjunto finito parcialmente ordenado P con valores en el conjunto de números reales y que

$$g(x) = \sum_{y:\, y \leqslant x} f(y) \quad \text{para todo } x \in P.$$

Entonces

$$f(x) = \sum_{y:\, y \leqslant x} g(y)\,\mu(y, x) \quad \text{para todo } x \in P.$$

7.196. Demuéstrese *la 2ª fórmula de inversión de Moebius*: sean g y f unas funciones definidas sobre un conjunto finito parcialmente ordenado P con valores en el conjunto de números reales y supongamos que

$$g(x) = \sum_{y:\, y \geqslant x} f(y) \quad \text{para } x \in P.$$

Entonces

$$f(x) = \sum_{y:\, y \geqslant x} \mu(x, y)\, g(y) \quad \text{para todo } x \in P.$$

7.197. Las fórmulas de inversión de Moebius son válidas también para los conjuntos parcialmente ordenados y localmente finitos. En este caso, con el fin de garantizar la finitud de las sumas, se impone una condición adicional. Formúlen su propia versión de una de las fórmulas de inversión de Moebius para el conjunto parcialmente ordenado y localmente finito.

7.198. Sean g y f las funciones reales, definidas sobre un conjunto $N = \{0, 1, \ldots, n\}$ con orden corriente. Cerciórese de que para $\forall m \in N$ se verifican las relaciones:

a) $g(m) = \sum_{i=0}^{m} f(i) \Leftrightarrow f(m) = g(m) - g(m-1)$;

b) $g(m) = \sum_{i=m}^{n} f(i) \Leftrightarrow f(m) = g(m) - g(m+1)$.

7.199. Sean g y f las funciones reales definidas sobre un booleano $\mathcal{P}(S_n)$. Cerciórese de que para $\forall B \in \mathcal{P}(S_n)$ se verifican las siguientes relaciones:

a) $g(B) = \sum_{A:\, A \subseteq B} f(A) \Leftrightarrow f(B) = \sum_{A:\, A \subseteq B} (-1)^{|B|-|A|} g(A)$;

b) $g(B) = \sum_{A:\, A \supseteq B} f(A) \Leftrightarrow f(B) = \sum_{A:\, A \supseteq B} (-1)^{|B|-|A|} g(A)$.

Sea P un conjunto finito parcialmente ordenado y $|P| = n$. Hagamos extender el orden prefijado en éste hasta que se obtenga el orden lineal, el cual dispondrá los elementos del conjunto P en una sucesión finita $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de un modo tal que si $x_i \leqslant x_j$ en P, entonces $i \leqslant j$ (véase el problema 7.34). Ahora, a toda función de incidencia $f(x, y)$ de $A(P)$ pongamosle en correspondencia una matriz $F = (f_{ij})_{i,j=1-n}$ con elementos del campo K, en la cual las filas y las columnas están coordenadas con la numeración de los elementos de P, a saber:

$$f_{ij} = f(x_i, x_j).$$

7.200. Escríbase la matriz de la función zeta para los siguientes conjuntos parcialmente ordenados:

a) el booleano $\mathcal{P}(S_3)$, donde $S_3 = \{a, b, c\}$;

b) la cadena de 5 elementos;

c) la anticadena de 5 elementos.

¿Pará que la matriz de una función de incidencia no sea triangular superior?

7.201. Muéstrese que si P es un conjunto finito parcialmente ordenado, la matriz de incidencia $A(P)$ puede ser considerada como subálgebra del álgebra de todas las matrices triangulares de orden $|P|$.

7.202. Sean Δ, Z, H y M las matrices de la función de Kronecker, de la función zeta, de la función de cadenas y de la de Moebius provenientes de $A(P)$, respectivamente. Supongamos, además, que E es la matriz unidad y 0, una matriz compuesta únicamente de ceros. Enúnciese la afirmación del problema 7.183 para las matrices triangulares superiores. Compruébese que $\Delta = E$; $H^k = 0$ para todo $k > l$, y $M = Z^{-1}(\Delta + H)^{-1} = E - H + H^2 - H^3 + \ldots$ $\ldots + (-1)^l H^l$, donde l es la longitud del conjunto parcialmente ordenado P. Observemos que $l < n$.

7.203. Sean P un conjunto finito parcialmente ordenado, $\mu(x, y)$, su función de Moebius y $C_k(x, y)$, el número de cadenas de longitud k entre los elementos x e y en P. Demuéstrese la *fórmula de P. Hall*:

$$\mu(x, y) = \begin{cases} \sum\limits_{h=1}^{l} (-1)^h C_k(x, y), & \text{si } x < y; \\ 1, & \text{si } x = y; \\ 0, & \text{en el caso contrario}, \end{cases}$$

donde l es la longitud del conjunto parcialmente ordenado P.

7.204. Supongamos que A es un conjunto parcialmente ordenado, φ, el operador de clausura en A, y Q, un conjunto parcialmente ordenado de todos los elementos φ-cerrados de A. Demuéstrese el *teorema de Rota*:

$$\sum_{z \in A:\ \varphi(z) = \varphi(y)} \mu_A(x, z) = \begin{cases} \mu_Q(\varphi(x), \varphi(y)). & \text{si } x = \varphi(x); \\ 0, & \text{si } x < \varphi(x). \end{cases}$$

7.205. Supongamos que $\mathcal{P}(S)$ es un booleano sobre el conjunto finito S; φ es el operador de clausura definido en $\mathcal{P}(S)$, y Q, un conjunto de todos los subconjuntos φ-cerrados del conjunto S, con la particularidad de que $\varphi(\varnothing)=\varnothing$. Demuéstrese que si r_k es el número de k-subconjuntos X del conjunto S, para los cuales $\varphi(X)=S$, entonces

$$\mu_Q(0, 1)=\sum_{k=1}^{|S|}(-1)^k r_k.$$

El problema que sigue, en el que están formulados los resultados del teorema de P. Hall (Hall P. "Proc. London Math. Soc.", 1934, 36 (2), p. 29 —95) es de gran importancia desde el punto de vista teórico, pues establece la relación entre la propiedad de la función de Moebius de ser distinta de cero y las propiedades del retículo de ser puntual o con complementos.

7.206. Sea L un retículo finito. Demuéstrense las afirmaciones de P. Hall:

a) si 0 no es una intersección de los coátomos del retículo L, o bien si 1 no es una unión de los átomos del retículo L, entonces $\mu(0, 1)=0$;

b) si $x, y \in L$, $x \leqslant y$, e y no son una unión de elementos que cubren x, o si x no es una intersección de los elementos que se cubren por y, entonces $\mu(x, y)=0$.

7.207. Sea L un retículo finito. ¿Serán válidas las siguientes afirmaciones:

a) si $\mu(0, 1)\neq 0$, entonces L es un retículo con complementos;

b) si $\mu(x, y)\neq 0$ para cualesquiera $x, y \in L$, $x \leqslant y$, entonces L es un retículo con complementos relativos;

c) si L es un retículo semimodular y si $\mu(0, 1)\neq 0$, entonces L es un retículo geométrico;

d) si L es un retículo con complementos (relativos), entonces $\mu(0, 1)\neq 0$;

e) si L es un retículo geométrico, entonces $\mu(x, y)\neq 0$ para cualesquiera $x, y \in L$ y $x \leqslant y$.

7.208. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) si L es un retículo distributivo, entonces

$$\mu(0, 1)=\begin{cases} (-1)^{r(L)}, & \text{si } L \text{ es un retículo geométrico;} \\ 0, & \text{en el caso contrario;} \end{cases}$$

b) si L es un retículo modular indesarrollable, entonces

$$\mu(0, 1)=\begin{cases} (-1)^{r(L)} q^{\binom{r(L)}{2}}, & \text{si } L \text{ es un retículo geométrico} \\ 0, & \text{en el caso contrario} \end{cases}$$

donde q es la potencia de cierto número primo.

7.209. Sea L un retículo finito y supongamos que $a \in L$ y $a^{\perp}$ es un conjunto de todos los complementos de a en L. Demuéstrese el *teorema de Crapo*:

$$\mu(0, 1) = \sum_{w,\, z \in a^{\perp}} \mu(0, w)\, \zeta(w, z)\, \mu(z, 1).$$

7.210. Sea L un retículo finito y supongamos que $x, y, z \in L$ y $x \leqslant z \leqslant y$. Demuéstrese la fórmula de Weisner:

$$\sum_{t \in L:\ t \vee z = y} \mu(x, t) = \begin{cases} \mu(x, y), & \text{si } z = x, \\ 0, & \text{si } z \neq x. \end{cases}$$

7.211. Sea L un retículo finito. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) si $a \in L$ y $a > 0$, entonces para todo $b \in L$

$$\sum_{t \in L:\ t \vee a = b} \mu(0, t) = 0;$$

b) si $a \in L$ y $a < 1$, entonces para todo $b \in L$

$$\sum_{t \in L:\ t \wedge a = b} \mu(t, 1) = 0.$$

7.212. Sea L un retículo finito. Demuéstrese que son válidas las siguientes afirmaciones:

a) si L carece de complementos, entonces $\mu(0, 1) = 0$;

b) si L es modular, entonces $\mu(0, 1) = \mu(0, a) \times \sum_{z \in a^{\perp}} \mu(0, z)$, para todo $a \in L$;

c) si L es un retículo geométrico, $x, y \in L$ y $x \leqslant y$, entonces $\mu(x, y) \neq 0$, con la particularidad de que $\mu(x, y) > 0$, si $r(y) - r(x)$ es par, y $\mu(x, y) < 0$, si $r(y) - r(x)$ es impar;

d) si L es distributivo, $x, y \in L$ y $x \leqslant y$, entonces

$$\mu(x, y) = \begin{cases} (-1)^n, & \text{si } y \text{ es igual a la unión de } n \text{ elementos diferentes que cubren } x; \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

Sean P y L los conjuntos parcialmente ordenados. Un par (σ, τ) de aplicaciones $\delta\colon P \to L$ y $\tau\colon L \to P$ se llama correspondencia de Galois entre P y L, si para cualesquiera $x, y \in P$ y cualesquiera $a, b \in L$ se cumplen las siguientes condiciones:

a) si $x \leqslant y$ en P, entonces $\sigma(x) \geqslant \sigma(y)$ en L;

b) si $a \leqslant b$ en L, entonces $\tau(a) \geqslant \tau(b)$ en P;

c) $x \leqslant \tau\sigma(x)$ para cualesquiera $x \in P$ y $a \leqslant \sigma\tau(a)$ para todo $a \in L$.

7.213. Sea R una relación binaria, $R \subseteq S \times T$. Definamos la aplicación $\sigma\colon \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(T)$ del modo siguiente:

$$\sigma(A) = \begin{cases} \{z \in T \mid (x, z) \in R \text{ para todo } x \in A, & \text{si } A \neq \varnothing; \\ T, & \text{si } A = \varnothing. \end{cases}$$

De un modo análogo definamos la aplicación $\tau\colon \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(S)$. Demuéstrese que (σ, τ) es la correspondencia de Galois entre los booleanos $\mathcal{P}(S)$ y $\mathcal{P}(T)$.

7.214. Sea $(\sigma; \tau)$ una correspondencia de Galois entre los conjuntos parcialmente ordenados P y L. Demuéstrese que:

a) $\sigma\tau\sigma = \sigma$ y $\tau\sigma\tau = \tau$;

b) $\tau\sigma$ y $\sigma\tau$ son operadores de clausura sobre P y L, respectivamente.

7.215. Sean P y L conjuntos finitos parcialmente ordenados (P posee 0, y L posee tanto 0 como 1), en tanto que (σ, τ) es una correspondencia de Galois entre P y L tal que

a) $\tau(a) = 0$ cuando y sólo cuando $a = 1$;

b) $\sigma(0) = 1$.

Demuéstrese que si μ_P y μ_L son funciones de Moebius de los conjuntos parcialmente ordenados P y L, entonces

$$\mu_L(0, 1) = \sum_{x \in P\,:\,x > 0} \mu_P(0, x)\,\zeta_L(\sigma(x), 0) = \sum_{x \in P:\ \sigma(x) = 0} \mu_P(0, x)$$

7.216. Sean $f\colon P \to L$, $g\colon L \to P$ unas funciones que conservan el orden entre P y L (el conjunto parcialmente ordenado P posee 1, y L, tanto 0, como 1), tales que

a) $g(a) = 1$ cuando y sólo cuando $a = 1$;

b) $f(1) = 1$;

c) $fg(a) \geqslant a$ para todo $a \in L$ y $gf(x) \leqslant x$ para todo $x \in P$.

Demuéstrese que en este caso

$$\mu_L(0, 1) = \sum_{x \in P:x<1} \mu_P(x, 1)\,\zeta_L(f(x), 0) = \sum_{x \in P:f(x)=0} \mu_P(x, 1).$$

7.217. Demuéstrese que si (σ, τ) es una correspondencia de Galois entre los conjuntos parcialmente ordenados P y L, entonces para todo $x \in P$ y todo $y \in L$ se verifica la siguiente relación:

$$\sum_{z \in P:\ \sigma(z)=y} \mu_P(x, z) = \sum_{u \in L:\ \tau(u)=x} \mu_L(y, u) =$$

$$= \begin{cases} \mu_P(x, \tau(y)), & \text{si } x = \tau\sigma(x) \text{ e } y = \sigma\tau(y); \\ 0 & \text{en el caso contrario} \end{cases}$$

§ 4. Problemas mixtos sobre conjuntos parcialmente ordenados

7.218. Está dado un alfabeto $\{a_1, \ldots, a_n\}$. ¿Cuántas palabras de longitud $2n$ pueden formarse a partir de él, con la particularidad de que las palabras han de contener una letra exactamente dos veces y, además, no debe haber al lado dos letras iguales?

7.219. Supongamos que se tiene un stock ilimitado de cuentas de vidrio que tienen colores distintos. ¿Cuántos collares diferentes pueden confeccionarse a partir de n cuentas? Los collares se consideran iguales, si se obtienen uno de otro por desplazamiento cíclico de las cuentas.

7.220. A una mesa redonda han de sentarse n cónyuges. ¿De cuántos modos puede hacerse, si se requiere que los varones y las mujeres se alternen y que ningún marido se sitúe al lado de su esposa.

7.221. Sea $L(G)$ un conjunto de todos los subgrafos del gráfo G obtenidos a partir de G haciendo encoger cierto subconjunto de sus aristas. Diremos que $H \leqslant T$ en $L(G)$, H, $T \in L(G)$, si H es un subgrafo del grafo T. Demuéstrese que $(L(G), \leqslant)$ es un retículo geométrico.

7.222. Sea $L(G)$ un conjunto de todos los subgrafos del grafo G que se obtienen de G por contracción de cierto subconjunto de sus aristas (véase el problema 7.221). Demuéstrese que

$$P(G; \lambda) = \sum_{H \in L(G): H \leqslant G} |\lambda|^{|V(H)|} \mu(H, G),$$

donde V (H) es el conjunto de vértices del grafo H; $\mu(H, G)$ es la función de Moebius del retículo geométrico $L(G)$.

Sea P un conjunto finito parcialmente ordenado con 0, 1 y la función de rango r. El polinomio $\chi(P; x) = \sum_{a \in P} \mu(0, a)\, x^{r(1)-r(a)}$ se llama *polinomio característico del conjunto parcialmente ordenado* P.

7.223. Hállense los polinomios característicos:

a) para un booleano $\mathcal{P}(S_n)$;

b) para un conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{D}(n)$ de divisores de un número natural ordenados según la divisibilidad.

7.224. Sea P un conjunto finito parcialmente ordenado con 0 y 1 que cuenta con una función de rango r. Demuéstrese que si $P = P_1 \times P_2$, entonces $\chi(P; x) = \chi(P_1; x)\, \chi(P_2; x)$.

7.225. Hállense los polinomios característicos para los conjuntos parcialmente ordenados estudiados en el § 1 de este capítulo.

En vista de los razonamientos evidentes (véase el problema 7.222), $P(G, \lambda)$ se denomina *polinomio cromático del grafo G*. La relación existente entre los polinomios cromáticos y característicos, así como también los polinomios característicos para el caso en que P es un retículo geométrico, se analizarán detalladamente en el capítulo VIII. Sea V_n un espacio vectorial de n dimensión sobre el campo $GF(q)$; $G(n, q)$, el *número de Galois* (el número de todos los espacios de V_n) y $\left[{n \atop k}\right]_q$, el coeficiente *q-binomial de Gauss* (el número de espacios de k-dimensiones de V_n) (véase la solución del problema 7.33).

7.226. Compruébese la validez de las siguientes relaciones:

a) $|V_n| = q^n$;

b) $G(n, q) = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right]_q$;

c) $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \dfrac{\prod_{i=1}^{n} (q^i - 1)}{\prod_{i=1}^{k} (q^i - 1) \prod_{i=1}^{n-k} (q^i - 1)}$, para $k = 0, 1, \ldots, n$;

d) $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q$, para $k = 0, 1, \ldots, n$;

e) $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q < \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q < \ldots < \begin{bmatrix} n \\ \frac{n}{2} \end{bmatrix}_q > \begin{bmatrix} n \\ \frac{n}{2}+1 \end{bmatrix}_q > \ldots > \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q$, si n es par, y

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q < \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q < \ldots < \begin{bmatrix} n \\ \frac{n-1}{2} \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ \frac{n+1}{2} \end{bmatrix} > \ldots > \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q,$$

si n es impar;

f) $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q$ para $k = 1, 2, \ldots, n$;

g) $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \dfrac{q^{n-k}}{q^{k-1}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q$ para $k = 1, 2, \ldots, n$;

h) $\sum_{r=0}^{2m} (-1)^r \begin{bmatrix} 2m \\ r \end{bmatrix}_q = (1-q)(1-q^3) \ldots (1-q^{2m-1})$;

i) $\sum_{r=0}^{2m+1} (-1)^r \begin{bmatrix} 2m+1 \\ r \end{bmatrix}_q = 0$;

q) $G(n+1, q) = 2G(n, q) + (q^n - 1) G(n-1) q$;

k) $1 = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q G(k, q) (-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}}$.

7.227. Sea a un átomo arbitrario (hiperplano en V_n) en el retículo $L(V_n)$ de los subespacios de un espacio vectorial n-dimensional V_n sobre el campo $GF(q)$. ¿Cuán grande puede ser el número de subespacios x de V_n con las propiedades $a \wedge x = 0$ y $r(x) \neq 0$ en $L(V_n)$? Recordemos que en los retículos modulares la función de rango coincide con la dimensión.

7.228. ¿Cuán grande puede ser el número de subespacios disjuntos dos a dos del espacio V_n de dimensión k? ¿Cómo puede ser de grande este número si la condición es que la dimensión de una intersección no es inferior a l?

7.229. Si $d_1, \ldots, d_m$ son divisores distintos del número N, entre los cuales cualesquiera dos tienen divisor común superior a la unidad, ¿cuán grande puede ser m?

7.230. Supongamos que $\mathscr{B}(S_n)$ es un belliano sobre el n-conjunto S_n, $\pi, \sigma \in \mathscr{B}(S_n)$, $\pi \leqslant \sigma$ y $b(\sigma)$ es el número de bloques en la partición σ. Demuéstrese que $[\pi\sigma] \cong \coprod_{i=1}^{b(\sigma)} \mathscr{B}(S_{m_i})$ para ciertos números no negativos m_i tales que $\sum_{i=1}^{b(\sigma)} m_i = b(\pi)$. En particular, $[\pi, 1] \cong \mathscr{B}(S_{b(\pi)})$ y $[0, \pi) \cong \coprod_{i=1}^{b(\pi)} \mathscr{B}(S_{n_i})$, donde $\pi = (A_1, \ldots, A_{b(\pi)}) \in \mathscr{B}(S_n)$ y $|A_i| = n_i$; $i = 1, \ldots, b(\pi)$.

El problema 7.230 permite introducir para cualesquiera $\pi, \sigma \in \mathscr{B}(S_n)$ de un modo formal el concepto de tipo del intervalo $[\pi, \sigma]$ y de tipo del elemento π:

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ es el *tipo del intervalo* $[\pi, \sigma]$,

$$\text{si } [\pi, \sigma] = \coprod_{i=1}^{n} [\mathscr{B}(S_i)]^{\alpha_i},$$

y

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ es el *tipo de la partición* π,

$$\text{si } [0, \pi] \cong \coprod_{i=1}^{n} [\mathscr{B}(S_i)]^{\alpha_i},$$

es decir, si π contiene exactamente α_i bloques de potencia i para $i = 1, \ldots, n$.

7.231. ¿Cuántos elementos del tipo fijo $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ están contenidos en un belliano $\mathscr{B}(S_n)$?

7.232. Sea $\pi = (A_1, \ldots, A_{b(\pi)}) \in \mathscr{B}(S_n)$, $|A_i| = n_i$ para $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots b(\pi)$ y $\sum_{i=1}^{b(\pi)} n_i = n$. Hállense $|[0, \pi]|$ y $|[\pi, 1]|$.

Supongamos que $\mathscr{B}(S_n)$ es un belliano sobre el n-conjunto S_n; $B(n)$ es el *número de Bell* (el número de todas las particiones de $\mathscr{B}(S_n)$, y $S(n, k)$, el *número de Stirling de segundo genero* (número de todas las particiones de $\mathscr{B}(S_n)$ con k bloques exactamente).

7.233. Demuéstrese la validez de las siguientes identidades:

a) $B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)$;

b) $S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k)$ para $k = 1, 2, \ldots, n$;

c) $S(n+1, k) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} S(j, k-1)$;

d) existe un k tal que

$$S(n, 0) < S(n, 1) < \ldots < S(n, k-1) \leqslant S(n, k) > S(n, k+1) > \ldots$$
$$\ldots > S(n, n);$$

e) $B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k);$

f) $1 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (k-1)! \times$

$$\times \sum_{\substack{1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n = n \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = k}} \frac{n! B(1)^{\alpha_1} \ldots B(n)^{\alpha_n}}{\alpha_1! \ldots \alpha_n! (1!)^{\alpha_1} \ldots (n!)^{\alpha_n}}$$

7.234. Demuéstrese que el número de grafos conexos simples con vértices $\{1, 2, \ldots, n\}$ es igual a

$$\sum_{(b_1, \ldots, b_n):\ \sum_{i=1}^{n} i b_i = n} (-1)^{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) - 1} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) - 1\right)!\, 2^{\sum_{i=2}^{n} \left(b_i \binom{i}{2}\right)}$$

Sea K un retículo distributivo con 0 y 1. Una función real μ, definida en K, recibe el nombre de *función submodular*, si para cualesquiera $x, y \in K$

$$\mu(x) + \mu(y) \geqslant \mu(x \vee y) + \mu(x \wedge y).$$

Si para cualesquiera $x, y \in K$ se verifica la igualdad

$$\mu(x) + \mu(y) = \mu(x \vee y) + \mu(x \wedge y),$$

μ será *función modular*.

