CAPITULO IV

CAMPO POTENCIAL

§ 18. INDICIOS DE LA POTENCIALIDAD DEL CAMPO

Definición. Campo vectorial $\boldsymbol{a}(M) = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}$ dado en el dominio espacial V se llama ***potencial***, si existe tal función escalar $\varphi(M)$ que en todos los puntos del dominio V se cumple la igualdad

$$\boldsymbol{a}(M) = \operatorname{grad} \varphi(M). \tag{1}$$

Función $\varphi(M) = \varphi(x, y, z)$ que satisface la igualdad (1) en el dominio V se llama *potencial* (o la función potencial) del campo vectorial $\boldsymbol{a}$.

Proporción (1) es equivalente a las tres igualdades escalares

$$P(x, y, z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad Q(x, y, z) = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad R(x, y, z) = \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{2}$$

El potencial del campo se determina no unívocamente, con la precisión hasta el sumando constante.

Observación. Para los campos de fuerzas el potencial suele llamarse la función $-\varphi(M)$.

Ejemplo 1. (El campo electroestático de la carga puntual). Mostrar que el campo de la intensidad eléctrica $\boldsymbol{E}$ creado por la carga puntual q que está colocada en el origen de coordenadas:

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{r^3}\boldsymbol{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

es el campo potencial.

Solución. El problema se plantea del modo siguiente: mostrar que existe la función $\varphi(x, y, z)$ tal que se cumplen las proporciones (2).

En nuestro caso tenemos

$$P(x, y, z) = \frac{qx}{r^3}, \quad Q(x, y, z) = \frac{qy}{r^3}, \quad R(x, y, z) = \frac{qz}{r^3}.$$

Puesto que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$$

y por analogía

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{z}{r^3},$$

entonces la función

$$\varphi(x, y, z)=-\frac{q}{r}=-\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

es el potencial del campo dado:

$$\operatorname{grad}\left(-\frac{q}{r}\right)=E.$$

En este ejemplo el origen de coordenadas, donde está concentrada la carga q es el punto especial del campo $\boldsymbol{E}$.

CRITERIO DE LA POTENCIALIDAD DEL CAMPO VECTORIAL

Teorema 1. *Para que el campo vectorial* $\boldsymbol{a}(M)$ *prefijado en el dominio monoconexo* V, *sea de potencial es necesario y suficiente que en cada punto del dominio* V *se cumpla la condición*

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}=0. \tag{3}$$

En otras palabras, para que el campo vectorial dado en el dominio monoconexo sea de potencial, es necesario y suficiente que el campo sea irrotacional.

El potencial $\varphi(x, y, z)$ del campo vectorial

$$\boldsymbol{a}=P(x, y, z)\,\boldsymbol{i}+Q(x, y, z)\,\boldsymbol{j}+R(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$$

se determina por la fórmula

$$\varphi(x, y, z)=\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz, \tag{4}$$

donde (x_0, y_0, z_0) es cierto punto fijo del campo y (x, y, z) es un punto corriente arbitrario.

Ejemplo 2. Mostrar que el campo del vector

$$\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$$

es de potencial.

Solución. Las coordenadas $P=x^2$, $Q=y^2$, $R=z^2$ del vector $\boldsymbol{a}$ son las funciones infinitamente diferenciables en todo el espacio, así que $\boldsymbol{a}$ es el vector infinitamente diferenciable determinado en todo el espacio tridimensional. Tenemos

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial}{\partial y} z^2-\frac{\partial}{\partial z} y^2\right)\boldsymbol{i}+$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial z} x^2-\frac{\partial}{\partial x} z^2\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x} y^2-\frac{\partial}{\partial y} x^2\right)\boldsymbol{k}=0.$$

En virtud del teorema 1 el campo del vector $\boldsymbol{a}$ es de potencial. Se ve fácilmente que la función

$$\varphi(x, y, z)=\frac{x^3+y^3+z^3}{3}+C,$$

donde C, la constante arbitraria, es el potencial del campo dado.

Verificar serán o no de potencial los siguientes campos vectoriales:

217. $\boldsymbol{a} = xz\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$.

218. $\boldsymbol{a} = (2xy + z^2)\,\boldsymbol{i} + (2yz + x^2)\,\boldsymbol{j} + (2xz + y^2)\,\boldsymbol{k}$.

219. $\boldsymbol{a} = \frac{1}{3}(x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + xz^3\boldsymbol{k})$.

220. $\boldsymbol{a} = yz\cos xy\cdot\boldsymbol{i} + xz\cos xy\cdot\boldsymbol{j} + \operatorname{sen} xy\cdot\boldsymbol{k}$.

221. $\boldsymbol{a} = \ln(1 + z^2)\,\boldsymbol{i} + \ln(1 + x^2)\,\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$.

