

ESQUEMAS COMBINATORIOS

§ 1. Relaciones combinatorias

1.1. El número de k -muestras del n -conjunto que contienen el primer elemento es, evidentemente, igual a C_{n-1}^{k-1} , y el de las que no lo contienen es igual a C_{n-1}^k , de donde proviene a).

Para demostrar la identidad b), asignemos a su segundo miembro el siguiente sentido combinatorio: C_{n-1}^{k-1} es el número de k -muestras del n -conjunto que no contienen el primer elemento; C_{n-2}^{k-1} es el número de k -muestras que contienen el primer elemento y no contienen el segundo, etc.; C_{n-r-1}^{k-r} es el número de k -muestras que contienen los primeros r elementos y no contienen el $(r+1)$ -ésimo elemento, etc.

1.2. El número de m -muestras del $(n+1)$ -conjunto es igual a C_{n+m}^m . Dividamos estas muestras en clases, refiriendo a la $(m-k)$ -ésima clase aquellas, en las que el elemento del primer tipo figura $m-k$ veces. Los demás k lugares pueden estar ocupados por los elementos de otros tipos. Por eso el número de elementos en la $(m-k)$ -ésima clase es igual al número de k -muestras del (n) -conjunto, es decir, a C_{n+k-1}^k . Al sumar respecto de todas las clases de particiones, obtendremos el conjunto requerido.

1.3. Fijemos un m -subconjunto del n -conjunto. El número de r -muestras del n -conjunto, a condición de que exactamente $r-k$ elementos pertenecen al m -subconjunto y los demás k elementos, al complemento de este último, es igual a $C_{n-m}^k C_m^{r-k}$ (se ha empleado la regla del producto). Al sumar respecto de k , obtendremos el número de todas las r -muestras del n -conjunto, o sea C_n^r . Observemos que para $k > \min\{r, n-m\}$ los términos de la suma son nulos.

1.4. a) El número de todos los subconjuntos del n -conjunto es igual, obviamente, a 2^n . Por otra parte, cada subconjunto del n -conjunto de potencia k es una k -muestra. Al sumar respecto de todos los k , obtendremos la identidad requerida.

b) Por cuanto $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$, entonces, diferenciando respecto de x ,

tenemos $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k C_n^k x^{k-1}$. Suponiendo $x=1$, tenemos b).

c) Por cuanto $\sum_{k=0}^n k^2 C_n^k = \sum_{k=0}^n k \cdot k C_n^k = \sum_{k=0}^n k(k-1) C_n^k + \sum_{k=0}^n k C_n^k$, entonces,

por analogía con b), tenemos c).

1.5. El número de n -muestras ordenadas del (m) -conjunto es $m^n = A^n(m)$. Partiremos las n -muestras en clases, considerando pertenecientes a la k -ésima clase aquellas, en las cuales los elementos del primer tipo se encuentran en k lugares. El número de n -muestras en la k -ésima clase es igual a $C_n^k (m-1)^{n-k}$.

Al tomar la suma de todas las n -muestras respecto de todas las clases de particiones, obtendremos la fórmula requerida.

1.6. El número de todas las n -muestras ordenadas del (k) -conjunto es igual a k^n . Partiremos estas muestras en clases, atribuyendo a una clase aquellas, en las que figuran n_1 elementos del primer tipo, n_2 elementos del segundo tipo, etc., n_h elementos del k -ésimo tipo. El número de tales n -muestras es igual a $p(n_1, \dots, n_h) = n! / (n_1! \dots n_h!)$. Por consiguiente, el número total de n -muestras del (k) -conjunto es igual a $\sum p(n_1, \dots, n_h)$, donde la sumación se realiza respecto de todas las particiones ordenadas de n en k sumandos, lo que se trataba de demostrar.

1.7. a) Convergamos en considerar el n -conjunto como (q) -conjunto, en el cual hay n_1 elementos del primer tipo, n_2 elementos del segundo tipo, etc., n_q elementos de q -ésimo tipo $(n = \sum_{i=1}^q n_i)$; distinguiremos entre sí los elementos de un mismo tipo.

Partiremos todas las m -muestras del n -conjunto en clases, considerando pertenecientes a una clase aquellas m -muestras, en las cuales figuran exactamente m_1 elementos del primer tipo, etc. El número de m -muestras en esta clase es igual a $C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \dots C_{n_q}^{m_q}$. Al sumar respecto de todas las clases, obtendremos el resultado requerido.

b) Por analogía con a) resolvemos este problema sustituyendo el n -conjunto por el (n) -conjunto.

1.8. Por cuanto $C_{n+1}^{r+1} = \frac{n+1}{r+1} C_n^r$ y $C_n^r = \frac{n}{r} C_{n-1}^{r-1}$, entonces el primer miembro de la igualdad puede escribirse así:

$$\frac{\frac{n}{r} \left(\frac{n+1}{r+1} - 1 \right) (C_{n-1}^r)^2}{\left(\frac{n^2}{r^2} - \frac{(n+1)n}{(r+1)r} \right) (C_{n-1}^{r-1})^2} = \frac{\frac{n(n-r)}{r(r+1)}}{\frac{n(n-r)}{r^2(r+1)}} = r.$$

$$1.9. \sum_{x=1}^n \frac{C_{2n-1}^{x-1}}{C_{2n-1}^x} = \frac{(n-1)!}{(2n-1)!} \sum_{x=1}^n \frac{x(2n-x-1)!}{(n-x)!} = \frac{2n}{(2n-1) C_{2n-1}^{n-1}} \times$$

$$\times \sum_{x=1}^n C_{2n-x-1}^{n-1} - \frac{1}{C_{2n-1}^{n-1}} \sum_{x=1}^n C_{2n-x}^{n-1} = \frac{2n C_{2n-1}^{n-1}}{(2n-1) C_{2n-2}^{n-2}} - \frac{C_{2n}^{n-1}}{C_{2n-1}^{n-1}} = \frac{2}{n+1}.$$

$$1.10. \sum_{x=1}^n \frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{n+q}^x} = \frac{(n-1)!}{(n+q)!} \sum_{x=1}^n \frac{x(n+q-x)!}{(n-x)!} = \frac{(n+q+1)(n-1)! q!}{(n+q)!} \times$$

$$\times \sum_{x=1}^n C_{n+q-x}^{n-x} - \frac{(n-1)!(q+1)!}{(n+q)!} \sum_{x=1}^n C_{n+q-x+1}^{n-x} = \frac{(n+q+1)(n-1)! q!}{(n+q)!} \times$$

$$\times C_{n+q}^{n-1} - \frac{(n-1)!(q+1)!}{(n+q)!} C_{n+q+1}^{n-1} = \frac{n+q+1}{q+1} - \frac{n+q+1}{q+2} = \frac{n+q+1}{(q+1)(q+2)}.$$

$$1.11. \sum_{x=0}^n \frac{C_n^x C_n^r}{C_{2n}^{x+r}} = \frac{n! C_n^r}{(2n)!} \sum_{x=0}^n \frac{(x+r)!(2n-x-r)!}{x!(n-x)!} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sum_{x=0}^n C_{x+r}^x \times$$

$$\times C_{2n-x-r}^{n-r} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} C_{2n+1}^{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}.$$

1.12. De acuerdo con la fórmula del binomio de Newton tenemos

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i 2^{-i}, \quad \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i (-1)^i 2^{-i},$$

entonces

$$\sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^{2i} 2^{-2i} = \frac{(3/2)^n + (1/2)^n}{2}.$$

De un modo análogo obtenemos b).

1.13. El número de m -muestras del (n) -conjunto es igual a C_{n+m}^{n+m} . Partiremos los tipos de elementos del (n) -conjunto en dos clases respecto de p y $n-p$ tipos, respectivamente. Luego partiremos todas las m -muestras del (n) -conjunto en clases, atribuyendo a la clase χ aquellas que contienen x elementos del primer conjunto de tipos y $m-x$ elementos del segundo tipo de elementos. Está claro que en la clase se contienen $C_{p+x-1}^x C_{n+m-p-x-1}^{m-x}$ elementos. Al sumar respecto de todas las clases, obtendremos la identidad requerida.

1.14. Demostremos por inducción: para $n=0$ $\sum_{i=0}^m 1 = m = C_m^1$. Sea

$$\sum_{i_n=1}^{i_n} \dots \sum_{i_0=1}^{i_1} 1 = C_{n+i_n-1}^n. \text{ Entonces}$$

$$C_{n+m}^{n+1} = \sum_{i_n=1}^m C_{n+i_n-1}^n = \sum_{i_n=1}^m C_{n+i_n-1}^{i_n-1} = \sum_{i_n=1}^m \sum_{i_{n-1}=1}^{i_n} \dots \sum_{i_0=1}^{i_1} 1,$$

donde la primera igualdad fue demostrada en el problema 1.2, lo que se trataba de demostrar.

1.15. Partiremos todas las permutaciones de m bolas blancas y n negras en clases. Consideraremos pertenecientes a la clase (k_1, \dots, k_m) las permutaciones en las cuales hay k_1 bolas blancas aisladas, k_2 pares de bolas, k_3 ternas, etc., k_m bolas que están juntas.

Es evidente que $k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m = m$. Calculemos el número de permutaciones de la clase (k_1, k_2, \dots, k_m) . Si n bolas negras están colocadas por orden, tendremos, pues, $n+1$ lugares para colocar bolas blancas. Por eso, el número de permutaciones es igual a $p(k_1, \dots, k_m, n-k_1-\dots-k_m+1)$. El número total de permutaciones es igual a C_{n+m}^{n+m} , lo que se trataba de demostrar.

1.16. Para $n > 0$ véase el problema 1.1. Cuando $n < 0$, tenemos

$$\begin{aligned} C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1} &= (-1)^r C_{r-n}^r + (-1)^{r-1} C_{r-n-1}^{r-1} = \\ &= (-1)^r (C_{r-n}^r - C_{r-n-1}^{r-1}) = (-1)^r C_{r-n-1}^r = C_n^r, \end{aligned}$$

lo que se trataba de demostrar.

§ 2. Muestras y ordenaciones

1.17. El número total de permutaciones es igual a $n!$. Sin embargo, la relación de vecindad queda intacta para las permutaciones cíclicas y para las reflexiones simétricas. Por eso hay en total $n!(2n) = (n-1)!/2$ modos.

1.18. Los sitios para los hombres y las mujeres pueden elegirse por dos métodos. A continuación, en los lugares elegidos los hombres pueden colocarse mediante $n!$ métodos. En los lugares restantes las mujeres pueden colocarse mediante $n!$ métodos. En total hay $2(n!)^2$ métodos.

1.19. a) $C_{12}^0 - C_{18}^0$; efectivamente, hay en total C_{12}^0 métodos de sacar 10 cartas; en C_{18}^0 casos no habrá ningunas en la muestra; b) $C_1^4 C_{18}^4$; c) $C_{12}^0 - C_{18}^0 - 4C_{18}^4$; d) $C_1^4 C_{18}^4$.

1.20. Elegimos 6 ajedrecista mediante C_n^6 métodos. Enumerémoslos con cifras del 1 al 6 y formemos 3 en pares: el primero—segundo; el tercero—cuarto; el quinto—sexto. Esto puede hacerse empleando 6! métodos. Por cuanto el orden de los ajedrecistas dentro de cada par y el orden de los pares no son esenciales, entonces 6 ajedrecistas pueden ser divididos en pares mediante $6!/(2^3 3!)$ métodos. En total existen $C_n^6 6!/(2^3 3!) = n!/(48(n-6)!)$ métodos para componer tres pares de n ajedrecistas.

1.22. Cada divisor del número q tiene por expresión $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$, donde $\beta_i = 0, 1, \dots, \alpha_i$. Según la regla del producto, el número de divisores es igual a $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$. La suma de los divisores será

$$\begin{aligned} & (1 + p_1 + \dots + p_1^{\alpha_1}) \dots (1 + p_n + \dots + p_n^{\alpha_n}) = \\ & = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \dots \frac{p_n^{\alpha_n+1} - 1}{p_n - 1}. \end{aligned}$$

En efecto, si abrimos paréntesis, entonces al reducir los términos semejantes, obtendremos una suma en la cual cada divisor q figura exactamente una vez. De aquí, el número q de divisores puede obtenerse de otro modo, a saber, en el primer miembro de la última expresión basta poner todos los p_i iguales a la unidad.

1.23. Reunamos los m elementos dados en uno. Teniendo presente que dichos m elementos pueden permutarse, obtendremos $m!(n-m+1)!$ permutaciones en las cuales estos m elementos están al lado. Por consiguiente, el número de permutaciones buscadas es $n! - m!(n-m+1)!$

1.24. La cantidad de números de n cifras que no contienen dos cifras iguales seguidas es igual a 9^n cuando $n > 1$, y a 10, cuando $n = 1$. Este resultado se deduce de la regla del producto, si tomamos en consideración que, una vez elegidas las primeras k cifras, la cifra $(k+1)$ -ésima puede ser elegida mediante nueve métodos. Por eso la respuesta será

$$10 + 9^2 + 9^3 + \dots + 9^n = (9^{n+1} - 1)/8.$$

1.25. En el método buscado de elección de seis cartas puede ocurrir que haya

a) tres cartas de un mismo palo y tres que tienen cada una otro palo diferente; habrá $C_1^3 C_{13}^3 (C_{13}^1)^3$ de tales muestras.

b) dos pares de cartas de un mismo palo y dos cartas que tienen cada una otro palo diferente. Habrá $C_1^2 (C_{13}^2)^2 (C_{13}^1)^2$ de tales muestras. La suma de estos números da la respuesta buscada.

1.26. Para caracterizar el número que satisface la hipótesis del problema, es suficiente decir cuántas veces se encuentran en este número las cifras: uno, dos, . . . , nueve. Por eso hay en total

$$C_{(v)}^n = C_{n+9-1}^n = C_{n+8}^8$$

de tales números.

1.27. Cada bola puede ocupar uno de m lugares. Entonces, según la regla del producto, obtendremos m^n métodos de repartición.

1.28. A cada modo de colocación le corresponde una n -muestra del (m) -conjunto. Hay en total $C_{(m)}^n = C_{m+n-1}^n$ métodos.

1.29. a) En cada urna se debe poner una bola. Las demás bolas pueden colocarse mediante $C_{(m)}^{n-h} = C_{n-1}^{n-h} = C_{n-1}^{h-1}$ métodos.

b) $C_{n-h+m-2}^{n-h}$.

c) Coloquemos en la primera urna a_1 bolas; en la segunda, a_2 bolas, etc., en la s -ésima urna, a_s bolas. Entonces, las demás $n - \sum_{i=1}^s a_i$ bolas pueden distribuirse entre las $m-s$ urnas restantes mediante

$$C_{(m-s)}^{n - \sum_{i=1}^s a_i} = C_{n - \sum_{i=1}^s a_i}^{m-s} \quad \text{métodos.}$$

$$d) C_{(m)}^{n - \sum_{i=1}^m a_i} = C_{m+n - \sum_{i=1}^m a_i}^m$$

1.30. Las bolas blancas podemos distribuir las entre las urnas mediante $C_{(m)}^{n_1}$ métodos; las bolas negras, mediante $C_{(m)}^{n_2}$ métodos y las azules, mediante $C_{(m)}^{n_3}$ métodos. Pero, por cuanto las distribuciones de las bolas de distinto color no dependen una de otra, entonces, en virtud de la regla del producto, el número total de métodos de distribución será

$$C_{(m)}^{n_1} C_{(m)}^{n_2} C_{(m)}^{n_3} = C_{m+n_1-1}^{n_1} C_{m+n_2-1}^{n_2} C_{m+n_3-1}^{n_3}$$

1.31. Designemos el número de métodos de distribución de n bolas iguales entre i urnas iguales con $A(n, i)$. Este problema es equivalente a la distribución de n bolas iguales entre i urnas diferentes de tal modo que se verifique $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_i$, donde n_m es el número de bolas en la m -ésima urna. Fijemos el número de bolas k en la 1^{ra} urna, donde $0 \leq k \leq \lfloor n/i \rfloor$. Tomando en consideración que en cada una de las urnas restantes se encuentran no menos de k bolas, concluimos que el número de métodos para llenarlas es igual a $A(n-ik, i-1)$. De este modo obtenemos la siguiente relación recurrente:

$$A(n, i) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/i \rfloor} A(n-ik, i-1)$$

De aquí siguen las respuestas: a) $\left[\frac{n+2}{2} \right]$; b) $\left[\frac{n}{3} \right] + 1 + \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \left[\frac{n-3k}{2} \right]$.

1.32. Coloquemos todas las bolas formando una fila y enumerémoslas. Escribamos por encima de cada bola el número de la urna en la que aquella se va a colocar. Los números de las urnas forman una permutación del k -conjunto que contiene n_1 números 1, n_2 números 2, n_k números k . Cada permutación de este tipo determina su método de colocación, mientras que el número de tales permutaciones es igual a $p(n_1, \dots, n_k) = n! (n_1! \dots n_k!)$.

1.33. a) Es un caso particular del problema 1.32. La respuesta es

$$b) \frac{n!}{(p_1!)^{m_1} (p_2!)^{m_2} \dots (p_k!)^{m_k}}$$

$$b) \frac{n!}{(p_1!)^{m_1} (p_2!)^{m_2} \dots (p_k!)^{m_k} m_1! \dots m_k!}$$

1.34. a) Este problema es equivalente a la distribución de k bolas iguales entre n urnas diferentes, a condición de que en la primera urna se encuentre no

menos de 1 bola. Aquí resulta esencial que $k \leq 9$. Por eso, la respuesta es como sigue (véase el problema 1.28): $C_{(n)}^{h-1} = C_{n+h-2}^{h-1}$;

b) $C_{(n)}^h = C_{n+h-1}^h$.

1.35. Por una simple selección llegamos a que el número de cinco cifras puede estar compuesto de los siguientes juegos de cifras

$$\begin{array}{lll} 7, 2, 6, 5, 5; & 7, 6, 5, 2, 2; & 7, 2, 2, 5, 5; \\ 6, 2, 2, 5, 5; & 7, 5, 2, 2, 2; & 7, 6, 2, 2, 2; \\ 5, 6, 2, 2, 2; & 7, 2, 2, 2, 2; & 5, 2, 2, 2, 2; \\ 9, 2, 2, 2, 2; & 5, 5, 2, 2, 2; & \end{array}$$

Por eso la cantidad total de tales números será

$$2p(1, 1, 1, 2) + 3p(1, 1, 3) + 2p(1, 2, 2) + 3p(1, 4) + p(2, 3) = 265.$$

1.36. a) Denotemos una totalidad no vacía de unidades seguidas con la letra E y de ceros, con la letra H . Entonces, de la hipótesis del problema proviene que la sucesión de ceros y unidades se dispone según uno de los dos esquemas: $EHEH...EH$ o $HEHE...HE$, con la particularidad de que en cada esquema figuran r pares. Mas, existen $C_{m-1}^m = C_{m-1}^{m-1}$ métodos para distribuir m unidades entre las totalidades no vacías. Para los ceros tenemos, por analogía, $C_{n-1}^n = C_{n-1}^{n-1}$ métodos. Por eso el número total de sucesiones es igual a $2C_{m-1}^{m-1}C_{n-1}^{n-1}$.

b) $C_{m-1}^{m-1}C_{n-1}^{n-1} + C_{m-1}^{m-1}C_{n-1}^{n-1}$.

1.37. a) Notemos que el número S no satisface a ciencia cierta la hipótesis del problema, si aquél puede ser representado por dos métodos esencialmente diferentes en forma de una suma de tres sumandos distintos, cada uno de los cuales no es superior a 9, puesto que en tal caso se tiene por lo menos 12 números con una suma igual a S . Dicha representación se obtiene fácilmente para todos los números S desde 5 hasta 22. Por ejemplo, $5 = 4 + 1 + 0 = 3 + 2 + 0$. Para $S \leq 4$ hagamos uso del resultado del problema 1.34.

b) Resulta que sólo para $S = 3$ existen exactamente 10 números, en cada uno de los cuales la suma de las cifras es igual a S . A todo número, cuya notación decimal se representa como $a_1a_2a_3$, se le pone biunívocamente en correspondencia el número $9 - a_19 - a_29 - a_3$. Si la suma de cifras del primer número es igual a S , la del segundo será $27 - S$. Por eso el caso en que $23 \leq S \leq 27$ es simétrico al caso $0 \leq S \leq 4$, y sólo $S = 24$ satisface la hipótesis del problema. La respuesta es: $S_1 = 3$; $S_2 = 24$.

1.38. a) El que compra un billete elige 6 números de un total de 49. Todas las muestras posibles se consideran equiprobables. Fijemos 6 números. Entonces la probabilidad buscada será igual a la razón entre el número de muestras con k números de los 6 fijados y el número de todas las muestras. Hay en total C_{49}^6 muestras. Haciendo uso de la regla del producto, llegamos a que k números de 6 contienen $C_6^k C_{43}^{6-k}$ muestras: primero de 6 números ciertos se eligen k , y luego $6 - k$ números se complementan empleando 43 números «infelices». De este modo, la probabilidad de adivinar k números es igual a $C_6^k C_{43}^{6-k} / C_{49}^6$.

b) $\sum_{i=k}^6 (C_6^i C_{43}^{6-i}) / C_{49}^6$.

1.39. Al igual que en el problema anterior, por probabilidad entenderemos la razón entre el número de muestras favorables y el número total de muestras. En total existen C_{90}^5 métodos de sacar 5 fichas. Supongamos que el participante de la lotería haya comprado un billete con un número. Para ganar el premio es necesario que una de las 5 fichas coincida con el número en el billete. Los demás se eligen de 89 números restantes. Por eso, existen C_{89}^4 resultados favorables y la probabilidad de ganar el premio es igual a $C_{89}^4 / C_{90}^5 = 1/18$.

Análogamente, jugando con dos números, llegamos a que la probabilidad de ganar el premio es igual a $C_{28}^2/C_{90}^2 = 2/801$. Jugando con tres números, tenemos $C_{28}^3/C_{90}^3 = 1/11748$. Jugando con cuatro números tenemos $C_{28}^4/C_{90}^4 = 1/511038$. Jugando con cinco números, la probabilidad será $1/C_{90}^5 = 1/43949268$.

1.40. Designemos con $g(n)$ el número de sucesiones de longitud n que satisfacen las condiciones del problema. El número de sucesiones de longitud n , que comienzan con una de las cifras 1, 2, . . . , k , es igual a $g(n-1)$, y el número de aquellas que comienzan con cero y satisfacen las condiciones del problema es igual a $(k+1)^{n-1} - g(n-1)$. Por eso resulta válida la siguiente relación recurrente: $g(n) = (k-1)g(n-1) + (k+1)^{n-1}$. Teniendo en cuenta que $g(1) = k$, podemos demostrar por inducción la fórmula siguiente:

$$g(n) = ((k+1)^n + (k-1)^n)/2.$$

1.41. *Primer método.* Por cada examen aprobado exitosamente el examinando puede tener 3, 4, 5 puntos. Designemos con $F(k, N)$ el número de métodos por medio de los cuales se pueden acumular N puntos después de aprobar k exámenes. En este caso se verifica la relación

$$F(k, N) = F(k-1, N-3) + F(k-1, N-4) + F(k-1, N-5).$$

De aquí obtenemos

$$\begin{aligned} F(4, 17) &= F(3, 14) + F(3, 13) + F(3, 12) = \\ &= F(2, 11) + 2F(2, 10) + 3F(2, 9) + 2F(2, 8) + F(2, 7) = \\ &= 2 + 3F(2, 9) + 2F(2, 8) + F(2, 7), \end{aligned}$$

puesto que no es posible acumular 11 puntos tras dos exámenes, mientras que acumular 10 puntos se puede mediante un solo método, sacando 5 puntos en cada examen. Continuando los cálculos, obtendremos

$$F(4, 17) = 2 + 3F(1, 6) + 5F(1, 5) + 6F(1, 4) + 3F(1, 3) + F(1, 2),$$

pero $F(1, 6) = F(1, 2) = 0$ (no se pueden obtener 6 puntos en un examen, y una calificación con un dos priva del derecho a ingresar en el instituto. $F(1, 5) = F(1, 4) = F(1, 3) = 1$, por lo cual $F(4, 17) = 16$).

De un modo análogo se realiza el cálculo para $F(4, 18) = 10$, $F(4, 19) = 4$ y $F(4, 20) = 1$. Obtenemos en total $16 + 10 + 4 + 1 = 31$ métodos para rendir exitosamente los exámenes.

Segundo método. Designemos con $P(a, b, c, d, e)$ el número de métodos con cuya ayuda pueden obtenerse a quinternas, b cuaternas, c ternas, etc. 17 puntos pueden adquirirse por dos métodos esencialmente diferentes: pueden obtenerse dos quinternas, una cuaterna y una terna, o bien una quinterna y tres cuaternas. Estas calificaciones pueden distribuirse de cualquier modo entre las asignaturas aprobadas. Por cuanto

$$P(2, 1, 1) + P(1, 3) = 4!/(2!1!1!) + 4!/(3!1!) = 16,$$

entonces 17 puntos pueden ser sacados mediante 16 métodos.

De igual modo se calcula el número de métodos para obtener 18, 19 y 20 puntos.

1.42. Designemos con $F(n_1, n_2, \dots, n_m; N)$ el número de métodos por medio de los cuales se pueden pagar N kopeks con monedas de valor diferente. De aquí proviene:

$$\begin{aligned} F(n_1, n_2, \dots, n_m; N) &= \\ &= F(n_1, n_2, \dots, n_{m-1}; N - n_m) + F(n_1, \dots, n_{m-1}; N). \quad (*) \end{aligned}$$

Esto permite reducir el problema de elección de m monedas al problema de elección de $(m-1)$ monedas. Al repetir la operación de un modo análogo, reduz-

camos este problema al de elección de $(m - 2)$ monedas, etc. Es evidente que para $n_m > N$ la relación (*) se sustituye por $F(n_1, n_2, \dots, n_m; N) = F(n_1, \dots, n_{m-1}; N)$.

Apliquemos este procedimiento a la resolución del problema dado:

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50; 73) =$$

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50; 23) + F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 73) = \\ = F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 23),$$

puesto que $1 + 2 + 3 + 5 + 10 + 15 + 20 < 73$, y, por eso, el segundo sumando es igual a cero. Luego continuamos:

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 23) = \\ = F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 3) + F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 23);$$

pero

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 3) = F(1, 2, 3; 3) = \\ = F(1, 2; 0) + F(1, 2; 3) = 1 + F(1; 3) + F(1; 1) = 2.$$

Calculemos el segundo sumando:

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 23) = \\ = F(1, 2, 3, 5, 10; 8) + F(1, 2, 3, 5, 10; 23) = \\ = F(1, 2, 3, 5, 10; 8), \text{ puesto que } 1 + 2 + 3 + 5 + 10 < 23.$$

$$\text{Pero } F(1, 2, 3, 5; 8) = F(1, 2, 3; 3) = 2.$$

En definitiva obtenemos

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50; 73) = 4.$$

Así pues, el pago requerido puede realizarse por cuatro métodos, a saber: 1) 50, 20, 3 kopeks; 2) 50, 20, 2, 1 kopeks; 3) 50, 15, 5, 3 kopeks; 4) 50, 15, 5, 2, 1 kopeks.

1.43. Sea $f(N)$ el número de métodos, por medio de los cuales se pueden pegar sellos de 4, 6, 10 kopeks de valor de tal modo que el valor total de estos sellos sea igual a N . Entonces, para $f(N)$ se verifica la igualdad $f(N) = f(N - 4) + f(N - 6) + f(N - 10)$. En efecto, supongamos que existe cierto modo de pegar sellos con un valor total de N kopeks y que el último sello que se pega vale 4 kopeks. En este caso todas las demás sellos valen $N - 4$ kopeks. Viceversa, al agregar a cualquier combinación de sellos de un valor de $N - 4$ kopeks un sello de cuatro kopeks, obtenemos una combinación de sellos de N kopeks. En tal caso, a partir de distintas combinaciones que tienen un valor de $N - 4$ kopeks se obtienen diferentes combinaciones de N kopeks. Así pues, el número de combinaciones buscadas, donde el último sello que se pega vale 4 kopeks, es igual a $f(N - 4)$.

De un modo análogo se demuestra que el número de combinaciones que terminan con un sello de 6 kopeks es igual a $f(N - 6)$ y con un sello de 10 kopeks terminan $f(N - 10)$ combinaciones. Por cuanto cualquier combinación termina con un sello de los tipos citados, resulta válida la relación que se demuestra. Esta relación permite reducir el problema de pegar sellos que valen en suma N kopeks a un problema de pegar sellos de sumas inferiores. Mas, cuando los valores de N son pequeños, el problema es fácil de resolver inmediatamente. Un simple cálculo enseña que $f(0) = 1$ (la suma de 0 kopeks puede pagarse de un modo único: no pegando los sellos en general); $f(1) = f(2) = f(3) = 0$; $f(5) = 0$; $f(7) = f(9) = 0$ (estas sumas no pueden obtenerse de ningún modo con ayuda de los sellos de 4, 6, 10 kopeks); $f(4) = 1$, $f(6) = 1$, $f(8) = 1$.

Haciendo uso de los valores de $f(N)$ para $N = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, es fácil hallar $f(10) = f(6) + f(4) + f(0) = 3$. A continuación encontramos

$f(11) = f(7) + f(5) + f(1) = 0$, $f(12) = f(8) + f(6) + f(2) + 2$, etc.,
 $f(18) = 8$.

Así pues, los sellos pueden pegarse empleando ocho métodos: 1) (10, 4, 4); 2) (4, 10, 4); 3) (4, 4, 10); 4) (6, 4, 4, 4); 5) (4, 6, 4, 4); 6) (4, 4, 6, 4); 7) (4, 4, 4, 6); 8) (6, 6, 6).

§ 3. Particiones

1.45. *Indicaciones.* Establézcase la equivalencia de los problemas sobre el número de métodos de colocación de $k - 1$ rayas en $n - 1$ intervalos entre n puntos de abscisas de números enteros.

1.46. Se conoce que cada número puede ser escrito de una sola manera en el sistema binario de cálculo, es decir, en forma de una suma de varias potencias diferentes del número dos. Sea, ahora, $n = v_1 + v_1 + \dots + v_2 + v_2 + \dots$ cualquier partición de n en sumandos impares iguales o desiguales. Supongamos que el sumando v_i figura en la partición m_i veces de tal modo que

$n = \sum_{i=1}^h m_i v_i$. Al representar el número m_i en la forma $m_i = 2^{a_{i1}} + 2^{a_{i2}} + \dots$, obtenemos

$$n = 2^{a_{11}} v_1 + 2^{a_{12}} v_1 + \dots + 2^{a_{21}} v_2 + 2^{a_{22}} v_2 + \dots$$

es decir, la partición de n en sumandos pares o impares, los cuales serán, obviamente, distintos. Viceversa, si está dada una partición $n = k_1 + k_2 + \dots$ en sumandos distintos, entonces representemos cada uno de ellos en la forma $k_i = 2^{a_{i1}} v_i$ ($a_i \geq 0$, v_i es impar) y liguemos todos los sumandos con un mismo v_i , poniendo la suma de dichos sumandos $2^{a_{i1}} v_i + 2^{a_{i2}} v_i + \dots$ igual a $m_i v_i$ (donde $m_i = 2^{a_{i1}} + 2^{a_{i2}} + \dots$). Obtendremos $n = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots$, es decir, la partición de n en sumandos impares, lo que se trataba de demostrar.

1.47. Véase la demostración, por ejemplo, en [14].

1.48. Analicemos toda clase de representaciones de n en la forma $\sum_m a + d\delta$, con la particularidad de que $\sum_m a$ es una suma no ordenada de m sumandos desiguales y d, δ , unos números enteros positivos. La suma $\sum_m a$ puede estar ausente.

Hagamos extender a todas estas representaciones la suma $S = \sum (-1)^m d$; el cálculo de esta suma mediante dos métodos nos da precisamente la solución del problema.

Reuniendo al principio en la suma S los términos, para los cuales $d\delta = p$ tiene un mismo valor, hallamos la totalidad de estos términos igual a $S(p) \times \sum (-1)^m$, además $\sum (-1)^m$ se toma respecto de todas las particiones del número $n - p$ en sumandos desiguales. Al aplicar el problema antecedente de Euler—Legendre, encontramos para S la expresión $\sum_{h: w_h < n} x(-1)^h S(n - w_h)$.

Con el fin de encontrar otra expresión para S , dividamos todas las representaciones de $n = \sum_m a + d\delta$ en tres categorías: 1) representaciones en las cuales d está ausente entre los sumandos de la suma $\sum_m a$ y, además, $\delta > 1$; 2) representaciones en las cuales d se encuentra entre los sumandos de la suma

$\sum_m a$; 3) representaciones en las cuales d está ausente entre los sumandos de $\sum_m a$, mientras que $\delta = 1$. Tomemos una representación de la primera categoría $n = \sum_m a + d\delta$, y, al restar un d del término $d\delta$, agreguémoslo, como sumando, a la suma $\sum_m a$. La representación obtenida (la cual puede ser expresada así: $n = \sum_{m+1} a + d(\delta - 1)$) pertenece, evidentemente, a la segunda categoría.

Viceversa, a partir de cada representación de la segunda categoría puede obtenerse una representación de la primera categoría. Por consiguiente, las representaciones de las categorías primera y segunda se encuentran en una correspondencia biunívoca; al notar que los términos de la suma S para las representaciones correspondientes, es decir $(-1)^m d$ y $(-1)^{m+1} d$, se suprimen recíprocamente, podemos decir que la parte de la suma S extendida a las representaciones de las dos primeras categorías es igual a cero.

Examinemos una representación de la tercera categoría $n = \sum_m a + d$.

Por cuanto d no se encuentra entre los sumandos a , esta representación puede considerarse como una partición no ordenada de n en $m+1$ sumandos desiguales. Viceversa, a partir de cada partición de $n = a_1 + \dots + a_{m+1}$ obtendremos $m+1$ representaciones de la tercera categoría, tomando d igual a a_1, a_2, \dots, a_{m+1} . Estas representaciones darán en la suma S los términos $(-1)^m a_1 + (-1)^m a_2 + \dots + (-1)^m a_{m+1} = (-1)^m n$. De aquí está claro que toda la suma S es igual a $n \sum (-1)^m$, donde $\sum (-1)^m$ se calcula respecto de todas las particiones no ordenadas de n en sumandos distintos, cuyo número es $m+1$. De acuerdo con la fórmula de Euler-Legendre (del problema 1.47), $S = \begin{cases} (-1)^{S-1} n, & \text{lo que se trataba de demostrar.} \\ n = w_S \end{cases}$

1.49. Examinemos una suma $S = \sum (-1)^m$ respecto de las particiones $n = \sum_m a + \sum a^*$, donde $\sum_m a$ denota la suma no ordenada m de sumandos desiguales, y $\sum a^*$, una suma no ordenada de sumandos iguales o desiguales. Demostremos que $S = 0$.

Reunamos en un grupo aquellas particiones en las cuales la totalidad de sumandos a y a^* es la misma; supongamos que en ella se contienen k sumandos desiguales. Es evidente que todas las particiones del grupo a considerar se obtienen cuando a partir de los k sumandos elegimos ciertos sumandos m ($m = 0, 1, \dots, k$) y los incluimos en la suma $\sum_m a$; los demás sumandos los incluimos en la suma $\sum a^*$. La suma $\sum (-1)^m$ formada para ellos será: $1 - C_k^1 + C_k^2 - \dots \pm C_k^k = 0$. Por consiguiente, también $S = 0$. Reunamos ahora en la suma S los términos, para los cuales $\sum_m a = u$ y $\sum a^* = v$ ($u + v = n$).

De acuerdo con la fórmula de Euler-Legendre, esta parte de la suma es igual a cero, si u es un número no pentagonal, e igual a $(-1)^h \bar{\mu}(v)$, si $u = w_h$. Por consiguiente, obtenemos la igualdad $\sum_{h: w_h \leq n} (-1)^h \bar{\mu}(n - w_h) = 0$, lo que se trataba de demostrar.

1.50. $F(n - hk) = \sum_{S: w_S \leq n/h - h} (-1)^S f(n - h(k + w_S))$. Al multiplicar adi-

cionalmente por $\bar{\mu}(k)$ y al sumar respecto de k , obtendremos

$$\sum_{h, S} \bar{\mu}(k) F(n-hk) = \sum_{h, S} (-1)^S \bar{\mu}(k) f(n-h(k+w_S)).$$

Reuniendo en la última suma doble aquellos términos, para los cuales $k+w_S=l$ tiene un mismo valor, obtendremos

$$\sum_{0 \leq l \leq n/h} f(n-hl) \sum_{h: w_S \leq l} (-1)^S \bar{\mu}(l-w_S).$$

De conformidad con el problema antecedente, la suma interior es igual a cero cuando $l > 0$. Por consiguiente, toda la suma es igual a $f(n)$.

1.51. a) la demostración es igual que en el problema 1.49. Se debe demostrar la igualdad

$$\sum_m \sum_{a+\sum b} (-1)^m = \sum_m \sum_{h=2} (-1)^m$$

y aplicar el teorema de Euler—Legendre;

b) se deduce de a) y de la fórmula de inversión del problema 1.50.

1.52. a) se demuestra por analogía con el problema 1.49. De la fórmula de Euler—Legendre se deduce

$$\sum_m \sum_{a+\sum b} (-1)^m = \begin{cases} (-1)^{n+S}, & n = w_S, \\ 0, & n \neq w_S; \end{cases}$$

b) se deduce de a) y de la fórmula de inversión del problema 1.50.

1.53. Este número es igual al coeficiente de x^m en el polinomio $(x^l + x^{l+1} + \dots + x^n)^p = x^{lp} (1 - x^{n-l+1}) (1 - x)^{-p}$. En virtud de la fórmula del binomio de Newton llegamos a que este coeficiente es igual a

$$\begin{aligned} & C_{m-(l-1)p-1}^{m-lp} - C_p^l C_{m-(l-1)(p-1)-n-1}^{m+l-n-1-lp} + C_p^2 C_{m-(l-1)(p-2)-2n-1}^{m+2(l-n-1)-lp} + \dots \\ & x^{lp} \left[\sum_{h_1=0}^p (-1)^{h_1} C_p^{h_1} x^{(n-l+1)h_1} \right] \left[\sum_{h_2=0}^{\infty} C_{p+h_2-1}^{h_2} x^{h_2} \right] = \\ & = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \left\{ \sum_{lp+(n-l+1)h_1+h_2=m} (-1)^{h_1} C_p^{h_1} C_{p+h_2-1}^{h_2} \right\}. \end{aligned}$$

1.54. El círculo que se obtiene cuando el m -ésimo plano corta una esfera se interseca con cada uno de los planos restantes en dos puntos y, por tanto, se divide en $2(m-1)$ partes. Si suprimimos el m -ésimo círculo, el número de partes será $F(2m-1)$. Por consiguiente, $F(m) = 2(m-1) + F(m-1) = 2 + m(m-1)$, puesto que $F(1) = 2$.

1.55. A cada una de C_{n-ks}^k elecciones de k números a partir de $n-ks$ se le hace corresponder la elección de k vértices a partir de n del modo siguiente: a la derecha del siguiente número elegido i pondremos los números $i+1, \dots, i+s$, y los números que van detrás los aumentamos en s . De una manera semejante encontramos sC_{n-hs-1}^{h-1} elecciones no abarcadas antes, cuando quedó elegido uno de los vértices $n-s, n-s+1, \dots, n$. Tenemos en total $C_{n-ks}^k + sC_{n-hs-1}^{h-1}$ polígonos de k lados.

1.56. Sea $V(n)$ la función buscada. Demostremos una relación recurrente

$$V(n) = \sum_{s=0}^{n-1} V(s) V(n-s-1), \quad V(0) = 1. \text{ En efecto, cualquiera que sea la}$$

partición, existe un triángulo que contiene la arista $(n+1, n+2)$ (convengamos en considerar que los vértices del triángulo vienen enumerados con las cifras del 1 al $n+2$). El tercer vértice del triángulo puede ser cualquiera de los restantes $1, 2, \dots, n$. Supongamos que es el vértice S . Si suprimimos el triángulo $(n+1, n+2, s)$, obtendremos dos polígonos con un número de vértices igual a $s+1$ y $n-s+2$, los cuales pueden ser partidos en triángulos empleando $V(s-1)$ y $V(n-s)$ métodos, respectivamente. Al enumerar respecto de $S = 1, \dots, n$, obtendremos la fórmula requerida. Se puede demostrar que la solución de esta fórmula recurrente será $V(n) = C_{2n}^n / (n+1)$.

1.57. Sea $V(n)$ la función buscada. Demostremos una relación recurrente $V(k+1) = V(k) + k + 1$, $V(1) = 2$. De aquí obtenemos de una vez

$$V(n) = 2 + (2 + 3 + \dots + n) = (n^2 + n + 2)/2.$$

Sean trazadas k rectas. Tracemos adicionalmente la $(k+1)$ -ésima recta. Ésta se interseca con las demás en k puntos y se divide en $k+1$ partes, cada una de las cuales pertenece a una parte nueva del plano. Por consiguiente, $V(k+1) - V(k) = k + 1$, lo que se trataba de demostrar.

1.58. Sea l el número de pares de rectas paralelas. Si $l = 0 = k_2 = k_3 = k_4 = \dots = k_n$, entonces $k_2 = n(n-1)/2$. Examinemos el vértice A de multiplicidad r . Si desplazamos un tanto todas las rectas que pasan por A , obtendremos $r(r-1)/2 - 1$ nuevos puntos de intersección. Por consiguiente,

$$\frac{n(n-1)}{2} = l + \sum_{r=2}^n \frac{r(r-1)}{2} k_r.$$

De aquí

$$l = \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{r=2}^n \frac{r(r-1)}{2} k_r.$$

1.59. Sea $V(n)$ la función buscada. Si todas las rectas se intersecaran en dos y cualesquiera tres de ellas no se intersecaran en un punto, tendríamos, según el problema 1.57:

$$V(n) = 2 + 2 + 3 + \dots + n = n(n-1)/2 + 1 = (n^2 + n + 2)/2.$$

Un punto de multiplicidad r provoca la disminución del número de partes en una magnitud

$$(r^2 + r + 2)/2 - 2r = (r^2 - 3r + 2)/2.$$

Si no hay rectas paralelas, entonces

$$V(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2} - \sum_{r=2}^n k_r \left(\frac{r^2 + r + 2}{2} - 2r \right).$$

Si hay l pares de rectas paralelas, entonces

$$V(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2} - l - \sum_{r=2}^n k_r \left(\frac{r^2 + r + 2}{2} - 2r \right).$$

Haciendo uso del resultado obtenido para el problema 1.58, obtendremos

$$V(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2} - \frac{n^2 - n}{2} + \sum_{r=2}^n k_r \frac{r^2 - r}{2} - \\ - \sum_{r=2}^n k_r \frac{r^2 - 3r + 2}{2} = n + 1 + \sum_{r=2}^n (r-1) k_r.$$

Esta fórmula puede ser obtenida también por inducción.

1.60. Supongamos que ya se han trazado $k - 1$ planos. Tracemos el k -ésimo plano. Éste se interseca con los planos trazados anteriormente a lo largo de $k - 1$ rectas, las cuales lo dividen en $(k^2 - k + 2)/2$ partes. Cada una de estas partes corresponde a la nueva parte del espacio. Por eso, n planos dividen el espacio en

$$1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^2 - k + 2) = \frac{1}{6} (n+1)(n^2 - n + 6)$$

partes.

1.61. Supongamos que ya se han trazado $k - 1$ planos. Tracemos el k -ésimo plano. Éste se interseca con los planos trazados anteriormente a lo largo de $k - 1$ líneas. Dichas líneas se cortan en un punto A y dividen el k -ésimo plano en $2(k - 1)$ partes. Cada una de las citadas partes corresponde a una nueva parte del espacio. Por eso, el número total de partes será $2 + \sum_{s=2}^n 2(s - 1) = k^2 - k + 2$.

1.62. El problema es análogo al problema correspondiente sobre las rectas en un plano, $l = C_n^2 - \sum_{s=2}^n l_s C_s^2$.

1.63. El número total de partes es igual, de acuerdo con el problema 1.60, a $(n + 1)(n^2 - n + 6)/6$. Cada terna de planos que no se cortan en un mismo punto provoca la disminución en 1. El número de tales ternas es igual a $k = C_n^3 - \sum_{s=3}^n k_s C_s^3$. Cada punto, perteneciente a s planos, da una disminución del número de partes en

$$(s + 1)(s^2 - s + 6)/6 - (s^2 - s + 2) = (s^3 - 6s^2 + 11s - 6)/6.$$

Por consiguiente, el número total de partes (si no hay planos paralelos) es igual a

$$\frac{1}{6} (n+1)(n^2 - n + 6) - \left(C_n^3 - \sum_{s=3}^n k_s C_s^3 \right) - \sum_{s=3}^n k_s \frac{s^3 - 6s^2 + 11s - 6}{6} = \\ = \frac{n^2 + n + 2}{2} + \sum_{s=3}^n k_s \frac{s^2 - 3s + 2}{2}.$$

§ 4. Problemas mixtos

1.64. Suele decirse que la permutación de un n -conjunto tiene la *especificación* $(k_1 k_2 \dots k_n)$, si contiene k_i elementos de la i -ésima clase ($i = 1, \dots, n$).

a) Esto es el número de permutaciones del $2n$ -conjunto que tiene la especificación (2^n) .

b) Esto es el número de permutaciones del $3n$ -conjunto que tiene la especificación (3^n) .

c) $(n^2)!(n!)^n$ es el número de permutaciones del n^2 -conjunto que tiene la especificación (n^n) . Demostremos que este número se divide por $n!$. Partamos nuestro conjunto de permutaciones en clases de equivalencia empleando el siguiente procedimiento.

Dos permutaciones del n^2 -conjunto de especificación (n^n) se llamarán *equivalentes*, si existe tal sustitución (i_1, i_2, \dots, i_n) que los lugares ocupados en la 1^{ra} permutación por los elementos de la primera clase, en la segunda permutación estos lugares están ocupados por los elementos de la i -ésima clase; los lugares de la primera permutación ocupados por los elementos de la segunda clase, están ocupados en la segunda permutación por los elementos de la i_2 -ésima clase, etc.

Es fácil comprobar que el conjunto de permutaciones lo hemos partido de este modo en clases de equivalencia y la potencia de cada una de estas clases es igual a $n!$, lo que nos lleva a la solución del problema.

d) $(kl)/(k!)(k-1)!$ es el número de permutaciones del kl -conjunto que tiene la especificación $(k(k-1))$.

e) $(2n!)/(n!(n+1)!) = 4C_{2n-1}^n - C_{2n+1}^n$, lo que demuestra que el resultado es de número entero.

1.65. Demostremos al principio el siguiente lema: para que un número de la forma $x^2 + y^2$ se divida por 49, es necesario y suficiente que x e y se dividan por 7.

Demostración. La suficiencia es obvia. En efecto, si x e y se dividen por 7, entonces x^2 e y^2 , y, por tanto, $x^2 + y^2$ se dividen por 49.

Necesidad. Supongamos que $x^2 + y^2$ se divide por 49. Demostremos que tanto x como y se dividen por 7. Cada uno de los números x e y pueden escribirse en la forma

$$x = 7x_1 + \alpha, \quad y = 7y_1 + \beta, \quad (*)$$

donde x_1 e y_1 son números enteros no negativos, mientras que α y β tienen uno de los valores $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$. Teniendo presentes las igualdades (*), la expresión $x^2 + y^2$ puede escribirse del modo siguiente:

$$x^2 + y^2 = 49(x_1^2 + y_1^2) + 14(\alpha x_1 + \beta y_1) + \alpha^2 + \beta^2.$$

Dado que, por hipótesis, $x^2 + y^2$ se divide por 49, y, por tanto, se divide por 7, y, además, por 7 se dividen los dos primeros sumandos en el segundo miembro de la igualdad, llegamos a que $\alpha^2 + \beta^2$ se divide por 7. El valor máximo que puede asumir la suma $\alpha^2 + \beta^2$ es igual a 18. Entre los números enteros de 0 a 18 se dividen por 7 solamente 0, 7 y 14. Quiere decir, que la magnitud $\alpha^2 + \beta^2$ es igual o bien a 0, o bien a 7, o bien a 14. Por cuanto los valores que pueden tomar α y β son sólo de 0, 1, 4 y 9, es fácil de convencerse de que $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, puesto que la suma de dos sumandos formados de los números 0, 1, 4 y 9 no puede ser igual a 7 ó a 14. De este modo el lema queda demostrado.

Denotemos con n el número de los números enteros positivos que son inferiores a 1000 y que se dividen por 7. Es evidente que n es igual a la parte entera del número $1000/7$, es decir, a 142. En este caso el número de pares diferentes de números enteros x o y ($x \neq y$) del 1 al 1000, para los cuales $(x^2 + y^2)/49$ es un número entero, es igual a $C_{142}^2 = 10011$. Además, hay 142 pares más de la forma (x, x) . Por consiguiente, el número de pares diferentes (x, y) es igual a 10153.

1.66. Entre los números de una serie natural del 1 al n se tienen $n - [n/p]$ números que no se dividen por p . De éstos se pueden formar $C_{n-[n/p]}^h$ productos que no se dividen por p . El número total de productos será igual a C_n^h . Por consiguiente, $N = C_n^h - C_{n-[n/p]}^h$.

$$1.67. n \sum_{k=1}^{[(n-2)/2]} [k(n-k-2)+1], \quad n \text{ es impar,}$$

$$n \sum_{k=1}^{(n-2)/2-1} [k(n-2-k)+1] + \frac{n}{2} \left(\left(\frac{n-2}{2} \right)^2 + 1 \right), \quad n \text{ es par.}$$

1.68. Hay en total $C_2^2 = 10$ rectas. De cada punto salen 6 perpendiculares. Examinemos dos puntos cualesquiera B y C . Por cuanto las perpendiculares, bajadas de los puntos B y C a la recta que une otros dos puntos D y E , no se intersecan, las perpendiculares bajadas de los puntos B y C tienen $6 \times 6 - 3 = 33$ puntos de intersección. A partir de 5 puntos pueden formarse 10 pares. Por consiguiente, existen no más que 330 puntos de intersección. Pero algunos puntos los hemos contado varias veces. En efecto, cualesquiera tres puntos de los cinco dados forman triángulos. Las alturas de estos triángulos se cortan en un punto y este último se ha contado tres veces. Hay en total $C_3^2 = 10$ de tales triángulos. Por consiguiente, el número máximo de puntos de intersección es igual a $330 - 20 = 310$.

1.69. Procedimiento 1. Unamos sucesivamente los puntos tomados en la circunferencia por medio de cuerdas. Calculemos en cuántas partes se divide por diagonales el polígono de n lados obtenido. Las diagonales se trazarán de una manera sucesiva. Notemos que, una vez trazada cada diagonal, el número de partes aumenta en un número que es en la unidad superior al número de puntos de intersección, los cuales aparecen luego de trazar las diagonales. Por eso, el número de partes, en las cuales las diagonales dividen el polígono, es igual a 1 (al principio teníamos una parte: todo el polígono) más el número de diagonales, más el número de puntos de intersección de las diagonales. El número de diagonales del polígono de n lados es $n(n-3)/2$. El número de puntos de intersección de las diagonales del polígono es igual a C_n^4 (cada punto de intersección se define por cuatro vértices). Por consiguiente, el número de partes en las que se dividirá el círculo es $N = 1 + n(n-3)/2 + C_n^4 + n$.

Procedimiento 2. Supongamos que entre las partes obtenidas hay N_3 triángulos, N_4 cuadriláteros, etc., N_m polígonos de m lados. Se debe hallar la suma $N = N_3 + N_4 + \dots + N_m$. Observemos que el número de todos los vértices obtenidos de los polígonos es igual a $3N_3 + 4N_4 + \dots + mN_m$. Este mismo número puede hallarse de un modo distinto: cada uno de los puntos de intersección de las diagonales del polígono de n lados (hay en total C_n^4 de ellos) es un vértice de cuatro polígonos, y cada vértice del polígono de n lados es el vértice de $n-2$ polígonos, por lo cual $3N_3 + 4N_4 + \dots + mN_m = 4C_n^4 + n(n-2)$. La suma de ángulos de todos los polígonos obtenidos es igual a $[N_3(3-2) + N_4(4-2) + \dots + N_m(m-2)]\pi$. Por otra parte, esta misma suma es igual a $2\pi C_n^4 + (n-2)\pi$, por lo cual $N_3(3-2) + N_4(4-2) + \dots + N_m(m-2) = 2C_n^4 + (n-2)$. De aquí, $3N_3 + 4N_4 + \dots + mN_m - 2N = 2C_n^4 + n - 2$, o bien

$$2N = 2C_n^4 + (n-2)(n-1), \quad N = C_n^4 + n(n-3)/2 + 1.$$

Así pues, el círculo queda dividido en $N + n$ partes.

1.70. Dividamos 20 equipos en dos subgrupos, de 10 equipos cada uno, y en cada uno de los subgrupos realicemos un torneo según el sistema de rueda. Se jugarán en total $N = C_{10}^2 + C_{10}^2 = 90$ partidos. Es evidente que el torneo realizado de esta manera satisface la hipótesis del problema. Demostremos que esto es el número mínimo de partidos. Supongamos que existe un torneo que satisface la hipótesis del problema y que $N \leq 90$. En tal caso existe un equipo

A que jugó con los demás equipos no menos de 9 partidos. Denotemos con K los equipos que jugaron con A , y con Y los que no jugaron. Es evidente que todos los Y equipos jugaron entre sí (C_K^2 partidos). Supongamos que entre K equipos P pares no jugaron entre sí, y $C_K^2 - P$, sí jugaron. Entonces cualquier equipo de Y ha de jugar por lo menos con un equipo en cada uno de los citados P pares. Teniendo en cuenta que cualquier equipo pertenece a lo sumo a $K - 1$ pares de P , concluimos que deben realizarse no menos de $(19 - K)P/(K - 1)$ partidos entre K e Y . De este modo, se han jugado no menos de $N = C_K^2 - P + (19 - K)P/(K - 1) + C_{19-K}^2 + K$ partidos. Considerando que $K \leq 9$, tenemos

$$N \geq K(K - 1)/2 + (19 - K)(18 - K)/2 + K = \\ = K^2 - 18K + 9 \cdot 19 = (K - 9)^2 + 90 \geq 90.$$

1.71. La probabilidad de que las torres no se capten una a la otra es mayor. Ella es igual a $(64 \cdot 49)/(64 \cdot 63) = 49/63$.

1.72. Supongamos lo contrario. Hay en total 10 rectas horizontales y verticales de este tipo. No es difícil notar que cada recta corta sin falta un número par de fichas de dominó. En efecto, veamos, por ejemplo, una línea horizontal. En la mitad superior, obtenida como resultado de la división del tablero por la recta citada, se contiene un número par de casillas (el ancho del tablero es de 6 casillas). Las fichas de dominó dispuestas íntegramente en esta parte (mitad superior) también ocupan el número par de casillas (cada ficha ocupa dos casillas). Además de éstas hay algunas casillas más ocupadas por las mitades de las fichas que cortan la recta. De este modo queda demostrado que el número de dichas casillas (es decir, el número de fichas cortadas por la recta) es la diferencia entre dos números pares, o sea un número par.

Así pues, cada una de las 10 rectas corta cierto número de fichas, es decir, al menos dos. Cada ficha se corta por una sola recta, por lo cual en el tablero deben haber no menos de 20 fichas. Por otra parte, está claro que se necesitan 18 fichas para cubrir el tablero.

La contradicción obtenida muestra que, cualquiera que sea la disposición de las fichas que cubren el tablero, existe al menos una recta de las 10 que no corta ninguna ficha de dominó.

1.73. Por encima de cada vertical de un tablero de ajedrez escribamos los números 1, 2, 3, ..., 8, y a la izquierda, cerca de cada horizontal, los números 0, 8, 16, 24, ..., 56; en este caso puede considerarse que en cada casilla del tablero está escrita la suma de dos números correspondientes a sus verticales y horizontales (fig. 1.1'). Por cuanto 8 torres dispuestas en el tablero de ajedrez no se captan una a la otra, cada vertical y cada horizontal contendrán obligatoriamente una torre. Quiere decir que en la suma de los números de aquellos escaques, donde se disponen las torres, figurarán una vez todos los números 1, 2, ..., 8, correspondientes a las diferentes verticales, y una vez todos los números 0, 8, 16, ..., 56, correspondientes a las diferentes horizontales. Por eso, la suma de los números tendrá siempre un mismo valor: $1 + 2 + 3 + \dots + 8 + 0 + 8 + 16 + \dots + 56 = 260$.

1.74. El número de rectángulos de dimensión $i \times j$ es igual a $(n - i + 1) \times (n - j + 1)$. Todo rectángulo se cuenta en la suma tantas veces como es su área. De aquí la suma será

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (n - i + 1)(n - j + 1)ij = \left(\sum_{i=1}^n (n - i + 1)i \right)^2 = \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \right)^2.$$

1.75. La cápsula convexa de cinco puntos en un plano, mencionados en el problema, puede tener la forma de un pentágono, un cuadrilátero o un triángulo; en los primeros dos casos la afirmación es evidente. En cuanto al último caso, hay que constatar que en el interior del triángulo resulta haber dos puntos

(fig. 1.2'). Tracemos por éstos una recta y dividamos el triángulo en dos partes. En virtud del principio de Dirichlet, en una de las partes caerán dos vértices. Los últimos forman, junto con dos puntos interiores, el cuadrilátero que se busca.

	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0+1	0+2	0+3	0+4	0+5	0+6	0+7	0+8
8	8+1							8+8
16	16+1	16+2						16+8
24								24+8
32								
40								
48								
56	56+1	56+2	56+3			56+8

Fig. 1.1'.

1.76. Por cuanto durante el paseo se encuentran n cruces y en cada una de ellas se tienen sólo dos posibilidades, entonces tendremos en total 2^n caminos. En el k -ésimo cruce de la n -ésima fila podemos llegar empleando C_n^k rutas. De este modo, la probabilidad buscada es igual a $p = C_n^k/2^n$.

1.77. *Indicaciones.* El número de rutas que llevan a la n -ésima fila de cruces se compara con el número de rutas que llevan a la $(n+1)$ -ésima fila.

1.78. La raíz de la ecuación $ax = b$ es superior a uno a condición de que $b > a$. Examinemos los parámetros a y b , tomándolos por coordenadas cartesianas rectangulares de un punto del plano (fig. 1.3'). Por cuanto a y b son naturales, entonces $a > 0$, $b > 0$. Por eso el número de todos los resultados posibles es igual a mn .

Si $m \leq n$, el número de resultados no favorables para el suceso en consideración será igual a $1 + 2 + \dots + (m-1) + m = (m+1)m/2$. Por eso, al suceso que se considera favorecen $mn - m \times (m+1)/2$ casos posibles, es decir, $m(2n - m - 1)/2$. Por eso la probabilidad se halla de la fórmula $p = (2n - m - 1)/(2n)$.

Si $m > n$, el número de resultados que favorecen al suceso en consideración será igual a $1 + 2 + \dots + (n-1) = (n-1)n/2$, por consiguiente, $p = (n-1)/(2m)$.

1.79. A cada determinado trayecto del camino le corresponde una «palabra» que consta de m letras a y n letras b , y viceversa. Por ejemplo, la «palabra» $aabbabb$ significa que el camino consta de dos unidades por la horizontal, tres unidades por la vertical, una unidad por la horizontal y dos unidades por la vertical, a consecuencia de lo cual se alcanza el punto (m, n) (en este caso $m = 3$, $n = 5$). Mas, evidentemente, a partir de las letras a y b , de las cuales la primera interviene m veces y la segunda, n veces, pueden formarse $C_{m+n}^m = (m+n)!/$

$/(m|n|)$ «palabras» que serán precisamente el número buscado de caminos diferentes.

1.80. Supongamos que el lado AB es vertical y contiene m segmentos y que el lado AD es horizontal y contiene km segmentos. Los caminos que tienen por comienzo el segmento AB_1 (AD_1), los llamaremos brevemente caminos del tipo AB (del tipo AD , respectivamente).

Tomemos un camino del tipo AD . Marquemos en éste uno de los segmentos verticales MN y traslademos todo el trozo $D_1 \dots M$ en un retículo hacia arriba y a la derecha; obtendremos el trozo B_1M . A todo camino $AD_1 \dots MN \dots C$ con el segmento vertical marcado MN pongámosle en correspondencia el camino $AB_1 \dots M_1N \dots C$ con el segmento horizontal marcado M_1N . Tal correspondencia es biunívoca. Supongamos que existen en total b caminos del tipo AB y d caminos del tipo AD . Por cuanto en cada camino se tienen m segmentos verticales y km horizontales, entonces existen bkm caminos del tipo AB con

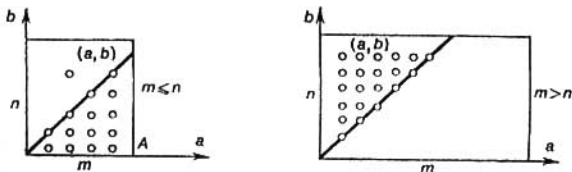


Fig. 1.3'.

el segmento horizontal marcado y dm caminos del tipo AD con el segmento vertical marcado. Según lo demostrado más arriba estos números son iguales, es decir, $bkm = dm \Rightarrow bk = d$.

1.81. Dividamos toda clase de rutas en dos grupos: las que pasan por el punto C y las que pasan por el punto D . No existen otros métodos para llegar al punto B . De A a C se puede llegar empleando cinco métodos, y de C a B , sólo utilizando un método. Por consiguiente, el primer grupo consta de 5×1 rutas. De A al punto D se puede llegar a través de E o a través de F . De A e E podemos llegar empleando tres métodos, y de A a F , empleando dos métodos. Así, pues, de A a D podemos llegar empleando $3 + 2 = 5$ métodos. Pero, de D a B se puede llegar por dos métodos y, por tanto, de A a B , llevan, a través de D , $5 \times 2 = 10$ rutas. De este modo, el número total de toda clase de rutas que llevan desde el punto A hasta el B , evitando el punto M , es igual a 15.

1.82. Si el punto A está elegido, entonces los dos vértices restantes del triángulo, B y C , pueden ser elegidos empleando 28 ($8 \times 7/2$) métodos. Sin

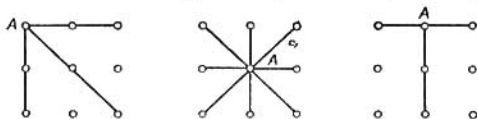


Fig. 1.4'.

embargo, en este caso puede ocurrir que los puntos A , B y C resulten estar en una misma recta. El número de casos, cuando esto sucede, depende de la disposición del punto A (fig. 1.4'). Si A es un punto anguloso, se deben excluir tres pares de puntos B y C ; si A es un punto central, se deben excluir cuatro pares de puntos B y C , y para las posiciones restantes del punto A , dos pares de puntos B y C .

De este modo, el número total de triángulos depende de la posición del punto A y es igual a 24, 25 ó 26.

1.83. 1) Cada par de miembros de la comisión pudo encontrarse no más que en una sesión. En cada sesión hubo $10 \times 9/2$ pares de hombres. Se trata en total de 40 reuniones, es decir, en total eran por lo menos 1800 pares de miembros de la comisión. Pero, de 60 hombres se pueden formar sólo $60 \times 59/2 < 1800$ pares.

2) Supongamos que el número total de miembros de la comisión N no es superior a 60; entonces, por cuanto $10 \times 40/N > 6$, se encontrará un hombre que asistió por lo menos a siete sesiones. Todos aquellos hombres con los cuales él se encontraba son distintos y su cantidad total se calcula como $7 \times 9 > 60$, lo que contradice nuestra suposición.

1.84. El requisito de que ningún par de comisiones tengan más de un miembro común es equivalente a que ningún par de colaboradores intervenga más que en una comisión. El número de todos los pares es igual a $25 \times 24/2 = 300$, el número de pares en una comisión es igual a $5 \times 4/2 = 10$. El número máximo posible de miembros de la comisión es igual a $300/10 = 30$.

1.85. El valor máximo posible de C_1 es 24. Si los primeros puestos se otorgaron a un deportista (por todos los nueve jueces), entonces $C_1 = 9$. Si los primeros puestos se otorgaron a dos deportistas en total, entonces uno de ellos obtuvo no menos de cinco primeros puestos, y los demás cuatro puestos obtenidos por él no son superiores al cuarto; por eso, $C_1 \leq 5 \times 1 + 4 \times 4 = 21$. Si los primeros puestos fueron obtenidos por tres deportistas, entonces, dado que los puestos restantes obtenidos por ellos no son superiores al cuarto (y hay en total 10 cuartos puestos), la suma de todos estos puestos de los tres deportistas citados no sobrepasa de $1 \times 9 + 3 \times 9 + 4 \times 9 = 72$. Por consiguiente, al menos uno de los deportistas tiene una suma de puestos no superior a 24, es decir, $C_1 \leq 24$. Si tales deportistas, son cuatro, la suma de sus puestos no será superior a $1 \times 9 + 2 \times 9 + 3 \times 9 + 4 \times 9 = 90$, por lo cual, la suma de puntos de algunos de ellos no es superior a 22.

El caso en que los primeros puestos son obtenidos por cinco y más hombres no es posible, puesto que para ellos faltan los puestos del 1 al 4 (hay en total $9 \times 4 = 36$ de tales puestos).

He aquí un caso en que $C_1 = 24$: cada uno de los tres mejores deportistas obtiene los puestos 1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4; los dos siguientes: 2, 2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5 y 2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5, etc.

1.86. En un mismo poste puede haber dos números, cuando y sólo cuando la suma de ellos es igual a 999. Por eso, si analizamos un poste, en el cual hay sólo dos cifras diferentes, entonces, en el caso de que una de las cifras sea C , la otra será obligatoriamente $9 - C$. Hay en total $2^3 = 8$ postes, en los cuales están marcados números expresados con las cifras C y $9 - C$ (en cada uno de los primeros tres lugares puede haber una cifra: C ó $9 - C$); existen en total 5 pares posibles de cifras ($C, 9 - C$). Por eso, el número de todos los postes, en los cuales hay sólo dos cifras diferentes, es igual a 40.

1.87. Es obvio que el empate lo darán 9 números de cifras iguales (no hay el número 0000). Supondremos por eso que el número de «empates» tiene por lo menos dos cifras diferentes a y b ; sean c y d las cifras restantes del número. Entonces, por definición del número de «empates», las diferencias $(b + d) - (a + c)$ y $(b + c) - (a + d)$ tienen, como última cifra, el 0, por lo cual 0 también será la última cifra de su suma $2(b - a)$. Por cuanto $b \neq a$, a y b se diferencian en 5. De este modo, cualesquiera dos cifras distintas del número difieren en 5. Por eso, si prefijamos una cifra, por ejemplo, $a = 1$, las demás cifras se definirán de una manera unívoca. En el caso dado éstas serán 1 y 6. Es fácil convencerse de que realmente los números de «empate» serán aquellos que constan de dos pares de cifras iguales. Con las cifras 1 y 6 habrá 6 tales números: 1166, 1616, 1661, 6161, 6611, 6116. Seis números pueden formarse de las cifras 2 y 7; 3 y 8; 4 y 9; 0 y 5. De este modo, la cantidad total de los números de «empate» será igual a 39 ($6 \times 5 + 9 = 39$).

1.88. Está claro que el tiempo de coloración será mínimo, si se logra dis-

tribuir el trabajo de un modo tal que cada cinco segundos se pinten el número máximo de caras, es decir, tres. Esto se consigue, evidentemente, mediante varios métodos. Por ejemplo, los primeros 183 cubos se pintan por cada hombre totalmente, a continuación, mientras dos pintan por completo un cubo cada uno, el tercer hombre pinta dos caras de los tres cubos restantes, y, por fin, todos los tres pintan cuatro caras cada uno de tres cubos. En este caso tres hombres cumplen todo el trabajo en el transcurso de $188 \times 5 \times 6/3 = 1880$ segundos.

1.89. Por cuanto ambos equipos contaban con un número igual de participantes, el número de todos los participantes es par. La suma máxima de tantos puede ser obtenida por 16 participantes y es igual a $16 \times 9 = 144$ ($144 < 156$), mientras que la suma mínima de tantos puede obtenerse por 20 participantes y ser igual a $20 \times 8 = 160$ ($156 < 160$). Se debe comprobar, además, que 18 participantes pueden obtener en suma 156 tantos, es decir, existen los números naturales x e y que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$x + y = 18, \quad 9x + 8y = 156.$$

La solución existe y es, además, única: $x = 12$, $y = 6$.

1.90. Es fácil ver que para formar un cuadrado se necesitan no menos de siete palos. Por eso no se puede formar un cuadrado con un lado inferior a 7 cm. Por otra parte, la suma de las longitudes de todos los palos es igual a 45 cm, y, por eso, a partir de ellos resulta imposible formar un cuadrado cuyo lado sea superior a 11 cm. A partir de los palos del juego dado se pueden formar segmentos con una longitud de 7, 8, 9, 10, 11 cm mediante los siguientes métodos:

$$\begin{aligned} 7 &= 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3 \\ 8 &= 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3, \\ 9 &= 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4 \\ 9 + 1 &= 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4, \\ 9 + 2 &= 8 + 3 = 7 + 4 = 6 + 5. \end{aligned}$$

Por consiguiente, a partir del juego dado de palos pueden formarse, empleando un solo método (C_7^4), cuadrados con lados de 7, 8, 10, 11 cm y empleando cinco métodos ($C_8^4 = C_9^4$), un cuadrado de 9 cm de lado.

1.91. El número de toda clase de métodos para aprobar los exámenes es igual a $C_{10}^3 = 10$. Por eso, si no se encontraran cinco estudiantes que aprobaron los exámenes con iguales resultados, el número de estudiantes no sobrepasaría de $4 \times 10 = 40$, lo que no tiene lugar.

1.92. Hace falta hallar la posibilidad de que al distribuir 41 hombres entre 6 grupos se realice una de estas posibilidades. Con este fin basta encontrar el número total de tales distribuciones. Supongamos que los grupos están numerados. Entonces, cada método de distribución consiste en que del conjunto 1, 2, 3, 4, 5, 6 de números de grupos tomamos el número 41: el número de unidades tomadas en este caso corresponde al número de estudiantes en el primer grupo, etc. Dicho de otro modo, el número de métodos de distribución es exactamente igual al número de combinaciones con repetición de 6 elementos tomados de a 41, el cual es igual a $C_{6+41-1}^{41} = C_{46}^4$. Por eso la probabilidad buscada es igual a $6/C_{46}^4 = 1/228\,459$.

1.93. Calculemos la cantidad de números desde 0 hasta 999999 en cuya notación no hay unidades, es decir, cuántos números de seis cifras pueden componerse empleando las cifras 0, 2, 3, 4, ..., 9 (si el número tiene menos de seis cifras, convengamos en agregarle por la izquierda el número de ceros que le falta). En el primer lugar en tal número puede figurar cualquiera de las nueve cifras, a cada una de ellas podemos agregar por la derecha cualquiera de las mismas nueve cifras: 0, 2, 3, 4, ..., 9; así pues, se obtendrán 81 números de dos cifras a partir de las cifras 0, 2, 3, 4, ..., 9. Continuando de esta manera, obtendremos 9^6 números de seis cifras, de los cuales se debe excluir 000000. Se ha mostrado, pues, que entre el primer millón existen exactamente $9^6 - 1$ números, en cuya notación no hay unidades, es decir, $9^6 - 1 = 531\,371$.

De este modo, entre el primer millón hay más números en cuya notación faltan las unidades.

1.94. La oración final, de la cual no se puede tachar ni una palabra, es «cuatro caminantes estuvieron esperando a que cesara la tormenta» y por lo tanto de la oración inicial es necesario tachar 6 palabras. Estas palabras se pueden tachar en cualquier orden, a excepción de una limitación: no se puede tachar la palabra «se desató» antes que la palabra «súbitamente». Así pues, el problema se reduce a lo siguiente: ¿de cuántas formas diferentes se pueden poner en fila 5 objetos, para que el primero siempre esté antes que el segundo? Este problema se resuelve fácilmente: la cantidad de procedimientos que existen para disponer los cinco objetos en fila es igual a $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$, y de ellos justamente la mitad, es decir 60, satisfacen la condición indicada. Se puede llegar a la oración final, de la cual no se puede tachar ni una palabra, mediante 60 procedimientos.

1.95. El número de toda clase de posiciones en el tablero de ajedrez es finito. Supongamos que es igual a n . Por consiguiente, una de las posiciones se repite un número infinito de veces. Más aún, existen sucesiones de jugadas de longitud tan grande como se quiera, las cuales se repetirán no menos de dos veces. En efecto, el número de sucesiones de las posiciones de longitud m no sobrepasa de n^m . Por consiguiente, una de las sucesiones se repite un número infinito de veces.

1.96. Los números x e y no pueden ser ambos primos, puesto que en este caso no se cumple la condición 1. De acuerdo con la hipótesis de Goldbach, todo número par es una suma de dos números primos. Por consiguiente, $x + y$ no es un número par, pues, en el caso contrario no se cumple la condición 2. Ahora, si $x + y > 53$, resulta posible la variante $x = 53$ e $y = (x + y) - 53$; en este caso no se cumple la condición 1, puesto que si en el producto xy figura un factor simple superior a 50, la respuesta para A es unívoca.

Si $x + y$ se representa por dos modos diferentes en la forma $2k + p$, donde p es un número primo, en este caso se cumplen las condiciones 1-3 y no se cumple la condición 4.

Quedan para el número $x + y$ las siguientes variantes: 5, 17, 29, 41, 53, 47. Por la comprobación inmediata nos convencemos de que la única solución la dan los números $x = 13$ e $y = 4$.

1.97. Sea m un número natural arbitrariamente prefijado. Dividamos la fracción infinita dada en segmentos de tal modo que cada uno contenga m cifras. Habrá una infinidad de tales segmentos. Por otra parte, el número de sistemas de m cifras es igual al número de m -muestras ordenadas del (10)-conjunto, $A_{(10)}^m = 10^m$, es decir, un número finito. Por consiguiente, al menos uno de estos sistemas ha de repetirse un número infinito de veces.

1.98. Los números de la sucesión 1, 2, ..., n que se dividen por p^k deben tener la forma $lp^k \leq n$, de suerte que $l \leq n/p^k$, y, por consiguiente, la cantidad de tales números es igual a n/p^k . De aquí se obtiene la fórmula requerida.

De este problema se deduce que los coeficientes binomiales $p(n_1, \dots, n_k) = n!/(n_1! \dots n_k!)$ son, por supuesto, números enteros, si calculamos cuántas veces el número primo p figura en el denominador y en el numerador y si hacemos uso de la siguiente desigualdad

$$[x + y] \geq [x] + [y].$$

En el caso general resulta válido el siguiente teorema: sean dos sistemas de formas lineales:

$$f_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k, \quad g_l(x_1, \dots, x_n) = \\ = \sum_{k=1}^n b_{lk}x_k, \quad l=1, \dots, p; \quad j=1, \dots, m,$$

con coeficientes enteros no negativos a_{ik}, b_{ik} . Para que la expresión

$$\frac{f_1(x_1, \dots, x_n)! f_2(x_1, \dots, x_n)! \dots f_m(x_1, \dots, x_n)!}{\prod_{i=1}^p g_i(x_1, \dots, x_n)!}$$

sea un número entero para cualquier sistema de valores enteros no negativos x_1, \dots, x_n , es necesario y suficiente que en todo el dominio $0 \leq y_1 \leq 1, \dots, 0 \leq y_n \leq 1$ de valores de las variables y_1, \dots, y_n se satisfaga la desigualdad

$$\sum_{i=1}^m [f_i(y_1, \dots, y_n)] \geq \sum_{i=1}^p [g_i(y_1, \dots, y_n)].$$

1.99. Del problema 1.98 proviene que la potencia máxima del número 5 que divide el número $3!!! = 720!$ es

$$\left[\frac{720}{5} \right] + \left[\frac{720}{25} \right] + \left[\frac{720}{125} \right] + \left[\frac{720}{625} \right] = 144 + 28 + 5 + 1 = 178,$$

y la potencia máxima del número 2 que divida $720!$ será aún mayor, puesto que ya $720/2 = 360$. De aquí se deduce que el número $3!!!$ tiene en el extremo 178 ceros.

1.100. Demostremos la fórmula recurrente $N = N(n) = \{N(n-1) + 2\}_n$ donde la expresión encerrada entre las llaves significa el residuo positivo mínimo según el módulo n . En efecto, si se sabe $N(n-1)$, entonces para hallar $N(n)$ se debe agregar un número y cambiar la numeración de tal modo que el segundo número tachado en la nueva numeración resulte ser el número 2 en la numeración antigua. Entonces está claro que el número $N(n-1)$ en la nueva numeración representará el número $\{N(n-1) + 2\}_n$ y será el último número no tachado.

Sea $n_0 = 1, n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_s < \dots$ es una sucesión de números naturales, para los cuales se verifica la igualdad $N(n_s) = 1$. Entonces, de la fórmula recurrente se desprenden las siguientes relaciones: $N(n) = N(n_{s-1}) + 2(n - n_{s-1})$, siempre que $n_{s-1} < n < n_s$, y $N(n_{s-1}) + 2(n_s - n_{s-1}) = n_s + N(n_s)$. De aquí obtenemos inmediatamente $n_s = 2n_{s-1} = 2^s$ y $N(n) = 2n - 2^{\lceil \log_2 n \rceil} + 1$, lo que se trataba de demostrar.

MÉTODO DE FUNCIONES GENERATRICES

§ 1. Funciones generatrices: propiedades y operaciones

$$2.1. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^N z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}.$$

$$2.2. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^N (n+1) z^n = \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{N+1} z^n \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{1-z^{N+2}}{1-z} \right) =$$

$$= \frac{1-(N+2)z^{N+1} + (N+1)z^{N+2}}{(1-z)^2}.$$

$$2.3. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)(n+2) z^n = \frac{d^2}{dz^2} \left(\sum_{n=0}^{N+1} z^n \right) =$$

$$= \frac{d}{dz} \left[\frac{1-(N+2)z^{N+1} + (N+1)z^{N+2}}{(1-z)^2} \right] =$$

$$= \frac{2-(N+2)(N+1)z^N + 2N(N+2)z^{N+1} - (N+1)^2 z^{N+2}}{(1-z)^3}.$$

$$2.4. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

$$2.5. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z)^n = \frac{1}{1-\alpha z}.$$

$$2.6. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha n z^n = \alpha z \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1} = \alpha z \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) =$$

$$= \frac{\alpha z}{(1-z)^2}.$$

$$2.7. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n[(n-1)+1] z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) z^n +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} n z^n = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) z^{n-2} + z \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1} = z^2 \frac{d^2}{dz^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) + z \frac{d}{dz} \times$$

$$\times \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = z^2 \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{1-z} \right) + z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) = z^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(1-z)^2} \right) + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{2z^2}{(1-z)^3} + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{2z^2 + z - z^2}{(1-z)^3} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}.$$

$$2.8. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n = z \sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1} (nz^{n-1}) = z \sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1} \frac{d}{dz} z^n = z \frac{d}{dz} \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1} z^n \right) = z \frac{d}{dz} g^*(z),$$

donde $g^*(z)$ es una función generatriz de la sucesión $g(n) = n^{k-1}$.

$$2.9. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n \alpha^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n (\alpha z)^n \stackrel{t=\alpha z}{=} \sum_{n=0}^{\infty} n t^n = t \sum_{n=0}^{\infty} n t^{n-1} = t \frac{d}{dt} \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) = t \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1-t} \right) = \frac{t}{(1-t)^2} = \frac{\alpha z}{(1-\alpha z)^2}.$$

$$2.10. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+p-1}^n \alpha^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+p-1}^n (\alpha z)^n \stackrel{t=\alpha z}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p-1)!}{n! (p-1)!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} p(p+1) \dots (p+n-1) t^n.$$

Esto es el desarrollo en serie de Taylor en el entorno del cero:

$$f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} t + \frac{f''(0)}{2!} t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n.$$

En nuestro ejemplo $f^{(n)}(0) = p(p+1) \dots (p+n-1)$, $f^{(n+1)}(0) = (p+n)f^{(n)}(0)$. El coeficiente de la derivada es un producto de números seguidos, si se diferencia la potencia de cierta expresión. Es necesario aclarar, si es positiva o negativa dicha potencia. Si la potencia es positiva, cada factor sucesivo será inferior al antecedente:

$$d^k x^n / dx^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) x^{n-k}.$$

Si la potencia es negativa, tendremos un aumento de los factores en su valor absoluto: $d^k x^{-n} / dx^k = (-n)(-n-1)(-n-2) \dots (-n-k+1) x^{-(n+k)} = (-1)^k n(n+1)(n+2) \dots (n+k-1) x^{-(n+k)}$. Este segundo caso coincide con el nuestro con una exactitud de hasta el factor $(-1)^k$. El citado factor puede convertirse en 1 a cuenta de la diferenciación del denominador. Esto significa que la función tiene por expresión $f(t) = 1/(a-t)^\alpha$. En tal caso $f'(0) = p \Rightarrow \alpha = p$, $f(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^p} = 1 \Rightarrow a = 1$. De este modo,

$$f(t) = \frac{1}{(1-t)^p} = \frac{1}{(1-\alpha z)^p} = f^*(z).$$

$$\begin{aligned}
 2.11. f^*(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n+p-2}^{n-1} \alpha^n z^n \stackrel{t=\alpha z}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+p-2)!}{(n-1)! (p-1)!} t^n = \\
 &= t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)+p-1]!}{(n-1)! (p-1)!} t^{n-1} \stackrel{n-1=h}{=} t \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(h+p-1)!}{h! (p-1)!} t^h = t \frac{1}{(1-t)^p} = \\
 &= \frac{\alpha z}{(1-\alpha z)^p}.
 \end{aligned}$$

$$2.12. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n} z^n \stackrel{t=\alpha z}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}.$$

Esto coincide con el desarrollo de la función $\ln(1+x)$, mas está ausente la alternación de los signos. Para que el desarrollo tenga el mismo signo, resulta suficiente tomar $x = -t$. Entonces $F(x) = F(-t) = \ln(1-t) = -(t/1 + t^2/2 + t^3/3 + \dots + t^n/n + \dots)$. De aquí se ve que

$$f^*(z) = -F(-t) = -\ln(1-t) = -\ln(1-\alpha z).$$

$$2.13. f^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha z)^n}{n!} = e^{\alpha z} - 1.$$

$$2.14. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2h+1}}{(2h+1)!} z^{2h+1}.$$

Introduzcamos las funciones auxiliares $\alpha(n) = \alpha^n/n!$ y $\beta(n) = (-\alpha)^n/n!$. Entonces $f(n) = [\alpha(n) - \beta(n)]/2$. Al sustituir esto en la suma, obtendremos

$$\begin{aligned}
 f^*(z) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha(n) - \beta(n)] z^n = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha(n) z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \beta(n) z^n \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n z^n}{n!} \right] \stackrel{t=\alpha z}{r=-\alpha z} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} \right] = \frac{1}{2} (e^t - e^r) = \frac{e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}}{2} = \text{sh}(\alpha z).
 \end{aligned}$$

2.15. $f(n) = [\alpha(n) + \beta(n)]/2$, donde $\alpha(n) = \alpha^n/n!$, $\beta(n) = (-\alpha)^n/n!$. Entonces

$$\begin{aligned}
 f^*(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha(n) + \beta(n)] z^n = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha(n) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \beta(n) z^n \right] = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n z^n}{n!} \right] \stackrel{t=\alpha z}{r=-\alpha z} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} \right] = \frac{e^t + e^r}{2} = \text{ch}(\alpha z).
 \end{aligned}$$

$$2.16. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}(\alpha n) z^n.$$

Introduzcamos la función $\psi(\alpha) = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$ y analicemos

$$\begin{aligned} F(z, \alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \psi^n(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} [z(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)]^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cos \alpha n + i \sum_{n=0}^{\infty} z^n \operatorname{sen} \alpha n; \end{aligned}$$

por otra parte,

$$F(z, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} [z\psi(\alpha)]^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-z(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)}.$$

Se puede notar que

$$\begin{aligned} f^*(z) &= \frac{1}{2i} [F(z, \alpha) - F(z, -\alpha)] = \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{(1-z \cos \alpha) - iz \operatorname{sen} \alpha} - \frac{1}{(1-z \cos \alpha) + iz \operatorname{sen} \alpha} \right] = \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1 - z \cos \alpha + iz \operatorname{sen} \alpha - 1 + z \cos \alpha + iz \operatorname{sen} \alpha}{1 - 2z \cos \alpha + z^2 \cos^2 \alpha + z^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{z \operatorname{sen} \alpha}{1 - 2z \cos \alpha + z^2}. \end{aligned}$$

2.17. Introduzcamos la función $\psi(\alpha) = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$. Demos a conocer también otra función auxiliar

$$\begin{aligned} F(z, \alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi^n(\alpha) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} [\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha]^n z^n = \frac{1 - z(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)}{1 - z(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \\ &= \frac{1}{1-t} = \frac{1}{1-z(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)}. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} F(z, \alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} [z(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)]^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n (\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cos n\alpha + i \sum_{n=0}^{\infty} z^n \operatorname{sen} n\alpha. \end{aligned}$$

En tal caso podemos observar que

$$\begin{aligned} f^*(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \alpha n z^n = \frac{1}{2} [F(z, \alpha) - F(z, -\alpha)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-z(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)} + \frac{1}{1-z(\cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1-z \cos \alpha) - iz \operatorname{sen} \alpha} + \frac{1}{(1-z \cos \alpha) + iz \operatorname{sen} \alpha} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{2(1-z \cos \alpha)}{1 - 2z \cos \alpha + z^2 \cos^2 \alpha + z^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{1 - z \cos \alpha}{1 - 2z \cos \alpha + z^2}. \end{aligned}$$

$$2.18. F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{\perp}(n) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n-1) z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} f(n-1) z^{n-1} = z \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^k = z f^*(z),$$

$$F^*(z) = z f^*(z).$$

$$2.19. F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1) z^n = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1) z^{n+1} = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} f(k) z^k = \frac{1}{z} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^k - f(0) \right] = \frac{f^*(z) - f(0)}{z}.$$

$$2.20. F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+k) z^n = \frac{1}{z^k} \sum_{n=0}^{\infty} f(n+k) z^{n+k} = \frac{1}{z^k} \sum_{i=k}^{\infty} f(i) z^i = \frac{1}{z^k} \left[\sum_{i=0}^{\infty} f(i) z^i - \sum_{r=0}^{k-1} f(r) z^r \right] = z^{-k} f^*(z) - \sum_{r=0}^{k-1} f(r) z^{r-k}.$$

$$2.21. F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \alpha^n z^n \stackrel{t=\alpha z}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f(n) t^n = f^*(t) = f^*(\alpha z).$$

$$2.22. F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n f(n) z^n = z \sum_{n=0}^{\infty} n f(n) z^{n-1} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} [f(n) z^n] = z \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n \right) = z \frac{d}{dz} f^*(z).$$

$$2.23. F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n f(i) z^n = f(0) (1+z+\dots) + f(1) (z+z^2+\dots) + f(2) (z^2+z^3+\dots) = \frac{f(0)}{1-z} + f(1) \frac{z}{1-z} + f(2) \frac{z^2}{1-z} + \dots = \frac{1}{1-z} \times \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \frac{f^*(z)}{1-z}.$$

$$2.24. F^*(z) = \sum_{n=k}^{\infty} (n-k) z^n = z^k \sum_{n=k}^{\infty} f(n-k) z^{n-k} \stackrel{i=n-k}{=} z^k \sum_{i=0}^{\infty} f(i) z^i = z^k f^*(z).$$

$$2.25. F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (f(n+1) - f(n)) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1) z^n - \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \frac{f^*(z) - f(0)}{z} - f^*(z) = \frac{(1-z) f^*(z) - f(0)}{z}.$$

$$\begin{aligned}
 2.26. F^*(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^n f(r) g(n-r) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^n f(r) z^r g(n-r) z^{n-r} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} [f(0)g(n)z^n + f(1)zg(n-1)z^{n-1} + \dots + f(n)z^n g(0)] = f(0) \sum_{n=0}^{\infty} g(n)z^n + \\
 &+ f(1)z \sum_{n=1}^{\infty} g(n-1)z^{n-1} + \dots + f(k)z^k \sum_{n=h}^{\infty} g(n-k)z^{n-h} + \dots = f(0)g^*(z) + \\
 &+ f(1)zg^*(z) + \dots = g^*(z) \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^n = g^*(z)f^*(z).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.27. F^e(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n-1) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n-1)}{n!} n \int_0^z t^{n-1} dt = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n-1)}{(n-1)!} \int_0^z t^{n-1} dt = \int_0^z \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n-1)}{(n-1)!} t^{n-1} \right) dt = \int_0^z \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{f(r)}{r!} t^r \right) dt = \\
 &= \int_0^z f^e(t) dt.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.28. F^e(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n+1)}{(n+1)!} (n+1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n+1)}{(n+1)!} \times \\
 \frac{dz^{n+1}}{dz} &= \frac{d}{dz} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n+1)}{(n+1)!} z^{n+1} + f(0) - f(0) \right] = \frac{d}{dz} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{f(h)}{h!} z^h - \frac{d}{dz} f(0) = \\
 &= \frac{d}{dz} f^e(z).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.29. F^e(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nf(n)}{n!} z^n = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} n z^{n-1} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} \frac{dz^n}{dz} = \\
 &= z \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} z^n \right) = z \frac{d}{dz} f^e(z).
 \end{aligned}$$

$$2.30. F^e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n f(n)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} (\alpha z)^n = f^e(\alpha z).$$

$$\begin{aligned}
 2.31. F^e(z) &= \sum_{n=h}^{\infty} \frac{f(n-k)}{n!} z^n = \sum_{n=h}^{\infty} \frac{f(n-k) z^n}{(n-k)! (n-k+1) \dots (n-1) n} = \\
 &= \sum_{n=h}^{\infty} \frac{f(n-k)}{(n-k)!} \int_0^z \int_0^z \dots \int_0^z t^{n-h} dt = \int_0^z \dots \int_0^z \left(\sum_{n=h}^{\infty} \frac{f(n-k)}{(n-k)!} t^{n-h} \right) dt = \\
 &= \int_0^z \dots \int_0^z f^e(t) dt.
 \end{aligned}$$

$$2.32. F^e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n+1) - f(n)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n+1)}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} z^n = \\ = \frac{d}{dz} f^e(z) - f^e(z).$$

$$2.33. F^e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^n C_n^r \frac{f(n-r)g(r)}{n!} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^n \left(\frac{f(n-r)}{(n-r)!} z^{n-r} \right) \times \\ \times \left(\frac{g(r)}{r!} z^r \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} z^n \sum_{h=0}^{\infty} \frac{g(h)}{h!} z^h = f^e(z) g^e(z).$$

$$2.34. F^e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F(n)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h_1, \dots, h_m \geq 0} \left(\frac{f_1(k_1)}{k_1!} z^{h_1} \right) \dots \dots \\ \dots \left(\frac{f_m(k_m)}{k_m!} z^{h_m} \right) = \left(\sum_{h_1=0}^{\infty} \frac{f_1(k_1)}{k_1!} z^{h_1} \right) \dots \left(\sum_{h_m=0}^{\infty} \frac{f_m(k_m)}{k_m!} z^{h_m} \right) = \\ = f_1^e(z) \dots f_m^e(z).$$

2.35. En el primer caso tenemos: para $|x| < 1$

$$(1-x)^{-n} = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{-n}{h} (-x)^h = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{-n(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} (-x)^h = \\ = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} x^h = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^h.$$

De este modo, $\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^h$ es una función generatriz de las combinaciones con repetición ilimitada de los elementos y sin restricciones del número de apariciones de un elemento de cualquier tipo. Luego,

$$\frac{x^n}{(1-x)^n} = x^n \sum_{h=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^h = \\ = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^{h+n} = \sum_{r=n}^{\infty} \binom{r-1}{r-n} x^r = \sum_{r=n}^{\infty} \binom{r-1}{n-1} x^r,$$

es decir, $\frac{x^n}{(1-x)^n} = \sum_{r=n}^{\infty} \binom{r-1}{n-1} x^r$ es la función generatriz de las combinaciones con repetición ilimitada de los elementos, siempre que exista una condición adicional de que en la combinación figura al menos un elemento de cada tipo.

2.36. Tenemos

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha^{hj}} A(\alpha^j z) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha^{hj}} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^{lj} a_l z^l = \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^l \sum_{j=1}^n \alpha^{(l-h)j}. \quad (2.2')$$

Hagamos uso del resultado conocido consistente en que

$$\sum_{j=1}^n \alpha^{(l-h)j} = \begin{cases} n, & l \equiv h \pmod{n}, \\ 0, & l \not\equiv h \pmod{n}. \end{cases}$$

En este caso el segundo miembro de (2.2') se reducirá a la función generatriz $nA_n^{(h)}(z)$, lo que demuestra (2.2).

2.38. Por cuanto $C_{n+1}(z) = (1+z)^{n+1} = (1+z)C_n(z)$, la relación a) se deduce, por ejemplo, del resultado del problema 2.26 sobre la convolución de dos sucesiones. Las identidades b) y c) se deducen de (2.3), si ponemos $z = 1$ y $z = -1$, respectivamente. Con el fin de demostrar la identidad de Vandermonde, supongamos que $m = 1, \dots, n-1$. Podemos escribir $(1+z)^n = (1+z)^{n-m}(1+z)^m$, y, entonces, d) se deduce de nuevo del problema 2.26 sobre la convolución.

Observemos que la relación recurrente a) representa un caso particular de d) para $m = 1$; d) es cierta de un modo trivial también para $m = 0$ y $m = n$, lo que puede verse con toda facilidad.

2.39. Pongamos $C(z) = (1-x_1z)(1-x_2z)\dots(1-x_nz)$. Por un lado,

$$C(z) = 1 + \sum_{m=1}^h \sigma_m(x_1, \dots, x_h)(-z)^m = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \sigma_m(x_1, \dots, x_h) z^m.$$

Por otro lado,

$$-\ln C(z) = -\sum_{i=1}^h \ln(1-x_i z) = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(x_i z)^j}{j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{S_j(x_1, \dots, x_h)}{j} z^j,$$

es decir,

$$C(z) = \exp \left\{ -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{S_j(x_1, \dots, x_h)}{j} z^j \right\}.$$

Al comparar entre sí ambas expresiones obtenidas para $C(z)$, obtendremos (2.4).

2.40. El primer miembro de (2.5) es

$$(a_0(1) + a_1(1)x + \dots + a_{h_1}(1)x^{h_1} + \dots)(a_0(2) + a_1(2)x^2 + \dots \\ \dots + a_{k_2}(2)x^{2k_2} + \dots) \dots (a_0(n) + a_1(n)x^n + \dots + a_{h_n}(n)x^{nh_n} + \dots) \dots$$

Hallemos los coeficientes de las potencias diferentes de x en este producto. Está

claro que el término independiente es igual a $\prod_{j=1}^{\infty} a_0(j)$.

Con el fin de obtener el coeficiente de x^n , donde $n \geq 0$, tomemos el k_1 -ésimo término en el 1º factor, el k_2 -ésimo término en el 2º, etc., y por fin, el k_n -ésimo término en el n -ésimo factor; en este caso los números k_1, k_2, \dots, k_n han de satisfacer la relación $n = k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n$, es decir, definir la

partición del número n . De aquí encontramos que el coeficiente de x^n , $n > 0$, en el segundo miembro de (2.5) es igual a

$$\prod_{m=n+1}^{\infty} a_0(m) \sum_{\pi(n)} a_{h_1}(1) a_{h_2}(2) \dots a_{h_n}(n),$$

y la relación (2.5) queda demostrada.

2.41. Poniendo en el problema 2.40 para cada $j = 1, 2, \dots$ todos los $a_h(j)$ ($h = 0, 1, \dots$) iguales a 1, en virtud de (2.5) obtendremos:

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{\infty} A_j(x^j) &= \prod_{j=1}^{\infty} (1 + x^j + x^{2j} + \dots + x^{hj} + \dots) = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} 1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = p(x). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + x^j + \dots + x^{hj} + \dots) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - x^j)^{-1},$$

lo que demuestra la relación (2.6).

2.42. Pongamos en el problema 2.40 para cada $j = 1, 2, \dots$, $a_h(j) = y^h$ ($h = 0, 1, \dots$). Entonces, en virtud de (2.5), tendremos

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{\infty} (1 + yx^j + y^2x^{2j} + \dots + y^h x^{hj} + \dots) = \\ = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} y^{h(n)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{h=1}^n y^h \sum_{\pi(n)} 1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^n p_{nh} y^h. \end{aligned}$$

Por otra parte, este producto es igual a $\prod_{j=1}^{\infty} (1 - yx^j)^{-1}$, lo que demuestra la relación (2.7).

2.43. Supongamos que en el problema 2.40 $a_h(j) = y_j^h$, $j = 1, 2, \dots$; $h = 0, 1, 2, \dots$. Entonces, por una parte, en virtud de (2.5)

$$\prod_{j=1}^{\infty} \prod_{h=0}^{\infty} y_j^h x^{hj} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} y_1^{h_1} y_2^{h_2} \dots y_n^{h_n},$$

por otra parte,

$$\prod_{j=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} y_j^h x^{hj} = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - y_j x^j)^{-1}.$$

Al igualar los segundos miembros de las relaciones escritas, obtenemos (2.8).

2.44. Tenemos

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \frac{xy}{1-x} \right\} &= \exp \left\{ xy \sum_{j=0}^{\infty} x^j \right\} = \exp \left\{ y \sum_{j=1}^{\infty} x^j \right\} = \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} \exp \{ yx^j \} = \prod_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} y^h \frac{x^{jh}}{h!} \right\}. \end{aligned}$$

Al suponer en el problema 2.40 $a_h(j) = y^h/(k!)^j$, $j = 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$, obtenemos, empleando la fórmula (2.5):

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} y^h \frac{x^{hj}}{k!^j} \right\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} \frac{y^{h_1 + \dots + h_n}}{k_1! k_2! \dots k_n!},$$

lo que precisamente demuestra (2.9).

2.45. Tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} L(\pi) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} a_i k_i \right).$$

Examinemos el i -ésimo término de la suma respecto de i del segundo miembro. Haciendo uso de la relación (2.5), en la cual $a_h(j) = a_j(k)$, si $j = i$; $a_h(j) = 1$, si $i \neq j$, de suerte que

$$A_i(x^i) = a_i \sum_{h=0}^{\infty} kx^{ih}, \quad A_j(x^j) = \sum_{h=0}^{\infty} x^{jh} = \frac{1}{1-x^j}, \quad j \neq i,$$

obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} a_i k_i = \prod_{j=1}^{\infty} A_j(x^j) = \left(a_i \sum_{h=0}^{\infty} kx^{ih} \right) \prod_{j \neq i} \frac{1}{1-x^j}.$$

Pero $\sum_{h=0}^{\infty} kx^h = \frac{x}{(1-x)^2}$, de modo que $\sum_{h=0}^{\infty} kx^{ih} = \frac{x^i}{(1-x^i)^2}$. Ahora, teniendo presente (2.6), encontramos

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} a_i k_i = \left(\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^j} \right) (1-x^i) \frac{a_i x^i}{(1-x^i)^2} = \frac{a_i x^i}{1-x^i} p(x).$$

De aquí se deduce el resultado requerido.

2.46. Hagamos uso de los resultados del problema 2.44. Veamos el primer miembro de la igualdad (2.9). Tomando en consideración el resultado del problema 2.35, tenemos

$$\begin{aligned} \exp(xy(1-x)^{-1}) &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{xy}{1-x} \right)^h = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{x^h y^h}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{h+j-1}{j} x^j \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{h=1}^n \frac{y^h}{k!} \binom{n-1}{h-1}. \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes de x^n en la última expresión y en el segundo miembro de (2.9), obtenemos el resultado necesario.

2.47. Desarrollemos la suma $\sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{x^j}{1-x^j}$ en una serie de potencias de x y obtengamos $\sum_{j=1}^{\infty} a_j \sum_{h=1}^{\infty} x^{hj}$. Cambiemos ahora el orden de la

sumación. Con esto fin observemos que el producto kj recorre todos los valores naturales de 1 a ∞ y es igual a n , si j recorre toda clase de divisores n . Por eso,

$$\sum = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{j|n} a_j.$$

Así pues, podemos reescribir (2.10) en la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} L(\pi) = p(x) \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{j|n} a_j,$$

de donde, según la definición de $p(x)$ (véase problema 2.41), obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} L(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{u+v=n} p_u \sum_{d|v} a_d.$$

Al comparar los coeficientes de x^n en el primer miembro y en el segundo miembro de la última relación, obtenemos (2.12).

2.48. Pongamos en (2.12) $a_i = i$ ($i = 1, 2, \dots$). Entonces $L(\pi) = k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n$ y (2.12) toma la forma

$$\sum_{\pi(n)} n = \sum_{u+v=n} p_u \sum_{d|v} d,$$

lo que demuestra el resultado requerido.

2.49. Se desprende inmediatamente del resultado del problema 2.47, si ponemos $a_1 = a_2 = \dots = 1$. Entonces $L(\pi) = k_1 + k_2 + \dots + k_n$.

2.50. Multipliquemos ambos miembros de la fórmula (2.13) por x^{n-1} y sumemos respecto de n desde 1 hasta ∞ . Tendremos como resultado

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{h=0}^{n-1} p_h \sigma_{n-h}.$$

El primer miembro de esta igualdad es $p'(x)$, mientras que el segundo es igual a $p(x)\sigma(x)$. De aquí se deduce a). Luego, de a) hallamos $p'(x)/p(x) = \sigma(x)$, de donde

$$\ln p(x) = \int_0^x \frac{p'(u)}{p(u)} du = \int_0^x \sigma(u) du = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n u^{n-1} \right) du = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \frac{x^n}{n},$$

de suerte que $p(x) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \frac{x^n}{n} \right\}$ y la relación b) queda demostrada.

La representación de c) para $p(x)$ se desprende de la forma de la función generatriz para los polinomios $C_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. En fin, la identidad d) se obtiene, si igualamos los coeficientes de potencias iguales de x^n en la representación c) para $p(x)$.

2.51. Supongamos que la relación (2.14) se cumple. En tal caso, al diferenciar respecto de x los miembros primero y segundo en (2.14), obtendremos $F'(x) = \exp\{E(x)\} E'(x) = E'(x) F(x)$.