7.235. Dense ejemplos de funciones modulares y submodulares.

7.236. Sean L un subretículo del retículo distributivo K, μ, una función submodular en K y, $a, b \in L$ tales que

$$\mu(a) + \mu(b) = \mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b).$$

Demuéstrese que para todo $x \in [a \wedge b, a \vee b]$ se verifican las siguientes igualdades:

a) $\mu(x) + \mu(a) = \mu(x \vee a) + \mu(x \wedge a);$

b) $\mu(x) + \mu(b) = \mu(x \vee b) + \mu(x \wedge b);$

c) $\mu(x \wedge a) + \mu(x \wedge b) = \mu(x) + \mu(a \wedge b);$

d) $\mu(x \vee a) + \mu(x \vee b) = \mu(a \vee b) + \mu(x).$

7.237. Sea L un subretículo del retículo distributivo K tal que para cualesquiera $a, b \in L$ se verifica la desigualdad

$$\mu(a) + \mu(b) = \mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b).$$

Demuéstrese que si $a, a', b, b' \in L$ y $[a, a'] \sim [b, b']$, entonces

$$\mu(x) - \mu(\pi(x)) = \mu(a) - \mu(b) = \mu(a') - \mu(b')$$

para todo $x \in [a, a']$ en K, donde π es un isomorfismo natural de $[a, a']$ en $[b, b']$, condicionado por la proyectividad de los intervalos.

Supongamos que μ es una función submodular sobre K; L, un subretículo del retículo K con un elemento minimal a^- y en elemento maximal a^+; $a^- = a_0, a_1, \ldots, a_n = a^+$, y $a^- = a'_0, a'_1, \ldots, a'_m = a^+$ son cadenas máximas arbitrarias que en L van de a^- a a^+ ($n = m$, en virtud del problema 7.109). Definamos en K dos funciones nuevas μ_i y μ'_i del modo siguiente:

$$\mu_i(x) = \mu(x) - \mu(a_{i-1}) \quad \text{para todo } x \in [a_{i-1}, a_i], \tag{7.3}$$

$$\mu'_i(x) = \mu(x - \mu(a'_{i-1}) \text{ para todo } x \in [a'_{i-1}, a'_i], \tag{7.4}$$

donde $i = 1, 2, \ldots, n$.

Si los intervalos $[0, a^-]$ y $[a^+, 1]$ no son vacíos definamos en ellos adicionalmente las funciones μ_i y μ'_i de un modo igual, poniendo

$$\mu_0(x) = \mu'(x) = \mu(x) \quad \text{para } x \in [0, a^-], \tag{7.5}$$

$$\mu_{n+1}(x) = \mu'_{n+1}(x) = \mu(x) - \mu(a^+) \quad \text{para todo } x \in [a^+, 1] \tag{7.6}$$

7.238. Supongamos que L es un subretículo del retículo distributivo finito K; μ es una función submodular sobre K; $\mu_i(x)$ y $\mu'_i(x)$ son funciones en K definidas, al igual que en (7.3) y (7.4), con ayuda de dos diferentes cadenas máximas $a^- = a_0, a_1, \ldots, a_n = a^+$ y $a^- = a'_0, a'_1, \ldots, a'_n = a^+$ del retículo L; σ es la permutación de índices $\{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $[a_{i-1}, a_i] \sim [a'_{\sigma(i)-1}, a'_{\sigma(i)}]$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ (σ está definida unívocamente, en virtud del problema 7.146); π es el isomorfismo natural de $[a_{i-1}, a_i]$ en $[a'_{\sigma(i)-1}, a'_{\sigma(i)}]$, condicionado por la proyectividad de los intervalos. Demuéstrese la *condición de Jordan—Hölder para las funciones submodulares*: para todo $x \in [a_{i-1}, a_i]$ y cualquier i, $i = 1, \ldots, n$, la igualdad $\mu_i(x) = \mu'_{\sigma(i)}(\pi_i(x))$ se verifica cuando y sólo cuando $\mu(a) + \mu(b) = \mu(a \wedge b) + \mu(a \vee b)$, cualesquiera que sean $a, b \in L$.

Un subretículo L del retículo distributivo K se denomina μ-esqueleto, si para la función submodular μ, definida sobre K, se verifica la igualdad

$$\mu(a) + \mu(b) = \mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b),$$

cualesquiera que sean $a, b \in L$.

7.239. Sea μ una función submodular sobre el booleano $\mathscr{P}(S)$. Demuéstrese que si un subretículo L del booleano $\mathscr{P}(S)$ es un μ-esqueleto, la familia de funciones submodulares $\{\mu_i;\ i = 0, 1, \ldots, n, n+1\}$ definidas según las fórmulas (7.3—7.6) no depende de la elección de las cadenas máximas en L.

Sea que $\mu(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i\mu_i(x)$, donde $\mu_i(x)$ son funciones submodulares sobre el retículo distributivo K y $c_i > 0$ para todo i, $i = 1, 2, \ldots, m$.

7.240. ¿Será la $\mu(x)$ una función submodular sobre K?

7.241. Sea mín $\{\mu(x)\} = w$. Demuéstrese que si para ciertos $y_1, y_2 \in K$ $\mu(y_1) = \mu(y_2) = w$, entonces $\mu(y_1 \vee y_2) = \mu(y_1 \wedge y_2) = w$.

7.242. En el problema anterior se ha establecido que la familia L de todos los elementos del retículo distributivo K, sobre los cuales la función submodular μ alcanza su mínimo, forma el μ-esqueleto del retículo K. Compruébese que L es también μ_i-esqueleto para todo i, $i = 1, \ldots, m$.

El $(\mu_1, \ldots, \mu_m)$-esqueleto obtenido L del retículo K depende no sólo de las funciones submodulares μ_i, sino también de los coeficientes positivos c_i. Por eso denotemos el μ-esqueleto L por $L(c_1, \ldots, c_m)$, subrayando su dependencia de $c_1, \ldots, c_m$. Entonces $L(c'_1, \ldots, c'_m)$ será el μ'-esqueleto del retículo K, donde $\mu'(x) = \sum_{i=1}^{m} c'_i\mu_i(x)$. Es evidente que

$$L(\lambda c_1, \lambda c_2, \ldots, \lambda c_m) = L(c_1, \ldots, c_m) \qquad \text{para todo } \lambda > 0.$$

7.243. Supongamos que $y \in L(c_1, \ldots, c_m)$ e $y' \in L(c'_1, \ldots, c'_m)$, con la particularidad de que las funciones submodulares $\mu_i(x)$ son, para $i = 1, 2, \ldots, p$, no decrecientes y, además son no crecientes cuando $i = p+1, \ldots, q$, mientras que los coeficientes c_i y c'_i están ligados entre sí por las desigualdades: $c_i \geqslant c'_i$ para $i = 1, 2, \ldots, p$; $c_i \leqslant c'_i$ para $i = p+1, \ldots, q$, y $c_i = c'_i$, cuando $i = q+1, \ldots, m$. Demuéstrese que $y \wedge y' \in L(c_1, \ldots, c_m)$, $y \vee y' \in L(c'_1, \ldots, c'_m)$ y $\mu_i(y) + \mu_i(y') = \mu_i(y \vee y') + \mu_i(y \wedge y')$ para todo i, $i = 1, 2, \ldots, m$.

CAPÍTULO VIII

MATROIDES

El presente capítulo está dedicado a los sistemas de conjuntos de tipo especial que llevan el nombre de matroides.

Los matroides surgen en los más diversos contextos combinatorios y algebraicos. Tales conceptos como son la independencia y la base en los espacios vectoriales, la dependencia algebraica, los ciclos en los grafos, las superficies en las geometrías proyectivas y los retículos semimodulares puntuales, se reducen todos a una misma estructura (matroidal). El hecho de que los matroides aparecen en tan variados dominios y en tan diferentes aspectos, los hace dignos de ser estudiados. Debido a la posibilidad de aplicación, al exponer la teoría de matroides, del aparato de la teoría de los retículos, de los grafos y de los espacios vectoriales, así como del lenguaje geométrico, se puso de manifiesto inesperadamente la similitud entre los resultados de las teorías de los grafos, de las transversales, de la de codificación, del álgebra, la topología, la electrotecnia, la geometría y el análisis combinatorio.

§ 1. Conceptos fundamentales y ejemplos

Sea $\mathcal{P}(S)$ un conjunto de todos los subconjuntos del conjunto finito S. Un sistema $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(S)$ de subconjuntos de S lleva el nombre de *matroide* $M = (S, \mathcal{I})$, y los conjuntos de $\mathcal{I}$ se llaman *independientes*, si se cumplen las siguientes condiciones:

($i1$) $\varnothing \in \mathcal{I}$;

($i2$) si $A \subseteq B$ y $B \in \mathcal{I}$, entonces $A \in \mathcal{I}$;

($i3$ si $A, B \in \mathcal{I}$ y $|A| > |B|$, entonces existe un $a \in A \setminus B$ tal que $B \cup \{a\} \in \mathcal{I}$.

Se denomina *base del matroide* M a un conjunto de $\mathcal{I}$ que es máximo por inclusión. Un subconjunto A de S se llama *dependiente* si $A \notin \mathcal{I}$. Se llama *ciclo del matroide* M un subconjunto dependiente de S, mínimo por inclusión. Los conjuntos de todas las bases, de todos los ciclos y de todos los conjuntos dependientes del matroide M se designarán por $\mathcal{B}(M)$, $\mathcal{C}(M)$ y $\mathcal{D}(M)$, respectivamente.

Dos matroides $M_1 = (S_1, \mathcal{I}_1)$ y $M_2 = (S_2, \mathcal{I}_2)$ se llaman *isomorfos* (la designación es $M_1 \cong M_2$), si existe una correspondencia biunívoca entre S_1 y S_2, para la cual los subconjuntos independientes de un matroide corresponden a los subconjuntos independientes del otro matroide y los subconjuntos dependientes, a los dependientes.

8.1. Demuéstrese que sobre un conjunto de n elementos existen para $n = 1, 2, 3$ exactamente 2^n, y para $n = 4$, 17 matroides no isomorfos.

8.2. Sea S un conjunto finito, $x, y \in S$, y sea $\mathcal{J}$ una familia de subconjuntos A de S, para los cuales $|A \cap \{x, y\}| < 2$. ¿Será el par $(S, \mathcal{J})$ un matroide?

8.3. Supongamos que $|S| = n$ y k es un cierto número entero tal que $1 \leqslant k \leqslant n$ y, además, $\mathcal{J} = \{A \subseteq S \mid |A| \leqslant k\}$. Compruébese que $U_{k,n} = (S, \mathcal{J})$ es un matroide. Hállense $\mathscr{B}(U_{k,n})$, $\mathscr{C}(U_{k,n})$ y $\mathscr{D}(U_{k,n})$.

El matroide $U_{k,n}$ del problema 8.3 se llama *homogéneo*. Si $k = n$, el matroide $U_{k,n}$ se denomina libre y lo designan con F_n.

8.4. Sea $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y sea $\mathcal{J}$ una familia de subconjuntos A del conjunto S, distintos de $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 4, 6\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{3, 4, 5\}$ y tales que $|A| \leqslant 3$. Compruébese que $(S, \mathcal{J})$ es un matroide.

8.5. Hállense tales 6 puntos en un plano que, al numerarlos de 1 a 6, las bases del matroide del problema 8.4 se hacen precisamente conjuntos de tres puntos no colineares.

Sea L un espacio lineal sobre el campo F, $u_1, \ldots, u_n \in L$. La expresión de la forma $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$, donde $\lambda_i \in F$, $i = 1, \ldots, n$, lleva el nombre de *combinación lineal de vectores* $u_1, \ldots, u_n$. Un conjunto de vectores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ se llama linealmente dependiente, siempre que existe una combinación lineal de los citados vectores igual al vector nulo, en la cual por lo menos uno de los coeficientes es distinto de cero. De lo contrario el conjunto de vectores se llama linealmente independiente.

8.6. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) un conjunto de vectores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ con un subconjunto linealmente dependiente es de por sí linealmente dependiente;

b) cualquier subconjunto de un conjunto linealmente independiente de vectores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es linealmente independiente;

c) entre los vectores linealmente dependientes $u_1, \ldots, u_n$ por lo menos un vector es una combinación lineal de los demás;

d) si uno de los vectores $u_1, \ldots, u_n$ se expresa linealmente a través de los demás, entonces los vectores $u_1, \ldots, u_n$ son linealmente dependientes;

e) si un conjunto de vectores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es linealmente independiente, mientras que $\{u_1, \ldots, u_n, u\}$ es linealmente dependiente, entonces u es una combinación lineal de vectores $u_1, \ldots, u_n$;

f) si un conjunto de vectores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es linealmente independiente y el vector u_{n+1} no puede expresarse a través de ellos, entonces el conjunto $\{u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}\}$ es linealmente independiente.

8.7. Sea S un conjunto finito arbitrario de vectores del espacio lineal L sobre el campo F y supongamos que $A \subseteq S$. Diremos que

$A \in \mathcal{J}$ cuando y sólo cuando A es un conjunto linealmente independiente de vectores de L. Compruébese que $(S, \mathcal{J})$ es un matroide llamado vectorial.

8.8. Sea F^3 un espacio lineal aritmético 3-dimensional sobre el campo F, $S = \{(1, 1, 0); (1, 0, 1); (0, 1, 1)\} \subset F^3$ y sea M un matroide vectorial en S del problema 8.7. Compruébese que si F es un campo de números reales, entonces $M \cong F_3$. ¿Se conservará el isomorfismo, si $F = GF(2)$?

Sea L un espacio lineal sobre el campo F. La combinación lineal $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$, donde $u_i \in L$, $\lambda_i \in F$, se denomina *combinación afín*, si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Un conjunto de vectores $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset L$ se denominará *independiente de manera afín* sobre el campo F, si de $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$ y $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ se desprende que $\lambda_i = 0$ para todo i, $i = 1, \ldots, n$. De lo contrario el conjunto de vectores se llamará *dependiente de manera afín*. Notemos que la independencia afín se deduce de la independencia lineal, pero no viceversa.

8.9. Demuéstrense las siguientes afirmaciones

a) cualquier subconjunto de un conjunto independiente de manera afín de vectores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es independiente de manera afín;

b) entre los vectores dependientes de manera afín $\{u_1, \ldots, u_n\}$ por lo menos un vector es una combinación afín de los demás;

c) si un conjunto de vectores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es independiente de manera afín, entonces también será independiente de manera afín el conjunto $\{u_1 - u, \ldots, u_n - u\}$, donde u es un vector arbitrario de L;

d) un conjunto de vectores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es independiente de manera afín cuando y sólo cuando el conjunto $\{u_1 - u_n, \ldots, u_{n-1} - u_n\}$ es linealmente independiente;

e) si un conjunto de vectores $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$, donde $n \geqslant 2$, es independiente de manera afín, entonces el conjunto $A \setminus \{u_i\}$ es linealmente independiente para cierto i, $i = 1, \ldots, n$;

f) un subconjunto de vectores $\{(x_1^1, \ldots, x_n^1); \ldots (x_1^m, \ldots, x_n^m)\} \subset F^n$ es independiente de manera afín cuando y sólo cuando el subconjunto de vectores $\{(x_1^1, \ldots, x_n^1, 1), \ldots, (x_1^m, \ldots, x_n^m, 1)\} \subset F^{n+1}$ es linealmente independiente.

8.10. Sea S un subconjunto finito arbitrario de vectores del espacio lineal L sobre el campo F y $A \subseteq S$. Diremos que $A \in \mathcal{J}$ cuando y sólo cuando A es independiente de manera afín en L. Demuéstrese que $(S, \mathcal{J})$ es un matroide que se llama *afín*.

Sea G un *grupo abeliano sin torsión*, es decir, todos sus elementos, salvo el cero, tienen orden infinito. Diremos que $a \in G$ depende de los elementos de $A \subseteq G$, si ma, donde m es cierto número entero, pertenece a un subgrupo del grupo G, engendrado por el conjunto A.

En otras palabras, si existen los elementos $a_1, \ldots, a_n$ de A y los números enteros $m, k_1, \ldots, k_n$ $(m \neq 0)$ tales que $ma = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i$. El subconjunto $A \subseteq G$ se denomina *independiente*, si nungún elemento a de A depende de los elementos de $A \setminus \{a\}$.

8.11. Sea S un subconjunto finito del grupo abeliano G sin torsión y $A \subseteq S$. Diremos que $A \in \mathcal{J}$ cuando y sólo cuando A es un subconjunto independiente en G. Compruébese que $(S, \mathcal{J})$ es un matroide.

Sea K una extensión (dilatación) del campo F. El elemento a de K se llama algebraico sobre el campo F, si existe un polinomio $f(x)$ no igual a cero idénticamente, con los coeficientes del campo F tales que $f(a) = 0$. Un elemento a de K, que no es algebraico sobre F, recibe el nombre de elemento transcendente sobre F. Un elemento b de K se llama *algebraicamente dependiente* de $a_1, \ldots, a_n$, si b es algebraico sobre el campo $F(a_1, \ldots, a_n)$ (sobre el menor de los campos que contienen F y $a_1, \ldots, a_n$), es decir, si b satisface la ecuación algebraica

$$f_0(a) b^m + f_1(a) b^{m-1} + \ldots + f_m(a) = 0,$$

cuyos coeficientes $f_0(a), \ldots, f_m(a)$ son polinomios de $a_1, \ldots, a_n$ con coeficientes del campo F y no todos son iguales a cero. Los elementos $a_1, \ldots, a_n$ de K se denominan ***algebraicamente independientes*** sobre el campo F, si nunguno de ellos es algebraicamente dependiente de los demás.

8.12. Dénse los ejemplos de números reales algebraicos y transcendentes sobre el campo de números racionales.

8.13. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) todo elemento a_i, $i = 1, \ldots, n$, es algebraicamente dependiente de los elementos $a_1, \ldots, a_n$;

b) si b depende algebraicamente de $a_1, \ldots, a_n$, pero no de $a_1, \ldots, a_{n-1}$, entonces a_n es algebraicamente dependiente de $a_1, \ldots, a_{n-1}, b$;

c) si un elemento c depende algebraicamente de $b_1, \ldots, b_s$ y si cada b_i, $i = 1, \ldots, s$, depende algebraicamente de $a_1, \ldots, a_n$ entonces c es algebraicamente dependiente de $a_1, \ldots, a_n$;

d) los elementos $a_1, \ldots, a_n$ de K son algebraicamente independientes sobre el campo F cuando y sólo cuando de $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, donde f es un polinomio con coeficientes de F, se deduce que todos los coeficientes del polinomio f son nulos.

8.14. Sea K, una extensión del campo F y S, un subconjunto finito de K, $A \subseteq S$ y $A \subseteq \mathcal{J}$ cuando y sólo cuando los elementos de A son algebraicamente independientes sobre el campo F. Demuéstrese que $\mathcal{J}$ es una familia de conjuntos independientes de cierto matroide M en el conjunto S, el cual se llama *algebraico*.

8.15. Sea $n = 2_p$ y S_1, S_2 dos subconjuntos disjuntos de p elementos del conjunto S, donde $p \geqslant 2$ y $|S| = n$. Demuéstrese que si $\mathcal{J} = \{A \subseteq S \mid |A| \leqslant n-3,\ S_1 \nsubseteq A$ y $S_2 \nsubseteq A\}$, entonces $(S, \mathcal{J})$ es un matroide.

8.16. Demuéstrese que cualesquiera dos bases del matroide M contienen un número igual de elementos.

8.17. Axiomas de las bases demuéstrese: si M es un matroide en el conjunto finito S, entonces para la familia $\mathcal{B}(M)$ de sus bases son válidas las siguientes propiedades:

($b1$) ningún subconjunto propio de una base es base;

($b2$) si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1$, entonces $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ para cierto $y \in B_2$.

Viceversa, si una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos del conjunto finito S satisface las condiciones ($b1$) y ($b2$), entonces será una familia de bases del matroide M, definido unívocamente, sobre el conjunto S, que se designará por $(S, \mathcal{B})$. (En el matroide $(S, \mathcal{B})$ el conjunto $A \in \mathcal{J}$, donde $A \subseteq S$, cuando y sólo cuando existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $A \subseteq B$).

8.18. Sea $\mathcal{B}$ una anticadena no vacía compuesta de los subconjuntos del conjunto S. Demuéstrese que la afirmación ($b2$) del problema 8.17 es equivalente a la siguiente:

($b2'$) para cualesquiera $X, Y \subseteq S$ tales que $X \subseteq Y$, de $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $X \subseteq B_1$, $B_2 \subseteq Y$ se deduce que existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $X \subseteq B_3 \subseteq Y$.

8.19. Sea $M = (S, \mathcal{J})$ un matroide sobre el conjunto S; $\mathcal{J}$, una familia de sus conjuntos independientes y $X, Y \subseteq S$. Demuéstrese que si $X, Y \in \mathcal{J}$ y $|X| < |Y|$, entonces existe un subconjunto $Z \subseteq Y \setminus X$ tal que $|X \cup Z| = |Y|$ y $X \cup Z \in \mathcal{J}$.

8.20. Sea $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y supongamos que la familia $\mathcal{B}$ se compone de todos los subconjuntos del conjunto S que contienen tres elementos, a excepción de los subconjuntos $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 4, 7\}$, $\{1, 5, 6\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{2, 5, 7\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{3, 6, 7\}$. Compruébese que $(S, \mathcal{B})$ es un matroide Ф llamado *matroide de Fano*. En la fig. 8.1. se enumerarán los vértices de 1 a 7 de un modo tal que las bases del matroide de Fano no estén situadas en una misma curva.