222. $\boldsymbol{a} = \left(\frac{z}{x^2}+\frac{1}{y}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{x}{y^2}+\frac{1}{z}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{y}{z^2}+\frac{1}{x}\right)\boldsymbol{k}$.

223. $\boldsymbol{H} = \frac{2I}{r_2}(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}),\ r^2 = x^2 + y^2,\ r \neq 0$.

224. Demostrar que el campo $\boldsymbol{a} = f(r)\cdot\boldsymbol{r}$, donde $f(r)$ es la función diferenciable, es de potencial.

225. Mostrar que en el campo de potencial $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\varphi$ las líneas vectoriales son perpendiculares a la superficie del nivel de la función φ.

§ 19. CALCULO DE LA INTEGRAL LINEAL EN EL CAMPO POTENCIAL

Teorema. *La integral lineal en el campo de potencial $\boldsymbol{a}(M)$ es igual a la diferencia de valores del potencial $\varphi(M)$ del campo en los puntos final y inicial de la vía de integración*:

$$\int_{M_1}^{M_2}(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \varphi(M_2) - \varphi(M_1). \tag{1}$$

Ejemplo 1. Calcular la integral lineal en el campo del vector

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

a lo largo del segmento de la recta limitado por los puntos $M_1(-1, 0, 3)$ y $M_2(2, -1, 0)$.

Solución. Mostraremos que el campo del vector dado es de potencial. Claro está que

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Se puede convencer fácilmente de que el potencial de este campo

$$\varphi(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + C.$$

Empleando la fórmula (1), obtendremos

$$\int_{M_1}^{M_2} (a, dr) = \varphi(2, -1, 0) - \varphi(-1, 0, 3) = \frac{5}{2} - 5 = -\frac{5}{2}.$$

Señalemos que no es esencial con qué línea se unen los puntos M_1 y M_2; en cualquier caso para los M_1 y M_2 fijos la integral

$$\int_{M_1}^{M_2} (a, dr) = \int_{M_1}^{M_2} x\,dx + y\,dy + z\,\partial z$$

tiene el mismo valor.

CALCULO DEL POTENCIAL DEL CAMPO EN LAS COORDENADAS CARTESIANAS

Se puede aplicar la fórmula

$$\varphi(x, y, z) = \\ = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz \qquad (2)$$

para hallar la función potencial $\varphi(M) = \varphi(x, y, z)$ del campo de potencial prefijado

$$\boldsymbol{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\,\boldsymbol{k}.$$

Para esto fijamos el punto inicial $M_0(x_0, y_0, z_0)$ y unímosla con el punto corriente $M(x, y, z)$ por medio de la quebrada M_0ABM los brazos de la cual son paralelos a los ejes de coordenadas, precisamente, a $M_0A \parallel Ox$, $AB \parallel Oy$, $BM \parallel Oz$ (véase la fig. 34). Entonces la fórmula (2) obtiene la forma de

$$\varphi(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)\,dy + \\ + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)\,dz. \qquad (3)$$

Ejemplo 2. Demostrar que el campo vectorial

$$a = (y + z)\,\boldsymbol{i} + (x + z)\,\boldsymbol{j} + (x + y)\,\boldsymbol{k}$$

es de potencial y hallar su potencial.

Solución. 1$^{\text{er}}$ *procedimiento*. La condición necesaria y suficiente de la potencialidad del campo $\boldsymbol{a}$ (M) es la igualdad a 0 de rot $\boldsymbol{a}$ (M). En nuestro caso

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = (1-1)\,\boldsymbol{i} + (1-1)\,\boldsymbol{j} + (1-1)\,\boldsymbol{k} = 0,$$

es decir, el campo es de potencial. El potencial de este campo se halla con ayuda de la fórmula (3). Tomamos por el punto inicial

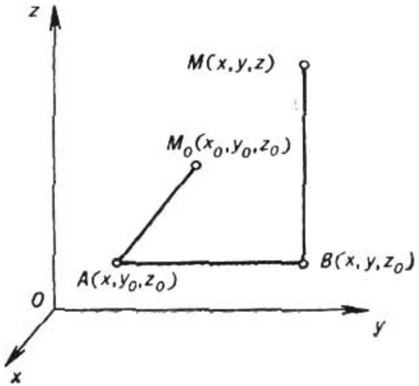

FIG. 34

fijo el origen de coordenadas O (0, 0, 0). Entonces obtendremos

$$\varphi(x, y, z) = \int_0^x (0+0)\,dx + \int_0^y (x+0)\,dy + \int_0^z (x+y)\,dz = xy + xz + yz.$$

Así pues

$$\varphi(x, y, z) = xy + xz + yz + C,$$

donde C es la constante arbitraria.