Al igualar los coeficientes de x^n , $n \geq 0$, en los miembros primero y segundo, nos convencemos de que la igualdad (2.15) es válida. Viceversa, si tienen lugar

las igualdades (2.15), entonces, al multiplicar sus miembros primero y segundo por $\frac{1}{n!} x^n$ y al sumar respecto de n desde 0 hasta ∞ , obtendremos

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} a_{j+1} b_{n-j} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \left(a_{j+1} \frac{x^j}{j!} \right) \left(b_{n-j} \frac{x^{n-j}}{(n-j)!} \right) = E'(x) F(x); \end{aligned}$$

de aquí obtenemos la ecuación diferencial para $F(x)$: $dF(x)/F(x) = E'(x) dx$. Al resolverla, obtenemos $F(x) = E(x) + C$, de modo que $F(x) = e^{E(x)+C}$.

Para hallar la constante C , pongamos $x = 0$ y, considerando que $F(0) = b_0 = 1$ y $E(0) = a_0 = 0$, encontramos $e^C = 1$, es decir, $C = 0$. De aquí se deduce (2.14).

§ 2. Números especiales y funciones especiales

2.52. El subconjunto $M_1 \subset M$ puede ser elegido empleando $\binom{n}{r_1}$ procedimientos. Luego, $M_2 \subset M \setminus M_1$ puede ser definido empleando $\binom{n-r_1}{r_2}$ métodos, etc., por fin, para definir $M_k \subset M \setminus (M_1 \cup \dots \cup M_{k-1})$ nos restan $\binom{n-r_1-r_2-\dots-r_{k-1}}{r_k} = \binom{r_k}{r_k} = 1$ posibilidades. Por eso

$$\begin{aligned} \sigma(r_1, r_2, \dots, r_k) &= \binom{n}{r_1} \binom{n-r_1}{r_2} \dots \binom{n-r_1-\dots-r_{k-1}}{r_k} = \\ &= \frac{n!}{r_1!(n-r_1)!} \frac{(n-r_1)!}{r_2!(n-r_1-r_2)!} \dots \frac{(n-r_1-r_2-\dots-r_{k-1})!}{r_k!(n-r_1-\dots-r_k)!} = \\ &= \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k! 0!} = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}, \end{aligned}$$

lo que se trataba de demostrar.

2.53. La solución se desprende automáticamente de la afirmación del problema 2.52.

2.54. Cada partición del n -conjunto engendra cierta familia de permutaciones (sustituciones) de n símbolos. En efecto, si $\{x_1, \dots, x_k\}$ es una de las partes de la partición, entonces a base de los símbolos x_1, \dots, x_k pueden formarse $(k-1)!$ ciclos, ordenando de diferentes maneras dichos símbolos. Por eso, de cada partición del n -conjunto, que tiene k_i partes de dimensión i ($i = 1, 2, \dots, n$) pueden formarse $(0!)^{k_1} (1!)^{k_2} (2!)^{k_3} \dots \{(n-1)!\}^{k_n}$ permutaciones distintas que tienen k_i ciclos de longitud i . Al multiplicar $B_n(k_1, \dots, k_n)$ por este producto, obtendremos a). La fórmula b) se deduce ahora de a) y del problema 2.53.

2.55. Supongamos que el conjunto M se compone de los elementos a_1, \dots, a_n, a_{n+1} . Veamos cualquier partición S y admitamos que un subconjunto que contiene a_{n+1} incluye también k otros elementos, $0 \leq k \leq n$. Si k es fijo, el número de tales particiones es igual a $\binom{n}{k} B_{n-k}$. En efecto, los citados k elementos pueden elegirse del conjunto $\{a_1, \dots, a_n\}$ empleando $\binom{n}{k}$ métodos.

mientras que el conjunto de $n - k$ elementos restantes admite B_{n-k} particiones en clases disjuntas. Cuando $k = n$, no queda ningún elemento, mas el acuerdo (coordinación) $B_0 = 1$ incluye este caso también. Al sumar los números $\binom{n}{k} B_{n-k}$ respecto de k , obtenemos el resultado requerido.

2.56. Toda clase de particiones del n -conjunto M pueden ser ordenadas, prefijando diferentes particiones del número n , las cuales determinan la composición de los conjuntos que integran la partición M . Toda partición del número n se determina por el juego (k_1, k_2, \dots, k_n) de números enteros no negativos que satisfacen la relación $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$, donde k_s es la cantidad de partes, iguales a S , en la partición del número n ($s = 1, \dots, n$). Para cada una de tales particiones n , el número de particiones del conjunto M que contienen k_s s -subconjuntos es igual a $B_n(k_1, k_2, \dots, k_n)$ (véase el problema 2.53).

2.57. a) Tenemos

$$\exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{z^n}{n!} \right\} = \prod_{n=1}^{\infty} \exp \left\{ y_n \frac{z^n}{n!} \right\} = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{y_j^h}{k! (j!)^h} z^{jh} \right) = \prod_{j=1}^{\infty} A_j(z^j),$$

donde

$$A_j(z) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h(j) z^h, \quad a_h(j) = \frac{y_j^h}{k! (j!)^h}.$$

Con ayuda de (2.5) obtenemos

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{z^n}{n!} \right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{\pi(n)} \prod_{j=1}^n \frac{y_j^{h_j}}{k_j! (j!)^{h_j}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{\pi(n)} B_n(k_1, \dots, k_n) y_1^{h_1} \dots y_n^{h_n}, \end{aligned}$$

lo que demuestra la relación (2.18).

Un caso particular de la relación (2.18) es el resultado del problema 2.57, b). En efecto, suponiendo $y_1 = y_2 = \dots = y_n = \dots = 1$ en la fórmula (2.18) y tomando en consideración (2.17), demostramos la fórmula (2.19).

b) Demos a conocer la demostración directa de la fórmula (2.19) que emplea los resultados del problema 2.56. De ésta obtenemos

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left[\sum_{s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = n} \frac{n!}{\prod_{h=1}^n (k!)^{s_h} s_h!} \right].$$

Mostremos que el segundo miembro de esta expresión es igual a

$$\prod_{h=1}^{\infty} \left(\sum_{s_h=0}^{\infty} \frac{1}{s_h!} \left(\frac{x^h}{k!} \right)^{s_h} \right) = \prod_{h=1}^{\infty} e^{x^h/k!} = e^{e^x - 1},$$

de donde se deducirá la fórmula (2.19). Mas, el hecho de que el segundo miembro de la primera expresión es igual al primer miembro de la segunda se demuestra empleando los resultados del problema 2.40.

2.58. Tenemos

$$C_n(y_1, \dots, y_n) = \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} B_n(k_1, \dots, k_n) (0! y_1)^{k_1} \dots \\ \dots ((n-1)! y_n)^{k_n} = \varphi_n(0! y_1, 1! y_2, \dots, (n-1)! y_n).$$

Por consiguiente, de acuerdo con (2.18),

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(y_1, \dots, y_n) \frac{z^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(0! y_1, 1! y_2, \dots, (n-1)! y_n) \frac{z^n}{n!} = \\ = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [(n-1)! y_n] \frac{z^n}{n!} \right\} = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{z^n}{n} \right\},$$

y la relación (2.21) queda demostrada.

2.59. De acuerdo con (2.18) tenemos

$$\exp \left\{ x \sum_{i=1}^{\infty} y_i \frac{z^i}{i!} \right\} = \exp \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (x \cdot y_i) \frac{z^i}{i!} \right\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x y_1, \dots, x y_n) \frac{z^n}{n!},$$

donde, según la definición del polinomio de Bell,

$$Y_n(x y_1, \dots, x y_n) = \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} B_n(k_1, \dots, k_n) (x y_1)^{k_1} \dots (x y_n)^{k_n} = \\ = \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} x^{k_1+\dots+k_n} B_n(k_1, \dots, k_n) y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n} = \\ = \sum_{h=1}^n x^h \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=h \\ k_1+2k_2+\dots+nk_n=n}} B_n(k_1, \dots, k_n) y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n} = \\ = \sum_{h=1}^n Y_{n,h}(y_1, \dots, y_n) x^h.$$

De aquí se deduce (2.23). Suponiendo en la última relación $x = 1$, obtenemos (2.24). Luego, de (2.23) llegamos a que por un lado

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^n Y_{n,h}(y_1, \dots, y_n) x^h \frac{z^n}{n!} = \\ = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} x^h \sum_{n=h}^{\infty} Y_{n,h}(y_1, \dots, y_n) \frac{z^n}{n!};$$

por otro lado,

$$\exp \left\{ x \sum_{i=1}^{\infty} y_i \frac{z^i}{i!} \right\} = \sum_{h=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{\infty} y_i \frac{z^i}{i!} \right]^h \frac{x^h}{h!},$$

de donde se deduce (2.25).

2.60. a) Esta relación recurrente es un corolario de los resultados de los problemas 2.56 y 2.57.

b) Directamente de la definición de los polinomios $Y_n(y_1, \dots, y_n)$ (véase (2.17)) obtenemos

$$\begin{aligned} Y_n(Cy_1, \dots, C^n y_n) &= \sum_{\pi(n)} B_k(k_1, \dots, k_n) (Cy_1)^{h_1} \dots (C^n y_n)^{h_n} = \\ &= \sum_{\pi(n)} C^{h_1 + 2h_2 + \dots + nh_n} B(k_1, \dots, k_n) y_1^{h_1} \dots y_n^{h_n} = \\ &= C^n \sum_{\pi(n)} B_k(k_1, \dots, k_n) y_1^{h_1} \dots y_n^{h_n} = C^n Y_n(y_1, \dots, y_n), \end{aligned}$$

y b) queda demostrada.

c) Al diferenciar los miembros primero y segundo de la relación (2.18) respecto de y_j , encontramos

$$\sum_{n=j}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_j} Y_n(y_1, \dots, y_n) \frac{z^n}{n!} = \exp(f(z)) \frac{\partial}{\partial y_j} f(z),$$

donde

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \frac{z^n}{n!}, \quad \frac{\partial}{\partial y_j} f(z) = \frac{z^j}{j!}.$$

Teniendo en cuenta (2.18), concluimos de aquí que

$$\sum_{n=j}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_j} Y_n(y_1, \dots, y_n) \frac{z^n}{n!} = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y_1, \dots, y_n) \frac{z^n}{n!} \right) \frac{z^j}{j!}.$$

Igualando los coeficientes de z^n en los miembros primero y segundo de la última expresión, vemos que

$$\frac{1}{n!} \frac{\partial}{\partial y_j} Y_n(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{j!(n-j)!} Y_{n-j}(y_1, \dots, y_{n-j}),$$

ya c_1) queda demostrada. Como consecuencia, queda demostrada también c_2) para $r=1$. Cuando $r > 1$, c_2) se demuestra por aplicación reiterada de la operación de diferenciación. En efecto, al diferenciar r veces los miembros primero y segundo de (2.18) respecto de y_j , obtenemos por analogía con lo anterior

$$\sum_{n=j}^{\infty} \frac{\partial^r}{\partial y_j^r} Y_n(y_1, \dots, y_n) \frac{z^n}{n!} = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y_1, \dots, y_n) \frac{z^n}{n!} \right) \frac{z^j}{(j!)^r},$$

de donde se desprenden las relaciones c_2) y c_3).

d) Con ayuda de (2.18) encontramos

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) \frac{z^n}{n!} &= \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (y_n + x_n) \frac{z^n}{n!} \right\} = \\ &= \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{z^n}{n!} \right\} \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{z^n}{n!} \right\} = \\ &= \left(1 + \sum_{h=1}^{\infty} Y_h(y_1, \dots, y_h) \frac{z^h}{h!} \right) \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} Y_l(x_1, \dots, x_l) \frac{z^l}{l!} \right). \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de $x^n/n!$, obtenemos de aquí

$$\frac{1}{n!} Y_n (y_1 + x_1, \dots, x_n + y_n) = \sum_{h=0}^n \frac{Y_h (y_1, \dots, y_h) Y_{n-h} (x_1, \dots, x_{n-h})}{h! (n-h)!},$$

de donde se deduce precisamente d).

e) En virtud de c), tenemos, evidentemente:

$$\begin{aligned} & \left(y_1 + \sum_{s=1}^n y_{s+1} \frac{\partial}{\partial y_s} \right) Y_n = y_1 Y_n + \sum_{s=1}^{\infty} y_{s+1} \frac{\partial}{\partial y_s} Y_n = y_1 Y_n + \\ & + \sum_{s=1}^n \binom{n}{s} y_{s+1} Y_{n-s} (y_1, \dots, y_{n-s}) = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} y_{s+1} Y_{n-s} (y_1, \dots, y_{n-s}), \end{aligned}$$

lo que, de acuerdo con a), es igual a Y_{n+1} , y c) está demostrada.

2.51. Las relaciones para los coeficientes de la función generatriz $B_H(x)$ se deducen inmediatamente de los resultados del problema 2.57, si ponemos en él $y_j = 1$ para $j \in H$ e $y_j = 0$ para $j \notin H$. El sentido combinatorio de los números $B_n(H)$ se pone de manifiesto por analogía con el problema 2.56 para los números de Bell B_n .

2.52. a) La afirmación está clara: las relaciones $S(n, 1) = 1$, $S(n, n) = 1$ se comprueban de un modo directo, y la relación $\sum_{k=0}^n S(n, k) = B_n$ se deduce de la definición del número de Bell (problema 2.55) y de los números de Stirling de 2º género.

b) Analicemos los conjuntos $\mu_{n-1} = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ y $\mu_n = \{x_1, \dots, x_n\}$. Cualquiera partición de μ_n en k partes pueden obtenerse de las particiones de μ_{n-1} en k y $k-1$ partes agregando a μ_{n-1} el elemento x_n . Si está dada la partición de μ_{n-1} en k partes, el elemento x_n puede formar parte de uno de los conjuntos que constituyen dicha partición, lo que nos dará como resultado k diferentes particiones de μ_n en k partes. Si, en cambio, está dada una partición de μ_{n-1} en $k-1$ partes, entonces, al agregar x_n , se debe formar un subconjunto que se componga de un solo elemento x_n y esto nos dará una partición más de μ_n en k partes, diferentes de las antecedentes. Estos razonamientos demuestran precisamente b). La condición inicial no exige explicaciones.

c) Ordenemos toda clase de particiones del n -conjunto μ en k partes. Con este fin prefijemos k números enteros positivos r_i de tal índole que $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$, y examinemos diferentes (r_1, \dots, r_k) -particiones del conjunto μ . El número de tales particiones se determina por la fórmula del problema 2.52. Por cuanto en cada partición de este tipo el orden del conjunto no tiene importancia alguna, obtenemos

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{r_1 + \dots + r_k = n} \sigma(r_1, \dots, r_k) = \frac{1}{k!} \sum_{r_1 + \dots + r_k = n} \frac{n!}{r_1! \dots r_k!},$$

lo que demuestra c).

d) La demostración es análoga a la de la representación del problema 2.56 para el número de Bell.

e) Suponiendo en la relación b) $k = n-1$, obtenemos

$$\begin{aligned} S(n, n-1) &= (n-1) S(n-1, n-1) + S(n-1, n-2) = \\ &= n-1 + S(n-1, n-2) = \\ &= (n-1) + (n-2) + S(n-2, n-3) = \\ &= (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}. \end{aligned}$$

A continuación, tenemos

$$\begin{aligned} S(n, n-2) &= (n-2)S(n-1, n-2) + S(n-1, n-3) = \\ &= (n-2) \binom{n-1}{2} + S(n-1, n-3) = (n-2) \binom{n-1}{2} + (n-3) \binom{n-2}{2} + \\ &+ S(n-2, n-4) = (n-2) \binom{n-1}{2} + (n-3) \binom{n-2}{2} + \dots \\ &\dots + (n-(n-1)) \binom{n-(n-2)}{2} = \sum_{i=1}^{n-2} (n-i-1) \binom{n-i}{2}. \end{aligned}$$

2.63. Multiplicando los miembros primero y segundo de la relación b) del problema 2.62 por y^h y sumando respecto de k , obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n S(n, k) y^k &= \sum_{k=0}^n k S(n-1, k) y^k + \sum_{k=1}^n S(n-1, k-1) y^k = \\ &= y \left[\sum_{k=1}^n k S(n-1, k) y^{k-1} + \sum_{k=1}^n S(n-1, k-1) y^{k-1} \right] \end{aligned}$$

o bien, lo que es lo mismo, $P_n(y) = y [dP_{n-1}(y)/dy + P_{n-1}(y)]$, y (2.30) queda demostrada. La equivalencia de las relaciones (2.30) y (2.31) se deduce de que

$$e^y \neq 0, \quad \frac{d}{dy} (e^y P_{n-1}(y)) = e^y \frac{d}{dy} P_{n-1}(y) + e^y P_{n-1}(y).$$

2.64. Observemos que de la definición de polinomios de Bell se desprende que, cuando $n \geq 1$, en virtud del problema 2.62 d) tenemos:

$$\begin{aligned} Y_n(y, \dots, y) &= \sum_{h_1+2h_2+\dots+nh_n=n} B_n(k_1, \dots, k_n) y^{h_1+\dots+h_n} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} y^k \sum_{\substack{h_1+2h_2+\dots+nh_n=n \\ h_1+h_2+\dots+h_n=k}} B_n(k_1, \dots, k_n) = \sum_{k=1}^{\infty} S(n, k) y^k = P_n(y). \end{aligned}$$

Por eso, al poner en los miembros primero y segundo de (2.18) $y_1 = y_2 = \dots = y_n = y$, obtendremos

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(y) \frac{y^n}{n!} = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} y \frac{y^n}{n!} \right\} = \exp \{y(e^y - 1)\},$$

lo que se trataba de demostrar.

2.65. Por un lado, según la definición de función generatriz, tenemos

$$S(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n S(n, k) y^k \right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n!} S(n, k) x^n \right] y^k.$$

Por otro lado, de conformidad con (2.32), encontramos

$$S(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k y^k.$$

Comparando los coeficientes de y^k en ambas expresiones obtenidas, llegamos a (2.34).

2.66. De (2.34) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} Y_h(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{k!} (e^x - 1)^k \right] = \frac{1}{(k-1)!} (e^x - 1)^{k-1} e^x = \\ &= \frac{1}{(k-1)!} (e^x - 1)^{k-1} (e^x - 1 + 1) = \\ &= \frac{1}{(k-1)!} (e^x - 1)^k + \frac{1}{(k-1)!} (e^x - 1)^{k-1} = kY_h(x) + Y_{h-1}(x), \end{aligned}$$

lo que se trataba de demostrar.

2.67. Como se ha mostrado en el problema 2.66,

$$dY_h(x)/dx = (e^x - 1)^{h-1} e^x / (k-1)! = e^x Y_{h-1}(x).$$

El coeficiente de x^n en el primer miembro de esta relación es igual a $S(n+1, k)/n!$ y en el segundo miembro, a

$$\sum_{i+j=n, i, j \geq 0} \frac{n!}{i!j!} S(j, k-1).$$

Igualando las expresiones obtenidas, obtendremos la relación (2.36). Observemos que la resolución de este problema se realiza con facilidad empleando el mismo método que en el problema 2.62.

2.68. Por definición de los polinomios $P_n(x)$ (problema 2.63) tenemos

$$P_{n+1}(x) = \sum_{h=1}^{n+1} S(n+1, k) x^h = x \sum_{h=0}^n S(n+1, k+1) x^h.$$

Haciendo uso de la identidad (2.36), obtenemos de aquí

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \sum_{h=0}^n x^h \left[\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} S(l, k) \right] = \\ &= x \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \left[\sum_{h=0}^n S(l, k) x^h \right] = x \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} P_l(x), \end{aligned}$$

y (2.37) queda demostrada.

Ahora, de conformidad con la relación (2.30), tenemos $x dP_n(x)/dx = P_{n+1}(x) - xP_n(x)$. Haciendo uso de (2.37), encontramos de aquí

$$x \frac{d}{dx} P_n(x) = x \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} P_h(x) - xP_n(x) = x \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n}{h} P_h(x),$$

lo que demuestra (2.38).

2.69. Con ayuda de la función generatriz para los polinomios de Stirling (problema 2.64) encontramos

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(y) \frac{x^n}{n!} &= e^{-y} e^{yx} = e^{-y} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} e^{kx} = \\ &= e^{-y} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n x^n}{n!} = e^{-y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{y^k}{k!}. \end{aligned}$$

Al comparar los coeficientes de iguales potencias de x en los miembros primero y último de la cadena de igualdades escrita, obtenemos (2.39). Suponiendo en (2.39) $y = 1$ y teniendo en cuenta que $P_n(1) = B_n$, obtenemos (2.40).

2.70. De acuerdo con (2.31),

$$e^x P_{n+1}(x) = x d [e^x P_n(x)] / dx.$$

Haciendo uso de la identidad (2.39), obtenemos de aquí

$$e^x P_{n+1}(x) = x \frac{d}{dx} \sum_{h=0}^{\infty} k^n \frac{x^h}{h!} = x \sum_{h=1}^{\infty} k^n \frac{x^{h-1}}{(h-1)!} = x \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^n \frac{x^s}{s!},$$

y (2.41) queda demostrada; (2.42) se desprende de (2.41), teniendo en cuenta que cuando $x = 1$, $P_{n+1}(1) = B_{n+1}$.

2.71. Haciendo uso del problema 2.62, b), podemos escribir

$$\begin{aligned} S_h(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} S(n+k, k) z^n = \sum_{h=0}^{\infty} [kS(n+k-1, k) + S(n+k-1, k-1)] z^n = \\ &= k \sum_{n=0}^{\infty} S(n+k-1, k) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} S(n+k-1, k-1) z^n = \\ &= kz \sum_{n=1}^{\infty} S(n+k, k) z^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} S(n+k-1, k-1) z^n, \end{aligned}$$

puesto que $S(k-1, k) = 0$. De aquí obtenemos

$$S_h(z) = kz S_h(z) + S_{h-1}(z),$$

de donde se deduce (2.44). La aplicación reiterada de la relación (2.44) conduce a (2.45).

2.72. De (2.43) y (2.45) encontramos

$$\sum_{n=h}^{\infty} S(n, k) z^n = \frac{z^h}{(1-z)(1-2z) \dots (1-zk)} = u_h(z).$$

Al poner aquí $z = 1/t$, obtendremos

$$u_h(1/t) = t/(t-1) \dots (t-k)$$

y el desarrollo en fracciones simples nos da

$$u_h\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{(-1)^h}{k!} t \sum_{i=0}^{h+1} \frac{(-1)^i \binom{k}{i}}{t-i}.$$

Al poner otra vez $z = 1/t$, tendremos

$$u_h(z) = \frac{(-1)^h}{z!} \sum_{i=0}^{h+1} \frac{(-1)^i \binom{k}{i}}{1-iz} = \frac{(-1)^h}{k!} \sum_{i=0}^{h+1} (-1)^i \binom{k}{i} \sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n.$$

El coeficiente de z^n en la última expresión es igual a

$$S(n, k) = (-1)^h \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{h+1} (-1)^i \binom{k}{i} i^n = \frac{(-1)^h}{k!} \sum_{i=0}^h (-1)^i \binom{k}{i} i^n,$$

y la representación (2.47) para los números de Stirling de 2º género queda demostrada. La fórmula (2.46) se obtiene de (2.47) por sustitución de la variable de sumación.

2.73. La función generatriz $u_h(z)$ del problema 2.72 puede reescribirse en la forma

$$u_h(z) = z^h (1 + z + z^2 + \dots) (1 + 2z + 2^2 z^2 + \dots) \dots \dots (1 + kz + k^2 z^2 + \dots),$$

de donde viene la afirmación del problema, puesto que

$$\begin{aligned} (1 + z + z^2 + \dots) (1 + 2z + 2^2 z^2 + \dots) \dots (1 + kz + k^2 z^2 + \dots) &= \\ &= \sum_{n=h}^{\infty} z^{n-h} \sum_{l_1+l_2+\dots+l_h=n-h} 1^{l_1} 2^{l_2} \dots k^{l_h}, \\ \sum_{l_1+l_2+\dots+l_h=n-h} 1^{l_1} 2^{l_2} \dots k^{l_h} &= \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{n-h}=k} i_1 i_2 \dots i_{n-h}. \end{aligned}$$

2.74. 1) Por definición inicial de los números de Stirling de 2º género tomemos al principio la definición citada en el problema 2.62. En tal caso tendremos

$$e^{tx} = [1 + (e^t - 1)]^x = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{x(x-1) \dots (x-k+1)}{k!} (e^t - 1)^h,$$

o bien, de acuerdo con el problema 2.65 (fórmula (2.34)),

$$\begin{aligned} e^{tx} &= \sum_{h=0}^{\infty} x(x-1) \dots (x-k+1) Y_h(t) = \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} x(x-1) \dots (x-k+1) \sum_{n=h}^{\infty} S(n, k) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

Hallemos e igualemos entre sí los coeficientes de t^n en los miembros primero y segundo de esta relación. Obtendremos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{h=0}^n x(x-1) \dots (x-k+1) S(n, k),$$

de donde se desprende (2.49).

2) Ahora por definición inicial de los números de Stirling de 2º género tomemos la relación (2.49). Pongamos, para mayor comodidad, $S(0, 0) = 1$ y $S(0, k) = 0$, si $k \neq 0$.

Por cuanto $x^{n-1} = \sum_{h=1}^{n-1} S(n-1, k) x(x-1) \dots (x-k+1)$, entonces para $n > 1$ hallamos a partir de (2.49)

$$\begin{aligned} x^n &= x x^{n-1} = x \sum_{h=1}^{n-1} S(n-1, k) x(x-1) \dots (x-k+1) = \\ &= (x-k+k) \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1, k) x(x-1) \dots (x-k+1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{h=1}^{n-1} S(n-1, k) x(x-1) \dots (x-k) + k \sum_{h=1}^{n-1} S(n-1, k) x(x-1) \dots \\
&\dots (x-k+1) = \sum_{h=1}^{n-1} [S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)] x(x-1) \dots (x-k+1).
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n S(n, k) x(x-1) \dots (x-k+1) = \\
&= \sum_{h=1}^{n-1} [S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)] x(x-1) \dots (x-k+1).
\end{aligned}$$

De aquí se deduce que para $n > 1$, $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$. Cuando $n = 1$, de (2.49) hallamos inmediatamente que $S(1, 1) = 1$. Para cualquier $n > 0$ todos los números $S(n, k)$ ($k = 1, \dots, n$) se definen unívocamente por sus condiciones iniciales. Pero, con arreglo al problema 2.62, los números de Stirling de 2º género se definen por la relación recurrente del problema 2.62, b), la cual coincide con las condiciones iniciales análogas escritas más arriba. Por consiguiente, la relación (2.49) define los números que coinciden por completo con los números de Stirling de 2º género.

2.75. De conformidad con (2.19) obtenemos

$$\begin{aligned}
e^{e^z} + e^{-z} - 2 &= e^{e^z - 1} e^{e^{-z} - 1} = B(z) B(-z) = \\
&= \left(\sum_{h=0}^{\infty} B_h \frac{z^h}{h!} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l B_l \frac{z^l}{l!} \right).
\end{aligned}$$

De aquí, con arreglo al problema 2.26, encontramos

$$e^{e^z + e^{-z} - 2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{\substack{h, l \geq 0 \\ h+l=n}} (-1)^l B_h B_l \frac{1}{k! l!},$$

de donde se deduce el resultado que se demuestra.

2.76. Estudiemos las permutaciones de n símbolos $\{x_1, \dots, x_n\}$ con k ciclos respecto a la posición del elemento x_n , el cual o bien forma o bien no forma el ciclo unidad. Si x_n forma en la permutación el ciclo unidad, a dicha permutación se le puede poner en correspondencia una permutación de $n-1$ elementos $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ con $k-1$ ciclos. El número de estas permutaciones es igual a $C(n-1, k-1)$. Si x_n no integra el ciclo unidad, el número de permutaciones buscadas será igual al número de métodos, con ayuda de los cuales el elemento x_n puede ser incluido en las permutaciones de $n-1$ símbolos (con k ciclos cada una de ellas) sin que se forme un ciclo nuevo. Este número es igual a $n-1$, puesto que en cada ciclo de longitud r se tienen exactamente r diferentes posibilidades de incluir x_n y, según la suposición, la suma de longitudes de los ciclos es igual a $n-1$. De estos razonamientos se deduce (2.51); (2.52) se deduce de (2.51) y de la conexión de los números $s(n, k)$ y $C(n, k)$.

2.77. Al multiplicar ambos miembros de (2.51) por x^h y al sumar respecto de k desde 0 hasta n , obtendremos

$$\begin{aligned}
C_n(x) &= \sum_{h=0}^n C(n-1, k-1) x^h + (n-1) \sum_{h=0}^n C(n-1, k) x^h = \\
&= x \sum_{h=1}^n C(n-1, k-1) x^{h-1} + (n-1) \sum_{h=0}^n C(n-1, k) x^h = \\
&= x C_{n-1}(x) + (n-1) C_{n-1}(x) = (x+n-1) C_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

De aquí (2.53) proviene por inducción.

La fórmula (2.53) puede demostrarse también del modo siguiente. Es evidente que $C_n(x) = C_n(x, x, \dots, x)$, donde $C_n(x, \dots, x)$ se definen en el problema 2.58. Por consiguiente, de (2.21) hallamos

$$1 + \sum C_n(x) \frac{z^n}{n!} = \exp \left\{ x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right\} = \exp \{-x \ln(1-z)\} = \\ = (1-z)^{-x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x(x+1) \dots (x+n-1) \frac{z^n}{n!},$$

de donde proviene (2.53).

2.78. En el problema 2.77 se ha mostrado que

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^n C(n, k) x^k = x(x+1) \dots (x+n-1), \quad n = 1, 2, \dots$$

Teniendo presente que $C(n, k) = (-1)^{n+k} s(n, k)$ (véase problema 2.76), obtenemos (2.54).

2.79. El hecho de que los números $(-1)^{n+k} s(n, k)$ son positivos se desprende de que $(-1)^{n+k} s(n, k) = C(n, k)$, donde $C(n, k) \geq 0$ por definición (véase el problema 2.76). La representación (2.55) se desprende directamente de (2.53).

2.80. Multipliquemos ambos miembros de (2.52) por $x^{n-1}/(n-1)!$ y, al sumar respecto de n desde 1 hasta ∞ , obtendremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} s(n, k) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} s(n-1, k-1) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) s(n-1, k) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

es decir, $dy_k(x)/dx = y_{k-1}(x) - x dy_k(x)/dx$, de donde se deduce (2.56). La relación (2.57) se demuestra con facilidad por inducción. En efecto, por cuanto $y_0(x) = 1$, entonces para $k=0$ (2.57) es válida. Supongamos, ahora, que (2.57) se cumple para $k-1$, y comprobémosla para k . De (2.56) obtenemos

$$(1+x) dy_k(x)/dx = [\ln(1+x)]^{k-1}/(k-1)!$$

o bien, lo que es lo mismo,

$$y_k(x) = \int_0^x \frac{1}{(k-1)!} \frac{[\ln(1+u)]^{k-1}}{1+u} du = \frac{1}{k!} [\ln(1+x)]^k.$$

lo que se trataba de demostrar.

2.81. Tenemos

$$(1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(x-1) \dots (x-n+1)}{n!} t^n.$$

De aquí obtenemos, en virtud de (2.54):

$$(1+t)x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{h=0}^n s(n, k) x^h \right) \frac{t^n}{n!} = s(t, x),$$

lo que se trataba de demostrar.

2.82. De acuerdo con el problema 2.80, tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} s(n+1, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{d}{dx} y_h(x) = \frac{1}{(k-1)!} [\ln(1+x)]^{h-1} \frac{1}{x+1}$$

o bien

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} s(n+1, k) \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} s(n, k-1) \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{j=0}^n (-1)^j s(n-j, k-1) \frac{1}{(n-j)!}. \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de x^n en los miembros primero y segundo de esta expresión, obtenemos

$$s(n+1, k) = n! \sum_{j=0}^n (-1)^j s(n-j, k-1) \frac{1}{(n-j)!},$$

lo que es equivalente a (2.58).

2.83. De (2.49) y (2.54) hallamos

$$\begin{aligned} x^n &= \sum_{k=1}^n S(n, k) x(x-1) \dots (x-k+1) = \sum_{k=1}^n S(n, k) \sum_{m=1}^k s(k, m) x^m = \\ &= \sum_{m=1}^n \left[\sum_{k=m}^n S(n, k) s(k, m) \right] x^m, \end{aligned}$$

de donde se deduce (2.59) para $1 \leq m \leq n$. Pero (2.59) se verifica también para cualesquiera otros valores de m , puesto que ambos miembros de (2.59) en este caso son nulos.

Demostremos (2.60) procediendo en el orden inverso. En efecto,

$$\begin{aligned} x(x-1) \dots (x-n+1) &= \sum_{v=1}^n s(n, v) x^v = \\ &= \sum_{v=1}^n s(n, v) \sum_{m=0}^v S(v, m) x(x-1) \dots (x-m+1) = \\ &= \sum_{m=0}^n x(x-1) \dots (x-m+1) \sum_{v=m}^n s(n, v) S(v, m). \end{aligned}$$

Al comparar los coeficientes de $x(x-1) \dots (x-m+1)$ a la izquierda y a la derecha (ellos deben ser iguales), obtenemos (2.60).

2.84. Teniendo en cuenta (2.61), hallamos

$$\sum_{v=1}^n S(n, v) A_v = \sum_{v=1}^n S(n, v) \sum_{h=1}^v s(v, k) a_k = \sum_{h=1}^n a_h \sum_{v=h}^n S(n, v) s(v, k)$$

y, en virtud de (2.59),

$$\sum_{v=1}^n S(n, v) A_v = \sum_{h=1}^n a_h \delta_{nh} = a_n;$$

por consiguiente, de (2.61) se deduce (2.62). Viceversa, con ayuda de (2.62) podemos escribir

$$\sum_{v=1}^n s(n, v) a_v = \sum_{v=1}^n s(n, v) \sum_{h=1}^v S(v, k) A_h = \sum_{h=1}^n A_h \sum_{v=h}^n s(n, v) S(v, k)$$

y, en virtud de (2.60),

$$\sum_{v=1}^n s(n, v) a_v = \sum_{h=1}^n A_h \delta_{nh} = A_n,$$

es decir, de (2.62) se deduce (2.61).

2.85. Para $n = 0$ la fórmula (2.63) es válida, puesto que por definición $s(0, 0) = 1$, $B_0 = 1$. Sea, ahora, $n \geq 1$. Entonces, de acuerdo con el problema 2.62, a) y (2.60), obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^n s(n, k) B_h &= \sum_{h=1}^n s(n, k) \sum_{i=1}^h S(k, i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^n s(n, k) S(k, i) = \sum_{i=1}^n \delta_{ni} = \delta_{nn} = 1. \end{aligned}$$

2.86. Para $n = 0$ (2.64) tiene lugar, puesto que $s(0, 0) = 1$ y $P_0(x) = 1$. Luego, de acuerdo con (2.60), obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n s(n, k) P_k(x) &= \sum_{k=1}^n s(n, k) \sum_{j=0}^k S(k, j) x^j = \\ &= \sum_{j=0}^n x^j \sum_{k=j}^n s(n, k) S(k, j) = \sum_{j=0}^n x^j \delta_{nj} = x^n \delta_{nn} = x^n, \end{aligned}$$

y (2.64) queda demostrada.

2.87. Cuando $n = 0$ (2.65) se verifica, puesto que $S(0, 0) = 1$ y $j_0(x) = 1$. Cuando $n = 1, 2, \dots$, de acuerdo con (2.54) y (2.59), tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n S(n, k) j_k(x) &= \sum_{k=0}^n S(n, k) \sum_{j=0}^k s(k, j) x^j = \\ &= \sum_{j=0}^n x^j \sum_{k=0}^n S(n, k) s(k, j) = \sum_{j=0}^n x^j \delta_{nj} = x^n \delta_{nn} = x^n. \end{aligned}$$

2.88. Cada alojamiento de diferentes mostacillas en distintas células puede interpretarse en los términos de (r_1, r_2, \dots, r_m) -particiones del n -conjunto M de objetos disponibles. En efecto, el alojamiento de los objetos en células es de tal índole que en la i -ésima célula están contenidos $r_i \geq 0$ objetos; $r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$ es una (r_1, r_2, \dots, r_m) -partición del conjunto M (véase

problema 2.52) y el número de tales particiones es igual a $\sigma(r_1, \dots, r_m)$. Evidentemente, en vista del problema 2.52, obtenemos

$$\mu(n, m) = \sum_{\substack{r_1 + \dots + r_m = n \\ r_i \geq 0}} \sigma(r_1, \dots, r_m) = \sum_{\substack{r_1 + \dots + r_m = n \\ r_i \geq 0}} \frac{n!}{r_1! \dots r_m!}.$$

De aquí, con arreglo al problema 2.62 c), llegamos a la fórmula (2.66). La expresión (2.67) para los números $\mu(n, m)$ resulta ser ahora un corolario del problema 2.72. Para demostrar (2.68), hagamos uso de la relación recurrente del problema 2.62 b). Tenemos

$$\begin{aligned} \mu(n, m) &= m!S(n, m) = m! [mS(n-1, m) + S(n-1, m-1)] = \\ &= mm!S(n-1, m) + m(m-1)!S(n-1, m-1) = \\ &= m\mu(n-1, m) + m\mu(n-1, m-1), \end{aligned}$$

lo que demuestra (2.68).

2.89. Es evidente que $\mu_p(n, m)$ es igual al número de métodos de elección entre m cajones tales p cajones que han de ser llenados, multiplicado por el número de métodos para alojar diferentes mostacillas en diferentes cajones, es decir, $\mu_p(n, m) = \binom{m}{p} \mu(n, p)$, y, en virtud de

$$\mu_p(n, m) = \frac{m(m-1) \dots (m-p+1)}{p!} p! S(n, p)$$

de aquí se deduce (2.69).

2.90. Analicemos diferentes alojamientos de n diferentes objetos en m diferentes células. El número total de ellos es igual a m^n , es decir, al primer miembro de (2.70). Por otra parte, pueden ser clasificados del modo siguiente. Dividamos todos los alojamientos citados en m clases, incluyendo en la p -ésima clase ($p = 1, 2, \dots, m$) todos aquellos alojamientos, para los cuales p células están ocupadas y $(m-p)$, libres. La potencia de la p -ésima clase se determina con ayuda del problema 2.89. Al sumar respecto de todos los p los números $\mu_p(n, m)$, obtendremos, en virtud de (2.69):

$$m^n = \sum_{p=1}^m \mu_p(n, m) = \sum_{p=1}^m (m)_p S(n, p),$$

lo que se trataba de demostrar. Está claro también que la relación (2.70) se deduce inmediatamente de la expresión determinante (2.49) para los números de Stirling de 2º género.

2.91. El primero de los números requeridos se obtiene dividiendo por $m!$ el número correspondiente de métodos de alojamientos para diferentes cajones (véase problema 2.88, fórmula (2.66)). En efecto, a cada uno de los alojamientos, al haber m células iguales, le corresponden $m!$ alojamientos en el caso cuando estas células son distinguibles.

El segundo de los números buscados se obtiene por sumación inmediata de los números de Stirling $S(n, p)$ respecto de $p = 1, \dots, m$, puesto que la elección de los cajones vacíos, por cuanto ellos son indistinguibles, se realiza de un modo único.

2.92. n diferentes factores primos p_1, \dots, p_n pueden partirse en m productos no vacíos empleando $S(n, m)$ métodos, según la interpretación de los números de Stirling de 2º género $S(n, m)$, como números de particiones del n -conjunto en m subconjuntos disjuntos no vacíos. Por hipótesis del problema todos los productos obtenidos serán diferentes, lo que demuestra precisamente el resultado requerido.

2.93. Dividamos los alojamientos determinados por el número $S(n, m, k)$ en $n + 1$ clases incluyendo en la v -ésima clase ($v = 0, 1, \dots$) aquellos, en los cuales el llenado de k células elegida se realiza colocando v mostacillas, con la particularidad de que las restantes $n - v$ mostacillas caen en los cajones no marcados. El número de elementos en la v -ésima clase es igual a

$$\binom{n}{v} (m-k)^{n-v} k! S(v, k), \quad (*)$$

donde $\binom{n}{v}$ es el número de métodos que pueden emplearse para elegir entre n diferentes objetos, v piezas; $k! S(v, k)$ es el número de métodos para alojar v objetos elegidos en k cajones fijos (véase problema 2.88); $(m-k)^{n-v}$ es el número de métodos para alojar los restantes $n - v$ objetos distinguibles en $m - k$ cajones distinguibles. Al sumar los monomios (*) respecto de $v = 0, 1, \dots, n$, y dividiendo la suma por $k!$, obtenemos (2.71).

2.94. Haciendo uso de (2.71), escribamos

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left[\sum_{v=0}^n \binom{n}{v} (m-k)^{n-v} S(v, k) \right] = \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v}{v!} S(v, k) \sum_{n=v}^{\infty} \frac{(m-k)^{n-v}}{(n-v)!} x^{n-v} = \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v}{v!} S(v, k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m-k)^n}{n!} x^n = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v}{v!} S(v, k) e^{(m-k)x} = \\ &= e^{(m-k)x} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} S(v, k) x^v, \end{aligned}$$

de donde con ayuda de (2.34), se deduce (2.73).

§ 3. Teoría de Polya

2.95. Escribamos todas las $n!$ sucesiones, cada una de las cuales se compone de los números $1, 2, \dots, n$ tomados de uno en uno en orden arbitrario. En cada de estas sucesiones encerramos entre paréntesis, comenzando por el principio, b_1 veces cada número, b_2 veces cada dos números, etc., b_n veces cada n números. Las sucesiones obtenidas con los paréntesis puestos pueden considerarse como permutaciones divididas en ciclos. En tal caso cada permutación con el tipo dado (b_1, \dots, b_n) se encontrará $\prod_{i=1}^n (i^{b_i} b_i!)$ veces. Por consiguiente, el número

de diferentes permutaciones de este tipo es igual a $n! / \prod_{i=1}^n (i^{b_i} b_i!)$.

2.96. La afirmación se deduce inmediatamente del resultado del problema 2.95.

2.97. Si a es un elemento fijo del conjunto G , la aplicación $g \mapsto ag$, definida para cualquier $g \in G$, será una permutación sobre el conjunto G . Al designarla con $S(a)$, notemos que si a recorre todo el conjunto G , entonces la aplicación $a \mapsto S(a)$ es biunívoca, homomorfa ($S(a) S(b) = S(ab)$) y tales permutaciones $S(a)$ forman un grupo.

2.98. Si $g \in G$, entonces el orden de g es un número entero positivo mínimo k tal que $g^k = e$, donde e es el elemento unidad del grupo G . La permutación $S(g)$ divide G en ciclos, cuyas longitudes son todas iguales a $k(g)$: si p es un elemento del conjunto G , entonces pertenece al ciclo $p \mapsto gp \mapsto g^2p \mapsto \dots \mapsto g^{k(g)}p = p$.

De aquí se deduce que n se divide por $k(g)$ y que la permutación $S(g)$ parte G en $n/k(g)$ ciclos de longitud $k(g)$. De este modo,

$$P_G = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} [x_{k(g)}]^{n/k(g)} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} v(d) (x_d)^{n/d}.$$

2.99. Si $g = e^{2\pi ij/n}$, el orden del elemento g es igual a $k(g) = n/(n, j)$. A continuación aprovechamos el resultado del problema 2.98.

2.100. 12 revoluciones del tetraedro pueden dividirse en tres categorías:

- 1) idéntica;
- 2) 8 revoluciones a 120° alrededor de un eje que pasa por el vértice y el centro de la cara opuesta;
- 3) 3 revoluciones a 180° alrededor de un eje que pasa por el centro de las aristas opuestas.

Por eso, $P_G = (x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2)/12$.

2.101. $P_G = (x_1^6 + 8x_2^3 + 3x_1^2x_2^2)/12$.

2.102. $P_G = (x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2)/12$. Aquí podemos aprovechar el hecho de que el poliedro regular, dual respecto de un tetraedro, es el mismo tetraedro.

2.103. 24 revoluciones del cubo pueden dividirse en cinco partes:

- 1) idéntica;
- 2) 3 giros en 180° alrededor de los ejes que unen los centros de las caras opuestas;
- 3) 6 giros en 90° alrededor de las rectas que unen los centros de las caras opuestas;
- 4) 6 giros en 180° alrededor de las rectas que unen los centros de las aristas opuestas;
- 5) 8 giros en 120° alrededor de las rectas que unen los vértices opuestos.

La permutación 1) da 8 ciclos de longitud 1. La permutación 2) da 4 ciclos de longitud 2. La permutación del tipo 3) da 2 ciclos de longitud 4. La permutación del tipo 4) da 4 ciclos de longitud 2. La permutación del tipo 5) da 2 ciclos de longitud 1 y 2 ciclos de longitud 3. Por eso $P_G = (x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_3^2 + 8x_1^2x_2^2)/24$.

2.104. $P_G = (x_1^{12} + 3x_2^6 + 6x_3^4 + 6x_1^2x_2^2 + 8x_3^3)/24$.

2.105. $P_G = (x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_3^3 + 8x_2^3)/24$.

2.106.

$$\exp \left(zx_1 + \frac{z^2x_2}{2} + \frac{z^3x_3}{3} + \dots \right) = \sum_{b_1=0}^{\infty} \frac{z^{b_1}x_1^{b_1}}{b_1!} \sum_{b_2=0}^{\infty} \frac{z^{2b_2}x_2^{b_2}}{b_2!2^{b_2}} \dots$$

El coeficiente de z^n se obtiene por sumación de las expresiones

$$x_1^{b_1}x_2^{b_2} \dots (b_1!b_2!2^{b_2}b_3!3^{b_3} \dots)^{-1}$$

respecto de toda clase de números enteros no negativos b_1, b_2, \dots , que satisfacen la condición $b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \dots = n$. Ahora la afirmación se desprende inmediatamente del resultado del problema 2.95.

2.109.

$$|\{(g, s): g \in G, s \in S, \pi_g s = S\}| = \sum_{g \in G} \psi(g) = \sum_{s \in S} \eta(s),$$

donde $\eta(s) = |\{g \in G: \pi_g s = s\}|$, $G_s = \{g \in G: \pi_g s = s\}$ es un subgrupo del grupo G de orden $\eta(s)$.

Si $s_1 \sim s$ (es decir, $\exists h \in G: \pi_h s_1 = s$), entonces

$$|\{g \in G: \pi_g s_1 = s\}| = \eta(s).$$

Por consiguiente, G puede ser dividido en subconjuntos, cada uno de los cuales se compone de $\eta(s)$ elementos y corresponde exactamente a un elemento de aquella clase de equivalencia en la que figura s . Por eso tenemos

$$\eta(s) = \frac{|G|}{\text{número de equivalentes en la clase de equivalencia que contiene } s}.$$

De aquí se deduce la afirmación del lema.

2.110. S se divide en 2 clases de equivalencia $\{a, b\}$ y $\{c, d\}$. El problema puede resolverse empleando el lema de Bernsайд:

$$\psi(\pi_1) = 4; \psi(\pi_2) = 2; \psi(\pi_3) = 2; \psi(\pi_4) = 0.$$

De aquí, el número de clases de equivalencia es igual a $(4 + 2 + 2 + 0)/4 = 2$.

2.111. $G = \{\pi_1, \pi_2\}$; π_1 es una permutación idéntica, π_2 es el cambio de lugar de dos letras extremas. Según el lema de Bernsайд, tenemos: el número de clases de equivalencia es igual a $(\psi(\pi_1) + \psi(\pi_2))/2 = (8 + 4)/2 = 6$.

2.112. Un collar puede ser pintado de tres colores empleando $3^5 = 243$ métodos. $G = \{\pi_1, \dots, \pi_5\}$, donde π_i es el giro del collar en sentido horario en un ángulo de $360^\circ (i-1)/5$, $i = 1, \dots, 5$. Es evidente que $\psi(\pi_1) = 243$; $\psi(\pi_2) = \dots = \psi(\pi_5) = 3$. Por consiguiente, el número de diferentes collares es igual, según el lema de Bernsайд, a $(243 + 3 + 3 + 3 + 3)/5 = 51$.

2.113. $(n-1)!$

2.115. π_1 es una transformación idéntica, π_2 es una transformación que vuelca «al revés» aquellos números, para los cuales esto resulta posible (los demás números la transformación los deja intactos). $10^5 - 5^5$ números contienen al menos una de las cifras 2, 3, 4, 5, 7. 3×5^2 números se leen de un modo igual, sean éstos en la forma normal o volcada, por ejemplo 16891. Por eso, $\psi(\pi_2) = (10^5 - 5^5) + 3 \cdot 5^2$; $\psi(\pi_1) = 10^5$. Así pues, harán falta $1/2 \cdot (10^5 + 10^5 - 5^5 + 3 \times 5^2) = 98475$ hojas.

2.116. En nuestro problema hay 10 clases de equivalencia:

- 1) todas las caras son rojas (potencia 1);
- 2) cinco caras son rojas, una azul (potencia 6);
- 3) dos caras opuestas son azules, las otras cuatro, rojas (potencia 3);
- 4) dos caras adyacentes son azules, las otras cuatro son rojas (potencia 12);
- 5) tres caras que tienen un vértice común son rojas, las tres restantes, azules (potencia 8);
- 6) dos caras opuestas y una restante son rojas, las tres demás son azules (potencia 12);
- 7) — 10) se obtienen de 4) — 1) por sustitución de las palabras «roja» y «azul».

2.117.

$$f_1(g) = f_2, \quad g \in G \Rightarrow \prod_{d \in D} \omega(f_1(d)) = \prod_{d \in D} \omega(f_1(gd)) = \prod_{d \in D} \omega(f_2(d)).$$

$$2.118. \text{ a) } \text{Inv } R^D = \sum_f W(f) = \sum_f \prod_{d \in D} \omega(f(d)) = \left[\sum_{r \in D} \omega(r) \right]^{|D|}.$$

b) Se obtiene de un modo análogo, al analizar un producto completo.

2.119. Aquí D es un conjunto de las caras del tetraedro; G es el grupo de revoluciones; R es un conjunto de dos colores: rojo y azul, $P_G(x_1, \dots, x_4) = (x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2)/12$. De acuerdo con el teorema de Polya, el número de diferentes clases de equivalencia es igual a $P_G(2, 2, 2, 2) = 5$.

2.120. Aquí D es un conjunto de caras del cubo; G es el grupo de revoluciones; R , el conjunto de dos colores,

$$P_G(x_1, \dots, x_6) = (x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_1^2 + 8x_2^3)/24.$$

De acuerdo con el teorema de Polya, el número de diferentes métodos de coloración es igual a $P_G(2, 2, \dots, 2) = 10$.

2.121. D es el conjunto de caras del cubo, G es el grupo de revoluciones, R es el conjunto de dos colores: rojo y azul,

$$P_G = (x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2)/24.$$

Asignemos el peso a al color rojo y b , al color azul. Según el teorema de Polya, el inventario de clases de equivalencia es igual a

$$[(a+b)^6 + 3(a+b)^2(a^2+b^2)^2 + 6(a+b)^2(a^4+b^4) + 6(a^2+b^2)^3 + 8(a^3+b^3)^2]/24.$$

El coeficiente de a^4b^2 es igual a $(15 + 9 + 6 + 18 + 0)/24 = 2$. Por consiguiente, existen exactamente dos clases de equivalencia de las funciones, para las cuales 4 caras están pintadas de color rojo.

2.123. Supongamos que $x_1 \sim x_2$ y $x_1 < x_2$ para ciertos $x_1, x_2 \in X$. En este caso existe un $g \in L$ tal que $gx_1 = x_2$. De aquí obtenemos $x_1 < gx_1 < g^2x_1 < \dots < g^{k-1}x_1 < g^kx_1 = x_1$, siempre que x_1 pertenece al ciclo de longitud k de la permutación g . Tomando en consideración la transitividad, tenemos $x_1 < x_1$, lo que es imposible.

2.124. Sea $C \leq C'$ y $C' \leq C$, es decir, existen tales $x_1, x_2 \in C$ y $x'_1, x'_2 \in C'$ que $x_1 \leq x'_1, x_2 \geq x'_2$ para ciertas $C, C' \subset X/L$. Entonces, existe un $g \in L$ tal que $x_2 = gx_1$, y tenemos $x'_2 \leq x_2 \leq gx'_1$, es decir, $x'_2 \leq gx'_1$, donde $gx'_1 \in C'$. Del problema 2.123 tenemos $x'_2 = gx'_1 = x_2$ y $C = C'$. Con una facilidad aún mayor se comprueban las demás condiciones.

2.126. Sea $X = M(D, R)$ y supongamos que G actúa sobre X de la manera siguiente: $\pi_g f = fg^{-1}$; es fácil demostrar que π es un homomorfismo de G en el grupo de permutaciones $M(D, R)$. Según el lema de Bernsайд (problema 2.109) llegamos a que el número de clases de equivalencia de las funciones isótonas es igual a

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g),$$

donde $\psi(g) = \{f \in M(D, R): fg^{-1} = f\} = \{f \in M(D, R): f \text{ es constante en los ciclos } g\} = |M(D/\{g\}, R)|$.

2.127. Supongamos que en el problema anterior D es una anticadena y R , una cadena. Entonces

$$M(D, R) = R^D, \quad M(D/\{g\}, R) = R^{D/(g)}.$$

Si (b_1, b_2, \dots) es el tipo de la permutación g , tendremos

$$R^{D/(g)} = |R|^{b_1 + b_2 + \dots}$$

MÉTODOS LÓGICOS

§ 1. Método de inclusión y exclusión

3.1. Designemos $n = \left| \sum_{i=1}^m S_i \right|$ y sea p_i ($1 \leq i \leq m$) una propiedad consistente en que el elemento elegido pertenece al conjunto S_i . Entonces, tomando en consideración las designaciones adoptadas $N_{i_1, \dots, i_h} = |S_{i_1}, \dots, S_{i_h}|$, $1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m$, y de conformidad con la fórmula de inclusión y exclusión tendremos

$$0 = N(0) = \left| \sum_{i=1}^m S_i \right| - \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m} |S_{i_1}| + \dots + (-1)^m |S_1 \dots S_m|.$$

3.2. Las permutaciones de los elementos del m -conjunto dado las tomaremos por elementos de un $m!$ -conjunto. Designemos $n = m!$, y sea p_i ($1 \leq i \leq m$) una propiedad de la permutación consistente en que el elemento del m -conjunto que lleva el número i queda, como resultado de la permutación dada, en su lugar. Entonces, tomando en consideración las designaciones adoptadas, tendremos

$$N_{i_1, \dots, i_h} = (m-k)!, \quad \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m} N_{i_1, \dots, i_h} = C_m^h (m-k)!.$$

Al aplicar la fórmula de inclusión y exclusión, obtendremos la respuesta:

$$N(r) = \sum_{h=r}^m (-1)^{h-r} C_h^r C_m^h (m-k)! = \frac{m!}{r!} \sum_{s=0}^{m-r} \frac{(-1)^s}{s!}.$$

3.3. Designemos por $p_{\bar{\alpha}}$, donde $\bar{\alpha} = (i_1, \dots, i_d)$, la propiedad del juego consistente en que en la primera permutación el elemento con el número i_1 queda en su lugar, etc., en la d -ésima permutación el elemento con el número i_d queda en su lugar. Entonces, el número de juegos que poseen las propiedades $p_{\bar{\alpha}_1}, \dots, p_{\bar{\alpha}_h}$ ($1 \leq k \leq m$) será igual a

$$N_{\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_h} = \{(m-k)!\}^d, \quad \sum_{\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_h} N_{\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_h} = (C_m^h)^d \{(m-k)!\}^d.$$

Al aplicar la fórmula de inclusiones y exclusiones, obtenemos la respuesta:

$$N(r) = \sum_{h=r}^m (-1)^{h-r} C_h^r (C_m^h)^d \{(m-k)!\}^d, \quad 0 \leq r \leq m.$$

3.4. Tomemos por elementos del m^n -conjunto diferentes repartimientos de n bolas por m cajones. Sea p_i ($i = 1, \dots, m$) una propiedad consistente en que

con el repartimiento dado el cajón con el número i queda vacío. Entonces la cantidad de repartimientos que poseen las propiedades p_{i_1}, \dots, p_{i_h} ($1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m$), es igual a $N_{i_1, \dots, i_h} = (m - k)^n$ y

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m} N_{i_1, \dots, i_h} = C_m^h (m - k)^n.$$

Al aplicar la fórmula de inclusión y exclusión, obtenemos el resultado:

$$N(r) = \sum_{h=r}^m (-1)^{h-r} C_h^r C_m^h (m - k)^n = C_m^r \sum_{s=0}^{m-r} (-1)^s C_{m-r}^s (m - r - s)^n.$$

3.5. Sea p_i ($1 \leq i \leq m$) una propiedad del juego consistente en que la bola con el número i en dicho juego no está contenida. Entonces, el número de juegos que poseen las propiedades p_{i_1}, \dots, p_{i_h} ($1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m$) es igual a

$$N_{i_1, \dots, i_h} = (C_{m-h}^s)^d, \quad \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m} N_{i_1, \dots, i_h} = C_m^h (C_{m-h}^s)^d.$$

Al aplicar la fórmula de inclusión y exclusión, obtenemos la respuesta:

$$\begin{aligned} N(r) &= \sum_{h=r}^m (-1)^{h-r} C_h^r C_m^h (C_{m-h}^s)^d = \\ &= C_m^r \sum_{t=0}^{m-r-s} (-1)^t C_{m-r}^t (C_{m-r-t}^s)^d, \quad 0 \leq r \leq m. \end{aligned}$$

En particular, el número de juegos en los que se encuentran todas las bolas es igual a

$$N(0) = \sum_{h=0}^{m-s} (-1)^h C_m^h (C_{m-h}^s)^d.$$

3.6. Examinemos un C_m^n -conjunto de n -muestras del m -conjunto y designemos por p_i ($1 \leq i \leq m$) la propiedad consistente en que en la muestra citada está contenido el elemento con el número i . Entonces el número de muestras que poseen las propiedades p_{i_1}, \dots, p_{i_h} ($1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m$) es igual a

$$N_{i_1, \dots, i_h} = C_{m-h}^{n-h}, \quad \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m} N_{i_1, \dots, i_h} = C_m^h C_{m-h}^{n-h}$$

Al aplicar la fórmula de inclusión y exclusión, obtenemos la identidad:

$$0 = N(0) = \sum_{h=0}^m (-1)^h C_m^h C_{m-h}^{n-h}.$$

3.7. Examinemos un C_{n+m-1}^n -conjunto de toda clase de n -muestras con repetición del (m) -conjunto y supongamos que p_i ($1 \leq i \leq m$) es una propiedad consistente en que la citada muestra no contiene elemento con el número i . Entonces el número de muestras que poseen las propiedades p_{i_1}, \dots, p_{i_h} ($1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m$) es igual a

$$N_{i_1, \dots, i_h} = C_{m+n-h-1}^{n-h}, \quad \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m} N_{i_1, \dots, i_h} = C_m^h C_{m+n-h-1}^{n-h}.$$

Al aplicar la fórmula de inclusión y exclusión, obtenemos la identidad

$$0 = N(0) = \sum_{h=0}^m (-1)^h C_m^h C_{m+n-h}^{n-h}.$$

3.8. Se deduce del problema 3.5, puesto que si $sd < m$, entonces $N(0) = 0$.

3.9. Veamos un conjunto S de particiones del número n en m sumandos enteros no negativos $n = n_1 + \dots + n_m$. Tiene lugar la igualdad

$$\sum_{(n_1, \dots, n_m) \in S} \frac{n!}{n_1! \dots n_m!} = \underbrace{(1 + \dots + 1)^n}_{m \text{ veces}} = m^n.$$

Designemos por p_i ($1 \leq i \leq m$) la propiedad de la partición $n = n_1 + \dots + n_m$, consistente en que $n_i = 0$ y, supongamos que el peso de cada partición n_1, \dots, n_m es igual a $n!/(n_1! \dots n_m!)$. El peso sumario de la totalidad de particiones que poseen k propiedades será $V(k) = \sum n!/(n_1! \dots n_m!)$, donde la sumación se realiza respecto de toda clase de particiones del número n en $m - k$ sumandos enteros no negativos, es decir, $V(k) = (m - k)^n$.

Aplicando la fórmula generalizada de inclusión y exclusión, obtenemos la identidad

$$W(0) = \sum_{\substack{n=n_1+\dots+n_m \\ n_1>0, \dots, n_m>0}} \frac{n!}{n_1! \dots n_m!} = \sum_{h=0}^m (-1)^h C_m^h (m - k)^n.$$

3.10. Se deduce del problema 3.9, puesto que si $n < m$, entonces $W(0) = 0$.

3.11. Se deduce del problema 3.9, puesto que la cantidad de particiones ordenadas del número m en m sumandos enteros positivos es igual a uno y el peso de esta partición $m = 1 + \dots + 1$ es igual a $m!$, es decir, $W(0) = m!$.

3.12. Designemos por p_i ($1 \leq i \leq m$) la propiedad consistente en que el número dado se divide por q_i . La cantidad de números que no son superiores a n y que poseen las propiedades p_{i_1}, \dots, p_{i_h} es igual a $n/(q_{i_1} \dots q_{i_h})$ ($1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m$). Al aplicar la fórmula de inclusión y exclusión, obtenemos la igualdad

$$N(0) = \varphi(n) = \sum_{h=0}^m (-1)^h \sum \frac{n}{q_{i_1} \dots q_{i_h}} = n \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_m}\right).$$

3.13. Designemos por p_i ($1 \leq i \leq m$) la propiedad consistente en que el número dado se divide por q_i . Entonces la cantidad de números que no sobrepasan de n y que poseen las propiedades p_{i_1}, \dots, p_{i_h} ($1 \leq i_1 \leq \dots < i_h \leq m$) es igual a $N_{i_1, \dots, i_h} = [n/(q_{i_1} \dots q_{i_h})]$. De acuerdo con la fórmula de inclusión y exclusión, la cantidad de números que no sobrepasan de n y no poseen ninguna de las propiedades p_1, \dots, p_m (es decir, la cantidad de números primos que son superiores a \sqrt{n} , pero no sobrepasan de n) es igual a

$$N(0) = \pi(n) - \pi(\sqrt{n}) = (n - 1) + \sum_{h=1}^m (-1)^h \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m} \left[\frac{n}{q_{i_1} \dots q_{i_h}} \right].$$

3.14.

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{h=0}^{\infty} (2^{-h} - (2^{-2h} + 2^{-3h} + 2^{-6h}) + (2^{-10h} + 2^{-6h} + 2^{-15h}) - 2^{-30h} = \\
 &= 2 - \frac{1}{1-2^{-2}} - \frac{1}{1-2^{-3}} - \frac{1}{1-2^{-5}} + \\
 &+ \frac{1}{1-2^{-10}} + \frac{1}{1-2^{-6}} + \frac{1}{1-2^{-15}} - \frac{1}{1-2^{-30}}.
 \end{aligned}$$

3.15. Designemos con S el conjunto de todas las m -muestras con repetición de los números $1, \dots, m$. Supongamos que el peso de cada una de tal muestra i_1, \dots, i_m es igual a $a_{1,i_1} \dots a_{m,i_m}$. Designemos por p_i ($1 \leq i \leq m$) la propiedad consistente en que la muestra dada no contiene los números i . Entonces la suma de pesos de las muestras que poseen las propiedades p_{i_1}, \dots, p_{i_h} será igual a

$$S(A_{i_1, \dots, i_h}) = \prod_{j=1}^m \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1, \dots, i_h}}^m a_j, i \right).$$

Al aplicar la fórmula de inclusión y exclusión, obtenemos la igualdad

$$W(0) = \text{per } A = S(A) + \sum_{h=1}^{m-1} (-1)^h \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m} S(A_{i_1, \dots, i_h}).$$

3.16. Por definición de permanente de una matriz, $\text{per } A = \sum_{i_1, \dots, i_m} a_{1,i_1} \dots a_{m,i_m}$, donde la sumación se realiza respecto de toda clase de m -muestras sin repetición del n -conjunto $1, \dots, n$. Si la muestra i_1, \dots, i_m es de tal índole que $a_{1,i_1} \dots a_{m,i_m} = 1$, entonces, de conformidad con la definición de la matriz de incidencia, $s_{i_h} \in S_h$ ($k = 1, \dots, m$). Por consiguiente, el sistema s_{i_1}, \dots, s_{i_m} es un s.r.d. para $M(S)$. Si para la muestra i_1, \dots, i_m se tiene $a_{1,i_1} \dots a_{m,i_m} = 0$, entonces el sistema s_{i_1}, \dots, s_{i_m} no puede ser un s.r.d. para $M(S)$. Por eso el número de s.r.d. para $M(S)$ es igual a $\text{per } A$.

3.17. La matriz de incidencia para $M(S)$ tiene por expresión

$$A = (a_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, m, \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

Calculemos $\text{per } A$ con ayuda de la fórmula del problema 3.15. En las designaciones del problema 3.15 tenemos

$$\begin{aligned}
 S(A_{i_1, \dots, i_k}) &= (m-k-1)^{m-k} (m-k)^k, \\
 \sum_{i_1, \dots, i_k} S(A_{i_1, \dots, i_k}) &= C_m^k (m-k-1)^{m-k} (m-k)^k.
 \end{aligned}$$

Por consiguiente, según el problema 3.16, el número de s.r.d. para $M(S)$ es igual a

$$\text{per } A = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_m^k (m-k)^k (m-k-1)^{m-k}.$$

§ 2. Sistemas de representantes de los conjuntos

3.18. Supongamos que no existe un s.r.d. para $M(S)$. Entonces, según el teorema de Hall, existen subconjuntos $S_{i_1}, \dots, S_{i_k} (1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m)$ tales que $p = |S_{i_1} + \dots + S_{i_k}| < k$. Por hipótesis del problema cada uno de los conjuntos S_1, \dots, S_m contiene exactamente r elementos y todo elemento se contiene exactamente en r conjuntos. Por eso, el número de elementos (tomándose en consideración las repeticiones) que están contenidos en la unión de conjuntos S_{i_1}, \dots, S_{i_k} , o bien el número de unidades contenidas en k filas de la matriz de incidencia para $M(S)$ es igual a $k \cdot r$. Por otra parte, este número no es superior a $p \cdot r$. La contradicción obtenida demuestra la existencia del s.r.d. para $M(S)$.

3.19. Demostremos que $|A| = |B|$. Denotemos los elementos de los conjuntos $A = (a_1, \dots, a_m)$ y $B = (b_1, \dots, b_n)$ por puntos en un plano, y la correspondencia entre ellos, por segmentos que unen dichos puntos. El número de segmentos que tienen por origen los puntos del conjunto A es igual a km , y el número de los que tienen por origen los puntos del conjunto B es igual a kn . Por consiguiente, se verifica la igualdad $km = kn$, o bien $|A| = |B|$.

Definamos la matriz $C = (c_{ij}) (i, j = 1, \dots, m)$ del modo siguiente:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si existe correspondencia entre los elementos } a_i \text{ y } b_j, \\ & i, j = 1, \dots, m, \\ 0 & \text{en el caso contrario,} \end{cases}$$

Por hipótesis la matriz C es de tal índole que en cada fila y en cada columna se contienen exactamente k unidades. Del problema 3.18 se deduce que per $C \neq 0$. Por eso existe una permutación i_1, \dots, i_m de números $1, \dots, m$ tal que $c_{1,i_1} \cdot \dots \cdot c_{m,i_m} = 1$. Al elemento b_{i_α} pongámosle en correspondencia el elemento $a_\alpha (\alpha = 1, \dots, m)$. Hemos establecido, pues, la correspondencia biunívoca entre A y B .

3.20. Se desprende del problema 3.19.

3.21. Designemos por $S_i (i = 1, \dots, n)$ un conjunto de números de 1 a n que no están contenidos en la i -ésima columna de un rectángulo latino dado, y $M(S) = (S_1, \dots, S_n)$.

La matriz de incidencia para $M(S)$ contiene exactamente $n - m > 0$ unidades en cada columna y en cada fila. Por eso, según se deduce del problema 3.18, existe un s.r.d. s_1, \dots, s_n para $M(S)$. Agreguemos al rectángulo latino dado la fila s_1, \dots, s_n y obtendremos $(m + 1) \times n$ rectángulos latinos.

De la afirmación demostrada se deduce que todo rectángulo latino puede ser ensanchado hasta que se obtenga un cuadrado latino.

3.22. Designemos con $A = (a_{ij}) (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$ una matriz arbitrariamente elegida; $M = s + t$ representa el número mínimo de filas con los números i_1, \dots, i_s y de columnas con los números j_1, \dots, j_t que contienen todos los elementos no nulos; N es el número máximo de elementos, de los cuales ningún par se contiene en una fila y en una columna.

Examinemos una matriz A' de dimensión $s \times (n - t)$ formada por los elementos de la matriz A que se disponen en la intersección de las filas con los números i_1, \dots, i_s y de las columnas con números distintos de j_1, \dots, j_t . Designemos las filas de esta submatriz por S_1, \dots, S_s . Entonces, para cualquier juego de índices $\alpha_1, \dots, \alpha_h | S_{\alpha_1} + \dots + S_{\alpha_h} | \geq k$, pues de lo contrario podríamos sustituir las correspondientes k filas de la matriz A por un número menor de columnas que cubren en la matriz A los mismos elementos no nulos, lo que contradice el hecho de que M es el número mínimo. Por consiguiente, de acuerdo con el teorema de Hall, en la matriz A' existen s elementos no nulos, de los cuales ningún par se contiene en una columna y en una fila. Análogamente, al analizar la matriz A'' de dimensión $(m - s) \times t$, compuesta de los ele-

mentos de la matriz A que se encuentran en los lugares donde se intersecan entre sí las filas con números, distintos de i_1, \dots, i_s , y las columnas con los números j_1, \dots, j_t , hallamos t elementos no nulos, de los cuales ningún par está contenido en una fila y en una columna.

Así pues, hemos hallado $s + t = M$ elementos no nulos de la matriz A , de los cuales ningún par está contenido en una fila y en una columna. Por consiguiente, siendo N el número máximo, se verifica la desigualdad $N \geq M$. Por cuanto la desigualdad inversa $M \geq N$ no causa dudas algunas, entonces $M = N$.

3.23. El número mínimo de filas y de columnas que contienen todos los elementos no nulos de la matriz A no sobrepasa de $m - s + m - t < m$. Por consiguiente, de acuerdo con el teorema de König (problema 3.22), para cualquier permutación i_1, \dots, i_m de los números $1, \dots, m$ tenemos $a_{1,i_1} \dots a_{m,i_m} = 0$. De aquí obtenemos $A = \text{per } A = 0$.

3.24. Designemos $S_l = \{A_j \mid A_j \cap B_l \neq \emptyset\}$, $l = 1, \dots, m$. Sea i_1, \dots, i_h una k -muestra arbitraria de $1, \dots, m$. Si $|S_{i_1} + \dots + S_{i_h}| < k$, entonces los conjuntos B_{i_1}, \dots, B_{i_h} están contenidos en la unión de menos de k conjuntos A_1, \dots, A_m , lo que contradice la hipótesis del problema. Por consiguiente, de conformidad con el teorema de P. Hall, existe un s.r.d. A_{i_1}, \dots, A_{i_m} para S_1, \dots, S_m . De la definición de los conjuntos S_l ($l = 1, \dots, m$) obtenemos $A_{i_h} \cap B_h \neq \emptyset$ ($h = 1, \dots, m$). Sea $x_h \in A_{i_h} \cap B_h$ ($h = 1, \dots, m$). Entonces, x_1, \dots, x_m es un s.r.d. para A_{i_1}, \dots, A_{i_m} y B_1, \dots, B_m .

3.25. Para cualquier k -muestra i_1, \dots, i_h ($1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m$) de $1, \dots, m$ tenemos $|A_{i_1} + \dots + A_{i_h}| = |B_{i_1} + \dots + B_{i_h}| = kr$. Por eso, el conjunto $A_{i_1} + \dots + A_{i_h}$ no puede contener más que k de los conjuntos B_1, \dots, B_m . Por consiguiente, según el problema 3.24, existe un s.r.d. para A_1, \dots, A_m y B_1, \dots, B_m .

3.26. Se deduce del problema 3.25.

3.27. Sea i_1, \dots, i_h cierta k -muestra de $1, \dots, m$ y supongamos que $|S_{i_1} + \dots + S_{i_h}| = n$. El número de p -combinaciones del n -conjunto es igual a C_n^p . Si los conjuntos S_{i_1}, \dots, S_{i_h} tienen un s.p.r.d., entonces el número n ha de satisfacer la desigualdad $C_n^p \geq k$.

§ 3. Teorema y números de Ramsey

3.28. Sea dada cierta coloración de las aristas de un 6-grafo completo. Veamos un vértice arbitrario P_0 . De cinco aristas que tienen por origen este vértice, al menos tres están pintadas de un mismo color. Convergamos en considerar que las aristas P_0P_1, P_0P_2 y P_0P_3 son azules. Si una de las aristas P_1P_2, P_1P_3, P_2P_3 , por ejemplo, P_1P_2 , es azul, entonces el 3-grafo con vértices P_0, P_1, P_2 es cromático; en el caso contrario el 3-grafo con vértices P_1, P_2, P_3 es cromático rojo.

3.29. Pintemos los lados de un pentágono regular de un color y las diagonales, de otro.

3.30. Se deduce del problema 3.28.

3.31. De los problemas 3.28 y 3.29 se deduce que $R(3, 3; 2) = 6$. Demostremos la desigualdad

$$R(k, m; 2) \leq R(k-1, m; 2) + R(k, m-1; 2), \quad k > 2, m > 2,$$

de la cual se desprende la afirmación del problema. Observemos que $R(2, m; 2) = m$ y $R(k, 2; 2) = k$. Apliquemos la inducción matemática por el número $s = k + m$. Si $s = 6$, es decir, si $m = k = 3$, entonces, según lo demostrado

anteriormente,

$$6 = R(3, 3; 2) \leq R(3, 2; 2) + R(2, 3; 2) = 3 + 3.$$

Supongamos que la existencia de los números $R(k-1, m; 2)$ y $R(k, m-1; 2)$ está establecida. Examinemos un n -grafo completo, donde $n = R(k-1, m; 2) + R(k, m-1; 2)$, cuyas aristas están pintadas en dos colores (rojo y azul). Denotemos por p un vértice arbitrario del grafo; por T_1 , el conjunto de vértices unidos con la p -ésima arista roja; por T_2 , el conjunto de vértices unidos con la p -ésima arista azul; $n_1 = |T_1|$, $n_2 = |T_2|$. En tal caso resulta válida la igualdad $n = n_1 + n_2 + 1 = R(k-1, m; 2) + R(k, m-1; 2)$.

Analicemos dos casos:

a) $n_1 \geq R(k-1, m; 2)$, $n_2 < R(k, m-1; 2)$;

b) $n_2 \geq R(k, m-1; 2)$, $n_1 < R(k-1, m; 2)$.

En el caso a), por definición del número $R(k-1, m; 2)$, en el subgrafo T_1 o bien existe un m -subgrafo cromático azul o bien un $(k-1)$ -subgrafo cromático rojo. En el segundo caso agreguemos al $(k-1)$ -subgrafo cromático rojo el vértice p y obtendremos el k -subgrafo cromático rojo.

El caso b) se analiza de un modo análogo.

3.32. La desigualdad no rigurosa está demostrada en el problema 3.31.

Demostremos que si $R(k-1, m; 2) = 2p$ y $R(k, m-1; 2) = 2q$, donde p y q son unos números naturales, entonces es válida la siguiente desigualdad rigurosa:

$$R(k, m; 2) < R(k-1, m; 2) + R(k, m-1; 2), \quad k > 2, m > 2.$$

Sea $n = 2p + 2q - 1$ y sea P un vértice arbitrario del n -grafo completo; n_1 , el número de aristas rojas que tienen por origen P ; n_2 , el número de aristas azules que tienen por origen P . En este caso es válida la igualdad

$$n - 1 = n_1 + n_2 = R(k-1, m; 2) + R(k, m-1; 2) - 2.$$

Son posibles tres casos:

a) $n_1 \geq R(k-1, m; 2)$, $n_2 < R(k, m-1; 2)$;

b) $n_2 \geq R(k, m-1; 2)$, $n_1 < R(k-1, m; 2)$;

c) $n_1 = 2p - 1$, $n_2 = 2q - 1$.

Los dos casos primeros se han analizado en el problema 3.31. Si para todos los vértices del grafo tiene lugar el caso c), el número de extremos rojos de las aristas es igual a $(2p + 2q - 1)(2p - 1)$, mas este número debe ser par.

3.33. Apliquemos la inducción matemática para el número $s = k + m$. Si $s = 6$, es decir, si $k = m = 3$, la desigualdad $6 = R(3, 3; 2) \leq C_{3+3-2}^{3+3-2} = 6$ se verifica.

Supongamos que $R(k-1, m; 2) \leq C_{k+m-3}^{k-2}$, $R(k, m-1; 2) \leq C_{k+m-3}^{k-1}$. Entonces, haciendo uso de la desigualdad del problema 3.32 y de la propiedad de los coeficientes binomiales, obtenemos la estimación

$$\begin{aligned} R(k, m; 2) &\leq R(k-1, m; 2) + R(k, m-1; 2) \leq \\ &\leq C_{k+m-3}^{k-2} + C_{k+m-3}^{k-1} = C_{k+m-2}^{k-1} \end{aligned}$$

3.34. *Indicaciones.* Razonando igual que en la demostración del problema 3.31, establézcase la validez de la desigualdad

$$R(k_1, \dots, k_m; 2) \leq R(k_1 - 1, k_2, \dots, k_m; 2) + \dots + R(k_1, \dots, k_{m-1}, k_m - 1; 2), \quad k_i > 2, \quad i = 1, \dots, m.$$

3.35. *Indicaciones.* Hágase uso de la desigualdad del problema 3.34 y de la propiedad de los coeficientes polinomiales

$$\frac{k!n!}{n_1! \dots n_m!} = \sum_{s=1}^m \frac{(n-1)!}{n_1! \dots n_{s-1}! (n_s - 1)! n_{s+1}! \dots n_m!}, \quad n = n_1 + \dots + n_m.$$

3.36. Numeremos los vértices del 13-grafo con los números del 0 al 12 inclusive. Una arista que une los vértices con los números i y j se pintará de color rojo, siempre que $i - j$ sea comparable con $\pm 2 \text{ ó } \pm 3$ respecto del módulo 13, y las demás aristas se pintarán de color azul (fig. 3.1' y 3.2').

3.37. De los problemas 3.32 y 3.36 se deduce que

$$R(3, 4; 2) < R(3, 3; 2) + R(2, 4; 2) = 10,$$

$$R(3, 5; 2) > 13, \quad R(3, 5; 2) \leq R(2, 5; 2) + R(3, 4; 2) < 15.$$

Por eso, resultan válidas las igualdades $R(3, 4; 2) = 9$ y $R(3, 5; 2) = 14$.

3.38. Numeremos los vértices del 17-grafo con los números del 0 al 16 inclusive. Vamos a pintar la arista que une los vértices con los números i y j de color rojo, siempre que la diferencia $i - j$ sea un residuo cuadrático respecto

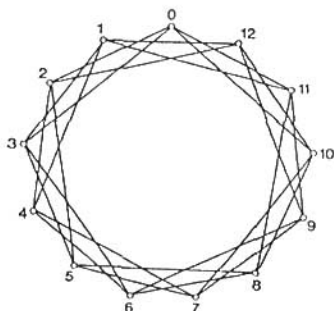


Fig. 3.1'.

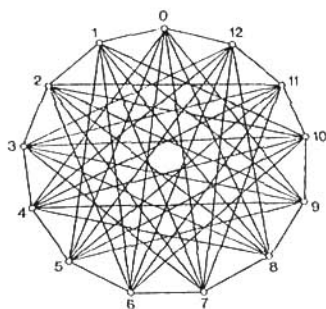


Fig. 3.2'.

del módulo 17, y en color azul, en el caso contrario. Supongamos que el sub-grafo con vértices a, b, c, d es cromático. Designemos: $m = (a - c)/(a - b)$ y $n = (a - d)/(a - b)$. Entonces, los números $m, n, m - 1, n - 1, m - n$ deben ser simultáneamente cuadráticos respecto del módulo 17, lo que es imposible, puesto que los residuos cuadráticos respecto del módulo 17 son los números 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16.

3.39. Del problema 3.38 se deduce que $R(4, 4; 2) > 17$. Por otra parte, de la desigualdad del problema 3.32 obtenemos una estimación superior:

$$R(4, 4; 2) \leq R(3, 4; 2) + R(4, 3; 2) = 18.$$

Comparando estas dos desigualdades, encontramos $R(4, 4; 2) = 18$.

3.40. Supongamos que las aristas del n -grafo completo se pintan casualmente en dos colores, con la particularidad de que la probabilidad de que una arista se pinte en color rojo es igual a p , y en color azul, a $1 - p$. Designemos por $P(A)$ la probabilidad del suceso A y por $M(\xi)$, la esperanza matemática de la magnitud aleatoria ξ . Para una k -muestra i_1, \dots, i_k y una l -muestra j_1, \dots, j_l arbitrarias de $1, \dots, n$ denotemos con ξ_{i_1, \dots, i_k} una magnitud aleatoria que toma el valor uno, si todas las aristas del grafo con vértices i_1, \dots, i_k están pintadas de rojo, y el valor cero, en el caso contrario; con η_{j_1, \dots, j_l} una magnitud aleatoria que toma el valor uno, si todas las aristas del grafo con vértices j_1, \dots, j_l están pintadas de azul y el valor nulo, en el caso contrario:

$$\xi = \sum_{i_1, \dots, i_k} \xi_{i_1, \dots, i_k} + \sum_{j_1, \dots, j_l} \eta_{j_1, \dots, j_l},$$

donde la sumación se realiza respecto de toda clase de k y l -muestras de $1, \dots, n$.

Calculemos la esperanza matemática ξ , aprovechando el hecho de que la esperanza matemática de una suma de magnitudes aleatorias es igual a la suma de las esperanzas matemáticas de dichas magnitudes:

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \sum_{i_1, \dots, i_h} M(\xi_{i_1, \dots, i_h}) + \sum_{j_1, \dots, j_l} M(\eta_{j_1, \dots, j_l}) = \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_h} p(\xi_{i_1, \dots, i_h} = 1) + \sum_{j_1, \dots, j_l} p(\eta_{j_1, \dots, j_l} = 1) = \\ &= C_n^h p^{C_h^2} + C_n^l (1-p)^{C_l^2}. \end{aligned}$$

De la hipótesis del problema se desprende que $M(\xi) < 1$.

Si ξ no asume el valor igual a cero, entonces

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{C_n^h + C_n^l} i p(\xi = i) > \sum_{i=1}^{C_n^h + C_n^l} p(\xi = i) = 1,$$

lo que contradice la hipótesis del problema.

Por consiguiente, la magnitud aleatoria ξ puede tomar un valor igual a cero, es decir, existe tal coloración de las aristas del n -grafo para la cual todos los k -subgrafos no son cromáticos rojos y todos los l -subgrafos no son cromáticos azules. Por eso tiene lugar la desigualdad $R(k, l; 2) > n$.

3.41 Del problema 3.40 se deduce que si un número n satisface la desigualdad $C_n^h p^{C_h^2} + C_n^h (1-p)^{C_h^2} < 1$, $0 < p < 1$, entonces $R(k, k; 2) > n$.

Sirviéndonos de la valoración para los coeficientes binomiales $C_n^h < (c_1 n/k)^h$, donde $c_1 > 0$ es una constante, y poniendo $p = 1/2$, $n = k2^{h/2}/(2c)$, tendremos la desigualdad requerida

$$C_n^h p^{C_h^2} + C_n^h (1-p)^{C_h^2} < \left(\frac{c_1 n}{k}\right)^h \frac{2}{2^{C_h^2}} < 1.$$

3.42. Observemos que si todos los cuadriláteros compuestos de los vértices del polígono n dado son convexos, entonces también convexo será el propio polígono n .

Sea $N = R(n, 5; 4)$ y supongamos que están dados N puntos en un plano, de los cuales cualesquiera tres no yacen en una misma recta. Dividamos el C_N^4 -conjunto de cuadriláteros en dos clases: convexos y no convexos. Entonces, de acuerdo con el teorema de Ramsey, existen o bien n puntos tales que todos los cuadriláteros con vértices en estos puntos son convexos, o bien existen cinco puntos tales que todos los cuadriláteros con vértices en estos puntos son no convexos. Lo último no es posible.

TABLAS Y ESQUEMAS COMBINATORIOS

§ 1. Matrices especiales

$$4.1. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2. Cada fila y cada columna de esta matriz contiene una unidad. Inter cambiando las filas y columnas, obtendremos una matriz en cuya diagonal principal se encontrarán sólo unidades. Su permanente es igual a 1.

4.3. Para la matriz A de la permutación (k_1, k_2, \dots, k_n) en la expresión, $\det A = \sum (\pm) a_{1,1} \dots a_{l,n}$ solamente un término, $a_{h_1 1} a_{h_2 2} \dots a_{h_n n}$, es distinto de cero. Dicho término es igual a uno e integra la suma con el signo +, si la permutación es par y con el signo -, si la permutación es impar. La respuesta es: $\det A = 1$, si la permutación es par; -1 , si la permutación es impar.

4.4. per $A = 24$.

4.5. per $A = 8$.

4.6. $2^{(n^2+n)/2}$. Resolución. Por encima de la diagonal principal y en la misma diagonal hay en la matriz $n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = n(n+1)/2$ elementos. Cada uno de ellos puede ser o bien cero, o bien la unidad. En total existen $2^{(n^2+n)/2}$ posibilidades. Los elementos por debajo de la diagonal se determinan unívocamente, en virtud de la simetría.

$$4.7. \binom{n}{k} \binom{n-k}{k}, \text{ donde } n \geq 2k. \quad 4.8. \text{ n!}. \quad 4.9. \binom{m}{r} \binom{n}{r}.$$

4.10. Sea A una de tales matrices y supongamos que t elementos en ella son iguales a -1 . Entonces, existen en la misma $t+r$ elementos iguales a $+1$, y a $2t+r = n^2$, de donde $t = (n^2 - r)/2$. Por consiguiente, el número de matrices mencionadas es igual a cero, siempre que $n^2 - r$ sea impar. En el caso contrario la respuesta será: $\binom{n^2}{(n^2 - r)/2}$.

$$4.11. \binom{n}{r}^n. \quad 4.12. 2^{n^2 - n + 1}.$$

$$4.13. \binom{(n^2 - n)/2}{k/2} + \binom{(n^2 - n)/2}{(k - n)/2}.$$

$$4.14. \binom{n(n-1)/2}{k} \binom{n(n-1)/2}{l}. \text{ El cálculo da } 90.$$

$$4.15. \binom{10}{7} \binom{5}{2}^5 = 12 \cdot 10^6. \quad 4.16. \binom{r}{l} \binom{n-r}{m-l}.$$

4.17. Todos los 6 términos del determinante no pueden tener un mismo signo (véase el problema 4.29). Si 5 términos del determinante tienen un mismo signo y el sexto término tiene otro, el determinante será par. El resultado análogo se obtiene en el caso cuando 4 términos tienen un mismo signo, y dos, otro signo, o bien cuando la cantidad de términos con signos opuestos es igual.

4.18. Existen $\binom{n}{r}^m$ matrices que en cada una de las primeras m filas contienen r unidades, y $\binom{n}{q}^{n-m}$ matrices, las cuales contienen en cada una de $n-m$ filas q unidades. El número buscado de $(0, 1)$ -matrices es igual a $\binom{n}{r}^m \binom{n}{q}^{n-m}$.

$$4.19. \binom{n-1}{r}^m \binom{n-1}{q}^{n-m}.$$

4.20. Existen $\binom{m}{s}$ diferentes columnas de m -sitios ocupadas por ceros y unidades, en cada una de las cuales hay exactamente s unidades. A partir de tales columnas pueden formarse $\binom{m}{s}^r$ matrices de dimensión $m \times r$. Luego, se tienen $\binom{m(n-r)}{k}$ matrices de dimensión $m \times (n-r)$, cada una de las cuales contiene exactamente k unidades. Tomando cualquiera de las citadas $m \times r$ matrices y agregándole $(n-r)$ columnas de cualquier $m \times (n-r)$ matriz, obtendremos la matriz buscada de dimensión $m \times n$. Por consiguiente existen $\binom{m}{s}^r \binom{m(n-r)}{k}$ matrices de este tipo.

4.22. Dispongamos los números de un modo tal que $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$. Entonces, para $i \geq j$, tenemos $b_i \leq b_j$; esto significa que $a_{ij} = 0$ ($i \geq j$), es decir, en la diagonal principal y por debajo de ésta figuran los ceros. El permanente de tal matriz es igual a cero, puesto que en cada término de la suma per $A = \sum a_{1i_1} \dots a_{ni_{n}}$ el elemento $a_{ni_{n}}$ (de la última fila en la matriz) es igual a cero.

4.23. per $A = 9$.

4.24. a) 0; b) 1; c) 8; d) 44; e) 11; f) 10.

4.25. El resultado se desprende de las definiciones de per A y de det A ; per A y det A son sumas algebraicas de unos mismos sumandos, mas en per A todos los sumandos son no negativos, mientras que en det A pueden haber también negativos.

4.26. La matriz A^2 se compone de los elementos $c_{ij} = a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \dots + a_{in}a_{nj}$. Por cuanto $a_{pq} \geq 0$, entonces para $A^2 = 0$, es decir, para $c_{ij} = 0$ ($i, j = 1, \dots, n$), es necesario y suficiente que $a_{ik}a_{kj} = 0$ ($i, j, k = 1, \dots, n$). Esta condición es equivalente (dado que $a_{pq} \geq 0$) a la siguiente:

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik}a_{kj} \right) = 0, \text{ es decir, a la condición } \sum_{k=1}^n b_k a_k = 0.$$

4.27. El determinante no puede ser igual a 6, de lo contrario el producto de tres de sus términos $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$ sería igual al producto de los tres términos restantes. Pero, el primero de estos productos es igual al producto de todos los nueve elementos de la matriz, y el segundo, al mismo producto, pero con el signo opuesto. El determinante no es igual a 5 (véase el problema 4.17), y el determinante, en el cual la diagonal principal está ocupada por -1 y los demás lugares, por $+1$, es igual a 4.

4.28. Desarrollando per B_n según la primera fila, obtendremos per $B_n = 1 \cdot \text{per } B_{n-1} + 1 \cdot \text{per } C_{n-1}$, donde

$$C_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Al desarrollar per C_{n-1} según la primera columna, obtendremos per $C_{n-1} = 1 \cdot \text{per } B_{n-2}$. De aquí, per $B_n = \text{per } B_{n-1} + \text{per } B_{n-2}$.

4.29. $p_n = \sum a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$. Si, por lo menos para un solo k , $i_k = k$, entonces $a_{hi_k} = a_{hh} = 0$, y el producto que contiene a_{hh} es igual a 0. Los productos, en los cuales $i_k \neq k$ ($k = 1, \dots, n$), no contienen elementos de la diagonal principal y, por tanto, son iguales a 1. Su número es igual al número de tales permutaciones (i_1, \dots, i_n) en las cuales $i_k \neq k$ ($k = 1, \dots, n$). De aquí se deduce que la fórmula en las condiciones del problema es lícita.

4.30. a) sí; b) no.

4.31. Cada una de las restantes $(n - 1)$ filas es ortogonal a la primera, por consiguiente, contiene $n/2$ unidades y $n/2$ menos-unidades. En total se tienen $n + (n - 1)n/2 = n(n + 1)/2$ unidades.

4.33. d) 5. La traza es igual a 0; el rango de frontera, 5; la α -anchura, siendo $\alpha = 1, 2, 3$, y 4, es igual a 2, 3, 4 y 5, respectivamente.

4.34. El grupo de 24-ésimo orden. De elemento del grupo sirve el producto de cualquier permutación de las filas primera y tercera por cualquier permutación de las filas segunda, cuarta, quinta y por cualquier permutación de la 1ª y 4ª columnas.

4.35. No varían las magnitudes indicadas en a), c), f), h); a) es obvio; c) se deduce de la definición de per A ; f) $\det(A^2) = (\det A)^2$, y $\det A$ se multiplica, al permutar las filas o las columnas, por $+1$ ó -1 ; h) se desprende del teorema de álgebra.

Las magnitudes citadas en b), d), e), g), i), pueden variar al realizar las permutaciones de las filas (o de las columnas), lo que se ve de los ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \text{ traza } A = 1; \det A = -1; \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2};$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ per } (A^2) = 3;$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ traza } B = 2; \det B = 1; \lambda_{1,2} = 1;$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ per } (B^2) = 1;$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ rango } (C^2) = 1;$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ rango } (D^2) = 0.$$

4.36. Siete matrices, por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 2. Rectángulos y cuadrados latinos

4.37. $N(2, 9) = 133496$.

4.38. Numeremos las figuras de la primera fila con las cifras 1, 2, 3, 4. Al igual que en el problema 4.37, $N(2, 4) = 9$:

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	
2	3	4	1	2	4	1	3	2	1	4	3	3	4	1	2	3	4	2	1	
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4				
	3	1	4	2	4	1	2	3	4	3	1	2	4	3	2	1				

4.39. A título de tercera fila podemos tomar cualquiera de las siguientes:

3	1	5	2	4,	3	4	5	1	2,	3	5	1	2	4,	3	5	2	1	4,	4	1	5	2	3,
4	1	5	3	2,	4	5	1	2	3,	4	5	1	3	2,	4	5	2	1	3,	5	1	2	3	4,
5	4	1	2	3,	5	4	1	3	2,	5	4	2	1	3,										

4.40. a) 4; b) 2.

4.41. Siempre exactamente mediante un solo método, puesto que cada columna de la novena fila se completa con elementos que no figuraban en las filas anteriores.

4.42. $N(3, 5) = 552$.

4.43. Dividase en m^2 cuadrados el campo y siémbrense las variedades de trigo de una manera tal que cada variedad sea usada exactamente una vez en cada fila y exactamente una vez en cada columna de la partición de la parcela. De este modo, a título de esquema para este experimento sirve un cuadrado latino de orden m .

4.44. El coste máximo que se busca es igual a 80, y el cuadrado que se busca tiene la forma (una de las soluciones)

2	3	5	10
10	5	3	2
3	2	10	5
5	10	2	3

4.45. La tabla de torneo tiene la forma (una de las soluciones)

·	2	3	4	5	1
2	·	4	5	1	3
3	4	·	1	2	5
4	5	1	·	3	2
5	1	2	3	·	4
1	3	5	2	4	·

Si en todas las casillas de la diagonal principal ponemos el número 6, se obtendrá un cuadrado latino simétrico de orden 6.

4.46.

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	5	1	2	3	4
4	5	1	2	3	2	3	4	5	1
5	1	2	3	4	4	5	1	2	3

Todas las filas del cuadrado latino cíclico se obtienen a partir de la primera fila por medio de toda clase de desplazamientos cíclicos. Lo mismo es válido para cualquier otro cuadrado latino cíclico del mismo orden. Esto quiere decir que

los dos cuadrados citados difieren sólo en el orden de las filas, razón por la cual son isomorfos.

4.47. Tomemos los cuadrados de orden 2:

$$A: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B: \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Formemos de ellos un cuadrado de orden 4:

$$\begin{array}{l} A \ B: \\ B \ A: \end{array} \text{ es decir, } \begin{array}{cccc} & & 0 & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 0 & 3 & 2 \\ & & 2 & 3 & 0 & 1 \\ & & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

4.48. La permutación (1 2) transforma un cuadrado en otro.

4.49. El isomorfismo del primero y segundo cuadrados está dado por $(1\ 2) \times (1\ 2) \times (1\ 2)$, y el del primero y tercero por $(1\ 2\ 3) \times (1\ 2\ 3) \times e$, donde e es una sustitución idéntica.

4.50. Aplicando sucesivamente las permutaciones de las columnas, filas y elementos, obtendremos el cuadrado B , isomorfo al cuadrado dado A :

$$B: \begin{array}{cccc} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{array}$$

4.51. En el primer cuadrado cada fila se obtiene a partir de la fila antecedente (y la primera fila, de la última) mediante la permutación $(0\ 1\ 2\ 3)$ con un ciclo. En el segundo cuadrado cualquier fila se obtiene de cualquier otra fila mediante una permutación con dos ciclos, por ejemplo, $(0\ 1)(2\ 3)$, o bien $(0\ 2)(1\ 3)$, o bien $(0\ 3)(1\ 2)$.

4.52. Los automorfismos del cuadrado los constituirán, en particular, las siguientes permutaciones

$$\begin{array}{l} \alpha_1: (1\ 2\ 3) \times (1\ 3\ 2) \times e; \quad e \text{ es una permutación idéntica;} \\ \alpha_2: (1\ 2) \times (1\ 2) \times (1\ 3); \\ \alpha_3: (1\ 3) \times (1\ 3) \times (1\ 2); \\ \alpha_4: (2\ 3) \times (2\ 3) \times (2\ 3); \\ \alpha_5: (1\ 2\ 3) \times (1\ 2\ 3) \times (1\ 2\ 3); \\ \alpha_6: (1\ 3\ 2) \times (1\ 3\ 2) \times (1\ 3\ 2). \end{array}$$

4.53. Reenumeremos al azar los elementos. Esto puede hacerse por medio de $4! = 24$ métodos. Pongamos cualquier fila en el primer lugar (4 métodos). Permutemos las columnas de un modo tal que en la primera fila se obtenga 4123. Luego, cambiemos de lugar la 2ª, 3ª y 4ª filas de tal modo que se obtenga 4123 en la primera columna. El cuadrado obtenido coincide con el de partida. Por cuanto la transformación mencionada puede realizarse mediante $24 \times 4 = 96$ métodos, se tienen en total 96 automorfismos. En lugar de todos los 96 casos resulta suficiente analizar los siguientes 6:

a) los elementos 1, 2, 3, 4 no cambian, y en lugar de la 1ª fila se pone la 2ª, 3ª ó 4ª (3 casos);

b) con los elementos 1, 2, 3, 4 se realiza una de las permutaciones (1 2), (1 3), (1 4), mientras que la 1ª fila queda en su lugar (3 casos). (Efectivamente, cada una de las 96 transformaciones es el resultado de realizar sucesivamente algunas de las 6 transformaciones mencionadas.)

4.54. Si el par ij se halla en el k -ésimo grupo, entonces en el cuadrado latino $a_{ij} = a_{jk} = k$:

0	1	2	3	4	5
1	0	4	2	5	3
2	4	0	5	3	1
3	2	5	0	1	4
4	5	3	1	0	2
5	3	1	4	2	0

4.55. Supongamos que la primera fila es $0\ 1\ 2\ \dots\ p$. Las otras filas se obtienen realizando desplazamientos cíclicos; la i -ésima fila comienza por i (debido a la simetría), lo que quiero decir que se obtiene de la 1ª fila realizando el desplazamiento cíclico en $i - 1$ unidades. Por consiguiente, para los elementos de la i -ésima fila tenemos $a_{ij} \equiv a_{1j} + (i - 1)$, es decir, $a_{ij} \equiv a_{1j} + a_{i1} \pmod{p}$. El cuadrado latino es una tabla de sumación del grupo cíclico de residuos respecto del módulo p .

4.56. Sean b_1, \dots, b_p diferentes elementos de un cuadrado latino $\{a_{ij}\}$ ($i, j = 1, \dots, p$). Definamos la operación $b_i b_j = a_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, p$). En cada fila del cuadrado latino $a_{ij} \neq a_{ik}$ ($j \neq k$). Por cuanto p ecuaciones $b_i x = a_{ij}$ ($j = 1, \dots, p$) tienen p diferentes soluciones $x = b_1, \dots, x = b_p$, cada ecuación, pues, es unívocamente resoluble. De un modo análogo se demuestra la resolubilidad unívoca de las ecuaciones $y b_j = a_{ij}$ ($i = 1, \dots, p$). Por consiguiente, el conjunto $\{b_1, \dots, b_p\}$ con la tabla de multiplicar $b_i b_j = a_{ij}$ es un casigrupo.

4.57. La unicidad de las soluciones de las ecuaciones $ax = b$ e $ya = b$ predetermina que cada elemento en cada fila y en cada columna se encuentra exactamente una sola vez.

4.59. 196.

4.60. a) Los nombres de las cartas forman un cuadrado latino, y los nombres de los palos, otro cuadrado que es ortogonal con relación al primero. He aquí una de las soluciones:

<i>B</i> bastos	<i>T</i> copas	<i>D</i> espadas	<i>K</i> oros
<i>D</i> oros	<i>K</i> espadas	<i>B</i> copas	<i>T</i> bastos
<i>K</i> copas	<i>D</i> bastos	<i>T</i> oros	<i>B</i> espadas
<i>T</i> espadas	<i>B</i> oros	<i>K</i> bastos	<i>D</i> copas

b) Es imposible, puesto que de esta condición se deduce que en una diagonal todas las cuatro cartas han de tener un color igual, y en tal caso los palos en las diagonales se repetirán.

c)

<i>D</i> copas	<i>K</i> bastos	<i>B</i> oros	<i>T</i> espadas
<i>B</i> bastos	<i>T</i> copas	<i>D</i> espadas	<i>K</i> oros
<i>T</i> oros	<i>B</i> espadas	<i>K</i> copas	<i>D</i> bastos
<i>K</i> espadas	<i>D</i> oros	<i>T</i> bastos	<i>B</i> copas

4.61.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	2	3	1	5	6	4	8	9	7		3	1	2	6	4	5	9	7	8	
	3	1	2	6	4	5	9	7	8		2	3	1	5	6	4	8	9	7	
	4	5	6	7	8	9	1	2	3		7	8	9	1	2	3	4	5	6	
<i>A</i> :	5	6	4	8	9	7	2	3	1		<i>B</i> :	9	7	8	3	1	2	6	4	5
	6	4	5	9	7	8	3	1	2			8	9	7	2	3	1	5	6	4
	7	8	9	1	2	3	4	5	6			4	5	6	7	8	9	1	2	3
	8	9	7	2	3	1	5	6	4			6	4	5	9	7	8	3	1	2
	9	7	8	3	1	2	6	4	5			5	6	4	8	9	7	2	3	1

B es un cuadrado latino, ortogonal al cuadrado A .

$$4.62. \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{matrix}$$

$$4.63. \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{matrix}$$

$$4.64. \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{matrix}$$

4.65. La primera fila de cada cuadrado es igual, mientras que cada fila siguiente se obtiene a partir de la anterior mediante un mismo desplazamiento cíclico en k , donde para el primer cuadrado $k = 1$, para el segundo $k = 2$, para el tercero $k = 4$, para el cuarto $k = 5$, para el quinto $k = 7$ y para el sexto $k = 8$.

$$4.66. \text{ De los cuadrados } \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix} \text{ y } \begin{matrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{matrix} \text{ obtenemos } A \text{ y de los cuadrados}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \text{ y } \begin{matrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{matrix} \text{ obtenemos } B:$$

$$A: \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{matrix} \quad B: \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{matrix}$$

Estos cuadrados no son ortogonales.