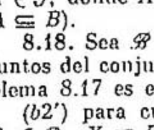


Fig. 8.1.

8.21. Sea $S = \{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2\}$ y supongamos que cada conjunto de cuatro elementos pertenece a la familia $\mathcal{B}$, salvo los siguientes conjuntos: $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$, $\{a_1, a_2, c_1, c_2\}$, $\{b_1, b_2, c_1, c_2\}$, $\{b_1, b_2, d_1, d_2\}$ y $\{c_1, c_2, d_1, d_2\}$. Compruébese que $(S, \mathcal{B})$ es un matroide, donde $\mathcal{B}$ es la familia de sus bases, el cual lleva el nombre de *Vamos*. Dibújese una configuración de 8 puntos en un espacio 3-dimensional de un modo tal que las bases de $\mathcal{B}$ del matroide de Vamos sean exáctamente conjuntos de 4 puntos no coplanares.

Se denomina *función de rango* del matroide $M = (S, \mathcal{J})$ a una función de números enteros $r(A)$, definida para todo $A \subseteq S$, tal que

$$r(A) = \text{máx}\ \{\, |X| \mid X \subseteq A,\quad X \in \mathcal{J}\}.$$

Por cuanto todos los subconjuntos independientes máximos A del conjunto S son de una misma potencia, $r(A)$ será la potencia del subconjunto independiente máximo de A. Por ejemplo, en el matroide $U_{k,n}$ (véase el problema 8.3) $r(A) = \text{mín}\{|A|; k\}$.

8.22. Axiomas de rango. Demuéstrese:

Si $M = (S, \mathcal{J})$ es un matroide sobre el conjunto finito S con función de rango r, entonces para cualesquiera $A, B \subseteq S$ y $a, b \in S$ se cumplen las siguientes condiciones:

($r1$) $0 \leqslant r(A) \leqslant |A|$;

($r2$) si $A \subseteq B$, entonces $r(A) \leqslant r(B)$ (monotonía);

($r3$) $r(A \cup B) + r(A \cap B) \leqslant r(A) + r(B)$ (semimodularidad);

($r4$) $r(\varnothing) = 0$;

($r5$) $r(A) \leqslant r(A \cup \{a\}) \leqslant r(A) + 1$;

($r6$) si $r(A) = r(A \cup \{a\}) = r(A \cup \{b\})$, entonces $r(A) = r(A \cup \{a, b\})$.

Viceversa, sea r una función arbitraria de números enteros, definida en los subconjuntos del conjunto finito S, tal que satisface las condiciones ($r1$), ($r2$) y ($r3$), o bien las ($r4$), $r5$) y $r6$). Entonces la familia $\mathcal{J}$ de subconjuntos $A \subseteq S$, para los cuales $r(A) = |A|$, forma un matroide $(S, \mathcal{J})$ con la función de rango r (este matroide se denotará con (S, r)).

8.23. Sea M un matroide vectorial con la función de rango r en el conjunto S. Demuéstrese que para cualesquiera subconjuntos $A, B, C, \mathcal{D}$ del conjunto S se verifica la siguiente desigualdad:

$$r(A) + r(\mathrm{B}) + r(A \cup B \cup C) + r(A \cup B \cup \mathcal{D}) + r(C \cup \mathcal{D}) \leqslant$$
$$\leqslant r(A \cup B) + r(A \cup C) + r(A \cup \mathcal{D}) + r(B \cup C) + r(B \cup \mathcal{D}).$$

¿Será lícita la desigualdad para el matroide de Vamos (véase el problema 8.21)?

8.24. Sea $r(A)$ una función de rango del matroide $M = (S, \mathcal{J})$ y sea k cierto número entero no negativo. Demuéstrese que

$$\rho(A) = \text{mín}\{|A|; r(A) + k\}$$

es también una función de rango de cierto matroide sobre el conjunto S.

8.25. Axiomas de los ciclos. Demuéstrese: si M es un matroide en el conjunto finito S, entonces para una familia $\mathscr{C}(M)$ de sus ciclos son válidas las siguientes propiedades:

($c1$) ningún subconjunto propio de un ciclo es ciclo;

($c2$) si $C_1, C_2 \in \mathscr{C}(M)$, $C_1 \neq C_2$ y $x \in C_1 \cap C_2$, entonces hay tal ciclo $C^* \in \mathscr{C}(M)$ que $C^* \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$;

($c2'$) si $C_1, C_2 \in \mathscr{C}(M), x \in C_1 \cap C_2, y \in C_1 \setminus C_2$, existe un ciclo $C^* \in \mathscr{C}(M)$ tal que $y \in C^* \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$.

Viceversa, si la familia $\mathscr{C} \subseteq \mathcal{P}(S)$ satisface las condiciones ($c1$), ($c2$) ó ($c1$), ($c2'$), será una familia de ciclos del matroide $M = (S, \mathcal{J})$ definido unívocamente, en el cual $A \in \mathcal{J}$, donde $A \subseteq S$ cuando y sólo cuando A no contiene, a título de subconjuntos, los términos de $\mathscr{C}$.

8.26. Sea $M = (S, \mathscr{I})$ un matroide sobre el conjunto finito S, y: $\mathscr{C}(M)$, una familia de todos los ciclos suyos. Demuéstrese que si $A \in \mathscr{I}$, y para cierto $x \in S \setminus A$ el conjunto $A \cup \{x\}$ contiene un ciclo $C \in \mathscr{C}(M)$, entonces $(A \cup \{x\} \setminus \{y\} \in \mathscr{I}$ para todo $y \in C$. ¿Podrá el conjunto $A \cup \{x\}$, donde $A \in \mathscr{I}$ y $x \in S$, contener más de un ciclo del matroide M?

8.27. Sea B una base del matroide M sobre el conjunto finito S y supongamos que $y \in S \setminus B$. Demuéstrese que:

a) $B \cup \{y\}$ contiene cierto ciclo C;

b) $y \in C$;

c) C es el único ciclo en $B \cup \{y\}$;

d) $(B \cup \{y\}) / \{x\}$ es la base del matroide M si y sólo si $x \in C$.

Un ciclo C del matroide M que se obtiene igual que en el problema 8.27 se denomina *fundamental respecto de la base* B.

8.28. Sea M un matroide sobre el conjunto finito S. Demuéstrese la validez de las siguientes afirmaciones:

a) si C es un ciclo del matroide M y $x \in C$, entonces existe una base B del matroide M tal que C es el único ciclo en $B \cup \{x\}$;

b) un elemento $x \in S$ pertenece a toda base del matroide M cuando y sólo cuando x no yace en ningún ciclo del matroide M.

8.29. Sea G un grafo con un conjunto de vértices V y un conjunto de aristas E. Demuéstrese que la familia de todos los ciclos del grafo G es un conjunto de ciclos de cierto matroide $M(G)$ sobre el conjunto E.

El matroide $M(G)$ del problema 8.29 lleva el nombre de *matroide cíclico* del grafo G. Un matroide M se llama *gráfico*, si existe un grafo G cuyo matroide cíclico $M(G)$ es isomorfo al matroide M.

8.30. Demuéstrese que un matroide homogeneo $U_{k,n}$, donde $0 \leqslant k \leqslant n$, es gráfico cuando y sólo cuando $k = 0, 1, n-1$, o bien a n.

8.31. ¿Podrán los grafos no isomorfos tener matroides cíclicos isomorfos?

8.32. Sea A, $B \subseteq S$ y $A \Delta B$, su diferencia simétrica (es decir, $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$). Demuéstrese que si A y B son ciclos de un matroide gráfico M sobre el conjunto S, entonces $A \Delta B$ es o bien un ciclo, o bien una unión de los ciclos disjuntos del matroide M. ¿Podrá un matroide que no es gráfico, poseer esta propiedad? Dénse los ejemplos.

8.33. Sean $M_1 = (S, \mathscr{I}_1)$ y $M_2 = (S, \mathscr{I}_2)$ dos matroides sobre el conjunto S y supongamos que B es su base común. Dénse los ejemplos de matroides no isomorfos con un mismo sistema de ciclos fundamentales respecto de la base B.

8.34. Sean B_1 y B_2 las bases del matroide $M = (S, \mathscr{I})$. Demuéstrese que para cualquier $x \in B_1$ se encontrará $y \in B_2$ tal que$(B_1 \setminus \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ y $(B_2) \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ son las bases del matroide M.

8.35. Sea M un matroide sobre el conjunto S y sean B_1, B_2 las bases diferentes del matroide M. Demuéstrese la validez de las siguientes afirmaciones:

a) existe una biyección $\pi: B_1 \to B_2$ tal que para todo $x \in B_1$ $(B_2 \setminus \{\pi(x)\}) \cup \{x\}$, es una base del matroide M;

b) existe una biyección $\pi': B_1 \to B_2$ tal que para todo $x \in B_1$ $(B_1 \setminus x\}) \cup \{\pi'(x)\}$, es una base del matroide M.

Supongamos que $M = (S, \mathcal{J})$ es un matroide sobre el conjunto finito S, $x \in S$ y $A \subseteq S$. Diremos que x *depende de* A (la designación es $x \sim A$), si o bien $x \in A$, o bien $x \notin A$ y $B \cup \{x\} \notin \mathcal{J}$ para cierto subconjunto independiente B del conjunto A.

8.36. Demuéstrese que si $x \sim A$ y $\mathcal{D}$ es un subconjunto independiente máximo del conjunto A, entonces $x \sim \mathcal{D}$.

8.37. Axiomas de dependencia. Demuéstrese: si $M = (S, \mathcal{J})$ es un matroide sobre el conjunto finito S, entonces para cualesquiera diferentes $x, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n \in S$ se cumplen las siguientes propiedades:

($d1$) $y_k \sim \{y_1, \ldots, y_m\}$, donde $k = 1, 2, \ldots, m$;

($d2$) si $m \geqslant 1$, $x \sim \{y_1, \ldots, y_m$ y $x \not\sim \{y_2, \ldots, y_m\}$, entonces $y_1 \sim \{x_1, y_2, \ldots, y_m\}$;

($d3$) si $x \sim \{y_1, \ldots, y_m\}$ e $y_k \sim \{z_1, \ldots, z_n\}$, donde $k = 1, 2, \ldots, m$, entonces $x \sim \{z_1, \ldots, z_n\}$.

Viceversa, supongamos que para los elementos del conjunto S se cumplen las condiciones ($d1$)—($d3$). Entonces la familia $\mathcal{J}$ de subconjuntos $A \subseteq S$ tales que $x \not\sim A \setminus \{x\}$ forma un matroide $(S, \mathcal{J})$ para cualquier $x \in A$.

8.38. Demuéstrese que si $x \notin A$, entonces $x \sim A$ cuando y sólo cuando existe un ciclo C tal que $x \in C \subseteq A \cup \{x\}$.

8.39. Demuéstrese que una familia $\mathcal{J}$ de subconjuntos del conjunto S es un conjunto de conjuntos independientes del matroide M sobre el conjunto S cuando y sólo cuando $\mathcal{J}$ satisface las condiciones ($i1$), ($i2$) y la siguiente afirmación:

($i3'$) si A es un subconjunto arbitrario del conjunto S, todos los subconjuntos máximos B del conjunto A tales que $B \in \mathcal{J}$ tienen potencias iguales.

8.40. Axiomas de clausura. Demuéstrese: supongamos que $M = (S, r)$ es un matroide sobre el conjunto finito S con función de rango r, $A \subseteq S$ y $\overline{A} = \{x \in S \mid r(A) = r(A \cup \{x\})\}$. Compruébese que la aplicación $A \to \overline{A}$, definida para todos los $A \subseteq S$, es un operador de clausura:

($cl1$) $A \subseteq \overline{A}$ para todo $A \subseteq S$;

($cl2$) si A, $B \subseteq S$ y $A \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$;

($cl3$) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ para todos los $A \subseteq S$;

el cual satisface el axioma de sustitución de Maclain-Steinitz:

($cl4$) para cualesquiera $x, y \in S$ y todo $A \subseteq S$ de $y \in \overline{A \cup \{x\}} \times$ $\times$ e $y \notin A$ se deduce que $x \in \overline{A \cup \{y\}}$.

Viceversa, supongamos que la aplicación $A \to \overline{A}$, definida para todos los $A \subseteq S$, satisface los axiomas $(cl1) - (cl4)$. Entonces la familia $\mathcal{I}$ de subconjuntos $A \subseteq S$ tales que de $x \in A$ se deduce que $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$, forma un matroide $M = (S, \mathcal{I})$ con el operador de clausura $A \to \overline{A}$ (este matroide se denotará con $(S, {}^-)$).

8.41. Demuéstrese que en el matroide $M = (S, {}^-)$, $x \in \overline{A}$ cuando y sólo cuando, $x \in A$ o existe un ciclo C, para el cual $C \setminus A = \{x\}$.

Un conjunto A del matroide M se llama *cerrado*, si coincide con su clausura. Todo conjunto cerrado de un matroide se denominará *superficie*[1]).

8.42. Sean X e Y las superficies del matroide M. Demuéstrese que $X \cap Y$ es también una superficie del matroide M.

8.43. Dése un ejemplo de matroide en el cual la unión de supeficies no es obligatoriamente una superficie.

8.44. Demuéstrese que un matroide de rango n tiene por lo menos 2^n superficies.

Se denomina *geometría combinatoria* (en adelanto siempre *geometría*) a un matroide, en el cual todos los subconjuntos de un solo elemento, como también el conjunto vacío, son cerrados.

La definición de una geometría sobre el conjunto S se diferencia de la definición de una topología sobre S en que para la clausura no se requiere que se cumplan las condiciones $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$, cualesquiera que sean $A, B \in \mathcal{P}(S)$, mas tiene lugar la propiedad de sustitución $(cl4)$, la cual, hablando en general, puede no cumplirse para la clausura de la topología.

8.45. Sea $G = (S, {}^-)$ un matroide y sea $L(G)$ un conjunto de todas las superficies del matroide G ordenadas por inclusión. Demuéstrese que $L(G)$ es un retículo geométrico y en este conjunto las operaciones binarias $\vee$ y $\wedge$ para todos los $A, B \in L(G)$ se definen del modo siguiente: $A \vee B = \overline{A \cup B}$ y $A \wedge B = A \cap B$.

8.46. Sea L un retículo geométrico arbitrario con el conjunto de átomos S y supongamos que $\overline{A} = \{a \in S \mid a \leqslant \sup A\}$ para todo $A \subseteq S$. Demuéstrese que $(S, {}^-)$ es una geometría y su retículo de superficies es isomorfo al retículo L.

8.47. ¿Es cierto que la afirmación del problema 8.46 es un corolario de los axiomas de clausura y de uno de los problemas 7.156, 7.157 ó 7.158?

8.48. Axiomas de los conjuntos cerrados (o de las superficies o flats). Demuéstrese: si M es un matroide sobre el conjunto finito S, entonces para una familia $\mathcal{F}$ de todos los conjuntos cerrados del matroide M se cumplen las siguientes propiedades:

$(f1)$ $S \in \mathcal{F}$;

$(f2)$ si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$;

---

[1]) En la literatura matemática se usa también, a la par con el término «superficie», el término inglés «flat».

($f3$) si $F, F_1, \ldots, F_k \in \mathcal{F}$ y $F_i \succ F$ para todo, i, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, k$, entonces $\{F_1 \setminus F, \ldots, F_k \setminus F\}$ es una partición del conjunto $S \setminus F$.

Viceversa, supongamos que para la familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos del conjunto S se cumplen las condiciones ($f1$) — ($f3$). Entonces la familia $\mathcal{J}$ de los subconjuntos $A \subseteq S$ tales que para todo $a \in A$ existe un subconjunto $F \in \mathcal{F}$, para el cual $A \setminus F = \{a\}$, forma un matroide $(S, \mathcal{J})$ con la familia de las superficies $\mathcal{F}$.

Sean M un matroide sobre el conjunto S y $\mathcal{F} = \{A \subseteq S \mid A = \bar{A}\}$ una familia de todas las superficies del matroide M. Suele decirse que un subconjunto $B \subseteq A$ *engendra* A, donde $A \in \mathcal{F}$, si $\bar{B} = A$. El subconjunto B se denomina *conjunto engendrador del matroide*, si $\bar{B} = S$. Los subconjuntos propios máximos (por inclusión) $H \in \mathcal{F}$ del conjunto S llevan el nombre de *hiperplanos* del matroide M.

8.49. Sea M un matroide sobre el conjunto S. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) si A es un conjunto engendrador del matroide y si $B \supseteq A$, entonces B es también un conjunto engendrador;

b) una familia de conjuntos engendradores mínimos de un matroide coincide exactamente con el conjunto de sus bases;

c) una familia de conjuntos máximos que no son engendradores coincide exactamente con el conjunto de todos los hiperplanos del matroide M.

8.50. Axiomas de los hiperplanos. Demuéstrese: si M es un matroide sobre el conjunto finito S, entonces para la familia $\mathcal{H}$ de todos los hiperplanos del matroide M se cumplen las siguientes condiciones:

($h1$) $S \notin \mathcal{H}$;

($h2$) ningún subconjunto propio de un hiperplano es hiperplano;

($h3$) para cualesquiera $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ y para todo $x \in S$ existe un hiperplano H tal que $(H_1 \cap H_2) \cup \{x\} \subseteq H$.

Viceversa, supongamos que para la familia $\mathcal{H}$ de subconjuntos del conjunto S se cumplen las condiciones ($h1$) — ($h3$). Entonces la familia $\mathcal{J}$ de subconjuntos $A \subseteq S$ tales que para todo $a \in A$ se encontrará un subconjunto $H \in \mathcal{H}$, para el cual $A \setminus H = \{a\}$, forma un matroide $(S, \mathcal{J})$ con una familia de hiperplanos $\mathcal{H}$.

Sea $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ una familia de subconjuntos no vacíos del conjunto infinito S. Se denomina *transversal* (o *sistema de representantes distintos*) para $\mathcal{F}$ a un subconjunto A del conjunto S que se compone de n elementos: a un elemento de cada conjunto A_i, es decir, si existe una aplicación biunívoca φ: $A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $a \in A_{\varphi(a)}$ para todo $a \in A$. La transversal de una subfamilia arbitraria de la familia $\mathcal{F}$ se llamará *transversal parcial* para $\mathcal{F}$.

8.51. ¿Cuáles de las siguientes familias de subconjuntos del conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tienen transversales:

a) $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4, 5\}\}$;

b) $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{4, 5\}\}$;

c) $\{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{3\}\}$;
d) $\{\{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}$?

8.52. Sea S un conjunto de letras en la palabra MATROIDS. ¿Cuántas transversales tiene la siguiente familia de subconjuntos de S: STAR; ROAD; MOAT; RIOT; RIDS; DAMS; MIST?

8.53. Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos no vacíos del conjunto finito S. Demuéstrese que un par $(S, \mathcal{J})$, donde $\mathcal{J}$ es la familia de todas las transversales parciales para $\mathcal{F}$, forma un matroide $M(S; \mathcal{F})$ en el cual $\mathcal{J}$ es una familia de conjuntos independientes.

El matroide $M(S, \mathcal{J})$ del problema 8.53 se denomina *matroide transversal de la familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos del conjunto S*. Diremos que un matroide M sobre el conjunto S es *transversal*, si existe tal familia finita $\mathcal{F}$ de subconjuntos del conjunto S que $M = M(S, \mathcal{F})$. La familia $\mathcal{F}$ se llamará en este caso *representación del matroide M*.

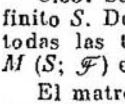


Fig. 8.2.

8.54. Demuéstrese que cada matroide k-homogéneo $U_{k,n}$ es transversal.

8.55. Demuéstrese que los matroides cíclicos de un grafo completo K_4 y del grafo representado en la fig. 8.2 no son transversales.

8.56. Demuéstrese que cada matroide sobre no más de 5 elementos es transversal.

8.57. Demuéstrese que el matroide de Fano no es transversal.

8.58. Muéstrese que existen no menos de 2^n y no más de 2^{n^2} matroides transversales no isomorfos sobre un conjunto de n elementos.

Sea S un conjunto finito, a cada elemento a del cual se le atribuye cierto número no negativo $w(a)$ llamado *peso* del *elemento a*. Se denomina *peso de un subconjunto $A \subseteq S$* a la suma de pesos de todos los elementos de A. Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos del conjunto S. Veamos el siguiente problema: en la familia $\mathcal{F}$ hallar el subconjunto del peso máximo. Para resolver este problema apliquemos un algoritmo que se llama *ávido*:

a) Elíjase un elemento a_1 tal que $\{a_i\} \in \mathcal{F}$ y $w(a_1) \geqslant w(a)$ para todos los a tales que $\{a\} \in \mathcal{F}$. Si tal a_1 no existe, viene una parada.

b) Elíjase un elemento a_2 tal que $\{a_1, a_2\} \in \mathcal{F}$ y $w(a_2) \geqslant w(a)$ para todos aquellos $a \neq a_1$ que $\{a_1 a\} \in \mathcal{F}$. Si tal a_2 no existe, tiene lugar una parada.

c) Elíjase tal elemento a_k, distinto de $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$, que $\{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k\} \in \mathcal{F}$ y $w(a_k)$ es máximo entre todos los a tales que $a \neq a_i$, siendo $i = 1, 2, \ldots, k-1$, y $\{a_1, \ldots, a_{k-1}, a\} \in \mathcal{F}$. Si tal a_k no existe, tiene lugar una parada.

Es evidente que el algoritmo ávido finaliza su trabajo asegurando el subconjunto de $\mathcal{F}$, máximo por inclusión.

8.59. Aplíquese el algoritmo ávido para los siguientes sistemas ponderados:

a) $S = \{a, b, c\}$, $w(a) = 3$, $w(b) = w(c) = 2$ y $\mathscr{F} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$;

b) $S = \{a, b, c, d\}$, $w(a) = 4$, $w(b) = w(c) = 3$, $w(d) = 1$ y $\mathscr{F} = \{\{a\}, \{b\}, \{d\}, \{c\}, \{a, d\}, \{b, c\}$;

c) $S = \{a, b, c, d\}$, $w(a) = 4$, $w(b) = 3$, $w(c) = 2$, $w(d) = 2$ y $\mathscr{F} = \{\{a\}, \{a, c\}, \{b, c, d\}, \{b, d\}\}$;

d) $S = \{a, b, c, d\}$, $w(a) = 6$, $w(b) = 3$, $w(c) = 2$, $w(d) = 2$ y $\mathscr{F} = \{\{a\}, \{a, c\}, \{b, c, d\}, \{b, d\}\}$.