2° *procedimiento*. Según la definición el potencial $\varphi(x, y, z)$ es tal función escalar, para la cual grad $\varphi = \boldsymbol{a}$. Esta igualdad vectorial es equivalente a las tres igualdades escalares:

$$\frac{\partial}{\partial x} = y + x, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=x+z, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=x+y. \qquad (6)$$

Integrando (4) por x, obtendremos

$$\varphi(x, y, z)=\int_0^x (y+z)\,dx=xy+xz+f(y, z), \qquad (7)$$

donde $f(y, z)$ es la función diferenciable arbitraria de y y de z. Diferenciando por y ambos miembros de (7) y teniendo en cuenta (5), obtendremos la proporción para hallar la función indefinida de hasta el momento $f(y, z)$. Tenemos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=x+\frac{\partial f}{\partial y}$$

o

$$x+z=x+\frac{\partial f}{\partial y},$$

de donde

$$z=\frac{\partial f}{\partial y}. \qquad (8)$$

Al integrar (8) por y obtendremos

$$f(y, z)=\int_0^y z\,dy=zy+F(z) \qquad (9)$$

donde $F(z)$ es la función hasta el momento indefinida de z. Sustituyendo (9) en (7), obtendremos

$$\varphi(x\ \ y, z) = xy + xz + zy + F(z).$$

Diferenciando la última igualdad por z y teniendo en cuenta la proporción (6), obtenemos la ecuación para hallar $F(z)$:

$$x+y=x+y+\frac{dF}{dz}.$$

De aquí $\frac{dF}{dz}=0$, pues $F(z)\equiv C=\text{const}$.

Así

$$\varphi(x, y, z) = xy + yz + zx + C.$$

3° procedimiento. De acuerdo de la definición de la integral completa de la función $\varphi(x, y, z)$ tenemos

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz.$$

Sustituyendo aquí en vez de las derivadas parciales $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ sus expresiones de (4), (5), (6) tenemos

$$d\varphi = (y + z)\,dx + (x + z)\,dy + (x + y)\,dz$$

o, después de las transformaciones no complicadas, obtendremos

$$d\varphi = (y\,dx + x\,dy) + (z\,dx + x\,dz) + (y\,dz + z\,dy) =$$
$$= d\,(xy) + d\,(xz) + d\,(yz) = d\,(xy + xz + yz).$$

Pues

$$d\varphi = d\,(xy + yz + zx).$$

De aquí se desprende que

$$\varphi\,(x,\ y,\ z) = xy + yz + zx + C.$$

En los problemas siguientes determinar la potencialidad de los campos vectoriales dados $\boldsymbol{a}\,(M)$ y hallar sus potenciales $q\,(M)$:

226. $\boldsymbol{a} = 2xyz\boldsymbol{i} + x^2z\boldsymbol{j} + x^2y\boldsymbol{k}$.

227. $\boldsymbol{a} = (yz + 1)\,\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$.

228. $\boldsymbol{a} = (2xy + z)\,\boldsymbol{i} + (x^2 - 2y)\,\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$.

229. $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{x+y+z}$

230. $\boldsymbol{a} = \frac{yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}}{1 + x^2y^2z^2}$.

231. $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$.

232. $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}$.

233. $\boldsymbol{a} = r\cdot\boldsymbol{r}$.

En aquel caso, cuando el dominio Ω es estelar con el centro en el origen de coordenadas O (0, 0, 0)*) el potencial $\varphi\,(M)$ del campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\,(M)$ en el punto $M\,(x,\ y,\ z)$ se puede hallar por la

---

*) El dominio Ω se llama estelar respecto al punto O, perteneciente a Ω, si el segmento que une todo punto del dominio Ω con el punto O se encuentra en dicho dominio. Por ejemplo, en un plano los dominios estelares lo serán el mismo plano, el paralelogramo, el círculo; en el espacio tridimensional serán el mismo espacio, paralelepípado, la esfera.

fórmula

$$\varphi(M)=\int_0^1 (\boldsymbol{a}(M'),\ \boldsymbol{r}(M)\,dt+C, \qquad C=\text{const}, \tag{10}$$

donde $\boldsymbol{r}(M)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ es el radio vector del punto $M(x, y, z)$ y el punto $M'(tx, ty, tz)$ para $0 \leqslant t \leqslant 1$ recorre el tramo OM de la recta que pasa por los puntos O y M.