4.67. Todos los cuadrados se obtienen a partir del primero permutando las filas, al igual que en la resolución del problema 4.65. Por consiguiente, son isomorfos.

4.68. Por hipótesis, los cuadrados k -ésimo y l -ésimo se definen del modo siguiente:

$$a_{ij}^{(k)} = ik + j \pmod{p}, \quad a_{ij}^{(l)} = il + j \pmod{p}. \quad (4.1')$$

Analicemos los pares de elementos

$$(ik + j, il + j) = (i_1k + j_1, i_1l + j_1). \quad (4.2')$$

De (4.2') se deduce

$$ik + j \equiv i_1k + j_1 \pmod{p}, \quad il + j \equiv i_1l + j_1 \pmod{p},$$

o bien

$$j - j_1 \equiv k(i_1 - i) \pmod{p}, \quad j - j_1 \equiv l(i_1 - i) \pmod{p}. \quad (4.3')$$

De (4.3') obtenemos $k(i_1 - i) \equiv l(i_1 - i) \pmod{p}$. Esta comparación es equivalente a la igualdad

$$(k - l)(i_1 - i) = mp, \quad m \text{ es entero,} \quad (4.4')$$

donde $1 \leq |k - l| \leq p - 2$, $|i_1 - i| \leq p - 1$.

Por hipótesis, p es primo. Por cuanto el producto que figura en el primer miembro de (4.4') se divide por el número primo p , entonces uno de los factores se divide por este número. Pero, $1 \leq |k - l| \leq p - 2$, por consiguiente, $k - l$ no se divide por p . En tal caso $i_1 - i$ ha de dividirse por p . Esto es posible sólo cuando $i_1 = i$. Si $i_1 = i$, de la relación (4.3') se deduce que $j_1 = j$. Es decir, los pares $(a_{ij}^{(k)}, a_{ij}^{(l)})$ y $(a_{i_1 j_1}^{(k)}, a_{i_1 j_1}^{(l)})$ coinciden sólo en el caso en que $i = i_1$, $j = j_1$.

4.69. Escribamos los elementos del grupo G en forma de los vectores (α, β, γ) , donde $\alpha = 0, 1$; $\beta = 0, 1$; $\gamma = 0, 1$. La operación de grupo es la suma respecto del mod 2. Denotemos, para abreviar, el elemento (α, β, γ) con el número $m = \alpha + 2\beta + 4\gamma + 1$. Entonces los elementos del grupo se designarán con los números $m = 1, 2, \dots, 8$. Los automorfismos del grupo G se escribirán en forma de las permutaciones $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 8 \\ b_1 & \dots & b_8 \end{pmatrix}$. Elijamos un automorfismo

φ tal que todas las potencias suyas $\varphi, \varphi^2, \varphi^3, \dots, \varphi^6$ sean diferentes y cada una de ellas deje en su lugar sólo la unidad. Por ejemplo, $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 7 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

A título de cuadrado latino K_8 tomemos la tabla de multiplicar del grupo G , y a título de K , una tabla que se obtiene de K_8 por permutación de las filas con ayuda de la permutación φ^s ($s = 1, 2, \dots, 6$). Entonces, $K_0, K_1, K_2, \dots, K_6$ será el conjunto de cuadrados latinos ortogonales que se busca. En efecto, supongamos que en K_p y en K_q ($p \neq q$) se han encontrado dos pares iguales:

$$(a_{ij}^{(p)}, a_{ij}^{(q)}) = (a_{i_1 j_1}^{(p)}, a_{i_1 j_1}^{(q)}). \quad (4.5')$$

Por cuanto cada cuadrado es una tabla de sumar, entonces $a_{1j}^{(s)} = a_{11}^{(s)} + a_{1j}^{(s)}$ ($s = 0, 1, \dots, 6$). Ya que la primera fila en todos los cuadrados es $1, 2, \dots, 8$, entonces $a_{1j}^{(p)} = a_{1j}^{(q)} = j$, $a_{i_1 j_1}^{(p)} = a_{i_1 j_1}^{(q)} = j_1$. Por cuanto la primera fila en K_8 se obtiene a partir de la columna $1 \ 2 \ \dots \ 8$ en K_0 con ayuda de la permutación φ^s , entonces $a_i^{(s)} = \varphi^s(i)$, $a_{i_1}^{(s)} = \varphi^s(i_1)$ ($s = 0, 1, \dots, 6$). Ahora, de (4.5') se deduce

$$\varphi^p(i) + j = \varphi^p(i_1) + j_1, \quad (4.6')$$

$$\varphi^q(i) + j = \varphi^q(i_1) + j_1.$$

De aquí, $\varphi^p(i) - \varphi^p(i_1) = \varphi^q(i) - \varphi^q(i_1)$. Por cuanto φ^s es un automorfismo, tenemos $\varphi^s(a) - \varphi^s(b) \equiv \varphi^s(a - b)$. Por consiguiente, $\varphi^p(i - i_1) = \varphi^q(i - i_1)$. Tenemos: $0 \leq p \leq 6$. Sea, por ejemplo, $p > q$. Aplicando a ambos miembros de la igualdad φ^{-q} , obtenemos

$$\varphi^{p-q}(i - i_1) = i - i_1, \quad 1 \leq p - q \leq 6. \quad (4.7')$$

Por cuanto el automorfismo φ^s ($1 \leq s \leq 6$) deja en su lugar sólo la unidad del grupo (si la operación de grupo es suma, entonces sólo deja el cero del grupo), de (4.7') se deduce que $i = i_1$. En tal caso de (4.6') se deduce que $j = j_1$. Es decir, los pares diferentes no pueden coincidir. Esto significa que los cuadrados K_p y K_q son ortogonales.

4.70. El método de construir un conjunto completo de cuadrados latinos y la demostración de su ortogonalidad están descritos en la resolución del problema 4.69.

4.72. El campo de Galois $GF(n)$ de $n = 3^2$ elementos. Como elementos del campo tomemos

$$a_0 = 0, \quad a_1 = x^0 = 1, \quad a_2 = x^1 = x, \quad a_3 = x^2 = 2x + 1, \\ a_4 = x^3 = 2x + 2, \quad a_5 = x^4 = 2, \quad a_6 = x^5 = 2x, \quad a_7 = x^6 = x + 2, \\ a_8 = x^7 = x + 1.$$

Construyamos las matrices de orden $n = 3^2$:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x & 2x+1 & 2x+2 & 2 & 2x & x+2 & x+1 \\ 1 & 2 & x+1 & 2x+2 & 2x & 0 & 2x+1 & x & x+2 \\ x & x+1 & 2x & 1 & 2 & x+2 & 0 & 2x+2 & 2x+1 \\ 2x+1 & 2x+2 & 1 & x+2 & x & 2x & x+1 & 0 & 2 \\ 2x+2 & 2x & 2 & x & x+1 & 2x+1 & x+2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2+x & 2x & 2x+1 & 1 & 2x+2 & x+1 & x \\ 2x & 2x+1 & 0 & x+1 & x+2 & 2x+2 & x & 2 & 1 \\ x+2 & x & 2x+2 & 0 & 1 & x+1 & 2 & 2x+1 & 2x \\ x+1 & x+2 & 2x+1 & 2 & 0 & x & 1 & 2x & 2x+2 \end{pmatrix}.$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x & 2x+1 & 2x+2 & 2 & 2x & x+2 & x+1 \\ x & x+1 & 2x & 1 & 2 & x+2 & 0 & 2x+2 & 2x+1 \\ 2x+1 & 2x+2 & 1 & x+2 & x & 2x & x+1 & 0 & 2 \\ 2x+2 & 2x & 2 & x & x+1 & 2x+1 & x+2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & x+2 & 2x & 2x+1 & 1 & 2x+2 & x+1 & x \\ 2x & 2x+1 & 0 & x+1 & x+2 & 2x+2 & x & 2 & 1 \\ x+2 & x & 2x+2 & 0 & 1 & x+1 & 2 & 2x+1 & 2x \\ x+1 & x+2 & 2x+1 & 2 & 0 & x & 1 & 2x & 2x+2 \\ 1 & 2 & x+1 & 2x+2 & 2x & 0 & 2x+1 & x & x+2 \end{pmatrix}$$

o bien, al redesignar los elementos, tendremos en definitiva

0	1	3	7	8	2	6	5	4	0	1	3	7	8	2	6	5	4
1	2	4	8	6	0	7	3	5	3	4	6	1	2	5	0	8	7
3	4	6	1	2	5	0	8	7	7	8	1	5	3	6	4	0	2
7	8	1	5	3	6	4	0	2	8	6	2	3	4	7	5	1	0
8	6	2	3	4	7	5	1	0	2	0	5	6	7	1	8	4	3
2	0	5	6	7	1	8	4	3	6	7	0	4	5	8	3	2	1
6	7	0	4	5	8	3	2	1	5	3	8	0	1	4	2	7	6
5	3	8	0	1	4	2	7	6	4	5	7	2	0	3	1	6	8
4	5	7	2	0	3	1	6	8	1	2	4	8	6	0	7	3	5

etc. Cada cuadrado sucesivo se obtiene del anterior con ayuda de una misma permutación cíclica de las filas 2, 3, ..., 9.

§ 3. Sistema de ternas de Steiner y juegos semejantes

4.73. a) 123; 145; b) 123; 145; 245; 345 (tres ternas no son suficientes, puesto que en tres ternas están contenidos no más de 9 pares diferentes, mientras que de cinco elementos pueden formarse 10 pares); c) 123; 145; 167; 246; 257; 347; 356.

4.74. a) No; b) no; c) sí.

4.75. De n elementos pueden formarse $n(n-1)/2$ pares; en cada terna hay tres pares, en diferentes ternas hay distintos pares. Esto quiere decir que el número de ternas es igual a $n(n-1)/2 : 3 \doteq n(n-1)/6$.

4.76. Hágase uso del problema 4.75.

4.77. A) Sí; B) sí; C) no.

4.78. Al añadir las ternas de b), obtendremos un sistema de ternas de Steiner de orden 7; la adición de las ternas a), c), d) no da los sistemas de ternas de Steiner, puesto que algunos pares se repiten.

4.79. $(n-1)/2$. Todo elemento integra el par $n-1$: en cada terna, donde se tiene este elemento, figuran dos de estos pares. Esto significa que el elemento figura en $(n-1)/2$ ternas.

4.80. Sea E el conjunto principal del sistema Δ_n y sea S el conjunto principal del sistema Δ_d . Los elementos del conjunto $E \setminus S$ forman $\binom{n-d}{2}$ pares no ordenados; los pares mencionados se encuentran en las ternas del sistema Δ_n que no pertenecen a Δ_d . Cada elemento de S se encuentra con $(n-d)/2$ pares de este género, con la particularidad de que los diferentes elementos no pueden encontrarse con un mismo par de elementos del conjunto $E \setminus S$. Por consiguiente, el número de pares que se encuentran con los elementos del conjunto S es igual a $d(n-d)/2$. Es obvio que este número no sobrepasa el número total de pares, por lo cual $\frac{d(n-d)}{2} \leq \binom{n-d}{2}$, de donde se deduce la desigualdad que se demuestra.

4.81. Sea Δ_n un sistema de ternas de Steiner y sean Δ_d y Δ_l los subsistemas de éste. Si $\Delta_d \cap \Delta_l = \Delta = \emptyset$, el teorema es cierto. Sea $\Delta \neq \emptyset$. Designemos con S un conjunto de elementos que se encuentran en las ternas provenientes de Δ . Elijamos arbitrariamente $a \in S$, $b \in S$, $a \neq b$. Entonces, en Δ_n existe la única terna $\{a, b, x\}$ que incluye el par $\{a, b\}$. Por cuanto los elementos a, b pertenecen al conjunto principal del sistema Δ_d , entonces $\{a, b, x\} \in \Delta_d$. De un modo análogo se muestra que $\{a, b, x\} \in \Delta_l$. Por consiguiente, $\{a, b, x\} \in \Delta$. Así pues, para un par arbitrario de elementos provenientes de S existe en Δ una terna que incluye dicho par. Por eso Δ es un sistema de ternas de Steiner, lo que se trataba de demostrar.

4.82. $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & 5 & 3 & 4 & 7 \\ & 1 & 4 & 6 & 2 & 6 & 7 & 3 & 5 & 6 \\ & & 1 & 5 & 7 & & & & & \end{matrix}$

4.83. Tipo de entrelazamiento: $T_1 = (2, 3)$ (fig. 4.1').

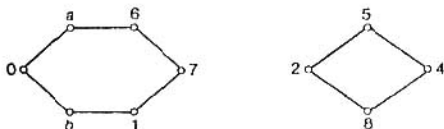


Fig. 4.1'.

4.97. Todo automorfismo de un sistema de ternas de Kirkman conserva dichas ternas, lo que quiere decir que es un elemento del grupo de automorfismos del sistema de ternas de Steiner.

4.98. 01 02 03 04 05
23 14 15 13 12
45 35 24 25 34

4.99. 01 02 03 04 05 06 07
27 13 15 17 12 14 16
36 47 24 26 37 23 25
45 56 67 35 46 57 34

4.100. De 2μ jugadores pueden formarse $2\mu(2\mu - 1)/2 = \mu(2\mu - 1)$ diferentes pares. En un día pueden jugar μ pares de 2μ jugadores. Esto significa que en total pueden realizarse $\mu(2\mu - 1)/\mu = 2\mu - 1$ jornadas. En el caso dado 11 jornadas y en cada jornada juegan 6 pares:

N° de jornada										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1 12	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	1 7	1 8	1 9	1 10	1 11
2 11	3 11	2 12	2 3	2 4	2 5	2 6	2 7	2 8	2 9	2 10
3 10	4 10	4 11	5 11	3 12	3 4	3 5	3 6	3 7	3 8	3 9
4 9	5 9	5 10	6 10	6 11	7 11	4 12	4 5	4 6	4 7	4 8
5 8	6 8	6 9	7 9	7 10	8 10	8 11	9 11	5 12	5 6	5 7
6 7	7 12	7 8	8 12	8 9	9 12	9 10	10 12	10 11	11 12	6 12

Este mismo sistema da el sistema buscado de grupos de pares.

4.101. Por definición, los grupos restantes de pares se obtienen del modo siguiente:

$$T\tau_1 = \tau_2, \quad T\tau_2 = \tau_3, \quad \dots, \quad T\tau_{2\mu-2} = \tau_{2\mu-1},$$

$$T\tau_{2\mu-1} = \tau_1, \quad (4.8')$$

es decir, $\tau_i = T^{i-1}\tau_1$ ($i = 1, \dots, 2\mu - 1$). Por consiguiente, todas las potencias de $T^0, T^1, \dots, T^{2\mu-2}$ son distintas, y

$$T^{2\mu-1}\tau = \tau. \quad (4.9')$$

Con una exactitud de hasta la enumeración de los elementos existen solamente dos permutaciones de 2μ elementos que poseen diferentes $T^0, T^1, \dots, T^{2\mu-1}$, a saber, $(0 \ 1 \ 2 \ \dots \ 2\mu - 1)$ y $(0) \ (1 \ 2 \ \dots \ 2\mu - 1)$. Para la primera de ellas $T^{2\mu} = E$. Por consiguiente, en virtud de (4.8') y (4.9'),

$$\tau_1 = T^{2\mu}\tau_1 = T(T^{2\mu-1}\tau_1) = T\tau_1 = \tau_2.$$

La contradicción obtenida muestra que la primera permutación no da sistemas del tipo cíclico.

4.102. Las tablas correspondientes son:

<table style="border-collapse: collapse; margin: 0 auto;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">6</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">5</td><td style="padding: 2px 5px;">6</td></tr> </table>	0	6	1	1	5	6	;	<table style="border-collapse: collapse; margin: 0 auto;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">6</td><td style="padding: 2px 5px;">7</td></tr> </table>	0	6	7	;	<table style="border-collapse: collapse; margin: 0 auto;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">5</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td></tr> </table>	1	5	2	2	4	4	4	2	1
0	6	1																				
1	5	6																				
0	6	7																				
1	5	2																				
2	4	4																				
4	2	1																				

<table style="border-collapse: collapse; margin: 0 auto;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">6</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td></tr> </table>	2	4	2	4	2	4	6	0	1	;	<table style="border-collapse: collapse; margin: 0 auto;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td></tr> </table>	2	4	3	3	3	4	;	<table style="border-collapse: collapse; margin: 0 auto;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">6</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">7</td></tr> </table>	6	0	7
2	4	2																				
4	2	4																				
6	0	1																				
2	4	3																				
3	3	4																				
6	0	7																				

Entre los sistemas mencionados no hay isomorfos.

4.103. Confeccionando la matriz de los tipos de entrelazamiento del primer sistema, calculamos los vectores índices de sus grupos de pares; véase a).

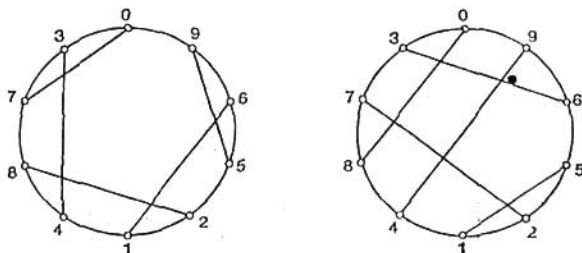


Fig. 4.2'.

Dibujamos los grafos, por ejemplo, $\tau_3 \cup \tau_9 \cup \tau_7$ y $\tau_3 \cup \tau_9 \cup \tau_8$ (fig. 4.2'). Los vectores índices de los grupos de pares para el segundo sistema tienen la forma b);

a)	<table style="border-collapse: collapse; margin: 0 auto;"> <tr><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">6</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">8</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">5</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">6</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">7</td><td style="padding: 2px 5px;">5</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">8</td><td style="padding: 2px 5px;">5</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">9</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">6</td></tr> </table>	1	4	4	2	4	4	3	2	6	4	0	8	5	4	4	6	4	4	7	5	3	8	5	3	9	2	6	b)	<table style="border-collapse: collapse; margin: 0 auto;"> <tr><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">5</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">6</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">8</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">5</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">6</td><td style="padding: 2px 5px;">5</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">7</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">8</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">6</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">9</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td></tr> </table>	1	5	3	2	4	4	3	2	6	4	0	8	5	4	4	6	5	3	7	4	4	8	2	6	9	4	4
1	4	4																																																							
2	4	4																																																							
3	2	6																																																							
4	0	8																																																							
5	4	4																																																							
6	4	4																																																							
7	5	3																																																							
8	5	3																																																							
9	2	6																																																							
1	5	3																																																							
2	4	4																																																							
3	2	6																																																							
4	0	8																																																							
5	4	4																																																							
6	5	3																																																							
7	4	4																																																							
8	2	6																																																							
9	4	4																																																							

A los grupos τ_3 y τ_9 con vectores índices (2 6) del primer sistema pueden corresponder solamente los grupos τ_3 y τ_8 con los mismos índices en el segundo sistema, y a los grupos τ_7 y τ_8 con (5 3), solamente los grupos τ_1 y τ_6 . Por eso, para el segundo sistema dibujamos los grafos $\tau_3 \cup \tau_8 \cup \tau_1$ y $\tau_3 \cup \tau_8 \cup \tau_6$ (fig. 4.3'). La única permutación que puede traspasar el dibujo izquierdo al derecho es (0 8 9 7 3) (1 5 4 6). Se comprueba directamente que esta permutación es la buscada.

4.104.

0	1	0	2	0	3
2	3	1	3	1	2

Por cuanto los cuatro elementos pueden ser partidos en pares solamente mediante estos tres métodos (empleados en el sistema construido aquí), entonces después de cualquier permutación de dichos elementos obtendremos los mismos tres métodos de partición en pares, es decir, el mismo sistema. Por consiguiente,

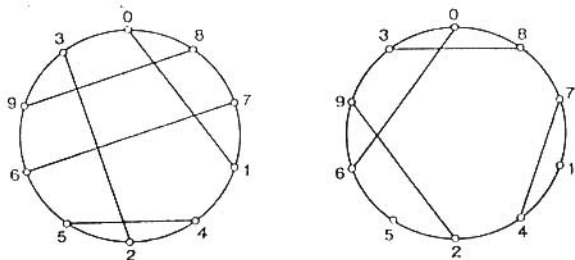


Fig. 4.3'.

cualquier permutación de cuatro elementos es un automorfismo del sistema. Así pues, el grupo de automorfismos buscado es el grupo S_4 de todas las permutaciones de cuatro elementos: su orden es $4! = 24$.

4.105. Sea un sistema

0 1	0 2	0 3	0 4	0 5
2 5	3 1	4 2	5 3	1 4
3 4	4 5	5 1	1 2	2 3

La permutación $T = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ convierte todo grupo de pares τ_i en el grupo siguiente τ_{i+1} . Esto significa que $T^i \tau_1 = \tau_{i+1}$ ($i = 1, 2, 3, 4$); $T^5 = E$. Si φ es un automorfismo del sistema, entonces $\varphi \tau_1 = \tau_{i+1}$ para cierto i ($0 \leq i \leq 4$), es decir, $\varphi \tau_1 = T^i \tau_1$, $T^{-i} \varphi \tau_1 = \tau_1$. De aquí, $\psi = T^{-i} \varphi$ es un automorfismo del grupo de pares τ_1 . Cualquier automorfismo de este tipo ψ puede ser representado unívocamente en forma de un producto de dos automorfismos, uno de los cuales hace permutar solamente los pares 0 1, 2 5, 3 4 (el grupo de tales automorfismos es isomorfo al grupo de todas las permutaciones de tres elementos) y el otro hace permutar los elementos en cualesquiera de estos tres pares de manera independiente (el grupo de tales automorfismos es un grupo abeliano con las generatrices (0 1), (2 5), (3 4), es decir, es isomorfo al grupo $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$). Así pues, $\Gamma(\text{aut } \tau_1) = 5 \times 6 \times 8 = 240$.

4.106. La permutación T es, en virtud del problema 4.101, un automorfismo del sistema. También son automorfismos las permutaciones $T^2, T^3, \dots, T^{2\mu-1} = E$. Por consiguiente, el grupo de automorfismos contiene un subgrupo cíclico de orden $2\mu - 1$ con elemento generatriz T .

4.107. Agreguemos al 1er grupo el elemento 1; al 2º grupo, el 2, al 3er grupo, el 3. Obtendremos la siguiente sucesión

1	7	6	2	7	5	3	7	4
1	5	4	2	6	4	3	6	5

Añadiendo la terna 1 2 3, obtendremos las siete ternas buscadas de Steiner.

4.108.

0	1	0	2	0	3	0	4	0	5	0	6	0	7	0	8	0	9
2	3	1	3	1	4	1	7	1	9	1	8	1	2	1	6	1	5
4	5	4	6	2	5	2	9	2	8	2	7	3	8	2	4	2	6
6	7	5	8	6	9	3	5	3	6	3	4	4	9	3	9	3	7
8	9	7	9	7	8	6	8	4	7	5	9	5	6	5	7	4	8

El par (i, j) , donde $i, j = 0, \dots, 9, i \neq j$, figura en el a_{ij} -ésimo grupo.

§ 4. Bloque-esquemas

4.110.

a) $v = b = 7,$ $k = r = 3,$ $\lambda = 1:$ 1 2 4 1 3 5 1 6 7 2 3 6 2 5 7 3 4 7 4 5 6	b) $v = b = 13,$ $k = r = 4,$ $\lambda = 1:$ 1 2 3 4 1 5 6 7 1 8 9 10 1 11 12 13 2 5 8 11 2 6 9 12 2 7 10 13 3 5 9 13 3 6 10 11 3 7 8 12 4 5 10 12 4 6 8 13 4 7 9 11	c) $v = 9, b = 12,$ $r = 4, k = 3,$ $\lambda = 1:$ 1 2 3 1 4 5 1 6 7 1 8 9 2 4 6 2 5 8 2 7 9 3 4 9 3 5 7 3 6 8 4 7 8 5 6 9
--	---	--

4.111. a) No existe. De lo contrario, según el teorema de encaje, el esquema de que se trata podría ser encajado en un esquema simétrico con parámetros $v_1 = 22, k_1 = 7, \lambda = 2$, el cual no existe de acuerdo con el teorema de Bruck—Ryser—Chowla sobre la existencia de BIB-esquemas simétricos. En efecto, v_1 es par, $k_1 - \lambda = 5$ no es un cuadrado.

d) La resolución es análoga a a): según el segundo de los teoremas citados no existe esquema con los parámetros $v_1 = 43, k_1 = 7, \lambda = 1$; según el primer teorema, no existe esquema con los parámetros $v = 36, b = 42, r = 7, k = 6$ y $\lambda = 1$.

4.112. a) Es fácil establecer la validez de la siguiente afirmación: sea $v = 6t + 1 = p^n$ y p , un número primo, y sea x una raíz primitiva del campo $GF(p^n)$. En este caso los bloques $(x^0, x^{2t}, x^{4t}), \dots, (x^1, x^{3t+1}, x^{4t+1}), (x^{t-1}, x^{3t-1}, x^{5t-1})$ forman la base del esquema con los parámetros $v = 6t + 1, b = 6t^2 + t, r = 3t, k = 3, \lambda = 1$ y un grupo de automorfismos A que es un grupo aditivo del campo $GF(p^n)$. Observemos que la raíz primitiva de $GF(7)$ es el elemento 3, por consiguiente, la base del bloque-esquema dado está formada por el bloque $t = 1, x = 3 (x^0, x^2, x^4) = (1, 2, 4)$. El grupo de automorfismos es un grupo cíclico de residuos respecto al módulo 7.

b) La resolución es análoga a la anterior. Al aplicar los razonamientos realizados más arriba, encontramos la base del BIB-esquema dado: $t = 2, x = 2 (1, 3, 9)$ y $x = (2, 6, 5)$. El grupo de automorfismos es un grupo cíclico de residuos respecto al módulo 13.

4.114. El bloque-esquema tiene por expresión

1	2	4	2	3	4	3	4	5
1	2	5	2	3	6	4	5	6
1	3	5	2	5	6			
1	3	6						
1	4	6						

4.115. a) Es el bloque-esquema del problema 4.110, a). En efecto, la igualdad de incidencia tiene por expresión

$$L_1^2 + L_2^2 + \dots + L_b^2 = (v - \lambda)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_b^2) + \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_b)^2.$$

Teniendo presente que $v = b = 7$, $k = r = 3$, $\lambda = 1$, obtenemos la igualdad requerida.

4.116. a) Por cuanto $v = 21$ es impar, entonces, de acuerdo con el teorema de Bruck—Ryser—Chowla sobre la existencia de BIB-esquemas simétricos,

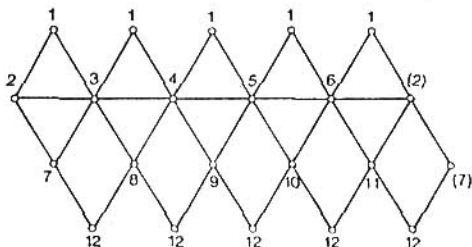


Fig. 4.4'.

llegamos a la ecuación $z^2 = 4x^2 + y^2$. Esta tiene una solución no nula de números enteros (1, 0, 2). Por consiguiente, la condición necesaria para la existencia de un bloque-esquema es válida.

b) $v = 15$ es impar. Aplicando el teorema citado, obtenemos, por analogía con lo anterior, la ecuación $z^2 = 4x^2 - 3y^2$, la cual tiene una solución no nula de números enteros (1, 1, 1). Por consiguiente, la condición necesaria de la existencia de un bloque-esquema se cumple.

c) Por analogía con lo anterior obtenemos la ecuación $z^2 = 5x^2 - 4y^2$ y su solución no nula de números enteros (1, 1, 1).

d) Obtenemos la ecuación $z^2 = 7x^2 + 2y^2$ y su solución buscada (1, 1, 3).

4.117. Si por elementos del esquema tomamos los vértices del tetraedro y por bloques, las caras de éste, entonces el tetraedro corresponderá a un BIB-esquema simétrico.

El octaedro es un PBIB-esquema con los parámetros $v = 6$, $b = 8$, $r = 4$, $k_1 = 3$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $n_1 = 1$, $n_2 = 4$.

$$P_{jk}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El cubo es un PBIB(3)-esquema con los parámetros $v = 8$, $b = 6$, $r = 3$, $k = 4$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$, $n_1 = 1$, $n_2 = 3$, $n_3 = 3$.

$$P_{jk}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_{jk}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

El icosaedro (véase el desarrollante en la fig. 4.4') es un PBIB(3)-esquema con los parámetros $v = 12$, $b = 20$, $r = 5$, $k = 3$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$, $n_1 = 1$, $n_2 = 5$, $n_3 = 5$.

$$P_{jk}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_{jk}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

El dodecaedro es un PBIB(5)-esquema con los parámetros $v = 20$, $b = 12$, $k = 5$, $r = 3$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$, $\lambda_5 = 0$, $n_1 = 3$, $n_2 = 6$, $n_3 = 6$, $n_4 = 3$, $n_5 = 1$,

$$\begin{aligned}
 p_{jh}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & p_{jh}^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 p_{jh}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & p_{jh}^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 p_{jh}^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

4.118. a) Las caras del cubo corresponden a los vértices del octaedro y viceversa. Para el octaedro la matriz de incidencia tiene la forma siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz de incidencia del cubo es la matriz transpuesta A^T .

b) Al dodecaedro corresponde el siguiente bloque-esquema: $v = 20$, $b = 12$, $k = 5$, $r = 3$:

$D: (1, 2, 3, 4, 5, 6), (5, 6, 11, 16, 17), (9, 10, 12, 13, 19), (1, 7, 8, 4, 3), (3, 7, 6, 16, 15), (20, 17, 19, 12, 11), (1, 2, 4, 9, 10), (7, 8, 14, 15, 18), (20, 18, 17, 16, 15), (2, 5, 11, 12, 10), (4, 8, 9, 13, 14), (20, 19, 18, 14, 13)$. Definamos D' , rigiéndonos por las reglas $b_j \in A_i \iff a_i \in B_j$ en D . Obtendremos un PBIB(2)-esquema que corresponde al icosaedro. Sus parámetros son: $v = 12$, $b = 20$, $r = 5$, $k = 3$. El esquema es de la forma: $(1, 2, 3), (1, 4, 5), (3, 8, 9), (8, 9, 12), (5, 10, 11), (1, 3, 4), (1, 5, 6), (2, 4, 9), (7, 8, 12), (7, 11, 12), (1, 2, 6), (2, 6, 7), (4, 5, 10), (6, 7, 11), (9, 10, 12), (2, 3, 8), (2, 7, 8), (4, 9, 10), (5, 6, 11), (10, 11, 12)$.

c) El tetraedro corresponde al siguiente BIB-esquema: $(1, 2, 3), (1, 2, 4), (2, 4, 3), (1, 4, 3)$. Los parámetros de este esquema, que llamaremos D , son: $v = b = 4$, $r = k = 3$, $\lambda = 2$. Construyamos D' según la regla $a_i \in A_i; B_j \ni b_j; b_j \in A_i \iff a_i \in B_j$ en D . Los bloques de D' tienen por expresión

$$A_1: (b_1, b_2, b_4) = (1, 2, 4); \quad A_2: (b_1, b_2, b_3) = (1, 2, 3);$$

$$A_3: (b_1, b_3, b_4) = (1, 3, 4); \quad A_4: (b_2, b_3, b_4) = (2, 3, 4).$$

Para D' : $v' = b' = 4$, $r' = k' = 3$, $\lambda' = 2$. El tetraedro es autodual.

4.119. De acuerdo con el teorema de Zinger sobre los bloque-esquemas que se obtienen de las geometrías $PG(n, p^2)$, llegamos a una conclusión de que el bloque-esquema buscado es cíclico y tiene los parámetros: $v = b = 7$, $k = r = 3$, $\lambda = 1$. Por cuanto $(0, 1, 3)$ es el $(7, 3, 1)$ -conjunto de diferencias, entonces el bloque-esquema tendrá por expresión: $(0, 1, 3), (2, 3, 5), (4, 5, 0), (1, 2, 4), (3, 4, 6), (5, 6, 1), (6, 0, 2)$.

4.120. La matriz de incidencia del bloque-esquema del problema 4.119 tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Construimos la matriz de Hadamard, partiendo de la matriz de incidencia citada. Denotemos la matriz de Hadamard buscada con $H = (b_{ij})$, $i, j = 0, 1, \dots, \dots, 4t - 1$. Suponemos $b_{0j} = b_{t0} = 1$; $b_{ij} = 1$, si $a_{ij} = 1$, $b_{ij} = -1$, si $a_{ij} = 0$, $i, j = 1, \dots, 4t - 1$. En definitiva tenemos

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.121. a) El bloque-esquema tiene la forma: $(1, 2, 3), (3, 4, 0), (0, 1, 2), (2, 3, 4), (4, 0, 1)$. Para definir la relación de conexión resulta cómodo construir el siguiente diagrama (fig. 4.5'): $i = 1$, el par se encuentra en dos bloques (línea ininterrumpida), $i = 2$, el par se encuentra en un bloque (línea ondeada).

Empleando el diagrama, es fácil hallar los parámetros del PBIB(2)-esquema: $v = b = 5$, $k = r = 3$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $p_{jh}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $p_{jh}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) El bloque-esquema tiene la forma: $(1, 3, 9), (5, 7, 0), (9, 11, 4), (2, 4, 10), (6, 8, 1), (10, 12, 5), (0, 2, 8), (3, 5, 11), (7, 9, 2), (11, 0, 6), (4, 6, 12), (8, 10, 3), (12, 1, 7)$.

Por analogía con a) puede construirse el diagrama: $i = 1$, el par se encuentra en un solo bloque; $i = 2$, el par está ausente, el PBIB(2)-esquema tiene los siguientes parámetros: $v = b = 13$, $k = r = 3$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $n_1 = 6$, $n_2 = 6$, $p_{jh}^1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $p_{jh}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

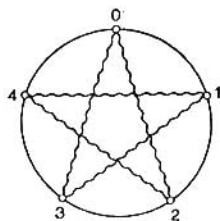


Fig. 4.5'.

4.124. El conjunto $\{1, 4, 5, 6, 7, 11, 16, 17\}$ es un $(19, 9, 4)$ -conjunto de diferencias. El bloque-esquema tiene la siguiente forma:

(1, 4, 5, 6, 7, 11, 16, 17),	(8, 11, 12, 13, 14, 18, 4, 5).
(15, 18, 0, 12, 6, 11, 12),	(2, 5, 6, 7, 8, 12, 17, 18),
(9, 12, 13, 14, 15, 0, 5, 6),	(16, 0, 1, 2, 3, 7, 12, 13),
(3, 6, 7, 8, 9, 13, 18, 0),	(10, 13, 14, 15, 16, 1, 6, 7),
(17, 1, 2, 3, 4, 8, 13, 14),	(4, 7, 8, 9, 10, 14, 0, 1),
(11, 14, 15, 16, 17, 2, 7, 8),	(18, 2, 3, 4, 5, 9, 14, 15),
(5, 8, 9, 10, 11, 15, 1, 2),	(12, 15, 16, 17, 18, 3, 8, 9),
(0, 3, 4, 5, 6, 10, 15, 16),	(6, 9, 10, 11, 12, 16, 2, 3),
(13, 16, 17, 18, 0, 4, 9, 10),	(1, 4, 5, 6, 7, 11, 16, 17),
(7, 10, 11, 12, 13, 17, 3, 4),	(14, 17, 18, 0, 1, 5, 10, 11).

4.125. En $PG(2, 3)$ se contienen 13 puntos y 13 rectas, y en $EG(2, 3)$, 9 puntos y 12 rectas. Por cada punto pasan cuatro rectas y cada recta contiene tres puntos. Por consiguiente, el BIB-esquema que se obtiene de $EG(2, 3)$ tiene por parámetros: $v = 9$, $b = 12$, $r = 4$, $\lambda = 1$. El campo $GF(3)$ contiene los elementos 0, 1 y -1 que se examinan según el módulo 3. Los puntos de $PG(2, 3)$ son:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= 1, 0, 0; & p_6 &= 0; & 1, & 1; & p_{10} &= -1, & 1, & 1; \\
 p_2 &= 0, 1, 0; & p_7 &= 1; & 1, & 1; & p_{11} &= 1, & -1, & 1; \\
 p_3 &= 0, 0, 1; & p_8 &= 1, & -1; & 0; & p_{12} &= 1, & 1, & -1; \\
 p_4 &= 1, 1, 0; & p_9 &= 1, & 0, & -1; & p_{13} &= 0, & -1, & 1. \\
 p_5 &= 1, 0, 1;
 \end{aligned}$$

Las rectas se obtendrán, si tomamos dos puntos, por ejemplo, p_1 y p_2 , y componemos $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$, donde $\lambda_i \in GF(3)$, con la particularidad de que por lo menos uno de λ_i es distinto de cero. La recta que pasa por p_1 y p_2 contiene los puntos p_1 y p_2 ; $(p_1 + p_2) = p_4$; $(p_1 - p_2) = p_8$. Al realizar este procedimiento con todos los puntos, obtendremos las rectas:

$$\begin{aligned}
 &p_1, p_2, p_4, p_8 & p_2, p_5, p_7, p_{11} & p_4, p_5, p_{10}, p_{13} \\
 &p_1, p_3, p_5, p_9 & p_2, p_9, p_{10}, p_{12} & p_4, p_6, p_9, p_{11} \\
 &p_1, p_6, p_7, p_{10} & p_3, p_4, p_7, p_{12} & p_5, p_6, p_8, p_{12} \\
 &p_1, p_{11}, p_{12}, p_{13} & p_3, p_8, p_{10}, p_{11} & p_7, p_8, p_9, p_{13} \\
 &p_2, p_3, p_6, p_{13}
 \end{aligned}$$

Si tachamos todos los puntos, cuya última coordenada es 0, obtendremos $EG(2, 3)$. Los puntos tachados son p_1, p_2, p_4, p_8 . Así pues, tenemos:

$$\begin{aligned}
 &p_3, p_5, p_9 & p_3, p_{10}, p_{11} & p_3, p_7, p_{12} & p_6, p_7, p_{10} \\
 &p_5, p_6, p_{12} & p_3, p_6, p_{13} & p_9, p_{10}, p_{12} & p_7, p_9, p_{13} \\
 &p_5, p_7, p_{11} & p_{11}, p_{12}, p_{13}
 \end{aligned}$$

Si tomamos estos puntos por elementos del bloque-esquema y las rectas de $EG(2, 3)$, por bloques, entonces, al redesignar los elementos

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

obtendremos un BIB-esquema con los parámetros $v = 9, b = 12, r = 4, k = 3, \lambda = 1$: (1, 2, 5), (1, 3, 9), (1, 4, 8), (1, 6, 7), (3, 4, 6), (2, 4, 7), (2, 6, 9), (2, 3, 8), (7, 8, 9), (5, 6, 8), (3, 5, 7), (4, 5, 9).

Es obvio que este esquema es resoluble.

4.126. a) Al plano parcial $r=3, k=4, t=2$ le corresponde el siguiente PBIB(2)-esquema con los parámetros $v=16, b=12, r=3, k=4, \lambda_1=1, \lambda_2=0,$

$$n_1=9, n_2=6, p_{jk}^1 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, p_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Este bloque-esquema tiene la forma: (1, 2, 3, 4), (11, 15, 2, 7), (2, 8, 7, 13), (1, 5, 6, 7); (11, 9, 5, 16), (13, 3, 9, 4), (1, 8, 9, 10), (12, 2, 16, 10), (13, 4, 6, 16), (11, 14, 4, 8), (12, 15, 3, 6), (14, 15, 5, 10).

b) Al plano parcial $r=4, k=5, t=3$ le corresponde el siguiente PBIB(2)-esquema con los parámetros $v=25, b=20, r=4, k=5, \lambda_1=1,$

$$\lambda_2=0, n_1=16, n_2=5, p_{jk}^1 = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, p_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Este bloque-esquema tiene la forma: (1, 2, 3, 4, 5), (1, 6, 7, 8, 9), (1, 10, 11, 12, 13), (1, 14, 15, 16, 17), (18, 2, 6, 9, 21), (18, 3, 7, 11, 22), (18, 4, 8, 12, 23), (18, 5, 9, 13, 24), (19, 2, 7, 14, 24), (19, 3, 8, 15, 21), (19, 4, 9, 16, 22), (19, 5, 6, 17, 23), (20, 2, 11, 16, 23), (20, 3, 12, 17, 24), (20, 4, 13, 14, 21), (20, 5, 10, 15, 22), (25, 6, 11, 15, 24), (25, 7, 12, 16, 21), (25, 8, 13, 17, 22), (25, 9, 10, 14, 23).

4.128. Construyamos el bloque-esquema D_3 : (1, 2), (1, 3), (2, 3). Su matriz de incidencia tiene por expresión

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El bloque-esquema D_2 tiene la forma: (1, 2, 3), (1, 4, 7), (1, 5, 9), (1, 6, 8), (4, 5, 6), (2, 5, 8), (2, 6, 7), (2, 4, 9), (7, 8, 9), (3, 6, 9), (3, 4, 8), (3, 5, 7). La matriz de incidencia del esquema que se busca tiene por expresión

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es evidente que este esquema es 2-resoluble con los parámetros $v^* = 9, b^* = 12, k^* = 6, r^* = 8, \lambda^* = 5, \alpha^* = 2, n^* = 3, v_1^* = 4, q_0^* = 3, q_1^* = 4,$

4.129. Construyamos el esquema D_1 ; sus parámetros son: $v_1 = b_1 = 4, r_1 = k_1 = 3, \lambda_1 = 2$. De manera análoga construimos el esquema D_2 . Las ma-

trices de incidencia de estos esquemas son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Los parámetros D_2 son: $v^* = 16$, $b^* = 12$, $r^* = 9$, $k^* = 12$, $\lambda_1^* = 7$, $\lambda_2^* = 6$, $n_1^* = 9$, $n_2^* = 6$, $\alpha = 3$, $n = 4$, $v = 3$, $p_{jh}^1 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $p_{jh}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Es fácil ver que el esquema obtenido es 3-resoluble: $q_0^* = 8$, $q_1^* = 9$.

4.130. (véase fig. 4.6'). Los parámetros del PBIB(3)-esquema que se obtiene son: $v = 18$, $b = 6$, $r = 2$, $k = 6$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$, $n_1 = 1$, $n_2 = 8$, $n_3 = 8$.

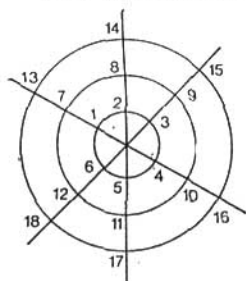


Fig. 4.6'.

$$p_{jh}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$p_{jh}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad p_{jh}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

La condición necesaria de resolubilidad del bloque-esquema ($b \geq r + v - 1$) no se cumple en el caso dado ($6 \not\geq 19$), por consiguiente, el bloque-esquema construido no es resoluble.

4.131. (véase fig. 4.7'). En este caso los parámetros del bloque-esquema, el cual construye un PBIB(3)-esquema son: $v = 32$, $b = 8$, $k = 8$, $r = 2$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$, $n_1 = 1$, $n_2 = 12$, $n_3 = 18$.

$$p_{jh}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}, \quad p_{jh}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}, \quad p_{jh}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \\ 1 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

La condición necesaria de resolubilidad del bloque-esquema no está cumplida ($8 \nmid 33$), quiere decir, el bloque-esquema dado no es resoluble.

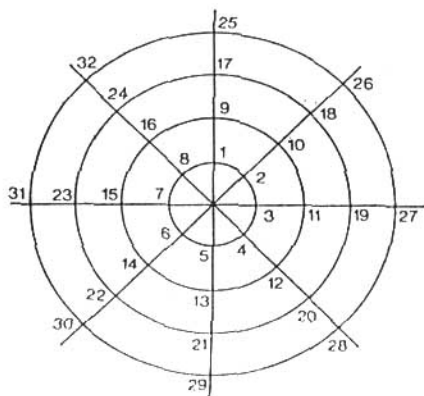


Fig. 4.7'.

4.132. a) Tenemos un PBIB-esquema

$$\left\{ \begin{matrix} (2, 1) \\ (3, 1) \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} (1, 2) \\ (3, 2) \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} (1, 3) \\ (2, 3) \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} (1, 2) \\ (1, 3) \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} (2, 1) \\ (2, 3) \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} (3, 1) \\ (3, 2) \end{matrix} \right\}.$$

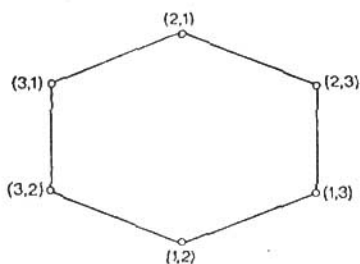


Fig. 4.8'.

Para hallar los parámetros construyamos el diagrama (véase fig. 4.8'):
 $v = 6$, $b = 6$, $r = k = 2$, $\lambda_1 = 1$, $n_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$, $n_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$, $n_3 = 1$.

$$p_{jk}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_{jk}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Tenemos un PBIB(4)-esquema

$$\begin{array}{cccc} \left\{ \begin{array}{l} (2, 1) \\ (3, 1) \\ (4, 1) \end{array} \right\}, & \left\{ \begin{array}{l} (1, 2) \\ (3, 2) \\ (4, 2) \end{array} \right\}, & \left\{ \begin{array}{l} (1, 3) \\ (2, 3) \\ (4, 3) \end{array} \right\}, & \left\{ \begin{array}{l} (1, 4) \\ (2, 4) \\ (9, 4) \end{array} \right\}, \\ \left\{ \begin{array}{l} (1, 2) \\ (1, 3) \\ (1, 4) \end{array} \right\}, & \left\{ \begin{array}{l} (2, 1) \\ (2, 3) \\ (12, 4) \end{array} \right\}, & \left\{ \begin{array}{l} (3, 1) \\ (3, 2) \\ (3, 4) \end{array} \right\}, & \left\{ \begin{array}{l} (4, 1) \\ (4, 2) \\ (4, 3) \end{array} \right\}. \end{array}$$

Los parámetros son: $v = 12, b = 8, k = 3, r = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0, n_1 = 4, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = 1,$

$$P_{jh}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{jh}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{jh}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{jh}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.133. Tenemos un PBIB(6)-esquema con los parámetros $v = 24, b = 12, r = 3, k = 6, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 0, \lambda_5 = 0, \lambda_6 = 8, n_1 = 3, n_2 = 6, n_3 = 3, n_4 = 6, n_5 = 3, n_6 = 2.$

§ 5. Problema de Van der Waerden

4.134. $M = \sum_{i=0}^k \lambda_i P_i, \sum_{j=0}^k \lambda_j = 1, \lambda_i \geq 0.$ Si $k > n,$ los puntos P_0, P_1, \dots, P_k son dependientes y existen tales números $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k,$ distintos de cero simultáneamente, que $\sum_{i=0}^k \mu_i = 0, \sum_{i=0}^k \mu_i P_i = 0.$ Sin restringir la generalidad de nuestros razonamientos convengamos en considerar que la magnitud $|\lambda_k/\mu_k|$ es mínima entre los números $|\lambda_i/\mu_i|$ con los denominadores $\mu_i \neq 0.$ Entonces

$$M = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\lambda_i - \lambda_k \frac{\mu_i}{\mu_k} \right) P_i, \quad \sum_{h=0}^{k-1} \left(\lambda_h - \lambda_k \frac{\mu_h}{\mu_k} \right) = 1,$$

$$\left(\lambda_i - \lambda_k \frac{\mu_i}{\mu_k} \right) \geq 0, \quad i = 0, \dots, k-1.$$

De este modo, existen $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_{k-1}^* \geq 0, \lambda_i^* = \lambda_i - \lambda_k \mu_i/\mu_k$ tales que $\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i^* = 1, M = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i^* P_i$ El procedimiento lo continuamos hasta que k se haga igual a $n.$

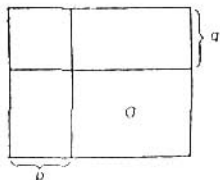
4.135. $C = \|c_{ij}\|_1^n, A = \|a_{ij}\|_1^n, B = \|b_{ij}\|_1^n, AB = C, c_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it} b_{tj} \geq 0,$

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} \sum_{j=1}^n b_{lj} = 1, \quad \sum_{i=1}^n c_{ij} = 1.$$

$$4.136. \text{ per } A = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in S_n} a_{1i_1} \dots a_{ni_n} \leq \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1.$$

$$4.137. \text{ per } (A + B) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in S_n} (a_{1i_1} + b_{1i_1}) \dots (a_{ni_n} + b_{ni_n}) \geq \\ \geq \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in S_n} a_{1i_1} \dots a_{ni_n} + \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in S_n} b_{1i_1} \dots b_{ni_n} = \text{per } A + \text{per } B.$$

4.138. Sea $A = \|a_{ij}\|_1^n$ una matriz dos veces estocástica. Está claro que $\text{per } A \geq 0$. Señalemos que $\text{per } A \neq 0$. Encerremos todos los elementos no nulos de la matriz A en p columnas y q filas de un modo tal que la suma $p + q$ adquiera el valor mínimo posible:



De acuerdo con el teorema de König ([1]), el número máximo de elementos no nulos de la matriz A , de los cuales cualesquiera dos no se encuentran en una fila o en una columna, es igual a $p + q$. Si demostráramos que $p + q = n$, entonces, por definición del permanente, $\text{per } A > 0$. Por cuanto todos los elementos no nulos de A pueden ser encerrados en n filas, entonces $p + q \leq n$. Y, ya que

$$n = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \geq p + q, \text{ tenemos } p + q = n. \text{ La afirmación está demostrada.}$$

4.139. Llamemos *transversal* un juego de n elementos de la matriz A de orden n , de los cuales cualesquiera dos no se disponen en una misma fila o en una misma columna.

Por cuanto $\text{per } A > 0$ (véase el problema 4.138), existe una transversal compuesta por elementos no nulos. Supongamos que el elemento mínimo de dichos elementos es $\lambda_1 > 0$, y sea P_1 una matriz conmutable que corresponde a la transversal. Ya que la matriz $(A - \lambda_1 P_1)/(1 - \lambda_1)$ es dos veces estocástica, entonces $\text{per } (A - \lambda_1 P_1) > 0$ y existe una transversal que se compone de los elementos no nulos. Denotemos con λ_2 el mínimo de estos elementos, etc. Por

cuanto la matriz $A - \sum_{i=1}^j \lambda_i P_i$ contiene no menos de j elementos nulos, el pro-

ceso que se aplica es finito y se dará por terminado no más tarde de que llegue el $(n^2 - n + 1)$ -ésimo paso (tras el $(n^2 - n + 1)$ -ésimo paso de la matriz

$A - \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$, que tiene sumas iguales de elementos en las filas y en las columnas, contendría no más de $n - 1$ elementos no nulos y, por consiguiente, todos los elementos de esta matriz son nulos).

4.140. Las operaciones de \oplus y \star por un número se introducen de conformidad con las siguientes reglas:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{para } i < n, j < n,$$

$$c_{in} = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} c_{ij} \quad \text{para } i < n,$$

$$A \oplus B = C \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} c_{nj} &= 1 - \sum_{i=1}^{n-1} c_{ij} \quad \text{para } j < n, \\ c_{nn} &= 1 - \sum_{i=1}^{n-1} c_{in} = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} c_{nj} = \sum_{i,j=1}^{n-1} c_{ij} - (n-2); \\ b_{ij} &= \lambda a_{ij} \quad \text{para } i < n, j < n, \\ b_{in} &= 1 - \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} \quad \text{para } i < n, \end{aligned}$$

$$B = \lambda * A \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} b_{nj} &= 1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_{ij} \quad \text{para } j < n, \\ b_{nn} &= 1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_{in} = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} b_{jn} = \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij} - (n-2). \end{aligned}$$

No es difícil ver que en una matriz de orden $n-1$, complementaria al elemento con índices n, n , estas operaciones coinciden con las operaciones ordinarias de adición y multiplicación. Por consiguiente, un conjunto de matrices cuadradas de orden n , en las cuales la suma de elementos en cualquier fila y en cualquier columna es igual a uno, es isomorfo al espacio de matrices cuadradas de orden $(n-1)^2$.

4.141. Sea A una matriz dos veces estocástica y supongamos que las operaciones $*$ y \oplus están introducidas en la solución del problema 4.140. Observemos que, hablando en general, $\lambda A \neq \lambda * A$, $A + B \neq A \oplus B$, sin embargo, para los números

$$\lambda_1, \dots, \lambda_h \geq 0, \quad \sum_{i=1}^h \lambda_i = 1, \quad \text{se cumple la igualdad } \sum_{i=1}^h \lambda_i P_i = \oplus_{i=1}^h \lambda_i * P_i,$$

donde P_i son matrices conmutables. Puesto que $A = \sum_{i=1}^h \lambda_i P_i$ (véase el problema 4.139), $\sum_{i=1}^h \lambda_i = 1$, $\lambda_i > 0$, entonces $A = \oplus_{i=1}^h \lambda_i * P_i$. Existen los números

enteros $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_{(n-1)^2}$, y los números no negativos μ_{ij} ($j=0, \dots, (n-1)^2$) tales que $\sum_{j=0}^{(n-1)^2} \mu_{ij} = 1$, $A = \oplus_{j=0}^{(n-1)^2} \mu_{ij} * P_{i_j}$. Por consiguiente,

$$A = \sum_{j=0}^{(n-1)^2} \mu_{i_j} P_{i_j}. \quad \text{La afirmación está demostrada.}$$

4.142. Debido a los resultados obtenidos en los problemas 4.141 y 4.137, tenemos

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^h \lambda_i P_i, \quad \sum_{i=1}^h \lambda_i = 1, \quad \lambda_i > 0, \\ k &\leq n^2 - 2n + 2, \end{aligned}$$

deben ser iguales (puesto que las funciones φ_j son simétricas). No obstante, esto no es así: per $A_1 \neq$ per A_2 . La contradicción obtenida muestra que el permanente de una matriz dos veces estocástica no puede ser representado en forma de una función simétrica con relación a los elementos de cualquier fila de la matriz.

4.147. a) Supongamos que la matriz $A = \| a_{ij} \|_{i,j=1}^n$, $a_{ij} > 0$, es de tal género que su permanente tiene el valor mínimo entre los permanentes de todas las matrices dos veces estocásticas de orden n . Si tal matriz no es única, elijamos A

de un modo tal que la suma $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2$ sea tan pequeña como se pueda. Puesto que

el conjunto de matrices dos veces estocásticas está acotado en R^{n^2} respecto de la mé-

trica $\alpha(A, A') = \left(\sum_{i,j=1}^n (a_{ij} - a'_{ij})^2 \right)^{1/2}$ y la función del permanente es continua en

esta métrica, entonces el conjunto de todas las matrices dos veces estocásticas de orden n , que tienen el valor mínimo del permanente, es compacto y la

suma $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2$ alcanza en éste su mínimo.

Pongamos $a_{ij}(t) = a_{ij}$ para $i \neq i_1, i_2$.

$$a_{i_1 j}(t) = (1-t)a_{i_1 j} + ta_{i_2 j},$$

$$a_{i_2 j}(t) = ta_{i_1 j} + (1-t)a_{i_2 j}.$$

Por cuanto la función per $A(t)$ alcanza su mínimo cuando $t = 0, 1$ sobre el intervalo $]-\epsilon, 1 + \epsilon[$ para cierto $\epsilon > 0$, y como per $A(t)$ es un polinomio de t cuyo grado no es superior a dos, entonces per $A(t) \equiv \text{const}$, per $A = \text{per } A(0) = \text{per } A(1)$.

Al hacer uso de la desigualdad $x^2 + y^2 \geq 2((x+y)/2)^2$, obtendremos

$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \geq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 (1/2)$, con la particularidad de que el signo de igualdad subsiste cuando y sólo cuando para cualesquiera i, j se cumple la igualdad

$a_{ij} = a_{ij}(1/2)$. Por cuanto $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 (1/2)$ en virtud de la elección

de la matriz A , el signo de igualdad realmente tiene lugar y $a_{i_1 j} = (a_{i_1 j} + a_{i_2 j})/2$. Por consiguiente, $a_{i_1 j} = a_{i_2 j}$. Dado que i_1 y i_2 se han elegido de una manera arbitraria, todos los a_{ij} son iguales entre sí y su valor vale $1/n$. Por consiguiente, per $A = n!/n^n$. La afirmación queda demostrada.

b) Véase el lema 6 del § 4, capítulo 4 [1].

4.148. Tenemos

$$\text{per}^2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \text{per} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{bmatrix} \text{per} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= (a_{11} \det A_{11} + a_{21} \det A_{21} - a_{31} \det A_{31})^2 + 4a_{21}a_{31} \det A_{21} \det A_{31} \geq 0,$$

donde $A_{i_1 j}$ es una matriz obtenida de la matriz A por supresión de la fila y la columna que contienen el elemento a_{ij} . Por conmutación de las filas de la matriz A logremos que se verifique la desigualdad $a_{12}/a_{13} \geq a_{22}/a_{23} \geq a_{32}/a_{33}$, donde se supone que el valor de la fracción es igual a $+\infty$, siempre que su denominador es igual a cero. Por cuanto los números a_{j3} son no negativos, de las citadas desigualdades se deducen las siguientes: $\det A_{a_{i1}} \geq 0$ ($i = 1, 2, 3$). Por consiguiente, el signo de igualdad es posible cuando y sólo cuando $\det A_{a_{i1}} = 0$, $a_{i(n-1)} = \lambda a_{in}$, lo que se trataba de demostrar.

MÉTODOS GEOMÉTRICOS

§ 1. Interpretaciones y problemas referentes a los grafos

5.1. Los grafos en las figuras 5.1 y 5.2 son isomorfos entre sí. En la fig. 5.5 son isomorfos solamente los grafos *a)* y *d)*, mientras que en la fig. 5.3, los grafos *a)* y *b)*. Todos los bosques en la fig. 5.6 son no isomorfos.

5.3. La afirmación inversa es errónea. Por ejemplo, los grafos en la fig. 5.1' tienen valores propios iguales $(\pm 2, 0, 0, 0)$ en la matriz de adyacencia, pero los propios grafos son no isomorfos entre sí.

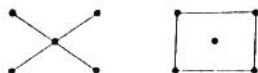


Fig. 5.1'.

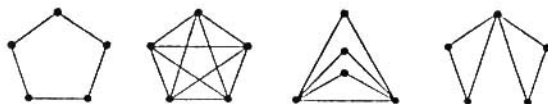


Fig. 5.2'.

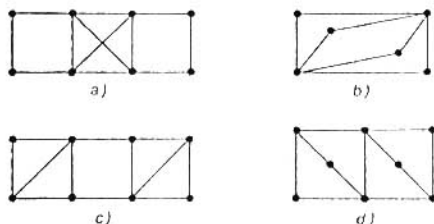


Fig. 5.3'.

5.8. En la fig. 5.2' están representados cuatro grafos eulerianos sobre 5 vértices.

5.11. Los grafos buscados para los puntos a), b), c) y d) del problema están representados en la fig. 5.3' a), b), c) y d), respectivamente.

5.12. Todos los $(n - 1)$ vértices se unirán dos a dos por medio de aristas. Obtendremos $(n - 1)(n - 2)/2$ aristas. La adición de una arista hace el grafo conexo.

5.13. Véase la fig. 5.4'.

5.14. Véase la fig. 5.5': $6t + 16 = 6t + 12 + 4 = 6(t + 2) + 4$.

5.15. Supongamos que tal grafo existe. Sean x_1, \dots, x_n sus vértices numerados según el crecimiento de los grados. Denotemos $k_i = \deg x_i$ ($i = 1, \dots, n$). Tenemos $k_1 + \dots + k_n \geq 0 + 1 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$

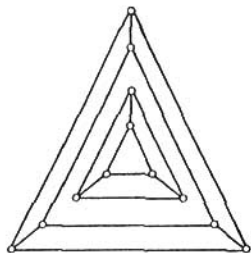


Fig. 5.4'.

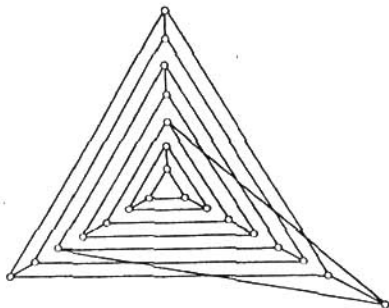


Fig. 5.5'.

En el complemento de este grafo los grados de todos los vértices son también diferentes, y $(n - 1 - k_1) + (n - 1 - k_2) + \dots + (n - 1 - k_n) = n(n - 1) - (k_1 + \dots + k_n) \leq n(n - 1)/2$, en tanto que, de conformidad con lo anterior, el mismo número debe ser no inferior a $n(n - 1)/2$. Por consiguiente, $k_1 + \dots + k_n = n(n - 1)/2$. De este modo, $k_1 = 0, k_2 = 1, \dots, k_n = n - 1$. Cuando $n > 1$, desechemos el vértice x_1 ; obtendremos un grafo con diferentes grados de los vértices iguales a $1, 2, \dots, n - 1$, lo que es imposible, de acuerdo con lo demostrado más arriba. Así pues, la suposición no es cierta. El caso de $n = 1$ es el único en que el grafo está privado de dos vértices de grados iguales.

5.16. a) existe; b) no existe.

5.17. $(3^2 4^4 6^2)$.

5.18. El grafo $G_1 \times G_2$ es regular, puesto que $\deg G_1 \times G_2(x, y) = \deg_{G_1} x + \deg_{G_2} y$. El grafo $G_1 + G_2$ es regular cuando y sólo cuando $k_1 + n_2 = k_2 + n_1$, donde n_1 y n_2 son órdenes de los grafos G_1 y G_2 , respectivamente.

5.22. $(3^{10} 4^4)$ (fig. 5.6').

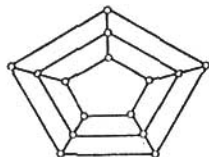


Fig. 5.6'.

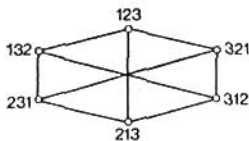


Fig. 5.7'.

5.24. Tales son, por ejemplo, $C_4 - e$ y C_5 .

5.25. Indicaciones. Un grafo homogéneo de grado impar contiene un número par de vértices.

5.26. El orden es $n!$; la dimensión es $\frac{n!}{2} \binom{n}{2}$; el grado de cada vértice es $\binom{n}{2}$. El grafo es regular. Véase la fig. 5.7'.

5.30. El orden del cliques para a) es igual a 5, para b), a 4. Ejemplos de particiones:

a)	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6		
	3	4	2	5	2	6	2	4	2	3		
	5	6	4	6	3	5	3	6	4	5		
b)	1	2	3	1	4	7	1	9	11	1	8	10
	4	5	6	2	5	10	2	6	8	2	4	12
	7	8	9	3	8	11	3	4	10	3	5	9
	10	11	12	6	9	12	5	7	12	6	7	11

5.34. El grafo de Ferrers establece una correspondencia biunívoca entre las particiones de este género.

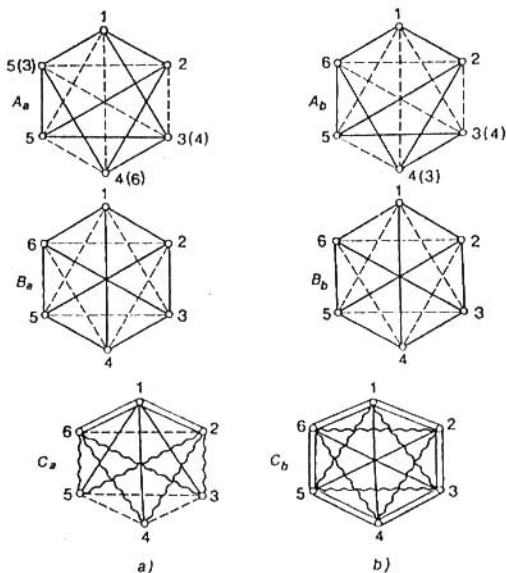


Fig. 5.8'.

5.35. Véase la figura 5.8'.

5.36. El grafo A_a se reduce al grafo B_a (véase fig. 5.8') por medio de la permutación $(3\ 6\ 4)$. En este caso el cuadrado A se transforma (efectuamos la

permutación de las filas (3 6 4) en cuadrado latino C :

	C						D						B							
	1	2	3	4	5	6		1	2	4	3	5	6		1	2	3	6	5	4
	2	1	4	3	6	5		2	1	3	4	6	5		2	1	6	3	4	5
filas	4	6	2	5	1	3	columnas	4	6	5	2	1	3	elemen.	3	4	5	2	1	6
$(3\ 6\ 4) \rightarrow$	6	4	5	2	3	1	$(3\ 4) \rightarrow$	6	4	2	5	3	1	$(3\ 6\ 4) \rightarrow$	4	3	2	5	6	1
	5	3	6	1	4	2		5	3	1	6	4	2		5	6	1	4	3	2
	3	5	1	6	2	4		3	5	6	1	2	4		6	5	4	1	2	3

El grafo A_b se reduce al grafo B_b con ayuda de la permutación (3 4). En este caso el cuadrado que acabamos de obtener se convierte en el siguiente cuadrado latino D (véase más arriba; efectuamos la permutación de las columnas (3 4)). Los cuadrados latinos D y C tienen grafos iguales tanto para las filas como para las columnas. En definitiva, el cuadrado D se reduce al cuadrado B por permutación de los elementos (3 6 4).

Así pues, las permutaciones que convierten el cuadrado latino A en el cuadrado latino B son las siguientes para las filas, las columnas y los elementos: (3 6 4); (3 4); (3 6 4).

5.38. a) S_n ; c) el grupo de automorfismos es de orden 12; se compone de $3! = 6$ permutaciones de los elementos 1 4 2 y de la multiplicación de éstos por la permutación (3 5);

d) Las permutaciones que conservan el grafo son:

- (2 4 6) (1 3 5); (2 4 6) (1 5 3); (1 4) (2 3) (5 6);
 (1 3) (4 6); (1 2 3 4 5 6); (1 6 5 4 3 2);
 (1 2) (3 6) (4 5); (1 6) (2 5) (3 4); (1 5) (2 4);
 (1 4) (2 5) (3 6); (1) (2) (3) (4) (5) (6); (2 6) (3 5).

El grupo de automorfismos es de orden 12.

5.39. Véase la fig. 5.9'.

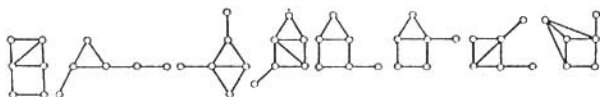


Fig. 5.9'.

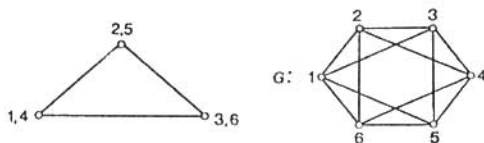


Fig. 5.10'.

5.40. a) $S_n \times S_m$; b) $(S_n \times S_n) \lambda S_2$; c) $(S_{n-1} \times S_{n-1}) \lambda S_2$; d) $S_n \times S_2$, donde x es el producto directo y λ , el producto semidirecto de los grupos.

5.41. Véase la fig. 5.10'.

5.42. El BIB-esquema da el recubrimiento del grafo con k -subgrafos completos de un modo tal que cada vértice pertenece a r subgrafos y cada arista, a λ subgrafos.

5.43. $v = 6, b = 8, r = 4, k = 3, \lambda = 2$. Sí.

5.44. Véase la fig. 5.11'.

5.45. Sea Γ un subgrafo de cierto grafo G . Sean $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_B$ una totalidad de subgrafos del grafo G , cada uno de los cuales es isomorfo a Γ . La totalidad de estos subgrafos forma en G un BIB-esquema generalizado, si

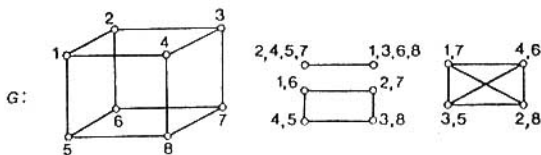


Fig. 5.11'.

a) cada vértice de G pertenece a un mismo número r de grafos del sistema

$\Gamma_i: i = i_1, i_2, \dots, i_r;$

b) cada arista de G pertenece a un mismo número r de grafos del sistema

$\Gamma_i: i = i_1, i_2, \dots, i_r.$

5.46. Sí.

5.47.

1	2	3	4	5		1	2	3	4	5		1	2	3
4	5	1	2	3		4	5	1	2	3		4	5	1
2	3	4	5	1		2	3	4	5	1		2	3	4
5	1	2	3	4		5	1	2	3	4		5	1	2
3	4	5	1	2		3	4	5	1	2		3	4	5

En la tabla están integrados dos cuadrados latinos de orden 5.

5.48. No es difícil poner parquet de placas hexagonales de tres colores (fig. 5.12'). Los colores se disponen de tal modo que en la célula de la n -ésima fila figure un color distinto de los colores de las células que están por encima de la misma en la $(n - 1)$ -ésima fila.

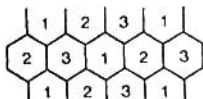


Fig. 5.12'.



Fig. 5.13'.

La coloración en dos colores no es posible, puesto que si de tres hexágonos (fig. 5.13') dos están pintados de un color, entonces todos los hexágonos del parquet han de ser pintados de este mismo color.

Las coloraciones de tres y cuatro colores se determinan con facilidad. Supongamos, por ejemplo, que el parquet está pintado de tres colores, uno de los cuales es blanco. Pintando las células blancas en tres colores de la misma manera que hemos pintado todo el parquet, se puede aumentar el número de colores en dos, a continuación, en dos más, etc.

5.49. El orden del grafo es igual a $\binom{n}{k}$. El grafo de cada vértice es $\binom{n-k}{k-l} \binom{k}{l}$; el grafo es regular, de dimensión $\frac{1}{2} \binom{n}{k} \binom{k}{l} \binom{n-k}{k-l}$.

$$5.50. \chi(K_n) = n; \chi(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{si } n \text{ es par} \\ 3, & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

el número cromático de todos los demás grafos es igual a 2.

5.51. a) $n-1$; b) $n-1$, si quedan eliminadas las aristas adyacentes, de lo contrario, $n-2$; c) $n-2$.

5.52. Si la distancia entre los extremos de la arista introducida en el grafo G_m era par, entonces el número cromático es igual a 2; si no, a 3.

5.54. $251 \cdot K_4$.

5.55. Véase la fig. 5.14'.

5.56. No, no se puede.

5.58. 11

5.61. La igualdad requerida se desprende directamente del hecho de que el conjunto de λ -coloraciones regulares del grafo $G - e$ puede ser dividido en dos subconjuntos: coloraciones, donde los vértices terminales de la arista e están pintados de colores diferentes, y coloraciones donde dichos vértices están pintados de un mismo color.

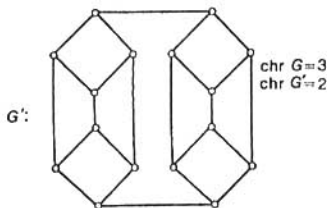


Fig. 5.14'.

La potencia del primer conjunto es igual, evidentemente, al número de λ -coloraciones del grafo G , es decir, a $P(G; \lambda)$, mientras que la potencia del segundo subconjunto, al número de λ -coloraciones del grafo G/e , es decir, a $P(G/e, \lambda)$, lo que se trataba de demostrar.

5.62. Hágase uso del problema 5.61

$$P(K_n; \lambda) = \prod_{k=1}^n (\lambda - k + 1).$$

Para calcular $P(G; \lambda)$ aprovechemos la fórmula. Entonces

$$P(G; \lambda) = \lambda^5 - 7\lambda^4 + 18\lambda^3 - 20\lambda^2 + 8\lambda.$$

Además, $P(G; 2) = 0$ y $P(G; 3) = 6 > 0$. Por consiguiente, los vértices del grafo G pueden pintarse correctamente en tres colores.

5.63. Hágase uso de la fórmula del problema 5.61. El polinomio $f(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3 + 3\lambda^2$ posee todas las propiedades de un polinomio cromático pero no es cromático. En efecto, si existiera un grafo G con tal polinomio cromático, debería tener 4 vértices, 3 aristas y 2 componentes conexos, es decir, un componente conexo sería K_3 y el otro, K_1 . Mas el polinomio cromático de tal grafo es igual, en virtud de la propiedad d), a

$$\lambda \cdot (\lambda - 1) (\lambda - 2) \cdot \lambda = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2 \neq f(\lambda).$$

5.64. Hágase uso del problema 7.222. Entonces, a) es un corolario inmediato del problema 7.212 c), mientras que b) y c) se deducen de la fórmula de Ph. Hall (problema 7.203) para las funciones de Moebius en el retículo geométrico $L(G)$ del grafo G y de las propiedades de este retículo (véase también capítulo VIII).

5.65. Mostremos por inducción según el número de vértices, que el polinomio cromático de cualquier árbol marcado con n vértices es igual a $\lambda(\lambda-1)^{n-1}$. Para $n=1$ y $n=2$ el resultado es evidente. Supongamos que el polinomio cromático de todos los árboles con $n-1$ vértices tiene la forma $\lambda(\lambda-1)^{n-2}$. Sea x un vértice pendiente del árbol T , y e , la arista de éste que es incidente con

relación al vértice x . Por suposición de inducción, el polinomio cromático del árbol $T - e$ es $\lambda(\lambda - 1)^{n-2}$. El vértice x puede ser pintado de cualquier color, distinto del color de otro vértice terminal de la arista e , de suerte que x puede pintarse empleando $\lambda - 1$ procedimientos. De este modo, $P(T, \lambda) = (\lambda - 1) \times P(T - e; \lambda) = \lambda \cdot (\lambda - 1)^{n-1}$.

Viceversa, sea G un grafo en el cual $P(G; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$. Por cuanto el coeficiente de λ en $P(G; \lambda)$ no es igual a 0, y para λ^{n-1} es igual a $(n - 1)$, entonces, en virtud del problema 5.63, el grafo G es conexo y tiene $(n - 1)$ aristas, es decir, es en una unidad inferior al número de vértices. Por consiguiente, G es un árbol.

§ 2. Problemas enumerativos en los grafos

5.66. Observemos que el número de $(\alpha, 0, \gamma)$ -grafos con n vértices y k aristas es igual al número de k -subconjuntos del conjunto correspondiente de todas las aristas posibles, de suerte que para poder escribir las fórmulas hace falta sólo conocer la potencia del conjunto de aristas. Si se trata de los grafos no orientados, dicha potencia es igual a $n(n - 1)/2$, siempre que los bucles se excluyan y es igual a $n(n + 1)/2$, si los bucles se admiten. En el caso de los grafos orientados, la potencia es igual a $n(n - 1)$ y $n(n + 1)$, respectivamente. Ilustremos el método de obtención de fórmulas para $g_{\alpha, \gamma}$ con un ejemplo del $(0, 1, 0)$ -grafo. Reenumeremos los pares posibles de vértices de tal grafo con n vértices. Sea $x_i \geq 0$ el número de aristas que unen el i -ésimo par de vértices en el $(0, 1, 0)$ -grafo con n vértices y k aristas. Tenemos una ecuación en números enteros no negativos:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n(n-1)/2} = k.$$

El número de diferentes soluciones de esta ecuación es igual, como se sabe, a

$$\binom{n(n-1)/2 + k - 1}{k} = g_{0, 1, 0}(n, k),$$

puesto que todo $(0, 1, 0)$ -grafo se define unívocamente por el juego de magnitudes $(x_1, x_2, \dots, x_{n(n-1)/2})$. La demostración de los demás casos es análoga. De lo obtenido se deduce que el número máximo posible de aristas en el $(\alpha, 0, \gamma)$ -grafo con n vértices es igual a

$$\begin{array}{ll} n(n-1)/2 & \text{para } \alpha = 0, \gamma = 0; \quad n(n+1)/2 & \text{para } \alpha = 1, \gamma = 0; \\ n(n-1) & \text{para } \alpha = 0, \gamma = 1; \quad n^2 & \text{para } \alpha = 1, \gamma = 1. \end{array}$$

El número máximo posible de aristas en el $(\alpha, 1, \gamma)$ -grafo es igual a ∞ .

5.67. En el caso de $\beta = 0$ se deben aprovechar las fórmulas correspondientes para los $(\alpha, 0, \gamma)$ -grafos del problema 5.66 y del teorema binomial. Demostremos ahora, por ejemplo, la representación para la función generatriz $G_{0, 1, 0}^{(n)}(y)$. De la definición de la función generatriz $G_{0, 1, 0}^{(n)}(y)$, con ayuda de la fórmula para $g_{0, 1, 0}(n, k)$ del problema antecedente obtenemos:

$$G_{0, 1, 0}^{(n)}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n(n-1)/2 + k - 1}{k} y^k.$$

De un modo análogo se demuestran las fórmulas restantes.

5.68. En el caso de $n = 0$ la correlación (5.1) se reduce, en virtud de las condiciones iniciales, a la igualdad $g(1, k) = c(1, k)$ ($k = 0, 1, \dots$), la cual se verifica con toda la evidencia, puesto que todos los (α, β, γ) -grafos con un vértice son conexos. Con el fin de obtener la relación recurrente (5.1) para $n \geq 1$, observemos que en el grafo H con $n + 1$ vértices P_1, \dots, P_{n+1} y k aristas el vértice P_{n+1} pertenece a cierto componente conexo K que tiene l

($l = 0, 1, \dots, n$) otros vértices y m ($0 \leq m \leq k$) aristas. Una parte J del grafo H que se obtiene por supresión del componente K tiene $n - l$ vértices y $k - m$ aristas. Existen $\binom{n}{l}$ métodos para elegir los vértices que integran, a la par con P_{n+1} , el componente K ; existen $c(l+1, m)$ procedimientos de elección de K para una composición fija de vértices, y hay $g(n-l, k-m)$ procedimientos de elección de J .

De los razonamientos aducidos se deduce precisamente la validez de la fórmula (5.1).

5.69. Multipliquemos ambos miembros de (5.1) por y^k y sumemos respecto de todos los valores posibles de k . Entonces para cualesquiera α, β y γ obtendremos en el primer miembro

$$\sum_{h \geq 0} g_{\alpha, \beta, \gamma}(n+1, k) y^k = G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n+1)}(y), \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

y en el segundo miembro

$$\sum_{h \geq 0} y^k \sum_{l=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{n}{l} c_{\alpha, \beta, \gamma}(l+1, m) g_{\alpha, \beta, \gamma}(n-l, k-m), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Alternando el orden de sumación, obtenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \sum_{m \geq 0} c_{\alpha, \beta, \gamma}(l+1, m) y^m \sum_{h \geq m} g_{\alpha, \beta, \gamma}(n-l, k-m) y^{h-m} = \\ & = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \sum_{m \geq 0} c_{\alpha, \beta, \gamma}(l+1, m) y^m \sum_{h \geq 0} g_{\alpha, \beta, \gamma}(n-l, h) y^h = \\ & = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n-l)}(y) \sum_{m \geq 0} c_{\alpha, \beta, \gamma}(l+1, m) y^m = \\ & = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} C_{\alpha, \beta, \gamma}^{(l+1)}(y) G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n-l)}(y), \quad n=0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

lo que, obviamente, conduce a la solución del problema.

5.70. Multipliquemos ambos miembros de (5.2) por $z^n/n!$ y sumemos respecto de n desde 0 hasta ∞ . Obtendremos en el primer miembro

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n+1)}(y) \frac{z^n}{n!} = \frac{d}{dz} G_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y),$$

y en el segundo

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{n!}{l!(n-l)!} G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(l+1)}(y) G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n-l)}(y) = \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} C_{\alpha, \beta, \gamma}^{(l+1)}(y) \frac{z^l}{l!} \sum_{n=l}^{\infty} G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n-l)}(y) \frac{z^{n-l}}{(n-l)!} = \\ & = G_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) \sum_{l=0}^{\infty} C_{\alpha, \beta, \gamma}^{(l+1)}(y) \frac{z^l}{l!} = G_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) \frac{d}{dz} C_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y). \end{aligned}$$

De este modo, $\frac{d}{dz} G_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) = G_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) \frac{d}{dz} C_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y)$. De aquí, $\ln G_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) = C_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) + K(y)$, donde $K(y)$ es una función arbitraria de y . A continuación obtenemos

$$G_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) = \exp \{C_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) + K(y)\}.$$

Suponiendo $z=0$ y teniendo presente que $G_{\alpha, \beta, \gamma}(0, y) = 1$ y $C_{\alpha, \beta, \gamma}(0, y) = 0$, obtenemos $K(y) = 0$. Esto demuestra el resultado requerido.

5.71. Para enumerar los grafos requeridos basta unir con una arista los vértices de cada parte de la partición del $2n$ -conjunto de vértices en n partes, cada una de las cuales contiene 2 elementos. Por consiguiente, el número buscado (designémoslo por μ_{2n}) es igual a $\mu_{2n} = B_{2n}(0, n, 0, \dots, 0)$ y la respuesta a la pregunta planteada será

$$\mu_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!} = \prod_{i=1}^n (2n - 2i + 1).$$

Indiquemos que la magnitud μ_{2n} coincide con el $(2n)$ -ésimo momento de una magnitud aleatoria normal cuyos parámetros son $(0, 1)$. [Véase Kendall M., Stuart D. *Distribution Theory* (2nd ed.), Charles Griggin and Company Limited, London, 1966.]

5.72. Tenemos $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$. Haciendo uso de la fórmula del problema antecedente, podemos escribir

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^n n!} = e^{z^2/2}.$$

Así pues, la función generatriz exponencial de los números μ_n es $e^{z^2/2}$.

5.73. Veamos un conjunto de todos los $(0, 0, 0)$ -grafos conexos con vértices marcados P_1, P_2, \dots, P_n . Sea $N(P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_i})$ ($i = 1, \dots, n$) el número de los grafos, en los cuales los vértices $P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_i}$ son terminales, mientras que los otros $n - i$ vértices pueden ser cualesquiera. De conformidad con el método de inclusión y exclusión tenemos

$$F(n, k) = G(n, k) - S_1 + S_2 - \dots + (-1)^j S_i \dots + (-1)^n S_n, \quad (5.1')$$

donde

$$S_i = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n} N(P_{j_1}, \dots, P_{j_i}). \quad (5.2')$$

Hallemos $N(P_{j_1}, \dots, P_{j_i})$ para $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Con este fin indiquemos que si un grafo es conexo y tiene más de dos vértices, cualquiera de sus vértices terminales es adyacente solamente a otro vértice, que no puede ser terminal. Por eso, la supresión de los vértices P_{j_1}, \dots, P_{j_i} del grafo conexo con n vértices y k aristas nos llevará a un grafo conexo con $n - i$ vértices y $k - i$ aristas. De aquí se desprende que para indicar los grafos cuyo número es igual a $N(P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_i})$ hace falta proceder del modo siguiente:

a) elegimos un grafo conexo Γ con $n - i$ vértices marcados y $k - i$ aristas (el conjunto de vértices de Γ lo obtenemos por supresión de los vértices P_{j_1}, \dots, P_{j_i} de P_1, P_2, \dots, P_n);

b) agregamos a Γ además los i vértices nuevos, a saber, P_{j_1}, \dots, P_{j_i} ;

c) unimos cada uno de estos últimos con uno de los vértices del grafo original Γ , lo que puede cumplirse empleando $(n-i)^i$ procedimientos.

Por cuanto en a) el grafo Γ puede elegirse mediante $c(n-i, k-i)$ procedimientos, de resultas obtenemos:

$$N(P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_i}) = c(n-i, k-i)(n-i)^i. \quad (5.3')$$

Esta fórmula se ha demostrado para $i = 1, \dots, n-1$. No obstante, queda válida también para $i = n$, puesto que $N(P_1, \dots, P_n)$ es igual, evidentemente, a cero. De (5.3') se ve que el número $N(P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_i})$ no depende de j_1, j_2, \dots, j_i . De (5.2') y (5.3') encontramos que $S_i = \binom{n}{i} c(n-i, k-i) \times (n-i)^i$, y la fórmula (5.1') se reduce a la forma

$$F(n, k) = c(n, k) - \binom{n}{1} c(n-1, k-1)(n-1) + \dots \\ \dots + (-1)^i \binom{n}{i} c(n-i, k-i)(n-i)^i \pm \dots, \quad n \geq 2,$$

y la fórmula que se requería por las condiciones del problema queda demostrada.

5.74. Para $n = 1$ la fórmula (5.4) se comprueba directamente. Supongamos ahora que la fórmula de Cayley es verdadera para $n = 1, 2, \dots, p, p \geq 2$, y demostremos que es también válida para $n = p+1$. Hagamos uso del problema 5.73 para $k = n+1$. Por cuanto el árbol con $n > 1$ vértices tiene siempre vértices terminales, entonces $F(n, n-1) = 0, n > 1$. Teniendo presente que $c(n, n-1) = T(n)$, del problema 5.73 obtenemos

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i T(n-i)(n-i)^i = 0, \quad n > 1. \quad (5.4')$$

Por hipótesis la fórmula (5.4) es válida para $n = 1, 2, \dots, p$; por eso, para $n = p+1$ tenemos de (5.4'):

$$T(p+1) + \sum_{i=1}^p (-1)^i \binom{p+1}{i} (p+1-i)^{p-i-1} (p+1-i)^i = 0.$$

De aquí

$$T(p+1) = - \sum_{i=1}^p (-1)^i \binom{p+1}{i} (p+1-i)^{p-1},$$

o bien

$$T(p+1) = (p+1)^{p-1} - \sum_{i=1}^p (-1)^i \binom{p+1}{i} (p+1-i)^{p-1}. \quad (5.5')$$

La suma en el segundo miembro de la relación (5.5') es igual a cero, por lo cual $T(p+1) = (p+1)^{p-1}$ y el paso de la inducción es cierto. El problema está resuelto.

5.75. La expresión explícita para los números $T_n(P_{j_1}, \dots, P_{j_r})$ se halla de un modo análogo al problema 5.73. En efecto, si los vértices P_{j_1}, \dots, P_{j_r} son terminales, ellos no son adyacentes entre sí y su supresión junto con las aristas conduce a un árbol con $n-r$ vértices. Por eso, para hallar los números $T_n(P_{j_1}, \dots, P_{j_r})$ procedemos del modo siguiente:

a) construimos en $n - r$ vértices del conjunto $M = \{P_1, \dots, P_n\} \setminus \{P_{j_1}, \dots, P_{j_r}\}$ un árbol que se denotará por Γ ; según el problema 5.74, sobre el conjunto Γ pueden construirse $T(n - r) = (n - r)^{n-r-2}$ árboles diferentes;

b) agregamos a M , r elementos más: P_{j_1}, \dots, P_{j_r} ;

c) unimos cada uno de los vértices P_{j_1}, \dots, P_{j_r} , mediante una arista, con uno de los vértices del árbol Γ , construido en a), lo que se realiza con ayuda de $(n - r)^r$ procedimientos.

Se obtiene de resultados un árbol con n vértices P_1, \dots, P_n , en el cual los vértices P_{j_1}, \dots, P_{j_r} son terminales. De este modo pueden obtenerse todos los árboles de tal género. Por consiguiente,

$$T_n(P_{j_1}, \dots, P_{j_r}) = (n - r)^{n-r-2} (n - r)^r = (n - r)^{n-2}.$$

5.76. Cuando $n = 1, 2$, la validez de la fórmula (5.5) se establece directamente. Sea, ahora, $n \geq 2$. Haciendo uso del método de inclusión y exclusión y suponiendo $T(0) = 1$, obtenemos, por analogía con la resolución del problema 5.73:

$$\begin{aligned} T(n, r) &= (-1)^r \sum_{i=r}^n (-1)^i \binom{i}{r} \binom{n}{i} T(n-i) (n-i)^i = \\ &= (-1)^r \frac{n!}{r!} \sum_{i=r}^n (-1)^i \binom{n-r}{n-i} T(n-i) (n-i)^i = \\ &= (-1)^{2r} \frac{n!}{r! (n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^j \binom{n-r}{j} T(n-j-r) (n-j-r)^{j+r}. \end{aligned}$$

Recurriendo a la primera fórmula de Cayley, de aquí encontramos

$$\begin{aligned} T(n, r) &= \frac{n!}{r! (n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^j \binom{n-r}{j} (n-r-j)^{n-r-j-2+j+r} = \\ &= \frac{n!}{r! (n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^j \binom{n-r}{j} (n-r-j)^{n-2}. \end{aligned}$$

Ahora aprovechamos la definición de los números de Stirling de 2º género y obtenemos el resultado requerido.

5.77. Por cuanto $T(n) = \sum_{r=0}^n T(n, r)$ y para $n \geq 2$ tenemos $T(n, 0) = T(n, 1) = 0$, entonces, de acuerdo con la fórmula (5.5),

$$T(n) = \sum_{r=2}^n \frac{n!}{r!} S(n-2, n-r) = \sum_{k=0}^{n-2} S(n-2, k) n(n-1) \dots (n-k+1),$$

y la última expresión es igual a n^{n-2} .

5.78. Hagamos uso de la relación recurrente para los números de Stirling de 2º género y escribamos $S(n-2, n-r) = (n-r)S(n-3, n-r) + S(n-3, n-r-1)$. Como resultado, de la segunda fórmula de Rényi obtendremos

$$T(n, r) = \frac{n!}{r!} \{ (n-r)S(n-3, r-2) + S(n-3, n-r-1) \} = \\ = \frac{n(n-r)}{r} T(n-1, r-1) + nT(n-1, r).$$

De aquí se deduce la relación recurrente declarada más arriba.

5.79. Para los números $T(n; P_{j_1}, \dots, P_{j_r})$ podemos escribir la relación

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n} T(n; P_{j_1}, \dots, P_{j_r}) = T(n, r), \\ r = 1, 2, \dots; \quad n = r, r+1, \dots,$$

donde la sumación se realiza respecto de todas las combinaciones de j_1, \dots, j_r tomadas de r a partir de n elementos $1, 2, \dots, n$. Está claro que los números $T(n; P_{j_1}, \dots, P_{j_r})$, al igual que los números $T(P_{j_1}, \dots, P_{j_r})$ examinados en el problema 5.75, no dependen de la elección concreta de los vértices P_{j_1}, \dots, P_{j_r} . Por eso, en el primer término de la relación escrita figura la suma de $\binom{n}{r}$ sumandos iguales. De aquí obtenemos

$$\binom{n}{r} T(n; P_{j_1}, \dots, P_{j_r}) = T(n, r), \quad r = 1, 2, \dots; \quad n = r, r+1, \dots$$

Valiéndonos de la fórmula (5.5), obtenemos en definitiva

$$T(n; P_{j_1}, \dots, P_{j_r}) = \frac{1}{\binom{n}{r}} \frac{n!}{r!} S(n-2, n-r) = (n-r)! S(n-2, n-r).$$

5.80. Los árboles con n vértices P_1, \dots, P_n , que tienen r vértices terminales P_{j_1}, \dots, P_{j_r} , se subdividen en dos clases disjuntas.

a) Existe en el grafo al menos un vértice terminal, digamos P_{j_r} , que está unido con un vértice de grado 2; llamemos este último vértice X . Existen $(n-r)T(n-1; P_{j_1}, \dots, P_{j_{r-1}}, X)$ tales árboles, puesto que el vértice X puede elegirse aplicando $n-r$ procedimientos (de los vértices no terminales), mientras que el grafo con $n-1$ vértices $P_1, \dots, P_{j_{r-1}}, P_{j_{r+1}}, \dots, P_n$ (de los cuales r son terminales: $P_{j_1}, \dots, P_{j_{r-1}}, X$) puede construirse aplicando $T(n-1; P_{j_1}, \dots, P_{j_{r-1}}, X)$ procedimientos.

b) No hay tales vértices. El número de grafos de este tipo es igual a $(n-r)T(n-1; P_{j_1}, \dots, P_{j_{r-1}})$, puesto que ellos pueden obtenerse de $T(n-1; P_{j_1}, \dots, P_{j_{r-1}})$ grafos con $n-1$ vértices $P_1, \dots, P_{j_{r-1}}, P_{j_{r+1}}, \dots, P_n$ (de los cuales $r-1$ vértices son terminales, a saber, $P_{j_1}, \dots, P_{j_{r-1}}$), y el vértice P_{j_r} puede ser unido a cualquiera de los $n-r$ vértices no terminales. Así pues,

$$T(n; P_{j_1}, \dots, P_{j_r}) = (n-r)T(n-1; P_{j_1}, \dots, P_{j_{r-1}}, X) + \\ + (n-r)T(n-1; P_{j_1}, \dots, P_{j_{r-1}}).$$

Haciendo uso del resultado del problema 5.79, encontramos de aquí

$$\begin{aligned}
 T(n, r) &= \binom{n}{r} T(n; P_{j_1}, \dots, P_{j_r}) = \\
 &= (n-r) \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n-1}{r}} \binom{n-1}{r} T(n-1; P_{j_1}, \dots, P_{j_{r-1}}, X) + \\
 &+ (n-r) \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n-1}{r-1}} \binom{n-1}{r-1} T(n-1; P_{j_1}, \dots, P_{j_{r-1}}) = \\
 &= (n-r) \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n-1}{r}} T(n-1, r) + (n-r) \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n-1}{r-1}} T(n-1, r-1) = \\
 &= nT(n-1, r) + \frac{n(n-r)}{r} T(n-1, r-1)
 \end{aligned}$$

y, de este modo, la fórmula recurrente del problema 5.79 está demostrada otra vez de un modo independiente.

5.81. La condición inicial $T(1) = 1$ está clara y no requiere explicaciones. Supongamos ahora que $n \geq 2$, y analicemos un árbol $H = (X; E_1, \dots, E_{n-1})$, $|X| = n$, donde X es el conjunto de vértices y E_1, \dots, E_{n-1} , el conjunto de aristas del árbol. Borremos en H una arista, por ejemplo, $E = \{P_1, P_2\}$, $P_1, P_2 \in X$. De resultas, H se descompone en dos componentes conexos H_1 y H_2 , cada uno de los cuales representa un árbol. Supongamos que el componente H_j tiene con E un vértice común P_j y contiene n_j aristas ($j = 1, 2$, $n_1 + n_2 = n - 2$). Además, uno de los componentes H_j puede estar compuesto por un único vértice aislado. De lo dicho más arriba se deduce que para obtener y calcular el número de árboles con n vértices podemos emplear el siguiente algoritmo:

a) elegimos de X arbitrariamente dos vértices $E_1 = \{P_1, P_2\}$ y los unimos mediante una arista; dicha elección puede ser realizada mediante $\binom{n}{2}$ procedimientos;

b) prefijamos un juego ordenado de números enteros n_1, n_2 tales que se verifique $n_1 + n_2 = n - 2$;

c) representamos el conjunto $X \setminus E_1$ ($|X \setminus E_1| = n - 2$) en forma de una unión de dos subconjuntos disjuntos X_1, X_2 tales que $|X_i| = n_i$, $i = 1, 2$; con este fin se pueden emplear $\frac{(n-2)!}{n_1!n_2!} = \binom{n-2}{n_1}$ procedimientos;

d) para cada $i = 1, 2$ elegimos uno de $T(n_i + 1)$ árboles H_i con el conjunto de vértices $X_i \cup \{P_i\}$; a partir de la arista y de los árboles H_1 y H_2 obtenemos un árbol con el conjunto de vértices X .

Como resultado, cada uno de los árboles que nos interesan se obtendrá exactamente $n - 1$ veces. En efecto, supongamos que, finalizado el trabajo del algoritmo descrito, se ha obtenido un árbol con aristas E_1, \dots, E_{n-1} , donde E_1 está elegido en a). El mismo árbol se obtendrá $n - 2$ veces más al prefijar en a) cada una de las aristas E_2, \dots, E_{n-1} . Del procedimiento descrito proviene una relación

$$(n-1) T(n) = \binom{n}{2} \sum_{n_1+n_2=n-2} \frac{(n-2)!}{n_1!n_2!} T(n_1+1) T(n_2+1)$$

la cual puede reescribirse en la forma requerida, si ponemos $n_1 + 1 = i$, $n_2 + 1 = n - i$.

5.82. Hagamos uso de la relación recurrente del problema 5.81, teniendo presente que de conformidad con el problema 5.74, $T(i) = i^{i-2}$ y $T(n-i) = (n-i)^{n-i-2}$.

Obtenemos, como resultado:

$$2(n-1)n^{n-2} = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} i(n-i)^{i-2} (n-i)^{n-i-2} = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} i^{i-1} (n-i)^{n-i-1},$$

lo que se trataba de demostrar.

5.83. La raíz P del árbol radical H puede pertenecer a d diferentes aristas E_1, E_2, \dots, E_d ($1 \leq d \leq n-1$). Si en H borramos estas aristas y la raíz, se obtendrá un bosque compuesto de d componentes. (Recordemos que el bosque es un $(0, 0, 0)$ -grafo (véase el problema 5.66), cuyos componentes conexos son todos los árboles.) En este caso pueden haber componentes que tienen un único vértice. El bosque obtenido tiene $n-1$ vértices y $n-1-d$ aristas.

De lo dicho se deduce el siguiente procedimiento para enumerar los diferentes árboles radicales con un mismo conjunto de vértices X , $|X| = n$:

a) Designemos en X un cierto vértice P a título de una raíz; esto puede hacerse empleando n métodos.

b) Prefijamos un número entero $d = 1, 2, \dots, n-1$.

c) Partimos el conjunto $X \setminus \{P\}$ en d subconjuntos no vacíos X_1, X_2, \dots, X_d y construimos los árboles radicales H_1, H_2, \dots, H_d , cada uno de los cuales tiene un conjunto correspondiente de vértices. El grafo resultante será un bosque radical (en un bosque radical cada componente es un árbol radical). Está claro que en este caso obtendremos

$$\frac{1}{d!} \sum_{\rho_1 + \dots + \rho_d = n-1} \frac{(n-1)!}{\rho_1! \dots \rho_d!} \tau(\rho_1) \dots \tau(\rho_d)$$

diferentes bosques, donde ρ_i es el número de elementos X_i ($i = 1, \dots, d$) y la sumación se realiza respecto de todas las soluciones enteras positivas ρ_1, \dots, ρ_d de la ecuación $\rho_1 + \dots + \rho_d = n-1$.

d) Unimos mediante aristas el vértice P fijo en a), con las raíces de los árboles H_1, \dots, H_d y obtenemos un árbol radical con el conjunto de vértices X , cuya raíz es de grado d .

Al revisar en cada paso de este algoritmo toda clase de variantes, obtendremos todo el conjunto de árboles radicales. De aquí se desprende, además, la siguiente relación recurrente

$$\tau(n) = n \sum_{d=1}^{n-1} \frac{1}{d!} \sum_{\substack{\rho_1 + \dots + \rho_d = n-1 \\ \rho_i > 0}} \frac{(n-1)!}{\rho_1! \dots \rho_d!} \tau(\rho_1) \dots \tau(\rho_d),$$

la cual puede reescribirse en la forma

$$\frac{\tau(n)}{n!} = \sum_{d=1}^{n-1} \frac{1}{d!} \sum_{\substack{\rho_1 + \dots + \rho_d = n-1 \\ \rho_i > 0}} \prod_{i=1}^d \frac{\tau(\rho_i)}{\rho_i!}, \quad n = 2, 3, \dots$$

De aquí obtenemos

$$\begin{aligned}
 \theta(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n!} z^n = z + \sum_{n=2}^{\infty} z^n \sum_{d=1}^{n-1} \frac{1}{d!} \sum_{\substack{\rho_1 + \dots + \rho_d = n-1 \\ \rho_i > 0}} \prod_{i=1}^d \frac{\tau(\rho_i)}{\rho_i!} = \\
 &= z \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{d=1}^{n-1} \frac{1}{d!} \sum_{\substack{\rho_1 + \dots + \rho_d = n-1 \\ \rho_i > 0}} \prod_{i=1}^d \frac{\tau(\rho_i) z^{\rho_i}}{\rho_i!} \right) = \\
 &= z \left(1 + \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d!} \sum_{\substack{n-1-d \\ \rho_1 + \dots + \rho_d = n-1 \\ \rho_i > 0}} \prod_{i=1}^d \frac{\tau(\rho_i) z^{\rho_i}}{\rho_i!} \right) = \\
 &= z \left(1 + \sum_{d=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tau(i)}{i!} z^i \right)^d \right) = z \exp\{\theta(z)\},
 \end{aligned}$$

de donde se desprende la ecuación de Polya.

La forma explícita para la función generatriz $\theta(z)$ se deduce del hecho de que, debido a la 1ª fórmula de Cayley y a la relación $\tau(n) = nT(n)$, tiene lugar $\tau(n) = n^{n-1}$.

5.84. Reescribamos la relación recurrente del problema 5.82 en la forma

$$\frac{1}{n!} (\tau(n) - T(n)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\tau(i)}{i!} \frac{\tau(n-i)}{(n-i)!},$$

o bien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n!} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} T(n) \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\tau(i)}{i!} z^i \frac{\tau(n-i)}{(n-i)!} z^{n-i}.$$

De acuerdo con la definición de $\theta(z)$ y $T(z)$, de aquí tenemos

$$\theta(z) - T(z) = \theta^2(z)/2,$$

lo que demuestra el resultado requerido.

5.85. Por cuanto $\theta(z)$ es una función inversa a $z = \theta^*(w) = we^{-w}$, será regular en el entorno del punto $z = 0$. Por eso, valiéndonos de la fórmula de Cauchy para los coeficientes de una serie de potencias, de la definición de $\theta(z)$ encontramos

$$\tau(n) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{\theta(z)}{z^{n+1}} dz, \quad n = 1, 2, \dots,$$

donde la integración se realiza respecto de un contorno cerrado dispuesto en el círculo de convergencia de $\theta(z)$. Realicemos en la integral la sustitución $z = \theta^*(w)$. Por cuanto $dz = (1-w)e^{-w}dw$ y para w suficientemente pequeños tiene lugar la identidad $\theta(\theta^*(w)) = w$, obtendremos

$$\tau(n) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{w(1-w)e^{-w}dw}{w^{n+1}e^{-(n+1)w}} = \frac{n!}{2\pi i} \oint (1-w)e^{nw} \frac{dw}{w^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Conforme al teorema de residuos, de aquí se deduce

$$\begin{aligned} \tau(n) &= n! \operatorname{Coef}_w w^{n-1} [(1-w) e^{nw}] = n! \operatorname{Coef}_w w^{n-1} \left[(1-w) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k w^k}{k!} \right] = \\ &= n! \left[\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{n^{n-2}}{(n-2)!} \right] = n^n - (n-1) n^{n-1} = n^{n-1}. \end{aligned}$$

De este modo, $\tau(n) = n^{n-1}$. Por cuanto $\tau(n) = nT(n)$, entonces $T(n) = n^{n-2}$, lo que se trataba de demostrar.