¿Es cierto que como resultado del algoritmo ávido se ha obtenido un conjunto de $\mathscr{F}$ que tiene peso máximo?

Sea $\mathscr{F}$ una familia de subconjuntos del conjunto finito S, a cuyos elementos se les atribuyen los pesos no negativos. Supongamos que los elementos de cada subconjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \in \mathscr{F}$ están escritos en el orden de decrecimiento de los pesos, es decir, que $w(a_1) \geqslant w(a_2) \ldots \geqslant w(a_k)$. Diremos que $B \in \mathscr{F}$ es *óptimo* en $\mathscr{F}$, si $|A| \leqslant |B|$ para todos los $A \in \mathscr{F}$ y $w(a_i) \leqslant w(b_i)$ para todo i, donde $a_i \in A$, $b_i \in B$ y $i = 1, 2, \ldots, |A|$. Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \in \mathscr{F}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \in \mathscr{F}$, con la particularidad de que los elementos de los conjuntos A y B están escritos en el orden de decrecimiento de los pesos. Diremos que A es *lexicográficamente mayor* que B, si existe tal k que $w(a_i) = w(b_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, k - 1$ y $w(a_k) > w(b_k)$, o bien si $w(a_i) = w(b_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, y $m > n$. El conjunto $A \in \mathscr{F}$ que es lexicográficamente no inferior a cualquier otro conjunto de $\mathscr{F}$ se denomina *lexicográficamente máximo en* $\mathscr{F}$.

8.60. Sea M un matroide sobre el conjunto finito S, a cuyos elementos a se les atribuyen los pesos no negativos $w(a)$. Demuéstrese que para una base B del matroide M son equivalentes las siguientes condiciones:

a) B es óptimo en la familia $\mathscr{J}$ de conjuntos independientes del matroide M;

b) B es la base de peso máximo;

c) B es el máximo lexicográfico de la familia $\mathscr{B}$ de bases del matroide M;

d) para todo $a \in B$ el conjunto $\{a' \in B \mid w(a') > w(a)\}$ es un subconjunto independiente máximo del conjunto $\{a' \in S \mid w(a') > w(a)\}$.

8.61. Demuéstrese que la aplicación de un algoritmo ávido a la familia $\mathscr{J}$ de conjuntos independientes de un matroide sobre el conjunto finito S, a cuyos elementos a se les atribuyen los pesos no negativos $w(a)$, proporciona un subconjunto de $\mathscr{J}$ que tiene peso máximo.

8.62. Sea $\mathscr{F}$ tal familia de subconjuntos del conjunto finito S que si $A \in \mathscr{F}$ y $B \subseteq A$, entonces $B \in \mathscr{F}$. Demuéstrese que la aplicación a $\mathscr{F}$ de un algoritmo ávido nos da un subconjunto de $\mathscr{F}$ que tiene peso máximo, cuando y sólo cuando $\mathscr{F}$ es una familia de conjuntos independientes del matroide sobre S.

8.63. Muéstrese que si por medio del algoritmo ávido están elegidos k elementos, el subconjunto formado tiene peso *máximo* entre todos los conjuntos independientes que constan de k o menos elementos.

8.64. *En* un ordenador se necesita realizar un conjunto de tareas. Todas las tareas requieren para su realización un tiempo igual. A toda tarea se le atribuye el plazo de tiempo extremal para su realización. Por una tarea no realizada en el plazo de tiempo establecido se debe pagar una multa. Demuéstrese que el juego de todos los subconjuntos de tareas que pueden realizarse según el horario forma un conjunto de todos los conjuntos independientes del matroide. ¿En qué orden hace falta realizar las tareas, para que la multa total sea *mínima*?

8.65. Sea M un matroide, a cuyos elementos están atribuidos los pesos no negativos. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) ningún elemento de la base de peso máximo tiene peso mínimo en ningún ciclo del matroide M.

b) cada elemento de la base de peso máximo tiene peso máximo por lo menos en un cociclo del matroide M;

Sea S un conjunto finito y sea n un número natural. Una totalidad $\mathscr{F}$ de subconjuntos del conjunto S se llama n-partición del conjunto S, si se cumplen las siguientes condiciones:

a) si $A \in \mathscr{F}$, entonces $|A| \geqslant n$;

b) cada subconjunto de n elementos del conjunto S se contiene en un y sólo un subespacio de $\mathscr{F}$.

Observemos que la 1-partición es partición de un conjunto en el sentido habitual.

8.66. Supongamos que $\mathscr{F}$ es una n-partición del conjunto S y $|\mathscr{F}| \geqslant 2$. Demuéstrese que existe un matroide $M(S, \mathscr{F})$ sobre el conjunto S, cuyos coátomos (hiperplanos) son exactamente subconjuntos de $\mathscr{F}$ y sólo ellos.

Un matroide M se llama *matroide de recubrimiento*, si para cierta n-partición $\mathscr{F}$ con $|\mathscr{F}| \geqslant 2$ es isomorfo al matroide $M(S, \mathscr{F})$ del problema 8.66. Notemos que el matroide de recubrimiento inducido por la n-partición tiene el rango $n+1$.

8.67. Dénse ejemplos de matroides de recubrimiento.

Supongamos que el conjunto finito S, cuyos elementos se llaman *puntos*, satisface junto con las familias $\mathscr{K}$ y $\mathscr{F}$, cuyos elementos se llaman *curvas* y *superficies*, respectivamente, las condiciones siguientes:

($G1$) cualesquiera $n+1$ puntos diferentes están situados en una curva única y cada curva contiene no menos de $n+1$ diferentes puntos;

($G2$) cualesquiera $n+2$ puntos diferentes, que no yacen en una misma curva, están situados en una única superficie, y cada superficie contiene por lo menos $n+2$ puntos diferentes que no se encuentran en una misma curva.

($G3$) junto con cualesquiera $n+1$ puntos diferentes pertenece a la superficie y también toda la curva definida por los puntos mencionados;

(Un conjunto $A \subseteq S$ se llama subespacio, si contiene todas las curvas y superficies que pasan por cualesquiera $n+1$ ó $n+2$ puntos de A, y si se definen por las condiciones $(G1)$ y $(G2)$. Es evidente que la intersección de los subespacios es también un subespacio. Por consiguiente, la aplicación $A \to \overline{A}$, donde $\overline{A}$ es el subespacio mínimo que contiene A es un operador de clausura sobre S).

$(G4)$ si dos superficies se disponen en la clausura de un subconjunto de $(n+3)$ elementos de S, la intersección de ellas contiene al menos $n+1$ puntos diferentes.

La estructura de incidencia $(S, \mathcal{K}, \mathcal{F})$ que satisface, para cierto número entero no negativo n, los axiomas $(G1)$ — $(G4)$ junto con el operador de clausura definido más arriba, lleva el nombre de *geometría de Wille de grado* n y se denota por $G(S, \mathcal{K}, \mathcal{F})$. Indiquemos que para $n=0$ la geometría de Wille es una geometría proyectiva (véase el capítulo 7, § 2).

8.68. Supongamos que $G(S, \mathcal{K}, \mathcal{F})$ es una geometría de Wille de grado n, $A \neq B$ son subespacios y $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A \cap B$. Demuéstrese que

$$A \vee B = \overline{A \cup B} = \bigcup_{a \in A,\ b \in B} \overline{\{a_1, \ldots, a_n, a, b\}}.$$

8.69. Demuéstrese que cada geometría de Wille $G(S, \mathcal{K}, \mathcal{F})$ de grado n es un matroide y que para todos los subespacios A de rango igual a n se cumple la condición: en el retículo de los subespacios de la geometría de Wille el intervalo $[0, 1]$ es distributivo, y el $[A, 1]$, modular.

8.70. Demuéstrese que un matroide M sobre el conjunto finito S es isomorfo a la geometría de Wille de grado n cuando y sólo cuando $\overline{\varnothing} = \varnothing$, $\overline{a} = a$ para todo $a \in S$ (en el caso en que $n \geqslant 1$), mientras que el intervalo $[0, A]$ en el retículo de superficies del matroide M es distributivo, y el $[A, 1]$, modular para todas las superficies A del matroide M tales que $r(A) = n$.

8.71. Sea M un matroide sobre el conjunto S tal que $A \subseteq S$, y supongamos que $X \in \mathcal{J}$, si X es un conjunto independiente en M y $X \cap A \neq \varnothing$. Demuéstrese que $(S, \mathcal{J})$ es un matroide sobre el conjunto S.

Sea M un matroide sobre un conjunto finito S con la familia $\mathcal{J}$ de conjuntos independientes. El elemento $x \in S$ se denomina *bucle* (lazo) *del matroide* M, si $\{x\} \notin \mathcal{J}$. Los elementos $x_1, \ldots, x_k \in S$ se llaman *paralelos* en M, si ninguno de ellos es un bucle y si cada par de ellos $\{x_i, x_j\} \notin \mathcal{J}$.

8.72. Sea M un matroide sobre el conjunto finito S con la función de rango r y el operador de clausura $(\overline{\ \ })$. ¿Serán ciertas las afirmaciones que siguen más abajo:

a) el elemento $x \in S$ es un bucle cuando y sólo cuando $x \in \overline{\varnothing}$;

b) $x \in S$ es un bucle cuando y sólo cuando $r(\{x\}) = 0$;

c) si x es un bucle y si $x \in A$, entonces A es un conjunto dependiente del matroide M;

d) si x es un bucle, entonces $x \in \overline{A}$ para todo $A \subseteq S$;

e) el elemento x es un bucle cuando y sólo cuando $\{x\}$ es un ciclo del matroide M;

f) el elemento x es un bucle en aquel y sólo en aquel caso en que x no está contenido en ningún base del matroide M.

8.73. Demuéstrese que para cada matroide M sobre el conjunto finito S el bucle pertenece a cada superficie del matroide M, y el conjunto vacío es cerrado en M cuando y sólo cuando M no contiene bucles.

8.74. Sea M un matroide sobre el conjunto finito S con el operador de clausura $(\bar{\ })$ y supongamos que $x, y, z \in S$. Compruébese la validez de las siguientes afirmaciones:

a) los elementos distintos $x, y \in S$ son paralelos cuando y sólo cuando $\{x, y\}$ es un ciclo del matroide M;

b) si el elemento x es paralelo a y, el elemento y es paralelo a z, y $x \neq z$, entonces x es paralelo a z;

c) si $x \neq y$, entonces x es paralelo a y cuando y sólo cuando $x \in \overline{y}$, $y \in \overline{x}$, y x, y no son bucles del matroide M;

d) si $x \in \overline{A}$ para cierto subconjunto A de S, y si y es paralelo a x, entonces $y \in \overline{A}$;

e) si A contiene dos elementos paralelos del matroide M, entonces A es un conjunto dependiente en M.

8.75. Sea G un grafo no orientado con un conjunto de aristas S. Demuéstrese que la familia de todos los cortes mínimos (por inclusión) del grafo G es precisamente familia de ciclos de cierto matroide $M^*(G)$ sobre el conjunto S.

El matroide $M^*(G)$ del problema 8.75 se denomina *matroide de los cortes* del grafo G. El matroide M se llama *cográfico*, si existe un grafo G cuyo matroide de los cortes $M^*(G)$ es isomorfo a M.

8.76. ¿Serán ciertas las afirmaciones que siguen:

a) los matroides de los cortes de los grafos K_5 (de un grafo completo sobre 5 vértices) y K_{33} (de un grafo bipartido completo sobre 6 vértices, a 3 en cada capa) no son gráficos (véase la fig. 8.3);

b) los matroides cíclicos de los grafos K_5 y K_{33} no son cográficos;

c) un matroide cíclico de cualquier grafo planario es cográfico;

d) un matroide de los cortes de un grafo planario arbitrario es gráfico;

e) el matroide de Fano Φ no es gráfico, ni tampoco cográfico?

8.77. Supongamos que $G(V, S)$ es un grafo con el conjunto de vértices V y el conjunto de aristas S, $a, b \in V$ y $A \subseteq S$. Diremos que los vértices a y b son *A-conexos*, si existe una sucesión de aristas (camino) (x_0, x_1), $\overline{(x_1, x_2)}$, . . ., $\overline{(x_{n-1}, x_n)}$ de A tal que $x_0 = a$ y $x_n = b$. Para todo $A \subseteq S$ definamos $\overline{A}$: la arista $(a, b) \in \overline{A}$ cuando y sólo cuando los vértices a y b son A-conexos. Demuéstrese que el conjunto de aristas del grafo con operador $A \to \overline{A}$ forman el matroide $M(G(V, S))$.

8.78. Sea $M(G(V, S))$ un matroide del grafo $G(V, S)$ del problema 8.77. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) $A \subseteq S$ es independiente en M cuando y sólo cuando $G(V, A)$ es un bosque en G;

b) $B \subseteq S$ es una base del matroide M si y sólo si $G(V, B)$ es un bosque engendrador, es decir, el bosque $G(V, B)$ y el grafo $G(V, B)$ tienen un mismo número de componentes conexos;

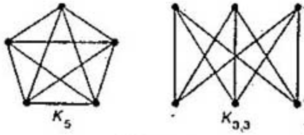


Fig. 8.3.

c) $C \subseteq S$ es un ciclo en M cuando y sólo cuando C es un conjunto de aristas del ciclo en el grafo $G(V, S)$;

d) $H \subseteq S$ es un coátomo en M siempre que $G(V, H)$ tiene el número de componentes conexos exactamente en una unidad mayor que $G(V, S)$, y es un subgrafo máximo con esta propiedad, y viceversa:

e) $r(A) = |V| - k(A)$, donde $k(A)$ es el número de componentes conexos en el subgrafo $G(V, A)$?

Las aristas de un grafo se llaman *independientes*, si no tienen vértices comunes. Una *combinación de pares* es un conjunto de aristas independientes del grafo. El vértice del grafo G se denomina *saturado en la combinación de pares P*, si es un vértice terminal de la arista de P.

8.79. Sea G un grafo no orientado con un conjunto de vértices V. Demuéstrese que si $\mathcal{J}$ es una familia de todos aquellos subconjuntos $A \subseteq V$ en que los elementos de A se saturan en cierta combinación de pares del grafo G, entonces $\mathcal{J}$ es una familia de los conjuntos independientes de cierto matroide sobre el conjunto V, el cual lleva el nombre de *matroide de las combinaciones de pares*.

8.80. Sea M un matroide sobre el conjunto finito S; $\mathcal{C}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{H}$ son las familias de sus ciclos, conjuntos independientes, bases e hiperplanos, respectivamente; $(^-)$ es el operador de clausura del matroide M, y r, su función de rango. Demuéstrese la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

($c3$) si $C \in \mathcal{C}$, entonces $|C| \geqslant 3$;

($i4$) para todos los $x, y \in S$ el conjunto $\{x, y\} \in \mathcal{J}$;

($b3$) para todos los $x, y \in S$ existe una base $B \in \mathcal{B}$ tal que

$$\{x, y\} \subseteq B;$$

($cl5$) $\overline{\varnothing} = \varnothing$ y $\overline{x} = x$ para cada $x \in S$;

($r7$) para todo $X \subseteq B$, si $|X| \leqslant 2$, entonces $r(X) = |X|$;

($h4$) para cualesquiera $x, y \in S$, $x \neq y$, existe un hiperplano $H \in \mathcal{H}$ tal que $x \in H$, $y \notin H$.

En el problema 8.80 están enunciadas las condiciones equivalentes para que un matroide sea geometría combinatoria.

8.81. Sea S un conjunto arbitrario. Agreguemos a cada sistema de axiomas del matroide uno más de los siguientes:

(c4) si $X \subseteq S$, $|X| = \infty$, existe un ciclo $C \in \mathscr{C}$ tal que $C \subseteq X$;

(i5) para cada $A \subseteq \mathscr{I}$, $|A| < \infty$;

(b4) para cada $B \in \mathscr{B}$, $|B| < \infty$;

(cl6) si $X \subseteq S$, existe $X' \subseteq X$, $|X'| < \infty$, tal que $\overline{X'} = \overline{X}$;

(r8) si $X \subseteq S$, existe un subconjunto $X' \subseteq X$, $|X| < \infty$, tal que $r(X') = r(X)$;

(h5) si $X \subseteq S$ y si para cada hiperplano $H \in \mathscr{H}$ se tiene $X \nsubseteq H$, se encontrará un subconjunto $X' \subseteq X$, $|X'| < \infty$, tal que para cada hiperplano $H \in \mathscr{H}$ tenemos $X' \subseteq H$.

Obtendremos una generalización de los conceptos de matroide y de geometría combinatoria sobre los conjuntos infinitos. Demuéstrese la equivalencia de los conceptos obtenidos en este caso.

8.82. Demuéstrese que el subconjunto $A \subseteq B$ de la geometría combinatoria G sobre el conjunto S puede ser representado como una unión de los ciclos cuando y sólo cuando para todos los conjuntos cerrados B el conjunto $A \setminus B$ no se compone de un solo punto.

§ 2. Construcciones y operaciones sobre los matroides

8.83. Sea $\mathscr{B}$ una familia de bases del matroide M sobre el conjunto S. Demuéstrese que $\mathscr{B}^* = \{S \setminus B \mid B \in \mathscr{B}\}$ es un conjunto de bases del matroide M^* sobre el conjunto S.

El matroide M^* del problema 8.83 se denomina *dual con relación* a M. Es fácil ver que M es el matroide dual con relación a M^*. Por eso diremos que M y M^* son *matroides duales*. La base del matroide M^* se llama *cobase* del matroide M. Análogamente, el ciclo del matroide M^* se llama *cociclo* del matroide M; el bucle de M^*, *cobucle* (istmo) en M; la función de rango de M^*, *función de corrango* en M, etc. La función de rango del matroide M^* se designará por r^*; la familia de sus bases, por $\mathscr{B}^*$, la familia de ciclos, por C^*, etc.

8.84. Sean M y M^* los matroides duales sobre el conjunto S. Demuéstrese que para todos los $A \subseteq S$ tiene lugar la relación

$$r^*(A) = |A| + r(S \setminus A) - r(S),$$

donde r y r^* son funciones de rango de los matroides M y M^*, respectivamente.

8.85. Muéstrese que un matroide dual con relación a una geometría combinatoria no es forzosamente geometría combinatoria.

8.86. ¿Podrá un conjunto ser a la vez un ciclo y un coátomo en el matroide M?

8.87. Sea M un matroide sobre el conjunto S con la función de rango r. Demuéstrese que $M^{**} = M$ y $r^*(S) = |S| - r(S)$.

8.88. Sean M y M^* los matroides duales sobre el conjunto S. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) si $A \subseteq S$ es un conjunto independiente del matroide M, entonces $S \setminus A$ contiene la cobase del matroide M;

b) si $A^* \subseteq B$ es un conjunto independiente del matroide M^*, entonces $S \setminus A^*$ contiene la base del matroide M;

c) cualquier base B del matroide M tiene una intersección no vacía con cada cociclo del matroide M;

d) cualquier cobase B^* del matroide M tiene una intersección no vacía con cada ciclo del matroide M;

e) para cualquier conjunto independiente A del matroide M existe un cociclo C^* tal que $| A \cap C^* | = 1$; además, si $| A | < r(S)$, entonces existe un cociclo C_1^* tal que $| A \cap C_1^* | = \varnothing$.

8.89. Sean M y M^* los matroides duales sobre el conjunto S y supongamos que A y A^* son unos subconjuntos del conjunto S tales que $A \cap A^* = \varnothing$, y A es independiente en M, mientras que A^* es independiente en M^*. Demuéstrese que existe una base B del matroide M tal que $A \subseteq B$ y $A^* \subseteq B^*$.

8.90. Sea M un matroide sobre el conjunto S. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) el subconjunto $B \subseteq S$ es la base del matroide M cuando y sólo cuando B es el subconjunto mínimo que tiene intersección no vacía con cada cociclo del matroide M;

b) el subconjunto $B^* \subseteq S$ es una cobase del matroide M cuando y sólo cuando dicho subconjunto es mínimo, que tiene una intersección no vacía con cada ciclo del matroide M;

c) el subconjunto $C \subseteq S$ es un ciclo del matroide M cuando y sólo cuando es un subconjunto mínimo, que tiene una intersección no vacía con cada base del matroide M^*;

d) un subconjunto $C^* \subseteq S$ es un cociclo del matroide M cuando y sólo cuando es un subconjunto mínimo, que tiene una intersección no vacía con cada base del matroide M.

8.91. Demuéstrese que si C^* es un cociclo del matroide M sobre el conjunto S, entonces el conjunto $(S \setminus C^*) \cup \{x\}$ contiene la base B del matroide M para cualquier $x \in C$.

8.92. Sean C y $\mathscr{C}^*$ las familias de ciclos y coátomos, respectivamente, del matroide M sobre el conjunto S. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) el subconjunto $X \subseteq S$ es un ciclo del matroide M cuando y sólo cuando es un subconjunto mínimo con $| X \cap C^* | \neq 1$ para cualquier cociclo $C^* \in \mathscr{C}^*$;

b) un subconjunto $X^* \in \mathscr{C}^*$ cuando y sólo cuando X^* es tal subconjunto mínimo que $| X^* \cap C | \neq 1$ para cada ciclo $C \in \mathscr{C}^*$.

8.93. Sea C un ciclo del matroide M y supongamos que x e y son elementos diferentes de S. Demuéstrese que existe un cociclo C^* que contiene x e y, pero no contiene ningún otro elemento de C.

8.94. Sea C un matroide sobre el conjunto S, y x, y, z, elementos diferentes de S. Demuéstrese que si existen los ciclos C_1, que contiene x e y, y C_2, que contiene y y z, existe también el ciclo C_3 que contiene x y z.

8.95. Muéstrese que un matroide, dual con relación al matroide transversal, no es forzosamente transversal.

8.96. Demuéstrese que para cualquier grafo G, su matroide de cortes $M^*(G)$ es dual con relación al matroide cíclico $M(G)$, es decir, que $M^*(G) = (M(G))^*$.