Ejemplo 3. Hallar el potencial del campo vectorial

$$\boldsymbol{a}=yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}.$$

Solución. Se puede ver fácilmente que rot $\boldsymbol{a} \equiv 0$, es decir, el campo vectorial dado es potencial. Este campo está determinado en todo el espacio tridimensional que es estelar con el centro en el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$, por lo tanto para hallar su potencial apliquemos la fórmula (10). Puesto que en el caso dado

$$\boldsymbol{a}(M')=\boldsymbol{a}(tx,\ ty,\ tr)=t^2yz\boldsymbol{i}+t^2xz\boldsymbol{j}+t^2xy\boldsymbol{k},$$

entonces el producto escalar de los vectores $\boldsymbol{a}(M')$ y $\boldsymbol{r}(M)$ es igual a

$$(\boldsymbol{a}(M'),\ \boldsymbol{r}(M))=t^2(xyz+xyz+xyz)=3t^2xyz.$$

El potencial buscado

$$\varphi(M)=\int_0^1 (\boldsymbol{a}(M'),\quad \boldsymbol{r}(M))\,dt=xyz\int_0^1 3t^2\,dt+C=xyz+C.$$

Pués

$$\varphi(M)=xyz+C.$$

Aplicando la fórmula (10), hallar los potenciales de los siguientes campos vectoriales:

234. $\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}+\gamma\boldsymbol{k}$, donde α, β, γ son constantes.

235. $\boldsymbol{a}=(y+z)\,\boldsymbol{i}+(x+z)\,\boldsymbol{j}+(y+x)\,\boldsymbol{k}$.

236. $\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+e^z\boldsymbol{k}$.

237. $\boldsymbol{a}=e^x \operatorname{sen} y\cdot\boldsymbol{i}+e^z\cos y\cdot\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

CAPITULO V

OPERADOR DE HAMILTON. OPERACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN OPERADOR DE LAPLACE

§ 20. OPERADOR DE HAMILTON «NABLA»

Muchas operaciones del análisis vectorial pueden ser escritas en la forma abreviada y cómoda para los cálculos mediante el operador simbólico de Hamilton «nabla»:

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1}$$

En este operador se unen las propiedades diferenciales y vectoriales. Vamos a entender la multiplicación formal $\frac{\partial}{\partial x}$ por la función $f(x, y, z)$ como la diferenciación particular $\frac{\partial f}{\partial x}$.

En los límites del álgebra vectorial las operaciones formales con el operador «nabla» vamos a efectuarlas de tal manera como si fuera el operador el mismo vector. Utilizando este formalismo obtenemos lo siguiente.

1. Si $u = u(x, y, z)$ es la función escalar diferenciable, entonces según la regla de multiplicación del vector por escalar tenemos

$$\nabla u = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \operatorname{grad} u. \tag{2}$$

2. Si $\boldsymbol{a} = P(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$ donde P, Q, R son las funciones diferenciables, entonces de acuerdo con la fórmula conocida para el producto escalar tenemos

$$(\nabla, \boldsymbol{a}) = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},\ P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \boldsymbol{a}, \tag{3}$$

en particular, $(\nabla, \boldsymbol{c}) = 0$ ($\boldsymbol{c}$ es un vector constante).

3. Si $\boldsymbol{a} = P(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$, entonces

$$[\nabla, \boldsymbol{a}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \boldsymbol{a}, \tag{4}$$

en particular, $(\nabla, \boldsymbol{c}) = 0$ ($\boldsymbol{c}$ es un vector constante).

Al continuar efectuando el formalismo de operaciones con ∇ como con el vector, obtenemos de la propiedad distributiva para el producto escalar y vectorial lo siguiente

$$(\nabla, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = (\nabla, \boldsymbol{a}) + (\nabla, \boldsymbol{b}), \tag{5}$$

es decir $\operatorname{div}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \operatorname{div} \boldsymbol{a} + \operatorname{div} \boldsymbol{b}$,

$$[\nabla, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}] = [\nabla, \boldsymbol{a}] + [\nabla, \boldsymbol{b}], \tag{6}$$

es decir $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{a} + \operatorname{rot} \boldsymbol{b}$.

Las fórmulas (5) y (6) se pueden interpretarse también como la demostración de las propiedades diferenciales del operador «nabla» (∇ es el operador lineal diferencial).

Utilizando el formalismo de las operaciones con el operador ∇ como con el vector conviene tener en cuenta que ∇ *no es el vector*, él no tiene ni el valor, ni dirección y de modo que, por ejemplo, el vector $[\nabla, \boldsymbol{a}]$ no será en general perpendicular al vector $\boldsymbol{a}$ (sin embargo, para el campo plano $\boldsymbol{a} = P(x, y)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y)\,\boldsymbol{j}$ el vector

$$[\nabla, \boldsymbol{a}] = \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \boldsymbol{k}$$