5.86. Está claro que

$$A_k(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{A_{nk} z^k}{k!} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{j-1}}{j!} z^j \right)^k, \quad k=1, 2, \dots$$

De acuerdo con el problema 5.80 hallamos de aquí $A_k(z) = [0(z)]^k$. Con ayuda de la fórmula integral de Cauchy obtenemos

$$A_{nk} = \frac{n!}{2\pi i} \oint [0(z)]^k \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Al realizar el cambio de la variable (véase problema 5.85), tendremos

$$\begin{aligned} A_{nk} &= \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{w^k (1-w) e^{nw}}{w^{n+1}} dw = n! \operatorname{Coef}_w w^n [w^k (1-w) e^{nw}] = \\ &= n! \left[\frac{n^{n-k}}{(n-k)!} - \frac{n^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \right] = \frac{n^{n-k-1}}{(n-k-1)!} n! \left[\frac{n}{n-k} - 1 \right], \end{aligned}$$

de donde se deduce la identidad que se demuestra.

5.87. Si $n=1, k=1$, entonces, según el sentido de este número, $L_1(1) = 1$, lo que concuerda con la 2ª fórmula de Cayley. Supongamos ahora que $n \geq 2$ y $1 \leq k \leq n$. Mostremos ante todo que

$$l_k(n) = \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_k = n-1 \\ j_i > 0}} \frac{(n-1)!}{j_1! \dots j_k!} T(j_1+1) T(j_2+1) \dots T(j_k+1). \quad (5.6')$$

En efecto, para obtener los bosques que se requieren en las condiciones del problema, hace falta:

a) prefijar un juego ordenado de números enteros no negativos j_1, \dots, j_k que dan en suma $n-1$;

b) representar para cada juego de este género el conjunto de $n-1$ vértices $P_{k+1}, P_{k+2}, \dots, P_{n+k-1}$ en forma de una unión de k subconjuntos disjuntos X_1, \dots, X_k tales que $|X_1| = j_1, \dots, |X_k| = j_k$;

c) construir para $j=1, \dots, k$ un bosque con el conjunto de vértices $\{P_j\} \cup X_j$.

De aquí precisamente se desprende (5.6'), puesto que en b) resultan posibles $(n-1)!/(j_1! \dots j_k!)$ métodos de representación.

Al demostrar (5.6'), hagamos uso de la 1ª fórmula de Cayley (5.4) y escribamos la igualdad (5.6') en la forma

$$\begin{aligned}
 l_h(n) &= \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_h = n-1 \\ j_i \geq 0}} \frac{(n-1)!}{j_1! \dots j_h!} (j_1+1)^{j_1-1} \dots (j_h+1)^{j_h-1} = \\
 &= \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_h = n-1 \\ j_i \geq 0}} \frac{(n-1)!}{(j_1+1)! \dots (j_h+1)!} (j_1+1)^{j_1} \dots (j_h+1)^{j_h} = \\
 &= \sum_{\substack{h_1 + \dots + h_h = n+h-1 \\ h_i > 0}} \frac{(n-1)!}{h_1! \dots h_h!} h_1^{h_1-1} \dots h_h^{h_h-1} = \\
 &= \frac{1}{n(n+1) \dots (n+k-1)} \sum_{\substack{h_1 + \dots + h_h = n+h-1 \\ h_i > 0}} \frac{(n+k-1)!}{h_1! \dots h_h!} h_1^{h_1-1} \dots h_h^{h_h-1} = \\
 &= \frac{A_{n, h-1, h}}{n(n+1) \dots (n+k-1)}, \tag{5.7'}
 \end{aligned}$$

donde, de acuerdo con el problema 5.86,

$$\begin{aligned}
 A_{n, h-1, h} &= k(n+k-1)^{n-1} \prod_{h=1}^{h-1} (n+k-1-h) = \\
 &= k(n+k-1)^{n-1} n(n+1) \dots (n+k-2). \tag{5.8'}
 \end{aligned}$$

De (5.7') y (5.8') se deduce el resultado requerido.

5.88. Sea $\{P_1, \dots, P_n\}$ un conjunto de vértices y $1 \leq k \leq n$. Elegimos del conjunto de vértices k diferentes raíces P_{i_1}, \dots, P_{i_k} , lo que puede hacerse empleando $\binom{n}{k}$ procedimientos. A continuación construimos tal bosque con n vértices que las raíces P_{i_1}, \dots, P_{i_k} pertenezcan a los diferentes componentes. Acorde al problema 5.87, esto puede realizarse empleando $l_h(n-k+1) = kn^{n-k-1}$ procedimientos. De este modo

$$l_h(n) = \binom{n}{k} l_h(n-k+1) = \binom{n}{k} kn^{n-k-1} = \binom{n-1}{k-1} n^{n-h}$$

y el problema queda resuelto.

5.89. Elijamos un bosque radical con $n-1$ vértices P_2, \dots, P_n y k componentes conexos. De acuerdo con el problema 5.88, dicha elección puede ser efectuada empleando $l_h(n-1)$ métodos. A continuación unamos el vértice P_1 mediante aristas con todas las raíces del bosque elegido y obtendremos un árbol con n vértices, en el cual el vértice P_1 es de grado k . De este modo, $T_h(n) = l_h(n-1)$ y, haciendo uso del resultado del problema 5.88, obtendremos la fórmula de Clark.

5.90. En cada árbol con $n \geq 2$ vértices P_1, \dots, P_n , el vértice P_1 tiene un y sólo un grado $k = 1, 2, \dots, n-1$. Por consiguiente, el número total de árboles con n vértices será

$$T(n) = \sum_{h=1}^{n-1} T_h(n).$$

De aquí, aprovechando la fórmula de Clark del problema 5.89, obtenemos

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1} = \\ = \sum_{l=0}^{n-2} \binom{n-2}{l} (n-1)^{n-l-2} = [1 + (n-1)]^{n-2} = n^{n-2},$$

lo que se trataba de demostrar.

5.91. Todos los árboles con $n+1$ vértices P_1, \dots, P_{n+1} , donde el vértice P_1 es de grado $k+1$, pueden obtenerse y, además, cada uno de ellos, $k+1$ veces, valiéndose del modo siguiente:

- prefijamos $p = k, k+1, \dots, n-1$;
- elegimos en el conjunto $\{P_2, \dots, P_{n+1}\}$ p vértices P_{i_1}, \dots, P_{i_p} ;
- construimos un árbol con los vértices $P_1, P_{i_1}, \dots, P_{i_p}$ de tal índole que el vértice P_1 sea de grado k ;
- construimos el árbol con $n-p$ vértices restantes $\{P_1, \dots, P_{n+1}\} \setminus \{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_p}\}$. Elegimos en éste un vértice arbitrario y lo unimos mediante una arista con P_1 .

En b) la elección se realiza empleando $\binom{n}{p}$ procedimientos y, en virtud de la fórmula de Clark (problema 5.89), la construcción se realiza aplicando $\binom{p-1}{k-1} p^{p-k}$ procedimientos; en d) la construcción se realiza por $(n-p)^{n-p-1}$ procedimientos. En total esto nos da el primer miembro de la identidad que se demuestra. El segundo miembro se encuentra con ayuda de la fórmula de Clark (problema (5.89)), si la multiplicamos por $k+1$.

5.92. Mostremos al principio que

$$G_h(n) = \frac{1}{kl} \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_k = n \\ j_i > 0}} \frac{n!}{j_1! \dots j_k!} j_1^{j_1-2} \dots j_k^{j_k-2}. \quad (5.9')$$

Con este fin aprovechemos el siguiente método de enumerar los bosques:

- prefijamos un juego ordenado de k números positivos j_1, \dots, j_k tales que se verifique $j_1 + \dots + j_k = n$;
- representamos el conjunto de vértices del bosque en forma de una unión de k subconjuntos disjuntos X_1, \dots, X_k tales que $|X_i| = j_i$ ($i = 1, \dots, k$);
- construimos k árboles con los conjuntos de vértices X_1, \dots, X_k , respectivamente;
- notamos que como resultado de la enumeración cada bosque se obtendrá kl veces.

De estos razonamientos proviene precisamente la fórmula (5.9').

Hagamos uso ahora de $T(z)$ obtenido en el problema 5.84. De (5.9') se deduce

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_h(n) \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{kl} [T(z)]^k. \quad (5.10')$$

Según la fórmula integral de Cauchy, de aquí obtenemos

$$L_h(n) = \frac{n!}{kl 2\pi i} \oint \frac{T^k(z) dz}{z^{n+1}}.$$

Haciendo uso de la relación para $T(z)$, obtenida en el problema 5.84, escribamos la última expresión en la forma

$$L_h(n) = \frac{n!}{k! 2\pi i} \oint \left[\theta(z) - \frac{1}{2} \theta^2(z) \right]^h \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Con ayuda del cambio de la variable (véase el problema 5.85), hallamos

$$\begin{aligned} L_h(n) &= \frac{n!}{2\pi i k!} \oint \left[w - \frac{1}{2} w^2 \right]^h \frac{(1-w) e^{nw} dw}{w^{n+1}} = \\ &= \frac{n!}{k!} \text{Coef}_{w^n} \left[(w^h - w^{h+1}) \left(1 - \frac{1}{2} w \right)^h e^{nw} \right] = \\ &= \frac{n!}{k!} \left[\sum_{j=0}^{\min(n-h, h)} \left(-\frac{1}{2} \right)^j \binom{k}{j} \frac{n^{n-h-j}}{(n-k-j)!} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=0}^{\min(n-h-1, h)} \left(-\frac{1}{2} \right)^j \binom{k}{j} \frac{n^{n-h-j-1}}{(n-k-j-1)!} \right] = \\ &= \frac{n!}{k!} \sum_{j=0}^{\min(n-h, h)} \left(-\frac{1}{2} \right)^j \binom{k}{j} (k+j) \frac{n^{n-h-j-1}}{(n-k-j)!}, \end{aligned}$$

de donde se deduce la 3ª fórmula de Rényi.

5.93. Existen $(n-2)(n-3)\dots(n-k)$ métodos para construir un camino de P_1 a P_2 que pase por $k-2$ de los $n-2$ vértices restantes (digamos, por P_3, \dots, P_k). Al suprimir en el árbol el camino de P_1 a P_2 de longitud k , obtendremos un bosque con n vértices marcados y k componentes, en el cual los vértices P_1, \dots, P_k pertenecen a distintos componentes. En las designaciones del problema 5.87 el número de tales bosques es igual a $\bar{l}_h(n-k+1)$. Así pues, $\gamma_h(n) = (n-2)(n-3)\dots(n-k)\bar{l}_h(n)$. De aquí hallamos, de acuerdo con la 2ª fórmula de Cayley, $\gamma_h(n) = (n-2)(n-3)\dots(n-k) \times kn^{n-k-1}$.

5.94. Para $n=2$ se tiene un único árbol con los vértices P_1, P_2 unidos mediante una arista. Por eso, $v_1 = v_2 = 1$, y la fórmula de Moon es cierta.

Supongamos que la fórmula de Moon es cierta para todos los árboles que tienen $k=2, \dots, n-1$ vértices y demostrémosla para todos los árboles con $k=n$ vértices. Examinemos toda clase de árboles, en los cuales los vértices P_n son de grado $v_n = 1$ (vértice terminal), y para $i=1, \dots, n-1$ el vértice P_i es de grado v_i . El número de tales árboles es igual a $t(n; v_1, \dots, v_{n-1}, 1)$. Por cuanto el vértice P_n puede ser unido por una arista con cualquiera de los vértices P_1, \dots, P_{n-1} , entonces

$$t(n; v_1, \dots, v_{n-1}, 1) = \sum_{i=1}^{n-1} t(n-1; v_1, \dots, v_{i-1}, v_i-1, v_{i+1}, \dots, v_{n-1}).$$

Supuesta la inducción, tenemos

$$\begin{aligned} &t(n-1; v_1, \dots, v_{i-1}, v_i-1, v_{i+1}, \dots, v_{n-1}) = \\ &= \frac{(n-3)!}{(v_1-1)! \dots (v_{i-1}-1)! (v_i-2)! (v_{i+1}-1)! \dots (v_{n-1}-1)!}, \end{aligned}$$

por eso

$$\begin{aligned}
 & t(n; v_1, \dots, v_{n-1}, 1) = \\
 & = (n-3)! \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(v_1-1)! \dots (v_{i-1}-1)! (v_i-2)! (v_{i+1}-1)! \dots (v_{n-1}-1)!} = \\
 & = (n-3)! \sum_{i=1}^{n-1} \frac{v_i-1}{(v_1-1)! \dots (v_i-1)! \dots (v_{n-1}-1)!} = \\
 & = \frac{(n-3)!}{\prod_{i=1}^{n-1} (v_i-1)!} \sum_{i=1}^{n-1} (v_i-1) = \frac{(n-3)!}{\prod_{i=1}^n (v_i-1)!} \sum_{i=1}^n (v_i-1),
 \end{aligned}$$

puesto que $v_n = 1$. Teniendo presente la condición impuesta en la suma de grados de los vértices, de aquí obtenemos

$$t_n(v_1, \dots, v_{n-1}, 1) = \frac{(n-3)!}{\prod_{i=1}^n (v_i-1)!} [2(n-1) - n] = \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^n (v_i-1)!}.$$

Así pues, para el caso particular en consideración, cuando $v_n = 1$, la fórmula de Moon queda demostrada. Indiquemos ahora que cualquier árbol con $n \geq 2$ vértices tiene al menos un vértice terminal (no obligatoriamente P_n , como se examinaba más arriba). Por eso la fórmula de Moon es válida también en el caso general.

5.95. a) En virtud de la fórmula de Moon del problema 5.94, tenemos

$$\begin{aligned}
 t(n) &= \sum_{r_1 + \dots + r_n = 2(n-1)} \frac{(n-2)!}{(v_1-1)! \dots (v_n-1)!} = \\
 &= \sum_{\substack{(v_1-1) + \dots + (v_n-1) = n-2 \\ v_i \geq 1}} \frac{(n-2)!}{(v_1-1)! \dots (v_n-1)!}.
 \end{aligned}$$

Haciendo uso ahora del teorema polinomial, obtenemos de aquí el resultado que se quería.

b) Se debe demostrar la fórmula para el número $T(n, r)$ de árboles con n vértices marcados P_1, \dots, P_n , de los cuales r vértices son terminales. Supongamos al principio, que son terminales los vértices P_{n-r+1}, \dots, P_n , y sólo ellos. Por consiguiente, $v_i \geq 2$, si $1 \leq i \leq n-r$, y $v_i = 1$, si $i \geq n-r+1$, donde v_i es el grado del vértice P_i . El número de árboles de este tipo (véase el problema 5.94) es igual a

$$\sum_{\substack{(v_1-1) + \dots + (v_{n-r}-1) = n-2 \\ v_i > 1}} \frac{(n-2)!}{(v_1-1)! \dots (v_{n-r}-1)!}. \quad (5.11')$$

Observemos que la suma (5.11') es igual a $(n-r)! S(n-2, n-r)$ (véase el problema 5.79). Por cuanto de vértices terminales pueden servir los vértices de cualquier r -subconjunto del conjunto P_1, \dots, P_n , obtenemos

$$T(n, r) = \binom{n}{r} (n-r)! S(n-2, n-r) = \frac{n!}{r!} S(n-2, n-r),$$

lo que se trataba de demostrar.

c) Teniendo presente la fórmula de Moon y suponiendo que el grado del vértice P_1 es igual a $v_1 = k$, mientras que los grados v_i ($i \neq 1$) de otros vértices son arbitrarios, llegamos a que

$$T_h(n) = \sum_{\substack{k-1+(v_2-1)+\dots+(v_n-1)=n-2 \\ v_i \geq 1}} \frac{(n-2)!}{(k-1)!(v_2-1)! \dots (v_n-1)!} = \\ = \frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \sum_{\substack{(v_2-1)+\dots+(v_n-1)=n-k-1 \\ v_i \geq 1}} \frac{(n-k-1)!}{(v_2-1)! \dots (v_n-1)!}.$$

De acuerdo con el teorema polinomial, la suma en la última expresión es igual a $(n-1)^{n-k-1}$. Por eso

$$T_h(n) = \frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!} (n-1)^{n-k-1} = \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1}$$

lo que se trataba de demostrar.

5.96. Sea p el grado del vértice P_1 ($1 \leq p \leq n-1$) y sean P_{i_1}, \dots, P_{i_p} los vértices adyacentes a P_1 . Los vértices P_{i_1}, \dots, P_{i_p} pueden elegirse empleando $\binom{n-1}{p}$ procedimientos. Los $n-1-p$ vértices restantes P_m ($m \neq 1, i_1, \dots, i_p$) pueden ser divididos en p clases definidas del modo siguiente: P_m pertenece a la j -ésima clase ($j = 1, \dots, p$), si el único camino de P_1 a P_m pasa por P_{i_j} . Supongamos que la j -ésima clase contiene m_j vértices ($m_j \geq 0$), $m_1 + \dots + m_p = n-1$. Los vértices de la j -ésima clase forman junto con P_{i_j} un árbol con $m_j \geq 1$ vértices de altura $k-1$ sobre el vértice P_{i_j} .

Por cuanto el número de particiones en clases es igual al número $(m_1 - 1, \dots, m_p - 1)$ -muestras y el número de árboles con vértices de la j -ésima clase es igual a $d_{k-1}(m_j - 1)$, el problema queda resuelto.

5.97. La solución se obtiene directamente de la fórmula recurrente del problema 5.87. Teniendo en cuenta la definición de la función generatriz $D_h(z)$ y empleando dicha fórmula, al igual que el hecho de que $d_h(1) = 1$ para $k \geq 1$, obtenemos

$$D_h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{(n-1)!} \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n-1}{p} \times \\ \times \sum_{\substack{m_2+\dots+m_p=n-1 \\ m_i > 0}} \frac{(n-1-p)!}{(m_1-1)! \dots (m_p-1)!} d_{h-1}(m_1) \dots d_{h-1}(m_p) = \\ = z + z \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{n-1=p}^{\infty} \sum_{m_1+\dots+m_p=n-1} \prod_{i=1}^p z^{m_i} \frac{d_{h-1}(m_i)}{(m_i-1)!} = \\ = z + z \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\sum_{m=1}^{\infty} d_{h-1}(m) \frac{z^m}{(m-1)!} \right)^p = \\ = z \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} D_{h-1}^p(z) = z \exp\{D_{h-1}(z)\}, \quad k=1, 2, \dots,$$

y la fórmula requerida queda demostrada, puesto que $D_0(z) = z$.

5.98. Veamos un árbol, en el cual la altura de todos los $n \geq 2$ vértices por encima del vértice P_1 no sobrepasa de k ($1 \leq k \leq n$). Todos los vértices del árbol, distintos de P_1 , pueden dividirse en k clases, con la particularidad de que en la j -ésima clase se incluyen todos aquellos vértices, cuya altura por encima de P_1 es igual a j ($1 \leq j \leq k$). Designemos por $m_j \geq 0$ el número de vértices en

la j -ésima clase. Entonces $\sum_{j=1}^k m_j = n - 1$. Si los números m_j están fijados, la distribución de $n - 1$ vértices en clases puede realizarse empleando $(n - 1)! / (m_1! \dots m_k!)$ procedimientos. Es evidente que cada uno de m_1 vértices de la primera clase es adyacente a P_1 ; cada uno de los m_2 vértices de la segunda clase es adyacente a cierto vértice de la primera clase, etc.; por fin, cada uno de los m_k vértices de la k -ésima clase es adyacente a uno de los m_{k-1} vértices de la $(k - 1)$ -ésima clase.

Por cuanto la adyacencia de los vértices de la j -ésima y $(j - 1)$ -ésima clases puede ser establecida con ayuda de m_j^{j+1} procedimientos, el número de métodos de construcción de los árboles para una partición dada de los vértices en clases será igual a $m_1^{m_1} m_2^{m_2} \dots m_{k-1}^{m_{k-1}}$.

Llegamos pues, como resultado de nuestros razonamientos, a la fórmula buscada. Notemos que si $m_j = 0$, entonces $m_{j+1} = \dots = m_k = 0$, de suerte que en realidad se deben tomar no todas las particiones en clases posibles, sino sólo aquellas para las cuales se cumple la condición que acabamos de indicar. Sin embargo, la fórmula para $d_k(n)$ muestra que este requisito no es esencial: para las particiones que no satisfacen la condición mencionada el segundo miembro se anula.

5.99. La primera igualdad está clara. La segunda igualdad se demuestra igual que la fórmula para los números $d_k(n)$ del problema antecedente; la diferencia consiste en que la sumación en la fórmula para $\bar{d}_k(n)$ se realiza respecto de los sumandos positivos.

Las condiciones $n \geq 3$, $3 \leq k \leq n$ se deben a que el $(0, 0, 0)$ -grafo (véase el problema 5.66) no tiene bucles (lazos) y aristas paralelas y, por consiguiente, ciclos (circuitos) de longitud 1 y 2.

5.100. Con el fin de enumerar los grafos, de los cuales se trata en las condiciones del problema, hagamos uso del procedimiento siguiente:

a) partimos el n -conjunto de vértices en partes de un modo tal que $n - k$ partes se compongan de un solo elemento y una parte contenga k elementos; esta partición puede ser realizada empleando $B_n(n - k, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots$

$$\dots, 0) = \frac{n!}{(1!)^{n-k} (k!)^1 (n-k)! 1!} = \frac{n!}{k! (n-k)!} \text{ métodos;}$$

b) unimos los elementos del k -conjunto elegido en a), mediante las aristas, de tal manera que se obtenga un ciclo; es obvio que esta operación puede ser realizada empleando $(k - 1)!/2$ métodos diferentes.

De resultas tenemos

$$S_k(n) = \frac{(k-1)!}{2} \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{1}{2k} \frac{n!}{(n-k)!}$$

y el problema queda resuelto.

5.101. Véase el problema anterior en lo que se refiere a las condiciones $n \geq 3$, $3 \leq k \leq n$. Si de la familia de aristas de un grafo conexo que tiene el conjunto de vértices X , $|X| = n$, y un único ciclo de longitud k , eliminamos las aristas que forman el ciclo, se obtendrá un bosque que contiene k componentes. (Los últimos pueden estar compuestos, en particular, de un solo vértice aislado.) Por eso, para enumerar los grafos en consideración podemos proceder del modo siguiente:

a) Supongamos que al principio tenemos n vértices aislados. Construimos un grafo que tiene un único ciclo de longitud k y $n - k$ vértices aislados. De

acuerdo con el problema 5.100, podemos construir

$$S_k(n) = \frac{1}{2k} \frac{n!}{(n-k)!} \quad (5.12')$$

grafos de este género. Los vértices del ciclo se designarán por P_1, \dots, P_k .

b) Prefijamos un juego ordenado de k números enteros no negativos n_1, \dots, \dots, n_k que en la suma son iguales a $n - k$.

c) Representamos el conjunto $X \setminus \{P_1, \dots, P_k\}$ compuesto de $n - k$ elementos en forma de una unión de k subconjuntos disjuntos, entre los cuales pueden haber también vacíos, de un modo tal que $|X_j| = n_j$ ($j = 1, \dots, k$). El número de tales representaciones es igual al número de (n_1, n_2, \dots, n_k) -particiones y equivale a $(n - k)! / (n_1! \dots n_k!)$.

d) Para cada $j = 1, \dots, k$ elegimos uno de $T(n_j + 1) = (n_j + 1)^{n_j - 1}$ árboles con el conjunto de vértices $\{P_j\} \cup X_j$.

e) Por fin, construimos el grafo final suspendiendo de los vértices P_1, \dots, \dots, P_k del ciclo, construido en a), los árboles elegidos en c).

Seleccionando en cada punto del algoritmo descrito toda clase de variantes, obtendremos todo el conjunto de $(0, 0, 0)$ -grafos conexos con n vértices y un único ciclo de longitud k . De aquí obtenemos

$$P_k(n) = S_k(n) \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = n - k \\ n_j \geq 0}} \frac{(n - k)!}{n_1! \dots n_k!} \prod_{j=1}^k (n_j + 1)^{n_j - 1}. \quad (5.13')$$

De (5.12') y (5.13') llegamos a la primera fórmula citada en las condiciones del problema.

5.102. Al multiplicar ambos miembros de la primera fórmula del problema 5.101 por $y^k z^n / n!$ y al sumar respecto de n desde 3 hasta ∞ , y respecto de k desde 3 hasta n , obtenemos

$$\begin{aligned} P(z, y) &= \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{k=3}^n \frac{y^k}{k} z^n \frac{n!}{2k} \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = n - k \\ n_j \geq 0}} \prod_{j=1}^k \frac{(n_j + 1)^{n_j - 1}}{n_j} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{y^k}{k} \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = n - k \\ n_j \geq 0}} \prod_{j=1}^k (n_j + 1)^{n_j} \frac{z^{n_j + 1}}{(n_j + 1)!} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{y^k}{k} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)^n \frac{z^{n+1}}{(n + 1)!} \right]^k = \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{y^k}{k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-1} \frac{z^n}{n!} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{y^k \theta^k(z)}{k} = -\frac{1}{2} \left[\ln(1 - \theta(z)y) + y \theta(z) + \frac{y^2 \theta^2(z)}{2} \right]; \end{aligned}$$

la fórmula para $P(z)$ se deduce de aquí, si $y = 1$, al tomar en consideración que $P(z) = P(z, 1)$.

5.103. Para obtener todos los $(0, 0, 0)$ -grafos conexos que tengan n vértices y un único ciclo de longitud k ($n \geq k \geq 3$), es suficiente construir en cada bosque radical con n vértices y k componentes diferentes ciclos sobre el conjunto de raíces. Por cuanto el número de bosques radicales con n vértices y k compo-

entes es igual a $\binom{n-1}{k-1} n^{n-k}$ (véase el problema 5.88) y el número de ciclos de longitud k es igual a $(k-1)l/2$, tenemos

$$P_h(n) = \binom{n-1}{k-1} n^{n-h} \frac{1}{2} (k-1)l,$$

de donde se desprende, precisamente, el resultado que se busca.

La fórmula también se puede obtener haciendo uso de la representación $P(z, y)$ del problema 5.102, de manera análoga al problema 5.91.

§ 3. Planos finitos

5.104. Hagamos uso del teorema de Desargues (fig. 5.15'). Construimos bajo un ángulo suficientemente estrecho las rectas AD , AF , BD y BF . Trazamos la recta DF y elegimos en ella el punto O . Las construcciones posteriores se ven en el dibujo. Hallamos el punto C . De acuerdo con el teorema de Desargues, el

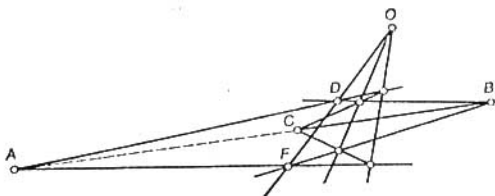


Fig. 5.15'

punto C se dispone en la recta AB . Hallando en AB unos cuantos puntos intermedios más podremos trazar toda la recta.

5.105. Método I. Si fijamos un punto, el segundo se elegirá empleando $(n^2 + n + 1) - 1 = n^2 + n$ procedimientos; a continuación, el tercer punto puede encontrarse empleando $(n^2 + n + 1) - (n + 1) = n^2$ procedimientos, donde $(n + 1)$ es el número de puntos de la recta que pasa por el par de puntos obtenido. El cuarto punto puede elegirse por $(n^2 + n + 1) - (n - 1)3 + 3 = (n - 1)^2$ procedimientos, donde $((n - 1)3 + 3)$ es el número de puntos dispuestos en los lados del triángulo (polígono de tres vértices) obtenido. El quinto punto puede elegirse empleando $(n^2 + n + 1) - (6n - 5) = n^2 - 5n + 6 = (n - 2)(n - 3)$ procedimientos, donde $(6n - 5)$ es el número de puntos situados en los lados del cuadrilátero obtenido. Mas cada recta en este caso se encuentra tantas veces, cuantas cuaternas ordenadas puedan obtenerse de n puntos de la curva, distintos del punto dado. Por eso, el número de curvas que se busca es igual a

$$(n^2 + n) n^2 (n - 1)^2 (n - 2) (n - 3) / A_n^4 = n^2 (n^2 - 1).$$

Método II. Designemos por x el número de curvas que pasan por un punto dado. El producto del número x por el número de todos los puntos en el plano $(n^2 + n + 1)$ es igual al producto del número de puntos de la curva $n + 1$ por el número de todas las curvas en el plano, es decir, por $n^2 (n - 1) (n^2 + n + 1)$. Así pues, tenemos una igualdad $x(n^2 + n + 1) = (n + 1) n^2 \times (n - 1) (n^2 + n + 1)$, de donde $x = n^2 (n^2 - 1)$.

5.106. Si fijamos un par de puntos, el punto tercero puede elegirse empleando $(n^2 + n + 1) - (n + 1) = n^2$ procedimientos, donde $(n + 1)$ es el número de puntos de la recta que pasa por el par de puntos dado. A continuación,

el cuarto punto puede ser elegido empleando $(n^2 + n + 1) - ((n - 1) 3 + 3) = (n - 1)^2$ procedimientos. El quinto punto puede elegirse empleando $(n^2 + n + 1) - (6n - 5) = (n - 2)(n - 3)$ procedimientos; aquí $(6n - 5)$ representa el número de puntos prohibidos por la elección de la cuaterna dada. Mas en este caso cada curva se encuentra tantas veces, cuantas ternas ordenadas pueden obtenerse a partir de $n - 1$ puntos de la curva, distintos de los dos iniciales. Por eso el número total de curvas que pasan por el par dado de puntos será igual a

$$n^2 (n - 1)^2 (n - 2) (n - 3) / A_{n-1}^3 = n^2 (n - 1).$$

5.107. La curva de segundo orden en un plano proyectivo finito de orden n es un $(n + 1)$ -arco, es decir, un conjunto compuesto de $n + 1$ puntos que no son colineales tomados tres a tres.

Si fijamos un par de puntos y dos rectas cualesquiera que pasan por un punto de dicho par, el tercer punto puede elegirse empleando $(n^2 + n + 1) - ((n - 1) 3 + 3) = (n - 1)^2$ procedimientos, donde $(n^2 + n + 1)$ es el número de puntos del plano proyectivo finito de orden n . Por cuanto en cada recta yacen $n + 1$ puntos, entonces $((n - 1) 3 + 3)$ es el número de puntos situados en dos tangentes dadas y en la recta que pasa por el par dado de puntos. Además, cada curva se cuenta $(n + 1) - 2 = n - 1$ veces, puesto que a título de tercer punto puede ser elegido cualquiera de los $n + 1$ puntos, a excepción de los dos puntos dados.

El número total de curvas es igual a $(n - 1)^2 / (n - 1) = n - 1$.

5.108. Un par de puntos de intersección de la curva hiperbólica con la recta impropia puede ser elegido entre $(n + 1) - 1 = n$ puntos impropios no colineales respecto de los dos puntos dados, empleando $C_n^2 = n(n - 1)/2$ procedimientos. El quinto punto puede ser añadido empleando $(n^2 + n + 1) - ((n - 2) 2 + 1) 3 + 4) = n^2 - 5n + 6$ procedimientos; aquí $((n - 2) 2 + 1) 3 + 4)$ es el número de puntos prohibidos por la elección de la cuaterna dada. En este caso cada curva se cuenta $(n + 1) - 4 = n - 3$ veces. Por eso el número de curvas buscadas es igual a

$$n(n - 1)(n - 2)(n - 3) / (2(n - 3)) = n(n - 1)(n - 2) / 2.$$

5.109. Una curva de segundo orden se define unívocamente por cuatro puntos y una tangente en uno de ellos. Para un par inicial de puntos ordinarios un punto impropio, que no sea colineal con ellos, puede elegirse empleando n métodos. Se tienen $(n^2 + n + 1) - ((n - 1) 3 + 3) = (n - 1)^2$ puntos que no están situados en los lados del triángulo obtenido. De la cantidad mencionada de puntos están prohibidos, además, para la elección del cuarto punto, todos los puntos impropios distintos del punto impropio de tangencia y del punto impropio de la recta que pasa por el par inicial de puntos: hay en total $n - 1$ tales puntos. Por eso, para la elección del cuarto punto tenemos $(n - 1)^2 - (n - 1) = (n - 1)(n - 2)$ métodos. En este caso cada recta se cuenta $(n + 1) - 3 = n - 2$ veces. Por consiguiente, el número buscado de curvas parabólicas es igual a

$$n(n - 1)(n - 2) / (n - 2) = n(n - 1).$$

5.110. El número de todas las curvas que pasan por un par dado de puntos es igual a $n^2(n - 1)$ (véase el problema 5.106). Al restar de este número el número de curvas parabólicas y el número de curvas hiperbólicas, encontramos el número de las elípticas:

$$n^2(n - 1) - n(n - 1)(n - 2) / 2 - n(n - 1) = n^2(n - 1) / 2.$$

5.111. En un plano hay en total $n^2 + n + 1$ puntos; de ellos pueden formarse $C_{n^2+n+1}^2 = (n^2 + n + 1)(n^2 + n) / 2$ pares de puntos. Por cuanto a través

de un par de puntos pasan $n^2 (n - 1)$ curvas y cada curva figura en el cálculo C_{n+1}^2 veces, el número de todas las curvas será igual a

$$(\frac{1}{2} (n^2 + n + 1) (n^2 + n) n^2 (n - 1)) / C_{n+1}^2 = n^2 (n - 1) (n^2 + n + 1).$$

5.112. Por un punto de un arco pasan $n + 1$ rectas, en las cuales yacen todos los puntos del plano, incluidos todos los puntos del arco. En cada una de dichas rectas yace no más de un punto del arco, distinto del dado. Por eso, el valor máximo de k es $(n + 1) + 1 = n + 2$. El resultado se precisa para los planos proyectivos de orden impar. Supongamos que el arco del plano proyectivo de orden impar n contiene $n + 2$ puntos. En cada recta que pasa por uno de los puntos del arco yace exactamente un solo punto del arco, distinto del dado. Por eso, en cada una de las $n + 1$ rectas que pasan por cierto punto del plano, distinto de los puntos del arco, se disponen o un cero o bien dos puntos del arco. Por consiguiente, el número de puntos k del arco resulta ser par, mientras que $n + 2$ es impar cuando n es impar. La suposición de este modo queda rechazada y el valor máximo de k para un plano de orden impar n es igual a $n + 1$.

5.113. En un plano de orden impar n el $(n + 1)$ -arco será un óvalo. Por cada punto del arco pasa una tangente. En todas las secantes y tangentes, que pasan por el punto P no perteneciente al óvalo, está situado un número par de $n + 1$ puntos del óvalo. Por cuanto en cada secante se disponen dos puntos del óvalo, en todas las tangentes que pasan por el punto P yace un número par de puntos del óvalo, por lo cual el número de tales tangentes es par.

En la tangente se disponen n puntos, distintos del punto de tangencia. Por cada uno de estos puntos pasa la tangente dada y, de acuerdo con lo demostrado más arriba, por lo menos una tangente más. Pero, además de la tangente dada hay exactamente n tangentes. Por eso, por cada punto fuera del óvalo que está situado fuera de la tangente en consideración, pasa exactamente una otra tangente. El número x de todos los puntos, externos con relación al óvalo, que se disponen en todas las tangentes se hallará mediante el cálculo del número de incidencias. En cada una de las $n + 1$ tangentes yacen n puntos del tipo requerido, y por cada uno de estos puntos pasan dos tangentes, razón por la cual $(n + 1) n = 2x$, $x = n(n + 1)/2$.

5.114. Cada 4-arco cuenta con seis secantes; seis secantes del arco se cortan de dos en dos en tres puntos (diagonales). En cada secante se disponen $(n - 2)$ puntos, además de dos puntos del arco y un punto diagonal. En seis secantes tenemos $4 + 3 + 6(n - 2) = 6n - 5$ puntos.

El número de puntos del plano, que no yacen en las secantes del arco, es igual a

$$n^2 + n + 1 - (6n - 5) = (n - 2)(n - 3),$$

$$(n - 2)(n - 3) = 0 \Leftrightarrow n = 2, \text{ o bien } n = 3.$$

Por consiguiente, en los planos de órdenes $n = 2$ y $n = 3$ existen 4-arcos completos.

5.115. Cada secante del 5-arco se interseca con tres secantes que pasan por los puntos del arco (no situados en la secante de que se trata) en tres puntos distintos. En diez secantes se encuentran $3 \cdot 10/2 = 15$ tales puntos. Hay $n + 1 - 2 - 3 = n - 4$ puntos de la secante que no yacen en otras secantes. En las diez secantes están situados $5 + 15 + 10(n - 4) = 10n - 20$ puntos. Por consiguiente, fuera de las secantes se encuentran $n^2 + n + 1 - (10n - 20) = n^2 - 9n + 21$ puntos.

5.116. Un 5-arco es completo, si $n^2 - 9n + 21 = 0$ (véase el problema 5.115). El discriminante es $D = 81 - 84 < 0$. La afirmación está demostrada.

5.117. Tomemos un cuadrilátero completo. En cada uno de sus lados (es decir, en la secante) se encuentran 2 vértices, 1 punto diagonal y 2 puntos más $5 - (2 + 1) = 2$. En 6 lados yacen 4 vértices, tres puntos diagonales y, además, $6 \cdot 2 = 12$ puntos, es decir, 19 en total. Fuera de los lados tenemos $21 - 19 = 2$ puntos. Tres puntos diagonales se disponen en una misma recta; además de ellos en dicha recta están situados los dos puntos fuera de los lados,

que fueron mencionados. La adición de cada uno de ellos a los cuatro vértices da un 5-arco; por cuanto la recta que pasa por los puntos mencionados no contiene vértices, la adición de ambos puntos a los vértices nos da un 6-arco. De estos razonamientos se ve que un 6-arco se define estricta y unívocamente por un cuadrilátero. El número de cuadriláteros ordenados en un plano de orden 4 es igual a $21 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 9$; en una sexterna de puntos del arco el número de tales cuadriláteros es igual a $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$; tal número de veces figura en el cálculo cada 6-arco. De aquí, el número de todos los 6-arcos es igual a $(21 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 9)/(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3) = 168$.

5.118. Por cada punto de un $(n+1)$ -arco pasan (según el número de los puntos restantes del arco) n secantes y una tangente. En total (según el número de puntos del arco) hay $n+1$ tangentes. En todas las tangentes y secantes que pasan por el punto P no perteneciente al arco, yace un número impar $n+1$ de puntos del arco. Por cuanto en las secantes de este haz está situado un número par de puntos del arco, entonces por lo menos un punto debe encontrarse en la tangente. Con esto queda demostrado que por cada punto, no perteneciente al arco, pasa por lo menos una tangente de este arco. Hay $n^2 + n + 1 - (n+1) = n^2$ puntos que no pertenecen al $(n+1)$ -arco. En cada tangente yacen n tales puntos. Destaquemos una de las tangentes; cada una de las n tangentes restantes corta la destacada y por eso lleva $n-1$ puntos que no pertenecen al arco y a la tangente destacada. Ya que $n + n(n-1) = n^2$, todos los puntos de las tangentes considerados más arriba han de ser distintos. Esto significa, que las tangentes, diferentes de la destacada, se cortan en cierto punto de la tangente destacada. Así pues, todas las $n+1$ tangentes pasan por un mismo punto O y no hay otras rectas que pasen por O . En particular, por O no pasa ninguna secante y por consiguiente el $(n+1)$ -arco en consideración es no completo.

5.119. Véase la resolución del problema 5.118.

5.120. Analicemos el caso de $n = 2m$ par. Los puntos del plano de orden par n se dividen respecto del óvalo, que tiene aquí $n+2$ puntos, en dos clases: los puntos del óvalo y los exteriores. Por un punto exterior pasan $(n+2)/2 = m+1$ secantes, en cada secante se disponen $n-1$ puntos exteriores, y a través de los puntos exteriores de la secante pasan todas las $m(n-1) = C_n^2$ secantes que se definen por n puntos del óvalo, que no yacen en la secante dada. Por eso, con el haz de m secantes que pasan por el punto externo y son distintas de la secante dada está relacionada la partición de $n = 2m$ puntos restantes del óvalo en m pares. Con todos los $n-1$ puntos de la secante está ligado el juego de $n-1$ tales particiones de los n puntos citados; en este caso cada par de puntos del óvalo fuera de la secante dada figura una y sólo una vez.

Veamos el caso en que $n = 2m+1$ es impar. Aquí por el punto exterior pasará $(n-1)/2$ ó $(n+1)/2$ secantes. Al designar por r y l los números de tipos de los puntos que contienen $(n-1)/2$ y $(n+1)/2$ secantes, respectivamente, obtenemos las siguientes ecuaciones para la secante dada:

$$r+l=n-1, \quad \frac{n-3}{2}r + \frac{n-1}{2}l = C_{n-1}^2, \text{ de donde } r=l=(n-1)/2.$$

Por consiguiente, con todos los $n-1$ puntos de cada secante del óvalo, distintos de los puntos del mismo, están relacionados dos juegos de $(n-1)/2$ particiones, a $(n-1)/2$ pares en cada una, y de $(n-1)/2$ particiones, a $(n-3)/2$ pares en cada una, sin pares comunes.

5.121. Para los puntos del k -arco tenemos $i = k-1$, y para los puntos restantes del plano tenemos $0 \leq i \leq k/2$.

De las definiciones de plano proyectivo de orden n y de k -arco obtenemos las ecuaciones $K_{k-1} = k$, $K_{k-1} + \sum_i K_i = n^2 + n + 1$. El cálculo del número de

incidencias de los puntos de tipo diferente con secantes del k -arco ofrece la ecuación

$$(k-1) K_{k-1} + \sum_i i K_i = \frac{k(k-1)}{2} (n+1).$$

El cálculo del número de pares de secantes que pasan por todos los puntos del plano da la siguiente ecuación

$$\frac{(k-1)(k-2)}{2} K_{k-1} + \sum_i \frac{i(i-1)}{2} K_i = \frac{(k-2)(k-1)(k+1)k}{8}.$$

El cálculo del número de incidencias de los puntos respecto de otras rectas y del número de pares de otras rectas no presta nuevas dependencias.

De solución del sistema en el caso que se analiza sirven las fórmulas

$$\begin{aligned} K_0 &= n^2 + n + 1 - k - k(k-1)(4n + 5k - k^2 - 10)/8, \\ K_1 &= k(k-1)(2n + 5k - k^2 + 8)/4, \\ K_2 &= k(k-1)(k-2)(k-3)/8. \end{aligned}$$

5.122. El sistema de ecuaciones para determinar el número de puntos K_i será en este caso como sigue

$$\begin{aligned} K_0 + K_1 + K_2 + K_3 &= n^2 + n - 5, \\ K_1 + 2K_2 + 3K_3 &= 15(n-1), \\ K_2 + 3K_3 &= 45. \end{aligned}$$

De aquí

$$\begin{aligned} n^2 - 14n + 40 &\leq K_0 \leq n^2 - 14n + 55, \\ 15(n-7) &\leq K_1 \leq 15(n-4). \end{aligned}$$

5.123. El sistema de ecuaciones para determinar el número de puntos K_i según el número i de secantes del arco, que pasan por los puntos del plano, tendrá por expresión:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{(n-1)/2} K_i &= n^2 + 1, & \sum_{i=0}^{(n-1)/2} i K_i &= \frac{n(n-1)^2}{2}, \\ \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \frac{i(i-1)}{2} K_i &= \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{8}. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema respecto de K_0 , K_1 , K_2 , obtenemos

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8} - \sum_{i=3}^{(n-1)/2} \frac{i(i-1)}{2} K_i, \\ K_1 &= \frac{n(n-1)(7n-n^2+8)}{4} + \sum_{i=3}^{(n-1)/2} i(i-2) K_i, \\ K_0 &= -n^3 + 3n^2 - n + 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{(n-1)/2} (i-1)(i-2) K_i. \end{aligned}$$

Admitamos que el arco en consideración es completo, es decir, $K_0 = 0$. Entonces, suponiendo que $n = 2m + 1$, de la última condición obtenemos:

$$\sum_{i=3}^m (i-1)(i-2) K_i = -4(4m^2 - 2m - 1).$$

Aquí $\sum_{i=3}^m (i-1)(i-2) K_i \geq 0$, puesto que los números K_i de puntos son no

negativos, mientras que el segundo miembro de la ecuación, para $m \geq 1$, es negativo. La contradicción obtenida rechaza la suposición de que el n -arco en un plano proyectivo de orden impar n es completo.

5.124. El cuadrilátero completo tiene 4 vértices, 6 lados (secantes) y 3 puntos diagonales, es decir, puntos de intersección de los lados que no son vértices. Si estos puntos no son colineales, entonces definen de dos en dos 3 diagonales. Cada diagonal corta 2 lados, que pasan por el punto diagonal que no está situado en ella, en distintos puntos; hay en total 6 tales puntos. Los puntos citados y las rectas forman una figura que incluye 13 puntos y 9 rectas, con la particularidad de que en cada una de estas rectas se disponen 4 puntos de la figura y los demás $(n+1) - 4 = n - 3$ puntos de la recta no integran la figura. En las rectas de la figura se disponen en total $13 + 9(n-3) = 9n - 14$ puntos. El número de puntos restantes es igual a

$$(n^2 + n + 1) - (9n - 14) = n^2 - 8n + 15 = (n-3)(n-5).$$

5.125. Véase el problema 5.124.

5.126. Admitiendo lo contrario, llegamos a que el número de puntos no situados en las secantes del cuadrilátero es igual (véase el problema 5.124) a $(4-3)(4-5) = -1$, lo que es imposible.

5.127. Procedimiento I. En toda recta de un subplano baeriano se encuentran $m+1$ puntos de este subplano y $(n+1) - (m+1) = n-m$ otros puntos. En las rectas mencionadas yacen en total $(m^2 + m + 1)$ puntos del subplano y $(m^2 + m + 1)(n-m)$ otros puntos; la suma de estos números es igual al número de todos los puntos del plano. De aquí

$$(m^2 + m + 1) + (m^2 + m + 1)(n-m) = n^2 + n + 1, \\ n^2 - (m^2 + m)n + m^2 = 0.$$

Resolviendo la ecuación respecto de n , hallamos: $n_1 = m^2$, $n_2 = m$. Por cuanto $n > m$, entonces $n = m^2$.

Procedimiento II. Por un punto P de un plano no perteneciente al subplano pasa una recta del subplano; sobre ella yacen $m+1$ puntos del subplano. Cada una de las n rectas restantes que pasan por P contiene un punto del subplano; el número de estos puntos es igual a $(m^2 + m + 1) - (m + 1) = m^2$; de aquí, $n = m^2$.

5.128. Por hipótesis existe un punto P del plano que no se encuentra en las rectas del subplano. La unión de P con los puntos del subplano da $m^2 + m + 1$ diferentes rectas. Por cuanto el número de todas las rectas que pasan por P es igual a $n+1$, entonces $n+1 \geq m^2 + m + 1$, $n \geq m^2 + m$.

5.130. Indicaciones. Muéstrase que el bloque-esquema generalizado (no todo par del v -conjunto participa en la construcción del esquema) con los parámetros $v = n^2$, $b = 3n$, $r = 3$, $k = n$, $\lambda = 1$ es equivalente al cuadrado latino.

5.131. Se sabe que un plano proyectivo finito es equivalente al conjunto completo de cuadrados latinos ortogonales de dos en dos. Lo mismo es cierto (véase el problema 5.130) para un plano afín.

5.132. No existen dos cuadrados latinos de orden 6 (problema de Euler sobre 36 oficiales).

5.133. La respuesta es: 1 2 4, 2 3 5, 3 4 6, 4 5 7, 5 6 1, 1 3 7, 3 4 6, 2 6 7.

5.134. a) Por dos puntos cualesquiera pasa una única recta. Sean (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) dos puntos distintos. Entonces el sistema

$$ux_1 + vy_1 + wz_1 = 0, \quad ux_2 + vy_2 + wz_2 = 0$$

tiene una única solución (con una exactitud de hasta un factor) respecto de (u, v, w) .

b) De un modo análogo se comprueba que cualesquiera dos rectas se intersecan en un único punto.

c) Si $a \neq 0, a \in GF(q)$, entonces los puntos $(0, 0, a), (0, a, 0), (a, 0, 0), (a, a, a)$ son todos diferentes y cualesquiera tres de ellos no están situados en una misma recta.

5.135. Si los puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) satisfacen la ecuación $ux + by + wz = 0$, entonces la satisfacen también los puntos $(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$, donde λ y μ son cualesquiera elementos de $GF(q)$.

5.136. La ecuación $\lambda + \mu = 1$ tiene exactamente $q + 1$ soluciones (véase el problema antecedente).

5.137. Los puntos buscados son: $(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$. Las rectas: $z = 0, y = 0, x = 0, y + z = 0, x + z = 0, x + y = 0, x + y + z = 0$.

5.138. Cerciórese previamente de la validez de las propiedades siguientes de los campos de Galois $GF(p^h)$:

a) $(a + b)^p = a^p + b^p, (a + b)^{p^r} = a^{p^r} + b^{p^r}$, donde r es un número natural cualquiera;

b) cada elemento del campo de Galois $GF(q)$ satisface la ecuación $x^q - x = 0$.

Hágase uso también de la segunda definición de recta (problema 5.135).

Se necesita demostrar que un punto y una recta conservan su incidencia en las transformaciones proyectivas. Tenemos dos puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$. Por dichos puntos pasa la recta $(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$, donde $(\lambda, \mu) \neq (0, 0), \lambda, \mu \in GF(p^h)$. Hallemos la imagen de esta recta en la transformación proyectiva. Tenemos una colineación

$$s = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{p^r} \\ y^{p^r} \\ z^{p^r} \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo aquí los puntos de la recta y haciendo uso de la propiedad a), tenemos un conjunto de imágenes de los puntos de la recta dada

$$\{\lambda^{p^r}(a_{11}x_1^{p^r} + a_{12}y_1^{p^r} + a_{13}z_1^{p^r}) + \mu^{p^r}(a_{11}x_2^{p^r} + a_{12}y_2^{p^r} + a_{13}z_2^{p^r}), \dots, \dots\}.$$

Ahora, con el fin de demostrar que este conjunto de imágenes es una recta, incidente con relación a los puntos A y B , basta demostrar que los conjuntos $\{(\lambda, \mu)\}$ y $\{(\lambda^{p^r}, \mu^{p^r})\}$ son equipotentes, donde $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ y $\lambda, \mu \in GF(p^h)$; r es fijo. Esto es evidente.

Demostremos a continuación que en el sistema

$$sx' = a_{11}x^{p^r} + a_{12}y^{p^r} + a_{13}z^{p^r},$$

$$sy' = a_{21}x^{p^r} + a_{22}y^{p^r} + a_{23}z^{p^r},$$

$$sz' = a_{31}x^{p^r} + a_{32}y^{p^r} + a_{33}z^{p^r}$$

podemos limitarnos a los valores de $r = 0, 1, \dots, h-1$, es decir, cualquiera que sea $m \geq h$, llegamos a uno de los h tipos de colineaciones. Basta demostrar que

$$\begin{pmatrix} x^{p^m} \\ y^{p^m} \\ z^{p^m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{p^r} \\ y^{p^r} \\ z^{p^r} \end{pmatrix}, \quad m \geq h, \quad r = 0, 1, \dots, h-1.$$

Tenemos $m = ch + r$, donde $r = 0, 1, \dots, h-1$. Luego, $x^{p^m} = x^{p^{ch+r}} = x^{p^{ch}} p^r = (x^{p^{ch}})^{p^r} = x^{p^r}$, puesto que $x^{p^{ch}} = x$.

Análogamente procedemos para y y z . Todo está demostrado.

5.139. En el plano $P(2, q)$ se tienen en total $q^2 + q + 1$ puntos y $q^2 + q + 1$ rectas. Mientras tanto, el número de puntos en cualquier recta es igual a

$$(q^2 - 1)/(q - 1) = q + 1.$$

El triángulo es una terna de puntos que no yace en su totalidad en una misma recta. Calculemos su número. A título del primer punto podemos tomar cualquiera de los $q^2 + q + 1$ puntos; a título del segundo, cualquiera de los $(q^2 + q + 1) - 1 = q^2 + q$. A título del tercer punto elegimos cualquiera, salvo los puntos de la recta que pasa por los dos primeros. Este número es igual a $(q^2 + q + 1) - (q + 1) = q^2$. De acuerdo con la regla del producto, el número buscado de triángulos es igual a $(q^2 + q + 1)(q^2 + q)q^2$.

5.140. En el plano $P(2, q)$ se tienen $q^2 + q + 1$ puntos. Supongamos que los vértices del cuadrilátero son M_1, M_2, M_3, M_4 . A título de M_1 tomamos cualquiera de los $q^2 + q + 1$ puntos. A título de M_2 , cualquiera de los $(q^2 + q + 1) - 1 = q^2 + q$ puntos. A título de M_3 , cualquiera de los $(q^2 + q + 1) - (q + 1) = q^2$ puntos; a título de M_4 , cualquiera de los puntos que no yacen en M_2M_3, M_1M_2, M_3M_1 , es decir, cualquiera de los $(q^2 + q + 1) - (q + 1 + q + 1 + q + 1 - 3) = (q - 1)^2$ puntos. De acuerdo con la regla del producto, el número buscado de cuadriláteros es igual a $(q^2 + q + 1)(q^2 + q) \times (q - 1)^2$.

5.141. Se tienen h tipos de transformaciones proyectivas. Hallemos el número de colineaciones para cualquier tipo. Toda colineación se define unívocamente por la clase de matrices regulares asociadas. En toda clase de asociatividad hay $q - 1$ matrices. Hallemos el número de matrices regulares en un espacio euclídeo $(n + 1)$ -dimensional V sobre el campo $GF(q)$. Supongamos que A_1, A_2, \dots, A_{n+1} es la base del espacio V ; σ es la matriz de la transformación lineal regular; $B_i = \sigma A_i$; $\{B_i\}$ es un sistema linealmente independiente. A todo sistema linealmente independiente $\{B_i\}$ le corresponde unívocamente una matriz regular σ y viceversa. Calculemos, por inducción, el número de elecciones de $\{B_i\}$ del espacio V .

El número $|\{B_1, \dots, B_1, \dots, B_{n+1}\}| = (q^{n+1} - 1)(q^{n+1} - q) \dots (q^{n+1} - q) \dots (q^{n+1} - q^n)$ da la cantidad de matrices regulares. Al dividir este número por $q - 1$, obtendremos el número de colineaciones para el tipo dado de la transformación proyectiva n -dimensional. En nuestro caso $n = 2$. Entonces, el número de colineaciones del tipo i es igual a

$$(q^3 - 1)(q^3 - q)(q^3 - q^2)/(q - 1) = (q^2 + q + 1)(q^2 + 1)q^3(q - 1)^2.$$

El grupo proyectivo general de transformación es de orden $h(q^2 + q + 1) \times (q^2 + 1)q^2(q - 1)^2$.

5.142. Exáminese la colineación con la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.145. Cada fila de la matriz puede elegirse empleando siete procedimientos y , al combinarlos, se obtiene $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$. Es obvio que las matrices degeneradas serán aquellas que se obtienen con ayuda de los puntos de una recta, pues en este último caso las filas matriciales son linealmente dependientes. Con ayuda de tres puntos de una recta obtendremos $3^3 = 27$ matrices, y para todas las 7 rectas, un total de 189 matrices de este tipo. Sin embargo, entre ellas hay

las que se repiten, por ejemplo, las matrices que se obtienen sólo de un punto. Por cuanto cada punto pertenece a tres rectas, el número de tales matrices será igual a 21. Por consiguiente, cada tal matriz se cuenta tres veces. Hay, pues, 14 matrices superfluas. Obtenemos finalmente 175 matrices degeneradas y 168 regulares.

5.146. Hágase uso de la forma canónica de la cónica

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = 0, \quad a_1, a_2, a_3 \neq 0$$

y analícese dos casos: la recta $z = 0$ corta la cónica dada y no la corta.

SISTEMAS DE CONJUNTOS

§ 1. Problemas extremales en los grafos e hipergrafos

6.1. $\lfloor n^2/4 \rfloor$; un grafo extremal es único y tiene forma de un grafo bipartido completo con partes que son, en lo posible, iguales: $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor}$. Sea a_1 un vértice de grado máximo d ; los extremos de las aristas que tienen por origen a_1 son los vértices a_2, \dots, a_{n-d+1} , los cuales, estando ausentes los triángulos, forman un conjunto independiente; esto quiere decir que $|G| \leq d(a_1) + \dots + d(a_{n-d}) \leq (n-d)d \leq n^2/4$.

Entre los problemas extremales éste es de un significado especial. Siendo en el aspecto histórico uno de los primeros resultados extremales, sirve al mismo tiempo de modelo para varios tipos de problemas extremales sobre grafos e hipergrafos. Mantel W. [Wiskundige Opgaven. 1907, 10, S, 60] fue el primero en obtener este resultado; a continuación el resultado se volvió a demostrar y descubrir reiteradamente. La primera ampliación cualitativa de él, junto con la demostración de la unicidad de la construcción extremal, fue obtenida por P. Turán [Mat. Fiz. Lapok., 1941, 48, p. 436—453; véase el problema 6.13, 1]. Una solución absolutamente no constructiva se deduce de 6.61. Véase la solución aducida aquí en [Jadjiivanov N., Nenov N. — Reportes de la Academia de Ciencias de Bulgaria, 1976, 25, No 11, p. 1575—1578].

6.2. $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$; la construcción extremal se representa por el l -grafo completo $C^l(S_n)$ con l que realiza el valor extremal. Si el hipergrafo $F \subset \mathcal{P}(S_n)$ es una anticadena (es decir, se compone de las hiperaristas que no pueden ser encajadas de dos en dos), se verifica para él la desigualdad de Lubel—Meshalkin—Yamamoto $\sum_{e \in F} \binom{n}{|e|}^{-1} \leq 1$, de la cual obtenemos en seguida la desigualdad requerida $1 \geq \sum_{e \in F} \binom{n}{|e|}^{-1} \geq |F| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}^{-1} \Rightarrow |F| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. El resul-

tado recibe el nombre de *teorema de Sperner* [Sperner E. — Math. Z., 1928, 27, p. 544—548], y las familias de conjuntos que no encajan uno en otro, se llaman a veces *spernerianas*. Históricamente este resultado representa el primer problema extremal sobre $\mathcal{P}(S_n)$ como sobre un conjunto parcialmente ordenado por inclusión (\subseteq); este problema está estrechamente vinculado con los fenómenos estructurales del tipo de teoremas de Dilworth [véase Frank A. — J. Comb. Th., 1980, 29, p. 176—184]; con respecto a la desigualdad de Lubel—Meshalkin—Yamamoto véanse los problemas 6.62, 6.63, 6.65.

6.3. 2^{n-1} ; las construcciones extremales pueden ser de naturaleza dual:

$$F = C^1(a) \mathcal{P}(S_n \setminus a) \quad (a \in S_n);$$

$$F = \begin{cases} C^n(S_n) + \dots + C^{(n+1)/2}(S_n), & n \equiv 1 \pmod{2}; \\ C^n(S_n) + \dots + C^{(n+2)/2}(S_n) + C(a) C^{n/2-1}(S_n \setminus a), & n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Su carácter extremal es casi obvio: F puede contener o bien $X \subset S_n$, o bien $S_n \setminus X$, por consiguiente, no más de la mitad de todos los subconjuntos, es decir, $|F| \leq 2^{n-1}$. La condición extremal puede ser debilitada, al sustituirla por la condición $\forall A, B \in F \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A| + |B| \leq t \leq n$; la respuesta quedará invariable.

El problema puede servir de prototipo de los problemas sobre intersecciones: ¿cuántas hiperaristas puede tener un hipergrafo, en el cual está especificada la estructura (el volumen) de las intersecciones de ciertas totalidades de sus hiperaristas? [Erdős P., Chao Ko. Rado R. — Quart. J. Math. (2), 1964, No 12, p. 313—320].

6.4. El número mínimo n_0 se determina a partir de las desigualdades $\binom{n_0-1}{k} < m \leq \binom{n_0}{k}$. El k -grafo extremal se representa por $C^k(S_n)$, siempre que $m = \binom{n}{k}$. Si, en cambio, $\binom{n-1}{k} < m < \binom{n}{k}$, entonces se trata de $C^k(S_{n-1})$ y, además, de $m - \binom{n-1}{k}$ cualesquiera k -aristas en los vértices de $S_{n-1} + \{a\}$, donde $a \notin S_{n-1}$. El carácter extremal de tal construcción está claro: para $n < n_0$ el número de k -aristas sobre n vértices sería inferior a m , puesto que: $\binom{n}{k} \leq \binom{n_0-1}{k} < m$.

Este problema es un prototipo de los problemas sobre las uniones: ¿cuántas l -aristas puede tener un l -grafo $G^l = \bigcup_{S \in F} H^l(S)$, si en el l -grafo H^l y en el hipergrafo F están impuestas ciertas restricciones [Kruskal F. B. — In: Math. Opt. Techn./Ed. R. Bellman, 1963, p. 251—278; Katona Gy. — In: Theory of graphs, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968, p. 187—207].

6.5. $\binom{k+l}{l}$; los hipergrafos extremales son $\mathcal{A}^k = C^k(S_{k+l})$ y $\mathcal{B}^l = C^l(S_{k+l})$. Sobre $S_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ hagamos fija la numeración de los vértices y definamos $C_i, D_i \subset S_n: C_i \cap D_i = \emptyset, |C_i| = k, |D_i| = l, 1 \leq i \leq \binom{n}{k+l}$, con la particularidad de que $\forall c \in C_i \forall d \in D_j \quad c < d$. Pongamos $\mathcal{F}_i = \{C_i, D_i\}$. Está claro que $\forall i, j$ o bien $C_i \cap D_j = \emptyset$, o bien $C_j \cap D_i = \emptyset$. Supongamos ahora que $\mathcal{F}_1^i, \dots, \mathcal{F}_i^{n_i}$ son todos sistemas de este tipo (según el número de numeraciones posibles de n), $\mathcal{F}_i^\pi = \{C_i^\pi, D_i^\pi\}$. Para ellos también $\forall i, j$ o bien $C_i^\pi \cap D_j^\pi = \emptyset$, o bien $C_j^\pi \cap D_i^\pi = \emptyset$. Empleando dos métodos, estimemos el número de pares $(\mathcal{F}_i^\pi, (A_\nu, B_\nu))$, donde $A_\nu = C_i^\pi, B_\nu = D_i^\pi, A$ y B son aristas de los hipergrafos iniciales. El número de pares $(\mathcal{F}_i^\pi, (A_\nu, B_\nu))$ no sobrepasa $n!$, en virtud de la no intersección disyuntiva mencionada más arriba. Por otra parte, fijando (A_ν, B_ν) , vemos que el número de \mathcal{F}_i^π convenientes es igual a $\binom{n}{k+l} k!l!(n-k-l)!$, o sea, el número de pares $(\mathcal{F}_i^\pi, (A_\nu, B_\nu))$ es exactamente igual a $m \binom{n}{k+l} k!l!(n-k-l)$. Por consiguiente, $m \times \binom{n}{k+l} k!l!(n-k-l) \leq n!$ [Katona Gy. — J. Comb. Th., 1974, No 2, p. 256—266].

Este problema puede servir de prototipo de los problemas de los pares o sistemas de hipergrafos.

6.6. Una familia $F \subset \mathcal{P}(S_n)$ se llamará p -inseparada, si la intersección de cualesquiera p términos suyos es no vacía, y se llamará q -separada, si la intersección de cualesquiera q términos suyos es vacía. Si el volumen de la familia

mayor $F \subset \mathcal{P}(S_n)$, 2-inseparada y 3-separada, lo designamos por $m_n(2, 3)$, entonces $m_n(2, 3) = \lfloor (1 + \sqrt{8n+1})/2 \rfloor$.

Estimación superior. Sea $F \subset \mathcal{P}(S_n)$ una familia arbitraria de m términos 2-inseparada y 3-separada. Examinemos en los elementos de S_n una nueva familia D compuesta por todas las intersecciones posibles de diferentes términos de la familia $F = \{e_i\}$, es decir, $D = \{e_i \cap e_j\} (i \neq j)$. Por ser F 2-inseparada, la familia D contiene exactamente $\binom{m}{2}$ términos no nulos, pero, por otro lado, esta familia es 2-separada, puesto que la presencia de dos términos de la familia D que se intersecan tendría por resultado la presencia de por lo menos tres términos de la familia F que se intersecan, y de este modo contradiría la 3-separación de la familia F . Finalmente, por la misma razón, la familia D no puede tener términos múltiples. Debido a que el volumen máximo posible de una familia 2-separada es igual a n , obtenemos la estimación $\binom{m}{2} = |D| \leq n$, la cual tras las transformaciones elementales y tomando en consideración que m es un número entero, adquiere la forma $m \leq \lfloor (1 + \sqrt{8n+1})/2 \rfloor$.

Construcción. Sea n_Δ un número máximo triangular que no sobrepasa n . Coloquemos en un plano n_Δ puntos tal como se muestra en la fig 6.1'. Tracemos a partir de cada punto de la fila superior una línea hasta alcanzar la diagonal y luego a la izquierda hasta la última columna vertical; tales líneas contienen un número igual de puntos. Además, desde el punto que está más a la derecha de la fila superior trazamos una línea más que va a lo largo de la diagonal. Las líneas obtenidas se entenderán como términos de la familia $F_n(S_{n_\Delta})$ la cual es, lo que no es difícil de ver, 2-inseparada y 3-separada y contiene exactamente $\lfloor (1 + \sqrt{8n_\Delta+1})/2 \rfloor$ términos. Los demás $n - n_\Delta$ puntos se disponen formando una fila superior adicional; ellos no figuran en ningún término. ¿La familia obtenida $F_n(S_{n_\Delta})$ contiene $\lfloor (1 + \sqrt{8n_\Delta+1})/2 \rfloor = \lfloor (1 + \sqrt{8n+1})/2 \rfloor$ términos y constituye una construcción suficiente.

Si $m = m(p, p+1)$ es el volumen de la familia mayor $F \subset \mathcal{P}(S_n)$, p -inseparada y $(p+1)$ -separada, entonces m se define como una raíz entera máxima de la desigualdad $\binom{m}{p} \leq n$ [Stechkin B. S. — Notas matemáticas, 1967, 19, No 1, p. 155—160, en ruso].

En adelante $d_G(a)$ denota siempre el grado del vértice a en el grafo G ; $\Delta(G)$, el grado máximo en G ; $t(G)$, el número máximo de aristas independientes en G ; $\chi'(G)$, el número cromático de arista; G_n , el grafo de n vértices; $G(S)$, un grafo en el conjunto de vértices S . Si $S \subset S_n$, la notación $G_n(S)$ significa un subgrafo propio del grafo $G_n \subset C^2(S_n)$ inducido por los vértices de S , es decir, $G_n(S) = G_n \cap C^2(S)$.

6.7. Teorema de Wizing [Wizing V. G. — Análisis discreto, 1965, No 3, p. 25—30, en ruso]: si $\chi'(G)$ es el número cromático de arista buscado del grafo G , entonces para todo G tenemos $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

En una serie de casos se logra precisar este teorema. Es fácil mostrar que $|G| > \Delta(G) t(G) \Rightarrow \chi'(G) = \Delta(G) + 1$, en particular, $|G| > \Delta(G) t(G) \Rightarrow \Delta(G) < 2t(G) + 1$. El caso alternativo de $\Delta(G)$ «grandes» está estudiado por completo: $\Delta(G) \geq 2t(G) + 1 \Rightarrow \chi'(G) = \Delta(G)$ [A. V. Kóstochka].

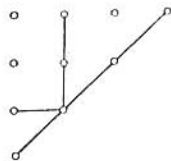


Fig. 6.1'.

6.8. [nd/2]. La estimación se deduce de la identidad de Euler $\sum_{i=1}^n d_G(a_i) = 2|G|$, y su realización, del teorema de Erdős—Gallai: un sistema de n números no negativos d_1, \dots, d_n , $\sum_{i=1}^n d_i = 2m$, $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ se realiza

por los grados de cierto grafo de n vértices cuando y sólo cuando para cualquier r natural, $1 \leq r \leq n-1$, se verifica la desigualdad

$$\sum_{i=1}^r d_i \leq r(r-1) + \sum_{i=r+1}^n \min\{r, d_i\}$$

[Erdős P., Gallai T. — Mat. Lapok, 1960, 11, p. 264—274].

6.9. Designemos el máximo que se busca por $E(n, t)$, entonces

$$E(n, t) = \begin{cases} \binom{n}{2}, & n \leq 2t+1, \\ \max \left\{ \binom{2t+1}{2}, \binom{n}{2} - \binom{n-t}{2} \right\}, & n \geq 2t+1 \end{cases}$$

[Erdős P., Gallai T. — Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1959, 10, p. 337—357].

6.10. Designemos el máximo que se busca por $f(d, t)$, entonces

$$f(d, t) = \begin{cases} dt, & d \geq 2t+1 \\ dt + \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{t}{\lfloor (d+1)/2 \rfloor} \right\rfloor, & d \leq 2t. \end{cases}$$

Según la definición de $\chi'(G)$, $\forall G \mid G \mid \leq \chi'(G) t(G)$; esto quiere decir que del teorema de Wizing (véase la resolución del problema 6.7), tenemos $\forall G \mid G \mid \leq \chi'(G) t(G) \leq t(G) (\Delta(G) + 1)$, lo que lleva consigo la estimación superior general: $f(d, t) \leq t(d+1)$.

Si $d \geq 2t+1$, entonces, conforme al resultado de Kóstochka (véase la solución del problema 6.7), tenemos $\mid G \mid \leq \chi'(G) t(G) = t(G) \Delta(G)$, lo que lleva consigo la estimación: $d \geq 2t+1 \Rightarrow f(d, t) \leq dt$; esta estimación se realiza por el grafo completo bipartido $K_{t,d}$.

Si $d \leq 2t$, $d \equiv 0 \pmod{2}$, $d \mid 2t$, entonces el valor requerido coincide con la estimación superior general, la que se realiza por el sistema de $2t/d$ grafos completos $K_{d/2}$.

El caso de $d \leq 2t$, $d \equiv 1 \pmod{2}$ se realiza por una construcción propuesta por Sauer: el grafo se compone de $a = \lfloor 2t/(d+1) \rfloor$ componentes conexos S_1, \dots, S_a , donde cada componente S_i , $1 \leq i \leq a$ es tal que todos los puntos en S_i , salvo uno, son de grado d , y un punto es de grado $d-1$; todos los S_i , $1 \leq i \leq a-1$, tienen $d+r$ vértices, y S_a contiene $d+2+2t-(d+1) \times \lfloor 2t/(d+1) \rfloor$ vértices [Sauer N. — In: Comb. Math. and its Appl./Ed. D.J.A. Welsh, A. P. London, 1971, p. 253—257].

La construcción para el caso alternativo de $d \leq 2t$, $d \equiv 0 \pmod{2}$, $d \nmid 2t$, se construye de un modo recurrente: como un sistema de $\lfloor 2t/d \rfloor$ grafos completos K_{d+1} y una construcción más que realiza el valor de $f(d, t - \lfloor 2t/d \rfloor \times d/2)$.

6.11. Denotemos el máximo que se busca por $g(n, d, t)$. Si $d \geq t-1$, entonces tendremos las condiciones del problema 6.9: $g(n, d, t) = g(n, n-1, t) = E(n, t)$. Si $n \leq 2t+1$, tendremos las condiciones del problema 6.8: $g(n, d, t) = \lfloor nd/2 \rfloor$.

Sea $n \geq 2t+1$. Entonces, si $d \leq 2t$, $n \leq 2t + \lfloor t/((d+1)/2) \rfloor$, tendremos

$$g(n, d, t) = \begin{cases} \min \left\{ \left\lfloor \frac{nd}{2} \right\rfloor, dt + \left\lfloor \frac{2(n-t)}{d+3} \right\rfloor \frac{d-1}{2} \right\}, & d \equiv 1 \pmod{2} \\ \lfloor nd/2 \rfloor, & d \equiv 0 \pmod{2}; \end{cases}$$

si $d \leq 2t$, $n \geq 2t + \lfloor t/((d+1)/2) \rfloor$, entonces

$$g(n, d, t) = dt + \left\lfloor \frac{t}{\lfloor (d+1)/2 \rfloor} \right\rfloor \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor;$$

si $d \geq 2t + 1$, entonces

$$g(n, d, t) = \begin{cases} \text{máx} \left\{ \binom{2t+1}{2}, \left\lfloor \frac{t(n+d-t)}{2} \right\rfloor \right\}, & n \leq t+d, \\ dt, & n \geq t+d \end{cases}$$

[Chvatal V., Hanson D. — J. Comb. Th. (B), 1976, 20, p. 128—138].

Es obvio que si $f(d, t)$ es la función del problema 6.10, entonces $f(d, t) = \text{máx}_n g(n, d, t)$.

El estudio de los sistemas de aristas independientes en los grafos está vinculado en muchos aspectos con el teorema de Berge:

$$t(G(S_n)) = \min_{S \subset S_n} \frac{1}{2} (n + |S| - k_0(G(S_n \setminus S))),$$

donde $k_0(G(S_n \setminus S))$ es el número de componentes conexos impares (según el número de vértices) del grafo $G(S_n \setminus S)$ [Berge C. — R. Acad. Sci. Paris, 1958, No 247, p. 258—259].

6.12. Denotemos el máximo buscado por $E(n, t, k)$. Con motivo de $E(n, t, k)$ se conoce que existe tal constante C_k (dependiente solamente de k) que, para $n > C_k$, $E(n, t, k) = \binom{n}{k} - \binom{n-t}{k}$; existe también la hipótesis general de Erdős

$$E(n, t, k) = \text{máx} \left\{ \binom{kt+k-1}{k}, \binom{n}{k} - \binom{n-t}{k} \right\}, \quad n \geq kt+k-1.$$

[Erdős P. — Ann Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math., 1965, 8, p. 93—96].

6.13. Si $\mu(n; H_k)$ es el número máximo de aristas en el grafo $G_n \subset C^2(S_n)$ tal que $\forall S_k \subset S_n (C^2(S_k) \cap G_n) \subseteq H_k$, entonces es válida la igualdad $m(n; H_k) + \mu(n; \bar{H}_k) = \binom{n}{2}$, donde, como siempre, $\bar{H}_k = K_k - H_k$. Por eso en adelante vamos a referirnos en los casos adecuados al μ -planteamiento de este problema, empleando la designación estándar $F_k = \bar{H}_k$.

1) Designamos el máximo buscado $m(n; H_k)$ por $T(n, k, 2)$, entonces

$$T(n, k, 2) = \sum_{i=0}^{k-2} \binom{\left\lfloor \frac{n+i}{k-1} \right\rfloor}{2}.$$

La construcción extremal es única y tiene forma de un grafo compuesto de $(k-1)$ grafos completos y a ser posible iguales:

$$\sum_{i=0}^{k-2} C^2\left(S_{\left\lfloor \frac{n+i}{k-1} \right\rfloor}\right), \quad S_{\left\lfloor \frac{n+i}{k-1} \right\rfloor} \cap S_{\left\lfloor \frac{n+j}{k-1} \right\rfloor} = \emptyset, \quad \sum_{i=0}^{k-2} S_{\left\lfloor \frac{n+i}{k-1} \right\rfloor} \equiv S_n.$$

En particular, si $n \leq 2(k-1)$, entonces $T(n, k, 2) = n - k + 1$; en este caso como construcción extremal interviene el sistema de $n - k + 1$ aristas independientes.

La afirmación concerniente a la unicidad de la construcción extremal y al número de sus aristas lleva el nombre de *teorema de Turán*; véase la literatura referente al problema 6.1, y también Turán P. — Colloq. Math., 1954, No 3, p. 13—30.

2) Denotemos el mínimo buscado por $m(n, k, q, 2)$. Para este problema la construcción extremal también tiene forma de un bloque: r vértices aislados y t grafos completos, a ser posible iguales, sobre los demás vértices, con la particularidad de que los parámetros r y t se eligen de un modo tal que el número

total de aristas se minimiza:

$$m(n, k, q, 2) = \min_{k-q \geq r \geq r_1} \sum_{i=0}^{r-1} \binom{\lfloor \frac{n-r+i}{2} \rfloor}{r-i}.$$

$$r_1 = \left\lfloor \frac{k-r-1}{q-1} \right\rfloor, \quad r_2 = \begin{cases} (k-1)q - n(q-1), & n \leq (k-1)q/(q-1), \\ (k-1) - (q-1)t_0, & n \geq (k-1)q/(q-1). \end{cases}$$

En particular, si n es suficientemente grande, entonces

$$m(n, k, q, 2) = \sum_{i=0}^{\lfloor (k-1)/(q-1) \rfloor - 1} \binom{\lfloor \frac{n-k+1+i}{(k-1)/(q-1)} \rfloor}{2} + q - 1.$$

Está completamente resuelto el caso en que $q=3$:

$$m(n, k, 3, 2) = \begin{cases} 3(n-k+1), & n \leq 3(k-1)/2, \\ \sum_{i=0}^{(h-3)/2} \binom{\lfloor 2 \frac{n+i}{k-1} \rfloor}{2}, & n \geq 3(k-1)/2, k \equiv 1 \pmod{2}, \\ \sum_{i=0}^{(h-4)/2} \binom{\lfloor 2 \frac{n-1+i}{k-2} \rfloor}{2}, & n \geq 3(k-1)/2, k \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Además, se sabe que $k \leq 2(q-1) \Rightarrow m(n, k, q, 2) = \binom{n-k+q}{2}$.

Demostremos la última fórmula. Realicemos la inducción según q . Cuando $q \geq 2$, esto es evidente. Supongamos que $q \geq 3$. Analicemos un grafo arbitrario G_n que posee la propiedad requerida y destaquemos en él un conjunto máximo S_r de r vértices. Está claro que $r \leq p - q + 1$. Además, siendo G_n suficiente y S_r independiente llegamos inmediatamente a que el subgrafo $G_n(S_n \setminus S_r)$ posee la misma propiedad con los parámetros $n - r, p - r, q - 1$; esto significa que de acuerdo con la suposición de inducción,

$$|G_n(S_n \setminus S_r)| \geq \binom{n-r-(p-r)+(q-1)}{2} = \binom{n-p+q-1}{2}.$$

Por cuanto el conjunto S_r es máximo, cada vértice de $S_n \setminus S_r$ es adyacente por lo menos a un vértice de S_r . Por consiguiente,

$$\begin{aligned} |G_r| &\geq (n-r) + |G_n(S_n \setminus S_r)| \geq n-r + \binom{n-p+q-1}{2} \geq \\ &\geq n-p+q-1 + \binom{n-p+q-1}{2} = \binom{n-p+q}{2}. \end{aligned}$$

De construcción que realiza esta estimación puede servir un grafo completo sobre el conjunto de $(n-p+q)$ vértices, completado con $(p-q)$ vértices aislados [Kopilov G. N. — Notas matemáticas, 1979, 26, No 4, p. 593-602; Stechkin B. S. Frankl P. — Notas matemáticas, 1981, 29, No 1, p. 83-94, en ruso].

3) Pongamos $m(n; H_k) = m(n, k)$, entonces

$$m(n, k) = \begin{cases} \binom{n}{2} - \binom{k-1}{2}, & k \equiv 0 \pmod{2}, \\ \binom{n}{2} - \max \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \binom{k-1}{2} \right\}, & k \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

La construcción extremal representa o bien $K_n - \mathcal{F}_n$, o bien $K_n - K_{h-1}$ (en función del valor numérico de $m(n, k)$).

Si G_n posee la propiedad requerida, el grafo complementario \bar{G}_n poseerá, evidentemente, la propiedad de que todo su subgrafo propio de k vértices tiene un vértice aislado.

Sea $k \equiv 0 \pmod{2}$. Elijamos en \bar{G}_n un sistema máximo F de las aristas independientes; está claro que $|F| \leq k/2$, puesto que de lo contrario, al tomar $k/2$ aristas independientes, se obtendría un subgrafo propio de k vértices sin vértices aislados. Por ser F máximo, todas las demás aristas de \bar{G}_n son adyacentes a las aristas de F , por lo que todo subgrafo propio de k vértices que comprende los vértices del grafo F tiene no más de $(k-1)$ vértices aislados y, por tanto, también \bar{G}_n tiene no más de $(k-1)$ vértices no aislados, es decir, $|\bar{G}_n| \leq \binom{k-1}{2}$.

Sea $k \equiv 1 \pmod{2}$. Si $t(\bar{G}_n) \leq (k+1)/2$, los razonamientos son los mismos que para $k \equiv 0 \pmod{2}$. Si en \bar{G}_n se tienen $(k+1)/2$ aristas independientes, entonces toda arista que se corta con ellas llevaría a una contradicción, por consiguiente, en \bar{G}_n todas las aristas son independientes, es decir, $|\bar{G}_n| \leq \lfloor n/2 \rfloor$ [D. Katona].

$$4) m(n; H_h) = m(n, k);$$

$$m(n, k) = \begin{cases} \binom{n}{2} - \binom{k-1}{2} + (k-1), & k \equiv 0 \pmod{2}, \\ \binom{n}{2} - \max \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \binom{k-1}{2} - (k-1) \right\}, & k \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

La construcción extremal tiene la forma o bien de $K_n - \mathcal{F}_n$, o bien de $K_n - (K_{h-1} - C_{h-1})$, donde C_{h-1} es un ciclo en $k-1$ vértices (en función del valor de $m(n, k)$).

Si $m_1(n, k)$ es una función extremal de 6.13.3), entonces $m_1(n, k) \leq m(n, k)$ y, por consiguiente

$$m(n, k) = \binom{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad k \equiv 1 \pmod{2}, \quad \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq \binom{k-1}{2}.$$

Supongamos primero que $k \equiv 0 \pmod{2}$; la demostración la realizamos por inducción respecto de $n \geq k$, apoyándonos en el siguiente lema.

Lema. Si $n \geq k \geq 2$ y $k \equiv 0 \pmod{2}$, entonces en todo grafo de n vértices sin vértices aislados existe un subgrafo propio de k vértices sin vértices aislados.

La demostración de este lema se realiza por inducción respecto de $k \leq n$. Si $n = k$, será evidente que $m(n, k) = 2(k-1)$. Admitamos que lo requerido es cierto incluso hasta $n-1$; mostremos que es cierto también para n . Supongamos lo contrario: $m(n, k) = \binom{n}{k} - \binom{k-1}{2} + (k-1) - \lambda$ ($\lambda \geq 1$).

Examinemos en nuestro grafo un vértice a de grado $n-1$. Si k es par, tal vértice siempre existe en toda construcción suficiente; en efecto, suponiendo lo contrario, vemos que el grafo complementario \bar{G}_n no tiene vértices aislados y de acuerdo con el lema, contiene un subgrafo de k vértices sin vértices aislados. Esto quiere decir que el grafo inicial ni siquiera puede contener una estrella en estos k vértices, lo que contradice la condición de suficiencia de la construcción. Así pues, al eliminar el vértice de grado $n-1$, obtenemos en los $n-1$ vértices restantes una construcción suficiente que contiene $\binom{n}{2} - \binom{k-1}{2} + (k-1) - \lambda - (n-1) < \binom{n-1}{2} + \binom{k-1}{2} + (k-1) = m(n-1, k)$ aristas, lo que contradice nuestra suposición de inducción. Está claro que esta demostración conduce también a la solución de 6.13.3) para $k \equiv 0 \pmod{2}$.

Sea ahora $k \equiv 1 \pmod{2}$; siguiendo los razonamientos de 6.13.3), examinemos en \bar{G}_n un conjunto máximo F de las aristas independientes. Si $|F| \geq \geq (k+1)/2$, entonces no puede haber una arista que no se corte con las aristas de F , esto significa que en tal caso \bar{G}_n está compuesto de aristas que no se intersecan, es decir, $|\bar{G}_n| \leq [n/2]$. Si $|F| \leq (k-1)/2$, cada arista de \bar{G}_n se interseca con las aristas de F , razón por la cual el número de vértices aislados en \bar{G}_n no es superior a $k-1$, más, por cuanto en todo subgrafo propio \bar{G}_n debe haber, además de un vértice aislado, un ciclo vacío en $k-1$ vértices, entonces $|\bar{G}_n| \leq \leq \binom{k-1}{2} - (k-1)$ [A. V. Kóstochka, B. S. Stéckin].

5) Demostremos una afirmación un tanto más fuerte.

Teorema. Sea H_k un grafo arbitrario fijo de k vértices que posee un vértice de grado $k-1$. Entonces, el grafo G_n poseerá la propiedad de que $\forall S_k \subset S_n$ $G_n(S_k) = = (C^2(S_k) \cap G_n) \supset H_k$ cuando y sólo cuando $G_n \supset (K_n - \bar{H}_k)$ para $\bar{H}_k \not\supset \mathcal{F}_k$ y $G_n \supset (K_n - H_k) \vee G_n \supset (K_n - \mathcal{F}_n) = \bar{\mathcal{F}}_n$ para $H_k \supset \mathcal{F}_k$.

Demostración. La suficiencia de esta afirmación es evidente. Demostremos su necesidad. Supongamos que G_n posee la citada propiedad. Vamos a estudiar el grafo \bar{G}_n y destaquemos en él un sistema máximo $\mathcal{F}_{2t} \subset \bar{G}_n$ de $t = t(\bar{G}_n)$ aristas independientes.

La desigualdad $t > t(\bar{H}_k)$ puede cumplirse sólo cuando $\bar{H}_k \supset \mathcal{F}_k$, mas en este caso tendremos necesariamente $\bar{G}_n = \mathcal{F}_{2t} \subset \mathcal{F}_n$, puesto que al agregar cualquier arista e al grafo \mathcal{F}_{2t} (e debe ser adyacente a una de las aristas del grafo \mathcal{F}_{2t} , por ser este último máximo), obtendremos un grafo $(\mathcal{F}_{2t} + \{e\})$, en el cual siempre habrá k vértices S_k , sobre los cuales el subgrafo propio $(\mathcal{F}_{2t} + \{e\})(S_k)$ no tendrá vértice aislado prescrito al grafo \bar{H}_k por la condición $H_k \supset K_{1,k-1}$.

Sea ahora $t \leq t(\bar{H}_k)$. En este caso el número de vértices no aislados del grafo \bar{G}_n no sobrepasa de $k-1$. En efecto, al elegir en el caso contrario, a título de $S_k \subset S_n$, cualquier conjunto de k vértices no aislados del grafo G_n que incluya $2t$ vértices del grafo \mathcal{F}_{2t} , en virtud de que este último es máximo llegamos a que el subgrafo propio $\bar{G}_n(S_k)$ sobre estos k vértices no tiene vértice aislado, lo que contradice la hipótesis del teorema. Está claro que el grafo \bar{G}_n ha de ser un subgrafo del grafo \bar{H}_k sobre los vértices no aislados en una magnitud no superior a $k-1$ de dichos vértices, lo que se trataba de demostrar.

Como corolario, obtenemos la solución de nuestro problema:

$$m(n; H_k) = \begin{cases} \binom{n}{2} - |\bar{H}_k|, & \bar{H}_k \not\supset \mathcal{F}_k \\ \binom{n}{2} - \text{máx} \left\{ \left[\frac{n}{2} \right], |\bar{H}_k| \right\}, & H_k \supset \mathcal{F}_k \end{cases}$$

que, evidentemente, lleva consigo también los resultados de los problemas (6.13.3—6.13.5).

6) $m(n; C_k) = m(n, k) =]n(n-k+2)/2[$. Con el objeto de describir las construcciones extremales, numeremos el conjunto de vértices en forma cíclica desde 1 hasta n , considerando que $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$, ... Introduzcamos una distancia $\rho(a_i, a_j) = \min\{|i-j|, n-|i-j|\}$, donde la diferencia se entiende también cíclicamente, es decir, $\rho(a_1, a_2) = 1$, $\rho(a_1, a_3) = 2$, ..., $\rho(a_1, a_{n-1}) = 2$, ..., $\rho(a_1, a_n) = 1$, $n-k \equiv 0 \pmod{2}$. Consideramos que los vértices a_i, a_j forman una arista en el grafo extremal cuando y sólo cuando $\rho(a_i, a_j) \leq (n-k+2)/2$.

Demostremos la suficiencia de la construcción regular para $n-k \equiv 0 \pmod{2}$. Sea $S_k = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$, donde $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.

Caso 1. Existen los vértices $a_{ij}, a_{i_{j+1}}, a_{il}, a_{i_{l+1}} \in S_h, 2 \leq j+1 \leq l \leq n$ tales que $\rho(a_{nj}, a_{i_{j+1}}) > (n-k+2)/2 < \rho(a_{i_l}, a_{i_{l+1}})$, pero en este caso el número de vértices que no integran S_h y están situados entre a_{ij} y $a_{i_{j+1}}$, no es menor que $(n-k+2)/2$ (lo mismo es lícito para los vértices dispuestos entre a_{i_l} y $a_{i_{l+1}}$) y por consiguiente, el número total de vértices que no integran S_h no es inferior a $n-k+2$, lo que contradice el volumen de S_h .

Caso 2. $\forall a_{ij} \in S_h \rho(a_{ij}, a_{i_{j+1}}) \leq (n-k+2)/2$, pero en tal caso, obviamente, el conjunto de aristas $(a_{i_1}, a_{i_2}), (a_{i_2}, a_{i_3}) \dots (a_{i_h}, a_{i_1})$ forma un ciclo sobre los vértices de S_h .

Caso 3. Sea $\rho(a_{i_1}, a_{i_2}) > (n-k+2)/2$ y $\rho(a_{ij}, a_{i_{j+2}}) > (n-k+2)/2$, pero, en este caso, el número de vértices que no integran S_h y que están situados entre a_{i_1}, a_{i_2} y $a_{ij}, a_{i_{j+2}}$, no es inferior a $(n-k+2)/2 + (n-k+2)/2 - 1 = n-k+1$, lo que contradice el volumen de S_h . Sea $\rho(a_{i_1}, a_{i_2}) > (n-k+2)/2$, entonces existe un ciclo en S_h , a saber, para k par tenemos $(a_{i_1}, a_{i_h})(a_{i_h}, a_{i_{h-2}}) \dots (a_{i_4}, a_{i_2})(a_{i_2}, a_{i_1})(a_{i_1}, a_{i_2}) \dots (a_{i_{h-1}}, a_{i_1})$ y para k impar tenemos $(a_{i_1}, a_{i_h})(a_{i_h}, a_{i_{h-2}}) \dots (a_{i_4}, a_{i_2})(a_{i_2}, a_{i_1})(a_{i_1}, a_{i_2}) \dots (a_{i_{h-2}}, a_{i_1})$.

Queda demostrada, pues, la suficiencia de la construcción regular; demos-tremos ahora que la construcción es extremal. Todo vértice de un subgrafo propio de k vértices yace en el ciclo. Esto es indicio de que su grado en el grafo propio no es menor de dos, o sea su grado en el grafo inicial no es menor de $n-k+2$, por consiguiente

$$|G| \geq |n(n-k+2)/2|$$

[G. Katona, A. V. Kóstochka, B. S. Stéckin].

7), 8) Designemos la construcción extremal del problema 6.13.6) por $C(n, k)$; está claro que $|C(n, k+1)| = |n(n-k+1)/2|$, por otra parte, el grafo $C(n, k+1)$ posee, evidentemente, la propiedad de que todo conjunto k de sus vértices es un conjunto de k vértices de cierto ciclo en el vértice $k+1$. Por consiguiente, todo subgrafo propio de k vértices del grafo $C(n, k+1)$ es conexo y contiene el camino P_k y \mathcal{F}_k^* . Además, cada uno de los grafos mencionados no contiene vértices aislados y, por lo tanto, para $n > k, m(n; P_k) = m(n; \mathcal{F}_k^*) = |n(n-k+1)/2|$.

9), 10) Si $F_k = C_k$ o $F_k = P_k$, entonces, cuando $k \geq 4$, en la construcción suficiente no hay vértices de grado ≥ 3 , lo que quiere decir que $\mu(n; F_k) \leq n$. Por otra parte, la construcción C_n es suficiente, razón por la cual

$$m(n; \overline{C}_k) = n(n-3)/2, \quad k \geq 4, \quad m(n; \overline{P}_k) = \begin{cases} \binom{k-1}{2}, & n=k, \\ n(n-3)/2, & n \geq k+1, \end{cases} \quad k \geq 4.$$

11) Está claro que

$$k \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow m(n; \overline{\mathcal{F}}_k^*) = \binom{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad k \geq 4.$$

Si, en cambio, $k \equiv 1 \pmod{2}$, entonces es fácil ver que

$$m(n; \overline{\mathcal{F}}_k^*) = \binom{n}{2} - 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \binom{n-3}{2} \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor,$$

$$m(n; \mathcal{F}_k^*) = \binom{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad k \geq 7.$$

12), 13) Está claro que si $F_h \not\supset K_{1,h-1}$, $F_h \not\supset \mathcal{F}_h$, entonces $|F_h| \leq \mu(n; F_h) \leq g(n, \Delta(F_h), t(F_h))$, donde g viene del problema 6.11; de los resultados obtenidos en los problemas 6.10 y 6.11 se comprueba con facilidad que en los casos de

$$F_h = K_{1,h-1} (k \geq 3l+1 \geq 7) \text{ y } F_h = \frac{2t}{d} K_{d,1} (2 \leq d \leq 2t, d \equiv 0 \pmod{2}), \\ d|2t, k=2t+2t/d \text{ estas estimaciones bilaterales coinciden y dan respectivamente } m(n; C^2(S_l) + C^2(S_h \setminus S_l)) = \binom{n}{2} - l(k-l) \text{ y } m\left(n; \underbrace{k_{d+1}, \dots, d+1}_{2t/d}\right) = \\ = \binom{n}{2} - t(d+1).$$

En general, si F_h es un grafo de k vértices, extremal respecto a las propiedades del problema 6.10, y tal que $F_h \not\supset K_{1,k-1}$, $F_h \not\supset \mathcal{F}_h$, $|F_h| = f(d, t)$, $d = \Delta(F_h)$, $t = t(F_h)$, donde la función f viene del problema 6.10, entonces $m(n; K_h - F_h) = \binom{n}{2} - f(\Delta(F_h), t(F_h))$.

14) Si $t = 1$, véase el problema (6.13.1). Si $2t = k$, véase el problema 6.13.8). Para otros t el problema no está resuelto por ahora, no obstante, pueden indicarse construcciones suficientes que, quizás, resultarán extremales.

Una de tales construcciones es la de bloque, compuesta, a ser posible, de $k - 2t + 1$ grafos completos iguales sobre n vértices, de suerte que

$$m(n; H_k) \leq \sum_{i=0}^{k-2t} \binom{n+i}{k-2t+1}.$$

El número de bloques $(k - 2t + 1)$ de esta construcción especificado aquí da el siguiente problema extremal de números enteros: se maximizará p a condición de que $k \geq 2t \geq 0$,

$$\sum_{i=1}^p k_i = k, k \geq k_i \geq 0, \sum_{i=1}^p \left\lfloor \frac{k_i}{2} \right\rfloor \geq t.$$

Está claro que si un grafo posee la propiedad requerida con los parámetros (k, t) , la poseerá también con los parámetros $(k-1, t-1)$, como también con los parámetros $(k-t+1, 1)$, lo que, de acuerdo con 6.13.1), lleva consigo la estimación inferior:

$$m(n; H_k) \geq \sum_{i=0}^{k-t-1} \binom{n+i}{k-t}.$$

Para n pequeños la estimación superior citada no es exacta, las correspondientes construcciones extremales también tienen forma de un bloque con la única diferencia de que cada bloque en este caso representa o bien una arista independiente, o bien una construcción extremal para los problemas 6.13.6), 7), 8). Así por ejemplo, $n \leq 2(k-t) \Rightarrow m(n; H_k) = n - k + t$. Este valor se realiza por un sistema de $n - k + t$ aristas independientes. Como ejemplo de otra construcción de este tipo puede servir el sistema de $k - 2t$ aristas independientes y el grafo $C(n - 2k + 4t, t)$ del problema 6.13.11) sobre los demás $n - 2k + 4t$ vértices.

6.14. $m(n, k) = (k-1)n - \binom{k}{2} + \left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor + 1$. La construcción extremal

tiene por expresión $C^2(S_n) - C^2(S_{n-k+1}) + \mathcal{F}^*(S_{n-k+1})$ [Erdős P.,

Moser L., — J. Austral. Math. Soc., 1970, 11, p. 42—47]; véase la aplicación de este resultado en: [Sós V.—In: Comb. Struct. and their appl. Gordon and Breach, 1970, p. 407—410].

6.15. $3n-6$. El grafo extremal aquí es una triangulación. El carácter extremal de esta construcción se deduce inmediatamente de la correlación de Euler: $n - m + \Gamma + 2$, donde Γ es el número de caras del grafo plano y m , el número de sus aristas.

6.18. 4) Véase el problema 6.8. 5) Véase el problema 6.9. 6) Tiene lugar la estimación general $f(n; P_k) = \frac{k-2}{2}n$, la cual es exacta, si k divide n . Véase la resolución completa: [Kopylov G. N.—Informes de la Academia de ciencias de la URSS, 1977, 234, N° 1, p. 19—21, en ruso]. 8) El resultado de Ore afirma que $f(n; C_n) = \binom{n-1}{2} + 1$. La construcción extremal representa $C^2(S_{n-1})$ y una arista más que es incidente con relación al vértice $a = S_n \setminus S_{n-1}$. 9)—14) Pongamos

$$m(n; l) = \max_{G_n^2 \not\supset C_l} |G_n^2|, \quad m(n; l_1, \dots, l_t) = \max_{G_n^2 \not\supset C_{l_i}} |G_n^2|, \\ i=1, \dots, t$$

Está claro que $m(n; \{\emptyset\}) = \binom{n}{2}$, $m(n; 3, 4, \dots, n) = n - 1$, $m(n; n) = \binom{n-1}{2} + 1$ (véase 6.18,8). Se sabe que

$$m(n; l) = \binom{l-1}{2} + \binom{n-l+2}{2}, \quad l \leq n \leq 2l-3;$$

$$m(n; 2l+1) = \begin{cases} \binom{n}{2}, & n \leq 2l. \\ \binom{2l}{2} + \binom{n-2l+1}{2}, & 2l \leq n \leq 4l-1; \\ \lfloor n^2/4 \rfloor, & n \geq 4l-1. \end{cases}$$

$$m(n; 4) = \frac{n^2}{2} (1 + 0(1));$$

$$m(n; l, l+1, \dots, n) = n(l-1)/2 - r(r-1)/2,$$

$$n = q(l-2) + r, \quad 0 < r \leq l-2; \quad m(n; 4, 6, 8, \dots) = n-1 + \lfloor (n-1)/2 \rfloor,$$

de construcción puede servir el grafo $C^1(a) C^1(S_n \setminus a) + \mathcal{F}(S_n \setminus a)$;

$$m(n; 3, 4, \dots, 2k) > C_{kn}^{1+1/(2k-1)}.$$

[Woodall D. R.—Proc. London Math. (3), 1972, 24, p. 739—755; Erdős P.—In: Terie Combinatorie. Roma: Academia Nazionale, 1976, p. 3—17; Kopylov G.N.—Informes de la A.C. de la URSS, 1977, 234, N° 1, p. 19—21, en ruso].

6.19. El m extremal se determina de la desigualdad $n \leq \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}$. Es suficiente estudiar este problema en un hipergrafo conjugado y cerciorarse de que en tal forma el problema es equivalente al problema 6.2.

6.20. La suma de k coeficientes binomiales máximos. La construcción extremal es $\sum_{i=1}^k C^{l_i}(S_n)$, donde $\binom{n}{l_i}$ se realiza por los coeficientes binomiales máximos.

Supongamos en el problema 6.62 que G es una cadena máxima y \mathcal{S} , el conjunto de todas las cadenas máximas. Entonces, si F tiene como máximo una cadena de k términos, concluimos que $|F \cap G| \leq k$, por consiguiente, al tomar en consideración que $|\mathcal{S}| = n!$, $\text{deg}_{\mathcal{S}}(S) = |S|!(n - |S|)!$, obtenemos la desi-

gualdad

$$\sum_{i=0}^n f_i \binom{n}{i}^{-1} \leq k, \text{ donde } f_i = |F \cap C^i(S_n)|.$$

6.21. Sea $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^h \mathcal{A}_i$. Si \mathcal{A} contiene una cadena de longitud $k+1$, entonces uno de \mathcal{A}_i contiene una cadena de longitud 2, es decir, \mathcal{A}_i no es anticadena. Del problema 6.20 se desprende que $|\mathcal{A}|$ no es superior a la suma de k coeficientes binomiales máximos; de que $|\mathcal{A}| = \sum_{i=1}^h |\mathcal{A}_i|$ se deduce (puesto que \mathcal{A}_i son disjuntos) que de construcción extremal pueden servir $C^{l_i}(S_n)$, donde $\binom{n}{l_i}$ realizan k coeficientes binomiales máximos.

6.22. Si F contuviera la cadena $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_{h+1}$, entonces $A_1 \supset A_{h+1}$, $|A_1 - A_{h+1}| \geq h$, es decir, se obtendría una contradicción con la hipótesis del problema. Esto significa que según 6.20, $|F|$ no es superior a la suma de h coeficientes binomiales máximos; la construcción extremal es la misma que en los problemas 6.20 y 6.21 (Erdős P. — Bull. Amer. Math. Soc., 1945, 51, p. 898–902).

6.23. 2^{n-1} ; las construcciones extremales son

$$F = \sum_{i \equiv 0 \pmod{2}}^n C^i(S_n), \quad F = \sum_{i \equiv 1 \pmod{2}}^n C^i(S_n).$$

En el problema 6.02, c) basta poner $G = \{S\} + \{S+a\}$, donde $S \subset S_n$, $a \notin S$, $\mathcal{G} = \{G\}_{a \in S_n \setminus S}$, entonces, evidentemente, $|F \cap G| \leq 1$, y es fácil ver que $|\mathcal{G}| = n \cdot 2^{n-1}$, $\deg_{\mathcal{G}}(S) = |S| + (n - |S|) = n$, por consiguiente

$$|F|/2^{n-1} = \sum_{S \in \mathcal{F}} n/2^{n-1} \cdot n \leq 1.$$

6.24. $\sum_{i \equiv [n/2] \pmod{h}} \binom{n}{i}$; a título de construcción extremal puede tomarse

$$F = \sum_{i \equiv [n/2] \pmod{h}} C^i(S_n) \text{ [Katona G. — Nieuw Archief voor Wiskunde (3), 1972, N°20, p. 54-67].}$$

6.27. a) véase el problema 6.3.

$$b) \sum_{i \equiv (n+2)/2}^n \binom{n}{i}, \quad n+r \equiv 0 \pmod{2}, \quad \sum_{i \equiv (n+r+1)/2}^n \binom{n}{i} + \binom{n-1}{(n+r-1)/2}, \\ n+r \equiv 1 \pmod{2}.$$

La construcción extremal es

$$F = \sum_{i \equiv (n+r)/2}^n C^i(S_n), \quad n+r \equiv 0 \pmod{2},$$

$$F = \sum_{i \equiv (n+r+1)/2}^n C^i(S_n) + C^{(n+r-1)/2}(S_n - a), \quad n+r \equiv 1 \pmod{2}$$

[Katona G. — Acta Math. Soc. Hungar., 1964, 15, p. 329–337].

c) 2^{n-2} ; la construcción extremal es $F = C^2(S_2) \mathcal{F}(S_n - S_2)$ [Frankl P. — Bull. Austral. Math. Soc., 1976, N° 15, p. 73—79].