Recordemos que el grafo G^* es dual con relación al grafo G, si entre las aristas de los grafos G y G^* existe una correspondencia biunívoca que posee la propiedad de que un subconjunto de aristas de G forma un ciclo en G cuando y sólo cuando el correspondiente subconjunto de aristas de G^* forma un corte en G^*. Un grafo será planario cuando y sólo cuando posee un grafo dual.

8.97. Demuéstrese que si un grafo G^* es dual con relación a G, entonces el matroide cíclico $M(G^*)$ del grafo G^* es isomorfo al matroide $(M(G))^*$, dual con relación al matroide cíclico del grafo G.

8.98. Un matroide M sobre el conjunto S se denomina euleriano, si S puede representarse en forma de una unión de ciclos disjuntos. Un matroide se llama bipartido, si todo su ciclo contiene un número par de elementos. Demuéstrese que el matroide M es bipartido cuando y sólo cuando el matroide M^* es euleriano.

8.99. Sea $G(S)$ un geometría sobre el conjunto S con el operador de clausura $(^-)$. Demuéstrese que $\mathcal{J}_{[A,B]}(C) = \overline{(C \cup A \cap B)} \setminus A$ es un operador de clausura, pero sobre el conjunto $B \setminus A$, donde $A, B \subseteq S$.

8.100. Demuéstrese que el subconjunto $B \subseteq S$, provisto para todo $C \subseteq B$ de la relación $C \to \mathcal{J}(C)$, donde $\mathcal{J}(C) = \overline{C} \cap B$ ($^-$ significa en geometría un operador de clausura) forma la geometría $G(B)$, llamada *subgeometría* de la geometría $G(S)$.

8.101. Demuéstrese que un conjunto $S \setminus A$, provisto para todo $C \subseteq S \setminus A$ de la relación $C \to \mathcal{J}(C)$, donde $\mathcal{J}(C) = (\overline{C \cup A}) \setminus A$, forma una pregeometría que se denotará por G/A y se llamará *contracción* de la geometría $G(S)$.

Sea $\mathcal{J}$ una familia de todos los conjuntos independientes del matroide M sobre S, $B \subseteq S$. Designemos con $\mathcal{J}(M \mid B)$ un conjunto $\{X\colon X \subseteq B, X \in \mathcal{J}\}$, y con $\mathcal{J}(M.B)$, una familia de tales $X \subseteq B$, para los cuales existe un subconjunto independiente máximo Y de $S \setminus B$ en M tal que $X \cup Y \in \mathcal{J}$.

8.102. Demuéstrese que $\mathcal{J}(M \mid B)$ es una familia de conjuntos independientes de cierto matroide $M \mid B$ sobre el conjunto B, que se denomina *contracción* de M en B. (Compárese $M \mid B$ con el matroide $G(B)$ del problema 8.100).

8.103. Demuéstrese que $\mathcal{J}(M.B)$ es una familia de conjuntos independientes de cierto matroide $M.B$ sobre el conjunto B que se llama *contracción de M con ayuda de B*. Muéstrese que $M.B \equiv M/(S \setminus B)$, donde $M/(S \setminus B)$ es una contracción del matroide M sobre el conjunto S definida en el problema 8.101.

8.104. Sea $M \mid A$ un submatroide del matroide M y sean r, r_A las funciones de rango de los matroides M y $M \mid A$, respectivamente. Demuéstrese que para todo $B \subseteq A$,

a) B es independiente en $M \mid A \iff B$ independiente en M;

b) B, que es la base del submatroide $M \mid A \iff B$, es la base del conjunto A en M;

c) B, que es un ciclo en $M \mid A \iff B$, es un ciclo en M;

d) $r_A(B) = r(B)$.

8.105. Sea M/A una contracción del matroide M sobre el conjunto S y supongamos que r, $r_{S/A}$ son funciones de rango de los matroides M y M/A, respectivamente. Demuéstrese que para todo $X \subseteq S \setminus A$ son válidas las siguientes afirmaciones:

a) un conjunto X es independiente en M/A cuando y sólo cuando $X \cup Y$ es independiente en M para todos los subconjuntos independientes $Y \subseteq A$;

b) X es una base del matroide M/A cuando y sólo cuando $X \cup B$ es la base del matroide M para todas las bases B del conjunto A;

c) X es un ciclo en M/A cuando y sólo cuando $X = C \setminus A = \varnothing$, donde C es el ciclo del matroide M y X es el conjunto mínimo con tal propiedad;

d) $r_{S/A}(X) = r(X \cup A) - r(A)$.

8.106. Sea M un matroide sobre el conjunto S y supongamos que $B \subseteq A \subseteq S$. Demuéstrense las siguientes relaciones:

a) $(M \mid A) \mid B = M \mid B$;

b) $M.B = (M.A).B$;

c) $(M \mid A).B = (M.(S \setminus (A \setminus B))) \mid B$;

d) $(M.A) \mid B = (M \mid (S \setminus (A \setminus B))).B$.

8.107. Sea M un matroide sobre el conjunto S y $A \subseteq S$. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) $(M \mid A)^* = M^* \setminus (S \setminus A)$;

b) $(M \setminus A)^* = M^* \mid (S \setminus A)$.

8.108. Sea M un matroide sobre el conjunto S con el operador de clausura $^-$. Entonces el par $(S, \mathfrak{I}_{[A, B]})$ se denominará *menor del matroide* M. ¿Será matroide cualquier menor del matroide M? Arguméntese la respuesta.

Sea M un matroide sobre el conjunto S. Muy a menudo para mayor comodidad el submatroide $M \mid (S \setminus \{a\})$, donde $a \in S$, se denota por $M - a$ y suele decirse que se obtiene del matroide M por exclusión del elemento a. Análogamente, un submatroide $M \mid (S \setminus A)$, donde $A \subseteq S$, del matroide M se designa por $M - A$. En este caso resulta natural llamar menor del matroide a una sucesión arbitraria de contracciones y exclusiones.

8.109. Demuéstrese que si $\bar{r}$ es una función de rango del menor $(M / A) - B$ del matroide M sobre el conjunto S con la función de rango r, entonces para cada $\mathscr{D} \subseteq S \setminus (A \cup B)$ se verifica la relación

$$\bar{r}(\mathscr{D}) = r(\mathscr{D} \cup A) - r(A).$$

8.110. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) todo menor de un matroide gráfico es gráfico;

b) cada submatroide de un matroide transversal es transversal.

8.111. Sean $M_1 = (S_1, \mathcal{I}_1)$ y $M_2 = (S_2, \mathcal{I}_2)$ los matroides sobre los conjuntos S_1 y S_2, respectivamente, y $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. Pongamos $S = S_1 \cup S_2$ y $\mathcal{I} = \{A \cup B \mid A \in \mathcal{I}_1, B \in \mathcal{I}_2$. Demuéstrese que $M = (S, \mathcal{I})$ es un matroide.

El matroide citado en el problema 8.111 se denomina *suma directa de matroides* y se designa por $M_1 \oplus M_2$.

8.112. Sea $M_i = (S_i, \mathcal{I}_i)$ un matroide sobre el conjunto S_i con una familia de conjuntos independientes $\mathcal{I}_i$, donde $i = 1, 2$, y $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. Para cada $A \subseteq S = S_1 \cup S_2$ y $A_i \subseteq S_i$ $(i = 1, 2)$ demuéstrese la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

(1) $M = M_1 + M_2$;

(2) $r(A_1 \cup A_2) = r(A_1) + r(A_2)$;

(3) $r(M) = r(M_1) + r(M_2)$;

(4) $r(S) \geqslant r(S_1) + r(S_2)$;

(5) $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{I}$ cuando y sólo cuando $A_i \in \mathcal{I}_i$ para cada $i = 1, 2$;

(6) $A_1 \cup A_2$ es un conjunto engendrador del matroide M cuando y sólo cuando A_i es un conjunto engendrador del matroide M_i, donde $i = 1, 2$;

(7) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2$;

(8) $A_1 \cup A_2$ es un conjunto dependiente en M cuando y sólo cuando A_1 es un conjunto dependiente en M_1 ó A_2 es un conjunto dependiente en M_2;

(9) A es un hiperplano del matroide M cuando y sólo cuando $A = S_1 \cup A_2$ y A_2 es un hiperplano del matroide M_2, o bien $A = A_1 \cup S_2$ y A_1 es hiperplano del matroide M_1;

(10) $\overline{S_1 \cup A} = S_1 \cup \overline{A}$;

(11) $\overline{S_1 \cap A} = S_1 \cap \overline{A}$;

(12) $S_1 \cup K$ es cerrado para todos los conjuntos cerrados K de M;

(13) todos los hiperplanos del matroide M contienen o bien el conjunto S_1, o bien el complemento de éste;

(14) C es un ciclo del matroide M cuando y sólo cuando $C = A_1 \cup A_2$, con la particularidad de que o bien A_1 es un ciclo en M_1 y $A_2 = \varnothing$, o bien A_2 es un ciclo en M_2 y $A_1 = \varnothing$;

(15) si B es una base del matroide M, entonces $B \cap S_1$ será también una base, pero en el matroide M_1;

(16) si $B \cap S_1$ es una base del matroide M y $B \setminus S_1$, una base del matroide $M - S_1$, entonces B es la base del matroide M;

(17) si A_1 es un conjunto independiente en el matroide M_1 y A_2, un conjunto independiente en $M - S_1$, entonces $A_1 \cup A_2$ es un conjunto independiente en M;

(18) $r(M - S_1) = r(M/S_1)$;

(19) $M - S_1 = M/S_1$.

8.113. Sea $M = M_1 \oplus M_2$. Demuéstrese que para todos los $A_i \subseteq S_i$ $(i = 1, 2)$ son válidas las siguientes afirmaciones:

a) $(M_1 - A_1) \oplus (M_2 - A_2) = M_1/A_1 \oplus M_2/A_2$;
b) $M/(A_1 \cup A_2) = M_1/A_1 \oplus M_2/A_2$;
c) $M^* = M_1^* \oplus M_2^*$.

Si $M = M_1 \oplus M_2$, los matroides M_1 y M_2 llevan el nombre de *separadores* del matroide M. Un matroide privado de separadores se llama *conexo*.

8.114. Supongamos que M es un matroide sobre el conjunto S y $p \in S$. ¿Serán ciertas las afirmaciones que siguen:

a) p es un separador cuando y sólo cuando p es un bucle del matroide M;

b) un matroide conexo es o bien un bucle, o bien no tiene bucles.

8.115. Demuéstrese que $M = M_1 \oplus M_2$ cuando y sólo cuando el retículo $L(M)$ de superficies del matroide M es igual al producto directo de los retículos de las superficies de los matroides M_1 y M_2, es decir, $L(M) = L(M_1) \times L(M_2)$.

8.116. Supongamos que M es un matroide conexo sobre el conjunto S y $p \in S$. Demuéstrese que en este caso o $M - p$, o bien M/p es un matroide conexo.

8.117. Demuéstrese que si M' es el menor de un matroide conexo M, entonces existe una sucesión de matroides $M_1, M_2, \ldots, M_n, M_{n+1}$ tal que $M = M_1$, $M' = M_{n+1}$ y para cualquier i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $M_{i+1} = M_i - p_i$, o bien $M_{i+1} = M_i/p_i$.

8.118. Dese la definición de la suma directa $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} M_i$ de cualquier número finito de matroides M_i. Demuéstrese para $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} M_i$ las afirmaciones análogas a las citadas en los problemas 8.111 y 8.115.

8.119. Sea f una función semimodular monótona creciente de números enteros, definida sobre los subconjuntos de un conjunto finito S; $f(\varnothing) = 0$ y $\mathcal{I} = \{A \subseteq S \mid$ tales que para cada $B \subseteq A$ tiene lugar la desigualdad $|B| \leqslant f(B)\}$. Demuéstrese que $\mathcal{I}$ es una familia de conjuntos independientes de cierto matroide cuya función de rango $r(A)$ se calcula, para todos los $A \subseteq S$, según la fórmula

$$r(A) = \min_{B \subseteq A} \{f(B) + |A \setminus B|\}.$$

8.120. Sea $M_i = (S, r_i)$ un matroide sobre el conjunto finito S con la función de rango r_i y una familia de conjuntos independientes $\mathcal{I}_i$, donde $i = 1, 2, \ldots, n$. Demuéstrese que

$$\mathcal{I} = \{A \subseteq S \mid A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad \text{donde } A_i \in \mathcal{I}_i\}$$

es una familia de conjuntos independientes de cierto matroide cuya función de rango r se define por la relación siguiente:

$$r(A) = \min_{B \subseteq A} \{\sum_{i=1}^{n} r_i(B) + |A \setminus B|\}.$$

El matroide del problema 8.120 se llama unión (reunión) *de matroides* M_i y se designa por $\bigcup\limits_{i=1}^{n} M_i$.

8.121. Sea $M = \bigcup\limits_{i=1}^{n} M_i$, donde M_i es un matroide sobre el conjunto S con la función de rango r_i. Demuéstrese que para todos los $A \subseteq S$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) el conjunto A es independiente en M;

b) $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, donde A_i es un conjunto independiente del matroide M_i para cada i;

c) $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, donde $A_i \cap A_j = \varnothing$ para cualquier $i \neq j$ y A_i es un conjunto independiente del matroide M_i para cualesquiera i.

8.122. Sean $M_1 = (S, \mathcal{J}_1)$ y $M_2 = (S, \mathcal{J}_2)$ matroides sobre el conjunto S con las funciones de rango r_1 y r_2, respectivamente. Demuéstrese que el número máximo de elementos del conjunto $A_1 \cup A_2$ tal que $A_1 \in \mathcal{J}_1$ y $A_2 \in \mathcal{J}_2$ es igual a

$$\min_{A \subseteq S} \{r_1(A) + r_2(A) + |S \setminus A|\}.$$

8.123. Sean M_1 y M_2 los matroides sobre el conjunto S. Demuéstrese que la potencia máxima del conjunto independiente en ambos matroides es $\min\limits_{A \subseteq S} \{r_1(A) + r_2(S \setminus A)\}$.

8.124. Sean B_1 y B_2 las bases del matroide M, y $X_1 \cup Y_1$, una partición de la base B_1 en subconjuntos no vacíos disjuntos. Demuéstrese que existe tal partición $X_2 \cup Y_2$ de la base B_2 en la que $X_1 \cup Y_2$ y $X_2 \cup Y_1$ también son bases del matroide M.

8.125. Sean S y T las bases del matroide M y $S = \bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i$, una partición de la base S. Demuéstrese que existe una partición correspondiente de la base $T = \bigcup\limits_{i=1}^{k} T_i$ tal que $(S \setminus S_i) \cup T_i$ es la base del matroide M para cualquier $i = 1, 2, \ldots, k$.

Se llama *extensión unipuntual* del matroide M sobre el conjunto S mediante el punto $a \notin S$, tal matroide M' sobre el conjunto $S \cup \{a\}$ que $r(M') = r(M)$ y $M = M' - a$.

8.126. Demuéstrese que para cada matroide existe una extensión unipuntual.

Suele decirse que un par de superficies (A, B) es *modular*, si $\overline{C \cup A} \cap B = \overline{C \cup (A \cap B)}$ para todas las superficies $C \subseteq B$. En términos de la función de rango r un par de superficies (A, B) es modular cuando y sólo cuando $r(A \cup B) + r(A \cap B) = r(A) + r(B)$.

8.127. Sean A, B unas superficies de la geometría G tales que $A \cap B = \varnothing$. Demuéstrese que el par (A, B) es no modular cuando y sólo cuando existe un ciclo K tal que

$$K \subseteq (A \cup B) \setminus \bar{\varnothing}, \quad K \cap A = \varnothing, \quad K \cap B \neq \varnothing.$$

8.128. Sean A, B unas superficies de la geometría G. Demuéstrese que el par (A, B) es modular si y solo si el par $(A \setminus (A \varnothing B)$, $B \setminus (A \cap B))$ es modular en la contracción $G/A \cap B$.

Se denomina *filtro modular* $\mathcal{M}$ de la pregeometría $G(S)$ a una familia $\mathcal{M}$ de subconjuntos del conjunto S tal que

a) si $A \in \mathcal{M}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{M}$;

b) si $A, B \in \mathcal{M}$ y (A, B) es un par modular, entonces $A \cap B \in \mathcal{M}$.

8.129. Sea $G(S \cup \{p\})$ una pregeometría sobre el conjunto $S \cup \cup \{p\}$, $p \notin S$, con el operador de clausura $\mathcal{J}$ y la función de rango r. Demuéstrese que el conjunto $\mathcal{M} = \{A \subseteq S \colon p \in \mathcal{J}(A)\}$ forma un filtro modular de la subpregeometría $G(S)$.

8.130. Demuéstrese que si $\mathcal{M}$ es un filtro modular de la pregeometría $G(S)$, entonces existe una única extensión unipuntual $G(S \cup \{p\})$ tal que $\mathcal{M} = \{A \subseteq S \colon p \in \mathcal{J}_{S \cup \{p\}}(A)\}$.

8.131. Supongamos que $\mathcal{M}$ es un filtro modular de la pregeometría $G(S)$ y $G(S \cup \{p\})$, la extensión $G(S)$ construida con ayuda de $\mathcal{M}$.

Demuéstrese que de superficies en $G(S \cup \{p\})$ sirven todos los subconjuntos $S \cup \{p\}$ de los siguientes tipos:

a) $A \cup \{p\}$, si A es una superficie de la pregeometría $G(S)$ y $A \in \mathcal{M}$;

b) A, si A es una superficie de la pregeometría $G(S)$ y $A \notin \mathcal{M}$;

c) $A \cup \{p\}$, si A es una superficie de la pregeometría G y A no se dispone en $\mathcal{M}$ y no se cubre en $G(S)$ por ninguna superficie de $\mathcal{M}$.

8.132. Compruébese que las extensiones unipuntuales de la pregeometría $G(S)$, ordenadas según la inclusión de sus filtros modulares en $G(S)$, forman un retículo.

8.133. Sea M un matroide sobre el conjunto finito S y sea $\mathcal{J}$ una familia de sus conjuntos independientes; r es su función de rango y k, un número positivo entero tal que $k \leqslant r(S)$. Demuéstrese que la familia $\mathcal{J}_k = \{A \subseteq S \mid A \in \mathcal{J}$ y $|A| \leqslant k\}$ es una familia de conjuntos independientes de cierto matroide M_k sobre el conjunto S con la función de rango $r_k(A) = \min\{k, r(A)\}$.

El matroide M_k citado en el problema 8.133 recibe el nombre de *k-truncamiento del matroide* M. Observemos que el retículo de superficies M_k se obtiene del retículo $L(M)$ de superficies del matroide M al borrar todas las superficies de rango $\geqslant k$ y al sustituirlas por un nuevo elemento maximal del retículo.

8.134. Hállese el truncamiento de un matroide cíclico del grafo complete sobre cuatro vértices.

8.135. Dense los ejemplos de matroides gráficos no isomorfos cuyos truncamientos son isomorfos.

8.136. ¿Podrá ser no gráfico el truncamiento de un matroide gráfico? ¿Podrá ser gráfico el truncamiento de un matroide no gráfico? Dense ejemplos.

Si el matroide M sobre un conjunto S es isomorfo a $(r\,(H)-1)$-truncamiento del matroide H sobre el conjunto S, se dice que el matroide H es el *incremento del matroide* M. Sin perder la generalidad podemos considerar que el retículo de superficies del matroide H se obtiene a partir del retículo de superficies del matroide M incluyendo el nivel de nuevos coátomos, situado más arriba de los coátomos iniciales y por debajo del elemento unitario del retículo.

8.137. ¿Existe un incremento para todo matroide?

8.138. Sea M un matroide definido sobre el conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, de cuyas bases intervienen los subconjuntos de S que contienen tres elementos, a excepción del subconjunto $\{1, 2, 3\}$. ¿Existe un incremento de este matroide?

Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{F}$ dos anticadenas del booleano $\mathcal{P}\,(S)$. Diremos que la anticadena $\mathcal{H}$ es *menor* que la $\mathcal{F}$, si para todo $A \in \mathcal{H}$ existe un elemento $B \in \mathcal{F}$ tal que $A \subseteq B$. En el caso cuando tal elemento $B \in \mathcal{F}$ es único, se dice que $\mathcal{F}$ parte la anticadena $\mathcal{H}$.

8.139. Demuéstrese que los diferentes incrementos (o, con mayor precisión, las familias de coátomos en los retículos de superficies de los incrementos) del matroide M sobre el conjunto finito S, ordenados como anticadenas del booleano, forman el retículo completo $E\,(G)$, cuyo elemento minimal se denomina *incremento libre del matroide* M.

8.140. Demuéstrese que cada erección de la geometría G sobre el conjunto S parte la anticadena de todas las bases de la geometría G.

8.141. Demuéstrese que si el incremento libre de la geometría G sobre el conjunto finito S se conoce, todas los demás incrementos de esta geometría pueden obtenerse mediante la partición del incremento libre.

8.142. Demuéstrese que un matroide homogéneo $U_{3,7}$ tiene 171 diferentes incrementos.

8.143. ¿Podrá incrementarse el matroide de Vamos (véase el problema 8.21)?

8.144. Constrúyase un matroide de rango 3 que no tenga incrementos.

8.145. (?). La superficie A de un matroide M se denomina *esencial*, si $M \mid A$ tiene un incremento no trivial. Se puede mostrar que sólo las superficies esenciales junto con sus rangos definen unívocamente un matroide. Ofrézcase el método para identificar las superficies esenciales de un matroide.

Se llama *aplicación fuerte* de un retículo geométrico L_1 en el retículo geométrico L_2 la función $\sigma\colon L_1 \to L_2$ que satisface las condiciones siguientes:

a) $\sigma\,(x \vee y) = \sigma\,(x) \vee \sigma\,(y)$ para todos los $x,\ y \in L_1$;

b) si p es un átomo del retículo L_1, entonces $\sigma\,(p)$ es un átomo o cero del retículo L_2.

8.146. Dense ejemplos de las siguientes aplicaciones φ del retículo geométrico L_1 en el retículo geométrico L_2:

a) φ no es una aplicación fuerte;

b) φ es una aplicación fuerte;

c) φ es un homomorfismo (véase el problema 7.87) que no es una aplicación fuerte;

d) φ es una aplicación fuerte que no constituye un homomorfismo.