será perpendicular al plano xOy, y lo que significa, al vector $\boldsymbol{a}$). Igualmente respecto al vector simbólico ∇ el concepto de colinealidad pierde el sentido. Por ejemplo, la expresión $[\nabla\varphi, \nabla\psi]$, donde φ y ψ son unas funciones escalares formalmente recuerda el producto vectorial de dos vectores colineales que siempre es igual a cero. Pero en un caso general este fenómeno no existe. En realidad, el vector $\nabla\varphi = \operatorname{grad} \varphi$ está dirigido por la normal a la superficie del nivel $\varphi = \text{const}$, y el vector $\nabla\psi = \operatorname{grad} \psi$ determina la normal a la superficie del nivel $\psi = \text{const}$ y estas normales en el caso general no obligatoriamente deben ser colineales (fig. 35). De otra parte, en todo campo escalar diferenciable φ tenemos $[\nabla\varphi, \nabla\varphi] = 0$. Estos ejemplos muestran que es menester emplear cuidadosamente el operador ∇.

Junto con la propiedad vectorial el operador de Hamilton «nabla» tiene la propiedad diferencial. Teniendo en cuenta la cualidad diferencial de ∇ *nos convenimos en considerar* que el operador ∇ influye sobre todas las magnitudes escritas tras él. En este sentido podemos decir que $(\nabla, \boldsymbol{a}) \neq (\boldsymbol{a}, \nabla)$. En realidad,

$$(\nabla, \boldsymbol{a}) = \operatorname{div} \boldsymbol{a},$$

al mismo tiempo

$$(\boldsymbol{a},\ \nabla) = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z}$$

es el operador **diferencial escalar.**

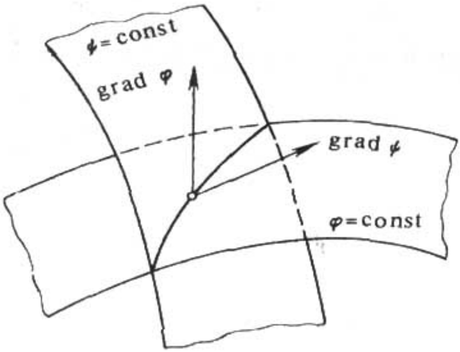

FIG. 35

Aplicando el operador ∇ al producto de magnitudes cualesquiera hay que tener en cuenta la regla de *diferenciación del producto*

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv) = v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x}.$$

De aquí se deduce que el operador «nabla» es menester aplicar por turno a cada multiplicador dejando invariables los multiplicadores *restantes y luego usar la suma de las expresiones* obtenidas. Con todo eso, vamos a tomar en consideración las reglas siguientes.

1°. Si el operador ∇ actúa sobre cualquier producto, entonces primeramente se toma en cuenta su carácter diferencial y luego sus propiedades vectoriales.

2°. Para subrayar el hecho de que «nabla» no influye en magnitud cualquiera que entra en composición de una fórmula compleja *esta magnitud se designa con el índice c* (const), el cual en el resultado definitivo puede ser quitado.

3°. Todas las magnitudes, en las cuales el operador «nabla» no ejerce la influencia, en el resultado definitivo se colocan delante de «nabla», es decir a la izquierda de él.

Ejemplo 1. Mostrar que

$$\operatorname{div}(u\boldsymbol{a}) = u \operatorname{div}\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a},\ \operatorname{grad} u).$$

es la función vectorial.

Solución. En la forma simbólica

$$\operatorname{div}(u\boldsymbol{a}) = (\nabla,\ u\boldsymbol{a}).$$

Al principio teniendo en cuenta el carácter diferencial de ∇, tenemos que escribir

$$(\nabla,\ u\boldsymbol{a}) = (\nabla,\ u_c\boldsymbol{a}) + (\nabla,\ u\boldsymbol{a}_c).$$

Examinando la expresión $(\nabla,\ u_c\boldsymbol{a})$ podemos el multiplicador constante u_c sacar fuera del signo «nabla» y como el escalar sacar fuera del signo del producto escalar lo que da

$$(\nabla,\ u_c\boldsymbol{a}) = (u_c\nabla,\ \boldsymbol{a}) = u_c\,(\nabla,\ \boldsymbol{a}) = u\,(\nabla,\ \boldsymbol{a})$$

(en la última etapa hemos omitido el índice c).