6.28. Véase la literatura en el problema 6.27 c).

6.29. $\binom{n}{k}$, $k > n/2$; $\binom{n-1}{k-1}$, $k \leq n/2$. Las construcciones extremales son: $C^k(S_n)$, $k > n/2$; $C^1(a)C^{k-1}(S_n - a)$, $k \leq n/2$.

Sea $k \leq n/2$. Fijemos la numeración cíclica de los elementos a_1, \dots, a_n . Veamos las k -aristas B_1, \dots, B_l , cuyos elementos son sucesivos con tal numeración, es decir, $B_j = \{a_{j_1}, a_{j_1+1}, a_{j_1+2}, \dots, a_{j_1+k-1}\}$, con la particularidad de que se supone que $B_i \cap B_j \neq \emptyset$. Está claro que si $k \leq n/2$, entonces el número de tales k -aristas no es inferior a k .

Sea A_1, \dots, A_m una familia de k -aristas de tal índole que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$; enumeremos los pares (ζ, A_i) , donde ζ es una numeración cíclica, y los vértices A_i son sucesivos en ζ . Para cada A_i existen $k!(n-k)!$ tales ζ , lo que quiere decir que en total hay $mk!(n-k)!$ de tales pares. Por otra parte, para ζ fijo se tienen no más de k conjuntos A_i , por lo cual el número de pares no sobrepasa de $(n-1)!k$. Obtenemos la desigualdad

$$(n-1)!k \geq m k! (n-k)! \Rightarrow m \leq \binom{n-1}{k-1}$$

[Katona G. — J. of Comb. Th. Erdős, 13, N° 2, p. 183—184]. Este resultado lleva el nombre de teorema de Erdős—Ko—Rado; véase 6.3.

Si complementariamente $\bigcap_{i=1}^m A_i = \emptyset$, entonces

$$m = 1 + \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1}.$$

La construcción extremal es

$$F = C(S_h) + \sum_{i=1}^{h-1} C^1(a)C^{i-1}(S_n - S_h - a)C^{h-i}(S_h), a \notin S_h.$$

[Hilton A.J.W., Milner E.C. — Quart. J. Math. Oxford (2), 1967, N° 18, p. 369—384].

6.30. $\binom{n}{k}$, $\frac{tk}{t-1} > n$; $\binom{n-1}{k-1}$, $\frac{tk}{t-1} \leq n$. Las construcciones extremales son $C^k(S_n)$ y $C^1(a)C^{k-1}(S_n - a)$.

Sea $tk/(t-1) \leq n$. Apliquemos el método usado en el problema 6.29. Será suficiente mostrar que, siendo cíclica la numeración de los vértices, el sistema de k -aristas sucesivas B_1, \dots, B_l en el que cualesquiera t tienen intersección no vacía, puede tener no más de k términos, es decir, que $l \leq k$. Estudiamos las $(n-k)$ aristas complementarias de $C_i = S_n - B_i$. Ellas también tienen vértices sucesivos y su unión no coincide con $S_n = \{1, \dots, n\}$. Supongamos que el último vértice de C_1 es igual a n . Definamos la aplicación f del modo siguiente:

$$f(C_i) = \begin{cases} \text{último vértice de } C_i, & \text{si } i \geq 2, \\ \{n, n+1, \dots, t(n-k)\}, & \text{si } i = 1. \end{cases}$$

La desigualdad $t(n-k) \geq n$ se deduce de la condición $tk/(t-1) \leq n$. Está claro que los conjuntos $f(C_i)$ son disjuntos. Es fácil ver que para j fijo ($1 \leq j \leq n-k$) todos los números $r \equiv j \pmod{n-k}$, $1 \leq r \leq t(n-k)$ se encuentran en $\bigcup_{i=1}^l f(C_i)$, entonces $\bigcup_{i=1}^l C_i = \{1, \dots, n\}$, lo que contradice la condición. Por

consiguiente, existen por lo menos $n - k$ números dentro del segmento $[1, 2, \dots, t(n - k)]$ y fuera de la $\bigcup_{i=1}^l f(C_i)$, es decir,

$$\left| \bigcup_{i=1}^l f(C_i) \right| + n - k = t(n - k) - n + 1 + l - 1 + n - k \leq t(n - k),$$

lo que trae consigo el que $l \leq k$ [Frankl P. - J. Comb. Th. (A), 1976, N° 20, p. 1-11].

6.31. Existe $n_0 = n_0(k, l)$ tal que

$$\max |G_n^k| = \binom{n-l}{k-l}.$$

La construcción extremal es $G_n^k = C^l(S_l) C^{k-l}(S_n - S_l)$. Sin embargo, para n pequeños esto no es así: $n = 8, k = 4, l = 2$, entonces el 4-grafo $\{A: |A| = 4; |A \cap \{1, 2, 3, 4\}| = 3\}$ tiene $16 > \binom{6}{2}$ aristas [Erdős P., Chao Ko, Rado R. - Math. Oxford (2), 1961 N° 12, p. 313-318]. El valor exacto de $n_0(k, l)$ fue hallado por Frankl.

6.32. La demostración se realiza por inducción respecto de k .

Existencia. Si $k = 1$, entonces $m = \binom{m}{1}$. Supongamos la existencia hasta $k-1$. Determinemos a_h de las desigualdades $\binom{a_h}{k} \leq m < \binom{a_h+1}{k}$. Si en este caso se realiza la igualdad, queda cumplido lo que se requiere; si no se realiza, el número $m - \binom{a_h}{k}$ tiene la forma canónica

$$m - \binom{a_h}{k} = \binom{a_{h-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_t}{t};$$

resta demostrar que $a_h > a_{h+1}$; en el caso contrario tendríamos la desigualdad

$$m \geq \binom{a_h}{k} + \binom{a_{h-1}}{k-1} \geq \binom{a_h}{k} + \binom{a_k}{k-1} = \binom{a_h+1}{k},$$

que contradice la definición de a_h .

Unicidad. Si $k = 1$, la unicidad es obvia. Supongamos que ella tiene lugar hasta $k-1$, y mostremos que esto es así también para k . Supongamos lo contrario:

$$m = \binom{a_h}{k} + \dots + \binom{a_t}{t} = \binom{a'_k}{k} + \dots + \binom{a'_t}{t'}.$$

Si $a_k = a'_k$, tendríamos dos formas para $m - \binom{a_h}{k}$ y, según la suposición de inducción, obtendríamos una contradicción. En cambio, si $a_h < a'_h$, otra vez llegaríamos a una contradicción:

$$\begin{aligned} m &\leq \binom{a_h}{k} - \binom{a_h-1}{k-1} + \dots + \binom{a_k-k+1}{1} = \\ &= \binom{a_h+1}{k} - 1 < \binom{a_h+1}{k} \leq \binom{a'_h}{k} \leq m. \end{aligned}$$

6.33. Enumeremos el número de pares $(A, B): A \supset B, A \in F, B \in C_{h-1}(F)$. Para cada $A \in F$ hay exactamente k de tales B . Por consiguiente, el número

ro de pares es igual a $|F| \cdot k$. Mas, si fijamos $B \in C_{h-1}(F)$, tenemos no más de $n - k + 1$ conjuntos $A \supset B$. Esto quiere decir que el número de pares no sobrepasa de $|C_{h-1}(F)| (n - k + 1)$. Hemos obtenido, pues, la desigualdad requerida $|C_{h-1}(F)| (n - k + 1) \geq |F| \cdot k$.

6.34. Mostremos por medio de la inducción que tal k -grafo existe sobre un número de vértices no superior a $a_h + 1$. El caso cuando $k = 1$ es trivial. Supongamos que la afirmación es válida para $k - 1$. Elijamos a_h vértices (conjunto A) y todas las posibles k -aristas sobre ellos: $C^k(A)$. Por cuanto $a_{h-1} + 1 \leq a_h$, entonces, según la suposición de inducción, existe un $(k-1)$ -grafo

$$F' \subset C^{k-1}(A) \text{ tal que } C_{h-2}(F') = f_{h-1} \left(m - \binom{a_h}{k} \right). \text{ Sea } a \in A \text{ un vértice nuevo. Agreguemos } a \text{ a todas las aristas de } F', \text{ es decir, supongamos que } F'' = \sum_{c \in F'} C(a+c). \text{ Es fácil ver que } |C_{h-1}(C^k(A) + F'')| = f_{h-1} \left(m - \binom{a_h}{k} \right) + \binom{a_h}{k-1} = f_h(m).$$

El k -grafo buscado F puede definirse en la forma explícita del modo siguiente: fijemos la numeración de los vértices e introduzcamos la ordenación de las aristas: B es inferior a C , si el primer elemento del conjunto $(C - B) \cup (B - C)$ cae en C . Entonces F se define como un k -grafo de las primeras (en este sentido) m k -aristas.

6.35. Si $m_2 = 0$, la afirmación es trivial. Sea $m_2 > 0$, entonces analicemos dos casos.

Caso 1. $f_h(m_1) \leq m_2$. Supongamos que la representación canónica m_2 tiene por expresión

$$m_2 = \binom{a_{h-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_1}{1}.$$

Sea s un número mínimo, para el cual $a_s > s$. Pongamos

$$M = \begin{cases} 0, & a_h = k, \\ \binom{a_{h-1}}{k} + \dots + \binom{a_s}{s+1}, & a_h > k. \end{cases}$$

Entonces, $f_h(M) \leq m_2$, y para $M' > M$ tenemos $f_h(M') > m_2$, es decir $f_h(m_1) \leq m_2 \Rightarrow m_1 \leq M$. Por cuanto $f_h(x)$ es monótona, tenemos $f_h(m_1 + m_2) \leq f_h(M + m_2)$. Es fácil ver que $f_h(M + m_2) = m_2 + f_{h-1}(m_2)$, de donde obtenemos inmediatamente

$$f_h(m_1 + m_2) \leq m_2 + f_{h-1}(m_2).$$

Caso 2. $f_h(m_1) > m_2$. Hagamos uso de la inducción según m_2 . Cuando $m_2 = 0$, la afirmación es, evidentemente, cierta. Sea

$$m_1 = \binom{b_h}{k} + \dots + \binom{b_q}{q} > 0.$$

Veamos tres casos

$$(2a) \quad q \leq t + 1, \quad a_t = t, \text{ entonces } f_h(m_1 + 1) = f_h(m_1) + q - 1, \quad f_{h-1}(m_2 - 1) = f_{h-1}(m_2) - t.$$

Por inducción tenemos:

$$f_h(m_1 + m_2) \leq f_h(m_1 + 1) + f_{h-1}(m_2 - 1) = f_h(m_1) + f_{h-1}(m_2) + q - t - 1 \leq f_h(m_1) + f_{h-1}(m_2).$$

(2b) $q = 1, a_t > t$, entonces $f_h(m_1 + 1) = f_h(m_1), f_{h-1}(m_2 - 1) = f_{h-1}(m_2)$, y lo requerido se obtiene igual que en (2a).

(2c) $q > t + 1$, o bien ($a_t > 1$ y $q > 1$). Introduzcamos el concepto de representación semicanónica. Si $a_t = t$, o bien $t = 1$, entonces todo va como antes, si $a_t > t > 1$, entonces

$$m_2 = \binom{a_{h-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_{t+1}}{t+1} + \binom{a_t-1}{t} + \\ + \binom{a_t-2}{t-1} + \dots + \binom{a_t-t+1}{2} + \binom{a_t-t+1}{1}.$$

Convergamos en escribir brevemente $m_2 = \binom{c_{h-1}}{k-1} + \dots + \binom{c_r}{r}$. Está claro que $t \geq r+1$ y $f_{h-1}(m_2) = \binom{c_{h-1}}{k-2} + \dots + \binom{c_r}{r-1}$.

De $f_h(m_1) > m_2$ se desprende la existencia de tal u mínimo que $b_u > c_{u-1}$. Pongamos

$$M_1 = \binom{b_h}{k} + \dots + \binom{b_u}{u} + \binom{c_{u-1}}{u-1} + \dots + \binom{c_r}{r}, \\ M_2 = \binom{c_{h-1}}{k-1} + \dots + \binom{c_u}{u} + \binom{b_{u-1}}{u-1} + \dots + \binom{b_q}{q}.$$

Es evidente que $M_1 + M_2 = m_1 + m_2$. Mostremos ahora que $f_h(M_1) + f_{h-1}(M_2) = f_h(m_1) + f_{h-1}(m_2)$. Por cuanto $b_u > c_{u-1}$, la expresión para M_1 es o bien canónica, o bien una representación semicanónica de M_1 , por lo que $f_h(M_1)$ puede obtenerse disminuyendo los números inferiores en la representación de M_1 . Si $c_u > b_{u-1}$, lo mismo será válido con relación a M_2 y $f_{h-1}(M_2)$. Por fin, la variante $b_{u-1} \geq c_u \geq c_{u-2}$ contradice la definición de u . La desigualdad $M_2 < m_2$ se obtiene de un modo análogo. Así pues, de las últimas desigualdades y de la suposición de inducción tenemos

$$f_h(m_1 + m_2) = f_h(M_1 + M_2) \leq f_h(M_1) + \\ + f_{h-1}(M_2) = f_h(m_1) + f_{h-1}(m_2).$$

6.36. $f_h(m)$. Demostrémoslo por inducción según el número de vértices n . Si $n = 1$, esto es evidente. Supongamos que lo requerido está demostrado incluso hasta $n-1$ y mostremos que esto es así también para n . Fijemos un vértice a y veamos la siguiente partición de nuestro k -grafo:

$$F' = \{A: a \notin A, A \subseteq F\}, \quad F'' = \{(A-a): a \in A, A \in F\}.$$

Es fácil ver que $C_{h-1}(F) \supset C_{h-1}(F') \cup (\{a\} \cup C_{h-2}(F''))$. Aquí $\{a\} \cup C_{h-2}(F'') = \sum_{e \in C_{h-2}(F'')} C(a+e)$. Por otra parte, $C_{h-1}(F') \cap (\{a\} \cup C_{h-2}(F'')) = \emptyset$. De aquí

$$|C_{h-1}(F)| \geq |C_{h-1}(F')| + |\{a\} \cup C_{h-2}(F'')| = \\ = |C_{h-1}(F')| + |C_{h-2}(F'')|.$$

Pongamos $m_1 = |F'|$, $m_2 = |F''|$, entonces, de acuerdo con la inducción $|C_{h-1}(F')| \geq f_h(m_1)$, $|C_{h-2}(F'')| \geq f_{h-1}(m_2)$, es decir,

$$|C_{h-1}(F)| \geq f_h(m_1) + f_{h-1}(m_2).$$

Análogamente

$$C_{h-1}(F) \supseteq F'' \cup (\{a\} \cup C_{h-2}(F'')), \\ F' \cap (\{a\} \cup C_{h-2}(F'')) = \emptyset,$$

y, por consiguiente,

$$\begin{aligned} |C_{h-1}(F)| &\geq |F^*| + | \{a\} \cup C_{h-2}(F^*) | = \\ &= |F^*| + |C_{h-2}(F^*)| \geq m_2 + f_{h-1}(m_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, de acuerdo con 6.35,

$$\begin{aligned} |C_{h-1}(F)| &\geq \max \{f_h(m_1) + f_{h-1}(m_2), m_2 + \\ &+ f_{h-1}(m_2)\} = \max \{f_h(m_1), m_2\} + f_{h-1}(m_2) \geq f_h(m_1 + m_2), \end{aligned}$$

es decir, $|C_{h-1}(F)| \geq f_h(m_1 + m_2) = f_h(m)$. La construcción extremal se aduce en el problema 6.34. Para la l -sombra $|C_l(F)| = f_{h,l}(m)$, donde $f_{h,l}(m)$ se determina a partir de la representación canónica binomial según la regla

$$f_{h,l}(m) = \binom{a_h}{l} + \dots + \binom{a_l}{l-k+1}$$

es decir, $f_h(m) = f_{h,h-1}(m)$.

6.37. Sea n grande y supongamos que F' es tal k -grafo con m aristas sobre S_n que $|C_{h-1}(F')| = f_h(m_1)$; sea, ahora, F'' tal k -grafo con m_2 aristas sobre S_n que $|C_{h-1}(F'')| = f_h(m_2)$. Si n es grande, elijamos F' y F'' de tal modo que $C_{h-1}(F') \cap C_{h-1}(F'') = \emptyset$, es decir,

$$\begin{aligned} |C_{h-1}(F' \cup F'')| &= |C_{h-1}(F') \cup C_{h-1}(F'')| = \\ &= |C_{h-1}(F')| + |C_{h-1}(F'')| = f_h(m_1) + f_h(m_2). \end{aligned}$$

Del problema 6.36 se sabe que $|C_{h-1}(F' \cup F'')| \geq f_h(m_1 + m_2)$, de suerte que lo requerido queda demostrado.

6.38. $m = \binom{2k-1}{k} + \binom{2k-3}{k-1} + \dots + \binom{1}{1}$. Supongamos que el grafo $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ es tal que $|C_{h-1}(\mathcal{A})| = f_h(m)$. Si, en este caso, $m > \binom{2k-1}{k} + \dots + \binom{1}{1}$, entonces $f_h(m) < m$, es decir, el número de todos los $(k-1)$ -subconjuntos es, en general, menor que lo que se necesita en \mathcal{B} . Hagamos uso del teorema de M. Hall, de acuerdo con el cual para \mathcal{A} existe un grafo requerido \mathcal{B} , si para cada subfamilia $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_r}\} \subset \mathcal{A}$ tenemos

$$|C_{h-1}(\{A_{i_1}, \dots, A_{i_r}\})| \geq r.$$

Pero, según 6.36, $|C_{h-1}(\{A_{i_1}, \dots, A_{i_r}\})| \geq f_h(r)$, de modo que para poder aplicar el teorema de Hall es suficiente mostrar que $f_h(r) \geq r$, $1 \leq r \leq m = \binom{2k-1}{k} + \dots + \binom{1}{1}$ [Katona G.—In: Theory of graphs, Budapest: Akadémiai Kiadó, 1968, p. 187—207]. Para un l -grafo \mathcal{B} la respuesta tiene la forma

$$m = \binom{k+l}{k} + \binom{k+l-2}{k-1} + \dots + \binom{k-l}{k-l}.$$

6.39. La construcción extremal: tomemos los primeros (en el sentido de la solución del problema 6.34) m subconjuntos a título de $F = \{A_1, \dots, A_m\}$. De modo que, si $m = 2^{b_1} + 2^{b_2} + \dots + 2^{b_r}$ ($b_1 > b_2 > \dots > b_r \geq 0$), entonces el máximo buscado es igual a $b_1 2^{b_1-1} + (b_2 + 2) 2^{b_2-1} + (b_3 + 4) 2^{b_3-1} + \dots$ [Lindsey J.H.—Amer. Math. Monthly, 1964, 71, p. 508—516; Clements G.F., Lindström B.—J. Comb. Th., 1969, 7, p. 230—238; Clements G.F.—Proc. Amer. Math. Soc., 1971, 27, N° 1, p. 13—15; Ahlswede R., Katona G.—Discrete Math., 1977, 17, N° 1, p. 1—21].

6.40. La desigualdad $n \geq p_1 + f_2(p_2 + f_3(p_3 + \dots + f_n(p_n) \dots))$ es una condición necesaria y suficiente. Necesidad. $F_l = C^l(S_n) \cap F, B_i \cup_{S \in F} C^i(S)$. De 6.36 tenemos $|C_{n-1}(F_n)| \geq f_n(p_n), B_{n-1} = C_{n-1}(F_n) \cup F_{n-1}$. Además, $C_{n-1}(F_n) \cap F_{n-1} = \emptyset$, por consiguiente, $|B_{n-1}| = |C_{n-1}(F_n)| + |F_{n-1}| \geq p_{n-1} + f_n(p_n)$; análogamente, $B_{n-2} = C_{n-2}(B_{n-1}) \cup F_{n-2}, C_{n-2}(B_{n-1}) \cap F_{n-2} = \emptyset$, por lo tanto

$$\begin{aligned} |B_{n-2}| &= |C_{n-2}(B_{n-1})| + |F_{n-2}| \geq \\ &\geq p_{n-2} + f_{n-1}(|B_{n-1}|) \geq p_{n-2} + f_{n-1}(p_{n-1} + f_n(p_n)). \end{aligned}$$

Al continuar estas iteraciones, llegamos a que $n \geq |B_1| \geq p_1 + f_2(p_2 + \dots + f_n(p_n) \dots)$.

Suficiencia. Construyamos un F que satisfaga nuestra desigualdad. Fijemos la numeración sobre $\mathcal{P}(S_n)$. Elijamos los primeros p_n subconjuntos de n elementos a título de F_n , a continuación elijamos los primeros p_{n-1} subconjuntos $S_{n-1} \subset S_n$ que se disponen tras los elementos de $C_{n-1}(F_n) = C_{n-1}(B_n)$, etc. Aquí se utiliza el hecho de que si B_l se compone de los primeros $|B_l|$ subconjuntos $S_{l-1} \subset S_n$, también $C_{l-1}(B_l)$ se compone de los primeros subconjuntos $S_{l-1} \subset S_n$. De 6.34 se deduce que $|B_l| = |F_l| + |C_1(B_2)| = p_1 + f_2(|B_2|) = p_1 + f_2(p_2 + f_3(|B_3|)) = \dots = p_1 + f_2(p_2 + \dots + f_n(p_n) \dots)$; esto quiere decir que se han usado no más de n vértices, así que la construcción es correcta.

6.41. La forma general del par extremal es

$$\begin{aligned} A &= C^\lambda(S_\lambda) C^{k-\lambda}(S_{h+l-2\lambda}), \\ B &= C^\lambda(S_\lambda) C^{l-\lambda}(S_{h+l-2\lambda}), \quad S_\lambda \cap S_{h+l-2\lambda} = \emptyset. \end{aligned}$$

Si $\lambda = 0$, véase el problema 6.5. Si $\lambda = l - 1, l \leq k$, se debe notar que la condición inicial adquiere una forma particularmente simple: $A_i \supset B_j \Leftrightarrow i = j$. En 1983 Füredi comprobó por completo esta hipótesis.

6.42. Basta aprovechar el método del problema 6.5.

6.43. Para la condición $|A_i \cap B_i| = \lambda, |A_i \cap B_j| \geq \lambda, i \neq j$, el par extremal es, supuestamente, el mismo que en el problema 6.41; sin embargo, esta cuestión queda por ahora abierta.

6.44. [Kleitman D.J. — J. Comb. Th., 1968, 5, p. 153—156].

6.45. Hagamos uso de la inducción respecto de n . Para $n = 1$ la afirmación es trivial. Supongamos que lo requerido tiene lugar incluso hasta $n-1$; demos-tremos que esto es así también para n . Fijemos un vértice x y pongamos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \{(A-x) : A \in \mathcal{A}, A \ni x\}, & \mathcal{A}_2 &= \{A : A \in \mathcal{A}, A \not\ni x\}, \\ \mathcal{B}_1 &= \{(B-x) : B \in \mathcal{B}, B \ni x\}, & \mathcal{B}_2 &= \{B : B \in \mathcal{B}, B \not\ni x\}, \\ |\mathcal{A}| &= |\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2|, & |\mathcal{B}| &= |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2|. \end{aligned}$$

Por cuanto \mathcal{A} y \mathcal{B} poseen las propiedades de un ideal (véase la hipótesis de problema), entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 &\Rightarrow a_1 = |\mathcal{A}_1| \leq |\mathcal{A}_2| = a_2, \\ \mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2 &\Rightarrow b_1 = |\mathcal{B}_1| \geq |\mathcal{B}_2| = b_2. \end{aligned}$$

Estas familias se disponen sobre el $(n-1)$ -conjunto de vértices y son, por sí mismas, ideales; por consiguiente, de acuerdo con la suposición de inducción

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{B}_1| &< a_1 b_1 / 2^{n-1}, \\ |\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{B}_2| &< a_2 b_2 / 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Así pues, aprovechando las desigualdades obtenidas más arriba, tenemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| &= |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{B}_1| + |\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{B}_2| \leq \\ &\leq \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2^{n-1}} = \frac{a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2}{2^n} \leq \\ &\leq \frac{a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2}{2^n} = \frac{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)}{2^n} = \frac{|\mathcal{A}| |\mathcal{B}|}{2^n}. \end{aligned}$$

La última desigualdad en esta cadena se obtiene del modo siguiente: $a_1 \leq a_2$, $b_1 \geq b_2 \Rightarrow (a_2 - a_1)(b_1 - b_2) \geq 0 \Rightarrow a_1 b_2 + b_1 a_2 - a_1 b_1 - a_2 b_2 \geq 0 \Rightarrow a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2 \leq a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2$.

6.46. b) Si se tienen $n-k$ l -aristas, entonces, al haber eliminado un vértice en cada arista (y las aristas que contienen dichos vértices), obtenemos por lo menos k vértices aislados, razón por la cual $T(n, k, l) \geq n - k + 1$. De construcción extremal en el dominio $n \leq l(k-1)/(l-1)$ pueden servir $(n - k + 1)$ l -aristas que no se intersecan.

c) $T(n, n-1, l) = \lfloor n/(n-l) \rfloor$, efectivamente, en este caso a todo vértice ha de corresponder una l -arista S_l que no lo contiene o, en otras palabras, un $(n-1)$ -subconjunto $S_n - S_l$ que lo cubre. Está claro que el número mínimo posible de $(n-l)$ -subconjuntos S_n que cubren todos los vértices es igual a $\lfloor n/(n-l) \rfloor$. En lo que se refiere a los números de Turán, se conoce lo siguiente:

$$T(n, n-2, n-3) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \frac{n-1}{2} \left[\left[\left[\text{Fort, Hedland} \right] \right] \right]$$

$$T(n, k, l) \geq \left\lfloor \frac{n}{n-l} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{n-l-1} \right\rfloor \dots \left\lfloor \frac{k+1}{k-l+1} \right\rfloor \left[\dots \left[\left[\left[\text{Shencheim} \right] \right] \right] \right]$$

Con motivo del compartamiento asintótico de los números de Turán véase [Kuzurin N.N. — Notas matemáticas, 1979, 26, N° 4, p. 603—612, en ruso]. De base de la construcción suficiente servía la llamada «construcción de bloques»; si $l = \lfloor (k-1)/(l-1) \rfloor$, la construcción representa un sistema de l -grafos completos e iguales en la medida de lo posible. En particular, existe una hipótesis de Turán que afirma que tal construcción es extremal en toda una serie de casos, a saber, $T(2n, 5, 3) = 2 \binom{n}{3}$.

Otro tipo de construcciones representan «torceduras», así, por ejemplo, para $l = 3, k = 4$, tal construcción tiene por expresión

$$\begin{aligned} C^3(A) + C^3(B) + C^3(C) + C^1(A)C^2(B) + \\ + C^1(B)C^2(C) + C^1(C)C^2(A), \end{aligned}$$

donde $A + B + C = S_n$ (y son equipotentes en la medida de lo posible). Hay también una hipótesis de que esta construcción es extremal cuando $l = 3, k = 4$.

Existen, sin embargo, construcciones diferentes en principio que están relacionadas con

- 1) las características topológicas de los grafos,
- 2) las características aritméticas de los parámetros. [H. Ringel, A.F. Sidorenko.]

d) Designemos el máximo buscado por $P(n, k, l)$; se conoce lo siguiente: $P(n, n, l) = 1, P(n, k, l) = 1 (k \geq 2l), P(n, l, l) = \binom{n}{l}, P(n, 2l-1, l) = \left\lfloor \frac{n}{l} \right\rfloor, P(n, n-1, l) = \left\lfloor \frac{n}{n-l} \right\rfloor$. Además, se sabe también el siguiente resultado:

$$P(n, 4, 3) = \begin{cases} \lfloor n/3 \lfloor (n-1)/2 \rfloor \rfloor, & n \equiv 5 \pmod{6} \\ \lfloor n/3 \lfloor (n-1)/2 \rfloor \rfloor - 1, & n \equiv 5 \pmod{6} \end{cases}$$

[Spencer J. — J. Comb. Th., 1968, 5, p. 1–8]. Se verifica también la siguiente fórmula recurrente: $P(n, k, l) = P(n, n - 2l + k, n - l)$, $k \leq 2l$. Examinemos esta recurrencia con un ejemplo:

$$\begin{aligned} P(n, n-2, n-3) &= \text{máx} \# S_{n-3}: \forall S_{n-2} \exists \leq_1 S_{n-3} \subset S_{n-2} = \\ &= \text{máx} \# S_3: \forall S_2 \exists \leq_1 S_3 \supset S_2 = \\ &= \text{máx} \# S_3: \forall S_3^{(1)}, S_3^{(2)} | S_3^{(1)} \cap S_3^{(2)} | \leq 1 = \\ &= \text{máx} \# S_3: \forall S_4 \exists \leq_1 S_3 \subset S_4 = P(n, 4, 3). \end{aligned}$$

§.47. Designemos el número mínimo de aristas en tal l -grafo por $m(n, k, l, r)$ y el número máximo de vértices, por $n(k, l, r)$. Entonces

$$n(k, l, r) = k + l - r. \quad (6.1')$$

En efecto, si $n \geq k + l - r + 1$, tendremos obviamente

$$\forall S_l \subseteq S_n \exists S_k \subseteq S_n: \forall S'_l \subseteq S_k | S_l \cap S'_l | < r;$$

si, en cambio, $n \leq k + l - r$, entonces $C^l(S_{n-k+l}) C^0(S_n - S_{n-k+l}) \sim TD$ y, por consiguiente,

$$m(n, k, l, r) \leq \binom{n-k+l}{l}.$$

Supongamos que $T(n, k, l) = \min_{G_n^l \sim T} |G_n^l|$, en este caso

$$\binom{n}{l} \left\{ \binom{k}{l} \right\} \leq T(n, k, l) \leq m(n, k, l, r),$$

y, para $k \leq n \leq 2l - r$ tendremos la igualdad $m(n, k, l, r) = T(n, k, l)$ puesto que en este campo todo l -grafo posee la propiedad D .

Es evidente también la monotonía respecto de r :

$$m(n, k, l, r) \leq m(n, k, l, r + 1).$$

Supongamos que $2r \geq l + 1$, entonces

$$m(k+l-r, k, l, r) = \binom{2l-r}{l}. \quad (6.2')$$

Demostración. Observemos que la condición $G_n^l \sim T$ es equivalente a que

$$\forall S_{n-h} \subseteq S_n, \quad v(S_{n-h}, 0; G_n^l) \geq 1.$$

La demostración se realiza por construcción sucesiva de las construcciones necesarias $G_{(b)}^l \subseteq G_{(1)}^l \subseteq G_{(2)}^l \subseteq \tilde{G}^l$, es decir, de aquellos l -grafos $G_{(i)}^l$ los cuales se contienen necesariamente en toda construcción suficiente \tilde{G}^l ; a partir de este hecho se deduce que la construcción $\hat{G}^l = C^l(S_{2l-r}) C^0(S_n - S_{2l-r})$ es extremal.

a) Supongamos que $n = k + l - r$, y que $\tilde{G}^l \sim TD$, entonces $\exists e_1, e_2 \in \tilde{G}^l: |e_1 \cap e_2| = r$. En efecto, si $\forall e_1, e_2 \in \tilde{G}^l, |e_1 \cap e_2| \geq r + 1$, entonces

$\tilde{G}^l \sim T$ y \tilde{G}^l representa un l -grafo $(r+l)$ -inseparable de dos en dos, mas esto contradice la condición (6.1'). Para $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \in \tilde{G}^l$, donde $|\tilde{e}_1 \cap \tilde{e}_2| = r$, pongamos

$$S = \tilde{e}_1 \cup \tilde{e}_2, \quad |S| = 2l - r, \quad \beta = \tilde{e}_1 \cap \tilde{e}_2, \\ |\beta| = r, \quad \alpha = \tilde{e}_1 - \beta, \quad \mu = \tilde{e}_2 - \beta, \quad |\alpha| = |\mu| = l - r.$$

Así pues, se ha obtenido la primera inclusión $\tilde{G}^l \supseteq C(\tilde{e}_1) + C(\tilde{e}_2) = G_{(b)}^l$. Está claro que siempre $G_{(b)}^l \not\supseteq TD$.

b) supongamos primero que $S_{l-r} \subseteq \beta$ (esto es siempre factible, puesto que la condición $2r \geq l+1$ lleva consigo la desigualdad $r \geq l-r$), entonces, por ser suficiente \tilde{G}^l ,

$$\exists e \in \tilde{G}^l: e \cap S_{l-r} = \emptyset, \quad |e \cap \tilde{e}_i| \geq r, \quad i=1, 2,$$

y lo último conduce inmediatamente a que $e = S - S_{l-r}$, por lo que tenemos la inclusión

$$\tilde{G}^l \supseteq G_{(0)}^l + \sum_{S_{l-r} \subseteq \beta} C(S - S_{l-r}) = G_{(1)}^l.$$

Demos a conocer algunas propiedades de esta $G_{(1)}^l$.

(b.1) Está claro que $G_{(1)}^l = G_{(b)}^l + C(\alpha) C^{2r-l}(\beta) C(\gamma)$, de modo que para $r = l-1$ tenemos $G_{(1)}^l = C^l(S)$ y, por lo tanto, para este caso el teorema queda ya demostrado, mientras que para $r < l-1$ es obvio que $G_{(1)}^l \not\supseteq TD$.

(b.2) Sea $G_{(1)}^{l-r+1} = \bigcup_{S_i \in G_{(1)}^l} C^{l-r+1}(S_i)$, entonces

$$G_{(1)}^{l-r+1} = C^{l-r+1}(S) - \sum_{S_{l-r+1} \subseteq S} C(S_{l-r+1}) \chi(|S_{l-r+1} \cap \beta| \geq 2r-l+1).$$

Efectivamente, si $S_{l-r+1} \subseteq \tilde{e}_1$ o $S_{l-r+1} \subseteq \tilde{e}_2$, entonces, obviamente, $S_{l-r+1} \in G_{(1)}^{l-r+1}$; en cambio, si $S_{l-r+1} \subseteq S$: $|S_{l-r+1} \cap \alpha| \neq 0 \neq |S_{l-r+1} \cap \mu|$, $|S_{l-r+1} \cap \beta| \leq 2r-l$, entonces $\exists e \in G_{(1)}^l - G_{(0)}^l: S_{l-r+1} \subseteq e$ y si, por fin, $S_{l-r+1} \subseteq S$: $|S_{l-r+1} \cap \alpha| \neq 0 \neq |S_{l-r+1} \cap \mu|$, $|S_{l-r+1} \cap \beta| \geq 2r-l+1$, entonces es evidente que en $G_{(1)}^l$ no hay aristas que contengan tal S_{l-r+1} ; la última variante no es, sin embargo, factible cuando $l-r-1 \leq 2r-l$, lo que significa:

Si $3r \geq 2l-1$, tenemos

$$G_{(1)}^{l-r+1} = C^{l-r+1}(S). \quad (6.3')$$

(b.3) Si $3r \geq 2l-1$, entonces (6.2') tiene lugar. Sea $S_{l-r} \subseteq S$, $S_{l-r} \not\subseteq \alpha, \beta, \mu$, entonces

$$\exists \tilde{e} \in \tilde{G}^l: S_{l-r} \cap \tilde{e} = \emptyset \quad \forall e \in G_{(1)}^l \quad |\tilde{e} \cap e| \geq r.$$

Mostremos que en este caso también $\tilde{e} = S - S_{l-r}$, para lo que resulta suficiente demostrar que

$$\forall S_l \subseteq S_n: |S_l \cap S| = l-1 \quad \exists e \in G_{(1)}^l: |S_l \cap e| < r.$$

Supongamos que $S_l \subseteq S_n$, $|S_l \cap S| = l-1$, $S_{l-r+1} = S \setminus S_l$, mas en tal caso, de acuerdo con (6.3'), tenemos

$$\forall S_{l-r+1} \subseteq S \quad \exists e \in G_{(1)}^l: S_{l-r+1} \subseteq e.$$

Por consiguiente, para tal e se tiene $|S_l \cap e| = |(S - S_{l-r+1}) \cap e| = r - 1$, lo que quiere decir que en el campo $3r \geq 2l - 1$ es válida la inclusión $\tilde{G}^l \supseteq \hat{G}^l$.

Para demostrar (6.2'), en todo el campo $2r \geq l + 1$ aumentamos una vez más el subgrafo necesario.

c) En el campo $2r \geq l + 1$, $3r < 2l - 1$ de nuestra fórmula para $G_{(1)}^{l-r+1}$ en (b.2) se deduce la inclusión

$$\tilde{G}^l \supseteq G_{(1)}^l - G_{(0)}^l + \sum_{\substack{S_{l-r} \subseteq S, \\ |S_{l-r} \cap \beta| \leq 2r - l - 1}} C(S - S_{l-r}) = G_{(2)}^l,$$

para cuyo segundo miembro se verifica la igualdad

$$G_{(2)}^{l-r+1} = \bigcup_{S_i \in G_{(2)}^l} G^{l-r+1}(S_i) = G^{l-r+1}(S),$$

de la cual a su vez, por analogía con (b.3), se deduce que $\tilde{G}^l \supseteq \hat{G}^l$, de modo que (6.2') queda demostrada.

En particular, esto lleva a que

$$m(n, k, l, l-1) = \binom{n-k+l}{l}.$$

Aquí, o bien $n = k$, y en este caso la citada igualdad se verifica con toda evidencia, o bien $n = k + 1$, mas en este caso es aplicable (b.3), puesto que la desigualdad $3r \geq 2l - 1$ lleva consigo $3(l-1) \geq 2l - 1$, o bien $l \geq 2$.

Se sabe, además, que si $n = k + 1$, $2k \leq l \leq 2(k + 1/2)/3$, entonces $m(k + 1, k, l, r) = 3$; en cambio, si $l > 2(k + 1/2)/3$, $r \leq \max\{(k + 5)/3, 2l - k + 1\}$, entonces

$$m(k + 1, k, l, r) = \lfloor (k + 1)/(k - l + 1) \rfloor;$$

esta igualdad se deduce de que la última restricción impuesta en r lleva consigo la desigualdad $k + 1 \leq 2l - r$ que condiciona el cumplimiento de $m = T$. En particular, si $r = 1, 2, \dots, 5$, $l \geq 2r$, entonces

$$m(k + 1, k, l, r) = \max\{3, \lfloor (k + 1)/(k - l + 1) \rfloor\}.$$

Sea $l = 2r(n - k)$, $l(l + r - 1) < 2rk$, entonces $m(n, k, l, r) = 2(n - k) + 1$.

Demostración. Si $n = r \binom{l/r+1}{2}$, la construcción extremal tendrá por expresión

$$\sum_{a \in S_{2(n-k)+1}} C(rC(a)C^1(S_{2(n-k)+1} - a)),$$

es decir, representa un l -grafo de n vértices, dual (conjugado) respecto del multigrafo $r l^2(S_{2(n-k)+1})$; en cambio, si $n > r \binom{l/r+1}{2}$, entonces se deben añadir a la construcción $n - r \binom{l/r+1}{2}$ vértices aislados. La suficiencia de la construcción es evidente y su existencia se deduce de las condiciones. Mostremos que es extremal.

(a) Si $G_n^l \sim TD$ y $|G_n^l| \leq 2(n - k)$, entonces G_n^l no contiene vértices cuyo grado sea inferior a 3, puesto que, al suprimir tal vértice (junto con todas las aristas que lo contengan), obtendríamos un l -grafo con un número de aristas no superior a $2(n - k) - 3$, cada par de las cuales tendría una intersección no vacía, por consiguiente, al tachar los vértices en estas intersecciones, eliminamos en el transcurso de los $n - k - 1$ pasos restantes, por lo menos $2(n - k - 1) >$

$> 2(n-k) - 3$ aristas, lo que contradice la condición de que G_n^l es un grafo de Turán.

(b) Si $G_n^l \sim TD$ y $|G_n^l| \leq 2(n-k)$, con la particularidad de que todos los grados de G_n^l no sobrepasan de 2, entonces, al suprimir sucesivamente $(n-k)$ vértices en las intersecciones de las aristas de G_n^l , llegamos otra vez a la contradicción con el carácter turaniano de (T), puesto que suprimimos a ciencia cierta todas las aristas del grafo G_n^l .

6.48. Si $p \leq (q-1)k/(k-1)$, entonces $\min |G_n^h| = \binom{n-p+q}{k}$; la construcción extremal es $C^k(S_{n-p+q})$, donde $S_{n-p+q} \subset S_n$. Si $n \leq (p-1)q/(q-1)$ y $2k \geq q+1$, entonces $\min |G_n^h| = (n-p+1) \binom{q}{k}$, mientras que la construcción extremal representa $n-p+1$ k -grafos completos $C^k(S_q)$ que se intersecan [Stechkin B.S., Frankl P. — MIAN, RPH, N° 20, Budapest, 1977].

6.49. [Erdős P. — In: Combinatorial Theory and its Appl. — Coll. Math. Soc. J. Bolyai. Budapest: 1970, N° 4, p. 311–315]. Szemerédi mostró que si $G_{2n+2}^2 \subset C^2(S_{2n+2})$: $\forall S_{2n-1} \subset S_{2n+2} \exists S_n \subset S_{2n-1}$: $C^2(S_n) \subset G_{2n+2}^2$, entonces necesariamente $\exists S_{n+1} \subset S_{2n+2}$: $C^2(S_{n+1}) \subset G_{2n+2}^2$.

6.50. Si el máximo buscado lo designamos con $m(n)$, entonces $m(n) \sim \sqrt{2n}$. Los números $|e_i \cap e_j|$ son todos diferentes y sus valores posibles son los números $0, 1, \dots, n-1$; esto quiere decir que $\binom{m}{2} \leq n$, de donde $m(n) \leq [(1 + \sqrt{8n+1})/2]$. La construcción tiene por expresión (en términos de las matrices de incidencia):

$$n \left\{ \begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \underbrace{1 \ 1}_2 & \underbrace{1 \ 1 \ 1}_3 & \dots & \underbrace{1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1}_{n-1} & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \end{array} \right\} n-1$$

[Pach J. 1 Ars Comb. 1980, 9, p. 47–49].

6.51. Supongamos que $m(n, l)$ denota el máximo buscado. De 6.50 está claro que si $n \geq 2l$, entonces

$$m(n, l) \leq [(1 + \sqrt{8l+1})/2]$$

y $m(n, l) = m(n, n-l)$; por eso siempre en adelante $n \geq 2l$. Observemos que $m(6, 3) = 3$, este valor se realiza por el 3-grafo de la forma $\{\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_2, a_3, a_4\}, \{a_4, a_5, a_6\}\}$.

Sea $\binom{k}{2} \leq l < \binom{k+1}{2}$ para $k \geq 3$ y supongamos que

$$n \geq \frac{1}{6}(k-1)(k^2+k+6) + l - \binom{k}{2}.$$

entonces $m(n, l) = [(1 + \sqrt{8l+1})/2] = k$. Demostremos que para $k \geq 3$

$$m((k-1)(k^2+k+6)/6, (k/2)) = k, \quad (6.4')$$

con la particularidad de que existe siempre una construcción extremal $G \sim \mathcal{A}$, en la cual

$$\exists S_{k-1} : \{ |S_{k-1} \cap e| \}_{e \in G} = \{0, 1, \dots, k-1\}. \quad (6.5')$$

Realicemos la inducción respecto de $k \geq 3$. Para $k = 3$ la validez de (6.4'), (6.5') se desprende de la forma del 3-grafo aducido anteriormente; supongamos que lo requerido se cumple hasta $k-1$; demostremos entonces, que esto es así también para k . Pongamos $n_1 = (k-2)(k^2 - k + 6)/6$, $n_2 = (k-1)(k^2 + k + 6)/6$. Es obvio que

$$n_2 - n_1 = (k/2) + 1. \quad (6.6')$$

Por la suposición de inducción existe tal $\binom{k-1}{2}$ -grafo extremal $G_{n_1} \subset C\binom{h-1}{2}(S_{n_1})$ que $|G_{n_1}| = k-1$, y

$$\exists S_{h-2} \subset S_{n_1} : \{ |S_{h-2} \cap e| \}_{e \in G_{n_1}} = \{0, 1, \dots, k-2\}.$$

Elijamos y fijemos uno de tales conjuntos S_{h-2} . Sea, ahora, $S_{n_2} \supset S_{n_1}$ y supongamos que $S_{h-1} + S\binom{h}{2}_{-h+2} = S_{n_2} - S_{n_1}$, lo que siempre es realizable en virtud de (6.6').

Construyamos un $\binom{k}{2}$ -grafo $G_{n_2} \subset C\binom{h}{2}(S_{n_2})$, rigiéndonos por la regla

$$G_{n_2} = \{S_{h-1} + e\}_{e \in G_{n_1}} + \{S_{h-2} + S\binom{h}{2}_{-h+2}\};$$

es evidente que $|G_{n_2}| = k$ y $G_{n_2} \sim A$, por consiguiente este $\binom{k}{2}$ -grafo es extremal.

Nos resta demostrar si es realizable la propiedad (6.5') en este $\binom{k}{2}$ -grafo G_{n_2} . Con este fin elijamos en el conjunto $S\binom{h}{2}_{-h+2}$ un elemento arbitrario a y pongamos $S_{h-1} = S_{h-2} + \{a\}$. Para tal S_{h-1} la propiedad (6.5') en el $\binom{k}{2}$ -grafo G_{n_2} se cumple con toda evidencia

Sea ahora $\binom{k}{2} < l < \binom{k+1}{2}$; examinemos el $\binom{k}{2}$ -grafo extremal G_{n_2} con k aristas, tomemos un conjunto de $l - \binom{k}{2}$ vértices $S_{l-\binom{h}{2}} : S_{l-\binom{h}{2}} \cap \cap S_{n_2} = \emptyset$ y formemos un grafo nuevo sobre $n_3 = n_2 + l - \binom{k}{2}$ vértices según la regla

$$G_{n_3} = \{S_{l-\binom{h}{2}} + e\}_{e \in G_{n_2}}.$$

El citado l -grafo es, obviamente, una construcción suficiente y contiene el mismo número de aristas que el $\binom{k}{2}$ -grafo G_{n_2} , es decir, k aristas; esto nos conduce a lo requerido, si tomamos en consideración la estimación superior.

6.52. El vector $v_i = (v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$ se define según la regla

$$v_{ij} = \begin{cases} 1, & j \in e_i \\ 0, & j \notin e_i \end{cases}, \text{ donde } e_1, \dots, e_m \text{ son aristas de } G_n^h.$$

Demostremos que v_1, \dots, v_m son los vectores independientes (en este caso $m \leq n$). Sea $\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = 0$. Al multiplicar por v_i , obtenemos un sistema de ecuaciones

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \lambda_i + k\lambda_j = 0.$$

Si el determinante de este sistema es distinto de cero, entonces tiene solamente solución trivial, es decir, v_1, \dots, v_m son independientes. En efecto,

$$\begin{vmatrix} k & 1 & \dots & 1 \\ 1 & k & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & k \end{vmatrix} = (n-1+k)(k-1)^{n-1} \neq 0 \text{ para } k \geq 2.$$

La estimación $m \leq n$ no siempre se realiza, por ejemplo, si $k = 2$, $n > 3$, entonces el máximo $m = n - 1$. Cuando $k \geq 3$, la frontera se alcanza a menudo por las geometrías finitas, por ejemplo, para $k = 3$, $n = 7$, por el plano de Fano.

6.53. Si designamos por $\tilde{D}(n)$ el volumen del sistema de conjuntos determinante mínimo en S_n , entonces $\tilde{D}(n) = n$.

La necesidad de distinguir un subconjunto vacío y n subconjuntos de un solo elemento, cuyas sucesiones A_F no pueden contener números superiores a 1, da la estimación $\tilde{D}(n) \geq n$, la cual se realiza por una cadena de n elementos

$$C(S_n) = \sum_{i=1}^n C\left(\sum_{j=1}^i C(a_j)\right),$$

La suficiencia de esta construcción es obvia para $\{T_1\} \neq \{T_2\}$: si $T_1 = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_l}\}$ ($i_1 < \dots < i_l$); $T_2 = \{a_{j_1}, \dots, a_{j_l}\}$ ($j_1 < \dots < j_l$), entonces de la igualdad del número de ceros en $A_F(T_1)$ y $A_F(T_2)$ se deduce que $i_1 = j_1$; de la igualdad del número de unidades en las mencionadas sucesiones se deduce que $i_2 = j_2$, etc., es decir, $T_1 = T_2$; dicho de otro modo, está demostrada la suficiencia de $C(S_n)$.

6.54. Sea G un sistema de conjuntos determinante en S_n . Para $T \subseteq S_n$ pongamos $D_G(T) = \{|T \cap e|\}_{e \in G}$ y llamemos tal totalidad de números *espectro*. Introduzcamos una notación convencional $D_G(T) = 0^{\alpha_0}, 1^{\alpha_1}, \dots, n^{\alpha_n}$ que significa que

$$D_G(T) = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{\alpha_0}, \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{\alpha_1}, \dots, \underbrace{\{n, \dots, n\}}_{\alpha_n}$$

Está claro que si $a \in S_n$, entonces $D_G(a) = 1^{\deg_G(a)}, 0^{|G| - \deg_G(a)}$, por consiguiente, si G es un hipergrafo determinante, los grados de todos los vértices suyos serán positivos y diferentes, razón por la cual $m(n) \geq n$.

Pasemos a la demostración de la unicidad de la construcción extremal, para lo cual mostremos que si \tilde{G} es extremal, $|\tilde{G}| = n$, con la particularidad de que $\deg_{\tilde{G}}(a_i) = i$ ($i = 1, \dots, n$), entonces necesariamente $\tilde{G} = C(S_n)$ (véase el problema 6.53). Supongamos lo contrario:

$$\begin{aligned} (a_{h_1}, \dots, a_n) \notin \tilde{G} \cong \{ & (a_1, \dots, a_n), \\ & (a_2, \dots, a_n), \dots, (a_{h-1}, \dots, a_n) \}, \end{aligned}$$

y examinemos la única arista $e \in \tilde{G}$ que contiene el vértice a_h y es diferente de las aristas $(a_1, \dots, a_n), \dots, (a_{h-1}, \dots, a_n)$. Mostremos que necesariamente $e = (a_h, \dots, a_n)$. En el caso contrario esto será equivalente a que $\exists a_i$ ($k+1 \leq i \leq n$): $a_i \notin e$. Indiquemos inmediatamente que $a_i \neq a_n$, puesto que a_n figura en todas las aristas; esto significa que si $k \geq n-1$, entonces lo requerido queda demostrado y esto nos conduce, en particular, al mismo teorema para $n \leq 3$. Así pues, sea

$$\exists a_i (k+1 \leq i \leq n-1) : a_i \notin e.$$

Analicemos dos subconjuntos

$$T_1 = (a_h, a_i), \quad T = \begin{cases} (a_{h-1}, a_{i+1}), & k \geq 2 \\ (a_{i+1}), & k=1. \end{cases}$$

Ambos conjuntos mencionados tienen un mismo espectro

$$D_{\tilde{G}}(T_1) = D_{\tilde{G}}(T_2) = 2h-1, \quad 1^{i-k+2},$$

lo que contradice el carácter determinante de \tilde{G} [A.V. Kóstochka, B.S. Stechkin].

6.55. La matriz de incidencia de tal hipergrafo tiene por expresión

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

6.56—6.58. Si $\chi\{\}$ es una función indicadora de un suceso encerrado entre llaves, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{S \in F} \nu(S, q; G) &= \sum_{S \in F} \sum_{e \in G} \chi\{|e \cap S| = q\} = \\ &= \sum_{e \in G} \sum_{S \in F} \chi\{|e \cap S| = q\} = \sum_{e \in G} \nu(e, q; F). \end{aligned}$$

Está claro que si $S_p \subset S_n$, entonces para $G_n^l \subset C^l(S_n)$ tenemos $\nu(S_p, q; G_n^l) = \binom{p}{q} \binom{n-p}{l-q}$. Además, $\nu(S, q; G+F) = \nu(S, p, G) + \nu(S, q, F)$, de donde se deduce inmediatamente 6.57. b) y c). Si, en cambio, $S \not\subset S_n$, obtenemos de una vez 6.57. d). Para demostrar 6.58, basta examinar a título de G el l -grafo completo. [Stechkin B.S. — Notas matemáticas, 1975, 7, N° 3, 433—442, en ruso].

6.59. De 6.57, b) encontramos inmediatamente

$$\mathcal{M}(\nu(S_p, q; G)) = \sum_{i \geq q} \frac{\binom{i}{q} \binom{n-i}{p-q}}{\binom{n}{p}} \nu(S_n; i; G).$$

6.60. $\binom{p}{k-l} \binom{r}{l}$; la construcción extremal es $Fh = C^{h-l}(S_p) C^l(S_r)$, donde $S_r \subset S_{n-p}$.

Está claro que si G_n^h posee la propiedad dada, entonces $G^h \subset C^{h-1}(S_p) C^1(S_{n-p})$, por eso, si $S_{h-l} \subseteq S_p$, entonces, de acuerdo con 6.57,

$$|G^h| = \sum_{S_{h-l} \subset S_p} v(S_p, S_{h-l}; G^h) = v(S_p, k-l; G^h),$$

donde $v(S_p, S_{h-l}; G^h) = |\{e \in G^h : S_p \cap e = S_{h-l}\}|$. Si G^h posee la propiedad dada, entonces $v(S_p, S_{h-l}; G^h) \geq \binom{r}{l}$, de donde obtenemos seguidamente

$$|G^h| = \sum_{S_{h-l} \subset S_p} v(S_p, S_{h-l}; G^h) \geq \binom{p}{k-l} \binom{r}{l}.$$

6.61. De acuerdo con el problema 6.57,

$$\sum_{S_{n-1} \subset S_n} v(S_{n-1}, l; G^l) = (n-l) |G^l|. \quad (6.7')$$

Sea $G^l \sim \mathcal{A}$, entonces, según (6.1),

$$\forall S_{n-1} \subseteq S_n \quad v(S_{n-1}, l; G^l) \leq m(n-1, l; \mathcal{A})$$

y, por lo tanto, si G^l es una construcción extremal, entonces de (6.7') obtenemos la desigualdad

$$m(n, l; \mathcal{A}) \leq \left[\frac{nm(n-1, l; \mathcal{A})}{n-l} \right].$$

Demostremos lo requerido por inducción respecto de $n \geq n_0$. Para $n = n_0$ esto tiene lugar en virtud de (6.2). Supongamos que la afirmación es válida siempre incluso hasta $n-1$. Mostremos que también es válida para $n > n_0$. Según la suposición de inducción tenemos

$$f(n) \leq m(n, l; \mathcal{A}) \leq \left[\frac{nm(n-1, l; \mathcal{A})}{n-l} \right] \stackrel{\text{Ind}}{=} \left[\frac{f(n-1)n}{n-l} \right] \leq f(n). \quad (6.8')$$

Como ejemplo de función que satisface las condiciones de este problema puede servir $f(n) = \lfloor n^2/4 \rfloor$ (véase el problema 6.1) [Stechkin B.S. — J. Comb. Th. (A), 1980, 29, N° 3, p. 368—369].

6.62. De acuerdo con 6.58 tenemos la identidad

$$\sum_{S \in \mathcal{F}} \deg_{\mathcal{G}}(S) = \sum_{G \in \mathcal{G}} |G \cap F|, \quad (6.9')$$

de modo que si $|G \cap F| \leq 1$, se obtiene lo requerido.

Esta desigualdad admite el siguiente principio general de aplicación. Supongamos que se resuelve un problema general de maximización de $|F|$ para $F \subset \mathcal{P}(S_n) : \neg \exists A_i, A_j A_i R A_j$, donde R es una relación binaria sobre $\mathcal{P}(S_n)$ prefijada de antemano. Supongamos que los hipergrafos G son de tales que $\forall B_1, B_2 \in G \quad B_1 R B_2$, y a título de \mathcal{G} se toman todos los G tales que $\cup G = \mathcal{P}(S_n)$, entonces, evidentemente, $|F \cap G| \leq 1$, y queda aplicable la desigualdad según la cual obtenemos estimaciones superiores para $|F|$. Por ejemplo, examinemos el problema 6.2. A título de G se toma la cadena máxima desde $\{\emptyset\}$ hasta S_n , y a título de \mathcal{G} , el conjunto de todas las cadenas de este tipo, entonces, si F es una anticadena, tenemos $|G \cap F| \leq 1$. Está claro que $\deg_{\mathcal{G}}(S) = |S| \times$

$\times (n - |S|)!$, $|S| = n!$, entonces, de acuerdo con nuestra desigualdad, $\sum_{S \in \mathcal{F}} |S|! (n - |S|)! (n!)^{-1} \leq 1$. Por consiguiente,

$$\frac{|F|}{\binom{n}{[n/2]}} = \sum_{S \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{[n/2]}} \leq \sum_{S \in \mathcal{F}} \frac{1}{(n/|S|)} \leq 1, \quad (6.40')$$

lo que nos lleva a que $|F| \leq \binom{n}{[n/2]}$.

6.63. Si \mathcal{A} es una anticadena, entonces, según el problema antecedente,

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} f(|A|) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{f(|A|) \binom{n}{|A|}}{\binom{n}{|A|}} \leq f(r) \binom{n}{r} \sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{1}{(n/|A|)} \leq f(r) \binom{n}{r},$$

donde

$$f(r) \binom{n}{r} = \max_i f(i) \binom{n}{i}.$$

De este modo, $\sum_{A \in \mathcal{A}} f(|A|) \leq f(r) \binom{n}{r}$, la estimación se alcanza por el r -grafo completo.

6.64. $\binom{n-1}{[n/2]-1}$; la construcción extremal es $C'(a) C^{[n/2]-1}(S_{n-a})$. La demostración se desprende de la afirmación del problema 6.65. Por cuanto $|A_i| \leq [n/2]$, tenemos $\binom{n-1}{|A_i|-1} \leq \binom{n-1}{[n/2]-1}$ de donde y de 6.65 llegamos a que $m \binom{n-1}{[n/2]-1}^{-1} \leq 1$ [Bollobas B.—J. Colomb. Th. (A), 1973, 15, p. 363—366].

6.65. Hagamos uso del método aplicado en el problema 6.29. Fijemos la numeración cíclica de los vértices φ . Sea $\mathcal{A}(\varphi)$ una totalidad de aquellos A_i que tienen elementos sucesivos en φ .

Mostremos que si $A_i \in \mathcal{A}(\varphi)$, el número de j , para los cuales $A_j \in \mathcal{A}$, no sobrepasa de $|A_i|$. En efecto, para cada $A_j \in \mathcal{A}(\varphi)$ tenemos $A_j \cap A_i \neq \emptyset$, con la particularidad de que $A_i \neq A_i \cap A_j \neq A_j$, puesto que $A_i \not\supset A_j \not\subset A_i$. Esto quiere decir que $A_i \cup A_j$ es el conjunto de los primeros o últimos elementos, es decir, para A_i se tienen a lo sumo $2(|A_i| - 1)$ posibilidades para las intersecciones $A_i \cap A_j$. Si $j \neq k$, entonces $A_i \cap A_j \neq A_i \cap A_k$ y $A_i \cap A_j + A_i \cap A_k \neq A_j$, puesto que $|A_j|, |A_k| \leq n/2$, por consiguiente, en A_i se contienen o bien $A_i \cap A_j$, o bien $A_i \cap A_k$, es decir, no más de la mitad de todas las intersecciones posibles, a saber, $2(|A_i| - 1) = |A_i| - 1$, lo que nos da, junto con la propia A_i , $|A_i|$.

Definamos ahora la función f según la regla

$$f(\varphi, A_i) = \begin{cases} 1/|A_i|, & \text{si } A_i \in \mathcal{A}(\varphi), \\ 0 & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

Calculemos $f = \sum_{\varphi} \sum_{A_i} f(\varphi, A_i)$. Por un lado

$$f = \sum_{A_i \in \mathcal{A}} \left(\sum_{A_i \in \mathcal{A}(\varphi)} \frac{1}{|A_i|} \right) = \sum_{A_i \in \mathcal{A}} (|A_i| - 1)!(n - |A_i|)!$$

y por otro lado, según lo demostrado más arriba,

$$\sum_{A_i \in \mathcal{A}(\Phi)} \frac{1}{|A_i|} \leq 1$$

y, por consiguiente,

$$l = \sum_{\Phi} \left(\sum_{A_i \in \mathcal{A}(\Phi)} \frac{1}{|A_i|} \right) \leq (n-1)l$$

y

$$\sum_{A_i \in \mathcal{A}} (|A_i| - 1)!(n - |A_i|)! \leq (n-1)!$$

[Green C., Katona G., Kleitman D.J. — In: Recent Advances in Graph. Theory Academica Prague, Prague: 1975, p. 223–231].

6.66. Se supone que el número máximo de aristas es igual a $\binom{n}{l} \times \times \left[\begin{matrix} n+1 \\ l \end{matrix} \right] \dots \left[\begin{matrix} n+l-1 \\ l \end{matrix} \right]$; para $l=2$ esto está demostrado en [Mantel W. Wis Kunige Op gaven met de Oplossingen. 1907, v. 10, N° 1, 60–61]; para $l=3$, en [Bollabas B. Discrete Math., 1974, v. 8, N° 1, 21, 24]; para $l=4$, en [Sidorenko A.F. Apuntes matemáticos, 1987, v. 41, edic. 3, 433–454, en ruso]; para $l \geq 5$ este problema no está resuelto por ahora.

6.67. $\left(\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \right)$. La construcción extremal es $C^1(a) C^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}(S_n - a)$. Si

$n \equiv 0 \pmod{2}$, entonces la familia $\{A_1, \dots, A_m, \dots, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_m\}$ es una anticadena, lo que quiere decir que $2m \leq \binom{n}{n/2} \Rightarrow m \leq \binom{n-1}{n/2-1}$. Si $n \equiv 1 \pmod{2}$, entonces la familia $F = \{A_1, \dots, A_m, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_m\}$ es una anticadena y tiene intersecciones no vacías dos a dos. Pongamos $F^* = \{A \in F: |A| \leq \leq (n-1)/2\}$. Al aplicar a F^* el problema 6.65, obtenemos lo requerido [Kleitman D.J., Spencer J. — Discrete Math., 1973, 6, p. 255–262].

6.68. 2^{n-2} ; la construcción extremal es $C^0(a) C^1(b, \mathcal{P})(S_n - a - b)$. Pongamos $\mathcal{A} = \{A: \exists A_i \in F: A \subset A_i\}$, $\mathcal{B} = \{B: \exists A_i \in F: B \supset A_i\}$. Los hipergrafos \mathcal{U} y \mathcal{B} satisfacen las condiciones del problema 6.45, de modo que $|\mathcal{U} \cap \mathcal{B}| \leq |\mathcal{U}| |\mathcal{B}| \cdot 2^{-n}$. De las condiciones se deduce, además, que $|\mathcal{U}|, |\mathcal{B}| \leq 2^{n-1}$, entonces $|\mathcal{U} \cap \mathcal{B}| \leq 2^{n-2}$, pero, evidentemente, $F \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{B}$, y por consiguiente, $|F| \leq 2^{n-2}$.

6.69. $\binom{n-k+l}{l}$, la construcción extremal es $C^l(S_{n-k+l})$, donde $S_{n-k+l} \subset S_n$. Supongamos que $\{A_1, \dots, A_m\} = G_n^l$ satisface las condiciones T y K , entonces, en virtud de K ,

$$\begin{aligned} \forall A_i \in G_n^l \quad \exists! B_i \in C^k(S_n); \\ B_i \supseteq A_i: |A_j \cap B_i| < l \quad (i \neq j), \end{aligned}$$

con la particularidad de que existen exactamente m tales B_i . Pongamos ahora

$$S_n - B_i = B'_i, |B'_i| = n - k, i = 1, 2, \dots, m.$$

Está claro que para tales A_i y B_i^c tenemos $A_i \cap B_i^c = \emptyset \iff i = j$, es decir, se cumplen las condiciones del problema 6.5, según el cual, para nuestros parámetros tenemos $m \leq \binom{n-k+l}{l}$.

6.70. Demostremos al principio que cualesquiera 6 vértices tienen una arista que pertenece a ambos grafos. En efecto, si en ciertos 6 vértices los grafos de Turán G_1 y G_2 no se intersecaran, entonces, al pintar las aristas del grafo completo en estos 6 vértices de dos colores (de un color las aristas pertenecientes a G_1 y de otro, todas las demás aristas), obtendríamos una 2-coloración K_6 sin triángulos monocromáticos, lo que es imposible. De este modo, según el teorema de Turán el número total de aristas será no inferior a $(\lfloor n/5 \rfloor - 1)(n - 5/2) \lfloor n/5 \rfloor$. Demos a conocer un ejemplo de los grafos G_1 y G_2 sobre el conjunto de vértices $\{1, \dots, n\}$, donde tanto G_1 , como G_2 no contienen tres vértices independientes y

$$|G_1 \cap G_2| = (\lfloor n/5 \rfloor - 1)(n - 5/2) \lfloor n/5 \rfloor;$$

los vértices i y j son adyacentes en G_1 , si $i - j \equiv 0, 1 \text{ ó } 4 \pmod{5}$, y en G_2 , siempre que $i - j \equiv 0, 2 \text{ ó } 3 \pmod{5}$ [Sidorenko A.F., *ДАН*, 1980, 251, N° 4, p. 805–808, en ruso].

6.71. [Baranyai Zs. — In: Infinite and finite sets/Ed. A. Hajnal, R. Rado, V.T. Sós. — Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 1975, N° 10, N — HPC, p. 91–108].

6.72. El problema fue planteado por Erdős [Erdős P. — Can. Math., Bull., 1964, 7, N° 3, p. 473. Problem N° 88]. Sea $f(n, k)$ el número máximo de aristas en el grafo de n vértices, en el que todo subgrafo cuenta con un vértice cuyo grado no sobrepasa de k ; entonces $f(n, k) = k(n - k) + \binom{k}{2}$; la construcción extremal tiene por expresión $C^2(S_n) - C^2(S_{n-k})$. Este resultado se obtiene inmediatamente al realizar la inducción partiendo del número de vértices.

Supongamos ahora que $f_r(n, k)$ es el número máximo de aristas en un grafo de n vértices, en el cual todo subgrafo de $(n - r)$ vértices posee un vértice de grado no superior a k . En este caso

$$f_1(n, k) = \begin{cases} \binom{n}{2}, & n \leq k + 2, \\ k(n - k) + \binom{k}{2} + 1, & n \geq k + 3, \end{cases}$$

con la particularidad de que se tienen bastantes construcciones extremales diversas. Es notable que para r mayores la respuesta no cambia su forma $\forall r, k \exists n_0 \forall n \geq n_0 f_r(n, k) = f_1(n, k)$.

6.73. La hipótesis de Berge fue recientemente resuelta positivamente por V. Taschkínov.

§ 2. Problemas extremales sobre la partición de los números

6.74. Además de Leonardo de Pisa (Fibonacci) este problema fue analizado por Luca Pacciolo, Claude Gaspar Bachet de Meziriac, L. Euler y D.I. Mendeléiev (cuando era director de la Cámara General de Pesos y Medidas), como también por los sucesores de éste. El problema se denomina, a veces, problema de Bachet o de Bachet—Mendeléiev. En una balanza de brazos iguales se prevén dos clases de pesaje preciso: con un platillo y con dos platillos; en el primer caso las pesas pueden ponerse sólo en un platillo de la balanza, y en el segundo, en ambos platillos. En el «Cálculo infinitesimal» (en el capítulo en que se trata de las particiones de los números) L. Euler argumenta, aplicando el método de funciones generatrices, la eficacia de dos conocidas sucesiones de pesas $\{(p + 1)^i\}_{i=0,1,2,\dots}$ $p = 1, 2$ de más rápido crecimiento, para pesar usando p platillos respectivamente. Por supuesto, otros autores también destacaban precisamente estas sucesiones, y, en realidad, ellas representan los más efectivos sistemas de pesas

para pesar cualquier carga entera. Si la carga tiene un valor finito (no más pesada que n), resulta natural suponer que el peso sumario de las pesas es igual a n ; en este caso tampoco las progresiones geométricas son siempre eficaces. Si $t_p(n)$ es el número mínimo necesario de pesas para pesar p platillos, entonces $t_p(n) = \lceil \log_{p+1}(pn+1) \rceil$, mientras que las propias pesas se determinan de un modo recurrente:

$$y_i = \left[\left(n + p - \sum_{j=1}^{i-1} y_j \right) / (p+1) \right], \quad i = 1, 2, \dots, t_p(n).$$

El sentido de todas estas expresiones para $p > 2$ es muy simple y se realiza pesando en una báscula que tiene construcción natural, aunque un tanto especial. Se trata de una balanza de brazos desiguales. El brazo corto lleva un platillo que se emplea exclusivamente para pesar cargas, en el otro brazo hay p platillos para pesas, los cuales están uno del otro a una distancia igual a la magnitud del brazo corto.

[Bachet de Meziriac C.G. Problemes plaisants et delectables qui se font par les nombres. Lyon, 1612. Davidov E.S. Grupos mínimos de números para la formación de series naturales. San Petersburgo, 1903, p. 36, en ruso. Gartz V.F. El mejor sistema de pesas para pesar. San Petersburgo, 1910, p. 36, en ruso. Euler L. Introducción al análisis infinitesimal. Vol. 1-2, M. Fizmatgiz, 1961, en ruso].

6.75. Serán suficientes 12 billetes: un billete de 10 rublos, tres de 5, dos de 3 y seis de 1 rublo. Si tomamos en consideración la condición adicional, entonces podemos contentarnos con 11 billetes: dos de 10 rublos, un billete de 5, dos de 3 y seis de 1 rublo.

6.78. Baránov V.I. Programación, 1978, N° 3, 46-54, 1985, N° 4, 33-38, 1987, N° 2, 91-102, 1987, N° 5, 75-86, en ruso. Apuntes matemáticos, 29, 1981, N° 2, 303-307, en ruso. Problemas de cibernética (elaboración y empleo de los superordenadores), 1986, 191-215, en ruso. Materiales de la Conferencia Nacional sobre problemas de las matemáticas discretas y sus aplicaciones. M.: Universidad de Moscú, 1986, 62-65, en ruso.

6.79. Para $n = 6$ las particiones serán:

de rango uno: $6 = 6$; de rango dos: $6 = 5 + 1$, $6 = 4 + 2$, $6 = 3 + 3$; de rango tres: $6 = 4 + 1 + 1$, $6 = 3 + 2 + 1$, $6 = 2 + 2 + 2$; de rango cuatro: $6 = 3 + 1 + 1 + 1$, $6 = 2 + 2 + 1 + 1$; de rango cinco: $6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1$; de rango seis: $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

Las composiciones para $n = 6$ son:

de rango uno: $6 = 6$; de rango dos: $6 = 5 + 1$, $6 = 4 + 2$, $6 = 3 + 3$, $6 = 1 + 5$, $6 = 2 + 4$; de rango tres: $6 = 4 + 1 + 1$, $6 = 3 + 2 + 1$, $6 = 2 + 2 + 2$, $6 = 1 + 4 + 1$, $6 = 3 + 1 + 2$, $6 = 1 + 1 + 4$, $6 = 2 + 3 + 1$, $6 = 2 + 1 + 3$, $6 = 1 + 3 + 2$, $6 = 1 + 2 + 3$; de rango cuatro: $6 = 3 + 1 + 1 + 1$, $6 = 2 + 2 + 1 + 1$, $6 = 1 + 3 + 1 + 1$, $6 = 2 + 1 + 2 + 1$, $6 = 1 + 1 + 3 + 1$, $6 = 2 + 1 + 1 + 2$, $6 = 1 + 1 + 1 + 3$, $6 = 1 + 2 + 2 + 1$, $6 = 1 + 2 + 1 + 2$, $6 = 1 + 1 + 2 + 2$; de rango cinco: $6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1$, $6 = 1 + 2 + 1 + 1 + 1$, $6 = 1 + 1 + 2 + 1 + 1$, $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2$, $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2$, de rango seis: $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

6.81. Demostremos ambas fórmulas. El valor de $n = n(k_1, \dots, k_r)$ no puede ser inferior a $\sum_{i=1}^r k_i - r + 1$, puesto que en tal caso existiría una partición, para la cual la correspondencia requerida no se cumple:

$$\sum_{i=1}^r k_i - r - 1 (k_1 - 1, \dots, k_r - 1) \geq (k_1, \dots, k_r);$$

si, en cambio, $n = \sum_{i=1}^r k_i - r + 1$, entonces en cualquier partición $(n_1, \dots, n_r) | -$

— n siempre se encontrará una parta $n_i \geq k_i$, puesto que de lo contrario todos los $n_i \leq k_i - 1$, $i = 1, \dots, r$, y, por consiguiente,

$$\sum_{i=1}^r k_i - r = \sum_{i=1}^r (k_i - 1) \geq n = \sum_{i=1}^r k_i - r + 1.$$

El valor de $k = k(n_1, \dots, n_r)$ no puede ser superior a $\sum_{i=1}^r n_i + r - 1$, pues-

to que en este caso existiría una partición para la cual la correspondencia requerida no se cumple:

$$(n_1, \dots, n_r) \geq (n_1 + 1, \dots, n_r + 1) - \sum_{i=1}^r n_i + r;$$

si, en cambio, $k = \sum_{i=1}^r n_i + r - 1$, entonces $n = k - r + 1$, y, por consiguiente,

de acuerdo con la primera fórmula ya demostrada, a la correspondencia requerida le satisfarán todas las particiones k de rango r no sólo para la partición (n_1, \dots, n_r) , sino, en general, para todas las particiones n de rango r .

6.84. Partiendo de la definición de encaje, es necesario sólo comprobar el cumplimiento de las siguientes propiedades:

(a) reflexividad: $(n_1, \dots, n_r) \subseteq (n_1, \dots, n_r)$;

(b) antisimetría: si $(k_1, \dots, k_t) \subseteq (n_1, \dots, n_r)$, $(n_1, \dots, n_r) \subseteq (k_1, \dots, k_t)$, entonces $(k_1, \dots, k_t) = (n_1, \dots, n_r)$;

(c) transitividad: si $(k_1, \dots, k_t) \subseteq (m_1, \dots, m_l)$, $(m_1, \dots, m_l) \subseteq (n_1, \dots, n_r)$, entonces $(k_1, \dots, k_t) \subseteq (n_1, \dots, n_r)$.

6.87. El no encajamiento de $(k - t + 1, 1^{t-1}) \subset (n - r + 1, 1^{r-1})$ es equivalente a que o bien $k - t + 1 > n - r + 1$, o bien $k > n$, por consiguiente, $n_a(k, t, r) \leq \max\{k - 1, k - 1 - t + r\}$. Por otra parte, si $n_a(k, t, r) = \max\{k - 1, k - 1 - t + r\}$, entonces el citado no encajamiento se cumple; efectivamente, para $t \geq r$ tenemos $n_a(k, t, r) = k - 1$, y el no encajamiento es obvio: cuando $t \leq r$, $n_a(k, t, r) = k - 1 - t + r$, y, por tanto, si fuera $(k_1, \dots, k_t) \subset (n_1, \dots, n_r)$, entonces para $n_1 \geq \dots \geq n_r$ esto conduciría a que $(k_1, \dots, k_t) \subset (n_1, \dots, n_t)$, mas en tal caso $\sum_{i=1}^t n_i \leq n - (r - t) = k - 1$, lo que contradice el último encajamiento.

6.93. Pongamos

$$f(k_1, \dots, k_t; r) = \max_{t \leq i \leq t} \left(\sum_{j=1}^i k_j + (k_i - 1)(r - 1) \right).$$

Está claro que $n(k_1, \dots, k_t; r) \geq f(k_1, \dots, k_t; r)$, puesto que el encajamiento $(k_1, \dots, k_t) \subset (n - (r - 1)(k_i - 1), (k_i - 1)^{r-1})$ conduce a la desigualdad $n - (r - 1)(k_i - 1) \geq k_1 + \dots + k_t$. Además si $t > 1$, entonces $f(k_1, \dots, k_t; r) \geq k_1 + f(k_2, \dots, k_t; r)$, puesto que, si i es un índice que maximiza $f(k_2, \dots, k_t; r)$, entonces $f(k_1, \dots, k_t; r) \geq \sum_{j=1}^i k_j + (r - 1)(k_i - 1) = k_1 + \sum_{j=2}^i k_j + (r - 1)(k_i - 1) = k_1 + f(k_2, \dots, k_t; r)$.

Empleemos la inducción respecto t . Para $t = 1$, esto es exactamente el principio de Dirichlet. Para el paso de inducción de $t - 1$ a t , es suficiente mostrar que si $n = f(k_1, \dots, k_t; r)$, entonces el encaje requerido se cumple. Veamos una partición arbitraria $(n_1, \dots, n_r) \vdash n$; en ésta siempre $n_1 \geq k_1$, puesto que $f(k_1, \dots, k_t; r) \geq k_1 + (r - 1)(k_1 - 1)$; por eso, el encajamiento de $(k_2, \dots, k_t) \subset (n_1 - k_1, n_2, \dots, n_r)$ tiene por resultado el encajamiento de $(k_1, \dots, k_t) \subset (n_1, \dots, n_r)$. El encajamiento penúltimo se deduce, a su vez, de la desigualdad $f(k_1, \dots, k_t; r) \geq k_1 + f(k_2, \dots, k_t; r)$ y de la suposición

de inducción $n_1 - k_1 + n_2 + \dots + n_r = n - k_1 = f(k_1, \dots, k_t; r) - k_1 \geq f(k_2, \dots, k_t; r)$. Si, en este caso, $n_1 = k_1$, se debe hacer uso, además, de la monotonía evidente de f según r .

En la formulación del principio de alojamiento completo la condición eno más de puede omitirse siempre, salvo en el caso degenerado de $k = t < r$.

6.94. En efecto, el r buscado es, de acuerdo con el principio de alojamiento completo, la raíz entera máxima de la desigualdad $n \geq n(k_1, \dots, k_r; r)$.

$$6.95. m(n; H_h) = \frac{n^2}{2r(k_1, \dots, k_t; k)} + o(n^2).$$

6.98. Por $\{x\}$ se designará la parte fraccionaria y por $[x]$, la parte entera del número x ; $|x| = -[-x]$. En la notación vectorial $[X]$ denota el vector $([x_1], \dots, [x_t])$, y $\{X\}$, el vector $(\{x_1\}, \dots, \{x_t\})$. R^t es, como siempre, un espacio euclídeo t -dimensional.

Supongamos que los índices u, v, w maximizan $f(X + Y; r)$, $f(X; r)$ y $f(Y, r)$, respectivamente, entonces

$$f(X; r) + f(Y; r) + r - 1 = \sum_{j=1}^v x_j + (x_v - 1)(r - 1) + \sum_{j=1}^w y_j + (y_w - 1)(r - 1) + r - 1 \geq \sum_{j=1}^u (x_j + y_j) + (x_u + y_u - 1)(r - 1) = f(X + Y; r).$$

1. Supongamos lo contrario: $x_t < 0$ y analicemos el $m \in [t - 1]$ máximo para el cual $x_m \geq 0$, entonces

$$\sum_{j=1}^m x_j + (x_m - 1)(r - 1) > \sum_{j=1}^t x_j + (x_t - 1)(r - 1)$$

puesto que x_{m+1}, \dots, x_t son negativos. Si tal m no existe, estudiemos el máximo $m \in [i + 1, t] = [t] \setminus [i]$, para el cual $x_m \geq 0$, mas en este caso también se verifica la desigualdad

$$\sum_{j=1}^m x_j + (x_m - 1)(r - 1) > \sum_{j=1}^t x_j + (x_t - 1)(r - 1),$$

puesto que $p \geq 0$, y $x_1, \dots, x_i, x_m, \dots, x_t$ son todos negativos. En efecto, en este caso esta desigualdad es equivalente a la siguiente

$$\sum_{j=i+1}^m x_j + (x_m - 1)(r - 1) > (x_t - 1)(r - 1),$$

la cual se desprende de que $x_m \geq 0 > x_i$, y $\sum_{j=i+1}^m x_j \geq 0$, ya que $p \geq 0$, y la última suma incluye todos los x_j positivos.

2. $\sum_{j=1}^t x_j + (x_1 - 1)(r - 1) = f(x_t, \dots, x_1, x_{t+1}, \dots, x_t) \leq \max_{s \in S_t} f(X_s) \leq \max_s \max_i \sum_{j=1}^i x_{s(j)} + \max_s \max_i (x_{s(i)} - 1)(r - 1) = \sum_{j=1}^t x_j + (x_1 - 1)(r - 1)$, y de este modo queda calculado el máximo.

Para demostrar el mínimo, tomemos en consideración dos circunstancias.

(a) Mostremos al principio que existe una permutación de la forma $(x_1, \dots, x_t, x_{s(1)}, \dots, x_{s(t)})$ que minimiza la función f . Con este fin basta comprobar que si en una permutación arbitraria $Y = (y_1, \dots, y_t)$ $y_q < 0$, entonces para

$Y' = (y_q, y_1, \dots, y_{q-1}, y_{q+1}, \dots, y_t)$ se verifica la desigualdad $f(Y') \leq f(Y)$.

Efectivamente, si $f(Y') = y_q + \sum_{j=1, j \neq q}^p y_j + (y_p - 1)(r - 1)$, entonces $f(Y) = \sum_{j=1}^p y_j + (y_p - 1)(r - 1) \geq y_q + \sum_{j=1, j \neq q}^p y_j + (y_p - 1)(r - 1) = f(Y')$, y, por cuanto $\sum_{j=1}^t y_j \geq 0$, tendremos, en virtud del p. 1, $p \neq q$.

(b) Mostremos ahora que si $x_1 \geq \dots \geq x_t$, entonces

$$\min_{x \in S_t} f(x_1, \dots, x_t; r) = f(x_1, \dots, x_t; r),$$

para lo cual comprobemos que si $x_i \leq x_{i+1}$, tendremos

$$f(x_1, \dots, x_i; r) \geq f(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_t; r).$$

En efecto, pongamos $X = (x_1, \dots, x_t)$, $X' = (x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_t)$; entonces si $f(X') = \sum_{j=1}^p x_j + (x_p - 1)(r - 1)$, donde $p \in [i-1] \cup [1+2, t]$, es decir,

$$p \neq i, i+1, \text{ entonces } f(X) \geq \sum_{j=1}^p x_j + (x_p - 1)(r - 1) = f(X'); \text{ si } f(X') = \sum_{j=1}^{i-1} x_j + x_{i+1} + (x_{i+1} - 1)(r - 1), \text{ entonces } f(X) \geq \sum_{j=1}^{i+1} x_j + (x_{i+1} - 1)(r - 1) \geq \sum_{j=1}^{i-1} x_j + x_{i+1} + (x_{i+1} - 1)(r - 1) = f(X'); \text{ si } f(X') = \sum_{j=1}^{i+1} x_j + (x_i - 1)(r - 1),$$

$$\text{entonces } f(X) \geq \sum_{j=1}^{i+1} x_j + (x_{i+1} - 1)(r - 1) \geq \sum_{j=1}^{i+1} x_j + (x_i - 1)(r - 1) = f(X').$$

Y, por cuanto toda permutación es representable mediante un producto de transposiciones, el mínimo queda calculado. En particular, esto tiene por resultado que si X es un vector de números enteros que cuenta con componentes positivos, entonces

$$\min_{x \in S_t} f(X; r) \geq \sum_j x_j$$

3. $1 - r + dr/2 = f(d/2, 0, \dots, 0, -d/2; r) \leq \max f(X; r) \leq \max_i \sum_{j=1}^i x_i + \max_i (x_i - 1)(r - 1) \leq d/2 + (d/2 - 1)(r - 1) = 1 - r + dr/2$, y, por consiguiente, el máximo queda calculado.

El mínimo buscado se realiza para

$$z = \left(\frac{-d}{2}, \frac{dr^{t-2}}{2(r^{t-1} - (r-1)^{t-1})}, \frac{dr^{t-3}(r-1)}{2(r^{t-1} - (r-1)^{t-1})}, \dots, \frac{d(r-1)^{t-2}}{2(r^{t-1} - (r-1)^{t-1})} \right).$$

Mostremos que la igualdad que se demuestra se verifica como estimación inferior. Sea $f(X) = \sum_{j=1}^i x_j + (x_i - 1)(r - 1)$; de acuerdo con el p. 1, $x_i \geq 0$, mas en este caso

$$f(X) = -\frac{d}{2} + \min_{\substack{x_j: \sum x_j = d/2 \\ x_j \geq 0}} f(x_1, \dots, x_i; r) = -\frac{d}{2} + \frac{dr^i}{(r^i - (r-1)^i)} - r + 1 = \\ = \frac{d(r-1)^i}{2(r^i - (r-1)^i)} - r + 1 \geq \frac{d(r-1)^i}{2(r^i - (r-1)^i)} - r + 1,$$

y lo requerido está demostrado.

4. Sea $q_i = \frac{pr^{t-1}(r-1)^{i-1}}{r^t - (r-1)^t}$, $i = 1, \dots, t$; $Q = (q_1, \dots, q_t)$, entonces

$$\sum_{i=1}^t q_i = p \text{ y}$$

$$f(Q, r) = \frac{pr^t}{r^t - (r-1)^t} - r + 1,$$

con la particularidad de que para cada $i \in [t]$ se verifica la igualdad $\sum_{j=1}^i q_j + (q_i - 1)(r - 1) = f(Q; r)$. De lo último se deduce, para $X = (x_1, \dots, x_t)$: $\sum_{i=1}^t x_i = k \geq p$, la igualdad

$$f(X; r) = \frac{pr^t}{r^t - (r-1)^t} + f(X - Q; r).$$

A su vez

$$\min_{\mathbf{x}: \sum x_i = 0} f(X; r) = f(0; r) = -r + 1.$$

En efecto, suponiendo lo contrario, es decir que $\min f < -r + 1$, llegamos al sistema $\sum_{j=1}^i x_j = 0$, $\sum_{j=1}^i x_j + rx_i < 0$, $i = 1, \dots, t$, el cual es incompatible cuando $r \geq 1$. Efectivamente, al sustraer la igualdad de todas las t desigualdades, obtenemos que $(r-1)x_i < x_{i+1} + \dots + x_t$, $i = 1, \dots, t$, de donde encontramos sucesivamente que $x_t < 0$, $x_{t-1} < 0$, \dots , $x_1 < 0$, lo que contradice la igualdad del sistema de partida.

6.108. (a) Si $f(k_1, \dots, k_t) = \max_{1 \leq i \leq t} \left(\sum_{j=1}^i k_j + \sum_{l=2}^r \min(n_l, k_i - 1) \right)$, entonces $f(k_1, \dots, k_t) - k_1 \geq f(k_2, \dots, k_t)$.

En efecto, si i maximiza $f(k_2, \dots, k_t)$, entonces

$$f(k_1, \dots, k_t) \geq \sum_{j=1}^i k_j + \sum_{l=2}^r \min(n_l, k_i - 1) = \\ = k_1 + \sum_{j=2}^i k_j + \sum_{l=2}^r \min(n_l, k_i - 1) = k_1 + f(k_2, \dots, k_t).$$

(b) Sea (p_1, \dots, p_r) una partición del número $f(k_1, \dots, k_t)$ en r partes, en la cual $p_i \leq n_i, i = 2, \dots, r$. Entonces en esta partición existe una parte que no es inferior a k_1 . Efectivamente, en el caso contrario tendríamos

$$\begin{aligned} f(k_1, \dots, k_t) &\geq k_1 + \sum_{i=2}^r \min(n_i, k_1 - 1) > \sum_{i=1}^r \min(p_i, k_1 - 1) = \\ &= \sum_{i=1}^r p_i = f(k_1, \dots, k_t). \end{aligned}$$

(c) Ahora realicemos la demostración por inducción respecto de t . Para $t = 1$ tenemos:

$$n(k; n_2, \dots, n_r) = k + \sum_{i=2}^r \min(n_i, k-1),$$

y, de acuerdo con (b), en cualquier partición (p_1, \dots, p_r) del número $n(k; n_2, \dots, n_r)$ en r partes tal que $p_i \leq n_i, i = 2, \dots, r$, existe una parte que no es inferior a k .

(d) Supongamos ahora que lo requerido se cumple hasta $t-1$; mostremos que esto es así también para t . Sea (p_1, \dots, p_r) una partición arbitraria del número $f(k_1, \dots, k_t)$ en r partes, en la cual $p_i \leq n_i, i = 2, \dots, r$. Entonces, con arreglo a (b), en esta partición existe una parte $p_j \geq k_1$. Quiere decir, si $(k_2, \dots, k_t) \subseteq (p_1, \dots, p_j - k_1, \dots, p_r)$, entonces el encajamiento requerido $(k_1, \dots, k_t) \subseteq (p_1, \dots, p_r)$ tiene lugar. El encajamiento penúltimo se desprende, a su vez, de la desigualdad demostrada más arriba $f(k_1, \dots, k_t) - k_1 \geq f(k_2, \dots, k_t)$, y de la suposición de inducción:

$$\begin{aligned} p_1 + \dots + p_j - k_1 + \dots + p_r &= f(k_1, \dots, k_t) - \\ - k_1 &\geq f(k_2, \dots, k_t) = n(k_2, \dots, k_t; n_2, \dots, n_r). \end{aligned}$$

6.109. Sea M un conjunto de todas aquellas particiones (p_1, \dots, p_r) $n = \sum_{i=1}^r p_i$, en las cuales $p_i \leq n_i, i = 2, \dots, r$, y sea M_j un subconjunto de aquellas particiones de M , para las cuales $p_j \leq n_j - 1, j = 2, \dots, r$. Está claro que $M = \bigcup_{j=2}^r M_j \cup (n_1, \dots, n_r)$. Por cuanto $n(k_1, \dots, k_t; n_2, \dots, n_r) > n$, existe en M una partición (q_1, \dots, q_t) tal que $(k_1, \dots, k_t) \subseteq (q_1, \dots, q_r)$, pero, dado que

$$n \geq \max_{2 \leq j \leq r} n(k_1, \dots, k_t; n_2, \dots, n_j - 1, \dots, n_r),$$

entonces para cada $(p_1, \dots, p_r) \in \bigcup_{j=2}^r M_j$ tiene lugar el encajamiento $(k_1, \dots, k_t) \subseteq (p_1, \dots, p_r)$; esto quiere decir necesariamente que $(q_1, \dots, q_r) = (n_1, \dots, n_r)$.

$$\begin{aligned} 6.110. \quad n(k_1, \dots, k_t; (m^{r-1})) &= \max_{1 \leq i \leq t} \left(\sum_{j=1}^i k_j + (r-1) \min(m, k_i - 1) \right) = \\ &= \max \left(\sum_{j=1}^l k_j + (r-1)m, \sum_{j=1}^l k_j + n(k_{l+1}, \dots, k_t; r) \right) = \sum_{j=1}^l k_j + \max((r-1)m, \\ n(k_{l+1}, \dots, k_t, r) &= \sum_{j=1}^l k_j + n(m+1, k_{l+1}, \dots, k_t; r) - m - 1. \end{aligned}$$

6.111. Veamos las estimaciones para $m(k, t, r)$ en el caso cuando $k \neq 0 \pmod{r^t - (r-1)^t}$. Supongamos que en adelante Q denota siempre un vector t -dimensional con componentes

$$q_i = \left(\frac{kr^{t-i}(r-1)^{i-1}}{r^t - (r-1)^t} \right), \quad i = 1.$$

y $l = \sum_{i=1}^t \{q_i\}$. Señalemos una propiedad del vector Q . Precisamente, las componentes q_i del vector Q o son simultáneamente números no enteros, o bien son todos números enteros y este último caso tiene lugar cuando y sólo cuando k es múltiplo de $r^t - (r-1)^t$. Esta propiedad se deduce directamente de que los números $r^{t-i} - (r-1)^{t-i}$ y $(r^t - (r-1)^t)$ son recíprocamente primos para cada $i \in [t]$. Por consiguiente, para cada $i \in [t]$ son válidas las estimaciones:

$$\frac{1}{r^t - (r-1)^t} \leq \{q_i\} \leq 1 - \frac{1}{r^t - (r-1)^t}.$$

Además, es evidente que $1 \leq l \leq t-1$.

Demostremos ahora la siguiente estimación inferior

$$m(k, t, r) \geq \frac{kr^t}{r^t - (r-1)^t} - r + 1 + l - f(\{Q\}; r)$$

Si $K = (k_1, \dots, k_t) | -k$, tenemos

$$f(K; r) = \frac{kr^t}{r^t - (r-1)^t} + f(K-Q; r).$$

o.z

$$f(K-Q; r) = f(K - [Q] - \{Q\}; r) \geq f(K - [Q]; r) - f(\{Q\}; r) - r + 1.$$

La última desigualdad se deduce de la desigualdad para la función f , d mostrada en el problema 6.98, si ponemos en ella $X = K - [Q] - \{Q\}$, $Y = \{Q\}$. Además, por cuanto X es un vector de números enteros que cuenta con componentes positivas, entonces

$$\min_{s \in S} f(X_s; r) \geq \sum_j x_j,$$

y, por consiguiente $f(K - [Q]; r) \geq \sum_{i=1}^t (k_i - [q_i]) = l$; lo que significa que

$$f(K - [Q]; r) - f(\{Q\}; r) - r + 1 \geq l - r + 1 - f(\{Q\}; r).$$

Es notable que el segundo miembro de la estimación obtenida es siempre un número entero.

De la estimación demostrada se deduce que si $\{q_M\} = \max_{1 \leq i \leq t} \{q_i\}$, entonces

$$m(k, t, r) \geq \frac{kr^t}{r^t - (r-1)^t} - \{q_M\} (r-1),$$

puesto que

$$f(\{Q\}; r) \leq \max_{1 \leq i \leq t} \sum_{j=1}^i \{q_j\} + \max_{1 \leq i \leq t} (\{q_i\} - 1)(r-1) \leq l + (\{q_M\} - 1)(r-1).$$

Hay otra estimación inferior que tiene una forma más geométrica, a saber, si $d = \min \|Z - Q\|_1$, donde \min se toma por todos los vectores de números enteros $Z = (z_1, \dots, z_t)$ tales que $\sum_{i=1}^t z_i = k$, entonces

$$m(k, t, r) \geq \frac{kr^t}{r^t - (r-1)^t} + \frac{d(r-1)^{t-1}}{r^{t-1} - (r-1)^{t-1}} - r + 1.$$

En particular, esta estimación indica que una partición minimizante no puede ser un vector entero que está demasiado lejos de Q según la métrica l_1 . Además, ella puede emplearse al estimar la frontera del alojamiento completo de cualquier partición concreta $K = (k_1, \dots, k_t) | -k$:

$$n(K; r) \geq \frac{kr^t}{r^t - (r-1)^t} + \frac{\|K - Q\|_1 (r-1)^{t-1}}{r^{t-1} - (r-1)^{t-1}} - r + 1.$$

A título de estimación superior demos demos la desigualdad

$$\frac{kr^t}{r^t - (r-1)^t} - (q_{mt}) (r-1) \geq m(k, t, r),$$

donde $(q_{mt}) = \min_{t-l+1 \leq i \leq t} \{q_i\}$. Con este fin estudiemos la partición $K = ([q_1], \dots, [q_{t-l}], [q_{t-l+1}], \dots, [q_t]) | -k$.

Para esta partición

$$\begin{aligned} f(K - Q) &= \max_{t-l+1 \leq i \leq t} \left(\sum_{j=1}^i (k_j - q_j) + (k_t - q_t - 1)(r-1) \right) \leq \\ &\leq \max_{t-l+1 \leq i \leq t} \left(\sum_{j=1}^i (k_j - q_j) + \max_{t-l+1 \leq i \leq t} (k_t - q_t - 1)(r-1) \right) = \\ &= - \min_{t-l+1 \leq i \leq t} \{q_i\} (r-1), \end{aligned}$$

lo que nos lleva a lo requerido.

Obtenemos pues las estimaciones bilaterales:

$$\frac{kr^t - r + 1}{r^t - (r-1)^t} \geq m(k, t, r) \geq \frac{kr^t + r - 1}{r^t - (r-1)^t} - r + 1.$$

Precisemos un tanto las estimaciones generales obtenidas.

Cuando $r \leq 2$, la diferencia entre las estimaciones superiores e inferiores es siempre menor que la unidad y, por tanto, en virtud de que $m(k, t, r)$ es un número entero, ellas dan el valor preciso:

$$m(k, t, r) = \left\lfloor \frac{kr^t}{r^t - (r-1)^t} \right\rfloor \left[-r + 1, r = 1, 2. \right.$$

Cuando $l=1$ hagamos uso para la estimación superior de la partición

$$K = ([q_1], \dots, [q_{M-1}], [q_M], [q_{M+1}], \dots, [q_t]) | -k.$$

Para esta partición

$$\begin{aligned} f(K - Q) &= - \sum_{j=1}^{M-1} \{q_j\} + (1 - \{q_M\}) - \{q_M\} (r-1) = \\ &= 1 - \sum_{j=1}^M \{q_j\} - \{q_M\} (r-1) = \sum_{j=M+1}^t \{q_j\} - \{q_M\} (r-1) < 1 - \{q_M\} (r-1). \end{aligned}$$

Esto nos da, en comparación con la estimación inferior obtenida, una diferencia inferior a la unidad. Por consiguiente, cuando $l=1$, tenemos

$$m(k, t, r) = \frac{kr^t}{r^t - (r-1)^t} + \sum_{j=M+1}^t \{q_j\} - \{q_M\} (r-1).$$

o bien

$$m(k, t, r) = \left\lceil \frac{kr^t}{r^t - (r-1)^t} - (q_M)(r-1) \right\rceil.$$

Así pues, cuando $t = 1$, la frontera del alojamiento completo se minimiza por el vector de valor entero más próximo a Q respecto de la métrica l_1 . En particular, esto ofrece la solución completa de la cuestión sobre la minimización para el caso de $t = 2$.

6.112. Está claro que siempre $n(Y; r) \leq C$, por lo cual pongamos $C = m(k, t, r)$. Si en este caso $\sum_{j=1}^t y_j = k$, entonces $n(Y; r) = m(k, t, r)$ por ser mínimo el número $m(k, t, r)$. Si $\sum_{j=1}^t y_j > k$, entonces, al disminuir la cantidad requerida de componentes y_j del vector Y en una magnitud igual a $(\sum_{j=1}^t y_j - k)$, obtendremos la partición del número k que tiene el valor de la frontera del alojamiento completo no superior a $m(k, t, r)$, y, por tanto, igual a $m(k, t, r)$.

En el caso alternativo de $\sum_{j=1}^t y_j < k$ veamos una partición minimizante $X = (x_1, \dots, x_t) \mid -k$, que es la más «grande» en el sentido del orden lexicográfico sobre el conjunto $P_t(k)$ y veamos también el $i \in [t]$ mínimo, para el cual $x_i > y_i$. Tal i existe, evidentemente, siempre, con la particularidad de que $[i-1] \neq 0$, puesto que $x_1 \leq [(m+r-1)/r] = y_1$.

Existe tal $j \in [i-1]$ que $x_j < y_j$, puesto que de lo contrario: de $x_j = y_j$, $j = 1, \dots, i-1$, $x_i > y_i$ tenemos que $\sum_{j=1}^i x_j + (r-1)(x_i - 1) > m(k, t, r)$. En efecto, por cuanto en tal caso $x_i \geq y_i + 1$, entonces

$$\sum_{j=1}^i x_j + (r-1)(x_i - 1) \geq \sum_{j=1}^i y_j + (r-1)(y_i - 1) + r > m(k, t, r),$$

puesto que el incumplimiento de la última desigualdad es equivalente a que

$$y_i \leq \left[(m-1) - \sum_{j=1}^{i-1} y_j / r \right] = y_i - 1.$$

Examinemos ahora tal $j \in [i-1]$ que $x_j < y_j$, y estimemos para la partición $X' = (x'_1, \dots, x'_t) = (x_1, \dots, x_j + 1, \dots, x_i - 1, \dots, x_t) \mid -k$ el valor de su frontera de alojamiento completo $n(X'; r)$.

Sea v un índice que maximiza $n(X'; r)$, es decir $n(X'; r) = \sum_{w=1}^v x'_w + (r-1)(x'_v - 1)$. Si $v > i$, está claro que $n(X'; r) = n(X; r) = m(k, t, r)$.

Si $v = i$, entonces $n(X'; r) = \sum_{w=1}^i x'_w + (r-1)(x'_i - 1) = \sum_{w=1}^i x_w + (r-1) \times (x_i - 2) + 1 = \sum_{w=1}^i x_w + (r-1)(x_i - 1) - r + 2 \leq n(X; r) - r + 2 = m(k, t, r) - r + 2$, lo que siempre no sobrepasa de $m(k, t, r)$ cuando $r \geq 2$.

Si $v < i$, entonces $x'_w \leq y_w$, $w = 1, \dots, v$, lo que quiere decir que en este caso también

$$n(X'; r) = \sum_{w=1}^v x'_w + (r-1)(x'_v - 1) \leq n(Y; r) \leq m(k, t, r).$$

Así pues, $n(X'; r) \leq m(k, t, r)$, y, por consiguiente, $n(X'; r) = m(k, t, r)$, es decir, la partición X' es también minimizante, pero al mismo tiempo $X' \not\geq X$

lo que contradice el hecho de que X es máximo en el sentido del orden lexicográfico.

Advirtamos que en virtud de las acotaciones obtenidas más arriba para $m(k, t, r)$, el tanteo respecto de C no sobrepasa la diferencia entre estas acotaciones, es decir, $r - 1$.

6.113. El t buscado es una raíz entera mínima de la ecuación $k = m(k, t, r)$. Por eso, la solución se obtiene empleando el resultado del problema anterior. El tanteo en este caso es también limitado por las estimaciones que se tienen para t , las cuales se desprenden de las estimaciones para $m(k, t, r)$, a saber,

$$\frac{\ln(k+r-1)}{\ln(r) - \ln(r-1)} \geq t(k, r) \geq \frac{\ln(k+r-1) - \ln(r-1)}{\ln(r) - \ln(r-1)}.$$

De aquí se deduce, en particular, que para r fijado y $n \rightarrow \infty$, el número mínimo posible de composiciones por medio de las cuales pueden realizarse todas las salidas en el esquema de alojamiento de n partículas indistinguibles en r células indistinguibles se porta asintóticamente como la magnitud $\frac{\ln(k+r-1)}{\ln(r) - \ln(r-1)}$ y el término residual (que siempre no sobrepasa de cero), como una magnitud de orden $\frac{\ln(r-1)}{\ln(r) - \ln(r-1)}$.