8.147. Sea L_1 un retículo geométrico de superficies de un matroide gráfico y supongamos que $\sigma: L_1 \to L_2$ es una aplicación fuerte. ¿Está obligada a ser $\sigma(L_1)$ un retículo de superficies de cierto matroide gráfico?

8.148. Sea σ una aplicación fuerte del retículo geométrico L_1 en el retículo geométrico L_2. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) si $x \prec y$ en L_1, entonces $\sigma(x) \eqslantless \sigma(y)$ en L_2;

b) $r_2(\sigma(x)) \leqslant r_1(x)$ para cualquier $x \in L_1$, donde r_1 y r_2 son funciones de rango de los retículos L_1 y L_2, respectivamente;

c) si $y \in L_2$, existe un $x \in L_1$ tal que $\sigma(x) = y$, y $r_2(y) = r_1(x)$, es decir, para cada elemento de imagen se encontrará una preimagen de rango igual.

8.149. Demuéstrese que la aplicación $\sigma: L_1 \to L_2$ es un isomorfismo cuando y sólo cuando σ es una aplicación fuerte «sobre» y $r(L_1) = r(L_2)$.

Sea M un matroide sobre el conjunto S. Unamos a cada matroide M un elemento nulo 0 que corresponde al conjunto vacío en el siguiente sentido: sea $0 \notin S$ y supongamos que M_0 es la suma directa $M \oplus \{0\}$ sobre el conjunto $S \cup 0$, donde $\{0\}$ es un matroide de rango 0 sobre el conjunto de un solo elemento $\{0\}$. Emplearemos un mismo símbolo 0 para denotar los elementos no nulos de cada uno de los matroides M_0.

Se denomina *aplicación fuerte* del matroide $M(S)$ en el matroide $N(T)$ a una función $\sigma: S \cup 0 \to T \cup 0$ tal que $\sigma(0) = 0$ y la preimagen de cualquier conjunto cerrado del matroide N_0 es también cerrada en M_0.

Sean $M(S)$ y $N(T)$ unos matroides sobre los conjuntos S y T, respectivamente; $L(M)$ y $L(N)$, retículos de superficies de los matroides M y N, respectivamente y $\sigma: S \cup 0 \to T \cup 0$. Emplearemos para denotar las superficies en el retículo y en el matroide una misma letra: minúscula en el primer caso y mayúscula, en el segundo, subrayando con ello que en el retículo la superficie es un elemento, y en el matroide, un subconjunto. Definamos la aplicación $\sigma^*: L(M) \to L(N)$ del modo siguiente: si $x \in L(M)$, entonces $\sigma^*(x) \in L(N)$ y le corresponde en el matroide N la superficie $\sigma(X)$.

8.150. Supongamos que $M(S)$ y $N(T)$ son matroides sobre los conjuntos S y T, respectivamente y que $\sigma: S \cup 0 \to T \cup 0$ es una función tal que $\sigma(0) = 0$. Demuéstrese la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) para todo subconjunto $A \subseteq S$ tenemos $\sigma(\overline{A}) \subseteq \overline{\sigma(A)}$;

b) σ es una aplicación fuerte de $M(S)$ en $N(T)$;

c) σ^* es una aplicación fuerte de $L(M)$ en $L(N)$.

8.151. Supongamos que $X \subseteq S$ y la aplicación σ: $S \cup 0 \to (S \setminus X) \cup 0$ está definida del modo siguiente:

$$\sigma(a) = \begin{cases} a, & \text{si} \quad a \in S \setminus X; \\ 0, & \text{si} \quad a \in X \cup 0. \end{cases}$$

Demuéstrese que σ induce la aplicación fuerte desde el matroide M sobre el conjunto S en su contracción M/X.

La aplicación fuerte σ; $M(S) \to M/X$ del problema 8.151 se llama *aplicación de contracción* (o, simplemente, *contracción*).

8.152. Supongamos que M es un matroide en el conjunto S, $T \subseteq S$ y $\sigma(a) = a$ para todo $a \in T \cup 0$. Compruébese que σ induce la aplicación fuerte del matroide M en un submatroide $M \mid T$, denominada encaje.

8.153. Supongamos que M es un matroide sobre el conjunto S de rango n y M_k, su k-truncamiento. Compruébese que una función idéntica sobre el conjunto $S \cup 0$ induce la aplicación fuerte del matroide M en M_k, llama $(n-k)$-truncamiento.

Los 1-truncamientos del matroide M de rango n en el matroide M_{n-1} se llamarán simplemente *truncamientos* del matroide M.

Sean M y N los matroides sobre un mismo conjunto S tales que $\sigma(a) = a$ induce para todo $a \in S \cup 0$ la aplicación fuerte de M en N. Entonces N se denomina *factor del matroide* M, y M, *elevador* (*lift*) *del matroide* N.

8.154. Sean M y N dos matroides sobre el conjunto S. Demuéstrese la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) N es un factor del matroide M;

b) si el conjunto X es cerrado en N, entonces X es también cerrado en M;

c) para cualquier subconjunto $A \subseteq S$ tenemos $\overline{A}^M \subseteq \overline{A}^N$;

d) M^* es un factor del matroide N^*;

e) cada ciclo del matroide M es una unión de ciclos del matroide N;

f) para cualquier par de subconjuntos A y B de S tales que $A \subseteq B$ tiene lugar la siguiente desigualdad:

$$r_M(B) - r_M(A) \geqslant r_N(B) - r_N(A).$$

Una aplicación fuerte del matroide $M(S)$ en el matroide $N(S)$ se llama *elemental*, si $r(M) = r(N) - 1$. En este caso N se denomina cociente[1]) (factor elemental) del matroide M, y M, elevador (*lift*) elemental del matroide N.

---

[1]) En inglés se denomina *quotient*.

8.155. Sean M y N los matroides sobre el conjunto S. Demuéstrese que una función idéntica sobre el conjunto $S \cup 0$ induce la aplicación fuerte del matroide M en el matroide N cuando y sólo cuando induce también una aplicación fuerte del matroide N^* en el matroide M^*, donde los matroides M^* y N^* son duales con relación a M y N, respectivamente.

8.156. Demuéstrese que M es un factor elemental del matroide N cuando y sólo cuando M^* es un elevador elemental del matroide N^*.

8.157. Demuéstrese que cada aplicación fuerte puede ser desarrollada en una sucesión de aplicaciones fuertes elementales.

8.158. Demuéstrese que H es un factor elemental del matroide G sobre el conjunto S cuando y sólo cuando existe el único matroide M sobre el conjunto $S \cup \{p\}$, donde p no es ni bucle ni istmo, tal que $G = M - p$, y $H = M/p$.

8.159. Sea H un factor elemental del matroide G sobre el conjunto S. Demuéstrese que $M = \{A \subseteq S \mid A$ es una superficie del matroide H y $r_G(A) - r_H(A) = 1\}$, un filtro modular del matroide.

8.160. Demuéstrese el *teorema de desarrollo*: cada aplicación fuerte puede ser representada como un encaje con una contracción consecutiva.

Se denomina *aplicación débil* τ del matroide $M(S)$ en el matroide $N(T)$ a la función τ: $S \cup 0 \to T \cup 0$ tal que $\tau(0) = 0$, y si un subconjunto $A \subseteq S$ es de tal índole que la aplicación τ/A es biunívoca en A y $\tau(A)$ es un conjunto independiente en el matroide N_0, entonces A es también un conjunto independiente en el matroide M. Dicho de otro modo, τ: $S \cup U \to T \cup 0$ es la aplicación débil de $M(S)$ en $N(T)$, si para cada $A \subseteq S$ se verifica la siguiente desigualdad: $r_{N_0}(\tau(A)) \leqslant r_M(A)$.

8.161. Demuéstrese que cada aplicación fuerte σ: $M(S) \to N(T)$ es débil.

8.162. Dése un ejemplo de aplicación débil que no sea fuerte.

8.163. Sean M y N los matroides sobre un mismo conjunto S. Demuéstrese la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) una función idéntica sobre $S \cup 0$ induce una aplicación débil de M en N;

b) cada conjunto independiente en N es también independiente en M;

c) cada conjunto dependiente en M es también dependiente en N;

d) cada ciclo del matroide M contiene un ciclo del matroide N;

e) para cada subconjunto A de S se verifica la siguiente desigualdad: $r_M(A) \geqslant r_N(A)$.

8.164. Sea $\mathfrak{M}$ una familia de todos los matroides sobre el conjunto S. Diremos que $M \geqslant N$, donde M y $N \in \mathfrak{M}$, si una función idéntica sobre $S \cup 0$ induce una aplicación débil de M en N. Compruébese que m con la relación binaria definida en ella es un conjunto parcialmente ordenado. Indíquense los elementos maximal y minimal en este conjunto parcialmente ordenado.

Una aplicación débil de M en N, donde M y $N \in \mathfrak{M}$, se llama *simple,* si $M \succ N$ en el conjunto parcialmente ordenado mencionado en el problema 8.164.

8.165. Supongamos que M y N son matroides sobre el conjunto S; $\mathcal{J}_1$ y $\mathcal{J}_2$, las familias de conjuntos independientes de M y de N, respectivamente, y que $\mathcal{J}_1 \supseteq \mathcal{J}_2$. Demuéstrese que una función idéntica sobre $S \cup 0$ induce una aplicación fuerte de M en N, la cual en el caso general no ha de ser forzosamente fuerte.

Una aplicación débil τ: $M(S) \to N(S)$, inducida por la función idéntica sobre el conjunto $S \cup 0$, se llamará *aplicación débil conservadora del rango,* siempre que $r(M) = r(N)$.

8.166. Demuéstrese que cada aplicación débil de $M(S)$ en $N(S)$ puede ser desarrollada unívocamente en un truncamiento seguido por una aplicación débil conservadora del rango.

8.167. Demuéstrese que si M y N son matroides sobre el conjunto S, $r(M) = r(N)$ y τ es una función idéntica sobre el conjunto $S \cup 0$, entonces τ: $M \to N$ será una aplicación débil conservadora del rango cuando y sólo cuando lo es también la aplicación τ: $M^* \to N^*$, donde M^* y N^* son matroides duales con relación a M y N, respectivamente.

8.168. Una aplicación débil τ del matroide $M(S)$ y $N(T)$ induce una función τ^* del retículo $L(M)$ de superficies del matroide M en el retículo $L(N)$ de superficies del matroide N, de la manera siguiente: si X es una superficie en $M(S)$, entonces $\tau^*(X) = \overline{\tau(X)}$. Dése un ejemplo de que a diferencia de las aplicaciones fuertes, para las débiles puede no verificarse la relación $(\theta \cdot \tau)^* = \theta^* \cdot \tau^*$.

8.169. Sea $M(S)$ un matroide sobre el conjunto S, $X \subseteq S$. Compruébese que la función τ: $S \cup 0 \to X \cup 0$, definida de la siguiente manera

$$\tau(a) = \begin{cases} 0, & \text{si } a \in S \setminus X \text{ ó } a = 0; \\ a, & \text{si } a \in X, \end{cases}$$

induce la aplicación débil τ del matroide $M(S)$ en su submatroide $M \mid X$, que se denomina *retracto.*

8.170. Supongamos que τ es un retracto del matroide $M(S)$ en su submatroide $M \mid X$, donde $X \subseteq S$ y X es un conjunto cerrado en M. Demuéstrese que para cualquier conjunto cerrado Y del matroide M tiene lugar una correlación: $\tau^*(Y) = Y \cap X$.

8.171. Sea $M(S)$ un matroide sobre S y $X \subseteq S$. Muéstrese que la suma directa $M/X \oplus M \mid X$ es una imagen del matroide M para cierta aplicación débil.

8.172. Muéstrese que las aplicaciones débiles conservadoras del rango conservan separadores.

8.173. Supongamos que una función idéntica sobre el conjunto $S \cup 0$ induce la aplicación débil conservadora del rango de $M(S)$ en $N(S)$ y K es el menor del matroide M definido sobre el subconjunto $E \subseteq S$. Demuéstrese que existe un menor L, definido sobre E, tal que la función idéntica sobre $E \cup 0$ induce una aplicación débil conservadora del rango de K en L.

8.174. Hállese un matroide que sea dual con relación al matroide de Fano (véase el problema 8.20).

§ 3. Coordinatización y representabilidad de los matroides

Un matroide sobre el conjunto S se llama *representable sobre el campo F*, si existen el espacio lineal V sobre el campo F y la aplicación $\varphi: S \to V$, para la cual $A \subseteq S$ es independiente en M cuando y sólo cuando $\varphi|_A$ es biunívoca y $\varphi(A)$ es un conjunto linealmente independiente de vectores en V. La aplicación φ se llama en este caso *coordinatización* del matroide M sobre el campo F.

Sea $GF(q)$ un campo finito de la característica q. Un matroide representable sobre el campo $GF(2)$ o $GF(3)$ se llama *binario* o *ternario*, respectivamente. Los matroides que pueden ser representables sobre cada campo se denominan *unimodulares* (o *regulares*).

8.175. Sea V un espacio lineal sobre el campo F, $U \subseteq V$. El número máximo de vectores linealmente independientes de U se llama *rango lineal* del conjunto U y se designa con el símbolo $\dim U$. Demuéstrese que el matroide M sobre el conjunto S con función de rango r es *representable sobre el campo F* cuando y sólo cuando existen el espacio lineal V sobre el campo F y la aplicación conservadora de rango $\varphi: S \to V$, es decir, tal aplicación φ que $\dim \varphi(A) = r(A)$ para cualquier $A \subseteq S$.

Supongamos que M es un matroide sobre el conjunto S y $L(M)$, su retículo de superficies. Se llama *geometría G asociada al matroide M* tal geometría combinatoria sobre el conjunto S_0 de átomos del retículo $L(M)$ que el retículo de sus superficies $L(G)$ es isomorfo a $L(M)$ (véanse los problemas 8.45 y 8.46).

8.176. Demuéstrese que un matroide M sobre el conjunto S puede ser representado sobre el campo F cuando y sólo cuando la geometría G asociada al matroide M es representable sobre el campo F.

La coordinatización φ de un matroide M sobre el campo F no es, hablando en general, una aplicación biunívoca. Por ejemplo, para $a, b \in S$ tenemos $\varphi(a) = 0$ cada vez que a es un bucle del matroide M, y $\varphi(a) = \varphi(b)$, siempre que $\{a, b\}$ es un ciclo del matroide M y a, b no son bucles. Al mismo tiempo, la coordinatización φ de las geometrías combinatorias es una aplicación biunívoca. En virtud del problema 8.176, podemos, al estudiar la representabilidad de los matroides, limitarnos a las geometrías, lo que se realizará en adelante. En el lenguaje geométrico la afirmación del problema 8.176 significa que la coordinatización de la geometría G es un encaje de G en la geometría proyectiva de dimensión $n - 1$ sobre el campo F para $n \geqslant 4$ (véase el problema 7.169). De aquí se desprende, en particular, que la configuración del tipo de Desargues y de Pappo (véase el capítulo V, § 3) son respresentables.

8.177. Sea Φ un matroide de Fano (véase el problema 8.20) sobre el conjunto $S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ (véase la fig. 8.4). Demuéstrese que Φ es representable sobre el campo GF (2)y no es representable sobre ningún otro campo cuya característica es distinta de 2.

8.178. Sea Φ_1 un matroide obtenido del matroide de Fano (problema 8.177) por sustitución de la recta $\{e, f, g\}$ por 3 rectas triviales $\{e, f\}, \{e, g\}$ y $\{f, g\}$ (véase la fig. 8.4). Demuéstrese que el

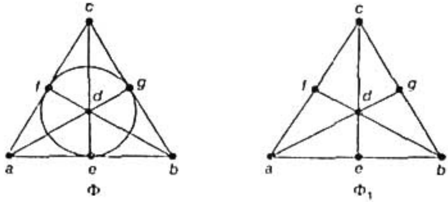


Fig. 8.4.

matroide Φ_1 es representable sobre todos los campos cuya característica es distinta de 2 y no es representable sobre el campo GF (2).

Los matroides representables sobre los conjuntos finitos pueden cómodamente describirse con ayuda de las matrices. Supongamos que M es un matroide en el conjunto finito S representable sobre el campo F, $|S| = n$, y φ: $S \to V$ es su coordinatización sobre F. Entonces, una $(k \times n)$-matriz A con coeficientes del campo F, de cuyas columnas sirven los vectores $\varphi(p)$, donde $p \in S$, lleva el nombre de *matriz de coordinatización del matroide M sobre el campo F*. Entonces, el matroide $M(S)$ será isomorfo al submatroide $M(A)$ del matroide vectorial del espacio lineal V (véase el problema 8.7), engendrado por las columnas de la matriz A y llamado *matroide matricial*. De este modo, los matroides representables sobre los conjuntos finitos y los matroides matriciales sobre el campo F abarcan una misma clase de matroides.

8.179. Supongamos que A es una $(k \times n)$-matriz arbitraria con los coeficientes del campo F, B, una matriz cuadrada regular de orden k y A', una matriz que se obtiene de A con ayuda de las siguientes operaciones:

1. supresión de la fila compuesta de ceros;
2. permutación de las filas o de las columnas;
3. multiplicación de una fila o columnas por λ, donde $\lambda \in F$, y $\lambda \neq 0 \in F$. Demuéstrese que los vectores columna de las matrices A, A' y BA definen los matroides matriciales isomorfos.

8.180. Sea M un matroide en el conjunto S representable sobre el campo F y sea $B = \{e_1, \ldots, e_k\}$ su base arbitraria. Demuéstrese que existe una aplicación conservadora de rango $\theta: S \to F^k$ tal que

$$\theta(e_i) = \begin{pmatrix} 0, & \ldots, & 0, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ & & & i & & & \end{pmatrix} \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, k.$$

8.181. Sea M un matroide en el conjunto S representable sobre el campo F, $|S| = n$ y sea $B = \{e_1, \ldots, e_k\}$ su base arbitraria. Demuéstrese que existe tal $(k \times n)$-matriz A con coeficientes del campo F, cuyas k primeras columnas forman una matriz unitaria, que toda aplicación que al elemento $e_i \in B$ le pone en correspondencia la i-ésima columna de la matriz A, conserva el rango, es decir, es una coordinatización del matroide M sobre el campo F.

Una matriz A del problema 8.181 se llama *matriz estándar de representación* del matroide M *sobre el campo F respecto de la base B*.

8.182. Demuéstrese que un matroide homogéneo $U_{2,4}$ puede ser representado sobre cualquier campo, salvo $GF(2)$.

8.183. Hállese el matroide minimal homogéneo que no sea representable sobre el campo $GF(3)$.

8.184. Demuéstrese que si M es un matroide sobre el conjunto S y $r(M) \leqslant 2$, entonces M es representable sobre cierto campo.

8.185. Demuéstrese que un matroide gráfico arbitrario es representable en cualquier campo, es decir, es unimodular (o regular).

8.186. Demuéstrese que si el matroide M es representable sobre el campo F, el matroide F^*, dual con relación a M, es también representable sobre F.

8.187. Sea M un matroide de rango k sobre el conjunto finito S, $|S| = n$. Demuéstrese que si (E_k, A) es una matriz estándar de representación del matroide M sobre el campo F, entonces $(-A^T, E_{n-k})$, es una matriz estándar de representación del matroide M^* sobre el campo F, donde E_k es una $(k \times k)$-matriz unitaria.

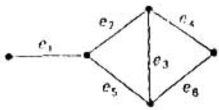


Fig. 8.5.

8.188. Sea M un matroide cíclico del grafo G representado en la fig. 8.5, y sea

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

¿Será A una matriz estándar de representación del matroide M sobre el campo $GF(2)$ respecto de cierta base B de M? Si es, hállese la matriz estándar de representación del matroide M^* sobre el campo $GF(2)$ respecto de la base $B^* = S \setminus B$.

8.189. Sea M un matroide sobre un conjunto finito S. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) si M es representable sobre el campo F, será representable sobre F cualquier menor del matroide M;

b) si $M = M_1 \oplus M_2$, entonces M es representable sobre el campo F cuando y sólo cuando M_1 y M_2 son representables sobre el campo F.

8.190. Dése un ejemplo de un matroide que no es representable sobre ningún campo.

8.191. Muéstrese que si M es un matroide representalle sobre el campo F, el k-truncamiento del matroide M no es forzosamente representable sobre F.

8.192. Demuéstrese que cualquier menor propio del matroide de Fano Φ es representable sobre cualquier campo.

8.193. Sea M (S) una geometría de rango 3 en 10 elementos cuya diagrama afín constituye la configuración de Desargues (véase la

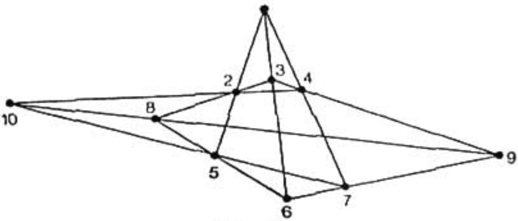


Fig. 8.6.

fig. 8.6). Hállese la matriz de representación del matroide M sobre el campo G $(F2)$. Demuéstrese que el matroide M (S) es isomorfo al matroide cíclico del grafo completo K_5 sobre 5 vértices.

8.194. Demuéstrese que los matroides de rango 3 que siguen más abajo no son representables sobre ningún campo F:

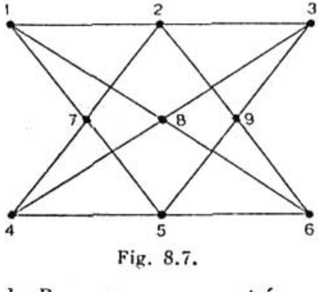


Fig. 8.7.

a) *matroide «no de Pappo»*: una geometría en 9 elementos cuyo diagrama afín está representado en la fig. 8.7 (si a la configuración en la fig. 8.7 le añadimos una recta $\{7, 8, 9\}$, obtendremos la configuración de Pappo [1]);

b) *matroide «no desargueano»*: una geometría en 10 elementos cuyo diagrama afín está representado en la fig. 8.8 y se obtiene a partir de la configuración de Desargues sustituyendo la recta 3-puntual $\{10, 8, 9\}$ por tres rectas 2-puntuales $\{10, 8\}$; $\{10, 9\}$ y $\{8, 9\}$.