En la expresión $(\nabla,\ u\boldsymbol{a}_c)$ el operador ∇ actúa sólo en la función escalar u; por lo tanto podemos escribir que

$$(\nabla,\ u\boldsymbol{a}_c) = (\nabla u,\ \boldsymbol{a}_c) = (\boldsymbol{a}_c,\ \nabla u) = (\boldsymbol{a},\ \nabla u).$$

Como resultado obtenemos la fórmula

$$(\nabla,\ u\boldsymbol{a}) = u\,(\nabla,\ \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a},\ \nabla u)$$

o

$$\operatorname{div}(u\boldsymbol{a}) = u\operatorname{div}\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a},\ \operatorname{grad} u).$$

Ejemplo 2. Mostrar que
$\operatorname{rot}(u\boldsymbol{a}) = u\operatorname{rot}\boldsymbol{a} - [\boldsymbol{a},\ \operatorname{grad} u].$

Solución. En la forma simbólica

$$\operatorname{rot}(u\boldsymbol{a}) = [\nabla,\ u\boldsymbol{a}].$$

Teniendo en cuenta las propiedades diferenciales de ∇, escribimos primeramente

$$[\nabla,\ u\boldsymbol{a}] = [\nabla,\ u_c\boldsymbol{a}] + [\nabla,\ u\boldsymbol{a}_c]. \tag{7}$$

Luego en el primer sumando a la derecha sacamos el multiplicador escalar u_c fuera del signo ∇ y del producto vectorial lo que da

$$[\nabla,\ u_c\boldsymbol{a}] = u_c\,[\nabla,\ \boldsymbol{a}] = u\,[\nabla,\ \boldsymbol{a}].$$

En el segundo sumando en (7) referimos u al operador ∇ y cambiamos el orden de multiplicadores para que el vector $\boldsymbol{a}_c$, en el cual «nabla» no influye, se encuentre delante de ∇. Lo que da

$$[\nabla,\ u\boldsymbol{a}_c] = [\nabla u,\ \boldsymbol{a}_c] = -[\boldsymbol{a},\ \nabla u].$$

De tal modo

$$[\nabla,\ u_c\boldsymbol{a}] = u\,[\nabla,\ \boldsymbol{a}] - [\boldsymbol{a},\ \nabla u]$$

o

$$\operatorname{rot}(u\boldsymbol{a}) = u\operatorname{rot}\boldsymbol{a} - [\boldsymbol{a},\ \operatorname{grad} u].$$

Ejemplo 3. Aplicando el método simbólico hallar $\operatorname{div}[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$.

Solución. Tenemos

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}] = (\nabla,\ [\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]) = (\nabla,\ [\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_c]) + (\nabla,\ [\boldsymbol{a}_c,\ \boldsymbol{b}]). \tag{8}$$

Usando la propiedad de la permutación cíclica de multiplicadores en el producto mixto, transformamos las expresiones en el segundo miembro (8) de tal manera para que todas las magnitudes constantes resulten delante del operador ∇, mientras que las variables tras él. Es decir, obtenemos

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}] = ([\nabla,\ \boldsymbol{a}],\ \boldsymbol{b}_c] - (\nabla,\ [\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}_c]) =$$
$$= ([\nabla,\ \boldsymbol{a}],\ \boldsymbol{b}_c) - ([\nabla,\ \boldsymbol{b}],\ \boldsymbol{a}_c) = (\boldsymbol{b},\ [\nabla,\ \boldsymbol{a}]) -$$
$$- (\boldsymbol{a},\ [\nabla,\ \boldsymbol{b}]),$$

o sea $\operatorname{div}[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}] = (\boldsymbol{b},\ \operatorname{rot}\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a},\ \operatorname{rot}\boldsymbol{b})$.

Observación. Aplicando el método simbólico podemos evitar las transformaciones analíticas muy complicadas y obtenemos pronto el resultado definitivo. Pero, de otra parte, las diferentes transformaciones formales con el operador «nabla» es necesario efectuar con mucho cuidado, en el caso contrario son posibles, como hemos visto, unos errores muy graves. Por tanto, si no hay la seguridad completa en el resultado obtenido, conviene controlarlo *mediante el método analítico.*

238. Mostrar que

a) $\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2}$;

b) $\nabla f(u) = f'(u)\,\nabla u$.

239. Demostrar que el vector $[\nabla u,\ \nabla v]$ es solenoidal, si u y v son las funciones escalares diferenciables.

Utilizando el operador de Hamilton ∇, demostrar las siguientes igualdades:

240. a) $\operatorname{grad}(uv) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$;

b) $\operatorname{rot}[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}] = (\boldsymbol{b},\ \nabla)\,\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a},\ \nabla)\,\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a}$.

241. $\operatorname{rot}[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{r}] = 2\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}$ es un vector constante.

242. Demostrar que el vector $\boldsymbol{a} = u \operatorname{grad} v$ es ortogonal al $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$.

§ 21. OPERACIONES DIFERENCIALES DEL SEGUNDO ORDEN. OPERADOR DE LAPLACE

Operaciones diferenciales del segundo orden se obtienen de resultas de la aplicación doble del operador ∇ a los campos.

Sea que tenemos el campo escalar $u = u(M)$. En este campo el operador ∇ engendra el campo vectorial $\nabla u = \operatorname{grad} u$.