El propio sistema compuesto de un número mínimo de composiciones se define por el vector $Y = (y_1, \dots, y_t)$ de la formulación del problema.

6.114. La relación existente entre los encajamientos de las particiones y los pesajes se basa en el siguiente hecho simple. El sistema de pesas $(k_1, \dots, k_t) | -k$ asegura el pesaje (empleando un solo platillo) de la carga $v \leq k$ cuando y sólo cuando $(k_1, \dots, k_t) \subseteq (v, k - v)$. Por consiguiente, este sistema de pesas asegura el pesaje de cualquier carga entera no más pesada que k cuando y sólo cuando la partición $(k_1, \dots, k_t) | -k$ se encaja en toda partición k en dos partes a lo sumo, y, de acuerdo con el principio de alojamiento completo, esto es posible si y sólo si $k \geq n(k_1, \dots, k_t; 2)$, lo que, a su vez, es equivalente al sistema de desigualdades

$$k_t \leq 1 + \sum_{j=1}^{t-1} k_j, \quad t=1, \dots, t.$$

De aquí se deduce, en particular, que

$$k_t \leq \frac{k+1 - \sum_{j=1}^{t-1} k_j}{2} \leq 2^{t-1}, \quad t=1, \dots, t.$$

Esto significa que el número mínimo posible de pesas $t_1(k)$ para pesar empleando un solo platillo es la raíz entera mínima de la desigualdad $k \geq m(k, t, 2)$, lo que nos conduce a que $t_1(k) = \lceil \log_2(k+1) \rceil$.

El pesaje empleando dos platillos se reduce al pesaje con un platillo. El sistema de pesas $(k_1, \dots, k_t) | -k$ asegura el peso con dos platillos de una carga $v \leq k$, si y sólo si $(k_1^2, \dots, k_t^2) \subseteq (k-v, k+v)$.

En efecto, la igualdad $v = \sum_{j=1}^t \varepsilon_j k_j$, donde $\varepsilon_j = 0, 1, -1$, es equivalente

a la igualdad $k+v = \sum_{j=1}^t \eta_j k_j$, donde $\eta_j = (\varepsilon_j + 1) = 0, 1, 2$.

Por eso el sistema de pesas $(k_1, \dots, k_t) | -k$ asegura el pesaje preciso con dos platillos de cualquier carga entera no más pesada que k , si y sólo si $2k \geq$

$\geq n(k_1^2, \dots, k_t^2; (k)) = n(k_1^2, \dots, k_t^2; 2)$, lo que, de acuerdo con el principio de alojamiento completo, es equivalente al sistema de desigualdades

$$k_i \leq 1 + 2 \sum_{j=i+1}^t k_j, \quad i=1, \dots, t.$$

De aquí se deduce, en particular, que

$$k_i \leq \left[\frac{2k+1-2 \sum_{j=1}^{i-1} k_j}{3} \right] \leq 3^{t-i}, \quad i=1, \dots, t.$$

Por consiguiente, el número mínimo posible de pesas $t_2(k)$ para poder pesar empleando dos platillos es igual a $t_2(k) = \lceil \log_3(2k+1) \rceil$.

Los pesajes empleando un solo platillo en $p = r - 1$ balanzas con ayuda de las pesas $(k_1, \dots, k_t) | -k$ son equivalentes a que $k \geq n(k_1, \dots, k_t; r)$, por lo cual el número mínimo de pesas es t , es decir, la raíz mínima de la desigualdad $k \geq m(k, t, r)$.

El pesaje de una carga v empleando p platillos en una balanza con ayuda de las pesas $(k_1, \dots, k_t) | -k$ es equivalente al encaje $(k_1^p, \dots, k_t^p) \subseteq (k-r, (p-1)k+v) | -pk$. En este caso el peso de cualquier carga es equivalente a la desigualdad $pk \geq n(k_1^p, \dots, k_t^p; (k)) = n(k_1^p, \dots, k_t^p; 2)$, por lo que el número mínimo de pesas es t , es decir, la raíz mínima de la desigualdad $pk \geq p\mu(k, t, 1+1/p)$, donde $\mu(k, t, 1+1/p)$ es el mínimo de la función de alojamiento completo.

§ 3. Constantes geométricas extremales

Demos a conocer una identidad muy útil. Si $k \geq l \geq t$,

$\sigma_t \subseteq \sigma_h$, entonces

$$\sum_{\sigma_t \subseteq \sigma_l \subseteq \sigma_h} (\sigma_l) = (\sigma_h) \binom{k-t}{l-t} + (\sigma_h - \sigma_l) \binom{k-t-1}{l-t-1} \quad (6.11')$$

6.116. Sea σ_t^* tal que $\max_{\sigma_t \subset \sigma_h} \|\sigma_l\| - \|\sigma_t^*\|$; entonces, de acuerdo con (6.11'), para $k \geq 2l$ tenemos

$$\sum_{\sigma_l \subseteq \sigma_h - \sigma_t^*} (\sigma_l) = (\sigma_h - \sigma_t^*) \binom{k-l-1}{l-1},$$

de donde

$$\|\sigma_t^*\| \geq \frac{l}{k-l} \|\sigma_h - \sigma_t^*\|, \quad (6.12')$$

por consiguiente, para $k \geq 2l$ en cualquier sistema σ_h siempre existe un subsistema $\sigma_l \subset \sigma_h$ que satisface (2). En cambio, si $k \leq 2l$, entonces, de acuerdo con (6.11'),

$$\sum_{\sigma_h \subset \sigma_l^* \subset \sigma_l \subset \sigma_h} (\sigma_l) = (\sigma_h - \sigma_l^*) \binom{l}{2l-k} + \sigma_l^* \binom{l-1}{2l-k-1},$$

de donde

$$\|\sigma_l^*\| \geq \frac{l}{3l-k} \|\sigma_h - \sigma_l^*\|, \quad (6.13')$$

por consiguiente, para $k \leq 2l$, en cualquier sistema σ_h existe un subsistema $\sigma_l \subset \sigma_h$ que satisface (6.13').

La inmejorabilidad de las desigualdades (6.12') y (6.13') se demuestra por el sistema $\sum (k, l_\infty^h)$ de k vectores unitarios del espacio l_∞^h (espacio R^k con la norma $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq k} |x_i|$) de la forma siguiente:

$$x_1 = \left(-1, \frac{1}{2l-1}, \dots, \frac{1}{2l-1} \right), \\ x_2 = \left(\frac{1}{2l-1}, -1, \frac{1}{2l-1}, \dots, \frac{1}{2l-1} \right), \dots, x_h = \\ = \left(\frac{1}{2l-1}, \dots, \frac{1}{2l-1}, -1 \right).$$

Además, (6.12') no puede ser mejorado en todo X , lo que se demuestra por un haz de k vectores unitarios. Al mismo tiempo (6.13') puede ser reforzada, por ejemplo, en el espacio de Hilbert: ¿en cuánto? Así pues,

$$\text{para } k \geq 2l \quad A(k, l; X) = l/(k-l), \\ \text{para } k \leq 2l \quad \inf_X A(k, l; X) = A(k, l; l_\infty^h) = l/(3l-k).$$

6.117. De acuerdo con (6.11'), si $k \geq r \geq l \geq 1$, $\sigma_r \subset \sigma_h$, entonces $\sum_{\sigma_l \subset \sigma_r} (\sigma_l) = (\sigma_r) \binom{r-1}{l-1}$; por consiguiente,

$$\max_{\sigma_l \subset \sigma_r} \|\sigma_l\| \geq \frac{l}{r} \|\sigma_r\|. \quad (6.14')$$

Evidentemente, (6.14') no puede ser mejorado en todo X , lo que se demuestra por un haz de k vectores unitarios

Sea $k \geq l+r \geq 2r$, $\sigma_r \subset \sigma_h$, entonces, de acuerdo con (6.11'),

$$\binom{k-r-1}{l-1} \sum_{\sigma_r \subset \sigma_l \subset \sigma_h} (\sigma_l) - \binom{k-r-1}{l-r-1} \sum_{\sigma_l \subset \sigma_h - \sigma_r} (\sigma_l) = \\ = \sigma_r \left(\frac{k-l}{l-r} \right) \binom{k-r-1}{l-1},$$

de donde

$$\|\sigma_l\| \geq \frac{l}{2l-r} \|\sigma_r\|. \quad (6.15')$$

Las desigualdades (6.14') y (6.15') no pueden ser mejoradas en la clase de vectores unitarios, basta a título de σ_h considerar $\sum (k, l_\infty^h)$. La desigualdad (6.15') tampoco se mejora en todo X : hágase la construcción correspondiente (unidimensional).

Sea $r \leq l$, $k \leq l+r$, $\sigma_r \subseteq \sigma_h$, entonces, de acuerdo con (6.11')

$$\binom{r}{l-k+r} \sum_{\sigma_r \subset \sigma_l \subset \sigma_h} (\sigma_l) - \binom{k-r-1}{l-r-1} \sum_{\sigma_h - \sigma_r \subset \sigma_l \subset \sigma_h} (\sigma_l) = \\ = (\sigma_r) \left[\binom{k-1}{l-r} \binom{r}{l-k+r} - \binom{r-1}{l-k+r-1} \binom{k-r-1}{l-r-1} \right]$$

de donde

$$\|\sigma_l\| \geq \frac{l}{r} \frac{(k-l)}{(k+l-2r)} \|\sigma_r\|, \quad (6.16')$$

La estimación (6.16') no puede ser mejorada en todo X : constrúyase un ejemplo (unidimensional).

Así pues,

$$\begin{aligned} \text{para } k \geq r \geq l & \quad B(k, l, r; X) = l/r, \\ \text{para } k \geq l + r \geq 2r & \quad B(k, l; r; X) = l/(2l - r), \\ \text{para } k \leq l + r, l \geq r & \quad B(k, l, r; X) = l(k-l)/r(k+l-2r). \end{aligned}$$

6.118. Sea, ahora $\delta(l, k; X) = \inf_{\sigma_h \subset X} \max_{\sigma_l \subset \sigma_h} \|\sigma_l\|$, entonces de acuerdo con las definiciones de B y δ , tenemos la desigualdad $\delta(l, k; X) \geq B(k, l, r; X)$ $\delta(r, k; X)$, la cual sugiere, para $r = 1, k > l$, la estimación $\delta(l, k; X) \geq l/(2l - 1)$ que se realiza por $\sum (k, l_\infty^h)$, por consiguiente, cuando $k > l$,

$$\inf_X \delta(l, k, X) = \delta(l, k; l_\infty^h) = l/(2l - 1),$$

Para un espacio de Hilbert cuya dimensión no es inferior a $k - 1$ tenemos

$$\delta(l, k; H) = \sqrt{l(k-l)/(k-1)}. \quad (6.17')$$

La demostración de (6.17') véase en la solución del problema 6.121. Además, puede mostrarse [Sidorenko A.F.], que si l_∞^d es un espacio R^d con la norma

$$\|x\| = \sum_{i=1}^d |x_i|, \text{ entonces } \delta(l, l+1; l_1) = u/(2u-1), \quad (6.18')$$

$$\delta(2, k; l_1) = \begin{cases} (k-2)/(k-1), & k \equiv 0 \pmod{2}, \\ (k-1)/k, & k \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases} \quad (6.19')$$

con la particularidad de que la dimensión mínima $d(k)$ del espacio l_1^d , que realiza (6.19'), se porta de una manera muy irregular: $d(2) = 1, d(3) = d(4) = 3, d(5) = d(6) = 10, d(7) = d(8) = 7$.

6.119. Pongamos $z_{i_1}, \dots, i_l = \sum_{j=1}^l V_j x_{ij}$. Entonces tiene lugar la identidad

$$\sum_{i_1, \dots, i_l} z_{i_1, \dots, i_l} = (\sigma_h) \left(\sum_{i=1}^l V_i \right) \binom{k-1}{l-1} (l-1)! \quad \text{Por consiguiente,}$$

$\max_{i_1, \dots, i_l} \|z_{i_1, \dots, i_l}\| \geq \|\sigma_h\| \left| \sum_{i=1}^l V_i \right| / k$. La inmejorabilidad de esta desigualdad se demuestra por un haz de k vectores unitarios. Así pues, $C(\bar{V}_l, \bar{I}_h) = \left| \sum_{i=1}^l V_i \right| / k$. En particular, llegamos a que para cada sistema $\sigma_h \subset X$ y cualquier sistema de números V_1, \dots, V_h existe tal permutación de índices π , para la cual $\left\| \sum_{i=1}^h V_{\pi(i)} X_i \right\| \geq \left| \sum_{i=1}^h V_i \right| k^{-1} \|\sigma_h\|$.

6.120. Para $\sigma_h \subset X$ pongamos $b_j = i \binom{k-i}{l-i} (l-i)!$, $A = \sum_{\sigma_j \subset \sigma_h} \left(\sum_{i=1}^l V_i x_i \right)^2$, donde el cuadrado se entiende en el sentido de un producto escalar, y en este caso tenemos

$$\begin{aligned} A &= b_1 \sum_{i=1}^l V_i^2 \sum_{i=1}^h x_i^2 + 2b_2 \sum_{i < j} V_i V_j \sum_{i < j}^h x_i x_j = \\ &= b_2 \sum_{i < j} V_i V_j \left(\sum_{i=1}^h x_i \right)^2 + \left[b_1 \sum_{i=1}^l V_i^2 - b_2 \sum_{j < i} V_i V_j \right] \sum_{i=1}^h x_i^2 = \\ &= b_1 \sum_{i=1}^l V_i^2 - b_2 \sum_{i < j} V_i V_j, \end{aligned}$$

después de lo cual basta pasar a las normas.

6.121. En la clase de todos los espacios lineales normados tiene lugar la fórmula siguiente

$$\inf_X \delta(\bar{V}_n; X) = \delta(\bar{V}_n; l_\infty^n) = \frac{|V(V_1 - V_n)|}{|V - V_1| + |V - V_n|}, \quad (6.20')$$

donde $V = \sum_{i=1}^n V_i$, $V_1 \geq V_2 \geq \dots \geq V_n$. La fórmula (6.20') se realiza o bien

por un haz de n vectores unitarios, o bien en l_∞ por una construcción del tipo $x_1 = (1, a, \dots, a)$, $x_2 = (a, 1, \dots, a)$, \dots , $x_n = (a, a, \dots, 1)$, donde $a = (V_1 + V_n)/(2V - V_1 - V_n)$. El vector \bar{V}_n se llama *equilibrado*, si $\forall t (1 \leq t \leq n) V(V - V_t) > 0$. De (6.20') tenemos:

si \bar{V}_n no está equilibrado, entonces $\delta(\bar{V}_n; X) = |V|$;

si \bar{V}_n es de signo constante y $|V_1| \geq |V_2| \geq \dots \geq |V_n| \geq 0$, entonces

$$\inf_X \delta(\bar{V}_n; X) = \delta(\bar{V}_n; l_\infty^n) = V \cdot V_1 / |2V - V_1|;$$

si \bar{V}_n está equilibrado y es de signo constante, entonces

$$\inf_X \delta(\bar{V}_n; X) = \delta(\bar{V}_n; l_\infty^n) = (V(V_1 - V_n)) / (2V - V_1 - V_n);$$

si el vector ponderal está equilibrado y si $V_1 = -V_n$, entonces

$$\inf_X \delta(\bar{V}_n; X) = \delta(\bar{V}_n; l_\infty^n) = V_1.$$

En el espacio de Hilbert H tenemos:

si $\dim(H) \geq n-1$, $\sum_{i \neq j} V_i V_j > 0$, entonces

$$\delta(V_n; H) = \left(\frac{n \sum_{i=1}^n V_i^2 - V^2}{n-1} \right)^{1/2};$$

si $\dim(H) \geq 1$, $\sum_{i \neq j} V_i V_j \leq 0$, entonces

$$\delta(\bar{V}_n; H) = |V|.$$

La demostración repite casi por completo la resolución del problema 6.120. 6.122. De acuerdo con el problema 6.53, el grafo $G^2(S_n)$ posee para $p \leq \leq 2(q-1)$ la propiedad de que $\forall S_p \subset S_n \exists S_q \subset S_p : C^2(S_q) \subset G^2(S_n)$, cuando y sólo cuando $\exists S_{n-p+q} \subset S_n : C^2(S_{n-p+q}) \subset G^2(S_n)$. Por consiguiente, aplicada dicha propiedad a nuestros vectores en el espacio de Hilbert, llegamos a que siempre existe un subsistema $\sigma_{n-p+q} \subset \sigma_n$, que consta de los vectores ortogonales de dos en dos (para $p \leq 2(q-1)$, $k=2$, $c=\sqrt{2}$), por consiguiente,

$$|\sigma_n| \leq |\sigma_{n-p+q}| + |\sigma_n - \sigma_{n-p+q}| \leq \sqrt{n-p+q} + p - q;$$

la exactitud de esta estimación la demuestra el punto de referencia de $n-p+q$ vectores unitarios y el haz de $p-q$ vectores unitarios dirigido según el vector de la suma de todos los vectores del punto de referencia mencionado.

6.123. Sobre un conjunto de puntos $\sigma_n \subset X$ construyamos, como sobre los vértices, un l -grafo $G^l \subset C^l(\sigma_n)$, rigiéndonos por la regla: $\sigma_l \in G^l \iff \|\sigma_l\| \geq \geq \delta(l, k; X)$. Si $|G^l| < T(n, k, l)$, entonces

$$\exists \sigma_k^* \subset \sigma_n; \forall \sigma_l \in \sigma_k \quad \|\sigma_l\| < \delta(l, k; X)$$

o bien $\exists \sigma_k^* \subset \sigma_n$: $\max_{\sigma_l \subset \sigma_k} \|\sigma_l\| < \delta(l, k; X)$, pero en tal caso

$$\min_{\sigma_n \subset X} \max_{\sigma_l \subset \sigma_k} \|\sigma_l\| \leq \max_{\sigma_l \subset \sigma_k^*} \|\sigma_l\| < \delta(l, k; X),$$

y, por consiguiente,

$$\min_{\sigma_n \subset X} \max_{\sigma_l \subset \sigma_k} \|\sigma_l\| < \delta(l, k; X),$$

lo que contradice la definición de $\delta(l, k; X)$.

6.125. Indicaciones. 1) Muéstrase que para n suficientemente grande

$$\delta(2, n; l_1^n) = 1 - 1 / \left(2 \right) \frac{n}{2} \left[-1 \right]$$

y, en particular, $\delta(2, 4n; l_1^{4n-1}) \geq (4n-2)/(4n-1)$.

2) Muéstrase que si

$$\max_{1 \leq i \leq j \leq 4n} \|X_i + X_j\| = \delta(2, 4n; l_1^{4n-1}),$$

donde $x_1, \dots, x_{4n} \in l_1^{4n-1}$, $\|X_i\| = 1$, $i = 1, \dots, 4n$, entonces, para cualesquiera i y j ($1 \leq i < j \leq 4n$) $\|X_i + X_j\| = \delta(2, 4n; l_1^{4n-1})$.

Acerca de los problemas 6.115—6.125 véanse Katona G., Stechkin B.S. — Memorias de la A.C. de la URSS, 1980, 251, N° 6, p. 1293—1296, en ruso; Sidorenko A.F., Stechkin B.S. — Apuntes matemáticos, 1981, 29, N° 5, p. 691—709, en ruso; Kashin B.S., Konyagin S.V. — Obras del Instituto de Matemática de la A.C., 1981, 157, p. 64—67, en ruso.

6.126. El problema fue planteado por L. Mozer. Las estimaciones para la figura convexa que cubra un tornillo sin fin unitario véanse en [Poole G., Garrriets J., Bull. Amer. Math. Soc., 1973, 79, N° 2, p. 462—463]. Si se omite la condición de convexidad, la situación cambia. Aquí es de interés el caso de un tornillo sin fin de n eslabones (cada eslabón es un segmento). Si las longitudes de todos los eslabones son racionales, existe una región de recubrimiento de área tan pequeña como se quiera y de diámetro ≤ 2 (K.A. Borovkov).

ANÁLISIS COMBINATORIO EN LOS CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

§ 1. Conjuntos parcialmente ordenados

7.6. El diagrama de Hasse se representa en la fig. 7.1'. El conjunto parcialmente ordenado a examinar tiene un único elemento maximal $\{a, b, c, d\}$ que es 1, y también un único elemento minimal \emptyset que es 0. Como ejemplo de anticadenas intervienen: $\{a\}$, $\{bc\}$, $\{bd\}$ (anticadena no máxima y no saturada; $\{a\}$,

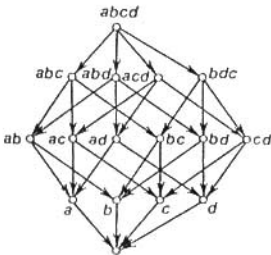


Fig. 7.1'.

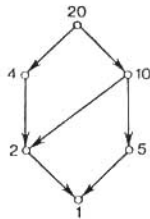


Fig. 7.2'.

$\{bc\}$, $\{bd\}$, $\{cd\}$ (anticadena no máxima, pero saturada); $\{ab\}$, $\{ac\}$, $\{ad\}$, $\{bc\}$, $\{bd\}$, $\{cd\}$ (anticadena máxima y saturada). Las cadenas aquí son, por ejemplo, \emptyset , $\{a\}$, $\{ab\}$, $\{abc\}$, $\{abcd\}$ y \emptyset , $\{ab\}$, $\{abcd\}$. La primera de estas cadenas es máxima y saturada.

7.7. El diagrama de Hasse para divisores naturales del número 20, ordenados según la divisibilidad, se representa en la fig. 7.2'.

7.11. El diagrama de Hasse del conjunto parcialmente ordenado $P(S)$ está representado en la fig. 7.3'. Los coátomos en $P(5)$ son $(1,4)$ y $(2,3)$, y el átomo, $(1^3, 2)$. En total en $P(2)$ hay 2 elementos, en $P(3)$, 3, en $P(4)$, 5, en $P(5)$, 7, y en $P(10)$, 42 elementos.

7.14. El conjunto $\mathcal{D}(n)$ de todos los divisores del número natural n ordenado según la divisibilidad es, por ejemplo, un conjunto finito parcialmente ordenado; el conjunto N de todos los números naturales ordenados de un modo habitual es un conjunto linealmente ordenado y localmente finito; el conjunto N , ordenado según la divisibilidad, es un conjunto parcialmente ordenado localmente finito.

7.18. Un booleano $\mathcal{P}(S)$ sobre un conjunto infinito S no es un conjunto parcialmente ordenado y localmente finito. Todos los subconjuntos de un solo elemento del conjunto S son átomos; el conjunto vacío es 0, y todo el conjunto S es 1. En el booleano $\mathcal{P}(S_n)$ los subconjuntos A son tales que $|A| = n - 1$ son coátomos.

7.19. Véase el lema 1, § 1 del capítulo 8 [1].

7.20. Véase el teorema 1, § 1 del capítulo 8 [1].

7.22. Sea $\mathcal{P}(S_n)$ un booleano, en el cual $S_n = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. Analicemos la familia de todos los vectores binarios n -dimensionales $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ con la relación de orden: $\bar{a} \leq \bar{b}$ cuando y sólo cuando $a_i \leq b_i$, cuales-

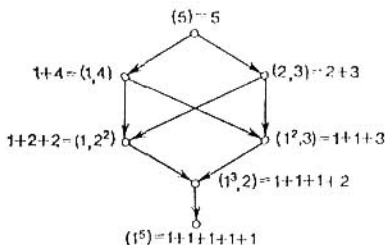


Fig. 7.3'.

quiera que sean $i = 1, 2, \dots, n$. Designemos este conjunto parcialmente ordenado por \sum_n . No es difícil comprobar que $\mathcal{P}(S_n) \cong \sum_n$. En efecto, si $x \in S_n$, pongamos entonces $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$, donde

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{si } x_i \notin X; \\ 1, & \text{si } x_i \in X. \end{cases}$$

Es fácil ver que φ es un isomorfismo. Más, aún $\sum_n \cong \sum_1 x \dots x \sum_1$, y, en virtud del problema 7.21, cada \sum_1 es isomorfo a la cadena de longitud 2.

7.26. Supongamos que $(\mathcal{D}(n), |)_k$ es un conjunto de divisores enteros positivos del número natural n el k -ésimo nivel del diagrama de Hasse para el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{D}(n), |)_k$. Se afirma que el número $d \in (\mathcal{D}(n), |)_k$ cuando y sólo cuando

$d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_t^{\beta_t}$, donde p_i son unos números primos y β_i son números naturales tales que $\sum_{i=1}^t \beta_i = k$.

7.32. Hágase uso del teorema de unicidad del desarrollo de un número en factores simples.

7.33. a) $|\mathcal{P}(S_n)| = 2^n$; $|\mathcal{D}(n)| = \prod_{i=1}^s (\alpha_i + 1)$ (hágase uso del resultado del problema 7.32).

El número de elementos en un belliano $(B(S_n), \subset)$ se llama *número de Bell* y se designa por $B(n)$.

$$B(n) = \sum_{h=1}^n \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = h \\ 1 \cdot \alpha_1 + \dots + n \alpha_n = n}} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_n! (1!)^{\alpha_1} \dots (n!)^{\alpha_n}};$$

$$|P(n)| = \sum_{h=1}^n \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = h \\ 1 \cdot \alpha_1 + \dots + n \alpha_n = n}} 1.$$

El número de subespacios del espacio vectorial n -dimensional $V_n(q)$ sobre un campo finito de q elementos se denomina *número de Galois* y se designa por $G(n, q)$.

$$G(n, q) = \sum_{h=0}^n \frac{(q^n - 1) \dots (q^{n-h+1} - 1)}{(q^h - 1) \dots (q - 1)}$$

$$b) |(\mathcal{P}(S_n), \subseteq)_h| = \binom{n}{k};$$

$|(\mathcal{Z}(n, 1))_h| = \binom{s+k-1}{k}$ (o al número de combinaciones con repetición de s elementos tomados de k a k), donde $k \leq \min_{1 \leq i \leq s} \alpha_i$.

El número de elementos del k -ésimo nivel del diagrama de Hasse para el belliano $(B(S_n), \subset)$ se llama *número de Stirling de segundo género* y se denota por $S(n, k)$.

$$S(n, k) = \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k}} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_n! (1!)^{\alpha_1} \dots (n!)^{\alpha_n}};$$

De este modo, $B(n) = \sum_{h=1}^n S(n, k)$

$$|(P(n), \leq)_h| = \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k}} 1;$$

$$|(V_n(q), \subset)_h| = \frac{(q^n - 1) \dots (q^{n-h+1} - 1)}{(q^h - 1) \dots (q - 1)} = \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q.$$

El número $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q$ se llama *coeficiente gaussiano q -binomial* [Goldman J., Rota G.C. — In: Comb. Th. and its Appl. Collog. Math. Soc. J. Bolyai, 1970, No 2, p. 477—509].

c) En el booleano hay $n!$ cadenas máximas de 0 a 1; en efecto, en la cadena $\{S_n \supset S_{n-1} \dots \supset S_1 \supset \{\emptyset\}\}$ el primer término se elige por un método, el segundo, por n métodos y el tercero, por $(n-1)$ métodos, etc.

Sea $g(n)$ un número de cadenas máximas de 0 a 1 en el belliano $(B(S_n), \subset)$.

Entonces, de la recurrencia $g(n) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} \binom{n-2}{r-1} g(r) g(n-r)$ ó

de la recurrencia $g(n) = \binom{n}{2} g(n-1)$ se deduce inmediatamente que $g(n) = n!(n-1)!/2^{n-1}$. Si $g(x, y)$ es el número de cadenas máximas en el belliano de x a y , entonces, por analogía tenemos que si $\pi \in (B(S_n), \subset)_h$, entonces $g(\pi, 1) = k!(k-1)!/2^{k-1}$; si $\pi \in (B(S_n), \subset)_{n_1, \dots, n_h}$ es un conjunto de todas las particiones del tipo (n_1, \dots, n_h) , entonces

$$g(0, \pi) = (n-k)! \prod_{i=1}^h n_i! / 2^{n-h}.$$

El problema sobre el cálculo de $f(n)$, o sea del número de cadenas máximas de 0 a 1 en $(P(n), \leq)$, fue planteado por B. Morgan.

Existen tales constantes $c_1 > 0,31553$, $c_2 < 11,31374$ que $c_1^n n^{n/2} < f(n) < c_2^n n^{n/2}$. Si $f(p)$ es el número de cadenas máximas de 0 a p en $(P(n), \subseteq)$, entonces

$$f(2^h, 3^i) = \binom{h+2i}{i} - \binom{h+2i}{i-1};$$

$$f(2^h, 3^i, 4^1) = (i+1) \left\{ \binom{h+2i+4}{i+2} - \binom{h+2i+4}{i+1} \right\};$$

$$f(2^h, 4^2) = (h+1)(h^3 + 19h^2 + 118h + 228)/12;$$

$$f(2^h, 3^1, 4^2) = (h+1)(h+6)(h^3 + 26h^2 + 225h + 636)/24;$$

$$f(2^h, 5^1) = (h+1)(h+3)(h+8)/6;$$

$$f(2^h, 3^1, 5^1) = (h+1)(3h^3 + 59h^2 + 358h + 648)/24;$$

$$f(2^h, 3^2, 5^1) = (h+1)(2h^4 + 63h^3 + 717h^2 + 3458h + 5800)/40;$$

$$f(2^h, 4^1, 5^1) = (h+1)(h^4 + 30h^3 + 323h^2 + 1458h + 2376)/24;$$

$$f(2^h, 6^1) = (h+1)(h+3)(h^2 + 22h + 88)/24;$$

$$f(2^h, 3^1, 6^1) = (h+1)(h^4 + 34h^3 + 386h^2 + 1784h + 2910)/30;$$

$$f(2^h, 7^1) = (h+1)(h^4 + 49h^3 + 606h^2 + 2764h + 3960)/120$$

[Erdős P., Guy R.K., Moon J.W. — J. London Math. Soc. (2), 1975, 9, p. 365—370].

Si $C(x, y)$ es el número de cadenas máximas de x a y en $(V_n(q), \subset)$, entonces el número $C(0, 1)$ de cadenas $V_n \supset V_{n-1} \supset \dots \supset V_1$ será, evidentemente, igual a

$$\left[\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right]_q \left[\begin{matrix} n-1 \\ n-2 \end{matrix} \right]_q \dots \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]_q = \frac{(q^n - 1) \dots (q - 1)}{(q - 1)^n}.$$

Análogamente,

$$C(x, y) = (q^{d(y)-d(x)} - 1) \dots (q - 1) / (q - 1)^{d(y)-d(x)},$$

donde $d(x)$ es la dimensión del subespacio x .

d) De este modo, si $C(0, v, 1)$ es el número de cadenas máximas de 0 a 1, que pasan por $v \in (V_n(q), \subset)$, entonces

$$C(0, v, 1) = C(0, v) C(v, 1) = \\ = (q^{d(v)} - 1) \dots (q - 1) (q^{r-d(v)} - 1) \dots (q - 1) / (q - 1)^n.$$

Para $x \in (\mathcal{P}(S_n), \subseteq)$ el número de cadenas máximas de 0 a 1, que pasan por x , es igual a $|x|! (n - |x|)!$.

Si $g(0, \pi, 1)$ es el número de cadenas máximas de 0 a 1, que pasan por $\pi \in (B(S_n), \subset)_{n_1, \dots, n_k}$, entonces

$$g(0, \pi, 1) = g(0, \pi) g(\pi, 1) = k! (k-1)! (n-k)! \prod_{i=1}^k n_i! / 2^{n-1}.$$

e) La anchura del booleano $(\mathcal{P}(S_n), \subseteq)$ es igual a $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ (véase el problema 7.20); si F es una anticadena del belliano $(B(S_n), \subset)$ y $F_{n_1, \dots, n_k} = F \cap (B(S_n), \subset)_{n_1, \dots, n_k}$, entonces

$$\sum_{h=1}^n \frac{k!}{\binom{n-1}{k-1}} \sum_{\substack{n_1 \geq \dots \geq n_h \geq 1 \\ n_1 + \dots + n_h = n}} \frac{|F_{n_1, \dots, n_h}|}{\binom{n}{n_1 \dots n_h}} \leq 1. \quad (7.1')$$

Llamemos *especificación secundaria de la partición* $\pi \in (B(S_n), \subset)$ un sistema de números $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, de donde α_i es el número de bloques de π de volumen i , de suerte que $1 \cdot \alpha_1 + \dots + n\alpha_n = n$. Por $(B(S_n), \subset)_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ denotemos el conjunto de todas las particiones con especificación secundaria $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Entonces, si $F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} = F \cap (B(S_n), \subset)_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ a relación (7.1') puede escribirse en la forma siguiente

$$\sum_{h=1}^n \frac{k!}{\binom{n-1}{k-1}} \sum_{\substack{1 \cdot \alpha_1 + \dots + n\alpha_n = n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = h}} \frac{|F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}| (1!)^{\alpha_1} \dots (n!)^{\alpha_n}}{n!} \leq 1. \quad (7.2')$$

Está claro que si F es una cadena no saturada, entonces (7.1') y (7.2') se realizan. Pongamos $F = (B(S_n), \subset)_h$, en este caso

$$|F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}| = \begin{cases} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_n! (1!)^{\alpha_1} \dots (n!)^{\alpha_n}}, & \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k, \\ 0 & \alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq k; \end{cases}$$

por consiguiente, de (7.2') tenemos

$$C_h(n) = \sum_{\substack{1 \cdot \alpha_1 + \dots + n\alpha_n = n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = h}} \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} = \binom{n-1}{k-1}, \quad (7.3')$$

donde $C_h(n)$ es, evidentemente, el número de composiciones de n en k sumandos (la composición es una representación de un número natural en forma de una suma ordenada de números naturales).

Si F es anticadena máxima en $(V_n(q), \subset)$, entonces $|F| = \left[\frac{n}{[n/2]} \right]_q$. Observemos que $\max_{0 \leq h \leq n} \left[\frac{n}{k} \right]_q = \left[\frac{n}{[n/2]} \right]_q$; en efecto, partiendo de la definición, tenemos

$$\left[\frac{n}{k+1} \right]_q \geq \left[\frac{n}{k} \right]_q \iff k \leq \frac{n-1}{2} \quad (q > 1);$$

si $F_h = F \cap (V_n(q), \subset)_h$ y $C(0, v, 1)$ es de d), entonces

$$\begin{aligned} 1 &\geq \sum_{v \in F} \frac{C(0, v, 1)}{C(0, 1)} = \sum_{h=0}^n F_h^{(q^h-1) \dots (q-1)(q^{n-h}-1) \dots (q-1)} = \\ &= \sum_{h=0}^n |F_h| \frac{(q^h-1) \dots (q-1)(q^{n-h}-1) \dots (q-1)(q-1)^n}{(q^n-1) \dots (q-1)(q-1)^h (q-1)^{n-h}} = \\ &= \sum_{h=0}^n \frac{|F_h|}{\left[\frac{n}{k} \right]_q} \geq \frac{F}{\left[\frac{n}{[n/2]} \right]_q}. \end{aligned}$$

De anticadena máxima puede servir $(V_n(q), \subset)_{[n/2]}$.

La anticadena máxima en $(\mathcal{Z}(n), |)$ se realiza por el $\left[\sum_{i=1}^n \frac{r_i}{2} \right]$ — nivel promedio en el diagrama de Hasse:

$$(\mathcal{Z}(n), |) \left[\sum_{i=1}^n r_i/2 \right].$$

De Bruijn N., Van C.A., Tengbergen E.; Kruyswijk D.R. — Nieuw Arch. Wisk (2) 1952, 23, p. 191—193; Alexeev V.B. Análisis discreto, 1974, 26, p. 20—35, en ruso.

7.34. Véase el teorema 2 § 1 del cap. 8 [1].

7.35. Por ejemplo, el segmento $[0, 1]$ no es un conjunto bien ordenado, puesto que el intervalo $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ no contiene elemento mínimo.

7.37. La condición de maximalidad en un conjunto bien ordenado P no siempre se cumple, pero sí se cumple sin falta en el conjunto P^* , dual respecto de P^* . Por ejemplo, un conjunto de números naturales con orden habitual satisface la condición de minimalidad, pero no satisface la de maximalidad.

7.38. Supongamos que se cumple la condición de minimalidad y $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$ es una cadena numerable de elementos de P . Sea a el elemento mínimo en el subconjunto $\{a_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ del conjunto P . Entonces $a = a_k$ para cierto k , y, por lo tanto, $a_n = a = a_k$ para todo $n \geq k$. Viceversa, supongamos que se cumple la condición de rotura de las cadenas de crecimientos y que B es un subconjunto no vacío del conjunto P . Entonces B contiene el elemento a_1 , y si a_1 no es mínimo en B , existe un elemento $a_2 \in B$ tal que $a_1 > a_2$. Supongamos que existen tales $a_1, \dots, a_n \in B$ que $a_1 > a_2 > \dots > a_n$. En este caso o bien a_n es mínimo en B , o bien existe un elemento $a_{n+1} \in B$ tal que $a_n > a_{n+1}$. De aquí concluimos que o bien B tiene elemento mínimo, o bien existe una cadena infinita $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$ de elementos de B . Por hipótesis, resulta posible sólo el primer caso.

De un modo dual se establece que la condición de maximalidad es equivalente a la condición de rotura de las cadenas crecientes.

7.43. Véase el teorema 7 del § 1, capítulo 8 [1].

7.44. Véase el teorema 8 del § 1, capítulo 8 [1].

7.45. Aprovechese el diagrama de Hasse teniendo en cuenta que él es, para cualquier conjunto finito parcialmente ordenado, un grafo orientado sin contornos. Entonces el teorema reformulado de Dilworth se enunciará así: el número máximo de vértices recíprocamente incomparables en un grafo orientado sin contornos es igual al número de cadenas en la descomposición mínima del grafo.

7.46. Póngase en correspondencia a la matriz $A = (a_{ij})$ el grafo bipartido $G(S \cup T, E)$, a título de subconjunto de vértices S tómesse el conjunto de filas, como subconjunto de vértices T tómesse el conjunto de columnas de la matriz y supóngase que $(t_j, s_i) \in E$ cuando y sólo cuando $a_{ij} \neq 0$; hágase uso del teorema de König. Por t_j y s_i se designan la j -ésima columna e i -ésima fila, respectivamente, de la matriz A .

7.47. A partir del grafo orientado $G(V, E)$ con dos vértices no adyacentes s y t construyamos un nuevo grafo orientado G' . Dividamos con este fin los vértices $v \in V \setminus \{s, t\}$ en dos vértices nuevos v' y v'' , y unámoslos con un arco (v', v'') . A continuación cada arco del grafo G con un vértice terminal $v \in V \setminus \{s, t\}$ se sustituye por un nuevo arco con el vértice terminal v' , y cada arco con el vértice inicial $v \in V \setminus \{s, t\}$, por un arco, en el cual v' figura como vértice inicial. El grafo G y el G' , construido a partir de G , están representados en la fig. 7.4.

La validez del análogo de vértice del teorema de Menger se desprende del teorema de Menger y de las siguientes afirmaciones que se demuestran con facilidad:

a) cada camino de s a t en el grafo G' corresponde al camino de s a t en el

grafo G , que se obtiene por contracción de todos los arcos del tipo (v', v'') , y, viceversa, cada camino de s a t en el grafo G corresponde al camino de s a t en el grafo G' , obtenido por partición de todos los vértices del camino distintos de s y t .

b) el número máximo de caminos de s a t , que no se intersectan en el grafo G' por los arcos, es igual al número máximo de caminos de s a t que no tienen vértices comunes.

c) dos caminos de s a t en el grafo G' no se intersectan por los arcos, cuando y sólo cuando los caminos en el grafo G que les corresponden no se intersectan por los vértices.

d) la potencia mínima de un conjunto (s, t) -separador de arcos del grafo G' es igual a la potencia mínima del conjunto (s, t) -separador de vértices del grafo G .

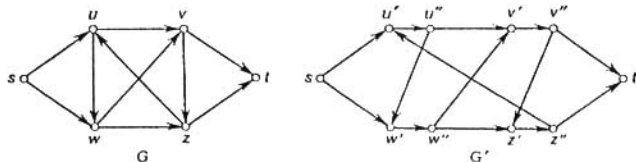


Fig. 7.4'.

7.48. Cerciórese de que si $\mathcal{D}(G)$ es un grafo orientado que se obtiene del grafo no orientado G sustituyendo en éste cada arista por un par de arcos opuestamente orientados e incidentes respecto a los mismos vértices, entonces

a) existe una correspondencia biunívoca entre las cadenas en el grafo G y en el grafo $\mathcal{D}(G)$;

b) para cualesquiera dos vértices s y t el número mínimo de aristas cuya eliminación en el grafo G rompe todas las cadenas de s a t , es igual al número mínimo de arcos cuya eliminación rompe todas las cadenas de s a t en el grafo orientado $\mathcal{D}(G)$. De aquí se deduce inmediatamente la validez de las variantes no orientadas del teorema de Menger y de su análogo de vértice.

7.49. Se deben añadir al grafo $G(V, E)$ dos vértices nuevos s^* y t^* , y también todas las aristas (arcos) del tipo (s^*, s) , donde $s \in S$, y todas las aristas (arcos) del tipo (t, t^*) , donde $t \in T$. En tal caso las afirmaciones del problema se desprenden de la validez de las afirmaciones de los problemas 7.47 y 7.48 para el grafo (orientado) $G(V \cup \{s^*, t^*\}, E')$.

7.50. a) Al grafo bipartido $G(S \cup T, E)$ póngasele en correspondencia un conjunto parcialmente ordenado $S \cup T$ con una relación de orden $< : x < y$, cuando y sólo cuando $(x, y) \in E$; y hágase uso de las siguientes dos afirmaciones:

1) para cualquier descomposición \mathcal{D} del conjunto $S \cup T$ en cadenas existe una combinación de pares M en el grafo $G(S \cup T, E)$, para la cual $|\mathcal{D}| + |M| = |S \cup T|$ (a título de M hace falta tomar el conjunto de todas las cadenas de \mathcal{D} que constan de dos elementos);

2) para cada anticadena A del conjunto parcialmente ordenado $S \cup T$ existe un recubrimiento de vértice X de las aristas del grafo G , para el cual $|A| + |X| \leq |S \cup T|$, puesto que el complemento de la anticadena A en el conjunto $S \cup T$ contiene el recubrimiento de vértice X de las aristas del grafo G .

b) Unamos al grafo bipartido $G(S \cup T, E)$ dos vértices s^* y t^* , como también todos los arcos (s^*, s) para cualesquiera $s \in S$ y (t, t^*) para cualesquiera $t \in T$. Las aristas $(x, y) \in E$ vamos a considerarlas como arcos que están orientados en dirección de los vértices del conjunto S a los del conjunto T . Para el grafo obtenido definamos la función que caracteriza la capacidad de los arcos:

$$c(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = s^* \text{ e } y \in S, \text{ o bien } x \in T \text{ e } y = t^*; \\ \infty, & \text{si } (x, y) \in E. \end{cases}$$

Sea f un flujo máximo arbitrario expresado en números enteros de s^* a t^* en la red construida y supongamos que (X, \bar{X}) , donde $\bar{X} = (S \cup T \cup \{s^*, t^*\}) \setminus X$ es un corte mínimo. Siendo definida la función de la capacidad de paso en los arcos, concluimos que el subconjunto de arcos $A = \{(x, y) \in E: f(x, y) = 1\}$ es una combinación de pares. El conjunto $\mathcal{Z} = (S \cap \bar{X}) \cup (T \cap X)$ es un conjunto de vértices (S, T) -separador, con la particularidad de que \mathcal{Z} se encuentra en una correspondencia biunívoca con los arcos del corte mínimo (X, \bar{X}) . Entonces, en virtud del teorema de Ford y Fulkerson, llegamos a que si v es la magnitud del flujo máximo f , entonces $|A| = |\mathcal{Z}| = v$. Por otra parte, es obvio que el número máximo de arcos de la combinación de pares G no es superior al número mínimo de vértices en cualquier conjunto de vértices (S, T) -separador. De este modo, la validez del teorema de König queda establecida.

c) para demostrar, hagamos uso de la variante del teorema de Menger aducida en el problema 7.49. Sea $G(S \cup T, E)$ un grafo bipartido sobre el conjunto de vértices $S \cup T$, $S \cap T = \emptyset$. Es evidente que el conjunto de vértices A cubre todas las aristas del grafo G cuando y sólo cuando A es un conjunto de vértices (S, T) -separador del grafo G . Para cualquier combinación de pares de n aristas en el grafo G pueden elegirse n cadenas de los vértices del conjunto S a los vértices del conjunto T , y, viceversa, k cadenas de S a T , que no tienen vértices comunes, contienen k aristas del grafo G que no se intersecan en los vértices. Por consiguiente, el número máximo de cadenas de S a T , que no tienen vértices comunes, es igual al número máximo de aristas de la combinación de pares en el grafo G . Mas, en virtud del teorema de Menger del problema 7.49, el número máximo de cadenas de los vértices del conjunto S a los del conjunto T , que no tienen vértices comunes, es igual a la potencia mínima del conjunto de vértices (S, T) -separador.

d) Demostremos el análogo matricial del teorema de König (véase el problema 7.46), apoyándonos en el teorema de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos. Sin restringir la generalidad de nuestros razonamientos podemos considerar que la matriz $A = (a_{ij})_{\substack{i=1-n \\ j=1-t}}$ está compuesta por 0 y 1. Las columnas

y las filas de la matriz se llamarán, para mayor brevedad, *líneas*. Sea m un número mínimo de líneas que contienen todos los elementos no nulos y M , el número máximo de elementos no nulos no situados de dos en dos en una misma línea.

Es evidente que $m \geq M$, puesto que ninguna línea contiene más de un elemento de los M elegidos. Demostremos que $M \geq m$. Supongamos que r filas y s columnas de la matriz contienen todos los elementos no nulos, $r + s = m$, y que m es el número mínimo entre todos los posibles. Permutemos estas filas y columnas de un modo tal que ocupen los primeros lugares. A cada i -ésima fila, $i = 1, \dots, r$, pongámosle en correspondencia el conjunto de números de las columnas j , para las cuales $a_{ij} = 1$ y $j > s$. Los conjuntos obtenidos satisfacen las condiciones del teorema de P. Hall. En efecto, si no fuera así, es decir, si k de dichos conjuntos contuvieran $v < k$ elementos, entonces estas k filas podrían ser sustituidas por v columnas y todas las unidades integrarían un número menor de líneas, lo que contradice la condición de minimalidad del número m . Por cuanto la condición del teorema de P. Hall se cumple, podemos elegir r representantes distintos de r filas, es decir, r unidades, de un modo tal que no hayan dos y más unidades en una fila y ninguna en las primeras s columnas. Razonando análogamente, podemos obtener s representantes de las primeras s columnas de un modo tal que las unidades estén ausentes en las primeras r filas. Este conjunto de $r + s = m$ unidades está elegido de un modo tal que no hay dos y más unidades dispuestas en una misma línea. Quiere decir, $m \leq M$, lo que se trataba de demostrar.

7.51. a) Sea P un conjunto finito parcialmente ordenado. Construyamos un grafo bipartido $G(P \cup P', E)$ sobre el conjunto de vértices $P \cup P'$, donde P' es un ejemplar más del conjunto P . Además, los vértices x e y' , donde y' es la copia de y en P' , se unirán con las aristas, si y sólo si $x < y$ en el conjunto parcialmente ordenado P .

Sea M una combinación de pares máxima en el grafo $G(P \cup P', E)$, y sea X el recubrimiento de vértice mínimo de las aristas en el grafo G . Entonces, en virtud del teorema de König, tenemos $|M| = |X|$. Hagamos uso de dos afirmaciones auxiliares:

1) para cada combinación de pares M en el grafo $G(P \cup P', E)$ existe una descomposición \mathcal{D} del conjunto parcialmente ordenado P en cadenas, para la cual $|M| + |\mathcal{D}| = n$, donde $n = |P|$;

2) si X es un conjunto de vértices, que cubren todas las aristas del grafo G de tal manera que ningún subconjunto suyo puede ya cubrir todas las aristas del grafo G , en el conjunto parcialmente ordenado P existe una anticadena A tal que $|X| + |A| = n$, donde $n = |P|$. Entonces $|\mathcal{D}| = |A|$, puesto que $|\mathcal{D}| = n - |M|$ y $|A| = n - |X|$. Pero, $|A| \leq |\mathcal{D}|$ para cualesquiera $A, \mathcal{D} \subseteq P$, dado que ningún par de elementos incomparables puede encontrarse en una misma cadena. Por consiguiente, $\max_A |A| = \min_{\mathcal{D}} |\mathcal{D}|$,

lo que se trataba de demostrar.

b) Del teorema de König obtenemos el análogo de vértice del teorema de Menger para los grafos no orientados (véanse los problemas 7.47 y 7.48). Sea $G(V, E)$ un grafo no orientado arbitrario con dos vértices destacados no adyacentes $s, t \in V$. Si en $G(V, E)$ se tiene un sistema de k cadenas de s a t que no se intersecan por los vértices, entonces el conjunto de vértices (s, t) -separador ha de contener por lo menos un vértice de cada cadena, o bien, dicho de otro modo, la potencia de cada conjunto de vértices (s, t) -separador del grafo G debe ser no inferior a k . La desigualdad inversa se deduce de la siguiente afirmación: si $X \subseteq V$, donde $|X| = k$ es el conjunto de vértices (s, t) -separador mínimo del grafo G , en G existen k cadenas de s a t que no se intersecan por los vértices. Para demostrarlo véase el lema 5 § 1, capítulo 8 [1].

c) Sea (X_1, X_2, \dots, X_n) una familia de subconjuntos del conjunto X . Construyamos la $(0,1)$ -matriz de incidencia. Supongamos que todas sus unidades están dispuestas en r filas y s columnas. Si $r + s = n$, entonces, de acuerdo con el teorema de König, existen n unidades de las cuales ningún par yace en una misma línea, y ellas forman el sistema de representantes distintos para (X_1, X_2, \dots, X_n) . Si, en cambio, $r + s < n$, entonces se perturba la validez del teorema de P. Hall, puesto que para $k = n - r$ filas las unidades se encontrarán solamente en $s < n - r = k$ columnas.

7.52. Sea $G(V, E)$ una red en la que s y t son entrada y salida, respectivamente. Supongamos que a cada arco de la red se le está designada una capacidad unitaria. En este caso la magnitud del flujo máximo en la red G es igual al número máximo de caminos de s a t que no se intersecan por los arcos. En efecto, sea v cierto flujo máximo en la red G y sea G^* el grafo orientado obtenido de G por supresión de todos los arcos libres del flujo v . Por cuanto las capacidades de todos los arcos de la red G son iguales a 1, entonces para todos los arcos e de la red G^* tenemos $f(e) = 1$. De aquí, para todos los arcos e de la red G^* , distintos de s y t , tenemos $|\Gamma(e)| = |\Gamma^{-1}(e)|$, y para la entrada s y la salida t tenemos: $|\Gamma(s)| - |\Gamma^{-1}(s)| = |\Gamma^{-1}(t)| - |\Gamma(t)| = v$. De aquí concluimos que en la red G^* y, por tanto, en la G existen v caminos de s a t que no se intersecan por los arcos. Por consiguiente, la magnitud v del flujo máximo en la red G no es superior al número máximo k de cadenas de s a t que no se intersecan por los arcos. Viceversa, sea P_1, P_2, \dots, P_k un juego en la red G tomado del número máximo de caminos de s a t , que no se intersecan por los arcos. Hallemos en G el flujo f del modo siguiente:

$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{si existe tal } i \text{ que } e \in P_i; \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

Es evidente que la magnitud de tal flujo es igual a k , y la magnitud del flujo máximo no es inferior a k . De este modo, $v = k$.

Demostremos, ahora, que la capacidad del corte mínimo en la red G es igual al número mínimo de arcos cuya supresión rompe todas las cadenas que llevan de s a t . Suprimamos en G todos los arcos del corte mínimo que separa la en-

trada s de la salida t . En el grafo orientado obtenido no habrá ningún camino de s a t . Por eso la potencia del corte citado no es inferior al número mínimo de arcos, cuya eliminación rompa todas las cadenas de s a t . Es cierta también la relación inversa. En efecto, sea T un conjunto de arcos cuya supresión rompa todos los caminos de s a t en la red G y sea S un conjunto de vértices que se alcanzan desde la entrada s con ayuda de las cadenas privadas de los arcos pertenecientes al conjunto T . Está claro que $(S, V \setminus S)$ es un corte en la red G . Además, $(S, V \setminus S) \subseteq T$. Por eso la potencia del corte mínimo no sobrepasa $| (S, V \setminus S) |$ y, por consiguiente, $| T |$.

Del teorema de Ford y Fulkerson, como también de las relaciones obtenidas más arriba, obtenemos el teorema de Menger.

7.53. Sea $G(V, E)$ una red con la entrada s y salida t en cuyos arcos vienen dadas las capacidades de paso que se expresan en números enteros. Construyamos una nueva red G' sobre el mismo conjunto de vértices, al sustituir cada arco

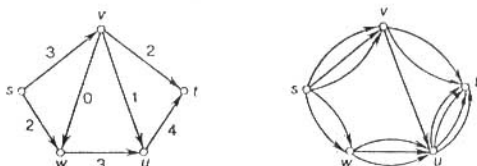


Fig. 7.5'.

$e \in E$ con la capacidad $c(e)$ por $c(e)$ arcos igualmente orientados y al borrar todos los arcos cuyas capacidades son nulas. La red G y la G' , construida a base de G , están representadas en la fig. 7.5', donde los números en los arcos del grafo G significan sus capacidades de paso.

Sean R y R' unos cortes que separan s de t en las redes G y G' , respectivamente, suponiéndose que dichos cortes están definidos por un mismo conjunto de vértices. Entonces $| R' | = \sum_{e \in R} c(e)$, donde c indican las capacidades de los

arcos de la red G . Así pues, al poner $N = \min_R \sum_{e \in R} c(e)$, obtendremos $| R' | \geq$

$\geq N$. Entonces, en virtud del teorema de Menger, existen N (y este número es máximo) cadenas de s a t en la red G' , las cuales no se intersecan por los arcos. Sea $f(e)$ el número de arcos paralelos al arco e en la red G' , ocupados por dichas cadenas. Entonces $f(e)$ representa un flujo de s a t de magnitud N en la red G . La implicación requerida queda demostrada.

7.54. Una parte de implicaciones que faltan o bien las demostraciones nuevas de las implicaciones ya establecidas pueden encontrarse en las obras [I (§ 8.1), 12 (capítulo 5), 14 (capítulo 5), 17, 18 (capítulo 8, § 1), 19 (capítulos 7, 12), 20, 21 (capítulo IV § 4), 22 (§ 15.7), 23, 24]. Así por ejemplo, en el artículo original de P. Hall (Hall P., J. London Math. Soc. 1935, 10, p. 26—30) se indican las relaciones de su teorema con el de König (König D. Math. Annalen, 1916, 77, p. 453). En el artículo de Mirsky L., Perfect H.J. Math. And Appl., 1966, 15, p. 520—568 está dado el resumen de los teoremas de tipo de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos. Dilworth (véase Dilworth R.P. Ann of Math., 1950, 51, p. 161—166) señaló, al demostrar su teorema, la íntima relación existente entre el mismo y el teorema de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos. Ford y Fulkerson [20] obtuvieron, a partir de su teorema sobre el flujo máximo expresado en números enteros y corte mínimo (Ford L.R., Fulkerson D.R. Canad. J. Math., 1956, 8, p. 399—404), los teoremas de König, Menger, Dilworth y P. Hall (véanse teorema 4.1, 4.2; capítulo II § 8, teorema 10.1 en [20]). Robacker (Robacker J.T. RAND Corporation, RM—1948, 1955) dedujo el teorema sobre el flujo máximo y corte mínimo a partir del teorema de

Menger. *Harary* [12] obtuvo, partiendo del teorema original de Menger (Menger K. *Fund. Math.*, 1927, 10, p. 96—115), diferentes teoremas de tipo de Menger, entre los cuales figuran el teorema sobre el flujo máximo expresado en números enteros y el corte mínimo, el teorema de König, de P. Hall, de Dilworth y otros. Ore en [19] expuso detalladamente las relaciones existentes entre los teoremas de Menger y König sobre las combinaciones de pares para grafos bipartidos.

§ 2. Retículos

7.58. Pongamos $a = \sup A$ y $a_\alpha = \sup A_\alpha$. Por cuanto $a \geq x_\alpha$ para todo $x_\alpha \in A$, entonces $a \geq a_\alpha$ para todo α . Si $v \geq a_\alpha$ para todo α , entonces $v \geq x$ para cada $x_\alpha \in A$, y, por tanto, $v \geq x$ para cualquier $x \in A$. Por eso, $v \geq a$, y de la definición obtenemos $\sup A = a = \sup a_\alpha = \sup \{\sup A_\alpha\}$.

7.60. Sea, por ejemplo, $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, b, c\}$ (fig. 7.6'), entonces $\sup_Q \{a, b\} = c$, $\sup_P \{a, b\}$ no existe.

7.65. El pentágono y el diamante son retículos. P (6) no es un retículo.

7.74. Muéstrase que $a = b = c = a \vee b \vee c$. En efecto, $a \vee b \vee c = (a \vee a) \vee \vee b \vee c = a \vee (a \vee b \vee c) = a \vee (a \wedge (b \wedge c)) =$ (por la propiedad de absorción) $= a$.

7.75. Véase la demostración del teorema 21 § 2, cap. 8 [1].

7.76. Por razonamientos duales llegaremos a las mismas deducciones.

7.80. Véase el teorema 22 § 2, cap. 8 [1].

7.81. Los retículos completos son, por ejemplo, el segmento $[0, 1]$ con orden habitual; el booleano $\mathcal{P}(S_n)$, toda cadena finita.

7.82. Todo retículo completo tiene 0 y 1. Por eso el retículo de números enteros con orden corriente no es un retículo completo.

7.87. Si $\varphi: L_0 \rightarrow L_1$ es un homomorfismo, entonces $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$ para cualesquiera $a, b \in L_0$. Supongamos que $a, b \in L_0$ y $a \leq b$ en L_0 . Entonces $b = a \vee b$, y, por lo tanto, $\varphi(b) = \varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$, es decir, $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ en L_1 . De este modo, el homomorfismo φ es también una aplicación isotona. La afirmación inversa no es cierta. Por ejemplo, la aplicación isotona

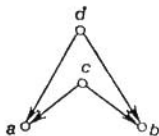


Fig. 7.6'.

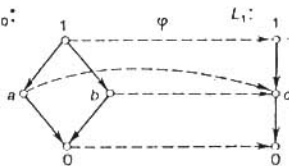


Fig. 7.7'.

$\varphi: L_0 \rightarrow L_1$, expuesta en la fig. 7.7', donde $\varphi(0) = 0$, $\varphi(a) = \varphi(b) = c$, $\varphi(1) = 1$, no es un homomorfismo, puesto que $\varphi(a \vee b) = \varphi(1) = 1 \neq c = c \vee c = \varphi(a) \vee \varphi(b)$.

7.90. Por cuanto $a \leq x$ para cualquier $x \in A$, entonces $\varphi(a) \leq \varphi(x) = x$ para todo $x \in A$, y, por consiguiente, $\varphi(a) \leq a$. La desigualdad inversa se deduce de la definición del operador de clausura.

7.91. Sea 1 la unidad de un retículo completo P . Por cuanto $\varphi(1) \geq 1 \geq \varphi(1)$, entonces 1 pertenece a L y es, evidentemente, la unidad de este conjunto parcialmente ordenado. Si A es un subconjunto no vacío del conjunto L , el elemento $a = \inf_P A$ será, de acuerdo con el problema 7.90, φ -cerrado. Por supuesto, $a \leq x$ para cualquier $x \in A$. Si $v \in L$ y $v \leq x$ para cualquier $x \in A$, entonces $v \leq a$, de suerte que $a = \inf_L A$. Ahora, del problema 7.86 concluimos que L es un retículo completo. Supongamos luego que $b = \sup_P A$ y $\bar{b} = \sup_L A$. Está claro que $\bar{b} \in L$ y $b \geq \bar{b}$, puesto que $\bar{b} \geq x$ para todos los $x \in A$. De aquí que $\bar{b} = \varphi(b) \geq \varphi(\bar{b})$. La desigualdad $\bar{b} \leq \varphi(\bar{b})$ se verifica, puesto

que $\varphi(b) \geq \varphi(x) = x$ para todo $x \in A$, de modo que $b = \varphi(b)$, lo que se trataba de demostrar.

7.94. Un pentágono (véase la fig. 7.6), por ejemplo, no es un retículo modular. Efectivamente, $a > b$ pero $a \wedge (b \vee c) \neq (a \wedge c) \vee b$, puesto que $(a \wedge c) \vee b = 0 \vee b = b$, y $a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a$.

7.96. 7.102. 7.109. Véase los teoremas 23, 24 y 30 del § 2, capítulo 8 [1].

7.97. Sea L un retículo modular. Entonces, según la definición, si $b \leq a$, tenemos $b \wedge (c \vee a) = (b \wedge c) \vee a$. Pero $b \wedge (c \vee a) = b \wedge (b \vee c) = b$, $(b \wedge c) \vee a = (a \wedge c) \vee a = a$ (hemos aprovechado las igualdades de la condición y de la propiedad de absorción). Por consiguiente, $a = b$.

Viceversa, si L no es un retículo modular, entonces, en virtud del problema 7.96, el retículo L contiene un pentágono (véase fig. 7.6), en el cual $a \wedge c = b \wedge c = 0$, $a \vee c = b \vee c = 1$, pero $a \neq b$.

7.98. Está claro que φ y ψ son aplicaciones isótonas, con la particularidad de que $\psi(\varphi(x)) = a \wedge (x \vee b) = x \vee (a \wedge b) = x$ (en virtud de la identidad de modularidad y de la condición $x \geq a \wedge b$) y $\varphi(\psi(y)) = (a \wedge y) \vee b = (a \vee b) \vee y = y$ (en virtud de la identidad de modularidad y de la condición $y \leq a \vee b$). Por consiguiente φ y ψ son isomorfas.

7.99. Hágase uso de la afirmación del problema 7.98.

7.101 a) Tales son, por ejemplo, el pentágono (fig. 7.6), el diamante (fig. 7.7) y el retículo de un subespacio del espacio vectorial (véase el problema 7.29).

7.103. Sea L un retículo distributivo. Entonces para cualesquiera $a, b, c \in L$ tenemos: $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Pero $a \vee (b \wedge c) = a \vee (a \wedge c) = a$, $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c) = b \vee (b \wedge c) = b$. Por consiguiente, $a = b$.

Viceversa, si L es un retículo no distributivo, entonces, en virtud de los problemas 7.96 y 7.102, contiene un pentágono (fig. 7.6) o un diamante (fig. 7.7), en los cuales $a \wedge b = b \wedge c = 0$, $a \vee c = b \vee c = 1$, pero $a \neq b$.

7.105. Sea L un retículo modular, $a, b, c \in L$ y $b < a$. Si $a \vee c = b \vee c$, no hay nada que demostrar. En cambio, si $a \vee c \neq b \vee c$, entonces $a \not\leq b \vee c$, y por eso $a \wedge (b \vee c) = b$. Al aplicar el resultado del problema 7.98 a los elementos $b \vee c$ y a , llegamos a que $[b \vee c, a \vee c] \cong [b, a]$. Por cuanto $[b, a]$ es un intervalo simple, lo es también el intervalo $[b \vee c, a \vee c]$, es decir, $b \vee c < a \vee c$. De un modo dual obtenemos la condición de recubrimiento por arriba.

7.112. b) \Rightarrow a) Sea $a < b$. Si $c \leq a$, o bien $a \vee c \geq b$, entonces $b \vee c \geq a \vee c$. Si en cambio, $c \not\leq a$ y $a \vee c \neq b$, entonces $b \wedge (a \vee c) = a$. Sea $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = a \not\leq c$ una cadena máxima en el intervalo $[a, a \vee c]$. Por cuanto $b > a$, $a_1 > a$ y $b \neq a_1$, tenemos $b \vee a > a_1$. Demostremos por inducción que $b \vee a_i > a_i$ para cualesquiera $i = 1, 2, \dots, n$. De este modo, $b \vee a_n > a_n$, es decir, $b \vee c > a \vee c$.

a) \Rightarrow c). Esta afirmación es obvia, puesto que si $x < y$ en C , entonces $c \vee x \leq c \vee y$.

c) \Rightarrow d). De la condición c) se deduce con toda evidencia que L es un retículo semimodular. Por eso, en virtud del problema 7.109, en L se cumple la condición de Jordan—Hölder. Sea $a \wedge b = c_0 < c_1 < \dots < c_r = b$ una cadena máxima en el intervalo $[a \wedge b, b]$. De acuerdo con la condición de Jordan—Hölder, la longitud de esta cadena es igual a $r(b) - r(a \wedge b)$. Debido a c)

$$a \vee (a \wedge b) = a = (a \vee c_0) \leq (a \vee c_1) \leq \dots \leq (a \vee c_r) = a \vee b$$

es también una cadena máxima, pero en el intervalo $[a, a \vee b]$. La longitud de esta cadena no sobrepasa la de la primera (algunos elementos pueden coincidir), es decir, no es superior al número $r(b) - r(a \wedge b)$. Por otra parte, de acuerdo con la condición de Jordan—Hölder, la longitud de la cadena citada es igual a $r(a \vee b) - r(a)$. Por eso $r(b) - r(a \wedge b) \geq r(a \vee b) - r(a)$, lo que se trataba de demostrar.

d) \Rightarrow b). Sean $a, b \in L$ tales que $a > (a \wedge b)$, $b > (a \wedge b)$ y $a \neq b$. En virtud de los problemas 7.109 y 7.111, $r(a) = r(b) = r(a \wedge b) + 1$. Sustituamos estas igualdades en la desigualdad de d) y obtenemos que $r(a \vee b) \leq r(a) + 1 + r(a \vee b) \leq r(b) + 1$. De aquí se deduce inmediatamente que $(a \vee b) \geq a$ y $(a \vee b) \geq b$. Mostremos que $a \vee b \neq a$. Por reducción al absurdo: sea $a \vee b = a$. Entonces $a > b$ y $a \wedge b = b$, mas esto contradice el hecho de que $b > (a \wedge b)$. Por consiguiente, $(a \vee b) > a$. De un modo análogo se comprueba que $(a \vee b) > b$.

7.115. Si $p \leq a$, entonces $p \vee a = a$, y, por consiguiente, $a \vee q = a \vee p$. Sea $p \not\leq a$. Por cuanto el retículo L es semimodular, tenemos $0 < p \vee 0 < q$, $a \leq a \vee p$, $a \leq a \vee q$. Por consiguiente, $a < a \vee q = a \vee p$.

7.116. Hemos demostrado que a) \Rightarrow b) (problema 7.105), b) \Rightarrow d) (problemas 7.112 y 7.113), a) \Leftrightarrow c) (problema 7.96). Para dar por terminada la demostración de equivalencia de las afirmaciones, mostremos que d) \Rightarrow c). Supongamos que L contiene un pentágono $\{0, a, b, c, 1\}$ (fig. 7.6) y que para L se cumple la condición d). Entonces $r(a) + r(c) = r(a \vee c) + r(a \wedge c) = r(1) + r(0) = r(b \vee c) + r(b \wedge c) = r(b) = r(c)$. De donde tenemos $r(a) = r(b)$, lo que es imposible, puesto que $b < a$. Hemos llegado a una contradicción con una suposición. Por consiguiente, L no contiene pentágonos.

7.117. En virtud de la afirmación d) del problema 7.112 y de la desigualdad $r(x) \geq 0$, para todo $x \in L$ obtenemos $r(x \vee y) \leq r(x) + r(y)$. De aquí, por inducción tenemos

$$r(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) \leq r(x_1) + r(x_2) + \dots + r(x_n).$$

7.118. Es evidente que $p \wedge a \leq p$. Si $p \wedge a = p$, entonces $p \leq a$. Si $p \wedge a < p$, entonces $p \wedge a = 0$. En virtud del problema 7.117, $r(p \vee a) \leq r(p) + r(a) = 1 + r(a)$. Por cuanto $p \not\leq a$, tenemos $r(p \vee a) \neq r(a)$, de donde $r(p \vee a) = r(a) + 1$.

7.119. a) \Rightarrow b). Si $x \in [a \wedge b, b]$, entonces $x \leq b$, y por eso $\varphi(a \vee x) = (a \vee x) \wedge b =$ (en virtud de aMb) $= x \vee (a \wedge b) = x$.

b) \Rightarrow c). Sea $x, y \in [a \wedge b, b]$, $\psi(x) = \psi(y)$ y $x \neq y$, es decir, ψ no es biunívoca. Entonces $\psi(x \vee y) = \psi(x) = \psi(y)$ y $x < x \vee y$, o bien $y < x \vee y$. Sea, por ejemplo, $x < x \vee y$. Por la condición b) existe un elemento $z \in [a \vee b]$ tal que $\varphi(z) = x$. Por cuanto $z \geq x$ y $z \geq a$, concluimos que $z \geq x \vee a = \psi(x) = \psi(x \vee y)$. De este modo, $z \geq x \vee y$. Por eso $\varphi(z) \geq \varphi(x \vee y) = (x \vee y) \wedge b = x \vee y > x$, lo que es imposible. Esto significa que ψ es una aplicación biunívoca.

c) \Rightarrow d). Sea ψ una aplicación biunívoca y para cierto $x \in [a \wedge b, b]$: $\varphi\psi(x) \neq x$, es decir, $x < (x \vee a) \wedge b = x'$. Por ser isótonas las aplicaciones φ y ψ , tenemos $\psi\varphi\psi(x) = \psi(x)$ para todo $x \in [a \wedge b, b]$. Pero en tal caso $\psi(x') = \psi\varphi\psi(x) = \psi(x)$ y, por consiguiente, ψ no es una aplicación biunívoca. Esto quiere decir que $\varphi\psi(x) = x$ para cualquier $x \in [a \wedge b, b]$.

d) \Rightarrow a). Sea $\varphi\psi(y) = y$ para todo $y \in [a \wedge b, b]$ y $x \leq b$. Pongamos que $y = x \vee (a \wedge b)$. Es evidente que $y \in [a \wedge b, b]$ y, por consiguiente, $\varphi\psi(y) = y$, pero $\varphi\psi(y) = (y \vee a) \wedge b = (x \vee (a \wedge b) \vee a) \wedge b = (x \vee a) \wedge b$, es decir, $x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b$. Quiere decir, aMb .

7.120. Sea L un retículo semimodular de longitud finita. Entonces, si C es una cadena máxima en el intervalo $[a \wedge b, b]$ de longitud $r(b) - r(a \wedge b)$, resulta que $\mathcal{B} = \{a \vee x \mid x \in C\} = \{\psi(x), x \in C\}$ es la cadena máxima de longitud $r(a \vee b) - r(a)$ en el intervalo $[a, a \vee b]$ (véase el problema 7.112). de aMb se deduce que la aplicación ψ es biunívoca. Por consiguiente, $|\mathcal{B}| = |C|$ y

$$r(b) - r(a \wedge b) = r(a \vee b) - r(a).$$

Viceversa, si la condición aMb es falsa, entonces, en virtud del problema 7.119, la aplicación ψ no es biunívoca y puede elegirse una cadena C que contenga los elementos $x, y \in [a \wedge b, b]$ tales que $x \neq y$ y $\psi(x) = \psi(y)$. En este caso $|\mathcal{B}| < |C|$, de donde $r(b) - r(a \wedge b) > r(a \vee b) - r(a)$, lo que se trataba de demostrar.

7.122. La necesidad se deduce del problema 7.120. Demostremos la suficiencia sin suponer siquiera que la longitud del retículo L es finita. Supongamos que a, b, c son elementos del retículo M -simétrico L y que $b > a$. Si $b \vee c = a \vee c$, no hay nada que demostrar. Si $b \vee c > a \vee c$, entonces para un elemento $d = a \vee c$ tenemos $b \vee d = a, b \vee d = b \vee c$. Se debe demostrar que $b \vee d > d$. En efecto, sea $b \vee d > x \geq d$. Entonces $x \not\geq b$, por lo que $b \vee x = a$ y $b \vee x = b \vee d$. Por cuanto $b > b \vee x$, concluimos que φ aplica el intervalo $[x, x \vee b]$ sobre el intervalo $[x \vee b, b]$. En virtud del problema 7.119 tenemos xMb . Por cuanto bMx es M -simétrico, en este caso para cualquier $y \leq x$ se verifica la igualdad $y \vee (b \wedge x) = (y \vee b) \wedge x$. Sea $y = d$. Entonces $d = d \vee (b \wedge x) = (d \vee b) \wedge x = x$, es decir, $b \vee c > a \vee c$.

7.123. 7.124. Véanse los teoremas 32 y 33 del § 2, capítulo 8 [1].

7.126. Por cuanto x_1, x_2, \dots, x_n son independientes, entonces

$$r(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) = r(x_1) + r(x_2) + \dots + r(x_n) \quad (7.4')$$

Según la condición de semimodularidad para cualesquiera $x, y \in L$ tenemos

$$r(x) + r(y) \geq r(x \vee y) + r(x \wedge y).$$

Podemos, pues, escribir para cualesquiera elementos x_1, x_2, \dots, x_n

$$r(x_1 \vee \dots \vee x_n) \leq r(x_1 \vee \dots \vee x_{n-1}) + r(x_n) - r((x_1 \vee \dots \vee x_{n-1}) \wedge x_n),$$

con la particularidad de que en virtud del problema 7.120, la igualdad (7.4') se verifica cuando y sólo cuando

- x_1, \dots, x_{n-1} y x_n es un par modular;
- $(x_1 \vee \dots \vee x_{n-1}) \wedge x_n = 0$;
- x_1, \dots, x_{n-1} son elementos independientes.

Procediendo de este modo en adelante, llegaremos, razonando análogamente para el conjunto independiente x_1, \dots, x_{n-1} , a la afirmación del problema.

7.128. a) \Rightarrow b). Es evidente.

b) \Rightarrow c). Sea $(a_1 \vee \dots \vee a_i) \wedge a_{i+1} = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n-1$. Demostremos por inducción respecto de i que $r(a_1 \vee \dots \vee a_i) = i$. Para $i = 1$ la afirmación es verdadera. Si $r(a_1 \vee \dots \vee a_i) = i$, entonces, en vista de la semimodularidad resulta que $(a_1 \vee \dots \vee a_i) < (a_1 \vee \dots \vee a_i \vee a_{i+1})$ y, por eso, $r(a_1 \vee \dots \vee a_i \vee a_{i+1}) = r(a_1 \vee \dots \vee a_i) + 1 = i + 1$.

c) \Rightarrow a). Para demostrar, mostremos que el conjunto de átomos X satisface a condición del problema 7.123. De la condición $r(a_1 \vee \dots \vee a_n) = n$ tenemos que $r(\sup A) = |A|$, cualquier que sea el subconjunto $A \subseteq X$, de suerte que la aplicación $\varphi: A \rightarrow \sup A$ es biunívoca. La aplicación φ conserva, evidentemente, las uniones. Tomemos $A, B \subseteq X$ y sea $a = \inf(\sup A, \sup B)$, $b = \sup(A \cap B)$. Entonces $a \geq b$ y de la condición de semimodularidad resulta que

$$r(\sup A) + r(\sup B) \geq r(a) + r(\sup(A \cup B)),$$

de modo que $|A| + |B| \geq r(a) + |A \cup B|$. De aquí, $r(a) \leq |A| + |B| - |A \cup B| = |A \cap B|$. Por otra parte, $r(a) \geq r(b) = |A \cap B|$. Por consiguiente, $r(a) = r(b)$ y $a = b$, es decir, $\inf(\sup A, \sup B) = \sup(A \cap B)$.

7.130. Los complementos relativos de $b \in L$ en el intervalo $[e, 1]$ serán tanto elemento c , como elemento d (esto también sirve de respuesta a la última pregunta del problema.) El complemento relativo del elemento a en el intervalo $[0, b]$ será el elemento e, y , viceversa, de complemento relativo a e en el intervalo $[0, b]$ sirve el elemento a . El retículo L no es un retículo con complementos ni tampoco un retículo con complementos relativos, puesto que el elemento b , por ejemplo, carece de complemento en el intervalo $[0, 1]$.

7.131. No es cierto. Por ejemplo, el retículo semimodular en la fig. 7.11 b) es un retículo con complementos, pero no con complementos relativos.

7.132. El pentágono es un retículo no modular con complementos, pero no con complementos relativos.

7.134. Sea d un complemento del elemento a . Entonces el elemento $x = (d \vee b) \wedge c$ es un complemento relativo del elemento a en el intervalo $[b, c]$, a condición de que $b \leq a \leq c$. En efecto, $a \wedge x = a \wedge (d \vee b) \wedge c =$ (por ser modular el retículo L y $a \geq b$) $= ((a \wedge d) \vee b) \wedge c = (0 \vee b) \wedge c = b \wedge c = b$. En virtud de la dualidad, tenemos $a \vee x = c$.

7.135. Si $a > 0$, entonces, o bien a es un átomo, o bien $a > b > 0$ para cierto $b \in L$. Sea c un complemento relativo del elemento b en el intervalo $[0, a]$. Por inducción respecto de la longitud del intervalo $[0, a]$ se demuestra que los elementos b y c son ambos una unión de átomos. Pero, en tal caso esto es válido también para $a = b \vee c$. En virtud del problema 7.134, la afirmación es cierta también para los retículos modulares de longitud finita con complementos.

7.136. Por hipótesis del problema, b_{i+1} es un complemento relativo del elemento a_i en el intervalo $[0, a_{i+1}]$ para todo $i = 1, 2, \dots, n-1$. Por consiguiente, $a_i \wedge b_{i+1} = 0$ y $a_i \vee b_{i+1} = a_{i+1}$. De la segunda igualdad y de la condición de que $a_1 = b_1$ llegamos a que $a_i = b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_i$. Sustituyendo la expresión obtenida en la primera igualdad, obtenemos

$$(b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_i) \wedge b_{i+1} = 0 \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Entonces, en virtud de la afirmación del problema 7.124, b_1, b_2, \dots, b_n son independientes.

7.138. a) está demostrado en el problema 7.103. Demostremos b). Sean b_0 y b_1 los complementos de a en L . Entonces

$$b_0 = b_0 \wedge 1 = b_0 \wedge (a \vee b_1) = (b_0 \wedge a) \vee (b_0 \wedge b_1) = 0 \vee (b_0 \wedge b_1)$$

es decir, $b_0 \leq b_1$. Análogamente, $b_1 = b_0 \wedge b_1$, es decir, $b_1 \leq b_0$. Por eso, $b_0 = b_1$.

7.139. En vista del problema 7.138, para comprobar el cumplimiento de la primera identidad de De Morgan basta demostrar que

$$(a \wedge b) \wedge (a^* \vee b^*) = 0 \text{ y } (a \wedge b) \vee (a^* \vee b^*) = 1.$$

La segunda identidad de De Morgan provendrá de la primera por razonamiento duales. Realicemos las operaciones correspondientes

$$(a \wedge b) \wedge (a^* \vee b^*) = (\text{por ser } L \text{ distributivo}) =$$

$$= (a \wedge b \wedge a^*) \vee (a \wedge b \wedge b^*) = (0 \wedge b) \vee (a \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0,$$

$$\text{y } (a \wedge b) \vee (a^* \vee b^*) = (\text{por ser distributivo el retículo } L) =$$

$$= (a \vee a^* \vee b^*) \wedge (b \vee a^* \vee b^*) = (1 \vee b^*) \wedge (a^* \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1.$$

7.141. Demostremos que en cualquier retículo semimodular de longitud finita con complementos su unidad 1 es una unión de átomos. En efecto, si a es la unión de todos los átomos del retículo L , entonces $a^* = 0$, puesto que este elemento no contiene átomos. Entonces, $1 = a \vee a^* = a \vee 0 = a$, es decir, 1 es la unión de átomos.

Viceversa, sea L un retículo semimodular de longitud finita, en el cual su unidad 1 es una unión de átomos y $a \in L$. Entonces, existe una sucesión de átomos $p_1 \leq a, p_2 \leq a \vee p_1, \dots$, tal que para cierto k se verifique $a \vee p_1 \vee \dots \vee p_k = 1$, es decir, $r(a \vee p_1 \vee \dots \vee p_k) = r(a) = k$, de donde $r(a \wedge (p_1 \vee \dots \vee p_k)) \leq r(a) - r(p_1 \vee \dots \vee p_k) = r(a \vee p_1 \vee \dots \vee p_k) - r(a) + k - r(a) + k = 0$. Por consiguiente, el elemento $a^* = p_1 \vee \dots \vee p_k$ es un complemento de a y, más aún, a y a^* forman un par modular.

7.142. En el problema 7.135 ya hemos demostrado la validez de la afirmación del problema en una dirección. Demostremos su validez en otra dirección. Sea L un retículo semimodular, en el cual cada elemento $x \geq 0$ es una unión de átomos, y $a \leq x \leq b$. Entonces existe tal sucesión de átomos $p_1, p_2, \dots, p_n \leq b$ que $(x \vee p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_k) \wedge p_{k+1} = 0$ y $x \vee p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n = b$. Si ponemos $z = p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$, entonces, en virtud

de la condición de Jordan—Hölder, $r(a \vee z) = r(a) + n$, y $r(x \vee z) = r(a) + n = r(b)$. Sea $y = a \vee z$. Entonces $x \vee y = x \vee a \vee z = z \vee x = b$, mientras que $x \wedge y \geq a$ y $r(x \wedge y) \leq r(x) + r(a \vee z) + r(x \vee y) + r(x) + r(a) + n - (r(x) + n) = r(a)$. Esto quiere decir que $x \wedge y = a$, lo que se trataba de demostrar.

7.146. Hágase uso de las afirmaciones de los problemas 7.109 (condición de Jordan—Hölder para los retículos semimodulares) y 7.98 (sobre el isomorfismo de los intervalos $[a \wedge b, a]$ y $[b, a \vee b]$ en el retículo modular).

7.147. Hágase uso de los resultados del problema 7.146.

7.148. d) Todo intervalo de un retículo semimodular de longitud finita es, evidentemente, un retículo semimodular de longitud finita. Resta por demostrar que un intervalo arbitrario $[a, b]$ del retículo geométrico L es puntual. Así pues, sea $x \in [a, b]$, $x \neq a$ un elemento arbitrario. Veamos los átomos x_1, x_2, \dots, x_n del retículo L tales que $x = x_1 \vee \dots \vee x_n$. Entonces $x = x \vee a = (x_1 \vee a) \vee \dots \vee (x_n \vee a)$. Por ser semimodular el retículo L , $x_1 \vee a > a$, siempre que $x_1 \wedge a = 0$. En efecto, si $x_i \wedge a = x_i$, entonces $x_i \vee a = a$. De este modo, $x = \sup \{(x_i \vee a) \mid x_i \not\leq a\}$ es una unión de átomos del intervalo $[a, b]$, lo que se trataba de demostrar.

7.149. Está claro que $b > a$ en L cuando y sólo cuando $b = a \vee p$ para cierto $p \in A$. Por eso, si $b > a$ y $c > a$ en L , el elemento $b \vee c = (a \vee p) \vee (a \vee q) = a \vee p \vee q$ cubre b y c en G , y, con mayor razón, en L . Esto significa que L satisface la condición del problema 7.114, es decir, es semimodular. Además, es obvio que L es un retículo puntual de longitud finita. Por consiguiente, L es un retículo geométrico.

7.150. El requisito de semimodularidad no puede ser despreciado. Cada retículo (no forzosamente semimodular) de longitud finita con complementos relativos es puntual (véase el problema 7.135). Mas, no en todo retículo puntual de longitud finita sus elementos poseen al menos un complemento (relativo). En la fig. 7.8' se aduce un ejemplo de tal retículo: el elemento b no tiene complementos.

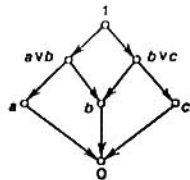


Fig. 7.8'.

7.151. Todo retículo L de longitud finita con complementos relativos es puntual (problema 7.135); la condición a) del problema es equivalente a la condición de semimodularidad del retículo L (problema 7.112) y cualquier retículo semimodular puntual es un retículo semimodular con complementos relativos (véase el problema 7.142). Por eso, si para los retículos puntuales L demostramos la equivalencia de las condiciones a), b), c) y d), el problema será resuelto.

Sea ahora L un retículo puntual de longitud finita.

a) \Rightarrow d). Ya está demostrada (véase el problema 7.128).

d) \Rightarrow b). Por cuanto L es un retículo puntual, es fácil encontrar átomos independientes p_1, \dots, p_n tales que $p_1 \vee \dots \vee p_n = a$. Luego, por cuanto $a \vee q \leq a \vee p$, entonces $q \geq (a \vee p) \wedge q > 0$ y la sucesión p_1, \dots, p_n, p, q no es independiente. En tal caso no será independiente, en virtud de la condición d), la sucesión p_1, \dots, p_n, q, p . Esto quiere decir que $p \geq (a \vee q) \wedge p > 0$. Por consiguiente, $p \leq a \vee q$ y $a \vee p \leq a \vee q$. De este modo, $a \vee p = a \vee q$.

c) \Rightarrow b). En efecto, si $a < b \leq a \vee p$, entonces, por cuanto L es un retículo puntual, existe en él un átomo q que está contenido en b y no está contenido en a . Está claro que $a < a \vee q \leq b$. De acuerdo con la condición c) del problema, $a \vee p = b$, y, por tanto, $a \vee p$ cubre a .

b) \Rightarrow a). En efecto, si a y b cubren $c (= a \wedge b)$ y L es un retículo puntual, existen los átomos p y q tales que $c < c \vee p \leq a$, $c < c \vee q \leq b$. De donde, $c \vee p = a$ y $c \vee q = b$. Por eso, $a \vee b = c \vee p \vee q$, y este elemento cubre, en virtud de la condición b), $a = c \vee p$ y $b = c \vee q$.

7.152. Sea L un retículo semimodular. Hace falta mostrar que para cual-

quier $a \in L$ y cualquier átomo $p \in L$, si $b \leq a$, resulta $a \wedge (p \vee b) = (a \wedge p) \vee \vee b$. En vista del problema 7.118, $p \leq a$, o $a \vee p > a$. Si $p \leq a$, tenemos $p \wedge a = p$, de donde $(a \wedge p) \vee b = p \vee b$. Mas, ya que $b \leq a$, entonces $p \vee b \leq a$, y, por consiguiente, $a \wedge (p \vee b) = b \vee p$. Si, en cambio, $p \not\leq a$, entonces $p \not\leq b$, y, por consiguiente, $b \vee p > b$. Por eso, $a \wedge (b \vee p) = b = (a \wedge p) \vee b$, pues $p \wedge a = 0$ cuando $p \not\leq a$.

Viceversa, supongamos que pMa , es decir, $a \wedge (b \vee p) = (a \wedge p) \vee b$ para cualesquiera $b \leq a$ y todos los átomos p . Por cuanto cada elemento del retículo es, por hipótesis, una unión de átomos, será suficiente convencerse de que si p es un átomo, tendremos $p \leq a$ o bien $a \vee p > a$ en L , puesto que en este caso el retículo será, en virtud del problema 7.151, geométrico y, por consiguiente, semimodular. Sea $p \not\leq b$ y supongamos que existe un elemento c tal que $b \leq c \leq b \vee p$. Si $p \leq c$, entonces $b \vee p \leq c \leq b \vee p$, de donde $c = b \vee p$. En cambio, si p no está contenido en c , entonces $c = c \wedge (b \vee p) = b \vee (c \wedge p) = b$. De suerte que $b \vee p$ cubre b , lo que se trataba de demostrar.

7.156. Condición a). Es evidente. Demostremos b). Para un subconjunto arbitrario $B \subseteq A$ sea $b = \sup B$. Entonces $r(b) \leq r(b \vee p)$ para cada átomo $p \in A$, puesto que $b \leq b \vee p$. Por ser el retículo L semimodular, tenemos $r(b \vee p) + r(b \wedge p) \leq r(b) + r(p)$. De este modo, $r(b \vee p) \leq r(b) + 1$, o bien $r(B) \leq r(B \cup \{p\}) \leq r(B) + 1$.

Para demostrar la condición c), supongamos que $b \vee p = b$ y $b \vee q = b$. Por consiguiente, $b \vee p \vee q = b$. De aquí proviene c).

7.160. Supongamos que $a \sim b$ y elijamos entre todos los $x \in L$, que satisficieran las condiciones $a \vee x = b \vee x$, y $a \wedge x = b \wedge x = 0$, un elemento x , en el cual $r(x) = m$ es el mínimo de todos los valores posibles. Sean x_1, \dots, x_m los elementos de la base del intervalo $[0, x]$ del retículo L . Entonces $C = \{a, b, x_1, \dots, x_m\}$ es un conjunto dependiente, puesto que $r(a \vee b \vee x) = r(a \vee x) = m + 1 < m + 2$. Mostremos que cada subconjunto del conjunto C es independiente. De aquí se deducirá que C es un ciclo que contiene a a y b . Sea $x^i = x_1 \vee \dots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee \dots \vee x_m$, donde $i = 1, 2, \dots, m$. Entonces de $b \leq a \vee x^i$ se desprende que $a \vee x^i = b \vee x^i$, puesto que $r(a \vee \vee x^i) = 1 + (m - 1) = r(b \vee x^i)$, lo que contradice la elección del elemento x . De este modo, para todo $i = 1, 2, \dots, m$: $a \vee b \vee x^i = a \vee x = b \vee x$. Por cuanto $r(a \vee b \vee x^i) = m + 1$, cada subconjunto del conjunto C debe ser independiente.

Viceversa, sea $C = \{a, b, x_1, \dots, x_m\}$ un ciclo del retículo L . Pongamos $x = x_1 \vee \dots \vee x_m$. Entonces $a \vee x = a \vee b \vee x = b \vee x$, puesto que $r(a \vee x) = r(b \vee x) = r(a \vee b \vee x)$, y $a \wedge x = 0 = b \wedge x$, pues, $r(a \wedge x) \leq r(a) + r(x) - r(a \vee x) = 0$ y $r(b \wedge x) \leq r(b) = r(x) - r(b \vee x) = 0$.

7.161. La perspectividad es, obviamente, una relación binaria reflexiva y simétrica. Supongamos que la perspectividad no es transitiva. Valiéndonos de la caracterización del problema 7.160, mostremos que tal suposición conduce a una contradicción.

Elijamos en el retículo L unos ciclos C_1 y C_2 , tales que el valor de $|C_1 \cup C_2|$ es mínimo entre todos los ciclos, para los cuales existen los átomos $a, b, c \in L$ tales que $a, b \in C_1$; $b, c \in C_2$, mas tanto a como b no están situados en ningún ciclo común. Entonces, en virtud de la condición c) del problema 7.158, se encontrará un ciclo C'_1 tal que $a \in C'_1 \not\subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{b\}$. Por cuanto $C_1 \setminus C_2$ es un conjunto independiente, resulta que $C'_1 \not\subseteq C_1 \setminus C_2$. Por consiguiente, C'_1 y C_2 se intersecan. De acuerdo con la elección de los ciclos C_1 y C_2 , tenemos $|C'_1 \cup C_2| = |C_1 \cup C_2|$ y, en particular, $C_1 \setminus C_2 \subseteq C'_1$. Análogamente, podemos encontrar tal ciclo C'_2 que $c \in C'_2 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{b\}$. El ciclo C'_2 debe intersecarse con $C_1 \setminus C_2$, y, por tanto, C_1 y C_2 tienen una intersección no vacía. Pero, entonces $|C'_1 \cup C'_2| < |C_1 \cup C_2|$, lo que contradice la manera de elegir los ciclos C_1 y C_2 .

7.163. Observemos que si $A \cup \{p\}$ es un conjunto de átomos del retículo

L tal que $p \leq \sup A$, entonces $p \sim a$ para cierto $a \in A$. En efecto, elijamos un subconjunto independiente mínimo $A' \subseteq A$ tal que $p \leq \sup A'$. En este caso $A' \cup \{p\}$ será el conjunto dependiente de átomos, en el cual cada uno de sus subconjuntos es independiente. Por eso $A' \cup \{p\}$ es un ciclo. Por consiguiente, $p \sim a$ para cada $a \in A'$. Se ha considerado el caso en que $p \notin A$. El caso de $p \in A$ es trivial.

Supongamos ahora que no todos los pares de átomos del retículo geométrico L son perspectivos. Elijamos un átomo arbitrario $a \in L$. Sea $[a] = \{b \in L \mid b \sim a\}$ y $z_1 = \sup [a]$. Mostremos que $[a]$ es un conjunto de todos los átomos del intervalo $[0, z_1]$. Luego, suponiendo que $z_2 \in L$ es igual a la unión de todos los átomos del retículo L , que no yacen en $[0, z_1]$, demosntremos que $L = [0, z_1]$ y $L_2 = [0, z_2]$ nos dan la descomposición del retículo L . En efecto, elijamos un elemento arbitrario $x \in L$ y pongamos $x_1 = x \wedge z_1$ y $x_2 = x \wedge z_2$. Por cuanto el conjunto de átomos de los subretículos L_1 y L_2 no se intersecan y los átomos de los intervalos $[0, x_1]$ y $[0, x_2]$ se complementan en el conjunto de átomos del intervalo $[0, x]$, entonces $x = x_1 \vee x_2$. Sean X_1 y X_2 las bases de los intervalos $[0, x_1]$ y $[0, x_2]$, respectivamente. Si suponemos que $X_1 \cup X_2$ es un conjunto dependiente de átomos, entonces $X_1 \cup X_2$ debe contener un ciclo en el que figuran tanto los átomos de L_1 , como los de L_2 , lo que contradice el hecho de que ningún átomo de L_1 es perspectivo a ningún átomo de L_2 . Entonces, $X_1 \cup X_2$ es el conjunto independiente de átomos y, por lo tanto, una base en $[0, x]$. De aquí, $r(x) = r(x_1) + r(x_2)$. Si $x'_1 \leq z_1$ y $x'_2 \leq z_2$ satisfacen la igualdad $x = x'_1 \vee x'_2$, entonces $x'_1 \leq x_1$ y $x'_2 \leq x_2$. Además, $r(x'_1) + r(x'_2) \geq r(x) = r(x_1) + r(x_2)$. De donde $r(x'_1) = r(x_1)$ y $r(x'_2) = r(x_2)$, y, por consiguiente, $x'_1 = x_1$ y $x'_2 = x_2$.

Demostremos la afirmación del problema en dirección inversa. Supongamos que el retículo geométrico L es descomponible con los intervalos correspondientes L_1 y L_2 . Elijamos unos átomos arbitrarios $a \in L_1$ y $b \in L_2$. Si a y b son perspectivos, puede encontrarse un elemento $x \in L$ tal que $a \vee x = b \vee x$ y $a \wedge x = b \wedge x = 0$. Pero en este caso la representación de $x = x_1 \vee x_2$ con relación a los intervalos L_1 y L_2 lleva consigo la igualdad $(a \vee x_1) \vee x_2 = x_1 \vee (x_2 \vee b)$. Por consiguiente, $a \vee x_1 = x_1$, y, de este modo, $a \leq x_1 \leq x$. Se ha obtenido una contradicción con lo que $a \wedge x = 0$, lo que se requería demostrar.

7.164. Hágase uso de la solución del problema 7.163.

7.165. Supóngase que la afirmación del problema no es cierta y x, y, z es uno de los contraejemplos con un valor mínimo de la función de rango $r(x \vee y)$. Pongamos que $u = y \vee z$. Entonces $r(u) = r(y) + 1$.

Si $u = x \vee y$, entonces, evidentemente, existe un átomo $x' \leq x$ tal que $u = x' \vee y$, es decir, $z \leq x' \vee y$.

Si $u < x \vee y$, pongamos $x = u \wedge x$. Entonces $\bar{x} \vee y = (u \wedge x) \vee y = u \wedge (x \wedge y) = u$, puesto que M es un retículo modular.

Por cuanto $r(\bar{x} \vee y) < r(x \vee y)$, existe un átomo $x' \leq x$ tal que $z \leq x' \vee y$, lo que contradice la manera de elegir el elemento $x \vee y$.

7.166. Sea $a \sim b$, es decir, $a \vee x = b \vee x = 1$, y $a \wedge x = b \wedge x = 0$ para cierto $x \in M$. Entonces $r(x \wedge (a \vee b)) = r(a \vee b) + (r(x) - r(a \vee b \vee x)) = 2 - 1 = 1$, puesto que el elemento $a \vee b \vee x = 1$ cubre el elemento x en M . Por eso ha de existir un átomo $c \in M$ tal que $c \leq a \vee b$ y $c \leq x$, y, por cuanto $a \wedge x = b \wedge x = 0$, entonces $a \neq c \neq b$.

Vicerversa, sea c un átomo del retículo M que es distinto de a y b y tal que $c \leq a \vee b$. Entonces c es un complemento relativo común de los átomos a y b en el intervalo $[0, a \vee b]$. En este caso el elemento $c \vee (a \vee b)^* = x$ será complemento común de a y b , cualquiera que sea el complemento $(a \vee b)^*$ del elemento $(a \vee b)$ en M . Por consiguiente, $a \sim b$, lo que se trataba de demostrar.

7.170. Hágase uso de las afirmaciones de los problemas 7.168 y 7.169

7.171. Es evidente que $PG1$ y $PG4$ se cumplen, con la particularidad de que $n = r(M)$. $PG3$ puede no cumplirse. $PG2$ es una consecuencia directa del pro-

blema 7.165, si ponemos $x = q \vee t$, $y = s$, $z = u$, donde p, q, s, t, u son todos átomos del retículo modular geométrico M , lo que se muestra en la fig. 7.14.

7.172. Hágase uso de las afirmaciones que ofrecen los problemas 7.163, 7.171 y 7.172.

7.173. Sí, la respuesta se deduce inmediatamente de las afirmaciones que ofrecen los problemas 7.164 y 7.172.

7.177. Véase el teorema 37 del § 2, capítulo 8 [1].

7.179. (Dowling T. A., Wilson R.M. «Proc. Amer. Math. Soc.», 1975, 47, p. 504—512; Green G. «J. Combin. Theory», 1970, p. 357—364).

7.180. (Dilworth R.P. «Ann of Math.», 1954, 60 (2), p. 359—364).

§ 3. Funciones de incidencia e inversión de Moebius

7.181. $f = f \cdot \delta = \delta \cdot f$. En efecto, $\forall x, y \in P$ tales que $x \leq y$ se tienen $(f \cdot \delta)(x, y) = \sum_{z: x \leq z \leq y} f(x, z) \delta(z, y) = [\delta(z, y) \neq 0 \iff z = y] = f(x, y) \times$

$\times \delta(y, y) = f(x, y)$. Análogamente, $(\delta \cdot f)(x, y) = \sum_{z: x \leq z \leq y} \delta(x, z) f(z, y) = \delta(x, x) f(x, y) = f(x, y)$. Sea $f, g, h \in A(P)$. Entonces $(f \cdot (g \cdot h))(x, y) = \sum_{z: x \leq z \leq y} f(x, z) (g \cdot h)(z, y) = \sum_{z: x \leq z \leq y} f(x, z) \left(\sum_{t: z \leq t \leq y} g(z, t) h(t, y) \right) = \sum_{t: x \leq t \leq y} \left(\sum_{z: x \leq z \leq t} f(x, z) g(z, t) h(t, y) \right) = \sum_{t: x \leq t \leq y} (f \cdot g)(x, t) h(t, y) = ((f \cdot g) \cdot h)(x, y)$.

7.183. Véase el teorema 47 del § 3, capítulo 8 [1].

7.184. Por cuanto $\zeta(x, x) = 1 \neq 0$ para cualquier $x \in P$, entonces, en virtud del problema 7.183, ζ tiene una función inversa μ , que es para ella una función inversa (tanto izquierda, como derecha). Por consiguiente, tal definición de la función de Moebius es correcta.

7.185. La función buscada es un corolario directo de las fórmulas, obtenidas al resolver el problema 7.183, si se toma en consideración la condición de que $\mu(x, x) = 1$ para todo $x \in P$.

7.186. Dicha propiedad se cumple para todas las funciones de incidencia en consideración. Se comprueba directamente. Para comprobar la igualdad con relación a la función zeta y la de Moebius, hágase uso de los resultados del problema 7.183.

7.187. Para a) y b) hágase uso del binomio de Newton;

c) $\kappa \cdot \zeta(x, y) = \sum_{z: x \leq z \leq y} \kappa(x, z) \zeta(z, y) = [\kappa(x, z) \neq 0 \text{ cuando } y \text{ sólo cuando } x < z] = \sum_{z: x < z \leq y} \kappa(x, z) \zeta(z, y) = \text{puesto que } \zeta(z, y) = 1 \text{ para todo } z \leq y = \sum_{z: x < z \leq y} \kappa(x, z)$. Pero, si $\kappa(x, z) \neq 0$, entonces $\kappa(x, z) = 1$.

La validez de la identidad c) queda demostrada;

d) la identidad d) se obtiene de c) de un modo dual.

Para e), f), g), hágase uso de la siguiente fórmula

$$f^h(x, y) = \sum_{z_1, z_2, \dots, z_{h-1}: x \leq z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_{h-1} \leq y} f(x, z_1) f(z_1, z_2) \dots f(z_{h-1}, y),$$

que se demuestra fácilmente por inducción, como también de los siguientes hechos fácilmente comprobados:

para e): $\eta(x, z_1) \cdot \eta(z_1, z_2) \cdot \dots \cdot \eta(z_{h-1}, y) = 1$ cuando y sólo cuando $x < z_1 < z_2 < \dots < z_{h-1} < y$;

para $f) \times (x, z_1) \times (z_1, z_2) \dots \times (z_{h-1}, y) = 1$ cuando y sólo cuando

$$x \prec z_1 \prec z_2 \prec \dots \prec z_{h-1} \prec y;$$

para $g) \zeta(x, z) \zeta(z, y) = 1$ cuando y sólo cuando $x \leq z \leq y$.

7.188. Véase la demostración del teorema 48, § 8.3 en [1].

7.189. De $[x \wedge x, x \vee x] \cong [x \wedge x, x] \times [x \wedge x, x]$ tenemos que $f(x, x) = f(x, x) f(x, x)$. Por ser invertible la expresión, $f(x, x) \neq 0$ para todo $x \in P$. Por consiguiente, $f(x, x) = 1$.