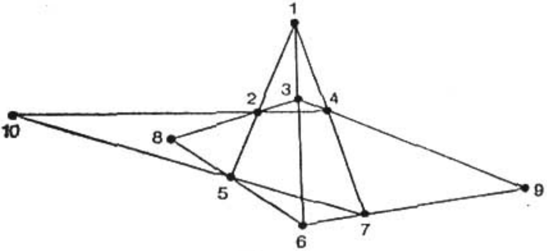


Fig. 8.8

8.195. Demuéstrese que el matroide de Vamos (véase el problema 8.21) no es representable sobre ningún campo F.

8.196. Sea $n = pk + 1$, donde p es un número primo y k, un número natural arbitrario. Véamos un matroide M_p, cuya matriz de representación sobre el campo $GF(p)$ tiene la forma siguiente

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & & 0 & & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\underbrace{\qquad\quad}_{pk}\quad\underbrace{\qquad\quad}_{pk}$$

Demuéstrese que el matroide M_p es representable sólo sobre los campos de característica p.

El matroide M_p del problema 8.196 lleva el nombre *matroide de Lazarson*.

8.197. Constrúyase un matroide representable sobre el campo F cuando y sólo cuando la característica de este campo es igual a 1103 ó 2089.

8.198. Sea (E_k, A) una matriz estándar de representación del matroide M de rango k respecto de la base B sobre el campo F.

Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) la i-ésima columna de la matriz (E_k, A) corresponde al bucle del matroide M cuando y sólo cuando consta sólo de ceros;

b) la i-ésima columna de la matriz (E_k, A) corresponde al istmo del matroide M cuando y sólo cuando $i = \{1, 2, \ldots, k\}$ y la i-ésima fila de la matriz (E_k, A) tiene valores no nulos sólo en la i-ésima columna;

c) una matriz que se obtiene por supresión en (E_k, A) de la columna que corresponde al elemento p, es una matriz de representación del matroide M-p sobre el campo F;

d) si p no es un bucle del matroide M, entonces la matriz de representación del matroide M/p sobre el campo F se obtiene a partir de (E_k, A) del modo siguiente: la matriz (E_k, A) se reduce, con ayuda de transformaciones especiales (véase el problema 8.179), a una matriz que en la columna correspondiente al elemento p tiene sólo una coordenada distinta de cero, y luego en la matriz obtenida tachamos la columna y la fila que corresponden a este elemento no nulo;

e) las columnas de la matriz (E_k, A) que tienen 0 en la i-ésima columna forman un hiperplano H del matroide M;

f) cualquier cociclo del matroide M puede ser representado como un conjunto de todos los vectores columna con 1 en la primera fila de la matriz de representación del matroide M sobre el campo F, siendo adecuada su selección.

8.199. ¿Serán binarios todos los matroides representados en la fig. 8.9? ¿Existe un matroide binario M de rango 2 ó 3 que no sea isomorfo a ninguno de los matroides representados en fig. 8.9?

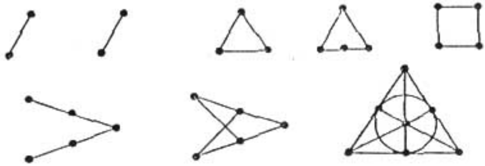


Fig. 8.9.

8.200. Hállense los valores de k y n, para los cuales un matroide homogéneo $U_{k,n}$ es binario.

8.201. Sea M un matroide sobre el conjunto finito S. Demuéstrese la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) M es un matroide binario;

b) para cualquier ciclo C y todo cociclo C^* del matroide M, sus intersecciones tienen un número par de elementos, es decir, $|C \cap C^*|$ es par;

c) si C_1 y C_2 son ciclos diferentes del matroide M, la diferencia simétrica $C_1 \Delta C_2$ contiene cierto ciclo C;

d) para todas las bases B y un ciclo arbitrario C del matroide M, si $C \setminus B = \{e_1, \ldots, e_q\}$ y $C(e_i)$ es un ciclo fundamental formado por el elemento e_i, respecto de la base B (véase el problema 8.27), entonces

$$C = C(e_1)\Delta \ldots \Delta C(e_q);$$

e) la diferencia simétrica de cualquier familia de diferentes ciclos del matroide M es una unión de ciclos disjuntos de M;

f) para cualesquiera k ciclos $C_1, \ldots, C_k$ del matroide M el conjunto $C_1 \Delta C_2 \Delta \ldots \Delta C_k$ es o bien vacío o bien contiene cierto ciclo C del matroide M;

g) para cualesquiera dos bases B_1 y B_2 del matroide M y para $y \in B_2$ arbitrario existe un número impar de elementos $x \in B_1$ tales que $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ y $(B_2 \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ son las bases del matroide M;

h) para cualesquiera dos ciclos diferentes C_1 y C_2 del matroide M y para $a, b \in C_1 \cap C_2$ existe un ciclo C_3 tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \setminus \{a, b\}$;

i) si C_1 y C_2 son ciclos diferentes arbitrarios del matroide M $(C_1 \cap C_2) \neq \varnothing)$ que forman un par modular de conjuntos en M, entonces la diferencia simétrica $C_1 \Delta C_2$ será un ciclo de M;

j) para cualquier ciclo C y todo cociclo C^* del matroide M la potencia de sus intersecciones $C \cap C^*$ no es igual a 3.

8.202. Sea M un matroide sobre el conjunto finito S, C una familia de sus ciclos y $C_1, C_2, C_3 \in \mathscr{C}$. Diremos que el ciclo C_1 *diferencia* los ciclos C_2 y C_3, si $C_2 \setminus C_1 \neq C_3 \setminus C_1$. Demuéstrese que el matroide M es binario cuando y sólo cuando entre cualesquiera tres ciclos $C_1, C_2, C_3 \in \mathscr{C}$ tales que $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \neq \varnothing$, existe por lo menos uno que diferencia los otros dos.

8.203. Demuéstrese el teorema de *Tutte*: un matroide M es binario cuando y sólo cuando ninguno de sus menores es isomorfo al matroide homogéneo $U_{2,4}$.

8.204. Demuéstrese que si una aplicación idéntica en el conjunto $S \cup 0$ induce una aplicación débil conservadora del rango del matroide binario M en el matroide N, entonces N es también un matroide binario.

8.205. Supongamos que M es un matroide binario arbitrario y que una función idéntica induce una aplicación débil conservadora de rango de M en el matroide N. Demuéstrese que si K es un menor conexo del matroide N, entonces K es también un menor conexo del matroide M.

8.206. Muéstrese que si H es una familia de matroides binarios cerrados respecto de la elección de menores y sumas directas, entonces H es también cerrada respecto de las imágenes de las aplicaciones débiles conservadoras de rango.

8.207. Supongamos que M es un matroide binario sobre el conjunto S y la función idéntica en el conjunto $S \cup 0$ induce la simple aplicación débil conservadora de rango de M en el matroide N. Demuéstrese que existe un subconjunto X del conjunto S tal que

$$N = M/X \oplus M \mid X.$$

8.208. Sea M un matroide binario conexo sobre el conjunto S. Demuéstrese que existe una correspondencia biunívoca entre las simples aplicaciones débiles conservadoras del rango de M en N y los subconjuntos $X \subseteq S$ tales que los matroides M/X y $M \mid X$ son conexos.

8.209. Sea $n(M)$ un número de componentes conexos del matroide M. Demuéstrese que si M es un matroide binario, entonces la aplicación débil conservadora del rango de M en N es simple, cuando y sólo cuando $n(N) = n(M) + 1$.

8.210. Sea M un matroide binario. Demuéstrese que una aplicación débil conservadora del rango de M en N puede desarrollarse en $n(N) - n(M)$ aplicaciones débiles simples no triviales y cada aplicación de este género contiene exactamente $n(N) - n(M)$ aplicaciones débiles simples.

8.211. Demuéstrese que un matroide homogéneo $U_{2,5}$ y un matroide dual con relación al primero no son ternarios.

8.212. ¿Será ternario el matroide $U_{2,4}$? Si es ternario, indíquese la matriz de su representación sobre el campo $GF(3)$.

8.213. Demuéstrese que un matroide M es ternario cuando y sólo cuando no contiene menores isomorfos al matroide homogéneo $U_{2,5}$ y al de Fano Φ, como también a los duales con relación a estos últimos.

Supongamos que M es un matroide binario sobre el conjunto finito $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathscr{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$, una familia de todos los ciclos y $\mathscr{C}^* = \{K_1, \ldots, K_m\}$, una familia correspondiente de todos los cociclos del matroide M. Se llama matriz de los ciclos $C(M) = (a_{ij})$ del matroide M una $(k \times n)$-matriz tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } e_j \in C_i; \\ 0, & \text{en el caso contrario} \end{cases}$$

y se llama matriz de los cociclos $C^*(M) = (b_{ij})$ una $(m \times n)$-matriz tal que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } e_j \in K_i; \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

Es evidente que para una numeración adecuada $C^*(M) = C(M^*)$, donde M^* es el matroide dual con relación al matroide M.

El matroide M se llama *orientable*, si para las unidades en las matrices $C(M)$ y $C^*(M)$ existe tal variante de asignar los signos $\pm$, que

$$\widetilde{C}(M)\,[\widetilde{C}^*(M)]^T = 0,$$

donde $\widetilde{C}(M)$ y $\widetilde{C}^*(M)$ son matrices de los ciclos y cociclos, respectivamente, tras la asignación de los signos.

8.214. Compruébese la validez de las siguientes afirmaciones:

a) todo matroide gráfico es orientable;

b) un matroide M es orientable cuando y sólo cuando M^* es orientable;

c) todo menor de un matroide orientable es orientable;

d) una suma directa de matroides orientables es orientable.

8.215. Dénse ejemplos de un matroide binario no orientable y de un matroide orientable que no sea: a) gráfico; b) cográfico; c) ni cográfico ni gráfico.

Sea φ una coordinatización del matroide M de rango n en el conjunto finito S sobre el campo F. Si los vectores en un espacio lineal V de dimensión n sobre el campo F, están representados en forma de vectores columna de la matriz estándar A de representación del matroide M sobre el campo F respecto de la base B, entonces para cualesquiera $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ denotemos por $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ el determinante de una submatriz $(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n))$ de la matriz A. Los determinantes de este tipo se llaman *paréntesis de la coordinatización* φ y se designan por $[X]$, donde X es la sucesión $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

8.216. Sea M un matroide de rango n sobre el conjunto finito S. Para cada sucesión $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde $x_i \in S$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, n$, pongamos en correspondencia un elemento $[X] = [x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n]$ (*sicigia*) del campo F. Demuéstrese que la condición necesaria y suficiente para que exista la coordinatización φ del matroide M sobre el campo F, tal que sus paréntesis sean exactamente iguales a las sicigias $[X]$, consiste en que se cumplan para las sicigias las siguientes relaciones:

a) $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = 0$ cuando y sólo cuando el conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es o bien independiente en M, o bien contiene menos de n diferentes elementos;

b) $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = sgn\ \sigma\, [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}]$ para todas las permutaciones σ de los elementos $\{1, 2, \ldots, n\}$ y para cualesquiera $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$, donde $sgn\ \sigma$ es el signo de la permutación σ;

c) $[x_1, x_2, \ldots, x_n]\, [y_1, y_2, \ldots, y_n] - \sum\limits_{i=1}^{n} [y_i, x_2, \ldots, x_n] \times$ $\times [y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, x_1, y_{i+1}, \ldots, y_n] = 0$ para cualesquiera $x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_n \in S$.

8.217. Sean $R_1 = (E_n, A_1)$ y $R_2 = (E_n, A_2)$ dos matrices estándar de representación del matroide M sobre los campos F_1 y F_2, respectivamente. La aplicación φ que transforma cada columna de la matriz R_1 en la correspondiente columna de la matriz R_2 es un isomorfismo de los matroides matriciales $M(R_1)$ y $M(R_2)$ cuando y sólo cuando el determinante sobre el campo F_1 de una submatriz cuadrada arbitraria N_1 de la matriz A_1 es nulo, si y sólo si el determinante sobre el campo F_2 de la submatriz correspondiente N_2 de la matriz A_2 es igual a cero. En particular, si los matroides $M(R_2)$ y $M(R_1)$ son isomorfos, en las matrices A_1 y A_2 las posiciones de los elementos nulos coinciden.

8.218. Sea A una matriz estándar de representación del matroide M_1 sobre el campo $GF(2)$, y sea B una matriz estándar de representación del matroide M_2 sobre el campo de números racionales.

¿Será cierto que los matroides M_1 y M_2 son isomorfos, si

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&1&1&0&0&1\\0&1&0&0&0&1&1&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&1&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\0&0&0&0&1&1&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

y

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&-1&1&0&0&1\\0&1&0&0&0&1&-1&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&1&1&0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

El matroide M_1 se designará en adelante por R_{10}. Demuéstrese que $R_{10}^* = R_{10}$. Compruébese que todos los menores del matroide R_{10} son o bien gráficos o bien matroides cográficos.

Sea A una $(k \times n)$-matriz con coeficientes enteros y $k < n$. La matriz A se llama *totalmente unimodular*, si el determinante de cada su $(m \times m)$-submatriz es igual a cero o a ± 1 para cualquier m, donde $m = 1, 2, \ldots, k$. Diremos que A es una *matriz localmente unimodular*, si el determinante de cada su $(k \times k)$-submatriz es igual a 0 ó a ± 1.

8.219. Demuéstrese la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) A es una matriz totalmente unimodular;

b) para cada vector x con los componentes 0, ± 1 existe un vector y con componentes 0, ± 1 tal que

$$y = x \,(\text{mód } 2),$$

$$a_i \cdot y = \begin{cases} 0, & \text{si } a_i \cdot x = 0 \,(\text{mód } 2);\\ \pm 1, & \text{si } a_i \cdot x = 1 \,(\text{mód } 2),\end{cases}$$

para todas las filas de la matriz A;

c) cualquier menor de la matriz A es igual o bien a cero, o bien a un número impar.

8.220. Sea A una matriz arbitraria con coeficientes iguales a 0 y a ± 1. Demuéstrese que A es una matriz totalmente unimodular cuando y sólo cuando para cualquier submatriz cuadrada A' de la matriz A indicada con las filas $\mathcal{I}$ y columnas J y tal que para todo $i \in \mathcal{I}$ y $j \in J$ tenemos

$$\sum_{j' \in J} a_{ij'} = \sum_{i' \in \mathcal{I}} a_{i'j} = 0 \,(\text{mód } 2)$$

tiene lugar la igualdad

$$\sum_{i\in\mathcal{J},\ j\in J} a_{ij}=0\ (\text{mód}\ 4).$$

8.221. Demuéstrese que una matriz de incidencias de cualquier grafo orientado es totalmente unimodular.

8.222. Demuéstrese que una matriz de incidencias del grafo no orientado G es totalmente unimodular cuando y sólo cuando G es un grafo bipartido.

8.223. Sea M un matroide sobre el conjunto finito S. Demuéstrese la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) el matroide M posee una matriz totalmente unimodular de representación sobre el campo de números racionales;

b) el matroide M tiene una matriz localmente unimodular de representación sobre el campo de números racionales;

c) a los paréntesis para el matroide M se les pueden asignar los valores 0 ó ± 1 del campo de números racionales de un modo tal que se cumplan las relaciones (a) — (c) para las sicigias (problema 8.216);

d) el matroide M es representable sobre cada campo F;

e) el matroide M es binario y ternario;

f) el matroide binario M puede ser representado sobre cierto campo F, cuya característica no es igual a 2.

8.224. Sea M un matroide unimodular de rango n sobre el conjunto finito S, y sea A una matriz localmente unimodular de representación del matroide M. Demuéstrese que el número de bases diferentes del matroide M es igual al determinante de la matriz $A\cdot A^T$ sobre el campo de números racionales. Hállese el número de bases del matroide representado en la fig. 8.10.

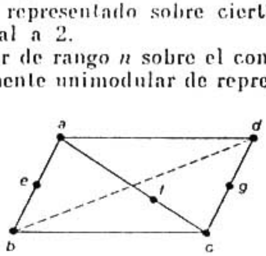


Fig. 8.10.

8.225. Demuéstrese que un matroide M es unimodular cuando y sólo cuando M es un matroide binario que no contiene menores isomorfos al matroide de Fano Φ y al matroide dual Φ^*.

8.226. Demuéstrese que un matroide M sobre el conjunto finito S es unimodular cuando y sólo cuando es orientable.

8.227. Compruébese que la exclusión de un elemento del matroide R_{10} lleva a la formación de un matroide cíclico del grafo bipartido completo $K_{3,3}$. Demuéstrese que el matroide R_{10} es unimodular.

8.228. Supongamos que M es un matroide unimodular sobre el conjunto S, $a\in S$, y el matroide $M-a$, un isomorfo al matroide R_{10}. Demuéstrese que a es un bucle, un istmo, o un elemento paralelo.

Sean M_1 y M_2 los matroides binarios sobre los conjuntos no vacíos S_1 y S_2, respectivamente, con la particularidad de que los conjuntos S_1 y S_2 pueden intersecarse. Definamos un nuevo matroide binario $M_1 \Delta M_2$ sobre el conjunto $S_1 \Delta S_2 = (S_1 \setminus S_2) \cup (S_2 \setminus S_1)$, de cuyos ciclos servirán todos los subconjuntos $S_1 \Delta S_2$ del tipo $C_1 \Delta C_2$, donde C_i es un ciclo del matroide M_i, y $i = 1, 2$. El matroide $M_1 \Delta M_2$ se llamará:

1) 1-*suma* de los matroides M_1 y M_2, si $S_1 \cap S_2 = \varnothing$;

b) 2-*suma* de los matroides M_1 y M_2, si $|S_1| \geqslant 3$, $|S_2| \geqslant 3$ y $S_1 \cap S_2 = x$, donde x no es un bucle ni tampoco un istmo de los matroides M_1 y M_2;

c) 3-*suma* de los matroides M_1 y M_2, si $|S_1| \geqslant 7$, $|S_2| \geqslant 7$, $S_1 \cap S_2 = X$, donde $|X| = 3$ y X es un ciclo para cada uno de los matroides M_1 y M_2, en el cual no se contiene ningún cociclo ni de M_1 ni de M_2.

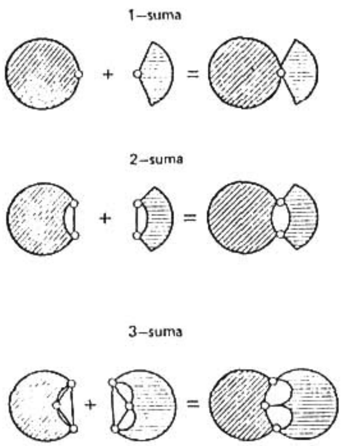


Fig. 8.11.

Observemos que la 1-suma de matroides M_1 y M_2 es simplemente *la suma directa de estos* matroides. La 2-suma representa un pegado de los matroides M_1 y M_2 a lo largo de su elemento común x (con la exclusión ulterior de éste), para el cual el rango del matroide $M_1 \Delta M_2$ es máximo e igual a $r(M_1) + r(M_2) - 1$. Análogamente, la 3-suma es la pegadura de los matroides M_1 y M_2 en una recta común, para la cual el rango del matroide $M_1 \Delta M_2$ es *máximo e igual a* $r(M_1) + r(M_2) - 2$. Las operaciones en consideración están ilustradas para los matroides gráficos en la fig. 8.11.

8.229. Demuéstrese que un matroide M sobre el conjunto S con función de rango r es representable como una 2-suma de dos matroides cuando y sólo cuando existe una partición (X_1, X_2) del conjunto S tal que $|X_1| \geqslant 2$, $|X_2| \geqslant 2$, y $r(X_1) + r(X_2) \leqslant r(S) + 1$.

8.230. Demuéstrese que las 1, 2 y 3-sumas de matroides unimodulares son unimodulares.

8.231. Demuéstrese que todo matroide unimodular puede ser obtenido por medio de las 1, 2 y 3-sumas de ciertos matroides gráficos y cográficos y, además, del matroide R_{10}.

8.232. Demuéstrense los siguientes resultados de Tutte:

a) un matroide M es gráfico cuando y sólo cuando no contiene menores isomorfos al matroide homogéneo $U_{2,4}$, a los matroides de los cortes de los grafos completos K_5 y $K_{3,3}$ y al matroide de Fano Φ o al de Φ^*, dual respecto de Φ;

b) un matroide M es cográfico cuando y sólo cuando no contiene menores isomorfos al matroide homogéneo $U_{2,4}$, a los matroides cíclicos de los grafos completos K_5 y $K_{3,3}$, y al matroide de Fano Φ o al de Φ^*, dual respecto de Φ.

8.233. Supongamos que el conjunto $P = \{0, 2, 3, 5, 7, \ldots\}$ se compone de 0 y de todos los números primos. Un subconjunto K del conjunto P se llama *conjunto característico* del matroide M, si M es representable sobre el campo F cuando y sólo cuando la característica del campo es un elemento de K. Dense ejemplos de matroides con las siguientes características del conjunto: a) $K = P$; b) $K = \varnothing$; c) $|K| = 1$; d) $K = P \setminus \{2\}$.

8.234. Supongamos que a todo punto en el interior del rectángulo F corresponde cierto matroide. ¿Será correcta la manera de expresar las relaciones entre las diferentes clases de matroides del diagrama

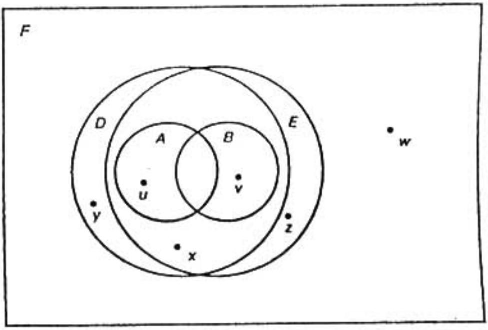


Fig. 8.12.

en fig. 8.12, si a los puntos interiores de los círculos A y B de menor radio se les ponen en correspondencia los elementos de la familia de todos los matroides gráficos y de la familia de todos los matroides cográficos, respectivamente, y a los puntos interiores de los círculos D y E de mayor radio, los elementos del conjunto de todos los matroides binarios y del conjunto de todos los matroides ternarios, respectivamente? Sean $C = D \cap E$ y $G = A \cap B$. ¿Es cierto que C es una familia de todos los matroides unimodulares y G, una familia de los matroides cíclicos de todos los grafos planarios? Indíquese por lo menos un matroide para cada punto x, y, z, u, v y w del diagrama.