En el campo vectorial ∇u el operador ∇, aplicado reiteradamente al ∇u da el campo escalar

$$(\nabla,\ \nabla u) = \operatorname{div}\operatorname{grad} u \tag{1}$$

y el campo vectorial

$$[\nabla,\ \nabla u] = \operatorname{rot}\operatorname{grad} u. \tag{2}$$

Si está prefijado el campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$, entonces el operador ∇ engendra en él el campo escalar $(\nabla, \boldsymbol{a}) = \operatorname{div} \boldsymbol{a}$. En el campo escalar $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ el operador ∇ engendra el campo vectorial

$$\nabla(\nabla, \boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{a}. \tag{3}$$

En el campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ el operador ∇ engendra también el campo vectorial $[\nabla, \boldsymbol{a}] = \operatorname{rot} \boldsymbol{a}$. Aplicando a este campo otra vez el operador ∇ obtenemos el campo escalar

$$(\nabla, [\nabla, \boldsymbol{a}]) = \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} \tag{4}$$

y el campo vectorial

$$[\nabla, [\nabla, \boldsymbol{a}]] = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}. \tag{5}$$

Las fórmulas (1)—(5) determinan así llamadas **operaciones diferenciales del segundo orden.**

Ejemplo 1. Sea la función $u = u(x, y, z)$ tiene las derivadas parciales continuas hasta el segundo orden inclusive. Demostrar que

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0.$$

Solución. 1er *procedimiento.* Actuando formalmente obtenemos

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = [\nabla, \nabla u] = [\nabla, \nabla] u = 0,$$

puesto que $[\nabla, \nabla] = 0$ como el producto vectorial de dos «vectores» iguales.

2° *procedimiento.* Empleando las expresiones del gradiente y del rotor en las coordenadas cartesianas y tomando en consideración las condiciones dadas obtendremos

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \boldsymbol{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] \boldsymbol{j} +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] \boldsymbol{k} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial y}\right) \boldsymbol{i} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z}\right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}\right) \boldsymbol{k} = 0,$$

puesto que las derivadas mixtas en este caso son iguales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}.$$

Análogamente se demuestra que para el campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = P(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\,\boldsymbol{k},$$

las coordenadas P, Q, R del cual tienen las derivadas parciales continuas del segundo orden, obtenemos div rot $\boldsymbol{a} = 0$.

Prestemos especial atención a la operación diferencial del segundo orden div grad $u = (\nabla, \nabla u)$. Suponiendo que la función $u(x, y, z)$ tiene segundas derivadas parciales por x, y, y z, tenemos

$$(\nabla, \nabla u) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k},\ \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv \Delta u.$$

Entonces $(\nabla, \nabla u) = \Delta u$, donde el símbolo $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ se llama el *operador de Laplace*. Se puede representarlo como el producto escalar del operador de Hamilton ∇ sobre sí mismo, es decir,

$$\Delta = (\nabla, \nabla) = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Este operador juega un papel importante en la física matemática.

Estudiemos una operación más del segundo orden rot rot $\boldsymbol{a}$. Tenemos rot rot $\boldsymbol{a} = [\nabla, [\nabla, \boldsymbol{a}]]$. Apliquemos la fórmula para el producto vectorial doble escrita en la forma de $[\boldsymbol{A}, [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}]] = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}) - (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C}$. Sustituyendo en esta fórmula $\boldsymbol{A}$ en ∇, $\boldsymbol{B}$ en ∇, $\boldsymbol{C}$ en $\boldsymbol{a}$, obtendremos

$$[\nabla, [\nabla, \boldsymbol{a}]] = \nabla(\nabla, \boldsymbol{a}) - (\nabla, \nabla)\,\boldsymbol{a} = \nabla(\nabla, \boldsymbol{a}) - \Delta\boldsymbol{a}, \qquad (6)$$

es decir,

rot (rot $\boldsymbol{a}$) = grad div $\boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{a}$,

donde $\Delta\boldsymbol{a} = \Delta P\cdot\boldsymbol{i} + \Delta Q\cdot\boldsymbol{j} + \Delta R\cdot\boldsymbol{k}$.

Las operaciones diferenciales del segundo orden para mejor *claridad se puede representarlas en la tabla siguiente:*

	Campo escalar u	Campo vectorial $\boldsymbol{a}$	
	grad	div	rot
grad		grad div $\boldsymbol{a}$	
div	div grad $u=\Delta u$		div rot $\boldsymbol{a}=0$
rot	rot grad $u=0$		rot rot $\boldsymbol{a}=$ $=$ grad div $\boldsymbol{a}-\Delta\boldsymbol{a}$

Ejemplo 2. Las leyes de la teoría clásica del electromagnetismo se postulan en forma del sistema de ecuaciones de Maxwell.