7.190. En efecto, si $f, g \in A(P)$ y φ es un isomorfismo del intervalo $[x, y]$ en $[a, b]$, entonces

$$(f+g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y) = f(a, b) + g(a, b) = (f+g)(a, b);$$

$$(\alpha f)(x, y) = \alpha \cdot f(x, y) = \alpha \cdot f(a, b) = (\alpha f)(a, b);$$

$$(f * g)(x, y) = \sum_{z: x \leq z \leq y} f(x, z) g(z, y) = \sum_{z: x \leq z \leq y} f(\varphi(x), \varphi(z)) g(\varphi(z), \varphi(y)) =$$

$$= \sum_{z: a = \varphi(x) \leq \varphi(z) \leq \varphi(y) = b} f(a = \varphi(x), \varphi(z)) g(\varphi(z), b = \varphi(y)) = (f * g)(a, b).$$

7.191. Hágase uso del resultado del problema 7.183.

7.192. Todas las funciones de incidencia que se consideran pertenecen al álgebra estándar $S(P)$. La pertenencia de la función de Möbius se desprende directamente del problema 7.191.

7.193. Sean f y g las funciones invertibles multiplicativas de incidencia del álgebra estándar $S(P)$. Comprobemos que la función $f * g$ es también multiplicativa. Admitamos que

$$[x \wedge y, x \vee y] = [x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y],$$

entonces $(f * g)(x \wedge y, x \vee y) = \sum_{z: x \wedge y \leq z \leq x \vee y} f(x \wedge y, z) g(z, x \vee y) =$ (puesto que

$[x \wedge y, z] \cong [x \wedge y, z \wedge x] \times [x \wedge y, z \wedge y]$, $[z, x \vee y] \cong [z, z \vee x] \times [z, z \vee y]$ y f, g son funciones multiplicativas) =

$$\sum_{z: x \wedge y \leq z \leq x \vee y} f(x \wedge y, z \wedge x) f(x \wedge y, z \wedge y) \times$$

$$\times g(z, z \vee x) g(z, z \vee y) =$$
 (puesto que $[z, z \vee x] \cong [z \wedge x, x]$, $[z, z \vee y] \cong [z \wedge y, y]$ y $f, g \in S(P)$) =

$$\sum_{z: x \wedge y \leq z \leq x \vee y} (f(x \wedge y, z \wedge x) g(z \wedge x, x)) (f(x \wedge y, z \wedge y) g(z \wedge y, y)) =$$

$$=$$
 (designemos por u y respectivamente v $z \wedge x$ y $z \wedge y$; entonces $x \wedge y \leq u \leq x$ y $x \wedge y \leq v \leq y$, puesto que $x \wedge (x \wedge y) = x \wedge y$, $y \wedge (x \wedge y) = x \wedge y$, $x \wedge (x \vee y) = x$, $y \wedge (x \vee y) = y$) =

$$\sum_{u: x \wedge y \leq u \leq x} f(x \wedge y, u) g(u, x) \sum_{v: x \wedge y \leq v \leq y} f(x \wedge y, v) g(v, y) =$$

$$= (f * g)(x \wedge y, x) (f * g)(x \wedge y, y)$$
, es decir, es una función multiplicativa.

Comprobemos que f^{-1} es también una función multiplicativa. Mostremos por inducción respecto de l que la condición de multiplicatividad está cumplida para todos los intervalos de longitud no superior a l . Cuando $l = 0$, esto es evidente. Supongamos que esta afirmación es válida para $l - 1$ y demosetremos su validez para l . Examinemos un intervalo $[x \wedge y, x \vee y]$ de longitud l . Entonces

$$0 = \delta(x \wedge y, x \vee y) = (f^{-1} * f)(x \wedge y, x \vee y) = \sum_{z: x \wedge y \leq z \leq x \vee y} f^{-1}(x \wedge y, z) f(z, x \vee y) =$$

$$= \sum_{z: x \wedge y \leq z \leq x \vee y} f^{-1}(x \wedge y, z) f(z, x \vee y) + f^{-1}(x \wedge y, x \vee y) f(x \vee y, x \vee y) =$$

$$=$$
 (en virtud de la suposición de inducción y teniendo presente que $f(x \vee y, x \vee y) = 1$) =

$$\sum_{z: x \wedge y \leq z \leq x \vee y} f^{-1}(x \wedge y, z \wedge x) f^{-1}(x \wedge y, z \wedge y) f(z, z \vee y) f(z, z \vee y) +$$

$$+ f^{-1}(x \wedge y, x \vee y) =$$
 (en virtud de que $[z, z \vee x] \cong [z \wedge x, x]$, $[z, z \vee y] \cong [z \wedge y, y]$ y $f, f^{-1} \in S(P)$) =

$$\sum_{z: x \wedge y \leq z \leq x \vee y} f^{-1}(x \wedge y, z \wedge x) f(z \wedge x, x) f^{-1}(x \wedge y,$$

$$\begin{aligned}
 z \wedge y) f(x \wedge y, y) + f^{-1}(x \wedge y, x \vee y) &= (\text{designemos por } u \text{ y respectivamente } v \text{ } z \wedge x \\
 \text{y } z \wedge y \text{ teniendo presente que } [x \wedge y, x \vee y] &\cong [x \wedge y, x] x [x \wedge y, y] \text{ y } f(x, x) = 1 \\
 \text{para todo } x \in P) &= \sum_{u: x \wedge y \leq u < x} f^{-1}(x \wedge y, u) f(u, x) \sum_{v: x \wedge y \leq v < y} f^{-1}(x \wedge y, v) \times \\
 \times f(x, y) + f^{-1}(x \wedge y, x) &\sum_{v: x \wedge y \leq v < y} f^{-1}(x \wedge y, v) f(v, y) + f^{-1}(x \wedge y, y) \times \\
 \times \sum_{u: x \wedge y \leq u < x} &f^{-1}(x \wedge y, u) f(u, x) + f^{-1}(x \wedge y, x \vee y) = (\text{en virtud de las fórmulas}
 \end{aligned}$$

que figuran en la resolución del problema 7.183 y de que $f(x, x) = 1$ para todo $x \in P$) $= (-f^{-1}(x \wedge y, x)) (-f^{-1}(x \wedge y, y)) + f^{-1}(x \wedge y, x) (-f^{-1}(x \wedge y, y)) + f^{-1}(x \wedge y, y) (-f^{-1}(x \wedge y, x)) + f^{-1}(x \wedge y, x \vee y)$. De este modo hemos llegado a que

$$f^{-1}(x \wedge y, x \vee y) - f^{-1}(x \wedge y, x) f^{-1}(x \wedge y, y) = 0$$

Por consiguiente,

$$f^{-1}(x \wedge y, x \vee y) = f^{-1}(x \wedge y, x) f^{-1}(x \wedge y, y),$$

y la demostración queda terminada.

7.194.

- a) $\mu(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{si } a = b; \\ 0, & \text{en el caso contrario;} \end{cases}$
 b) $\forall n, m \in N$ tenemos

$$\mu(n, m) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = m; \\ -1, & \text{si } m - n = 1; \\ 0, & \text{en todos los demás casos;} \end{cases}$$

c) hágase uso del resultado del problema 7.25 y de b). $\forall X, Y \in \mathcal{P}(S_n)$ tenemos

$$\mu(X, Y) = \begin{cases} (-1)^{|Y| - |X|}, & \text{si } X \subseteq Y \\ 0 & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

d) Sea $\mathcal{D}(n)$ un conjunto de todos los divisores enteros no negativos del número natural n , ordenado según la divisibilidad. De acuerdo con el teorema de unicidad del desarrollo de un número en factores simples,

$$\mathcal{D}(n) \cong \mathcal{D}(p_1^{\alpha_1}) \times \mathcal{D}(p_2^{\alpha_2}) \times \dots \times \mathcal{D}(p_s^{\alpha_s}).$$

Por consiguiente, resulta suficiente calcular la función de Moebius para $\mathcal{D}(p^\alpha)$, donde p es un número primo y α , un número entero. Pero el conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{D}(p^\alpha)$ es una anticadena $1 | p | p^2 | \dots | p^\alpha$, isomorfa al subconjunto de números enteros $\{0, 1, 2, \dots, \alpha\}$ de orden corriente, cuya función de Moebius ya está calculada en b). Por eso

$$\mu(p^i, p^j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ -1, & \text{si } j - i = 1 \\ 0, & \text{en todos los demás casos} \end{cases}$$

En virtud del problema 7.193,

$$\mu(l, m) = \begin{cases} 1, & \text{si } l = m; \\ (-1)^s, & \text{si } \frac{m}{l} = p_1 p_2 \dots p_s, \text{ donde } p_1, p_2, \dots, p_s \text{ son números} \\ & \text{primos distintos dos a dos;} \\ 0, & \text{en todos los demás casos.} \end{cases}$$

e) Si $\pi \in B(S_n)$ tiene exactamente k bloques, entonces $\mu(\pi, 1) = (-1)^{k-1} \times (k-1)!$
 f) $\forall X, Y \subseteq V_n$ tenemos

$$\mu(X, Y) = \begin{cases} (-1)^{d(Y)-d(X)} q^{\binom{d(Y)-d(X)}{2}}, & \text{si } X \subseteq Y; \\ 0 & \text{en el caso contrario} \end{cases}$$

donde $d(X)$ es la dimensión del subespacio X .

g) $\forall X, Y \subset \Pi_n$ tenemos

$$\mu(X, Y) = \begin{cases} (-1)^{d(Y)-d(X)}, & \text{si } X \subset Y; \\ 0, & \text{en el caso contrario,} \end{cases}$$

donde $d(X)$ es la dimensión de la arista de X .

7.195. Fijemos x y veamos una suma

$$S = \sum_{y: y \leq x} g(y) \mu(y, x) = \sum_{y: y \leq x} \left(\sum_{z: z \leq y} f(z) \right) \mu(y, x).$$

Aquí, en lugar de $g(y)$ se puso su expresión en términos de $f(z)$. Cambiemos el orden de sumación y obtendremos:

$$S = \sum_{z: z \leq y} f(z) \sum_{y: y \leq x} \mu(y, x) = \sum_z f(z) \zeta(z, y) \sum_{y: y \leq x} \mu(y, x) = \sum_z f(z) \sum_{y: z \leq y \leq x} \zeta(z, y) \mu(y, x) = \sum_z f(z) \delta(z, x) = f(x),$$

lo que se trataba de demostrar.

7.198. Hágase uso de las fórmulas de inversión de Moebius y del resultado del problema 7.194 b).

7.199. Hágase uso de las fórmulas de inversión de Moebius y del resultado obtenido en el problema 7.194 c).

7.201. Sea $f, g \in A(P)$ y $F = (f_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, $G = (g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, donde $n = |P|$ y $f_{ij} = f(x_i, x_j)$, $g_{ij} = g(x_i, x_j)$. En este caso basta mostrar que si $h = f + g$, $t = \alpha \cdot f$ y $p = f * g$, donde $\alpha \in K$, entonces $H = F + G$, $T = \alpha \cdot F$ y $P = F \cdot G$. Las primeras dos igualdades son evidentes. Comprobemos la tercera. En efecto,

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^n f_{ik} g_{kj} = \sum_{k=1}^n f(x_i, x_k) \cdot g(x_k, x_j) = (\text{aprovechemos el que } f(x_i, x_j) = 0 \text{ cuando } x_k < x_i, \text{ es decir, } k < i, \text{ y } g(x_k, x_j) = 0 \text{ cuando } x_k > x_j, \text{ es decir, } k > j) = \sum_{k: i \leq k \leq j} f(x_i, x_k) \cdot g(x_k, x_j) = \sum_{x_k: x_i \leq x_k \leq x_j} f(x_i, x_k) \cdot g(x_k, x_j) = p(x_i, x_j).$$

7.202. La matriz triangular superior es invertible cuando y sólo cuando todos sus elementos que se disponen en la diagonal principal son distintos de cero. Las demás afirmaciones del problema no representan dificultades en demostrarlas. Indiquemos solamente que en la matriz H todos los valores propios son iguales a cero y la matriz es conmutativa.

7.203. Hágase uso de los problemas 7.187 y 7.202.

$$7.204. \sum_{z \in A: \varphi(z) = \varphi(y)} \mu_A(x, z) = \sum_{z \in A} \mu_A(x, z) \delta(\varphi(z), \varphi(y)) = \sum_{z \in A} \mu_A(x, z) \sum_{\varphi(w) \in Q} \zeta_Q(\varphi(z), \varphi(w)) \mu_Q(\varphi(w), \varphi(y)) = \sum_{z \in A} \sum_{\varphi(w) \in Q} \mu_A(x, z) \times \zeta_A(\varphi(z), \varphi(w)) \mu_Q(\varphi(w), \varphi(y)).$$

En virtud de las propiedades del operador $z \leq \varphi(w)$ cuando y sólo cuando $\varphi(z) \leq \varphi(w)$. Por eso $\zeta_A(\varphi(z), \varphi(w)) = \zeta_A(z, \varphi(w))$. Aprovechemos este hecho y, además, alteremos el orden de

sumación. Entonces
$$\sum_{z \in A: \varphi(z) = \varphi(y)} \mu_A(x, z) = \sum_{\varphi(w) \in Q} \left(\sum_{z \in A} \mu_A(x, z) \zeta_A(z, \varphi(w)) \times \right. \\ \left. \times \mu_Q(\varphi(w), \varphi(y)) \right) = \sum_{\varphi(w) \in Q} \delta_A(x, \varphi(w)) \mu_Q(\varphi(w), \varphi(y)).$$
 De aquí precisamente

proviene la afirmación del problema, puesto que si $x = \varphi(x)$, entonces $\delta_A(x, \varphi(w)) = \delta_A(\varphi(x), \varphi(w)) = 1$ cuando y sólo cuando $\varphi(w) = \varphi(x)$. Si $x < \varphi(w)$, tenemos que $\delta_A(x, \varphi(w)) = 0$, puesto que $x \neq \varphi(w)$ para todo $w \in A$, por lo que $\varphi(w) \in Q$, y $x \in Q$, pues x no es un elemento φ -cerrado.

7.205. Póngase en las condiciones del problema 7.204. $A = \mathcal{P}(S)$, $x = \emptyset$, $y = S$ (está claro que \emptyset será 0, y el conjunto 1 del conjunto parcialmente ordenado Q) y hágase uso de la función de Moebius para el booleano del problema 7.194.

7.206. a) Si 0 no es una intersección de cóatomos del retículo L , entonces para todo $x \in L$ definamos el operador de la manera siguiente:

$$\varphi(x) = \inf \{c \in L \mid x \leq c \text{ -- } \langle 1\}.$$

Compruébese que φ es un operador de clausura y hágase uso de los resultados del problema 7.204.

El caso en que 1 no es una unión de átomos se obtiene por razonamientos duales.

Se procederá de un modo análogo para demostrar b).

Observemos que a) se deduce de b) de un modo trivial. En efecto, es suficiente en b) poner $x = 0$ e $y = 1$.

7.207. Las afirmaciones a), b), c) y e) son válidas. De contraejemplo para la afirmación d) sirve el retículo con complementos relativos en la fig. 7.9', en

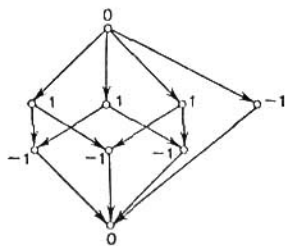


Fig. 7.9'.

la cual $\mu(0, 1) = 0$. Los números que están al lado con los elementos x del retículo en la fig. 7.14' denotan valores de la función de Moebius $\mu(0, x)$.

7.208. En virtud del problema 7.206, de $\mu(0, 1) \neq 0$ para retículos distributivos y modulares se deduce que ellos son geométricos. Los retículos geométricos distributivos son álgebras de Boole de rango finito, y cada retículo geométrico modular indescomponible es una geometría proyectiva, la cual es isomorfa al retículo de los subespacios del espacio vectorial n -dimensional para $n \geq 4$ (problemas 7.169 y 7.172). Al haber aprovechado las funciones de Moebius para el booleano y para el retículo de un subespacio del espacio vectorial n -dimensional, calculadas en el problema 7.194 c) y f), obtenemos la afirmación del problema. Indiquemos que los casos de $n = 2$ y $n = 3$ para los retículos modulares geométricos requieren un análisis especial, pero ellos no son triviales.

7.209. Sin perder la generalidad, podemos considerar que $a < 1$. Sea $z \in L$ tal que $z \vee a = 1$. Para un $w \in L$ arbitrario, $w \leq z$, definamos la aplicación φ del modo siguiente:

$$\varphi(w) = \begin{cases} w, & \text{si } w \vee a < 1; \\ z, & \text{si } w \vee a = 1, \end{cases}$$

la cual será un operador de clausura en $[0, z]$. El conjunto de todos los elementos φ -cerrados de $[0, z]$ se denotará con Q . Entonces $Q = \{w \in L \mid w = z, \text{ o bien } w < z \text{ y } w \vee a < 1 \text{ simultáneamente}\}$. Es fácil comprobar que Q es un retículo.

En vista del problema 7.204, tenemos

$$\mu_Q(0, z) = \sum_{w \in L: \varphi(w) = \varphi(z) = z} \mu(0, w) = \sum_{w \in L: w \leq z \text{ y } w \vee a = 1} \mu(0, w) \quad (7.5')$$

Supongamos que $F = \{w \in L \mid w \vee a = 1\}$ es un subconjunto parcialmente ordenado del conjunto L . Notemos que $z \in F$ y $\mu_F(x, y) = \mu(x, y)$ para todos los $x, y \in F$. Por eso

$$\mu_Q(0, z) = \sum_{w \in F: w \leq z} \mu_F(0, w).$$

Aplicaremos la 1ª fórmula de inversión de Moebius (véase el problema 7.195) y obtendremos

$$\mu_F(0, z) = \sum_{w \in F: w \leq z} \mu_Q(0, w) \mu_F(w, z).$$

En particular, cuando $z = 1 \in F$, tenemos

$$\mu_F(0, 1) = \sum_{w \in F} \mu_Q(0, w) \mu_F(w, 1)$$

o bien

$$\mu(0, 1) = \sum_{w \in L: w \vee a = 1} \mu_Q(0, w) \mu(w, 1) \quad (7.6')$$

Si en (7.6') sustituimos $\mu_Q(0, w)$ por su expresión de (7.5'), obtendremos

$$\begin{aligned} \mu(0, 1) &= \sum_{w \in L: w \vee a = 1} \left(\sum_{v \in L: v \leq w \text{ y } v \vee a = 1} \mu(0, v) \right) \mu(w, 1) = \\ &= \sum_{w \in L: w \vee a = 1} \sum_{v \in L: v \vee a = 1} \mu(0, v) \zeta(v, w) \mu(w, 1). \end{aligned}$$

Si logramos mostrar que $\mu_Q(0, w) = 0$ para cualquier $w \in L$, para los cuales $w \vee a = 1$ y $w \wedge a > 0$, el problema quedará resuelto por completo. Por cuanto de $z \wedge a = 0$ y de $w \leq z$ se desprende que $w \wedge a = 0$, entonces $\mu_Q(0, w) \neq 0$ solo en los casos en que $w \vee a = 1$ y $w \wedge a = 0$, o cuando $w \in a^\perp$.

Si $w \in Q$, tenemos $w \vee (z \wedge a) \leq z$. Además, si $w \vee (z \wedge a) < z$, entonces $(w \vee (z \wedge a)) \vee a = w \vee a < 1$, y, por consiguiente, $w \vee (z \wedge a) \in Q$. Tomemos un cóatomo arbitrario w del retículo Q . Tendremos $w \leq w \vee (z \wedge a) < z$. De donde, $w = w \vee (z \wedge a)$, o bien $z \wedge a \leq w$. De este modo, $z \wedge a$ es una intersección de todos los cóatomos del retículo Q . En virtud del problema 7.206, $\mu_Q(0, z) = 0$, cuando $z \wedge a \neq 0$, es decir, cuando $z \wedge a > 0$.

7.210. Definamos, para todo $a \in L$, un operador de clausura $\varphi: \varphi(a) = a \vee z$. Supongamos que Q es un conjunto de todos los elementos φ -cerrados del retículo L . Entonces, en virtud del problema 7.204,

$$\sum_{t \in L: \varphi(t) = \varphi(y)} \mu(x, t) = \begin{cases} \mu_Q(\varphi(x), \varphi(y)), & \text{si } x = \varphi(x); \\ 0, & \text{si } x < \varphi(x). \end{cases}$$

Pero, $\varphi(x) = x \vee z = z \vee y$ y $\varphi(y) = y$, $\varphi(z) = z$. Así, pues,

$$\sum_{t \in L: t \vee z = y} \mu(x, t) = \begin{cases} \mu(x, y), & \text{si } z = x; \\ 0, & \text{si } x < z. \end{cases}$$

(Weisner L. «Trans. Amer. Math. Soc.», 1935, 38, p. 474—484).

7.211. Si en la fórmula de Weisner (problema 7.210) ponemos $x = 0$, $z = a$, $y = b$, obtendremos para el caso $a > 0$ la afirmación a) del problema. La afirmación b) se obtiene de a) por inversión del orden.

7.212. a) Se deduce directamente del problema 7.209.

b) En virtud del problema 7.97, el complemento del elemento a del retículo modular forma una anticadena. De aquí y del problema 7.209 concluimos que

$$\mu(0, 1) = \sum_{z \in a^\perp} \mu(0, z) \mu(z, 1).$$

Si $z \in a^\perp$, tenemos $z \wedge a = 0$, $a \vee z = 1$, y, en vista del problema 7.98, $[0 = a \wedge z, a] \cong [z, a \vee z = 1]$. De este modo,

$$\mu(0, 1) = \sum_{z \in a} \mu(0, z) \mu(0, a) = \mu(0, a) \sum_{z \in a^\perp} \mu(0, z).$$

c) La segunda parte de la afirmación c) es equivalente al siguiente hecho: si y cubre z , entonces las funciones $\mu(x, y)$ y $\mu(x, z)$ tienen signos opuestos. Cada intervalo $[x, y]$ del retículo geométrico es un retículo geométrico. Por eso, sin perder la generalidad, se puede considerar que $x = 0$, $y = 1$ y z es el cóatomo del retículo L .

Demostremos la afirmación por inducción respecto de $r(L)$. Si $r(L) = 1$, entonces $\mu(0, 1) = -1$. Si $r(L) = 2$, entonces $\mu(0, 1) = 1$. Supongamos que la afirmación del problema es válida para todos los retículos L con $r(L) < n - 1$. Sea P un retículo geométrico con $r(P) = n$, y a , su átomo arbitrario. Todos los complementos del elemento a en P son cóatomos del retículo P . Efectivamente, sea $x \in a^\perp$, es decir, $x \wedge a = 0$ y $a \vee x = 1$. Entonces, de la desigualdad para la función de rango en un retículo geométrico $r(x \vee a) + r(x \wedge a) \leq r(x) + r(a)$ obtenemos que si $a \vee x = 1$, entonces $n \leq r(x) + r(a)$, es decir, $r(x) \geq n - 1$. Los cóatomos del retículo P forman una anticadena. Además, en virtud del problema 7.155, zMa para todo $z \in a^\perp$, es decir, $[0, a] \cong [z, 1]$. Por eso, del teorema de Crapo (problema 7.209) tenemos $\mu(0, 1) = \sum_{z \in a^\perp} \mu(0, z) \mu(z, 1) = \sum_{z \in a^\perp} \mu(0, z) \mu(0, a) = \mu(0, a) \sum_{z \in a^\perp} \mu(0, z) = - \sum_{z \in a^\perp} \mu(0, z)$. El rango de todos los intervalos $[0, z]$ es igual a $n - 1$.

Por eso, con arreglo a la suposición de inducción, todos los sumandos $\mu(0, z)$ son distintos de cero y tienen un mismo signo. Por consiguiente, $\mu(0, 1) \neq 0$ y tiene el signo opuesto al de $\mu(0, z)$, lo que se trataba de demostrar.

d) Hágase uso del valor de la función de Moebius del booleano (problema 7.194 c)) y de la afirmación de P. Hall (problema 7.206).

7.214. En virtud de la simetría, es suficiente comprobar sólo las primeras afirmaciones tanto en a), como en b). Sea $x \in P$, entonces, de acuerdo con la definición de la correspondencia de Galois, $x \leq \tau\sigma(x)$, y por eso, $\sigma(x) \geq \sigma\tau\sigma(x)$. Por otra parte, $\sigma(x) \in L$ y, por consiguiente, $\sigma(x) < \sigma\tau\sigma(x)$. Esto significa que $\sigma(x) = \sigma\tau\sigma(x)$ para cualquier $x \in P$.

Demostremos ahora la primera afirmación de b). De acuerdo con la definición de correspondencia de Galois, $\tau\sigma(x) \geq x$ para todo $x \in P$ y si $x \leq y$ en P , entonces $\sigma(x) \geq \sigma(y)$ en L , y $\tau\sigma(x) \leq \tau\sigma(y)$ en P , es decir, $\tau\sigma$ es una aplicación isótona. Además, en virtud de a), $\tau\sigma\sigma = \tau\sigma$, lo que se trataba de demostrar.

7.215. Demostremos al principio que para cada $y \in P$ se verifica la identidad

$$\sum_{x \in P: x \geq y} \delta_P(\sigma(a), x) = \zeta_L(a, \sigma(y)) \quad (7.7')$$

donde ζ es la función zeta del conjunto parcialmente ordenado L . La identidad

evidente (7.7') es equivalente a la siguiente afirmación: $\tau(a) \geq y$ en P cuando y sólo cuando $a \leq \sigma(y)$ en L . Lo último se desprende directamente de las propiedades de la correspondencia de Galois. En efecto, si $\tau(a) \geq y$ en P , entonces $\sigma\tau(a) \leq \sigma(y)$ en L , pero $a \leq \sigma\tau(a)$ en L , por consiguiente, $a \leq \sigma(y)$ en L . Análogamente la demostración se realiza en la dirección inversa.

Apliquemos la 2ª fórmula de inversión de Moebius (problema 7.196) a (7.7') respecto de P y obtendremos que

$$\delta_P(\tau(a), y) = \sum_{x \in P: x \geq y} \mu_P(y, x) \zeta_L(a, \sigma(x)).$$

Para $y=0$ tenemos

$$\delta_P(\tau(a), 0) = \sum_{x \in P: x \geq 0} \mu_P(0, x) \zeta_L(a, \sigma(x)) \quad (7.8')$$

La función $\delta_P(\tau(a), 0)$ toma el valor de 1 cuando y sólo cuando $\tau(a) = 0$, y, si se tiene presente la suposición del problema, cuando y sólo cuando $a = 1$. Para todos los demás valores de a tenemos $\delta_P(\tau(a), 0) = 0$. Por eso

$$\delta_P(\tau(a), 0) = 1 - \eta_P(a, 1).$$

Escribamos ahora (7.8') en la forma

$$1 - \eta_P(a, 1) = \zeta_L(a, \sigma(0)) + \sum_{x \in P: x > 0} \mu_P(0, x) \zeta_L(a, \sigma(x)).$$

En virtud de la suposición del problema, $\zeta_L(a, \sigma(0)) = \zeta_L(a, 1)$, y $\zeta_L(a, 1) = 1$ para todo $a \in L$. Por consiguiente,

$$-\eta_P(a, 1) = \sum_{x \in P: x > 0} \mu_P(0, x) \zeta_L(a, \sigma(x)).$$

Por cuanto $\zeta = \delta + \eta$, entonces $\mu = \delta - \mu\eta$ y, por consiguiente, considerando que $0 \neq 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \mu_L(0, 1) &= - \sum_{a \in L: 0 \leq a \leq 1} \mu_L(0, a) \eta_L(a, 1) = \sum_{a \in L: 0 \leq a \leq 1} \mu_L(0, a) \times \\ &\times \left(\sum_{x \in P: x > 0} \mu_P(0, x) \zeta_L(a, \sigma(x)) \right) = \sum_{a \in L: 0 \leq a \leq 1} \sum_{x \in P: x > 0} \mu_P(0, x) \mu_L(0, a) \times \\ &\times \zeta_L(a, \sigma(x)) = (\text{cambiamos el orden de la sumación}) = \sum_{x \in P: x > 0} \mu_P(0, x) \times \\ &\times \sum_{a \in L: 0 \leq a \leq 1} \mu_L(0, a) \zeta_L(a, \sigma(x)). \end{aligned}$$

Por cuanto $\sum_{a \in L: 0 \leq a \leq 1} \mu_L(0, a) \zeta_L(a, \sigma(x)) = \delta_L(0, \sigma(x))$, entonces

$$\mu_L(0, 1) = \sum_{x \in P: x > 0} \mu_P(0, x) \delta_L(0, \sigma(x)) = \sum_{x \in P: \sigma(x)=0} \mu_P(0, x).$$

Además,

$$\delta_L(0, \sigma(x)) = \zeta_L(\sigma(x), 0).$$

Por eso,

$$\mu_L(0, 1) = \sum_{x \in P: x > 0} \mu_P(0, x) \zeta_L(\sigma(x), 0).$$

La demostración de la afirmación del problema está completamente terminada.
7.126. En lugar de P examínese un conjunto parcialmente ordenado P^* , dual respecto de P , y hágase uso del problema 7.215.

§ 4. Problemas mixtos sobre conjuntos parcialmente ordenados

7.219. Observemos que si, realizados d desplazamientos de todas las n cuentas de vidrio «por un círculo», se repite la «configuración de colores», d será divisor del número n . El número menor de desplazamientos que conducen a la configuración de partida lleva el nombre de *período*. Sea una cadena de longitud n y período d . Obtendremos, al realizar los desplazamientos, d diferentes cadenas, incluida la inicial. Uniendo los extremos de cada una de estas cadenas, obtenemos un mismo collar. Notemos que solamente estas d cadenas nos dan el collar dado.

Sea $M(n)$ el número de collares de longitud n y sea $m(d)$ el número de cadenas de período d . Entonces $M(n) = \sum_{d: d|n} \frac{1}{d} m(d)$ y $M(n) = k^n$. Aplicando la 1ª fórmula de inversión de Moebius (problema 7.195), obtenemos para $n = d$:

$$m(d) = \sum_{x: x|d} \mu\left(\frac{d}{x}\right) k^x.$$

De aquí $M(n) = \sum_{d: d|n} \frac{1}{d} \left(\sum_{x: x|d} \mu\left(\frac{d}{x}\right) k^x \right) = \frac{1}{n} \sum_{d: d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) k^d$, donde

$\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ es la función de Euler; $\mu(x)$ es la función de Moebius de la teoría de números que está ligada con la función de Moebius de un conjunto parcialmente ordenado de divisores de un número natural, ordenados según la divisibilidad, de la manera siguiente:

$$\mu(x) = \mu(l, m) = \mu\left(\frac{m}{l}\right), \quad \text{si } x = \frac{m}{l}$$

7.220. Muestrese que el problema de partida es equivalente a la búsqueda del número de permutaciones de σ elementos $\{1, 2, \dots, n\}$ tales que $\sigma(i) \neq i$ y $\sigma(i-1) \neq i$ para $i = 2, 3, \dots, n$ y $\sigma(1) \neq 1$, $\sigma(n) \neq 1$. La respuesta es:

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!$$

7.222. Todo grafo G puede ser pintado empleando $\lambda^{|V(G)|}$ procedimientos, donde $V(G)$ es el conjunto de vértices del grafo G . Además, cada coloración de este tipo será correcta exactamente para un solo subgrafo $H \in L(G)$, obtenido de G por contracción de las aristas con vértices igualmente pintados. De este modo,

$$\lambda^{|V(G)|} = \sum_{H \in L(G): H \leq G} P(H, \lambda).$$

Aplicando la 1ª fórmula de inversión de Moebius (problema 7.195), tendremos

$$P(G; \lambda) = \sum_{H \in L(G): H \leq G} \lambda^{|\mathcal{V}(H)|} \mu(H, G),$$

lo que se trataba de demostrar.

7.223. a) $\chi(\mathcal{P}(S_n); x) = (x-1)^n$;

b) $\chi(\mathcal{B}(n); x) = x(x-1)^s$, si $n = p_1 \dots p_s$, donde p_i son números primos diferentes.

7.224. Hágase uso del problema 7.193.

7.226. k) Éscribese la identidad $\xi^2 * \mu = \xi$ en el álgebra de incidencia del retículo (V_n, \subseteq) y hágase uso del valor de la función de Moebius calculado en el problema 7.194 f).

7.227. Por ser modular el retículo $L(V_n)$, de $r(a) = n-1$ y $a \wedge x = 0$ se desprende que $r(x) = r(x \vee a) + r(x \wedge a) - r(a) = r(x \vee a) + 0 - (n-1) \leq n - (n-1) = 1$. De este modo, $r(x) = 1$, es decir, x es un átomo en $L(V_n)$ o bien un subespacio unidimensional en V_n . Por cuanto a es un subespacio $(n-1)$ -dimensional de V_n , entonces $|a| = q^{n-1}$. Por consiguiente, el número de vectores de V_n , no situados en a , es igual a $q^n - q^{n-1}$. Cada subespacio unidimensional contiene exactamente $(q-1)$ vectores. Por eso, para cada subespacio a de dimensión $n-1$ existen $\frac{q^n - q^{n-1}}{q-1} = q^{n-1}$ diferentes subespacios unidimensionales x tales que $x \wedge a$. Así pues, el número buscado es igual a q^{n-1} .

7.228. Si $F \subset (V_n, (q), \subset)$ es tal que $\forall A, B \in F, A \cap B = \emptyset$, entonces para $n \geq 2k+1$ máx $|F| = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q$.

Si $F \subset (V_n, (q), \subset)$ es tal que $\forall A, B \in F, \dim(A \cap B) \geq r$, entonces para $n \geq 2k+2$ o para $n \geq 2k+1$ y $q \geq 3$

$$\text{máx } |F| = \begin{bmatrix} n-r \\ k-r \end{bmatrix}_q$$

[Hsieh W.N. Discret. Math., 1975, 12, No 1, p. 1-16.]

7.229. Sean d_1, \dots, d_m diferentes del número $N = p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n}$, entre los cuales no hay ningún par de divisores recíprocamente primos. En este caso si $R = \prod_{i=1}^n r_i$, entonces máx $m = \frac{1}{2} \sum \text{máx} \left\{ \prod_{j=1}^k r_{i_j}, R / \prod_{j=1}^k r_{i_j} \right\}$, donde la sumación se realiza respecto de todos los subconjuntos $\{i_1, \dots, i_k\}$ del conjunto $\{1, \dots, n\}$. En particular, si $N = p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n}$, entonces

$$\text{máx } m = \begin{cases} \sum_{k=(n+1)/2}^n \binom{n}{k} r^k, & n \equiv 1 \pmod{2}, \\ \frac{1}{2} \binom{n}{n/2} r^{n/2} + \sum_{k=n/2+1}^n \binom{n}{k} r^k, & n \equiv 0 \pmod{2}, \end{cases}$$

lo que nos da, para $r = 1, 2^{n-1}$ [Erdős P., Schonheim J.—In: Comb. Theory and its Appl., Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 4, Balatonfüred N—II P. C. 1974, p. 369-376].

7.230. Sea $\pi = (A_1, \dots, A_{b(\pi)}) \in \mathcal{B}(S_n)$, $|A_i| = n_i$ para $i = 1, \dots, b(\pi)$ y $\sum_{i=1}^{b(\pi)} n_i = n$. Cada partición $\sigma \in [\pi, 1]$ del belliano $\mathcal{B}(S_n)$ se obtiene de π me-

dante la reunión de dos o más bloques. Por eso, $[\pi, 1] \cong \mathcal{B}(S_{b(\pi)})$. Por otra parte, cualquier partición $\tau \in [0, \pi]$ puede obtenerse fraccionando los bloques de partición π en partes menores. De este modo, $[0, \pi] \cong \prod_{i=1}^{b(\pi)} \mathcal{B}(S_{n_i})$. De aquí precisamente se deduce la afirmación del problema.

7.231. Hagamos uso del problema 2.95. Cada permutación del tipo $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ engendra la única partición del mismo tipo, a saber, la partición en ciclos. Viceversa, a toda partición $\pi \in \mathcal{B}(S_n)$ del tipo $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ le corresponden $(1!)^{\alpha_1} (2!)^{\alpha_2} \dots [(n-1)!]^{\alpha_n}$ permutaciones cuya descomposición cíclica coincide con π . Por consiguiente, el número buscado es igual a

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i^{\alpha_i} \alpha_i!)} : \prod_{i=2}^n [(i-1)!]^{\alpha_i} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^n [\alpha_i! (i!)^{\alpha_i]}$$

7.232. En virtud del problema 7.230, $[0, \pi] \cong \prod_{i=1}^{b(\pi)} \mathcal{B}(S_{n_i})$ y $[\pi, 1] \cong \mathcal{B}(S_{b(\pi)})$. De aquí

$$|[0, \pi]| = \prod_{i=1}^{b(\pi)} B(n_i) \text{ y } |[\pi, 1]| = B(b(\pi)),$$

donde $B(n)$ son los números de Bell.

7.233. f) Escribáse la identidad $\zeta^2 * \mu =$ en el álgebra de incidencia del belliano $\mathcal{B}(S_n)$ y hágase uso del valor de la función de Moebius calculado en el problema 7.194 e).

7.234. El número de todos los grafos marcados simples con n vértices es igual a $2^{\binom{n}{2}}$. Sea S_n un conjunto de vértices del grafo y $\pi \in \mathcal{B}(S_n)$, donde $\mathcal{B}(S_n)$ es un belliano. Supongamos que $f(\pi)$ es el número de grafos marcados sobre S_n , cuyos componentes conexos definen la partición del conjunto S en bloques de π . Entonces si $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es el tipo de la partición σ , tenemos

$$\sum_{\pi \in \mathcal{B}(S_n) : \pi \leq \sigma} f(\pi) = \prod_{i=2}^n 2^{\binom{i}{2} \alpha_i} = 2^{\sum_{i=2}^n (\alpha_i \binom{i}{2})}$$

Al aplicar la 1ª fórmula de inversión de Moebius (problema 7.195), obtendremos

$$f(\sigma) = \sum_{\pi \in \mathcal{B}(S_n) : \pi \leq \sigma} 2^{\sum_{i=2}^n [b_i \binom{i}{2}]} \mu(\pi, \sigma),$$

donde (b_1, \dots, b_n) es el tipo de la partición π .

El número de grafos conexos simples es igual a $f(1)$, donde 1 es la unidad del belliano (S_n) . De este modo

$$f(1) = \sum_{\pi \in \mathcal{B}(S_n)} \mu(\pi, 1) 2^{\sum_{i=2}^n (b_i \binom{i}{2})},$$

y, en virtud del problema 7.194, e),

$$\mu(\pi, 1) = (-1)^{\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)-1} \left(\left(\sum_{i=1}^n \right) - 1 \right)!$$

Sustituyendo la expresión para la función de Moebius en $f(1)$, obtenemos la identidad buscada.

7.236. Por ser el retículo K distributivo, para todo $x \in [a \wedge b, a \vee b]$ tenemos que $(x \wedge a) \vee (x \wedge b) = x \wedge (a \vee b) = x \vee (x \vee a) \wedge (x \vee b) = x \vee (a \wedge b) = x$. Además, $(x \wedge a) \wedge (x \wedge b) = x \wedge (a \wedge b) = a \wedge b$ y $(x \vee a) \vee (x \vee b) = x \vee (a \vee b) = a \vee b$. Por eso, por ser la función μ submodular, para todo $x \in [a \wedge b, a \vee b]$ tenemos $\mu(x \wedge a) + \mu(x \wedge b) \geq \mu((x \wedge a) \vee (x \wedge b)) + \mu((x \wedge a) \wedge (x \wedge b)) = \mu(x) + \mu(a \wedge b)$;

$$\mu(x \vee a) + \mu(x \vee b) \geq \mu((x \vee a) \vee (x \vee b)) + \mu((x \vee a) \wedge (x \vee b)) = \mu(a \vee b) + \mu(x);$$

$$\mu(x) + \mu(a) \geq \mu(x \vee a) + \mu(x \wedge a);$$

$$\mu(x) + \mu(b) \geq \mu(x \vee b) + \mu(x \wedge b).$$

Al sumar todas las cuatro desigualdades, obtendremos $\mu(a) + \mu(b) \geq \mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b)$, pero, por hipótesis del problema, $\mu(a) + \mu(b) = \mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b)$. Por consiguiente, en todas las cuatro desigualdades los segundos miembros son iguales a los primeros, lo que se trataba de demostrar.

7.237. Es suficiente demostrar la afirmación para los intervalos transpuestos. Sea $a, b \in L$. Entonces, la aplicación $\psi(x) = x \wedge a = y$, determinada sobre $[b, a \vee b]$ define una aplicación isomorfía de $[b, a \vee b]$ en $[a \wedge b, a]$ (véase el problema 7.98). En virtud del problema 7.236 c), para todos los $x \in [b, a \vee b]$ tenemos

$$\mu(a \wedge b) + \mu(x) = \mu(x \wedge a) + \mu(x \wedge b) = \mu(\psi(x)) + \mu(b).$$

De aquí

$$\mu(x) - \mu(\psi(x)) = \mu(b) - \mu(a \wedge b) = \mu(a \vee b) - \mu(a)$$

para cualesquiera intervalos transpuestos $[b, a \wedge b]$ y $[a \wedge b, a]$.

7.238. Hágase uso de los problemas 7.146 y 7.237.

7.239. Hágase uso de los problemas 7.147 y 7.238.

$$\begin{aligned} 7.241. \quad \text{Tenemos } 2w &= \mu(y_1) + \mu(y_2) = \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y_1) + \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y_2) = \\ &= \sum_{i=1}^m c_i (\mu_i(y_1) + \mu_i(y_2)) \geq (\text{siendo submodulares las funciones } \mu_i) \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^m c_i (\mu_i(y_1 \vee y_2) + \mu_i(y_1 \wedge y_2)) = \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y_1 \vee y_2) + \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y_1 \wedge y_2) = \\ &= \mu(y_1 \vee y_2) + \mu(y_1 \wedge y_2) \geq (\text{por cuanto } w \text{ es el valor mínimo de } \mu(x)) \geq \\ &\geq w + w = 2w. \end{aligned}$$

Por cuanto $\mu(y_1 \vee y_2) + \mu(y_1 \wedge y_2) = 2w$, $\mu(y_1 \vee y_2) \geq w$ y $\mu(y_1 \wedge y_2) \geq w$, entonces $\mu(y_1 \vee y_2) = \mu(y_1 \wedge y_2) = w$.

7.242. De la igualdad

$$\sum_{i=1}^m c_i (\mu_i(y_1) + \mu_i(y_2)) = \sum_{i=1}^m c_i (\mu_i(y_1 \vee y_2) + \mu_i(y_1 \wedge y_2))$$

(véase problema 7.241) y de que $c_i > 0$ para todo $i, i = 1, \dots, m$ tenemos

$$\mu_i(y_1) + \mu_i(y_2) = \mu_i(y_1 \vee y_2) + \mu_i(y_1 \wedge y_2),$$

lo que se trataba de demostrar.

7.243. Sea $w = \min_{x \in K} \left\{ \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(x) \right\}$ y $w' = \min_{x \in K} \left\{ \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(x) \right\}$. Por

hipótesis del problema $\sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y) = w$, y $\sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y') = w'$. Por consiguiente,

$$w + w' = \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y) + \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y') = \sum_{i=1}^p \left[(c_i - c'_i) \mu_i(y) + c'_i (\mu_i(y) + \mu_i(y')) \right] +$$

$$+ \sum_{i=p+1}^q [c_i (\mu_i(y) + \mu_i(y')) + (c'_i - c_i) \mu_i(y')] + \sum_{i=q+1}^m c_i (\mu_i(y) + \mu_i(y')) \geq (\text{por}$$

ser la función $\mu_i(x)$ submodular) $\geq \sum_{i=1}^p [c_i - c'_i] \mu_i(y) + c'_i (\mu_i(y \vee y') +$

$+ \mu_i(y \wedge y')) + \sum_{i=p+1}^q [c_i (\mu_i(y \vee y') + \mu_i(y \wedge y')) + (c'_i - c_i) \mu_i(y')] +$

$+ \sum_{i=q+1}^m c_i (\mu_i(y \vee y') + \mu_i(y \wedge y')) = (\text{sumemos y restemos de las sumas obtenidas}$

$\sum_{i=1}^p c_i \mu_i(y \wedge y') + \sum_{i=p+1}^q c'_i \mu_i(y \vee y') = \sum_{i=1}^p c_i \mu_i(y \wedge y') + \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y \vee y') +$

$+ \sum_{i=1}^p [(c_i - c'_i) \mu_i(y) + c'_i \mu_i(y \wedge y') - c_i \mu_i(y \wedge y') + \sum_{i=p+1}^q [(c'_i - c_i) \mu_i(y') +$

$+ c_i \mu_i(y \vee y') - c'_i \mu_i(y \vee y')] = \sum_{i=1}^p c_i \mu_i(y \wedge y') + \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y \vee y') +$

$+ \sum_{i=1}^p (c_i - c'_i) (\mu_i(y) - \mu_i(y \wedge y')) + \sum_{i=p+1}^q (c'_i - c_i) (\mu_i(y') - \mu_i(y \vee y')) \geq (\text{cuando}$

$i = 1, \dots, p$, afirmamos que $(c_i - c'_i) \geq 0$ y $\mu_i(y) - \mu_i(y \wedge y') \geq 0$, puesto que μ_i son funciones modulares no decrecientes e $y \geq y \wedge y'$ en K ; cuando $i =$

$= p + 1, \dots, q$, afirmamos que $(c'_i - c_i) \geq 0$ y $\mu_i(y') - \mu_i(y \vee y') \geq 0$, puesto que μ_i son funciones submodulares no crecientes e $y' \leq y \vee y'$ en K) \geq

$$\geq \sum_{i=1}^p c_i \mu_i(y \wedge y') + \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y \vee y') \geq w + w'.$$

De aquí, por cuanto las expresiones primera y segunda son iguales, tenemos

$$\sum_{i=1}^p c_i \mu_i(y \wedge y') + \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y \vee y') = w + w', \text{ y,}$$

por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^p c_i \mu_i(y \wedge y') = w \text{ y } \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y \vee y') = w',$$

es decir, $y \wedge y' \in L(c_1, \dots, c_m)$ y, $y \vee y' \in L(c'_1, \dots, c'_m)$.

Más aún, queda demostrado que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y) + \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y') = \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y \wedge y') + \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y \vee y') \times \\ & \times \sum_{i=1}^p c_i (\mu_i(y) + \mu_i(y')) + \sum_{i=p+1}^q c_i (\mu_i(y) + \mu_i(y')) + \sum_{i=q+1}^m c_i (\mu_i(y) + \mu_i(y')) = \\ & = \sum_{i=1}^p c_i \mu_i(y \vee y') + \mu_i(y \wedge y') + \sum_{i=p+1}^q c_i (\mu_i(y \vee y') + \mu_i(y \wedge y')) + \\ & + \sum_{i=q+1}^m c_i (\mu_i(y \vee y') + \mu_i(y \wedge y')). \end{aligned}$$

En virtud de la última igualdad, obtenemos, teniendo presente que las funciones $\mu_i(x)$ son submodulares y que $c_i > 0$, $c'_i > 0$:

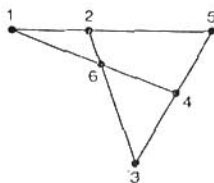
$$\mu_i(y) + \mu_i(y') = \mu_i(y \vee y') + \mu_i(y \wedge y')$$

para cualquier i , $i = 1, 2, \dots, m$, lo que se trataba de demostrar.

MATROIDES

§ 1. Conceptos fundamentales y ejemplos

- 8.3. $\mathcal{B}(U_{h,n}) = \{A \subseteq S \mid |A| = k\};$
 $\mathcal{C}(U_{h,n}) = \{A \subseteq S \mid |A| = k + 1\};$
 $\mathcal{D}(U_{h,n}) = \{A \subseteq S \mid |A| \geq k + 1\}.$
- 8.5.



8.6.

a) Supongamos, por ejemplo, que los primeros k vectores u_1, \dots, u_h , $k < n$, son linealmente dependientes, es decir, que $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_h u_h = 0$, donde no todos los λ_i son iguales a cero. Al poner, entonces, $\lambda_{h+1} = \dots = \lambda_n = 0$, obtendremos una combinación lineal no trivial $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n + \lambda_{h+1} u_{h+1} + \dots + \lambda_n u_n = 0$.

La afirmación b) se deduce directamente de a) (reducción al absurdo).

c) Supongamos, por ejemplo, que en la relación $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0$ se tiene $\lambda_n \neq 0$. Entonces $u_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} u_1 - \dots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} u_{n-1}$.

d) Sea, por ejemplo $u_n = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{n-1} u_{n-1}$. Al poner $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = \alpha_{n-1}$, $\lambda_n = -1$, obtendremos $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0$ con $\lambda_n \neq 0$.

e) La combinación lineal no trivial $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \alpha u = 0$ con $\alpha \neq 0$ nos da, en virtud de c), lo que necesitamos. Si, no obstante, $\alpha = 0$, entonces $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, puesto que u_1, \dots, u_n son, por hipótesis, linealmente independientes.

La afirmación f) se deduce directamente de e).

8.7. Las condiciones, (i1) y (i2) para el sistema \mathcal{J} se desprenden de la afirmación b) del problema 8.6. Para (i3) basta mostrar que si $A, B \in \mathcal{J}$ y $|B| = |A| + 1$, entonces se encontrará un vector $v \in B \setminus A$ tal que $A \cup \{v\} \in \mathcal{J}$. Supongamos que la última afirmación no es cierta, por ejemplo, para $A = \{u_1, \dots, u_m\}$ y $B = \{v_1, \dots, v_{m+1}\}$. Esto significa que para cada i , $i = 1, 2, \dots, m+1$, o bien $v_i \in \{u_1, \dots, u_m\}$, o bien el conjunto de vectores

$\{u_1, \dots, u_m, v_i\}$ es linealmente dependiente. Por consiguiente, existen $\alpha_{ji} \in F$ tales que

$$v_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ji} u_j, \quad \text{donde } i=1, 2, \dots, m+1$$

Formemos una combinación lineal de vectores v_i con los coeficientes $\beta_i \in F$:

$$\sum_{i=1}^{m+1} \beta_i v_i = \sum_{i=1}^{m+1} \beta_i \left(\sum_{j=1}^m \alpha_{ji} u_j \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_{ji} \beta_i \right) u_j,$$

y examinemos el sistema:

$$\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_{ji} \beta_i = 0, \quad j=1, \dots, m.$$

Por cuanto el número de incógnitas β_i es superior al número de ecuaciones, el sistema cuenta con la solución no nula ($\beta_1^0, \dots, \beta_{m+1}^0$). Llegamos, pues, a una combinación lineal no trivial

$$\beta_1^0 v_1 + \dots + \beta_{m+1}^0 v_{m+1} = 0,$$

cuya presencia contradice, no obstante, a la condición de que $B \in \mathcal{J}$. Por consiguiente, nuestra suposición no es cierta y la condición (i3) tiene lugar para el sistema \mathcal{J} .

8.8. La primera afirmación se deduce de que el determinante no es igual a cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Cuando $F = GF(2)$, el matroide vectorial M es isomorfo al matroide homogéneo $U_{2,3}$.

8.9. c) Sea $\sum_{i=1}^n \lambda_i (u_i - u) = 0$ y $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$. Entonces $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) u = 0 \cdot u = 0$, y, por ser los vectores u_1, \dots, u_n , independientes de manera afín, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. De este modo, $u_1 - u, \dots, u_n - u$ son independientes de un modo afín.

d) los vectores u_1, \dots, u_n son independientes de un modo afín cuando y sólo cuando de $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0$ y $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ se deduce que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$,

o bien si y sólo si de $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i u_i + \left(- \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right) u_n = 0$ se deduce que $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$, o bien si y sólo si de $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (u_i - u_n) = 0$ se desprende que

$\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$, es decir, si y sólo si el conjunto de vectores $\{u_1 - u_n, \dots, u_{n-1} - u_n\}$ es linealmente independiente.

e) Demostremos por reducción al absurdo. Supongamos que la afirmación no es cierta. En tal caso el conjunto A se contiene en un subespacio lineal $(n-2)$ -dimensional V de L . Por consiguiente, el conjunto de vectores $\{u_1 - u_n, \dots, u_{n-1} - u_n\}$ es linealmente dependiente, puesto que yace en V . Pero, en virtud de d), el conjunto de vectores u_1, \dots, u_n es dependiente de un modo afín, lo que contradice la hipótesis del problema.

8.10. Las condiciones (i1) y (i2) de la definición de matroide para el sistema \mathcal{J} se desprenden de la afirmación a) del problema 8.9. Demostremos la validez de (i3), es decir, que para $A, B \in \mathcal{J}$ arbitrarios, donde $|B| = |A| + 1$, existe $v \in B \setminus A$ tal que $A \cup \{v\} \in \mathcal{J}$. Sean $A = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $B = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ los conjuntos independientes de un modo afín. Entonces el conjunto $\{v_1 - u_n, \dots, v_{n+1} - u_n\}$ será también independiente de un modo afín (problema 8.9 c), y, en virtud de la afirmación e) del problema 8.9, podemos considerar (sin restringir la generalidad de los razonamientos) que $B' = \{v_1 - u_n, \dots, v_n - u_n\}$ es un conjunto linealmente independiente. Debido a la afirmación d) del problema 8.9, el conjunto de vectores $A' = \{u_1 - u_n, \dots, u_{n-1} - u_n\}$ es también linealmente independiente. Además, $|B'| = |A'| + 1$, pero, entonces, en virtud del problema 8.7, existe un $i, i = 1, \dots, n$, tal que el conjunto $A' \cup \{v_i - u_n\}$ es linealmente independiente, o bien, lo que es equivalente (problema 8.9 d), el conjunto $\{u_1, \dots, u_n, v_i\}$ es independiente de un modo afín o $A \cup \{v_i\} \in \mathcal{J}$.

8.11. Se demuestra igual que el problema 8.7.

Un sistema $\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_{ji} m_i \beta_i = 0, j=1, \dots, m$, donde α_{ji}, m_i son números enteros, tiene solución entera no nula $(\beta_1^0, \dots, \beta_{m+1}^0)$. En efecto, al hallar la solución racional no nula $(\beta_1^1, \dots, \beta_{m+1}^1)$ multipliquémosla por el denominador común de los números $\beta_1^1, \dots, \beta_{m+1}^1$ y obtendremos los valores enteros de $\beta_1^0, \dots, \beta_{m+1}^0$ que son precisamente las soluciones de la problema.

8.12. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ son números algebraicos, y π y e , números reales transcendentales sobre el campo de números racionales.

8.13. b) Convengamos en considerar que a_1, \dots, a_{n-1} están unidos al campo F . Entonces b depende algebraicamente de a_n sobre el campo $F(a_1, \dots, a_{n-1})$, es decir, tiene lugar la correlación algebraica

$$f_0(a_n) b^m + f_1(a_n) b^{m-1} + \dots + f_m(a_n) = 0. \quad (8.1')$$

Escribamos esta ecuación según las potencias del elemento a_n y obtengamos

$$g_0(b) a_n^h + g_1(b) a_n^{h-1} + \dots + g_n(b) = 0. \quad (8.2')$$

Por hipótesis, el elemento b es transcendente sobre el campo $F(a_1, \dots, a_{n-1})$. Por esta razón no todos los polinomios $g_0(b), \dots, g_n(b)$ son idénticamente iguales a cero, puesto que en el caso contrario el primer miembro en (8.1') sería idénticamente igual a cero, es decir, se verificarían las igualdades $f_0(a_n) = \dots = f_m(a_n) = 0$, lo que contradice la hipótesis. De aquí, en virtud de (8.2'), el elemento a_n depende algebraicamente de b sobre el campo $F(a_1, \dots, a_{n-1})$.

d) Si $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ tiene por corolario suyo el que el polinomio f es igual a cero, entonces, evidentemente, ninguno de los elementos a_i puede ser algebraicamente dependiente de los demás a_j .

Al contrario, supongamos que los elementos a_1, \dots, a_n son algebraicamente independientes. Si $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ y si el polinomio f está dispuesto por potencias del elemento a_n , entonces los coeficientes $f_i(a_1, \dots, a_{n-1})$ de este polinomio resultan ser idénticamente iguales a cero. Dispongamos estos coeficientes por potencias del elemento a_{n-1} y de la misma manera estableceremos que sus coeficientes son también idénticamente iguales a cero; procediendo de esta manera, llegamos al fin y al cabo a que los coeficientes del polinomio f son nulos.

8.14. Hace falta comprobar que \mathcal{J} satisface las condiciones (i1) — (i3) en la definición del matroide. La demostración de (i1) y (i2) se contiene en la resolución del problema 8.13 d).

Demostremos (i3) por reducción al absurdo. Supongamos que $A = \{a_1, \dots, a_n\}, B = \{b_1, \dots, b_{n+1}\} \in \mathcal{J}$, mas para todos los $b_j, j = 1, \dots, n+1$, el conjunto $A \cup \{b_j\} \notin \mathcal{J}$. Llegamos, pues, a una contradicción debido a que el conjunto B es algebraicamente independiente sobre F . En efecto, sean a_1, \dots

$\dots, a_n\}$ y $\{b_1, \dots, b_{n+1}\}$ dos conjuntos algebraicamente independientes sobre el campo F y sea b_j algebraico sobre $F(a_1, \dots, a_n)$ para $j = 1, \dots, n+1$. Demostremos por inducción respecto de k que con una reenumeración adecuada de los elementos a_i y b_j para cada $k \leq n$ tenemos que

el elemento b_{k+1} es algebraico sobre $F(b_1, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$ (8.3')

el elemento a_k es algebraico sobre $F(b_1, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$. (8.4')

Cuando $k = 0$, la afirmación (8.3') es evidente, mientras que en (8.4') no se analiza. Supongamos que para $k > 0$ las afirmaciones (8.3') y (8.4') son verdicas; demostrémoslas para $k + 1$. Por cuanto el elemento b_{k+1} es algebraico sobre $F(b_1, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$ y el conjunto $\{b_1, \dots, b_{k+1}\}$ es algebraicamente independiente sobre F , entonces de la solución del problema 8.13 b) se ve que existe un elemento a_j (puede considerarse sin restringir la generalidad de nuestros razonamientos que $j = k + 1$) bajo la condición: a_{k+1} es algebraico sobre $F(b_1, \dots, b_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n)$, lo que demuestra (8.4'). De este modo, para cada $i, i = 1, \dots, k + 1$, el elemento a_i es algebraico sobre el campo $F(b_1, \dots, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$. Aplicando reiteradamente el problema 8.13 c), llegamos a que cada elemento $a_i, i = 1, \dots, k + 1$, depende algebraicamente de $b_1, \dots, b_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n$. Luego, b_{k+2} depende algebraicamente de a_1, \dots, a_n , el elemento a_i depende algebraicamente de $b_1, \dots, b_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n$ para todo $i, i = 1, \dots, k + 1$. Por eso, en virtud del problema 8.13 c), b_{k+2} depende algebraicamente sobre F de $b_1, \dots, b_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n$, lo que sirve de demostración en (8.3'). La inducción queda finalizada. Suponiendo ahora $k = n$, obtenemos de (8.3') que b_{n+1} es algebraicamente dependiente sobre el campo F de b_1, \dots, b_n , lo que contradice la condición del problema.

8.16. Supongamos al contrario que $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(M)$ y $|B_1| \neq |B_2|$, por ejemplo, $|B_1| < |B_2|$. Entonces, en virtud de (i3), existe un $x \in B_2 \setminus B_1$ tal que $B_1 \cup \{x\} \in \mathcal{J}$, lo que contradice el que \mathcal{B} es la base del matroide.

8.17. La validez de (b1) para la familia $\mathcal{B}(M)$ de bases del matroide M se deduce de que la base es máxima. Ahora, si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(M)$ y $x \in B_1$, entonces $B_1 \setminus \{x\} \in \mathcal{J}$ y $|B_2| = |B_1 \setminus \{x\}| + 1$ (véase el problema 8.16). Por eso, en virtud de (i3), existe $y \in B_2 \setminus (B_1 \setminus \{x\})$ tal que $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{J}$. Además, $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} = |B_1|, y$, en virtud del problema 8.16, $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}(M)$. La validez de (b2) está establecida también.

Viceversa, supongamos que la familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$ satisface las condiciones (b1) y (b2). Definamos la familia \mathcal{J} del modo siguiente: $A \in \mathcal{J}$, donde $A \subseteq S$, si existe tal $B \in \mathcal{A}$ que $A \subseteq B$. Obviamente, \mathcal{J} satisface las condiciones (i1) y (i2). Demostremos la validez del axioma (i3) para \mathcal{J} . Sean X e Y dos conjuntos diferentes de \mathcal{J} tales que $X \subseteq B_1, Y \subseteq B_2$ y $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$. Supongamos que $X = \{x_1, \dots, x_h\}, B_1 = \{x_1, \dots, x_h, b_1, \dots, b_n\}, Y = \{y_1, \dots, y_h, y_{h+1}\}$ y $B_2 = \{y_1, \dots, y_h, y_{h+1}, c_1, \dots, c_{n-1}\}$. Examinemos el conjunto $B_1 \setminus \{b_n\}$. Para él existe, de acuerdo con (b2), un $z \in B_2$ tal que $(B_1 \setminus \{b_n\}) \cup \{z\} \in \mathcal{A}$. Si $z \in Y$, entonces $X \cup \{z\} \in \mathcal{J}$, y la condición (i3) se cumple. Si $z \notin Y$, examinemos el conjunto $((B_1 \setminus \{b_n\}) \cup \{z\}) \setminus \{b_{n-1}\} = B'$. Para éste existe, de nuevo en virtud de (i2), un $z_1 \in B_2$ tal que $B' \cup \{z_1\} \in \mathcal{A}$. Si $z_1 \in Y$, entonces $X \cup \{z_1\} \in \mathcal{J}$, y (i3) queda demostrada. Si $z_1 \notin Y$, pasamos al conjunto $(B' \cup \{z_1\}) \setminus \{b_{n-2}\}$, etc. Por cuanto $| \{b_1, \dots, b_n\} | > | \{c_1, \dots, c_{n-1}\} |$, entonces, tras n pasos como máximo, obtendremos una situación en la cual b_i se sustituye por un elemento de Y . Por consiguiente, \mathcal{J} satisface la condición (i3) y \mathcal{J} es una familia de conjuntos independientes del matroide.

Es evidente que de bases en (S, \mathcal{J}) sirven precisamente los conjuntos de \mathcal{A} .

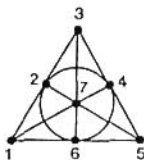
8.18. Supongamos que se cumple la afirmación (b2). Admitamos que $B_1, B_2 \in \mathcal{A}, B_1 \neq B_2, X \subseteq B_1, B_2 \subseteq Y$, y $X \subseteq Y$. En la familia \mathcal{A} de todos los conjuntos que contienen X elijamos B_3 tal que $B_2 \cap B_3$ sea máximo por el número de elementos. Supongamos que existe $x \in B_3 \setminus Y$. Entonces, de acuerdo con la suposición, existe $y \in B_2$ tal que $(B_3 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{A}$, y $X \subseteq (B_3 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$, $B_2 \cap B_3 \subseteq [(B_3 \setminus \{x\}) \cup \{y\}] \cap B_2$, lo que contradice el modo de elegir B_3 . Así pues, $X \subseteq B_3 \subseteq Y$ y (b2') queda demostrada.

Viceversa, supongamos que se cumple la afirmación (b2'). Mostremos, en primer lugar, que si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $|B_1 \setminus B_2| = 1$, entonces $|B_2 \setminus B_1| = 1$. En efecto, sea que $x \in B_1 \setminus B_2$ y $A = B_1 \cap B_2 = B_1 \setminus \{x\}$. Entonces existe $y \in B_2 \setminus A$. De aquí tenemos que $B_3 \supseteq A \cup \{y\} \subseteq B_1 \cup \{y\} \supseteq B_1$, lo que conduce a la existencia de tal $B_3 \in \mathcal{B}$ que $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} = A \cup \{y\} \subseteq B_3 \subseteq B_1 \cup \{y\}$. Por cuanto \mathcal{B} es una anticadena, entonces $B_3 \neq B_1 \cup \{y\}$, y, por consiguiente $B_3 = (B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} = B_2$ y $|B_2 \setminus B_1| = 1$.

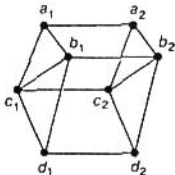
Ahora, supongamos que $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $B_1 \neq B_2$, $x \in B_1 \setminus B_2$ y $X = B_1 \setminus \{x\}$, $Y = B_2 \cup X$. Por hipótesis, se encontrará un $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $X \subseteq B_3 \subseteq Y$. Es evidente que $X = B_1 \cap B_3$ y $|B_1 \setminus B_3| = 1$. De aquí se deduce que $|B_3 \setminus B_1| = 1$, es decir, existe $y \in Y = X \cup B_2$ tal que $B_3 = X \cup \{y\}$. Está claro que $y \in B_2$. Así pues, (b2) queda también demostrada.

8.19. Entre todos los subconjuntos $Z \subseteq Y \setminus X$ tales que $X \cup Z \in \mathcal{J}$ elijamos Z_0 con un valor mínimo de $|X \cup Z_0|$. Si $|X \cup Z_0| < |Y|$, existe $Y_0 \subseteq Y$, $|Y_0| = |X \cup Z_0| + 1$, y, por cuanto $Y \in \mathcal{J}$, entonces, en virtud de (i3), se encontrará un $y \in Y \setminus (X \cup Z_0)$ tal que $(X \cup Z_0) \cup \{y\} \in \mathcal{J}$. El conjunto $Z_0 \cup \{y\}$ contradice el modo de elegir Z_0 .

8.20.



8.21.



8.22. Sea $M = (S, \mathcal{J})$ un matroide sobre el conjunto finito S . Las afirmaciones (r1) y (r2) son corolarios triviales de la definición de función de rango. Para demostrar (r3) supongamos que $X \subseteq A \cap B$ es un subconjunto independiente máximo de $A \cap B$. Al extender X con elementos nuevos, obtenemos $Y \subseteq A \cup B$ tal que $X \subseteq Y$, e Y es un subconjunto independiente máximo de $A \cup B$ (véase la fig. 8.1'). Es obvio que $|Y \cap A| + |Y \cap B| = |X| + |Y|$, puesto que en el primer miembro de la igualdad están calculados exactamente dos veces aquellos elementos de Y que yacen en X . Por cuanto Y es un conjunto independiente, serán también conjuntos independientes $Y \cap A$ e $Y \cap B$. Entonces $|Y \cap A| \leq r(A)$ y $|Y \cap B| \leq r(B)$ conducen a que $r(A) + r(B) \geq |Y \cap A| + |Y \cap B| = |X| + |Y| = r(A \cup B) + r(A \cap B)$.

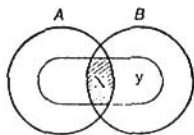


Fig. 8.1'.

Las afirmaciones (r4), (r5) y (r6) se obtendrán de (r1), (r2) y (r3). Ante todo, (r4) se deduce de manera trivial de (r1), si $A = \emptyset$. La afirmación $r(A) \leq r(A \cup \{a\})$ es un caso particular de (r2), y $r(A \cup \{a\}) \leq r(A) + 1$ se deduce de (r3), si ponemos $B = \{a\}$ y hacemos uso del corolario (r1) consistente en que

$r(\{a\}) \leq 1$. Así pues, (r5) queda demostrada. Por fin, al aplicar (r2) a los conjuntos A y $A \cup \{a, b\}$, como también (r3) a los conjuntos $A \cup \{a\}$ y $A \cup \{b\}$, llegamos a que $r(A) \leq r(A \cup \{a, b\})$ y $r(A \cup \{a, b\}) + r(A) \leq r(A \cup \{a\}) + r(A \cup \{b\})$, es decir, $r(A) \geq r(A \cup \{a, b\})$. De aquí, $r(A \cup \{a, b\}) = r(A)$ y (r6) queda establecida.

Viceversa, demos que una función de valores enteros r , que satisfice (r4), (r5) y (r6), es una función de rango de cierto matroide $M = (S, r)$. Diremos que $X \in \mathcal{J}$, $X \subseteq S$, si $r(X) = |X|$. Está claro que $\emptyset \in \mathcal{J}$. Supongamos que $A \in \mathcal{J}$ y $B \subseteq A$. Admitamos que $B \in \mathcal{J}$. Entonces, $r(B) < |B|$, y por eso, si $\{c_1, \dots, c_k\} = A \setminus B$, entonces $r(B \cup \{c_1\}) \leq r(B) + 1 < |B| + 1$. Aplicando reiteradamente (r2), obtendremos: $r(A) = r(B \cup \{c_1\} \cup \dots \cup \{c_k\}) < |B| + k = |A|$, lo que contradice la hipótesis. Por consiguiente, \mathcal{J} satisfice (i2). Supongamos ahora que $A, B \in \mathcal{J}$ y $A = \{a_1, a_2, \dots, a_i, c_{i+1}, \dots, c_k\}$, $B = \{a_1, a_2, \dots, a_i, b_{i+1}, \dots, b_k\}$, donde $c_i \neq b_j$ para cualesquiera i y j . Si $A \cup \{b_i\} \in \mathcal{J}$ para $i = 1, \dots, k+1$, entonces $r(A) = r(A \cup \{b_i\}) = |A|$. De aquí, en virtud de (r6), tenemos $r(A \cup \{b_i\} \cup \{b_j\}) = r(A) = |A|$ para $i, j = 1 + 1, \dots, k + 1$. Aplicando varias veces (r6), obtenemos

$$r(B) \leq r(A \cup \{b_{i+1}\} \cup \dots \cup \{b_{k+1}\}) = |A| < |B|,$$

lo que contradice el hecho de que $B \in \mathcal{J}$. Por consiguiente, $A \cup \{b_i\} \in \mathcal{J}$ para cierto i , \mathcal{J} satisfice (i3). De este modo, (S, \mathcal{J}) es un matroide. No es difícil demostrar que su función de rango coincide con r .

Por cuanto la función de valores enteros r' , para la cual resultan ser verdicas las condiciones (r1), (r2) y (r3), satisfice las condiciones (r4), (r5) y (r6), entonces r' será precisamente la función de rango r del matroide (S, \mathcal{J}) .

8.23. Si en el matroide de Vamos (problema 8.21) ponemos $A = \{b_1, b_2\}$, $B = \{c_1, c_2\}$, $C = \{d_1, d_2\}$, $\mathcal{D} = \{a_1, a_2\}$, entonces todos los conjuntos de cuatro elementos, salvo $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cup \mathcal{D}$, $B \cup C$ y $B \cup \mathcal{D}$ son independientes. Por eso, $r(A) + r(B) + r(A \cup B \cup C) + r(A \cup B \cup \mathcal{D}) + r(C \cup \mathcal{D}) = 2 + 2 + 4 + 4 + 4 = 16$, y $r(A \cup B) + r(A \cup C) + r(A \cup \mathcal{D}) + r(B \cup C) + r(B \cup \mathcal{D}) = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$, es decir, la desigualdad no es cierta para el matroide de Vamos. Esto también interviene como demostración de que el matroide de Vamos no es vectorial.

8.25. La validez de (c1) se deduce de la minimalidad del ciclo y (c2) es un corolario evidente de (c2'). Demostremos ahora la validez de (c2'). Sea $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(M)$, $C_1 \neq C_2$, $x \in C_1 \cap C_2$ e $y \in C_1 \setminus C_2$. Entonces $C_2 \setminus \{x\} \in \mathcal{J}$ y $C_2 \setminus \{x\} \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{y\}$. Por eso, se encontrará un subconjunto independiente máximo B de $(C_1 \cup C_2) \setminus \{y\}$ tal que $C_2 \setminus \{x\} \subseteq B$. Por cuanto $C_2 \notin \mathcal{J}$, de aquí se deduce que $x \in B$, y, por consiguiente, B es un subconjunto independiente máximo del conjunto $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x, y\}$. Análogamente, si B' es un subconjunto independiente máximo del conjunto $C_1 \cup C_2$ tal que $C_1 \setminus \{y\} \subseteq B'$, entonces $y \notin B'$ y B' es un subconjunto independiente máximo del conjunto $(C_1 \cup C_2) \setminus \{y\}$. Por consiguiente, si r es una función de rango del matroide M , entonces $r(C_1 \cup C_2) = r((C_1 \cup C_2) \setminus \{y\}) = r((C_1 \cup C_2) \setminus \{x, y\})$ y, como $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x, y\} \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\} \subseteq C_1 \cup C_2$, entonces $r(C_1 \cup C_2) \setminus \{x\} = r((C_1 \cup C_2) \setminus \{x, y\})$. Por eso, $B \cup \{y\}$ es un subconjunto dependiente del conjunto $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$, el cual contiene y , en tanto que la extracción de y del citado subconjunto lo hace independiente. Por eso $B \cup \{y\}$ contiene tal ciclo C^* que $y \in C^* \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$.

Con el fin de demostrar la afirmación inversa, comprobemos el cumplimiento para \mathcal{J} de los axiomas (i1) - (i3). Es evidente que $\emptyset \in \mathcal{J}$. Si el conjunto A no contiene a título de subconjuntos los términos de \mathcal{C} y si $B \subseteq A$, entonces, obviamente, B tampoco contiene términos de \mathcal{C} . De este modo, (i1) y (i2) se cumplen. Comprobemos (i3). Sean $A, B \in \mathcal{J}$ de tal índole que $|A| = m$, $|B| = m + 1$. Demostremos que existe un subconjunto del conjunto $A \cup B$ de potencia $m + 1$ que pertenece a la familia \mathcal{J} . Supongamos que B' tiene, entre todos los conjuntos de este tipo, el valor mínimo $|A \setminus B'|$. Queremos mostrar también que $A \setminus B' = \emptyset$, es decir que $A \subseteq B'$. Supongamos lo contrario.

Entonces existe un $x \in A \setminus B'$. Para cada $y \in B' \setminus A$ el conjunto $B_y = (B' \cup \{x\}) \setminus \{y\}$ es de potencia $m + 1$ y constituye un subconjunto del conjunto $A \cup B$, para el cual $|A \setminus B_y| < |A \setminus B'|$. Por consiguiente, en virtud de la suposición de minimalidad, $B_y \notin \mathcal{J}$ y contiene, a título de subconjunto, C_y de \mathcal{C} . Es evidente que $x \in C_y$ e $y \notin C_y$. Si cada $y \in B' \setminus A$ conduce a un mismo término de \mathcal{C} , por ejemplo, a C , entonces para todo $y \in B' \setminus A$ tenemos $y \notin C$. Pero, en tal caso $C \subseteq A$, lo que es imposible, puesto que $A \in \mathcal{J}$. Por consiguiente, entre los términos de \mathcal{C} construidos más arriba existen al menos dos distintos, por ejemplo, C_{y_1} y C_{y_2} . De este modo, $C_{y_1}, C_{y_2} \in \mathcal{C}$, $C_{y_1} \neq C_{y_2}$ y $x \in C_{y_1} \cap C_{y_2}$. Entonces, en virtud de (c2), se encontrará un $C^* \in \mathcal{C}$ tal que $C^* \subseteq (C_{y_1} \cup C_{y_2}) \setminus \{x\} \subseteq B' \in \mathcal{J}$. Hemos llegado a una contradicción con la hipótesis. Por consiguiente, $A \subset B'$. Así pues, la validez de (i3) está establecida.

Designemos temporalmente con \mathcal{C}' la familia de todos los ciclos del matroide $M = (S, \mathcal{J})$. Ahora, $C \in \mathcal{C}'$ cuando, y sólo cuando, $C \notin \mathcal{J}$ y $C \setminus \{x\} \in \mathcal{J}$ para cada $x \in C$, es decir, cuando y sólo cuando existe $C' \subseteq C$ tal que $C' \in \mathcal{C}$ y para todo $x \in C$ no existe ningún $C_x \in \mathcal{C}$ tal que $C_x \subseteq C \setminus \{x\}$, es decir, cuando y sólo cuando $C \in \mathcal{C}$ (en virtud de (c1)). Por eso, $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$ y la familia de ciclos del matroide $M = (S, \mathcal{J})$ es precisamente la familia \mathcal{C} .

8.26. Supongamos que el conjunto $(A \cup \{x\}) \setminus \{y\}$ contiene, para cierto $y \in C$, un ciclo C' . Está claro que $C = C'$. Por cuanto $A \in \mathcal{J}$, entonces $x \in C'$. De aquí, en virtud de (c2), existe un ciclo C^* que satisface la condición: $C^* \subseteq (C \cup C') \setminus \{x\} \subseteq A$, lo que es imposible, puesto que $A \in \mathcal{J}$. Por consiguiente, $(A \cup \{x\}) \setminus \{y\}$ no contiene ciclos, o bien, lo que es equivalente, $(A \cup \{x\}) \setminus \{y\} \in \mathcal{J}$ para cualquier $y \in C$. En efecto, hemos demostrado también que $A \cup \{x\}$, donde $A \in \mathcal{J}$ y $x \in S$, contiene como máximo un ciclo del matroide M .

8.27. c) si C_1, C_2 son dos ciclos distintos en $B \cup \{y\}$, entonces, en virtud de (c2), existe un ciclo que contiene $(C_1 \cup C_2) \setminus \{y\} \subseteq B$. Es obvio que esto no es posible.

d) Si $x \notin C$, entonces $C \subseteq (B \cup \{y\}) \setminus \{x\}$ y $(B \cup \{y\}) \setminus \{x\} \notin \mathcal{J}$. Viceversa, si $(B \cup \{y\}) \setminus \{x\}$ no es una base del matroide M , entonces, en virtud de (c2), $(B \cup \{y\}) \setminus \{x\}$ es un conjunto dependiente y contiene cierto ciclo, el cual es igual, en virtud de c), a C . Por consiguiente, $x \notin C$.

8.28. Compruébenos los axiomas (c1) y (c2) para la familia de ciclos del grafo G .

8.31. Sí, pueden. Por ejemplo, los grafos G_1 y G_2 en las figs. 8.2' y 8.3' no son isomorfos, mientras que sus matroides cíclicos son isomorfos.

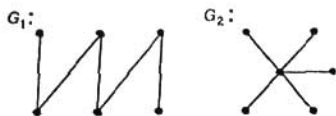


Fig. 8.2'.

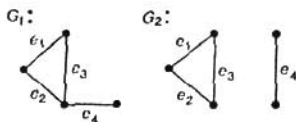


Fig. 8.3'.

8.32. La citada propiedad no se cumple, por ejemplo, para el matroide homogéneo $U_{2,4}$. El matroide de Fano (véase el problema 8.20) sirve de ejemplo de un matroide no gráfico, para el cual se cumple la propiedad mencionada.

8.34. Si $x \in B_1 \cap B_2$, podemos elegir $y = x$. Supongamos ahora que $x \in B_1 \setminus B_2$ y sea C el único ciclo en $B_2 \cup \{x\}$. Para todo $y \in B_2 \setminus B_1$ existe un ciclo $C_y \subseteq B_2 \cup \{y\}$. En virtud del problema 8.27 d), para tal y el conjunto $(B_2 \cup \{x\}) \setminus \{y\}$ es una base cuando y sólo cuando $y \in C$, y $(B_1 \cup \{y\}) \setminus \{x\}$, una base del matroide M cuando y sólo cuando $x \in C_y$. Por eso, para finalizar la demostración basta mostrar que existe un $y \in C \cap (B_2 \setminus B_1)$ tal que $x \in C_y$. En efecto, sea C^* un ciclo en $B_1 \cup C$ tal que $x \in C^*$ y supongamos que entre todos

los ciclos de este tipo C^* tiene valor mínimo $|C^* \cap (C \setminus B_1)|$. En tal caso se encontrará el requerido $y \in C^* \setminus B_1$. Por cuanto, si $x \notin C_y$, la existencia del ciclo C' que satisfice la condición: $x \in C' \subseteq (C_y \cup C^*) \setminus \{y\}$ contradice la suposición de que C^* es mínimo.

8.36. Supongamos que $x \sim A$ y \mathcal{D} es un subconjunto independiente máximo del conjunto A . Entonces, o bien $x \in A$, o bien $x \notin A$ y $\{x\} \cup B \notin \mathcal{J}$ para cierto subconjunto independiente B del conjunto A . En el primer caso $x \sim \mathcal{D}$. En el segundo, B queda contenido en cierto subconjunto independiente máximo D' del conjunto $\{x\} \cup A$. Está claro que $x \notin \mathcal{D}'$. Por consiguiente, \mathcal{D}' es un subconjunto independiente máximo de A y $|\mathcal{D}'| = |\mathcal{D}|$. Por cuanto todos los subconjuntos independientes máximos de $\{x\} \cup A$ tienen potencia igual, de aquí se deduce que \mathcal{D} es también un subconjunto independiente máximo de $\{x\} \cup A$. Así pues, $\{x\} \cup \mathcal{D} \in \mathcal{J}$ y $x \sim \mathcal{D}$.

8.37. La propiedad (d1) proviene de la definición. Demostremos (d2). Si $x = y_1$, la demostración no se necesita. Supongamos que $x \neq y_1$, $x \sim \{y_1, \dots, y_m\}$ y $x \not\sim \{y_2, \dots, y_m\}$. Entonces $\{x\} \cup B \notin \mathcal{J}$ para cierto conjunto independiente $B \subseteq \{y_1, \dots, y_m\}$, mas $\{x\} \cup C$ es independiente para todos los conjuntos independientes $C \subseteq \{y_2, \dots, y_m\}$. En particular, $y_1 \in B$ y $B' = \{x\} \cup (B \setminus \{y_1\})$ es independiente. Por consiguiente, $\{y_1 \cup B'\} (= \{x\} \cup B) \notin \mathcal{J}$ para cierto conjunto $B' \subseteq \{x, y_2, \dots, y_m\}$ e $y_1 \sim \{x, y_2, \dots, y_m\}$, lo que se trataba de demostrar. Antes de pasar a la demostración de (d3), haremos de notar que si $x \sim A$ y $A \subseteq B$, entonces, obviamente, $x \sim B$. Sea ahora $x \sim \{y_1, \dots, y_m\}$ e $y_k \sim \{z_1, \dots, z_n\}$ para cualquier k , $k = 1, \dots, m$. Supongamos que Z es un subconjunto independiente máximo del conjunto $\{z_1, \dots, z_n\}$. Entonces, en virtud del problema 8.36, $y_k \sim Z$ para $k = 1, 2, \dots, m$, y, por lo tanto, $\{w\} \cup Z$ es un conjunto dependiente para cierto $w \in \{y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n\} \setminus Z$, es decir, Z es un subconjunto independiente máximo del conjunto $\{y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n\}$. Ahora $x \sim \{y_1, \dots, y_m\}$ y, por eso, debido a la observación, $x \sim \{y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n\}$. En virtud del problema 8.36, $x \sim Z$. Por eso $x \sim \{z_1, \dots, z_n\}$.

Con el fin de demostrar la afirmación inversa, hace falta comprobar el cumplimiento de los axiomas (i1) - (i3) para la familia \mathcal{J} . Pero, esto ya está realizado en el problema 8.14, donde, basándonos en las propiedades (d1) - (d3) (véase el problema 8.13 a) - c) quedó establecida la validez de (i1) - (i3) para la familia \mathcal{J} .

8.38. Si $x \sim A$ y $x \notin A$, entonces $\{x\} \cup B \notin \mathcal{J}$ para cierto subconjunto independiente $B \subseteq A$. Por consiguiente, existe un ciclo $C \subseteq \{x\} \cup B$ y, evidentemente, $x \in C \subseteq \{x\} \cup B \subseteq \{x\} \cup A$.

Viceversa, la existencia de tal ciclo C conduce a que $C \setminus \{x\} \in \mathcal{J}$, $C \setminus \{x\} \subseteq A$ y $C \notin \mathcal{J}$. Por eso, $x \sim A$.

8.39. Supongamos que \mathcal{J} es una familia de conjuntos independientes del matroide M . Entonces, si (i3') no se cumple, existen unos subconjuntos B_1 y B_2 tales que $|B_1| \geq |B_2| + 1$. En virtud de (i3) existe un conjunto $B_2 \cup \{y\}$ tal que $B_2 \cup \{y\} \subseteq A$, $B_2 \cup \{y\} \in \mathcal{J}$ e $y \in B_1 \setminus B_2$, lo que contradice el hecho de que el conjunto B es máximo.

Viceversa, admitamos que \mathcal{J} satisfice (i1), (i2) y (i3') y $A = X \cup Y$, donde $X, Y \in \mathcal{J}$ son tales que $|X| = |Y| + 1$. Entonces, por cuanto todos los subconjuntos independientes máximos del conjunto $X \cup Y$ deben ser de igual potencia, existe un $x \in X \cup Y$ tal que $|\{x\} \cup Y| = |X|$, lo que se trataba de demostrar.

8.40. En términos del problema 8.37, $x \in \bar{A}$ cuando y sólo cuando $x \sim A$. De aquí proviene directamente (d1) y (d2). Es evidente que si X es un subconjunto independiente máximo del conjunto $A \subseteq S$, entonces $\bar{X} = \bar{A}$. Además, para todo $A \subseteq S$ tenemos $r(A) = r(\bar{A})$. En efecto, sea $r(\bar{A}) \geq r(A) + 1$ y sea Y el subconjunto independiente máximo del conjunto A . Existe en este caso $Z = \emptyset$, $Z \subseteq \bar{A} \setminus A$ tal que $Z \cup Y$ es un conjunto independiente. Sea $x \in Z$. Entonces $\{x\} \cup Y$ es un conjunto independiente tal que $x \notin \bar{Y}$, lo que es imposible, puesto que $\bar{Y} = \bar{A}$. Demostremos la validez de (d3). Sea A un subconjunto

to independiente máximo del conjunto X . En este caso, debido a la observación A será un subconjunto independiente máximo del conjunto \bar{X} . De aquí $\bar{X} = \bar{A} = \bar{X}$.

Comprobemos la propiedad (d4). Sea $y \notin \bar{X}$, $y \in \overline{X \cup \{x\}}$, pero $x \notin \overline{X \cup \{y\}}$, es decir, (d4) no se cumple. Entonces

$$r(X \cup \{y\}) = r(X) + 1; \quad r(X \cup \{x\} \cup \{y\}) = r(X \cup \{x\})$$

y

$$r(X \cup \{y\} \cup \{x\}) = r(X \cup \{y\}) + 1 = r(X) + 2.$$

Por consiguiente $r(X \cup \{x\}) = r(X) + 2$, lo que es imposible. De este modo, la aplicación $A \rightarrow \bar{A}$ satisface los axiomas (d1) — (d4).

Viceversa, supongamos que $A \rightarrow \bar{A}$ es la aplicación que satisface los axiomas (d1) — (d4) y \mathcal{J} , una familia de subconjuntos A del conjunto S tales que de lo que $x \in A$ proviene $x \notin \bar{A} \setminus \{x\}$. Mostremos que \mathcal{J} es la familia de conjuntos independientes de cierto matroide. Con este fin comprobemos para \mathcal{J} la validez de los axiomas (i1), (i2) y (i3'). Es evidente que $\emptyset \in \mathcal{J}$. Supongamos que $A \in \mathcal{J}$, $B \subseteq A$, pero $B \notin \mathcal{J}$. Existe entonces $x \in B$ tal que $x \in \bar{B} \setminus \{x\}$. De aquí, en virtud de (d2), $x \in \bar{A} \setminus \{x\}$. Esto significa que $x \notin \mathcal{J}$, lo que contradice la suposición. Por consiguiente, $B \in \mathcal{J}$. De este modo, los axiomas (i1) y (i2) quedan comprobados. Llamemos al conjunto $A \subseteq S$ independiente, si $A \in \mathcal{J}$. Antes de establecer la validez para \mathcal{J} del axioma (i3'), demostremos dos afirmaciones auxiliares:

a) si $A \subseteq S$ y B es un subconjunto independiente máximo del conjunto A , entonces $\bar{B} = \bar{A}$:

b) si X es un conjunto independiente e $Y \subseteq X$, entonces $\bar{Y} \subseteq \bar{X}$.

a) Supongamos que $A \not\subseteq \bar{B}$. Entonces existe $a \in A \setminus \bar{B}$ y afirmamos que $B \cup \{a\}$ es un conjunto independiente. Es obvio que $a \notin \bar{B}$. Supongamos que existe $x \in B$ tal que

$$x \in \overline{B \cup \{a\} \setminus \{x\}} = \overline{(\bar{B} \setminus \{x\}) \cup \{a\}}.$$

Debido a (d4) y a que $x \notin \bar{B} \setminus \{x\}$, tenemos $a \in \overline{(\bar{B} \setminus \{x\}) \cup \{x\}} = \bar{B}$, lo que contradice la suposición. Por consiguiente, $B \cup \{a\}$ es un subconjunto independiente del conjunto A . Pero esto contradice la condición de maximalidad del subconjunto B . De este modo, $A \subseteq \bar{B}$. Por cuanto, $B \subseteq A$, entonces, en virtud de (d2), $\bar{B} \subseteq \bar{A}$. Por consiguiente, $A \subseteq \bar{B} \subseteq \bar{A}$, y, en virtud de (d2), $\bar{A} \subseteq \bar{B} \subseteq \bar{A}$, es decir, $\bar{A} = \bar{B}$ (hemos aprovechado (d3)). De aquí, $\bar{A} = \bar{B}$.

b) Sea $x \in X \setminus Y$, $x \notin \bar{X} \setminus \{x\}$. En virtud de (d2), $\bar{Y} = \bar{X} \setminus \{x\}$. De este modo, $x \in \bar{X} \setminus \bar{Y}$, lo que se trataba de demostrar.

Supongamos que (i3') no se cumple. Entonces entre todos los subconjuntos independientes máximos X e Y del conjunto A tales que $|X| < |Y|$ elijamos aquellos, donde $|X \cap Y|$ es máximo. Obviamente, $X \not\subseteq Y$. Escojamos $y \in Y \setminus X$ y pongamos $\mathcal{Z} = \bar{X} \setminus \bar{Y}$. En virtud de las afirmaciones auxiliares a) y b), $\mathcal{Z} \subseteq \bar{A}$. Vamos a añadir los elementos x_1, \dots, x_k de X al conjunto $Y \setminus \{y\}$ hasta que se obtenga la igualdad:

$$\overline{(Y \setminus \{y\}) \cup \{x_1\} \cup \dots \cup \{x_k\}} = \bar{A}.$$

Este proceso se interrumpe en el peor de los casos tras $k = |X|$ pasos, por cuanto, en virtud de a), $\bar{X} = \bar{A}$. Examinemos ahora un conjunto $Y' = (Y \setminus \{y\}) \cup \{x_k\}$ y mostremos que es independiente. De lo contrario tenemos o bien $x_k \in \bar{Y} \setminus \{y\}$, o bien, para cierto $y_i \in Y \setminus \{y\} = Z$: $y_i \in \overline{Z \setminus \{y_i\}} \cup \{x_k\}$. De-

bido al modo de elegir x_h y a la condición $\overline{Y \setminus \{y\}} \subseteq \bar{A}$, tenemos que $x_h \notin \overline{Y \setminus \{y\}}$. Por consiguiente, $y_i \in (\overline{Z \setminus \{y_i\}}) \cup \{x\}$. Pero, en este caso $y_i \notin \overline{Z \setminus \{y_i\}}$, y en vista de (d4), $x \in (\overline{Z \setminus \{y_i\}}) \cup \{y_i\} = \bar{Z} = \overline{Y \setminus \{y\}}$, lo que es imposible. Por consiguiente, Y' es un conjunto independiente y $|Y' \cap X| > |Y \cap X|$. La última desigualdad contradice el modo de elegir de los conjuntos X e Y . De aquí, $|X| = |Y|$. De este modo, \mathcal{J} es una familia de conjuntos independientes del matroide. Es fácil ver que el operador de clausura de este matroide coincide con la aplicación $A \rightarrow \bar{A}$.

8.41. Hágase uso del problema 8.38.

8.42. Aplicando (d1) y (d2), tenemos

$$X \cap Y \subseteq \overline{X \cap Y} \subseteq \bar{X} \cap \bar{Y} = X \cap Y.$$

Por consiguiente, $X \cap Y = \overline{X \cap Y}$, es decir, $X \cap Y$ es una superficie del matroide M .

8.43. No representa ninguna dificultad el comprobar que $L(G)$ es un retículo puntual completo. Demostremos que $L(G)$ es un retículo semimodular.

Supongamos que $A, B \in L(G)$, $B = \overline{A \cup \{x\}}$ y $x \notin A$. Afirmamos que $A \prec B$. Efectivamente, si $C \in L(G)$ y $A \subset C \subseteq B$, existe un elemento $y \in C \setminus A$ e $y \in C \subseteq B = \overline{A \cup \{x\}}$. Por eso, de acuerdo con (d4), $x \in A \cup \{y\} \subseteq C$. Por consiguiente, $B = \overline{A \cup \{x\}} \subseteq C$. Resulta que $B = C$ y de aquí $A \prec B$. Sea ahora $\mathcal{D} \in L(G)$. Entonces $B \vee \mathcal{D} = \overline{B \cup \mathcal{D}} = \overline{A \cup \mathcal{D} \cup \{x\}}$ y $A \vee \mathcal{D} = \overline{A \cup \mathcal{D}}$. De aquí, o bien $x \in A \cup \mathcal{D}$ y, por eso, $A \vee \mathcal{D} = \overline{B \cup \mathcal{D}}$, o bien $x \notin A \cup \mathcal{D}$, y en este caso $A \vee \mathcal{D} \prec B \vee \mathcal{D}$.

8.46. Sea $a \in A$. Para cada $A \subseteq S$ se cumple $a \leq \sup A$. Esto quiere decir que $A \subseteq \bar{A}$. Si $A \subseteq \bar{B}$ para $A, B \subseteq S$ y $a \in S$, entonces $a \leq \sup B$. De aquí, $\sup A \leq \sup B$ y, por lo tanto, $\bar{A} \subseteq \bar{B}$. De este modo, $A \rightarrow \bar{A}$ es un operador de clausura.

La definición de retículo geométrico asegura el cumplimiento de la condición del carácter cerrado de los subconjuntos de un solo elemento y del conjunto vacío. Comprobemos el cumplimiento de la propiedad (d4). Sea $x \in \overline{A \cup \{y\}}$ y $x \notin \bar{A}$. Por cuanto y es un átomo, entonces, debido a la semimodularidad, $\overline{A \cup \{y\}} = \overline{A \vee y} \supseteq \bar{A}$, por lo cual de $A \subset \overline{A \cup \{x\}} \subseteq \overline{A \cup \{y\}}$ se desprende que $A \cup \{x\} = \overline{A \cup \{y\}}$. Así pues, $y \in A \cup \{x\}$. De este modo queda establecido que (S, \vee) es una geometría.

Demostremos el isomorfismo de los retículos. Denotemos por φ la aplicación $A \rightarrow \sup A$, donde $A \subseteq S$, $A \in L(G)$, que aplica $L(G)$ en L . Por cuanto todo elemento del retículo L es una reunión de átomos, la inclusión $A \subseteq B$ será equivalente a la desigualdad $\sup A \leq \sup B$. Por eso φ es una aplicación biunívoca sobria y ambas aplicaciones φ y φ^{-1} son monótonas. Por consiguiente, φ es un isomorfismo.

8.60. a) \Rightarrow b). Del carácter óptimo del conjunto B en la familia \mathcal{J} se deduce que B es un subconjunto máximo por inclusión en \mathcal{J} y que B es un subconjunto de peso máximo en \mathcal{J} .

b) \Rightarrow a). Sea B un máximo lexicográfico en \mathcal{B} . Supongamos que B no es óptimo en \mathcal{J} , es decir, que existen $A \in \mathcal{J}$ y $k \in \{1, \dots, r(S)\}$ tales que $w(a_k) > w(b_k)$, donde los elementos de los conjuntos B y A están escritos en el orden de decrecimiento de los pesos. Sea $A' = \{b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Entonces $r(A') \geq k$ y, por tanto, existe $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que $A'' = \{b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, a_j\} \in \mathcal{J}$ (hemos aprovechado el axioma (i3)). Más aún, existe una base $B' \in \mathcal{B}$ tal que $A'' \subset B'$. Pero en tal caso la base B' es lexicográficamente mayor que B , puesto que $w(a_j) \geq w(a_k) > w(b_k)$. Hemos llegado a una contradicción con el hecho de que B es el máximo lexicográfico en \mathcal{B} . Esto significa que B es óptimo en \mathcal{J} .

b) \Rightarrow c). Sea B un máximo lexicográfico en \mathcal{M} , y B' , la base de peso máximo. Por cuanto es válida la implicación b) \Rightarrow a), B es óptimo en la familia \mathcal{F} y, por consiguiente, para todo $i \in \{1, \dots, r(S)\}$ tiene lugar la desigualdad $w(b_i) \geq w(b'_i)$, donde los elementos de los subconjuntos B y B' están escritos en el orden de decrecimiento de los pesos. Por cuanto B' es la base del peso máximo, resulta que $w(b_i) = w(b'_i)$ para todo i , donde $i = 1, \dots, r(S)$. Por eso B' es también máximo lexicográfico en \mathcal{B} .

La condición d) se obtiene fácilmente de a) o de b).

d) \Rightarrow b). Sea B' una base de peso máximo y B , una base que satisface la condición d). Supongamos que existe $k \in \{1, \dots, r(S)\}$ tal que $w(b_k) < w(b'_k)$, donde los elementos de las bases B y B' están escritos en el orden de decrecimiento de los pesos. Entonces, el conjunto $A = \{b \in B \mid w(b) > w(b_k)\}$ no es un subconjunto independiente máximo del conjunto $C = \{a \in S \mid w(a) > w(b_k)\}$ para $|A| \leq k$ y $\{b'_1, b'_2, \dots, b'_k\}$ será un subconjunto independiente del conjunto C que contiene k elementos. De aquí, la base B no satisface la condición d), lo que contradice la suposición. Por consiguiente, para todo i , donde $i = 1, \dots, r(S)$, tenemos: $w(b_i) \geq w(b'_i)$, es decir, $w(b_i) = w(b'_i)$, puesto que B' es la base de peso máximo. De este modo, B es también una base de peso máximo.

8.61. Muéstrase que la aplicación del algoritmo ávido a \mathcal{F} nos da la base lexicográficamente máxima del matroide M y hágase uso del problema 8.60.

8.62. Comprobemos que la familia \mathcal{F} satisface el axioma (i3). Con este objeto mostremos que si $A = \{a_1, \dots, a_h\} \in \mathcal{F}$ y $B = \{b_1, \dots, b_k, b_{k+1}\} \in \mathcal{F}$, existe tal $b_i \notin A$ que $A \cup \{b_i\} \in \mathcal{F}$. Para esto definamos los pesos de los elementos a del conjunto S del modo siguiente:

$$w(a) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \in A; \\ x, & \text{si } a \in B \setminus A; \\ 0, & \text{si } a \in S \setminus (A \cup B), \end{cases}$$

donde $0 < x < 1$. En este caso el algoritmo ávido elegirá primero los elementos a_1, \dots, a_h . Si no existe b_i tal que $\{b_i, a_1, \dots, a_h\} \in \mathcal{F}$, el algoritmo elegirá los elementos restantes de $S \setminus (A \cup B)$. Por eso, cuando el algoritmo da por terminado su trabajo, se obtendrá, como resultado, un conjunto cuyo peso será igual al del conjunto A . Si $|B \cap A| = t$, entonces $w(A) = k$, y $w(B) = t + t(k+1-t)x$. Es evidente que se puede elegir x , $0 < x < 1$, tal que sea $w(A) < w(B)$. Pero, en tal caso el trabajo del algoritmo ávido no nos proporciona un subconjunto de \mathcal{F} que tenga peso máximo, lo que contradice la afirmación del problema 8.61.

8.66. Para $A \subseteq S$ arbitrario definamos una aplicación \bar{A} del modo siguiente:

$$\bar{A} = \begin{cases} A, & \text{si } |A| \leq n-1; \\ B, & \text{si } |A| \geq n \text{ y } A \text{ está contenido en el conjunto } B \in \mathcal{F}; \\ S, & \text{en todos los demás casos.} \end{cases}$$

Está claro que para todos los $A \subseteq S$ tenemos $A \subseteq \bar{A}$. Sea $\bar{A} \subseteq \bar{B}$. Entonces, o bien \bar{B} tiene menos de n elementos, o bien $\bar{B} \in \mathcal{F}$, o bien, $B = S$. En el primer caso A tiene $m < n$ elementos y es cerrado. En el segundo caso A está cerrado, o de su clausura sirve \bar{B} . En cualquier caso $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ y, por tanto, $A \rightarrow \bar{A}$ es el operador de clausura. Demostremos ahora el axioma de sustitución (d4). Supongamos que $a \in \bar{A} \cup \{b\}$, $a \notin \bar{A}$ para cierto $A \subseteq S$, y $a, b \in S$. Por cuanto A y $A \cup \{b\}$ se diferencian sólo por un único elemento, se tienen tres posibilidades para \bar{A} y $\overline{A \cup \{b\}}$: (1) $\bar{A} \cup \{b\} = S$ y $\bar{A} \in \mathcal{F}$; (2) $\bar{A} \cup \{b\} \in \mathcal{F}$ y $\bar{A} = A$ tiene $n-1$ elementos; (3) $A = \bar{A}$ y $A \cup \{b\} = \bar{A} \cup \{b\}$ tienen n elementos.

En el primer caso $a \in \bar{A}$ y, por tanto, $\overline{A \cup \{a\}} = S$. En el segundo caso $A \cup \{a\}$ tiene n elementos y constituye un subconjunto del conjunto $A \cup \{b\} \in \mathcal{F}$. En el tercer caso $a = b$. En cada caso $\overline{A \cup \{a\}} = A \cup \{b\}$ y $b \in \overline{A \cup \{a\}}$. De este modo, el retículo de superficies (conjuntos cerrados) es geométrico con coátomos que coinciden exactamente con los elementos de \mathcal{F} .

8.68. Muéstrase que el conjunto que figura en el segundo miembro de la igualdad es una superficie y que el conjunto A es una superficie cuando y sólo cuando $\{a_1, \dots, a_n, x, y\} \subseteq A$ para todos los pares $x, y \in A$.