8.235. Demuéstrese que la suma directa de matroides M_1 y M_2 es gráfica (cográfica, respectivamente) cuando y sólo cuando M_1 y M_2 son matroides gráficos (cográficos, respectivamente).

8.236. Supongamos que M es un matroide transversal de rango k sobre el conjunto S con la representación $\mathcal{T} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, mientras que $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ es un subconjunto arbitrario del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ de potencia k tal que una subfamilia $\mathcal{F}' = \{A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}\}$ de la familia $\mathcal{F}$ posee una transversal. Demuéstrese que $\mathcal{F}'$ es también la representación del matroide M.

8.237. Sea M un matroide transversal sobre el conjunto S con la representación $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Demuéstrese que $S \setminus A_i$ es una superficie del matroide M para todo i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

8.238. Sea $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ una representación del matroide transversal M de rango k sobre el conjunto S. Demuéstrese que existen diferentes cociclos $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_k$ tales que $\mathcal{D}_i \subseteq A_i$, donde $i = 1, 2, \ldots, k$, y $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_k\}$ es también una representación del matroide M.

Diremos que la representación $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ de un matroide transversal M de rango k sobre el conjunto S es máxima, si para cualquier representación $\{A_1', A_2', \ldots, A_k'\}$ del matroide M, tal que $A_i \subseteq A_i'$ para cada i, se verifican las igualdades $A_i = A_i'$ para todos los i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

8.239. Supongamos que M es un matroide transversal de rango k con la representación máxima $\{M_1, M_2, \ldots, M_k\}$, y $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$, una familia de conjuntos tal que $A_i \subseteq M_i$ para cada i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Demuéstrese que $\mathcal{F}$ es la representación del matroide M cuando y sólo cuando

$$r\Big(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} (S \setminus A_i)\Big) \leqslant k - |\mathcal{I}| \quad \text{para todos los } \mathcal{I} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}.$$

8.240. Sea M un matroide de rango k sobre el conjunto S. Demuéstrese que M es un matroide transversal cuando y sólo cuando existe tal familia de hiperplanos $\{H_1, \ldots, H_k\}$ que

a) $r\big(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} H_i\big) \leqslant k - |\mathcal{I}|$ para cada $\mathcal{I} \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$;

b) para cada ciclo C existe tal subconjunto $\mathcal{I} \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ que satisface la condición $|\mathcal{I}| = |C - 1|$, que

$$C \subseteq \bigcap_{i \in \mathcal{I}} H_i.$$

8.241. Sea M un matroide transversal de rango k con la representación máxima $\{M_1, \ldots, M_k\}$. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) si $\{A_1, \ldots, A_k\}$ es tal representación del matroide M que $A_i \subseteq M_i$ y $r(S \setminus A_i) = m_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces para cualquier i, $i = 1, 2, \ldots, k$, $|A_i|$ *es la potencia máxima entre* todos los subconjuntos del conjunto M_i cuyo rango de los complementos es igual a m_i;

b) si C es un cociclo de potencia máxima perteneciente al conjunto M_1, entonces $\{C, M_2, \ldots, M_k\}$ no es obligatoriamente una representación del matroide M;

c) si C_1 es un cociclo de potencia máxima de M_1, entonces $\{C_1, M_2, \ldots, M_k\}$ será la representación del matroide M cuando y sólo cuando la familia $\{M_2 \setminus C_1, \ldots, M_k \setminus C_1\}$ cuenta con una transversal.

8.242. Demuéstrese que el matroide M es transversal cuando y sólo cuando puede ser representado como una unión de matroides de rango 1.

Supongamos que G es un grafo orientado con un conjunto de vértices V y un conjunto de arcos E, y que A, B son subconjuntos arbitrarios de los vértices del grafo G. Diremos que A *está acoplado con* B en el grafo G, si para cierta biyección $\varphi: A \to B$ existe una familia de $\{P_x \mid x \in A\}$ caminos, que no se intersecan por los vértices, tales que el camino P_x tiene por origen el vértice x y termina en el vértice $\varphi(x)$ para todo $x \in A$.

8.243. Supongamos que G es un grafo orientado con un conjunto de vértices V, $B \subseteq V$, y $\mathcal{J}(G; B)$ es una familia de todos los subconjuntos A del conjunto V que están acoplados con B en el grafo G. Demuéstrese que $\mathcal{J}(G; B)$ es una familia de conjuntos independientes de cierto matroide $M(G; B)$ sobre el conjunto V. Compruébese que el matroide M sobre el conjunto S es dual con relación a cierto matroide transversal cuando y sólo cuando existe un grafo orientado G con un conjunto de vértices S y un subconjunto $B \subseteq S$ tal que $M = M(G; B)$.

El matroide $M(G, B)$ del problema 8.243, donde G es un grafo orientado sobre el conjunto de vértices V y $B \subseteq V$, se denomina *hammoide rígido*, y el matroide $M(G; B) \mid X$, donde $X \subseteq V$, simplemente *hammoide*. Sea G un grafo bipartido con los conjuntos de vértices V_1 y V_2 en cada capa. Orientemos todas las aristas del grafo G en dirección de los vértices de V_1 a los vértices de V_2. En este caso el hammoide $M(G; V_1) \mid V_2$ será un matroide transversal sobre el conjunto V_2 que coincide con el matroide de combinaciones de pares del grafo bipartido G sobre el conjunto V_2 (véase el problema 8.79).

8.244. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) Un matroide es hammoide cuando y sólo cuando su contracción es un matroide transversal;

b) la clase de hammoides está cerrada respecto de la toma de los menores y del paso a los matroides duales;

c) la unión de hammoides es un hammoide.

Un matroide M sobre el conjunto S se llama *ordenado por bases*, si para cualesquiera dos bases B_1 y B_2 de él existe una aplicación biunívoca $\varphi: B_1 \to B_2$ tal que $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{\varphi(x)\}$ y $(B_2 \setminus \{\varphi(x)\}) \cup \cup \{x\}$ son las bases del matroide M para todos los $x \in B_1$.

8.245. Demuéstrese que todo matroide transversal es ordenado por bases. ¿Será cierta la afirmación inversa?

8.246. Sea M un matroide ordenado por bases sobre el conjunto S. Demuéstrese que serán ordenados por bases también:

a) el matroide $M \mid T$ para todo $T \subseteq S$;

b) el matroide M^*, dual con relación a M;

c) cada menor del matroide M.

8.247. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) el truncamiento de un matroide transversal no ha de ser obligatoriamente transversal;

b) un truncamiento de un matroide ordenado por bases es ordenado por bases;

c) todo hammoide es un matroide ordenado por bases.

8.248. Demuéstrese que todo matroide transversal y cada hammoide son representables sobre el campo de números reales.

8.249. Demuéstrese que las imágenes homomorfas de los matroides transversales son transversales.

8.250. En el diagrama (véase la fig. 8.13) están representadas las relaciones entre las clases de matroides, donde A es una familia

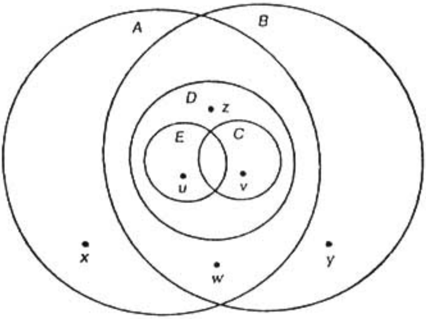


Fig. 8.13.

de todos los matroides ordenados por bases; B son todos los matroides representables sobre el campo de números reales; C es una familia de todos los matroides transversales; $\mathscr{D}$ es una familia de todos los hammoides; E es una familia de todos los hammoides rígidos; x es un matroide de «no Pappo»; y es un matroide cíclico del grafo completo K_4; u es el matroide del problema 8.55; v es un matroide cíclico del grafo bipartido completo $K_{3,2}$. Cerciórese de que el diagrama está correctamente llenado. Hállense en el diagrama los representantes para los puntos w y z.

§ 4. Problemas mixtos en los matroides

El *oráculo «independiente»* es un dispositivo a cuya entrada se suministra un subconjunto arbitrario X del conjunto S, mientras que en la salida se desea obtener una respuesta a la pregunta: «¿será o no X un conjunto independiente del matroide M sobre el conjunto S?». De un modo análogo se define el oráculo «base» (oráculos «ciclo» o «conjunto cerrado»), el cual nos da la respuesta a la cuestión:

«¿Será o no el subconjunto X del conjunto S una base (ciclo o conjunto cerrado, respectivamente) del matroide M?». Dicho de otro modo, los oráculos «independiente», «base», «ciclo» y «conjunto cerrado» pueden interpretarse como aplicaciones del conjunto $\mathcal{P}(S)$ de todos los subconjuntos del conjunto S en un conjunto de dos elementos {sí; no}. En los matroides se definen también otros oráculos, por ejemplo, «rango», «ceñidura» y «clausura», los dos primeros de los cuales se interpretan como aplicaciones de $\mathcal{P}(S)$ en el conjunto de números naturales y el tercero, como aplicación de $\mathcal{P}(S)$ en $\mathcal{P}(S)$.

Los oráculos mencionados están reunidos en la tabla siguiente:

Denominación del oráculo	Entrada	Salida
«independiente»	$X \subseteq S$	sí, siempre que X sea un conjunto independiente del matroide M; no, en el caso contrario
«base»	$X \subseteq S$	sí, siempre que X sea una base del matroide M; no, en el caso contrario
«ciclo»	$X \subseteq S$	sí, siempre que X sea un ciclo del matroide M; no, en el caso contrario
«conjunto cerrado»	$X \subseteq S$	sí, siempre que X sea una superficie del matroide M; no, en el caso contrario
«rango»	$X \subseteq S$	$r(X)$ es un rango del conjunto X en M
«ceñidura»	$X \subseteq S$	potencia mínima de los ciclos del matroide M contenidos en X; ∞, si X es un conjunto independiente del matroide M
«clausura»	$X \subseteq S$	$\overline{X}$ es una clausura del conjunto X en el matroide M

Sea O un oráculo y sea A un algoritmo que puede dirigirse hacia el oráculo O como hacia un subprograma. Si el número de direcciones del algoritmo A hacia el oráculo O está limitado a cierto polinomio de la variable $|S|$, el algoritmo A se denomina *polinomial*. Diremos que un oráculo O_1 es *polinomialmente reducible* al oráculo O_2, si existe un algoritmo polinomial que, empleando el oráculo O_2, tiene en la salida el oráculo O_1. Los oráculos O_1 y O_2 son *polinomialmente equivalentes*, si el oráculo O_1 es polinomialmente reducible al oráculo O_2, y viceversa.

8.251. Demuéstrese que los oráculos «rango», «independiente» «clausura» son polinomialmente equivalentes.

8.252. Cerciórese de que los oráculos «base», «ciclo» y «conjunto cerrado» son polinomialmente reducibles a los oráculos «rango», «independiente», «clausura» y «ceñidura».

8.253. ¿Serán polinomialmente reducibles al oráculo «ceñidura» los oráculos «rango», «independiente» y «clausura»?

8.254. Sea dada una de las bases del matroide M. Demuéstrese que el oráculo «base» es polinomialmente equivalente al oráculo «independiente».

8.255. Demuéstrese que las propiedades que siguen más abajo del matroide M no pueden comprobarse en el transcurso del número polinomial de direcciones hacia el oráculo «independiente»:

a) ¿Será homogéneo el matroide M?

b) ¿Será autodual el matroide M?

c) ¿Será transversal el matroide M?

d) ¿Será representable el matroide M?

e) ¿Será orientable el matroide M?

f) ¿Será binario el matroide M?

8.256. Supongamos que M es un matroide sobre el conjunto S, y (X, Y, Z), tal partición del conjunto S que $|Y| = 1$. Demuéstrese que para cualquier partición de esta índole del conjunto S existe o bien un ciclo C del matroide M tal que $y \in C$, donde $\{y\} = Y$, y $z \notin C$ para todo $z \in Z$, o bien un cociclo C^* del matroide M tal que $y \in C^*$ y $x \notin C^*$ para todo $x \in X$.

Una terna $(S, \mathscr{C}, \mathscr{D})$ compuesta por el conjunto finito S y dos familias $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ de subconjuntos no vacíos del conjunto S recibe el nombre de grafoide, si se cumplen las siguientes condiciones:

a) si $C \in \mathscr{C}$ y $D \in \mathscr{D}$, entonces $|C \cap D| \neq 1$;

b) para cualquier partición (X, Y, Z) del conjunto S que satisface la condición $|Y| = 1$, o bien $C \in \mathscr{C}$ es tal que $y \in C$ y $z \notin C$ para todo $z \in Z$, o bien $D \in \mathscr{D}$ es tal que $y \in D$ y $x \notin D$ para todo $x \in X$;

c) ningún subconjunto propio del término C de $\mathscr{C}$ es término de $\mathscr{C}$; ningún subconjunto propio del término D de $\mathscr{D}$ es término de $\mathscr{D}$.

8.257. Supongamos que M es un matroide sobre el conjunto S; $\mathscr{C}$ es una familia de todos los ciclos de M y $\mathscr{C}^*$, una familia de todos los cociclos suyos. Demuéstrese que $(S, \mathscr{C}, \mathscr{C}^*)$ es un grafoide.

8.258. Sea $(S, \mathscr{C}, \mathscr{D})$ un grafoide. Demuéstrese que si B es un subconjunto máximo del conjunto S que no contiene elementos de $\mathscr{C}$, entonces el conjunto $S \setminus B$ será un subconjunto máximo del conjunto S que no contiene elementos de $\mathscr{D}$.

8.259. Sea $(S, \mathscr{C}, \mathscr{D})$ un grafoide. Demuéstrese que en este caso $\mathscr{C}$ es una familia de ciclos de cierto matroide M sobre el conjunto S, y $\mathscr{D}$ es la familia de sus cociclos.

Supongamos que M es un matroide sobre el conjunto S con la función de rango r. El *polinomio característico del matroide* M se define por la siguiente correlación:

$$P(M; \lambda) = \sum_{A \subseteq S} (-1)^{A} \lambda^{r(S)-r(A)}.$$

Sea G un grafo sin bucles y aristas múltiples. Se denomina *k-coloración regular del grafo* G tal pintado de los vértices del grafo de k colores que ningún par de vértices adyacentes queden pintados de un mismo color. El *polinomio cromático del grafo* $P(G; \lambda)$ se determina como una función definida sobre el conjunto de números positivos enteros, la cual para cada λ entero y positivo es igual al número de diferentes métodos de coloración regular del grafo en λ colores. Si $M(G)$ es un matroide cíclico del grafo, entonces el polinomio cromático del grafo es

$$P(G; \lambda) = \lambda^{k(G)} P(M(G); \lambda),$$

donde $k(G)$ es el número de componentes conexos del grafo G; $P(M(G); \lambda)$ es un polinomio característico del matroide cíclico $M(G)$. El *número cromático* $\chi(M)$ del matroide M se define mediante la relación

$$\chi(M) = \inf_{n \in Z} \{n\colon P(M; n) > 0\},$$

donde Z es el conjunto de números enteros positivos.

8.260. Demuéstrese que si $e \in S$ no es ni bucle ni cobucle (istmo) del matroide M sobre el conjunto S, entonces

$$P(M; \lambda) = P(M'_e; \lambda) - P(M''_e; \lambda),$$

donde $M'_e = M \mid (S \setminus e)$, $M''_e = M \cdot (S \setminus e)$.

8.261. Demuéstrese que si el matroide M contiene un bucle, entonces $P(M; \lambda) = 0$.

8.262. Demuéstrese que si e es un bucle (istmo) del matroide $M(S)$, entonces $P(M; \lambda) = (\lambda - 1) P(M'_e; \lambda)$, aquí $M'_e = M \mid (S \setminus e)$.

8.263. Hállense los polinomios característicos de los siguientes matroides:

a) del matroide de Fano Φ;

b) de la geometría proyectiva $PG(r, q)$ de dimensión r sobre el campo $GF(q)$;

c) del matroide cíclico $M(K_n)$ del grafo completo K_n;

d) del matroide homogéneo $U_{2,4}$.

8.264. Hállese el número cromático del matroide de Fano Φ.

8.265. Sea M un matroide no gráfico sobre el conjunto S y sea $N = M \mid A$, donde $A \subseteq S$. Demuéstrese que $\chi(N) \geqslant \chi(M)$.

8.266. Supongamos que M es un matroide no gráfico y α, un número entero tal que $\alpha > \chi(M)$. Demuéstrese que en el caso general no es obligatorio que $P(M; \alpha) > 0$.

8.267. Sea M un matroide binario. Demuéstrese que $\chi(M) \leqslant 2$ cuando y sólo cuando todos los ciclos de M tienen potencia par.

8.268. Demuéstrese que si un matroide M es orientable, entonces $P(M; n) \geqslant 0$ *para todo* $n \geqslant 1$.

8.269. Demuéstrese que si un matroide M es binario, entonces $P(M; 2^k) \geqslant 0$ para todo $k \geqslant 1$.

Se denomina *invariante* tal función f sobre un conjunto de matroides, con valores tomados por ella en un anillo conmutativo, que si un matroide M es isomorfo a otro matroide N, entonces $f(M) = f(N)$. Se llamará *invariante de Tutte-Grothendiek* el invariante que, para cualquier e que no es ni bucle ni cobucle, satisface las *condiciones:*

$$f(M) = f(M'_e) + f(M''_e);$$
$$f(M_1 + M_2) = f(M_1) \cdot f(M_2).$$

Sea M un matroide sobre el conjunto S y sean r y r^* funciones de rango de M y de M^* (dual con relación a M), respectivamente. El *polinomio de Tutte* $T(M; x, y)$ del matroide M se define mediante la correlación

$$T(M; x, y) = \sum_{A \subseteq S} (x-1)^{r(S)-r(A)} (y-1)^{|A|-r(A)}.$$

8.270. Compruébese que el número $b(M)$ ($i(M)$, $sp(M)$, respectivamente) de bases (conjuntos independientes y conjuntos engendradores, respectivamente) del matroide M es un invariante de Tutte-Grothendieck.

8.271. Demuéstrese que $T(M; x, y) = T(M^*; y, x)$.

8.272. Demuéstrese que para cualquier matroide M sobre el conjunto S el polinomio característico tiene por expresión

$$P(M; \lambda) = (-1)^{r(S)} T(M; 1-\lambda, 0).$$

8.273. Demuéstrese que si un matroide M sobre el conjunto S tiene componentes conexos $(S_i: i \in I)$, entonces

$$T(M; x, y) = \prod_{i \in I} T(M \mid S_i; x, y).$$

8.274. Sea M un matroide sobre el conjunto S. Compruébese la validez de las siguientes relaciones:

a) $T(M; 2, 2) = 2^{|S|}$;

b) $T(M; 1, 1) = b(M)$, donde $b(M)$ es el número de bases del matroide M;

c) $T(M; 2, 1) = i(M)$, donde $i(M)$ es el número de conjuntos independientes del matroide M;

d) $T(M; 1, 2) = sp(M)$, donde $sp(M)$ es el número de conjuntos engendradores del matroide M;

e) $T(M; 0, 0) = 0$;

f) $T(M; 1, 0) = (-1)^{r(S)} \mu(S)$, donde μ es la función de Moebius de la estructura geométrica del matroide M y $\mu(S) = \mu(\varnothing, S)$.

8.275. Demuéstrese que sólo los invariantes de Tutte-Grothendieck son valores del polinomio de Tutte.

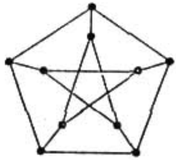
8.276. Demuéstrese que los coeficientes del polinomio de Tutte de cualquier matroide son no negativos.

8.277. Muéstrese que en el caso general la suma de dos polinomios de Tutte no es un polinomio de Tutte.

Supongamos que $G(V, S)$ es un grafo con el conjunto de vértices V y el conjunto de aristas S; w es la orientación de las aristas del grafo y H, un grupo abeliano. Diremos que la inyección φ: $V \to H \setminus \{0\}$ es un *H-flujo*, si para cada vértice $v \in V$ se verifica la relación

$$\sum_{\partial^+(v)} \varphi(e) - \sum_{\partial^-(v)} \varphi(e) = 0,$$

donde $\partial^+(v)$, $\partial^-(v)$ son conjuntos de aristas dirigidas a v, y de v para la orientación w. Suele decirse que el grafo G tiene *k-flujo*, si G tiene H-flujo para todos los grupos H (o sólo para un grupo) de orden k.



P_{10}

Fig. 8.14.

8.278. Sean w y w' dos orientaciones de aristas del grafo G. Muéstrese que existe una correspondencia biunívoca entre los flujos de las orientaciones w y w'. (De aquí proviene que el número $N(H, G)$ de H-flujos en el grafo G no depende de la orientación del grafo y es una función solamente de H y G.)

8.279. Demuéstrese que si el arista e no es bucle ni puente del grafo G, entonces

$$N(H; G) = -N(H, G'_e) + N(N, G''_e),$$

donde G'_e y G''_e son los grafos obtenidos de G por supresión y contracción de la arista e, respectivamente.

8.280. Supongamos que $M(G)$ es un matroide cíclico del grafo G y $O(H)$, el orden del grupo H. Demuéstrese que

$$N(H, G) = (-1)^{|S|-r(S)} T(M(G); 0, O(H)-1) =$$
$$= P(M^*(G); O(H)).$$

8.281. Demuéstrese que cualquier grafo sin puentes tiene el 8-flujo.

8.282. Demuéstrese que el *grafo de Peterson* (P_{10}; fig. 8.14) no tiene 4-flujo.

8.283. Demuéstrese que un grafo sin puentes tiene 5-flujo.

8.284. (?) Demuéstrese que el grafo G sin puentes tiene 4-flujo cuando y sólo cuando no tiene subgrafos contraídos hacia el grafo de Peterson.