8.69. Demostremos la validez del axioma de sustitución (d4). De la definición de geometría de Will de grado n se deduce que todos los subconjuntos $A \subseteq S$ tales que $|A| \leq n$ son cerrados. Supongamos que $x, y \in S$, $A \subseteq S$, $x \notin A$ y $x \in A \cup \{y\}$. Si A contiene menos que n puntos, entonces $A \cup \{y\}$ será un conjunto cerrado y, por tanto, $x = y$. Supongamos ahora que $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$ y $B = \{a_1, \dots, a_n, y\}$. En virtud del problema 6.68, $A \cup \{y\} = A \cup B = \bigcup_{a \in A} \{a_1, \dots, a_n, a, y\}$, de donde se desprende que $x \in$

$\overline{\{a_1, \dots, a_n, a, y\}}$ para cierto $a \in A$. Por cuanto $y \notin \{a_1, \dots, a_n, a, y\}$, entonces los puntos a_1, \dots, a_n, a, y definen unívocamente una superficie F tal que $x \in F$. Por otra parte, de la condición $x \notin \{a_1, \dots, a_n, a\}$ se deduce que la superficie que pasa por los puntos a_1, \dots, a_n, a, x debe coincidir con F . Esto nos da una relación $y \in \overline{\{a_1, \dots, a_n, a, x\}} \subseteq A \cup \{x\}$. Por fin, sea Λ un subespacio de rango n . Entonces, según lo demostrado más arriba, $|\Lambda| = n$, y, de este modo, el intervalo $[0, \Lambda]$ es isomorfo al álgebra de Boole sobre n elementos. Para argumentar la modularidad del intervalo $[A, 1]$, basta mostrar que $C \wedge H > A$ para cualesquiera dos subespacios $C, H \in [A, 1]$ tales que $r(C) = r(A) + 2$ y que H es un coátomo. Sea $A \subset C \subset B \subset H = A$. Entonces $C \leq B \vee H = S$. Pongamos $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ y elijamos cualquier punto $y \in C \setminus B$. En virtud del problema 8.68, $y \in \overline{\{a_1, \dots, a_n, b, y\}}$ para ciertos $b \in B$ y $h \in H$. Por cuanto $y \notin \{a_1, \dots, a_n, b, y\}$, de (d4) se deduce que $h \in \overline{\{a_1, \dots, a_n, b, y\}}$. De aquí tenemos: $h \in C \cap H = A \subseteq B$. Por consiguiente, $q \in B$. Pero, eso contradice la suposición de que $q \notin B$.

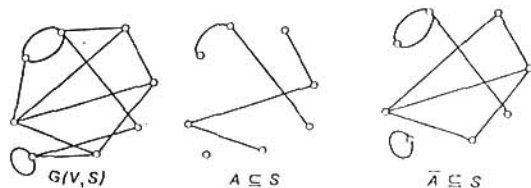


Fig. 8.4'.

8.77. Ilustremos el operador $A \rightarrow \bar{A}$ con un ejemplo concreto (véase fig. 8.4'). Es evidente que es un operador de clausura, es decir, para él se cumplen los axiomas (d1) - (d3).

Hemos de notar que si a y b son A -conexos, existe una sucesión de aristas $(x_0, x_1), \dots, (x_{n-1}, x_n)$ con el número mínimo n , en la cual ninguna arista se encuentra dos veces. En efecto, supongamos que $0 \leq i < j \leq n-1$, y $(x_i, x_{i+1}) = (x_j, x_{j+1})$. Entonces, si $x_i = x_j$ y $x_{i+1} = x_{j+1}$, al tachar las aristas $(x_{i+1}, x_{i+2}), \dots, (x_j, x_{j+1})$ en la sucesión, obtenemos una sucesión de conexión más corta. Si $x_i = x_{j+1}$ y $x_{i+1} = x_j$, pueden tacharse todas las aristas $(x_i, x_{i+1}), \dots, (x_j, x_{j+1})$.

Comprobemos ahora la validez del axioma (d4). Sea $x \in \overline{X \cup \{y\}}$, pero $x \notin \bar{X}$, donde $x = (a, b)$ e $y = (c, d)$. Supongamos que $e_0, \dots, e_{n-1} \in X \cup \{y\}$

es el camino más corto que une a y b . Por cuanto $x \notin \bar{X}$, una de las aristas e_0, \dots, e_{n-1} debe coincidir con y . Según la observación hecha, sólo una de las aristas e_0, \dots, e_{n-1} , digamos e_l , es igual a la arista y . Pero, entonces, la sucesión $e_{l+1}, \dots, e_{n-1}, x, e_0, \dots, e_{l-1}$ unirá los vértices c y d . De aquí, $y \in \bar{X} \cup \{x\}$.

8.78. El conjunto A de aristas del bosque es independiente. En efecto, la eliminación de cualquier arista $e \in A$ divide el componente conexo que contiene e en dos componentes y , por lo tanto, $e \notin \overline{A \setminus e}$. Por otra parte, si $G(V, A)$ contiene un polígono $\{e_0, e_1, \dots, e_l\}$, entonces, por definición de operador, de $e_0 \in \{e_1, \dots, e_l\}$ se deduce que A es dependiente. Estos razonamientos demuestran las afirmaciones a), b) y c). Además, de lo mismo se desprende que $r(A)$ es igual al número de aristas en el bosque engendrador del subgrafo $G(V, A)$. Se sabe que cada árbol tiene un número de aristas que es en una unidad menor que el número de vértices. Por consiguiente, si $V_1, \dots, V_{k(A)}$ es una familia de aristas de los componentes conexos del grafo $G(V, S)$, entonces $r(A) = \sum_{i=1}^{k(A)} (|V_i| - 1) = |V| - k(A)$. La demostración de la afirmación d) se deduce directamente de esta fórmula.

8.79. Es evidente que \mathcal{J} satisface los axiomas (i1) y (i2). Para demostrar (i3) veamos dos subconjuntos arbitrarios A y B de \mathcal{J} que contienen k y $k+1$ vértices, respectivamente. Sean X e Y unas combinaciones arbitrarias de pares que saturan los vértices de los subconjuntos A y B , respectivamente. Son posibles dos casos: cierto elemento $x \in B \setminus A$ se satura en X y ningún elemento $x \in B$ se satura en X . En el primer caso X satura $A \cup \{x\}$ y el axioma (i3) se cumple. En el segundo caso examinemos un subgrafo G' sobre el conjunto de aristas $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. No es difícil mostrar que cada componente conexo del subgrafo G' es o bien un ciclo, cuyas aristas figuran por turno en X e Y , o bien un camino, cuyas aristas figuran por turno en X e Y , mientras que sus vértices terminales en una de las combinaciones de pares no están saturados. Por cuanto $|B \setminus A| > |A \setminus B|$, en el subgrafo G' existe un camino P que lleva del vértice $v \in B \setminus A$ al vértice situado fuera de $A \setminus B$. En este caso el subgrafo sobre el conjunto de aristas $(X \setminus P) \cup (P \setminus X)$ será una combinación de pares que satura v y todos los elementos del subconjunto A . De este modo, $A \cup \{v\}$ figura en \mathcal{J} y se cumple el axioma (i3).

8.82. El conjunto $A \subseteq S$ puede ser representado como una unión de ciclos cuando y sólo cuando para todo $a \in A$ existe un ciclo C tal que $a \in C \subseteq A$, es decir, $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$. Para cierto punto $a \in A$, $a \notin \overline{A \setminus \{a\}}$ cuando y sólo cuando existe un conjunto cerrado C tal que $C \cong A \setminus \{a\}$, pero $C \not\subseteq A$. Observemos que en este caso $|A \setminus C| = 1$, lo que se trataba de demostrar.

§ 2. Construcciones y operaciones sobre los matroides

8.83. Es evidente que \mathcal{B}^* satisface el axioma (b1). Con el fin de demostrar (b2), examinemos B_1^* y B_2^* arbitrarias de \mathcal{B}^* tales que $B_1^* = S \setminus B_1$, $B_2^* = S \setminus B_2$, donde $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Sea $x \in B_1^* \setminus B_2^*$. Entonces $x \in B_2 \setminus B_1$. En virtud del problema 8.34 existe un $y \in B_1 \setminus B_2$ tal que $B_3 = (B_1 \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \mathcal{B}$. Ahora $y \in B_2^* \setminus B_1^*$ y $(B_1^* \setminus \{y\}) \cup \{x\} = S \setminus [B_1 \setminus \{y\} \cup \{x\}] = S \setminus B_3 = B_3^*$. De este modo, el axioma (b2) se cumple y, por consiguiente, \mathcal{B}^* es el conjunto de bases del matroide M^* sobre S .

8.84. Resolvamos el problema usando dos procedimientos:

Primer procedimiento. Comprobemos que r^* satisface los axiomas (r1) — (r3). Comencemos por comprobar (r1). Por ser monótona la función de rango r del matroide M , tenemos: $r(S \setminus A) \leq r(S)$. Por consiguiente, $r^*(A) \leq |A|$. Siendo semimodular la función de rango r , tenemos $r(S) + r(\emptyset) \leq$

$\leq r(A) + r(S \setminus A)$, y por eso $r(S) - r(S \setminus A) \leq r(A) \leq |A|$. De aquí se deduce directamente que $r^*(A) \geq 0$. La comprobación de (r2) no tiene dificultades.

Demostremos la validez de (r3). Para cualesquiera $A, B \subseteq S$ tenemos

$$\begin{aligned} r^*(A \cup B) + r^*(A \cap B) &= |A \cup B| + |A \cap B| + \\ &+ r(S \setminus (A \cup B)) + r(S \setminus (A \cap B)) - 2r(S) = \\ &= |A| + |B| + r((S \setminus A) \cap (S \setminus B)) + r((S \setminus A) \cup (S \setminus B)) - \\ &- 2r(S) \leq |A| + |B| + r(S \setminus A) + r(S \setminus B) - 2r(S) = \\ &= r^*(A) + r^*(B) \end{aligned}$$

(de acuerdo con la propiedad de semimodularidad para r).

Segundo procedimiento. Examinemos $A \subseteq S$ y sea B^* una base del matroide M^* tal que $|B^* \cap A|$ es máximo. Entonces B es una base del matroide M tal que $|B \cap (S \setminus A)|$ es máximo. De la definición de función de rango tenemos que $r^*(A) = |B^* \cap A|$ y $r(S \setminus A) = |B \cap (S \setminus A)|$. Además

$$\begin{aligned} |B^* \cap A| &= |A| - |B \cap A|; \quad |B \cap (S \setminus A)| = |B| - \\ &|B \cap A| = r(S) - |B \cap A|. \end{aligned}$$

De aquí se deduce la afirmación del problema.

8.88. Para demostrar b) y d), aplíquense las afirmaciones a) y c), respectivamente, al matroide M^* .

a) Existe una base B del matroide M tal que $A \subseteq B$. Por eso, $S \setminus A$ contiene la cobase correspondiente B^* .

c) Sea C^* un cociclo del matroide M y supongamos que existe en M una base B que posee la propiedad de que $C^* \cap B = \emptyset$. Entonces C^* está contenido en $S \setminus B$ y es, por esto, un ciclo del matroide M^* contenido en la base $B^* = S \setminus B$ del matroide M^* . Esta contradicción demuestra el resultado requerido.

e) Sea B una base del matroide M tal que $A \subseteq B$, y C^* es un cociclo fundamental contenido en $B^* \cup \{x\}$. Entonces

$$C^* \cap A = \begin{cases} \{x\}, & \text{si } x \in A; \\ \emptyset, & \text{si } x \in B \setminus A. \end{cases}$$

lo que se trataba de demostrar.

8.89. El conjunto $S \setminus A^*$ contiene, en virtud del problema 8.88 b), una base B del matroide M . Por cuanto $A \subseteq S \setminus A^*$ es un conjunto independiente del matroide M , existe una base B del matroide M tal que $A \subseteq B \subseteq S \setminus A^*$, y, por consiguiente, $A^* \subseteq B^*$.

8.90. Las afirmaciones b) y d) son duales con relación a a) y c).

Demostremos la afirmación a). La necesidad proviene del problema 8.88 c) — e). Para demostrar la suficiencia pongamos que B es un subconjunto mínimo del matroide S que tiene una intersección no vacía con cada cociclo del matroide M . Entonces $S \setminus B$ es un subconjunto máximo que no contiene cociclos del matroide M . Por eso $S \setminus B$ es, por definición, una cobase del matroide M y, por tanto, B es la base del matroide M .

La comprobación de la afirmación c) no ofrece dificultades algunas.

8.91. En virtud del problema 8.90 d), el cociclo C^* del matroide M es un subconjunto mínimo que tiene intersección no vacía con cada base del matroide M . Por eso, $S \setminus C^*$ es un subconjunto máximo que no contiene las bases del matroide M . De aquí se desprende directamente la afirmación del problema.

8.92. a) Necesidad. Admitamos lo contrario. Entonces para cualquier subconjunto propio C' del ciclo C existe un cociclo C^* tal que $|C^* \cap C'| = 1$ (véase el problema 8.88 e)).

Supongamos que $|C \cap C^*| = 1$ para ciertos $C \in \mathcal{C}$ y $C^* \in \mathcal{C}'$, y sea $C \cap C^* = \{x\}$. Examinemos los subconjuntos $S' = S \setminus C^*$ y $C' = C \setminus \{x\}$. Es evidente que $C' \subseteq S'$. Entonces, en virtud del problema 8.91, el conjunto $S' \cup \{x\}$ contiene la base del matroide M . Sea $B \subseteq S' \cup \{x\}$ una base tal

que $C' \subseteq B$. Observemos que $x \in B$. Por eso, el ciclo $C = C' \cup \{x\}$ está contenido en B , lo que nos lleva a la contradicción con la suposición admitida. De este modo, $|C \cap C^*| \neq 1$ y la necesidad está demostrada.

Demostremos la suficiencia. Si $x \subseteq S$ es tal que $|X \cap C^*| \neq 1$ para todos los $C^* \in \mathcal{C}^*$, entonces el subconjunto X ha de contener un ciclo, puesto que, si no fuera así, X sería un conjunto independiente y, en virtud del problema 8.88 e), se encontraría un cociclo C^* que tuviese exactamente un elemento de X .

Sea C un ciclo contenido en X . De la condición necesaria demostrada del problema se ve con toda evidencia que $|C \cap C^*| \neq 1$ para todo cociclo $C^* \in \mathcal{C}^*$. Por eso $X = C$, de lo contrario la condición de minimalidad para X conduciría a una contradicción.

La afirmación b) es dual con relación a la afirmación demostrada a).

8.96. Por cuanto los ciclos en $M^*(G)$ son cortes en G , debemos de comprobar que C^* es un ciclo en $(M(G))^*$ cuando y sólo cuando C^* es un corte en G . Supongamos al principio que C^* es un corte en el grafo G . Si el conjunto C^* es independiente en $(M(G))^*$, entonces puede extenderse hasta que se obtenga la base B^* en $(M(G))^*$. Por consiguiente, $C^* \cap (S \setminus B^*) = \emptyset$, donde S es el conjunto de aristas del grafo G . Pero esto no es posible, puesto que $S \setminus B^*$ es un bosque de esqueleto del grafo G . De aquí C^* es un conjunto dependiente en $(M(G))^*$, y por eso contiene un ciclo de $(M(G))^*$.

Por otra parte, si \mathcal{D}^* es un ciclo en $(M(G))^*$, entonces \mathcal{D}^* no se contiene en ninguna base de $(M(G))^*$. Por consiguiente, \mathcal{D}^* se interseca con cada base de $M(G)$, es decir, con cada bosque de esqueleto del grafo G . Por lo tanto \mathcal{D}^* contiene un corte. Y esto es lo que se trataba de demostrar.

8.97. Por cuanto el grafo G^* es dual con relación al G , existe entre sus aristas una correspondencia biunívoca que posee la propiedad de que los ciclos en G corresponden a los de G^* , y viceversa. De aquí proviene inmediatamente que los ciclos en $M(G)$ corresponden a los cociclos en $M(G^*)$ y, por tanto, en virtud del problema 8.96, el matroide $M(G^*)$ es isomorfo al matroide $(M(G))^*$.

8.99. Es obvio que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{J}_{[A,B]}(C)$ y que de $\mathcal{C} \subseteq D$ se deduce $\mathcal{J}_{[A,B]}(C) \subseteq \mathcal{J}_{[A,B]}(D)$ para cualesquiera $C, D \subseteq B \setminus A$. Queda por demostrar (d3): $\mathcal{J}_{[A,B]} \mathcal{J}_{[A,B]}(C) = \mathcal{J}_{[A,B]}(C)$ para todo $C \subseteq B \setminus A$. En efecto,

$$\mathcal{J}_{[A,B]} \mathcal{J}_{[A,B]}(C) = [(\overline{C \cup A \cap B}) \setminus A] \cup A \cap B \setminus A = [(\overline{C \cup A \cap B}) \cup A \cap B] \setminus A = \\ = [(\overline{C \cup A \cup A}) \cap (B \cup A) \cap B] \setminus A = [(\overline{C \cup A \cap (B \cup A)}) \cap B \setminus A].$$

De la correlación $\overline{C \cup A \cap (B \cup A)} \subseteq (\overline{C \cup A})$ se deduce que $\overline{C \cup A \cap (B \cup A)} \subseteq \overline{C \cup A} = C \cup A$. De aquí, $\overline{C \cup A \cap (B \cup A)} \cap B \subseteq C \cup A \cap B$. Por consiguiente

$$[\overline{C \cup A \cap (B \cup A)} \cap B] \setminus A \subseteq (\overline{C \cup A \cap B}) \setminus A = \mathcal{J}_{[A,B]}(C),$$

es decir, se ha obtenido que $\mathcal{J}_{[A,B]} \mathcal{J}_{[A,B]}(C) \subseteq \mathcal{J}_{[A,B]}(C)$. Pero

$\mathcal{J}_{[A,B]} \mathcal{J}_{[A,B]}(C) \supseteq \mathcal{J}_{[A,B]}(C)$. De aquí

$$\mathcal{J}_{[A,B]} \mathcal{J}_{[A,B]}(C) = \mathcal{J}_{[A,B]}(C).$$

lo que se trataba de demostrar.

8.100. Si en el operador de clausura $\mathcal{J}_{[A,B]}(C)$ del problema 8.99 ponemos $A = \emptyset$, obtendremos $\mathcal{J}(C) = \mathcal{J}_{[\emptyset,B]}(C) = \overline{C} \cap B$. Esto quiere decir que $C \rightarrow \mathcal{J}(C)$ es una relación de clausura. La propiedad de sustitución (d4) también tiene lugar. Efectivamente, sea $p \in \mathcal{J}(C \cup \{q\})$, $p \notin \mathcal{J}(C)$. Entonces $p \in \overline{C \cup \{q\}} \cap B$, pero $p \notin \overline{C} \cap B$. Esto significa que $p \in \overline{C \cup \{q\}}$, pero $p \notin \overline{C}$. De aquí, según la propiedad de sustitución para la geometría $G(S)$, tenemos $q \in C \cup \{p\}$. Por consiguiente, $q \in \overline{C \cup \{p\}} \cap B$, puesto que $p, q \in B$.

8.101. Si en el operador de clausura $\mathcal{J}_{[A,B]}(C)$ del problema 8.99 ponemos $B = S$, obtendremos $\mathcal{J}(C) = \mathcal{J}_{[A,S]}(C) = \overline{C \cup A} \setminus A$. Esto significa que

$C \rightarrow \mathcal{J}(C)$ es una relación de clausura. Queda por comprobar la propiedad (d4): para cualesquiera $p, q \in S \setminus A$ y para todo $C \subset S \setminus A$, si $p \in \mathcal{J}(C \cup \{q\})$, $p \notin \mathcal{J}(C)$, entonces $q \in \mathcal{J}(C \cup \{p\})$. En efecto, sea $p \in \overline{C \cup \{q\}} \cup A \setminus A$, $p \notin \overline{C \cup A} \setminus A$. Es evidente que $p, q \notin A$. De aquí $p \in \overline{C \cup A} \cup \{q\}$, $p \notin \overline{C \cup A}$. En virtud de la propiedad de sustitución en la geometría $G(S)$ llegamos a que $q \in \overline{C \cup A} \cup \{p\}$. Pero $q \notin A$. Por consiguiente, $q \in \overline{C \cup A} \cup \{p\} \setminus A = \mathcal{J}(C \cup \{p\})$.

8.102. Compruébese que la familia $\mathcal{J}(M|B)$ satisface los axiomas (i1) — (i5).

8.103. Sea $A \subseteq B$ y X_1, X_2 , los conjuntos máximos de A que constituyen elementos de la familia $\mathcal{J}(M.B)$. Entonces existen tales Y_1, Y_2 (ambos son subconjuntos independientes máximos de $S \setminus B$) que $X_1 \cup Y_1$ y $X_2 \cup Y_2$ son independientes en M . De este modo, si $B_1 = (S \setminus B) \cup A$, entonces $X_1 \cup Y_1$ y $X_2 \cup Y_2$ han de ser bases $M|B_1$. Por consiguiente, $|X_1 \cup Y_1| = |X_2 \cup Y_2|$ y por eso $|Y_1| = |Y_2|$ y $X_1 \cap Y_1 = X_2 \cap Y_2 = \emptyset$, $|X_1| = |X_2|$. Así pues, la familia $\mathcal{J}(M.B)$ satisface el axioma (i3). La validez de los axiomas (i1) y (i2) se comprueba con facilidad. Por consiguiente, $M.B$ es un matroide sobre el conjunto B .

8.106. Hágase uso de los resultados de los problemas 8.103 y 8.104.

8.107. Para la demostración emplearemos los axiomas para las funciones de rango y las relaciones de los problemas 8.104 d) y 8.105 d). Supongamos que $M|A$ tiene una función de rango r_A . Entonces la función de rango r_A^* del matroide $(M|A)^*$, dual con relación a $M|A$, satisface para todo $B \subseteq A$ la igualdad

$$r_A^*(A \setminus B) = |A| - r(A) - |B| - r(B).$$

En virtud del problema 8.105 d), la función de rango $r_{S/S \setminus A}^*$ del matroide $M^*/(S \setminus A)$ se encuentra del modo siguiente:

$$\begin{aligned} r_{S/S \setminus A}^*(A \setminus B) &= r^*[(A \setminus B) \cup (S \setminus A)] - r^*(S \setminus A) = \\ &= r^*(S \setminus B) - r^*(S \setminus A) = |S \setminus B| - r(S) + r(S \setminus (S \setminus B)) - \\ &= |S \setminus A| + r(S) - r(S \setminus (S \setminus A)) = |A| - |B| + r(B) - r(A) = \\ &= r_A^*(A \setminus B). \end{aligned}$$

De este modo queda demostrada la afirmación a). Para demostrar b), hagamos uso de la afirmación a). En efecto,

$$(M^*|(S \setminus A))^* = M^{**}/(S \setminus (S \setminus A)) + M/A.$$

De aquí, $(M/A)^* = (M^*|(S \setminus A))^{**} = M^*|(S \setminus A)$.

8.108. Todo menor de un matroide es matroide, puesto que puede obtenerse como un submatroide de contracción del matroide o, lo que es equivalente, como una contracción del submatroide del matroide.

8.111. Compruébese para una familia \mathcal{J} el cumplimiento de los axiomas (i1) — (i3). Es evidente que $\emptyset \in \mathcal{J}$, puesto que $\emptyset \in \mathcal{J}_1$ y $\emptyset \in \mathcal{J}_2$. Sea $B \in \mathcal{J}$ y $A \subseteq B$. Escribamos $B = B_1 \cup B_2$ y $A = A_1 \cup A_2$, donde $A_1, B_1 \in \mathcal{J}_1$ y $A_2, B_2 \in \mathcal{J}_2$. Por cuanto $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ y $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, entonces de que $A \subseteq B$ se desprende $A_1 \subseteq B_1$ y $A_2 \subseteq B_2$. De aquí, en virtud de la validez de (i2) en los matroides M_1 y M_2 , $A_1 \in \mathcal{J}_1$ y $A_2 \in \mathcal{J}_2$, y, por consecuencia, $A_1 \cup A_2 = A \in \mathcal{J}$. De este modo, la validez de (i1) y (i2) queda establecida.

Demostremos (i3). Sea $A, B \in \mathcal{J}$ y $|A| = |B| + 1$, $A = A_1 \cup A_2$, $B = B_1 \cup B_2$, donde $A_1, B_1 \in \mathcal{J}_1$ y $A_2, B_2 \in \mathcal{J}_2$, $|A| = |A_1| + |A_2|$, $|B| = |B_1| + |B_2|$ (puesto que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ y $B_1 \cap B_2 = \emptyset$). De aquí, o bien $|A_1| > |B_1|$, o bien $|A_2| > |B_2|$. Ahora, de la validez de (i3) en cada uno de los matroides M_1 y M_2 se deduce la validez de (i3) también para la familia \mathcal{J} lo que se trataba de demostrar.

8.113. Hágase uso del problema 8.112.

8.119. Veamos una familia $\mathcal{S} = \{A \subseteq S \mid f(A) < |A|\}$ y demos que sus elementos, mínimos por inclusión, son ciclos de cierto matroide, es decir, satisfacen los axiomas (c1) y (c2). Es obvio que (c1) se cumple por construcción.

Sean $C_1 \neq C_2$ los conjuntos mínimos de \mathcal{S} y supongamos que $a \in C_1 \cap C_2$. En este caso $|C_1| \geq 2$ y, por tanto, $|C_1| - 1 = |C_1 \setminus \{a\}| \leq f(C_1 \setminus \{a\}) \leq f(C_1) < |C_1|$, es decir, $f(C_1) = |C_1| - 1$, y $f(B) \geq |B|$ para todo $B \subset C_1$. Análogamente obtenemos que $f(C_2) = |C_2| - 1$. En particular, $|C_1 \cap C_2| \leq f(C_1 \cap C_2)$, y, de este modo, por ser f monótona y semimodular, tenemos

$$\begin{aligned} f((C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}) &\leq f(C_1 \cup C_2) \leq f(C_1) + \\ &+ f(C_2) - f(C_1 \cap C_2) \leq |C_1| - 1 + |C_2| - 1 - \\ &- |C_1 \cap C_2| \leq |C_1 \cup C_2| - 2 \leq |(C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}|. \end{aligned}$$

El conjunto $(C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}$ pertenece a la familia \mathcal{S} y, por lo tanto, contiene el conjunto mínimo de ésta. El axioma (c2) está comprobado.

La familia \mathcal{J} define de este modo el matroide M . Resta demostrar que la función $r(A) = \min_{B \subseteq A} \{f(B) + |A \setminus B|\}$, definida para todos los $A \subseteq S$, es

una función de rango del matroide M . Con este fin basta comprobar, por ejemplo, que r satisface los axiomas (r1) - (r3). Directamente de la definición de r se deduce que $0 \leq r(A) \leq |A|$ para cada $A \subseteq S$ y que $r(A) \leq r(B)$ para $A \subseteq B$, es decir, los axiomas (r1) y (r2) están comprobados. Luego, para todos los subconjuntos $A_1 \subseteq A$ y $B_1 \subseteq B$ se verifica la igualdad $|A \setminus A_1| + |B \setminus B_1| = |(A \cup B) \setminus (A_1 \cup B_1)| + |(A \cap B) \setminus (A_1 \cap B_1)|$. Por consiguiente, siendo semimodular la función f , tenemos

$$\begin{aligned} (f(A_1) + |A \setminus A_1|) + (f(B_1) + |B \setminus B_1|) &\geq \\ \geq f(A_1 \cup B_1) + |(A \cup B) \setminus (A_1 \cup B_1)| + f(A_1 \cap B_1) + \\ &+ |(A \cap B) \setminus (A_1 \cap B_1)|. \end{aligned}$$

De este modo, $r(A) + r(B) = \min_{A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B} \{f(A_1) + |A \setminus A_1| + f(B_1) + |B \setminus B_1|\} \geq \min_{C_1 \subseteq A \cup B, C_2 \subseteq A \cap B} \{f(C_1) + |(A \cup B) \setminus C_1| + f(C_2) + |(A \cap B) \setminus C_2|\} = r(A \cup B) + r(A \cap B)$. De este modo queda establecida la validez del axioma (r3) y el problema está resuelto.

8.120. Sea $f(A) = \sum_{i=1}^n r_i(A)$ para todo $A \subseteq S$. Entonces f es una función semimodular y monótona creciente de números enteros, dado que precisamente tales son las funciones de rango r_i de los matroides M_i . Por consiguiente, en virtud del problema 8.119, la familia $\mathcal{J}' = \{A \subseteq S \mid \forall B \subseteq A: |B| \leq f(B)\}$ define el matroide $M(S, r)$, donde

$$r(A) = \min_{B \subseteq A} \{f(B) + |A \setminus B|\} = \min_{B \subseteq A} \left\{ \sum_{i=1}^n r_i(B) + |A \setminus B| \right\}$$

Luego, supongamos que $B \subseteq A$, $A \in \mathcal{J}'$ y $B = \sum_{i=1}^n B_i$, donde $B_i \subseteq A_i$ para $i=1, 2, \dots, n$. Entonces

$$|B| = \left| \bigcup_{i=1}^n B_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |B_i| = \sum_{i=1}^n |B_i| = \sum_{i=1}^n r(B_i) \leq \sum_{i=1}^n r_i(B),$$

puesto que $B_i \in \mathcal{J}_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Por consiguiente, $A \in \mathcal{J}'$. Es cierta también, evidentemente, la afirmación inversa de que si $A \in \mathcal{J}'$, entonces $A \in \mathcal{J}$. Quiere decir, $\mathcal{J} = \mathcal{J}'$ y el problema está resuelto.

8.121. La implicación (c) \Rightarrow (b) es obvia. Para demostrar la implicación (b) \Rightarrow (a), hagamos uso del problema 8.119. Supongamos que $B \subseteq A$ y $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$, donde $B_i \subseteq A_i$ para todo i . Partiendo de que (b) es válida, tenemos:

$$|B| \leq \sum_{i=1}^n |B_i| = \sum_{i=1}^n r_i(B_i) \leq \sum_{i=1}^n r_i(B) \text{ lo que es, en vista del problema}$$

8.119, simplemente una definición del conjunto independiente del matroide $\bigcup_{i=1}^n M_i$. Resta mostrar que (a) \Rightarrow (b). Elijamos n conjuntos disjuntos dos a dos

S_i que tengan la misma potencia que S y n aplicaciones biunívocas $\varphi_i: S \rightarrow S_i$. Suponiendo que $\varphi_i(B)$ es un subconjunto independiente en S_i si y sólo si B es un conjunto independiente del matroide M_i , obtenemos los matroides N_i sobre los conjuntos S_i que son isomorfos a los matroides M_i , cualesquiera que sean i . Designemos por r'_i la función de rango del matroide N_i , es decir, $r'_i(\varphi_i(A)) = r_i(A)$ para cada $A \subseteq S$, y con r' , la función de rango del matroide $\bigoplus_{i=1}^n N_i$.

Definamos un grafo bipartido G sobre el conjunto de vértices $S \cup (\bigcup_{i=1}^n S_i)$ con el conjunto de aristas $R = \{(p, \varphi_i(p)) \mid p \in S, i = 1, 2, \dots, n\}$. Supongamos que T es un matroide de las combinaciones de pares del grafo G sobre el conjunto S (véase el problema 8.79). Está claro que el matroide T se induce por la función semimodular monótona $f(A)$ (definida para todo $A \subseteq S$) tal que

$$f(A) = r' \left(\bigcup_{i=1}^n \varphi_i(A) = \sum_{i=1}^n r'_i \varphi_i(A) \right) = \sum_{i=1}^n r_i(A).$$

De aquí se deduce que las funciones f y $\sum_{i=1}^n r_i$ son, en realidad, iguales o,

dicho de otro modo que $\bigcup_{i=1}^n M_i = T$. Utilizando la descripción de los conjuntos independientes en el matroide T , tenemos: el conjunto A es un conjunto independiente del matroide $\bigcup_{i=1}^n M_i$ cuando y sólo cuando existe tal encaje $\varphi: A \rightarrow$

$\bigcup_{i=1}^n S_i$ que $\varphi(A)$ es un conjunto independiente del matroide $\bigoplus_{i=1}^n N_i$, si y

sólo si existe un encaje $\varphi: A \rightarrow \bigcup_{i=1}^n S_i$ tal que $\varphi(A) = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(A)$, donde $\varphi_i(A)$ son conjuntos independientes del matroide N_i para cualquier i , cuando y sólo cuando $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ es una unión de conjuntos disjuntos de dos en dos y A_i

son conjuntos independientes del matroide M_i para cualquier i . La demostración está concluida.

8.122. Hágase uso de la solución del problema 6.111.

8.123. Supongamos que \mathcal{J}_1 y \mathcal{J}_2 son familias de conjuntos independientes de los matroides M_1 y M_2 , respectivamente. Un subconjunto A es independiente en M_2 cuando y sólo cuando $S \setminus A$ contiene la base B del matroide M_2^* . Es evidente que $r_2^*(S) + \max\{|A|, A \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2\} \leq \max\{|A \cup B|, A \in \mathcal{J}_1, B \in \mathcal{J}_2^*\} = |A_1 \cup B_1|$, donde podemos considerar que B_1 es la base del matroide

M_2^* y $A_1 \cap B_1 = \emptyset$. Por consiguiente, para $A_1 \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$ se verifica, en virtud del problema 8.122, la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \max_{A \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2} \{ |A| \} &= -r_2^*(S) + \min_{A \subseteq S} (r_1(A) + r_2^*(A) + |S \setminus A|) = \\ &= \min_{A \subseteq S} (r_1(A) + r_2(S \setminus A)). \end{aligned}$$

8.124. Supongamos, sin limitar la generalidad de los razonamientos, que $S = B_1 \cup B_2$. Pongamos $r(S) = |B_1| = |B_2| = n$. Para la contracción $M_1 = M/Y_1$ tenemos $r_1(X) = r(X \cup Y_1) - |Y_1|$, cualquiera que sea $X \subseteq S \setminus Y_1$. Existe un matroide M_1 con la misma función de rango $r_1(X)$ definida para cualquier $X \subseteq B_2$. Análogamente, existe el matroide M_2 sobre B_2 con $r_2(X) = r(X \cup X_1) - |X_1|$, $X \subseteq B_2$. Para el matroide dual $M_3 = M_2^*$ sobre B_2 obtenemos $r_3(X) = |X| + r((B_2 \setminus X) \cup X_1) - n$. Para $X \subseteq B_2$, $Y = B_2 \setminus X$ tenemos, teniendo en cuenta la condición de semimodularidad de las funciones de rango:

$$\begin{aligned} r_1(X) + r_3(Y) &= r(X \cup Y_1) + r(X \cup X_1) - |Y_1| + |Y| - n \geq \\ &\geq r(X \cup B_1) + r(X \cup (X_1 \cap Y_1)) + |Y| - |Y_1| - n = \\ &= |X| + |Y| - |Y_1| = |X_1|. \end{aligned}$$

Entonces, en virtud del problema 8.123, existe $X_2 \subseteq B_2$, $|X_2| = |X_1|$ tal que $r_1(X_2) = r_3(X_2) = |X_2|$. Por consiguiente,

$$r(X_2 \cup Y_1) = r(Y_2 \cup X_1) = n, \text{ donde } Y_2 = B_2 \setminus X_2$$

[Woodall D. R. — J. Comb. Theory, 1974, 16, p. 227—228].

8.125. La demostración se realiza por inducción. El caso de $k = 2$ proviene del problema 8.124. Supongamos que el resultado es válido para las particiones que contienen menos de k bloques. Supongamos que $S_1 \subseteq S$ y $T_1 \subseteq T$ son unos conjuntos, para los cuales $(S \setminus S_1) \cup T_1$ y $(T \setminus T_1) \cup S_1$ son bases del matroide M . Analicemos el matroide $M_1 = M/S_1$ con función de rango $r_1(X) = r(X \cup S_1) - r(S_1)$. Observemos que $r_1(S \setminus S_1) = r_1(T \setminus T_1) = r_1(M_1)$, es decir, $S \setminus S_1$ y $T \setminus T_1$ son las bases del matroide M_1 . Entonces, tenemos una partición $S \setminus S_1 = S_2 \cup \dots \cup S_k$ en $k - 1$ bloques. Según la suposición por inducción, existe una partición correspondiente $T \setminus T_1 = T_2 \cup \dots \cup T_k$ tal que $(S \setminus S_1 \setminus S_i) \cup T_i$ es una base de M_1 para $i = 2, \dots, k$. De aquí se deduce que $(S \setminus S_i) \cup T_i$ es la base del matroide M para $i = 2, \dots, k$. Pero, por cuanto $(S \setminus S_1) \cup T_1$ es también la base de M , la afirmación queda demostrada.

8.126. Sea $G(S)$ una geometría sobre el conjunto S . Construyamos su extensión unipuntual $G'(S \cup \{a\})$, tomando como relación de clausura $A \rightarrow \mathcal{J}(A)$, donde

$$\mathcal{J}(A) = \begin{cases} \bar{A}, & \text{si } a \in A \text{ y } \bar{A} \neq S; \\ \overline{A \setminus a} \cup a, & \text{si } a \in A \text{ y } r_G(\overline{A \setminus a}) < r(G) - 1, \\ S \cup a, & \text{si } \bar{A} = S, \text{ o bien } a \in A \text{ y } r_G(\overline{A \setminus a}) = r(G) - 1 \end{cases}$$

para cualesquiera $A \subseteq S \cup \{a\}$. Es obvio que esto es una relación de clausura.

Comprobemos (d4): sea $p \in \mathcal{J}(A \cup \{q\})$, $p, q \in \mathcal{J}(A)$. Entonces puede haber dos casos. En primer lugar, $p = a \in \mathcal{J}(A \cup q)$. Entonces o bien $q = a$, o bien $r(A) = r(G) - 1$. De aquí $q \in \mathcal{J}(A \cup a)$ ó $\mathcal{J}(A \cup a) = S \cup a \supseteq q$. En segundo lugar, cuando $p \neq a$, $p \in \mathcal{J}(A \cup \{q\})$, tenemos

$$a \in A \Rightarrow q \in \mathcal{J}(A \cup \{p\}),$$

$$\begin{aligned} a \in A \Rightarrow p \in \mathcal{J}(A \cup \{q\}) = \overline{A \setminus a} \cup \{q\} \cup a \Rightarrow p \in \overline{(A \setminus a) \cup \{q\}} \\ \cup \{q\} \Rightarrow q \in \overline{(A \setminus a) \cup \{p\}}. \end{aligned}$$

La igualdad $r(G') = r(G)$ se cumple por construcción.

8.127. Primero, sea K un ciclo tal que $K \subseteq (A \cup B) \setminus \emptyset$, $K \cap A \neq \emptyset$, y $K \cap B \neq \emptyset$. Tomemos $z \in K \cap B$ y pongamos $C = (K \cap B) \setminus z$. Es evidente que $C \subseteq B$, $z \in (\overline{C \cap A}) \cap B$, puesto que $K \setminus z \subseteq C \cup A$. Esto quiere decir que $C \cup (A \cap B) = C$, puesto que $A \cap B = \emptyset$. Si $z \in C$, entonces $K \cap B$ contiene ciclo. Obtuvimos una contradicción con el hecho de que ningún ciclo contiene otro ciclo. De este modo, $(\overline{C \cup A}) \cap B \neq \overline{C \cup (A \cap B)}$ y el par (A, B) no es modular.

Viceversa, supongamos que el par (A, B) no es modular. En este caso existe una superficie $C \subseteq B$ tal que $\overline{C \cup A} \cap B \neq \overline{C \cup (A \cap B)} = C$. Sea $z \in \overline{C \cup A} \cap B$ y $z \notin C$. Entonces existe un ciclo K tal que $z \in K \subseteq C \cup A \cup z$. Es evidente que en tal caso $K \subseteq (A \cup B) \setminus \emptyset$ y $K \cap B \neq \emptyset$. Además, $K \cap A \neq \emptyset$, puesto que en el caso contrario $z \in K \subseteq C \cup z$, de suerte que $z \in C$. La contradicción obtenida da por terminada la demostración.

8.128. Supongamos que (A, B) es modular en G . Pongamos $E = A \cap B$, y $H = G/E$. Entonces $A \setminus E$ y $B \setminus E$ son superficies en H . Sea C una superficie arbitraria de H que está contenida en $B \setminus E$. Entonces $\overline{C \cup (A \setminus E)}^H \cap (B \setminus E) = \overline{C \cup A} \cap (S \setminus E) \cup (B \setminus E) = \overline{C \cup A} \cap (B \setminus E) = (\overline{C \cup A} \cap B) \setminus E = (\overline{C \cup (A \cap B)}) \cap (B \setminus E) =$ (por hipótesis) $= \overline{C \cup (A \cap B)} \cap (B \setminus E) = C^H$. Es obvio que la igualdad se verifica, y el par $(A \setminus E, B \setminus E)$ es modular en H .

Viceversa, supongamos que el par $(A \setminus E, B \setminus E)$ es modular en H . Para mostrar que (A, B) es modular en G , basta probar que para cada superficie C de G tal que $A \cap B \subseteq C \subseteq B$ tiene lugar $\overline{C \cup A} \cap B = C$. Sea $A \cap B \subseteq C \subseteq B$. Entonces $C \setminus E$ es una superficie en H , y por cuanto $(A \setminus E, B \setminus E)$ es modular en H , llegamos a que $(\overline{C \setminus E} \cup (A \setminus E))^H \cap (B \setminus E) = C \setminus E$, es decir, $\overline{C \cup A} \cap (B \setminus E) = C \setminus E$, y, por consiguiente, $\overline{C \cup A} \cap B = C$.

8.129. Es evidente que \mathcal{M} es un filtro. La condición de que $A \in \mathcal{M}$ es equivalente a la condición de que $r(A \cup \{p\}) = r(A)$. Por consiguiente, si $A, B \in \mathcal{M}$ es un par modular en $G(S)$, entonces

$$r((A \cap B) \cup \{p\}) \leq r(A \cup \{p\}) + r(B \cup \{p\}) - r(A \cup B \cup \{p\}) = r(A) + r(B) - r(A \cup B) = r(A \cap B).$$

de este modo $A \cap B \in \mathcal{M}$.

8.130. Denotemos con $A \rightarrow \bar{A}$ y r el operador de clausura y la función de rango en $G(S)$, respectivamente. Supongamos $\bar{r}: S \cup p \rightarrow N_0$, donde N_0 es un conjunto de números naturales con 0 tal que

- $\bar{r}(A) = r(A)$ para $A \subseteq S$;
- $\bar{r}(A \cup p) = r(A) + 1$ para $A \subseteq S$, $A \notin \mathcal{M}$;
- $\bar{r}(A \cup p) = r(A)$ para $A \subseteq S$, $A \in \mathcal{M}$.

Comprobemos que \bar{r} es una función de rango, es decir, que para \bar{r} se cumplen los axiomas (r1) - (r3). La comprobación de (r1) y (r2) no ofrece ninguna dificultad. Para demostrar la validez de (r3) examinemos dos casos:

- los pares $A \cup p, B$ son tales que $A, B \subseteq S$;
- los pares $A \cup p, B \cup p$ son tales que $A, B \subseteq S$.

Para cualesquiera $A, B \subseteq S$ tenemos $\bar{r}(A \cup B \cup p) - \bar{r}(A \cup B) \leq \bar{r}(\bar{A} \cup p) - \bar{r}(A)$. Observemos que el primer miembro de la desigualdad es siempre ≤ 1 , y es igual a 1 cuando $\overline{A \cup B} \in \mathcal{M}$; de este modo $\bar{A} \in \mathcal{M}$, puesto que en este caso el segundo miembro de la desigualdad es también igual a 1. De aquí se deduce:

$$\bar{r}(A \cup B \cup p) - \bar{r}(A \cup p) \leq \bar{r}(A \cup B) - \bar{r}(A) = r(A \cup B) - r(A) \leq r(B) - r(A \cup B) = \bar{r}(B) - \bar{r}(A \cup B).$$

El caso 1 queda demostrado. En el caso 2) se debe mostrar que

$$\overline{r}((A \cap B) \cup p) + \overline{r}(A \cup B \cup p) \leq \overline{r}(A \cup p) + \overline{r}(B \cup p)$$

Si $\overline{A \cup B} \notin \mathcal{M}$, entonces también $\overline{A}, \overline{B}, \overline{A \cap B} \notin \mathcal{M}$, de donde se deduce la desigualdad. Por otra parte, si $\overline{A \cup B} \in \mathcal{M}$, esto puede ser sólo cuando $\overline{A} \in \mathcal{M}, \overline{B} \in \mathcal{M}$ y A, B es un par modular en $G(S)$. En tal caso $\overline{A}, \overline{B}$ será también un par modular y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B} \in \mathcal{M}$.

8.131. Indicación. Hágase uso de la solución del problema 8.130.

8.137. No, no para todo matroide. Por ejemplo, el matroide de Fano F_7 no puede ser incrementado, puesto que cada subconjunto que contiene cuatro elementos contiene obligatoriamente, por lo menos, una terna «prohibida».

8.138. Sí; por ejemplo, un matroide sobre S , de cuyas bases sirven los subconjuntos de S que contienen cuatro elementos, a excepción de los siguientes subconjuntos:

$$\begin{aligned} & \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 6\} \text{ y } \{1, 2, 3, 7\}, \\ & \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 7, 6\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 3, 6, 7\}, \\ & \{2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 6, 7\}, \{6 \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \\ & \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 3, 7\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 6, 7\}, \\ & \{1, 3, 6, 7\}, \{2, 3, 6, 7\}. \end{aligned}$$

8.142. Crapo H. H. «Annal N.Y. Acad. Sc.», 1970, 175, 89—92.

8.145. El problema fue formulado por primera vez por Crapo en 1971.

8.148. a) Se deduce de la definición de aplicación fuerte y de la propiedad consistente en que cada elemento del retículo geométrico es una unión de cierto número de átomos.

b) Analícese la cadena máxima de 0 a x del retículo L_1 y hágase uso del resultado a).

8.149. Es evidente que si $\sigma: L_1 \rightarrow L_2$ es un isomorfismo, entonces σ es la aplicación fuerte «sobre» y $r(L_1) = r(L_2)$. Con el fin de demostrar la afirmación inversa, admitamos primeramente que σ es una aplicación biunívoca. Si σ es una aplicación fuerte biunívoca, ella conserva la relación de orden. En efecto, sea $x \not\leq y$, y $\sigma(x) \leq \sigma(y)$. Entonces $y < x \vee y$, y $\sigma(y) = \sigma(x) \vee \sigma(y) = \sigma(x \vee y)$, mas esto contradice la biunivocidad de la aplicación σ . De este modo, la relación de orden se conserva y toda aplicación fuerte biunívoca es un isomorfismo.

Supongamos que $\sigma: L_1 \rightarrow L_2$ es una aplicación fuerte «sobre» y que $r(L_1) = r(L_2)$. Para finalizar la demostración mostremos que σ es una aplicación biunívoca. Por cuanto σ es una superposición, entonces $\sigma(0) = 0$ y $\sigma(1) = 1$. Admitamos ahora que $\sigma(x) = \sigma(y)$ para $x, y \in L_1$ tales que $x \neq y$. Entonces $\sigma(x \vee y) = \sigma(x) \vee \sigma(y) = \sigma(x)$. Elijamos una cadena máxima C de 0 a 1 en L_1 que pase por x y $x \vee y$. La imagen de esta cadena $\sigma(C)$ es una cadena máxima de 0 a 1 en L_2 , puesto que las aplicaciones fuertes conservan la propiedad de recubrimiento. Pero $r(L_1) = r(L_2)$, por lo cual σ es biunívoca sobre C y, por consiguiente, $x = x \vee y$, lo que contradice nuestra suposición. Por eso σ es una aplicación fuerte biunívoca y el problema está resuelto.

8.150. (a) \Rightarrow (b). Sea X un conjunto cerrado en el matroide $\mathcal{N}(T)$. Por cuanto $\sigma[\sigma^{-1}(X)] \subseteq \overline{\sigma\sigma^{-1}(X)} = \overline{X} = X$, entonces

$$\overline{\sigma^{-1}(X)} \subseteq \sigma^{-1}\sigma[\overline{\sigma^{-1}(X)}] \subseteq \sigma^{-1}(X).$$

Por consiguiente, $\overline{\sigma^{-1}(X)} = \sigma^{-1}(X)$ y $\sigma^{-1}(X)$ es un conjunto cerrado.

(b) \Rightarrow (c). Establezcamos primero que σ^* conserva el orden. Si v y u son superficies del retículo $L(M)$, entonces de que $u \leq v$ se deduce que $U \subseteq V$, o bien que $\overline{\sigma(U)} \subseteq \overline{\sigma(V)}$, o bien que $\sigma^*(u) \leq \sigma^*(v)$. En particular, $\sigma^*(x \vee y) > \sigma^*(y)$ y $\sigma^*(x \vee y) > \sigma^*(y)$, es decir, $\sigma^*(x \vee y) \geq \sigma^*(x) \vee \sigma^*(y)$. Demostremos la desigualdad inversa. Sea $z = \sigma^*(x) \vee \sigma^*(y)$. Por eso el conjunto Z

está cerrado en el matroide $N(T)$ y, por tanto, $\sigma^{-1}(Z)$ también está cerrado en el matroide $M(S)$. Además, Z contiene los conjuntos X e Y . Por consiguiente, si $u = x \vee y$ entonces $U \subseteq Z$. De este modo,

$$\overline{\sigma(U)} \subseteq \sigma[\overline{\sigma^{-1}(Z)}] \subseteq \overline{Z} = Z.$$

Por consiguiente, $\sigma^*(x \vee y) \leq \sigma^*(x) \vee \sigma^*(y)$. De aquí y de las desigualdades obtenidas anteriormente tenemos $\sigma^*(x \vee y) = \sigma^*(x) \vee \sigma^*(y)$.

Supongamos ahora que existe un átomo p en $L(M)$ tal que $\sigma^*(p)$ tiene un rango estrictamente superior a 1. Sea q un átomo del retículo $L(N)$ y $q^* < \sigma^*(p)$. Entonces, $\overline{\sigma} \subset \sigma^{-1}(Q) \subset P$, donde todas las inclusiones son estrictas. De este modo, $\sigma^{-1}(Q)$ no puede ser cerrado y hemos llegado, pues, a una contradicción con la suposición. Por consiguiente, la aplicación σ^* aplica los átomos en los átomos o en los retículos nulos.

(c) \Rightarrow (a). Supongamos que $x \in L(M)$ y $\overline{A} = X$. Sean p, q, \dots, r los átomos de A . Entonces

$$\sigma^*(x) = \sigma^*(p \vee q \vee \dots \vee r) = \sigma^*(p) \vee \sigma^*(q) \vee \dots \vee \sigma^*(r),$$

o bien, lo que es lo mismo, $\sigma(\overline{A}) \subseteq \overline{\sigma(A)}$.

8.154. La equivalencia de las afirmaciones (a), (b), (c) proviene de la definición y del problema 8.150. Para demostrar la equivalencia entre (c) y (d), hagamos uso de que si $A \subseteq S$, entonces

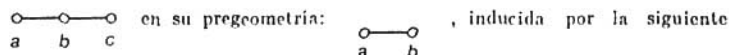
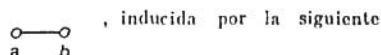
$$\overline{A^*} = A \cup \{\sigma \mid a \notin S \setminus (A \cup \{a\})\},$$

donde $\overline{A^*}$ es la clausura del conjunto A en el matroide M^* , y $M^{**} = M$.

8.160. Higgs D. A. «J. London Math. Soc.», 1966, 41, 612—618; Higgs D. A. «J. Combin. Theory», 1966, 5, 185—191.

8.161. Hágase uso del hecho de que σ^* conserva el supremo reticular y aplica los átomos en átomos o en un conjunto vacío.

8.162. Tal es, por ejemplo, la aplicación débil de la geometría G :

 en su pregeometría: , inducida por la siguiente

función:

$$\sigma(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \neq c; \\ 0, & \text{si } x = c. \end{cases}$$

8.166. Si la función idéntica τ sobre el conjunto $S \cup 0$ induce una aplicación débil del matroide $M(S)$ en el matroide $N(S)$, donde $r(M) = m$, $r(N) = n$ y $m > n$, entonces, evidentemente, τ induce la aplicación débil del n -truncamiento M_n del matroide $M(S)$ en el matroide $N(S)$.

8.167. Muéstrase que τ induce una aplicación débil conservadora de rango M en N cuando y sólo cuando cada base de N es también base en M . Hágase uso del hecho de que la base del matroide M^* es exactamente un complemento de la base del matroide M .

8.172. Lucas D. «Trans. Amer. Math. Soc.», 1975, 206, 247—279.

8.173. Lucas D. «Trans. Amer. Math. Soc.», 1975, 206, 247—279.

8.174. El matroide dual con relación al matroide de Faano está representado en la fig. 8.5'. Todas las rectas del matroide Φ^* contienen 2 puntos; Φ^* tiene 7 planos de potencia 4, y 7 planos de potencia 3.

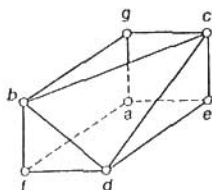


Fig. 8.5'.

§ 3. Coordinatización y representabilidad de los matroides

8.175. Sea M un matroide con la función de rango r y una familia de conjuntos independientes \mathcal{J} . Entonces, para cada aplicación $\varphi: S \rightarrow V$ y $A \subseteq S$ arbitrario se cumplen las siguientes relaciones:

a) $\dim \varphi(A) \leq |\varphi(A)|$, con la particularidad de que $\dim \varphi(A) = |\varphi(A)|$ cuando y sólo cuando $\varphi(A)$ es linealmente independiente en V ;

b) $r(A) \leq |A|$, con la particularidad de que $r(A) = |A|$ cuando y sólo cuando $A \in \mathcal{J}$;

c) $|\varphi(A)| \leq |A|$, con la particularidad de que $|\varphi(A)| = |A|$ cuando y sólo cuando φ es una aplicación biunívoca.

Por eso, si $\varphi: S \rightarrow V$ conserva el rango, entonces $A \in \mathcal{J}$ cuando y sólo cuando $|A| = r(A)$ ($= \dim \varphi(A) \leq |\varphi(A)| \leq |A|$), es decir, cuando y sólo cuando $|A| = \dim \varphi(A) = |\varphi(A)|$, o bien si y sólo si $\varphi|_A$ es biunívoca y $\varphi(A)$, un conjunto linealmente independiente en V .

Demostremos la afirmación inversa. Sea $\varphi: S \rightarrow V$ tal que $A \in \mathcal{J}$ cuando y sólo cuando $\varphi|_A$ es biunívoca y $\varphi(A)$, linealmente independiente en V . Tomemos un subconjunto arbitrario $X \subseteq S$. Sea B una base del matroide $M|_X$ y sea $\varphi(B')$ un subconjunto máximo (por inclusión) de vectores linealmente independientes en $\varphi(X)$, donde $B' \subseteq X$ y $\varphi|_{B'}$ es biunívoca. En este caso tenemos

$$r(X) = |B| = |\varphi(B)| = \dim \varphi(B) \leq \dim \varphi(X)$$

y

$$r(X) \geq r(B') = |B'| = |\varphi(B')| = \dim \varphi(X).$$

De este modo,

$$r(X) = \dim \varphi(X)$$

y $\varphi: S \rightarrow V$ es la aplicación conservadora del rango, lo que se trataba de demostrar.

8.176. Sea $\varphi: S \rightarrow V$ una coordinatización del matroide M sobre el campo F . Para cada átomo p del retículo $L(M)$ (es decir, para cada superficie $P = \overline{P}$ del matroide M) elijamos un elemento determinado $a_p \in \overline{\varphi(P)}$, $a_p \neq 0$, de V (esto es bien factible, puesto que $\overline{P} = \overline{Q}$ cuando y sólo cuando $\overline{\varphi(P)} = \overline{\varphi(Q)}$) y definamos la aplicación $\varphi_0: S \rightarrow V$, donde S_0 es un conjunto de átomos del retículo $L(M)$, del modo siguiente:

$$\varphi_0(p) = a_p.$$

La aplicación φ_0 es una coordinatización de la geometría G sobre el campo G . La afirmación inversa es evidente.

8.177. Sea $\varphi: S \rightarrow V$ una coordinatización del matroide de Fano Φ sobre cierto campo F . Sin limitar la generalidad de los razonamientos pongamos: $\varphi(a) = (1, 0, 0)$; $\varphi(b) = (0, 1, 0)$; $\varphi(c) = (0, 0, 1)$ y $\varphi(d) = (1, 1, 1)$. Por cuanto e depende de $\{a, b\}$ y $\{c, d\}$, ha de cumplirse la igualdad $\varphi(e) = \lambda(1, 1, 0)$, donde $\lambda \neq 0$, y, análogamente, $\varphi(f) = \mu(1, 0, 1)$, $\varphi(g) = j(0, 1, 1)$, donde $\mu, j \neq 0$. Los vectores $\varphi(e)$, $\varphi(f)$, $\varphi(g)$ son linealmente dependientes, por lo cual $\det(\varphi(e); \varphi(f); \varphi(g)) = \lambda\mu j(-2) = 0$, lo que es posible sólo para un campo de característica 2.

8.178. Hágase uso de la solución del problema 8.177.

8.179. Es suficiente convencerse de que para cada $(k \times p)$ -submatriz A_1 de la matriz A tiene lugar la relación $r(A_1) = r(BA_1)$ y que con las operaciones citadas el rango de la matriz queda intacto. Aquí, mediante r se designa la función de rango de la matriz.

8.180. Sea $\varphi: S \rightarrow V$ una coordinatización del matroide M sobre el campo F . Entonces $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_h)\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores en V y para cada $e \in S$ tenemos

$$\varphi(e) = \sum_{i=1}^h \lambda_i(e) \varphi(e_i)$$

para ciertos coeficientes unívocamente definidos $\lambda_i(e)$ del campo F . Fijemos una aplicación $\theta: S \rightarrow F^h$, poniendo

$$\theta(e) = (\lambda_1(e), \dots, \lambda_h(e)), \text{ donde } e \in S.$$

Entonces

$$\theta(e_i) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \text{ para todo } i, \text{ donde}$$

$$i_i^i = 1, 2, \dots, k.$$

Mostremos que θ es una aplicación que conserva el rango. En efecto, sea A un subconjunto arbitrario del conjunto S . Entonces $\sum_{e \in A} \alpha_e \theta(e) = 0$, donde $\alpha_e \in F$ en aquel único caso cuando

$$\sum_{e \in A} \alpha_e (\lambda_1(e), \dots, \lambda_h(e)) = 0,$$

o bien cuando y sólo cuando

$$\sum_{e \in A} \alpha_e \lambda_1(e) = \dots = \sum_{e \in A} \alpha_e \lambda_h(e) = 0,$$

o bien cuando y sólo cuando

$$\sum_{e \in A} \alpha_e \left(\sum_{i=1}^h \lambda_i(e) \varphi(e_i) \right) = 0,$$

o bien cuando y sólo cuando

$$\sum_{e \in A} \alpha_e \varphi(e) = 0.$$

Por consiguiente, $\theta(e)$ y $\varphi(e)$ satisfacen precisamente las mismas relaciones, lo que significa que θ es una aplicación conservadora de rango de S en F^h . Así pues, hemos establecido que θ es la coordinatización del matroide M sobre el campo F .

8.181. Hágase uso del problema 8.180 y fórmese la matriz A con las columnas $\theta(e_1), \dots, \theta(e_h)$, donde e_1, \dots, e_h son elementos de la base B del matroide M , la cual será precisamente la que buscamos.

8.182. Es fácil mostrar que el matroide $U_{2,4}$, definido sobre el conjunto $S = \{a, b, c, d\}$, no es representable sobre el campo $GF(2)$. Supongamos que esto no es así. Entonces, en virtud del problema 8.181, para la base $\{a, b\}$ del matroide $U_{2,4}$ existe una (2×4) -matriz de representación

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & p & q \\ 0 & 1 & r & s \end{pmatrix},$$

donde $p, q, r, s \in GF(2)$ y ningún elemento de p, q, r, s es igual a cero. En efecto, si, por ejemplo, $p = 0$, entonces $\{b, c\}$ no puede ser independiente. Por eso la matriz de representación $U_{2,4}$ sobre el campo $GF(2)$ debe tener la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

lo que no es posible, puesto que en tal caso el conjunto $\{c, d\}$ será dependiente en $U_{2,4}$. De este modo, el matroide $U_{2,4}$ no es representable sobre el campo $GF(2)$. Al mismo tiempo el matroide $U_{2,4}$ es representable sobre cualquier otro campo F , distinto de los campos de característica 2. Efectivamente, en el campo F se tiene por lo menos un elemento t , distinto de 0 y 1, y, por tanto, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

será la representación buscada de $U_{2,4}$ sobre el campo F .

8.185. Sea G un grafo arbitrario con el conjunto de vértices V , $|V| = n$, y el conjunto de aristas S , y sea F un campo arbitrario. Enumeremos todos los vértices del grafo G de 1 a n y pongamos

$$f(v_i) = e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)^T,$$

para todo i , donde $i = 1, 2, \dots, n$. Muéstrese que $\varphi: S \rightarrow F^n$, definida para todo $a = (v_i, v_j) \in S$ del modo siguiente: $\varphi(a) = e_i - e_j$, es la coordinatización del matroide $M(G)$ sobre el campo F . Además si $F = GF(2)$, entonces $\varphi(a) = e_i + e_j$.

8.186. Sea M un matroide de rango k sobre el conjunto $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ y sea A una $(k \times n)$ -matriz arbitraria con los coeficientes del campo F tal que la aplicación que pone en correspondencia al elemento $e_i \in S$ la i -ésima columna de la matriz A conserva el rango (la existencia de tal matriz fue establecida en el problema 8.181). Entonces un sistema de ecuaciones

$$Ax = 0, \quad \text{donde } x \in F^n$$

tiene $n - k$ soluciones linealmente independientes en F^n . Sea B una $(n \times (n - k))$ -matriz, de cuyas columnas sirven las soluciones linealmente independientes del sistema $Ax = 0$. Demostremos por turno dos afirmaciones respecto de la matriz B , de las cuales se deducirá la afirmación del problema.

(1) Un conjunto de k columnas de la matriz A es linealmente dependiente cuando y sólo cuando el conjunto complementario de $(n - k)$ columnas de la matriz B^T es linealmente dependiente.

Por ser simétrica la relación entre las matrices A y B y debido a la posibilidad de enumerar las columnas de la matriz A , para demostrar la afirmación (1) basta mostrar que las primeras k columnas de la matriz A son linealmente dependientes cuando y sólo cuando las últimas $(n - k)$ columnas de la matriz B^T son linealmente dependientes. Dividamos las matrices A y B en submatrices del modo siguiente: $A = (A_1, A_2)$ y $B = (B_1, B_2)^T$, donde A_1 es una $(k \times k)$ -submatriz, A_2 es $((k \times (n - k))$ -submatriz de la matriz A , y B_1 es $(k \times (n - k))$ -submatriz, B_2 es $((n - k) \times (n - k))$ -submatriz de la matriz B .

El conjunto de las primeras k columnas de la matriz A es linealmente dependiente cuando y sólo cuando A_1 es una matriz degenerada, o bien cuando y sólo cuando existe tal $y = (y_1, y_2, \dots, y_k, 0, \dots, 0) \in F^n$, $y \neq 0$, que $Ay^T = 0$, o bien si y sólo si existe tal $z = (z_1, z_2, \dots, z_{n-k}) \in F^{n-k}$, $z \neq 0$ que $y^T = Bz^T$ (por cuanto las columnas de la matriz B engendran un espacio de soluciones del sistema $Ax = 0$), o bien cuando y sólo cuando $B_2z^T = 0$ y $z \neq 0$, o bien cuando y sólo cuando B_2^* es una matriz degenerada, o bien si y sólo si las últimas $(n - k)$ columnas de la matriz B^T son linealmente dependientes.

(2) La aplicación $\varphi: S \rightarrow F^{n-k}$ que a todo elemento e_i le pone en correspondencia la i -ésima columna de la matriz B conserva el rango del matroide dual M^* .

Sea $X \subseteq S$ y $r^*(X) = m$, donde r^* es la función de rango del matroide M^* . Se requiere demostrar que $\dim \{\varphi(a) \mid a \in X\} = m$. Sin limitar la generalidad de razonamientos podemos considerar que $X = \{e_1, \dots, e_s\}$. Notemos que $r^*(X) = r^*(\{e_1, \dots, e_s\}) = m$, cuando y sólo cuando existe una base del matroide M que contiene $(s - m)$ elementos de X y ninguna otra base de M

contiene un número mayor de elementos de X , o bien si, y sólo si, existe un conjunto linealmente independiente de k columnas de la matriz A que contiene exactamente $(s - m)$ columnas de las primeras s columnas y ningún otro conjunto linealmente independiente de k columnas contiene un número mayor de columnas entre las primeras s columnas, o bien cuando y sólo cuando existe un conjunto linealmente independiente de $(n - k)$ columnas de la matriz B^T que contiene exactamente m columnas de las primeras s y ningún otro conjunto de este género contiene un número mayor de columnas entre las primeras columnas de la matriz B^T (hemos tomado los complementos y aprovechamos la afirmación demostrada (I)), o bien si y sólo si entre las primeras s columnas de la matriz B^T , a saber, entre $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_s)$, hay no más de m linealmente independientes, es decir,

$$\dim \{ \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_s) \} = m.$$

De este modo, φ es una coordinatización del matroide M^* sobre el campo F .

8.187. Hágase uso del problema 8.186 y muéstrase que las columnas de la matriz $(-A^T, E_{n-k})$ engendran un espacio de soluciones del sistema $(E_n, A) \times \times x^T = 0$.

8.189. a) Es evidente que si φ es una coordinatización del matroide M en el conjunto S sobre el campo F , entonces $\varphi|_A$, donde $A \subseteq S$, es una coordinatización del submatroide $M|A$ sobre el campo F . En virtud del problema 8.186 y de la igualdad $(M/A)^* = M^*|(S \setminus A)$ del problema 8.107, como también de la observación anterior, concluimos que cualquier contracción del matroide M es también representable sobre el campo F . Por cuanto cualquier menor puede ser representado mediante una sucesión de contracciones y exclusiones, la afirmación a) del problema queda demostrada.

b) Si A_1 y A_2 son matrices de representaciones de los matroides M_1 y M_2 sobre el campo F , respectivamente, entonces la matriz

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

es una matriz de representación del matroide $M = M_1 \oplus M_2$ sobre el campo F . La afirmación inversa se deduce de a).

8.190. La suma directa del matroide de Fano Φ (problemas 8.20 y 8.177) y del matroide Φ_1 (problema 8.178) no es representable sobre ningún campo. Esto se deduce de la afirmación b) del problema 8.189.

8.194. La coordinatización de los matroides de nuestro problema sobre el campo F es equivalente al encaje de las configuraciones en consideración en un plano proyectivo de dimensión 2 sobre el campo F , en el que se cumplen los teoremas de Desargue y de Pappo (véase el capítulo 5, § 2 de [1]). Para nuestras configuraciones dichos teoremas no se cumplen, puesto que los puntos 7, 8, 9 en el primer caso y los puntos 8, 9, 10 en el segundo caso, no son colineares. Por consiguiente, los matroides de «no Pappo» y «no desarguean» no pueden ser representados sobre ningún campo.

8.195. Supongamos lo contrario. Admitamos que el matroide de Vamos M puede ser encajado en la geometría proyectiva de dimensión 3 sobre cierto campo F . Entonces la recta d_1d_2 , que no es coplanar con $b_1b_2c_1c_2$, debe intersectarse con el plano $b_1b_2c_1c_2$ en cierto punto e . Pero, por cuanto $e \in b_1b_2d_1d_2 \cap c_1c_2d_1d_2$, entonces e debe yacer en la intersección de las rectas b_1b_2 y c_1c_2 . Análogamente, la recta a_1a_2 debe intersectarse con el plano $b_1b_2c_1c_2$ en el punto e , mas en tal caso a_1, a_2, d_1 y d_2 son coplanares y esto contradice el hecho de que $\{a_1, a_2, d_1, d_2\}$ es la base del matroide M .

8.196. Lazarson T. J. London Math. Soc., 1958, 33, 21—25.

8.197. Hágase uso de que $2^9 - 1 = 1103 \cdot 2089 \cdot 233$.

8.201. Whitney H. Ann. J. Math., 1935, 57, 509—533; Rado R. Proc. London Math. Soc., 1957, 7, 300—320; Minty G. J. J. Math. Mech., 1966, 15, 485—520; Bixby R. E. Discrete Math., 1974, 8, 139—145; Tutte W. T. J. Res.

Nat. Bur. Stand., 1965, 69 B, 1-47; Seymour P. D. J. London Math. Soc., 1976, 12, 356-360.

8.202. Fourmer J.—C. J. Comb. Theory, 1974, 16 B, 181-190.

8.203. Tutte W. T. J. Res. Nat. Bur. Stand., 1965, 69B, 1-47.

8.204. Hágase uso de los problemas 8.173 y 8.203.

8.205-8.210. Lucas D. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, 206, 247-279.

8.213. Seymour P. D. J. Comb. Theory, 1979, 26B, 159-173; Bixby R. E. J. Combin. Theory, 1979, 26B, 174-204.

8.216. Necesidad. Sea φ una coordinatización del matroide M sobre el campo F . De las propiedades elementales de los determinantes se desprende inmediatamente la validez de las relaciones (a) y (b) para los paréntesis de la coordinatización φ . Para demostrar (c), notemos que la ecuación es trivial, si algún sumando en (c) no es igual a cero y, por lo tanto, si los conjuntos $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ son bases del matroide M , o bien si para cierto i los conjuntos $\{y_1, x_2, \dots, x_n\}$ y $\{y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, x_1, y_{i+1}, \dots, y_n\}$ son también bases del matroide M . En realidad podemos considerar que los primeros de ellos son bases. En efecto, si $\{y_i, x_2, \dots, x_n\}$ y $\{y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, x_1, y_{i+1}, \dots, y_n\}$ son bases del matroide M , es fácil comprobar, haciendo uso de (b), que las sicigias del tipo (c) con el primer término $\{y_i, x_2, \dots, x_n\}$ [$y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, x_1, y_{i+1}, \dots, y_n$] son equivalentes a las sicigias con el primer término $\{x_1, \dots, x_n\}$ [y_1, \dots, y_n]. Empleemos ahora la aplicación lineal regular $T: V \rightarrow V$, que aplica $\varphi(x_j)$ en el j -ésimo vector unitario e_j del espacio lineal V para cada j . Sea $T(\varphi(y_j)) = w_j \in V$ y sea W una $(n \times n)$ -matriz cuya j -ésima columna es igual a w_j , donde $j = 1, 2, \dots, n$. Al aplicar la transformación T para multiplicar el determinante en (c) por una misma constante, llegamos a que la relación (c) es equivalente a la siguiente:

$$\det E \cdot \det W = \sum_{i=1}^n \det(w_i, e_2, \dots, e_n) \det(w_1, w_2, \dots, w_{i-1}, e_1, w_{i+1}, \dots, w_n) = \\ = \sum_{i=1}^n w_{1i} (-1)^{i-1} \det W_{1i},$$

donde W_{1i} es un menor de la submatriz de la matriz W , obtenido de W por exclusión de la primera fila y la i -ésima columna. Pero la ecuación (8.5') es simplemente un desarrollo de la matriz W respecto de la primera fila. Por cuanto T es una transformación invertible, las sicigias definidas por los paréntesis de la coordinatización φ satisfacen la relación (c).

Suficiencia. Supongamos que $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ es un elemento del campo F , definido para todos los $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$, y de este modo las sicigias dadas satisfacen las relaciones (a) — (c). Construyamos una coordinatización φ , para cuyos paréntesis se verificará la siguiente condición:

$$\det(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)) = [x_1, x_2, \dots, x_n]. \quad (8.6')$$

Sea $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ una base del matroide M sobre el conjunto S . Entonces $\{Y\} \neq 0$ y podemos normalizar los valores de los paréntesis, al dividir cada uno de ellos por $\{Y\}$. Por cuanto las sicigias son homogéneas, las sicigias normalizadas satisfacen también las relaciones (a) — (c). Por eso podemos considerar que $\{Y\} = 1$. Definamos la i -ésima coordenada $\varphi_i(x)$ del modo siguiente:

$$\varphi_i(x) = [y_1 y_2, \dots, y_{i-1}, x, y_{i+1}, \dots, y_n]$$

y demostraremos que $\varphi: S \rightarrow F^n$ es una coordinatización del matroide M . Si demostramos que para la aplicación φ definida de este modo se verifica la relación (8.6'), la deducción de que φ es una coordinatización del matroide M se deducirá de la correlación (a) para las sicigias.

Sea $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ una sucesión arbitraria tal que $x_i \in S$, donde $i = 1, 2, \dots, n$. Puede considerarse que todos los elementos de la sucesión X

son diferentes, por cuanto de lo contrario: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \det(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n))$. Sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ y $k = |X \setminus Y|$. Demostremos por inducción respecto de k que la relación (8.6') se cumple. Si $k = 0$ ó a 1, entonces (8.6') tiene lugar por construcción. Supongamos que (8.6') se cumple para todo $n < k$, donde $k \geq 2$. Entonces, sirviéndonos de la suposición de inducción, tenemos:

$$[X][Y] = \sum_{i=1}^n [y_i, x_2, \dots, x_n][y_1, \dots, y_{i-1}, x_1, y_{i+1}, \dots, y_n] = \sum_{i=1}^n \det(\varphi(y_i),$$

$\varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$) $\det(\varphi(y_1), \dots, \varphi(y_{i-1}), \varphi(x_1), \varphi(y_{i+1}), \dots, \varphi(y_n)) = \det(\varphi(X)) \det(\varphi(Y))$, puesto que ya nos hemos convencido de que los determinantes satisfacen la correlación (c). Pero $[Y] = \det(\varphi(y)) = 1$, por consiguiente, queda demostrada (8.6'). Ahora podemos invertir la normalización, multiplicando la primera coordenada de cada vector $\varphi(x)$ por el valor inicial $[Y]$. De este modo, la demostración está concluida.

8.217. Si φ es un isomorfismo de los matroides, los menores correspondientes deben ser isomorfos. Por cuanto las columnas de la matriz cuadrada N_1 son vectores coordinatizadores de cierto menor del matroide $M(R_1)$ (véase el problema 8.198), entonces han de ser dependientes cuando y sólo cuando lo mismo es válido también para N_2 , o bien, lo que es equivalente, el determinante sobre el campo F_1 de la matriz N_1 es igual a 0 cuando y sólo cuando el determinante sobre el campo F_2 de la matriz N_2 es igual a cero.

Viceversa, demostremos que B es la base del matroide $M(R_1)$ cuando y sólo cuando las columnas correspondientes de la matriz R_2 forman una base del matroide $M(R_2)$. En otras palabras, mostremos que la $(n \times n)$ -submatriz B de la matriz R_1 es regular sobre el campo F_1 cuando y sólo cuando la submatriz correspondiente de R_2 es regular sobre el campo F_2 . Para la submatriz B de la matriz A_1 esto se deduce de la suposición del problema. Si $B = B' \cup B''$, donde B' es una submatriz de la matriz E_n , y B'' una submatriz de la matriz A_1 , entonces, al desarrollar el determinante de la matriz B respecto de las columnas de la submatriz B' , obtenemos que $\det_{F_1} B = \pm \det_{F_1} N$, donde N es una submatriz cuadrada de la matriz A_1 . De aquí se deduce directamente la afirmación que se trataba de demostrar.

8.223. Las implicaciones (a) \Rightarrow (b) y (d) \Rightarrow (c) \Rightarrow (f) son evidentes, mientras que las (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) se desprenden del problema 8.216, donde los valores de los paréntesis 0 ó ± 1 del campo de números racionales se consideran como elementos del campo F . Por cuanto las relaciones para las sigijas son válidas sobre el campo de números racionales, serán válidas también respecto del módulo p , donde p es la característica del campo F . Para finalizar la demostración de la equivalencia de las afirmaciones del problema, mostremos que (f) \Rightarrow (a).

Sea $R = (E_n, A)$ una matriz estándar de representación del matroide M sobre el campo F , cuya característica es distinta de 2. Hace falta mostrar que la matriz R puede transformarse en una matriz totalmente unimodular R' , multiplicando las filas y columnas correspondientes por los elementos no nulos del campo F . De aquí, en virtud del problema 8.179, se deducirá la afirmación (a). Debido al problema 8.217, si $R' = (E_n, A')$ es una matriz estándar de representación del matroide M sobre el campo $GF(2)$, entonces $a_{ij} \neq 0$ en la matriz R cuando y sólo cuando $a'_{ij} \neq 1$ en la matriz R' . En otras palabras, la aplicación $\varphi(a_{ij}) = a'_{ij}$ es tal que

$$\varphi(a_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{si } a_{ij} = 0; \\ 1, & \text{si } a_{ij} \neq 0, \end{cases}$$

transforma la matriz R en matriz estándar de representación R' del matroide M sobre el campo $GF(2)$. De aquí, en vigor del problema 8.217, para todas las submatrices cuadradas C de la matriz R y para sus φ -imágenes C' de la matriz R' , obtenemos $\det_{F_2} C = 0$ cuando y sólo cuando $\det_{GF(2)} C' = 0$. En particular,

si B es una submatriz cuadrada de orden 2 de la matriz A , cuyos elementos son todos distintos de 0, entonces $\det_F B = 0$, puesto que el determinante sobre el campo $GF(2)$ de la submatriz $B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es igual a 0.

Sean a_1, \dots, a_k vectores filas de la matriz R . Supongamos que los elementos no nulos en a_1 son $a_{1i_1} = 1, a_{1i_2}, \dots, a_{1i_s}$. Dividamos cada elemento de la i_j -ésima columna de la matriz R por a_{1i_j} , donde $j = 2, \dots, s$. De este modo, hagamos todos los elementos en el vector fila a_1 iguales a 0 ó a 1.

Supongamos ahora que se ha logrado hacer todos los elementos en los vectores filas a_1, \dots, a_{k-1} iguales a 0 ó a ± 1 , multiplicando adecuadamente las filas y columnas, y que $a_{hj_1}, \dots, a_{hj_t}$ son elementos no nulos del vector fila a_k . Hagamos que C_{j_e} sea un subconjunto de índices de las filas $\{1, 2, \dots, k-1\}$ para los cuales los elementos a_{ije} en la j_e -ésima columna no son iguales a 0, es decir, $i \in C_{j_e}$ cuando y sólo cuando $a_{ije} \neq 0$. Si $i \in C_{j_e} \cap C_{j_m}$, entonces en R existe una submatriz de la forma $\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 \\ a_{hj_e} & a_{hj_m} \end{pmatrix}$. De donde, en virtud de la observación hecha más arriba, su determinante es igual a 0, o bien $a_{hj_e} = a_{hj_m}$. Por consiguiente, si multiplicamos las columnas j_e por $a_{hj_e}^{-1}$ (elemento inverso de a_{hj_e} del campo F), entonces el vector fila a_k contendrá sólo ceros y unidades, mientras que los vectores filas a_i , para $i = 1, \dots, k-1$, contienen 0, ± 1 y $\pm f_l = 0$ en las columnas j_e , para las cuales $i \in C_{j_e}$. Multipliquemos ahora cada vector fila a_i , $i = 1, \dots, k-1$, que contiene al menos un f_l (es decir, las filas que tienen ceros no en todas las columnas de números j_1, \dots, j_t), por f_l^{-1} . La nueva matriz obtenida tendrá la forma:

$$\begin{matrix} m \\ i \\ j \\ k \end{matrix} \begin{pmatrix} +1 & & \dots & \dots & \pm f_l^{-1} & \dots & \dots \\ 0 & \pm 1 & \dots & \dots & \pm f_l^{-1} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \pm 1 & \dots & \pm 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & j_1 & j_2 & \dots & j_t & & \end{pmatrix}$$

Las columnas j_1, \dots, j_t se hicieron tales como se requería. Esto significa que nuestro último paso consiste en multiplicar cada vector columna con índice $s \notin \{j_1, \dots, j_t\}$ por ciertos f_m . En este caso debemos estar seguros de que si f_m^{-1} y f_l^{-1} pertenecen al vector columna s , entonces $f_m = \pm f_l$.

Si $m, i \in C_{j_l}$ para cierto l , entonces tenemos una submatriz

$$\begin{matrix} m \\ i \end{matrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm f_m^{-1} \\ \pm 1 & \pm f_l^{-1} \end{pmatrix} \begin{matrix} j_l \\ s \end{matrix}$$

De donde, en virtud de que el determinante de esta submatriz es igual a cero, tenemos $f_m = \pm f_l$. De lo contrario, si tal l no existe, se encontrará una submatriz

$$\begin{matrix} m \\ i \\ k \end{matrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \pm f_m^{-1} \\ 0 & \pm 1 & \pm f_l^{-1} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ s \end{matrix}$$

que será degenerada, puesto que el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

sobre el campo $GF(2)$ es igual a 0. Del hecho de que la penúltima matriz es nula se deduce que $f_m = \pm f_l$.

Pero la columna s puede contener, además, los elementos ± 1 de la fila, digamos, a_j , la cual tiene sólo ceros en las columnas j_1, \dots, j_t . En este caso

multipliquemos primero a_j por f_m^{-1} , si $\pm f_m^{-1}$ se encuentra en la intersección de la j -ésima fila y s -ésima columna. Por consiguiente, resta por demostrar que si a_j tiene ± 1 en las columnas $s, s' \in \{j_1, \dots, j_t\}$, entonces $f_m = \pm f_l$, donde f_m^{-1} es un elemento en la s -ésima columna distinto de 0 y ± 1 , y f_l^{-1} es un elemento en la s' -ésima columna. Esto es factible sólo cuando f_m^{-1} y f_l^{-1} están situados ambos o en la columna s , o bien en la columna s' . En efecto, supongamos que esto no es así. Entonces, si $m, i \in C_{j_1}$, tenemos una submatriz

$$\begin{matrix} m \\ i \\ j \end{matrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & f_m^{-1} & 0 \\ \pm 1 & 0 & \pm f_l^{-1} \\ 0 & \pm 1 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

$j_1 \quad s \quad s'$

que es degenerada, puesto que el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sobre

el campo $GF(2)$ es igual a 0 y, por lo tanto, $f_m = \pm f_l$.

Si $m, i \notin C_{j_1}$, entonces la submatriz

$$\begin{matrix} m \\ i \\ j \\ k \end{matrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \pm f_m^{-1} & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & \pm f_l^{-1} \\ 0 & 0 & \pm 1 & \pm 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es también degenerada, por cuanto el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

sobre el campo $GF(2)$ es igual a 0, y, por lo tanto, $f_m = \pm f_l$.

Demostremos por fin que $R' = (E_n, A')$, considerada como matriz con coeficientes enteros, es totalmente unimodular. Como ya se ha observado más arriba, la matriz R' no puede contener submatrices cuadradas de segundo orden, cuyos coeficientes son distintos de 0. De aquí, en particular, tenemos que R' no contiene submatrices cuadradas de segundo orden, cuyos coeficientes son distintos de 0, y entre ellos hay exactamente uno que es igual a 1 ó a -1 . Designemos este hecho por (*). Sea $M = (m_{ij})$ una $(k \times k)$ -submatriz arbitraria de la matriz R' tal que su determinante sobre el campo de números racionales no sea igual a 0 y $m_{11} \neq 0$. Entonces, realizando las transformaciones elementales, reducimos la matriz M a la M' de la forma siguiente $\begin{pmatrix} m_{11} & N \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}$. Notemos que $\det M_1 = \pm \det M$. En virtud de (*) todos los elementos en M_1 son iguales a 0 ó a ± 1 , de lo contrario la matriz M tendría una submatriz $\begin{pmatrix} m_{11} & 1 \\ -m_{11} & 1 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} m_{11} & -1 \\ -m_{11} & -1 \end{pmatrix}$, lo que es imposible.

Para la matriz M_1 la condición (*) es también válida. En efecto, si $B_1 = \begin{pmatrix} m_{1j} & m_{1h} \\ m_{ij} & m_{ih} \end{pmatrix}$ es una submatriz de la matriz M_1 , para la cual no se cumple

la condición (*), entonces para la submatriz $B = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{1j} & m_{1h} \\ 0 & m_{ij} & m_{ih} \\ 0 & m_{ij} & m_{ih} \end{pmatrix}$ de la

matriz M tendremos $\det B = m_{11} \cdot \det B_1 = \pm 2$, es decir, el determinante de la matriz B sobre el campo F no es igual a 0, y sobre el campo $GF(2)$, sí lo es. Mas esto contradice el problema 8.217. Por consiguiente, M_1 también satisface la condición (*).

Elijamos ahora un elemento no nulo en la primera columna de la matriz M_1 , y hagamos iguales a 0 los demás elementos de la citada columna con ayuda

de las transformaciones elementales. La obtenida matriz nueva M_2 tiene también por elementos suyos 0 y 1, así como satisface la condición (*). Realizados k pasos, llegaremos a que el determinante de la matriz M sobre el campo de números racionales es igual a ± 1 . De este modo, todos los menores distintos de cero de la matriz R' son iguales a ± 1 , y la matriz R' es totalmente unimodular.

8.224. De acuerdo con la fórmula de Binet-Cauchy para los determinantes, tenemos

$$\det A \cdot A^T \sum (\det B)^2,$$

donde la suma se toma respecto de todas las $(n \times n)$ -submatrices B de la matriz A . Por hipótesis del problema, $(\det B)^2$ es igual a 0 ó a 1, con la particularidad de que $(\det B)^2 = 1$ cuando y sólo cuando las columnas de la matriz B corresponden a la base del matroide M . Es fácil ver que la matriz de representación del matroide en la fig. 8.10 tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y es localmente unimodular. De que

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

se deduce que el número de bases en el matroide M es igual a $\det A \cdot A^T = 21$.

8.225. Este admirable resultado fue obtenido por Tutte (véase Tutte W.T. Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 88, 144—174; Seymour P. D. J. Comb. Theory, 1979, 26 B, 159—173).

8.230. Brylawski T. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, 203, 1—44.

8.231. Esta caracterización constructiva de los matroides unimodulares ha sido empleada para desarrollar algoritmos polinomiales que ayudan a determinar si una matriz es totalmente unimodular, lo que es de gran importancia para los problemas de optimización de números enteros. Seymour P. D. J. Comb. Theory, 1980, 28 B, 305—360.

8.232. Tutte W. T. Trans. Amer. Math. Soc., 1959, 90, 527—552.

8.234. El diagrama refleja correctamente las relaciones entre las clases de matroides. Al punto x se le puede poner en correspondencia, por ejemplo, el matroide R_{10} ; al punto y , el matroide de Fano Φ ; a z , el matroide homogéneo $U_{2,4}$; a u , un matroide cíclico del grafo K_5 o $K_{3,3}$; a v , un matroide de cortes del grafo completo K_5 o $K_{3,3}$; a w , el matroide de Vamos, el «no de Pappos» o el «no desarguesana».

8.239. Brualdi R. A., Dinolt G. W. J. Comb. Theory, 1972, 12, 268—286.

8.241. Brualdi R. A., Dinolt G. W. J. Comb. Theory, 1972, 12, 268—286.

8.243. Perfect H. J. Math. Analysis Appl., 1968, 96—111; Ingleton A. W.,

Piff M. J. J. Comb. Theory, 1973, 15, 51—68.

8.245. La afirmación inversa no es cierta, puesto que el matroide cíclico del grafo en la fig. 8.2 está ordenado por la base, pero no transversal.

§ 4. Problemas mixtos en los matroides

8.251—8.254. Hausmann D., Korte B. — in "Spe. Top. Appl. Math. Funct. Anal. Numer. Anal. and Optimiz. Proc. Semin., Bonn, 1979". Amsterdam e. a. 1980, 196—211.

8.256—8.259. Minty G. J. J. Math. and Mech., 1966, 15, 485—520.

8.260. Representétese $P(M; \lambda)$ en forma de la suma

$$\sum_{A \subseteq S \setminus e} (-1)^{|A|} \lambda^{r(S) - r(A)} + \sum_{e \in A \subset S} (-1)^{|A|} \lambda^{r(S) - r(A)}$$

y hágase uso de las correlaciones para las funciones de rango.

8.261. La hipótesis del problema es equivalente al hecho de que no se pueden colorar de forma regular los vértices de un grafo que contenga por lo menos un bucle.

8.263. a) $P(\Phi; \lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$;

b) $P(M; \lambda) = \prod_{\tau=0}^r (\lambda - q\tau)$;

c) $P(M; \lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - n + 1)$;

d) $P(U_{2,4}; \lambda) = \lambda^2 - n\lambda + (n - 1)$, $n \geq 2$.

8.264. $\chi(\Phi) = 5$.

8.274. Las relaciones a) — c) se obtienen por cálculo directo. Hágase uso del resultado del problema 8.272 para demostrar la relación f).

8.275. Este notable hecho fue demostrado por primera vez por T. Brylawski [Brylawski T. — Trans. Amer. Math. Soc., 1972, No 171, p. 235—282].

8.281. El método de demostración consiste en mostrar que cualquier grafo G sin puentes puede representarse como una unión de tres grafos eulerianos G_1, G_2, G_3 y esto es equivalente, como es fácil de ver, a que G tiene el $(Z_2 \times Z_2 \times Z_2)$ — flujo [Jaeger F. — Fifth British Comb. Conf., 1976, p. 373—379].

8.282. Se puede mostrar que $P(M^*(P_{10}); \lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \times (\lambda - 3)(\lambda - 4)(\lambda^2 - 5\lambda + 10)$. De aquí, en virtud del problema 8.280, P_{10} no tiene el 4-flujo.

8.283. Es una hipótesis abierta de Tutte. Si se demuestra, el grafo de Peterson se hace, en virtud del problema 8.282, grafo mínimo, para el cual no existen los n -flujos cuando $n < 5$.

8.284. Es una hipótesis abierta de Tutte conocida en la literatura como versión fuerte de la hipótesis de Tutte sobre el 4-flujo (Tutte W.T. — In: Combinatorial Math. and it's applications. Univ. of North Carolina, 1969, p. 553—564).

BIBLIOGRAFÍA

1. K. A. Ribnikov. Análisis combinatorio. Editorial Mir. Moscú, 1988.
2. G. Birkhoff, T. Vartec, Modern applied algebra. New York, 1970.
3. И. Я. Виленин. Комбинаторика. — М.: Наука, 1969
(N. Ya. Vilenkin. Combinatoria.)
4. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Сборник задач по дискретной математике. — М.: Наука, 1977
(G. P. Gavrilov, A. A. Sapozhenko. Problemas de las matemáticas discretas.)
5. A. Kaufmann. Introduction a la combinatorique en vue des applications. Paris, Dunod, 1968.
6. G. J. Ryser. Combinatorial Mathematics. New York, 1963.
7. J. Riordan. An introduction to combinatorial analysis. Wiley, New York, 1958.
8. G. Birkhoff. Lattice Theory. Providence, Rhode Island, 1967.
9. В. И. Сачков. Комбинаторные проблемы дискретной математики. — М.: Наука, 1977
(V. N. Sachkov. Problemas combinatorios de las matemáticas discretas.)
10. Л. А. Скормяков. Элементы теории структур. — М.: Наука, 1982
(L. A. Skorniakov. Elementos de la teoría de estructuras.)
11. R. Wilson. Introduction to graph theory. Oliver and Boyd Edinburgh, 1972.
12. F. Harary. Graph Theory. Addison — Wesley Publishing Company. 1969.
13. F. Harary, E. Palmer. Graphical enumeration. New York, Academic Press, 1973.
14. M. Hall. Combinatorial Theory. Blaisdell Publ. Company. Waltham, Toronto, 1967.
15. P. Erdős, J. Spencer. Probabilistic methods in combinatorics. Budapest, Akademiai Kiado, 1974.
16. Denes J., Keedwell A. D. Latin squares and their applications. Budapest, Akademiai Kiado, 1974.
17. Lovász L. Combinatorial problems and exercises. Budapest, Akademiai Kiado, 1979.
18. M. Aigner. Combinatorial Theory. Berlin, Springer — Verlag, 1979.
19. O. Ore. Theory of graphs. Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1962.
20. L. Ford, D. Fulkerson. Flows in networks. Princeton Univ. Press, New Jersey, 1962.
21. В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, Н. К. Кравцов. Многогранники, графы, оптимизация. — М.: Наука, 1981
(V. A. Emelichev, M. M. Kovalev, N. K. Kravtsov. Poliedros, grafos, optimización.)
22. M. Swamy, K. Thulasiraman. Graphs, Networks and Algorithms. John Wiley & Sons, Inc., 1981.
23. А. А. Зыков. Теория конечных графов. — М.: Наука, 1969
(A. A. Zykov. Teoría de los grafos finitos.)
24. L. Mirsky. Transversal theory. New-York, 1971.

25. L. Lovász, M. Plummer. *Matching Theory*. Budapest, Akademiai Kiado, 1986.
26. G. Grätzer. *General lattice theory*. Akademie — Verlag, Berlin, 1978.
27. J. Riordan. *Combinatorial Identities*. John Wiley & Sons, Inc, New York, 1968.
28. G. Andrews. *The Theory of partitions*. Addison—Wesley Publ. Comp., Ins., 1976.
29. D. Welsh. *Matroid theory*, New York, Academic Press, 1976.
30. B. Bollobas. *Extremal Graph Theory*. London, Academic Press, 1978.
31. R. Graham, B. Rothschild, J. Spencer. *Ramsey Theory*. New York, Wiley, 1980.
32. H. Minc. *Permanents*. Addison — Wesley Publ. Comp., Inc., 1978.
33. В. Н. Сачков. Вероятностные методы в комбинаторном анализе. — М.: Наука, 1978
(V. N. Sachkov. Métodos probabilísticos en el análisis combinatorio.)
34. В. Н. Сачков. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1982
(V. N. Sachkov. Introducción a los métodos combinatorios de las matemáticas discretas.)
35. В. И. Баранов, Б. С. Стечкин. Экстремальные комбинаторные задачи и их применение. М.: Наука, 1988
(V. I. Baránov, B. S. Stechkin. Problemas combinatorios extremales y su aplicación.)
36. В. Е. Тараканов. Комбинаторные задачи и (0,1)-матрицы. М.: Наука, 1985 (V. E. Tarakánov. Problemas combinatorios y (0,1)-matrices.)
37. R. Graham. *Rudiments of Ramsey Theory*. Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1981.
38. F. Kerteszi. *Introduction to finite geometry*. Budapest, Akademiai Kiado, 1976.
39. N. Christofides. *Graph Theory. An algorithmic approach*. New York, Academic Press, 1975.
40. R. Randow. *Introduction to the theory of matroids*. — Lect. Notes in Econ. and Math. Syst., 1975, v. 109.
41. E. Minieka. *Optimization algorithms for networks and graphs*. Marcel Dekker, Inc., New-York, 1978.
42. Ch. Papadimitrion, K. Steiglitz. *Combinatorial Optimization. Algorithms and Complexity*. Prentice Hall, New Jersey, 1982.
43. E. Lawler. *Optimization: networks and matroids*. New York, 1976.
44. V. Bryant, H. Perfect. *Independence theory in combinatorics*. London, Chapman and Hall, 1980.
45. J. Kung. *A source book in matroid theory*. Boston. Birkhäuser, 1986.
46. *Classic Papers in Combinatorics* (Ed. by I. Gessel, G—C. Rota) Boston, Birkhäuser, 1987.
47. *Theory of matroids* (ed. by N. White). Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1986.
48. *Combinatorial geometries* (ed. by N. White). Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1987.
49. *Combinatorial geometries: Advanced Theory* (ed. by N. White). Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1988.
50. A. Reeski. *Matroid theory and it's applications*. Budapest, Akademiai Kiado, 1988.

INDICE ALFABÉTICO DE MATERIAS

- Algebra de incidencia 144
 Algoritmo ávido 168
 — polinomial 203
 Altura de un vértice 90
 Análogo de vértice del teorema de Menger 126
 — matricial del teorema de König 126
 Anchura de un conjunto parcialmente ordenado 120
 Anticadena 101
 Aplicación débil 185
 — fuerte 182
 — isótona 118
 — simple 186
 — — conservadora de rango 186
 Árbol 77
 — radical 77
 Arco de un plano proyectivo 93
 Arista de un grafo 75
 — múltiple 75
 Átomo 120
 Automorfismo de un conjunto parcialmente ordenado 44
 — — — cuadrado latino 56

 Base de un matroide 158
 Belliano 122, 130
 Bloque-esquema 67
 — incompleto equilibrado (BIB-esquema) 68
 — parcialmente equilibrado con m tipos de conexiones (PBIB(m)-esquema) 68
 — simétrico 69
 Booleano 121
 Bosque 77
 Bucle (lazo) de un matroide 171

 Cadena 78, 119
 — hamiltoniana 76
 — máxima 119
 — puntual 139
 — saturada 119
 — simple 76
 Capacidad de un arco 124
 Cápsula convexa de los puntos 71
 Ciclo de un matroide 158
 — euleriano 76
 — fundamental 164
 Clique de un grafo 76
 Cociclo de un matroide 174
 Cociente de un matroide (cociente inglés) 184

 Coeficiente binomial de Gauss 152
 Colineación 95
 Combinación afin 160
 — de pares 99, 125
 — lineal de vectores 159
 Complemento de un elemento 136
 — — — grafo 77
 — relativo de un elemento 137
 Componente de conexión 76
 Condición de recubrimiento 133
 — reforzada de Hordan-Hölder 138
 Cónica (curva de segundo orden) 92, 97
 Conjunto bien ordenado 123
 — característico de un matroide 195
 — dependiente de manera afin 160
 — de vértices (A, B)-separador 125
 — engendrador de un matroide 167
 — independiente de manera afin 160
 — parcialmente ordenado 44, 118
 — — — totalmente finito 120
 — transitivo 39
 Constantes geométricas extremales 115
 Convolución de sucesiones 23
 Coordinatización 187
 Corte de una red 124
 Cota superior exacta 128
 — inferior exacta 128
 Cuadrado latino 56
 Cubo de Boole 81
 Curva hiperbólica 93
 — parabólica 93
 — elíptica 94

 Desigualdad de Yamamoto-Lubel-Meshalkin 121
 Diagrama de Hasse 119
 Diamante 131
 Dimensión de un grafo 75
 Distancia entre vértices 83
 Distribución de los vértices de un grafo en grados 76

 Ecuación de Polya 89
 Elemento máximo 118
 — mínimo 118
 Elementos de un bloque-esquema 67
 Elevador (lift) de un matroide 184
 Epiformismo 82
 Esqueleto 77
 Esquema resoluble 60
 Estructura de incidencia 141

- Factor de un matroide 184
 Filtro modular 181
 Flat (superficie) 166
 Flujo estacionario de una magnitud 124
 Fórmula de Cayley (primera) 87
 — — Clark (tercera)
 — — inversión de Moebius 147
 — — Meir-Moon 90
 — — Renyi 87
 — — Waring 27
 — — Weisner 150
 Fuente 124
 Función de corraño 174
 — — incidencia 143
 — — Kronecker 145
 — — Moebius 145
 — — rango 133
 — generatriz 23
 — modular 155
 — submodular 155
 Geometría asociada a un matroide 187
 — combinatoria (geometría) 166
 — de Wille 171
 — proyectiva 142
 Grado de un vértice 76, 99
 Grafo 75
 — bipartido 76, 125
 — — completo 76
 — completo 76
 — de entrelazamiento 61
 — — Peterson 207
 — finito 75
 — isomorfo 77
 — monocromático 50
 — no orientado 75
 — orientado 75
 — simple 75
 Hammoide 201
 — rígido 201
 Hiperarista 98
 Hipergrafo 98
 — dual 101
 Hiperplano 167
 Hipótesis de Berge 108
 — — Dirac 100
 — — Erdős-Sos 101
 Homomorfismo de un retículo 131
 Identidades de Morgan 137
 Incremento de un matroide 182
 — libre de un matroide 182
 Índice cíclico de un grupo 39
 Infimo 128
 Intervalo 120
 Intervalos transpuestos 138
 Invariante 205
 — de Tutte-Grothendiek 205
 Inventario de un conjunto 43
 Inversión de Moebius 143
 Involutividad 139
 Lema de Bernsaid 42
 Longitud de una cadena 101, 121
 Matroide 158
 — afin 160
 — cíclico 164
 — cográfico 172
 — conexo 174
 — de Fano 162
 — — los cortes 172
 — — recubrimiento 170
 — — Vamos 162
 — dual 174
 — gráfico 164
 — homogéneo 159
 — ordenado por bases 201
 — orientable 194
 — transversal 168
 — unimodular 187
 — vectorial 160
 Menor de un matroide 177
 Método de división en sucesiones de Morgan 26
 — de inclusión y exclusión 45
 Métodos geométricos 75
 — lógicos 45
 Multigrafo 75
 Número de Bell 30
 — — Galois 152
 — — Stirling 33, 36, 154
 — pentagonal 16
 Oráculo 202
 — polinomialmente reducible 203
 Orden de un plano 92
 Operador de clausura 131
 Par comparable de elementos 118
 Paréntesis de una coordinatización 195
 Partición 14
 Particiones ordenadas 109
 — ortogonales 81
 Pentágono (diamante) 131
 Permanente de una matriz 52
 Peso de la clase de equivalencia 39
 — — un conjunto 168
 — — elemento 168
 Plano de Galois 95
 — finito 92
 — proyectivo de Desargue 92
 Polinomio característico de un conjunto parcialmente ordenado 152
 — cromático 205
 — — de un grafo 152
 — — Bell 30

- Polinomio característico Stirling 33
 — — Tutte 206
 Pregeometría 181
 Principio de alojamiento completo 111
 — — Dirichlet 109
 — — los cajones 110
 Problema de empaques 104
 — — Erdős-Katona 105
 — — Turán 104
 — — van der Waerden 71
 Problemas enumerativos en los grafos 85
 — extremales 108
 Producto directo de conjuntos parcialmente ordenados 121
 — — — grupos 41
 — — — las matrices 52
 — — — retículos 130

 Rango de un subconjunto 140
 — lineal de un conjunto 187
 Recta externa 93
 — impropia 93
 — ordinaria 93
 Rectángulo latino 56
 Relación de incidencia 142
 — — orden 118
 Representación de Cayley 40
 — — un matroide 168
 Retículo 128
 — con complementos 136
 — completo 130
 — de Boole 138
 — desarrollable 141
 — geométrico 139
 — modular 132
 — semimodular 133
 Retículos isomorfos 131

 Salida 124
 Separadores de un matroide 179
 Símplice 71

 Sicigia 195
 Sistema de conjuntos 98
 — — grupos de pares 62
 — — representantes de los conjuntos 48
 — — ternas de Kirkman 61
 — — — Steiner 60
 Sombra 103
 Subgeometría 176
 Subgrafo 75
 — de esqueleto 77
 Subplano baeriano 95
 Subpregeometría 181
 Superficie 166
 Suposición de Erdős-Frankl
 Supremo 128

 Tangente 93
 Teorema de Crapo 148
 — — Desargue 92
 — — desarrollo 185
 — — Dilworth 123
 — — Hall 48
 — — Ramsey 50
 — — Rota 148
 — — Singer 96
 — — Stanley 146
 — — Tutte 193
 — sobre el flujo 124
 Teoría de Polya 39, 40
 Transformación proyectiva 95
 Transversal 125
 — parcial 167
 Traza de una matriz 53
 Truncamiento de un matroide 184

 Unión de los grafos 77

 Vector índice de un grupo de pares 62
 Vertedero 124
 Vértice de un grafo 75
 Vértices A-conexos 172