En el caso más simple del medio no conductor, homogéneo e isotrópico siendo ausentes las cargas y corrientes este sistema tiene la forma de

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=[\nabla,\ \boldsymbol{H}], \tag{7}$$

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}=[\nabla,\ \boldsymbol{E}], \tag{8}$$

$$(\nabla,\ \boldsymbol{E})=0, \tag{9}$$

$$(\nabla,\ \boldsymbol{H})=0. \tag{10}$$

Aquí $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ son los vectores de la intensidad de los campos eléctrico y magnético; ε y μ son los coeficientes de la permeabilidad eléctrica y magnética (en nuestras suposiciones ε, μ = const); c es la velocidad de la luz en el vacío.

Por lo que las derivadas espacial y temporal conmutan, o sea,

$$\frac{\partial}{\partial t}[\nabla,\ \boldsymbol{H}]=\left[\nabla,\ \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right],$$

entonces diferenciando (7) por t obtendremos

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\left[\nabla,\ \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right].$$

Sustituyendo $\frac{\partial H}{\partial t}$ de (8) hallamos $\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=-\frac{c}{\mu}[\nabla, [\nabla, E]]$ o

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=[\nabla, [\nabla, E]]. \tag{11}$$

En vigor de la fórmula (6) $[\nabla, [\nabla, E]] = \nabla(\nabla, E) - \nabla E$. Puesto que $(\nabla, E) = 0$, entonces de (11) tenemos

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\Delta E.$$

Pues, para el campo vectorial E obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\frac{c^2}{\varepsilon\mu}\Delta E.$$

Esta es una de las ecuaciones principales de la física matemática *que se llama la ecuación de la onda.*

Es muy fácil cerciorarse (¡verifique esto!) de que el campo vectorial H satisface precisamente a la misma ecuación de la onda

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}=\frac{c^2}{\varepsilon\mu}\Delta H.$$

De tal modo, cada una de las coordenadas E_x, E_y, E_z y H_x, H_y, H_z de los vectores E y H satisface, en nuestras condiciones, la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Aquí $a=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ es la velocidad de propagación del proceso. En el vacío para $\varepsilon = \mu = 1$ tenemos $a = c$, es decir, en el vacío los procesos electromagnéticos se propagan con la velocidad de la luz.

243. Mostrar que toda solución de la ecuación $[\nabla, [\nabla, A]] - k^2A = 0$ que satisface la condición de solenoidad, satisface la ecuación vectorial de Helmholtz $\nabla^2 A + k^2 A = 0$.

Definición. El campo escalar $u = u(x, y, z)$ que satisface la condición $\Delta u = 0$ se llama *campo de Laplace* o *campo armónico.*

Ejemplo 3. El ejemplo importante del campo armónico es el campo escalar $u = k/r$, $k = \text{const}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Esta función representa por sí misma el potencial del campo de gravitación que crea la masa puntual colocada en el origen de coordenadas. No es muy difícil de comprobar que la función $u = k/r$ es armónica en todas las partes menos en el origen de coordenadas, donde ella *no está definida. En realidad*

$$\left(\nabla, \nabla\frac{k}{r}\right)=k\left(\nabla, \nabla\frac{1}{r}\right)=k\left(\nabla, -\frac{1}{r^2}\nabla r\right)=$$

$$=-k\left(\nabla, \frac{1}{r^2}r^0\right)=-k\left(\nabla\frac{1}{r^2}, r^0\right)-k\frac{1}{r^2}(\nabla, r^0)=$$

$$= k\left(-\frac{2}{r^3}\nabla r,\ r^0\right)-\frac{k}{r^2}(\nabla,\ r^0)=\frac{2k}{r^3}(r^0,\ r^0)-$$

$$-\frac{k}{r^2}(\nabla,\ r^0)=\frac{2k}{r^3}-\frac{k}{r^2}\cdot\frac{2}{r}=0$$

para todos $r\neq 0$, puesto que

$$(\nabla,\ r^0)=\left(\nabla,\ \frac{r}{r}\right)=\left(\nabla\frac{1}{r},\ r\right)+\frac{1}{r}(\nabla,\ r)=$$

$$=\left(-\frac{\nabla r}{r^2},\ r\right)+\frac{3}{r}=-\frac{1}{r^2}(r^0,\ r)+\frac{3}{r}=-\frac{1}{r}(r^0,\ r^0)+\frac{3}{r}=$$

$$=-\frac{1}{r}+\frac{3}{r}=\frac{2}{r}.$$

Ejemplo 4. Demostrar que en el campo de potencial del vector a su función potencial $u(x,\ y,\ z)$ satisface la ecuación de Poisson

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\rho(x,\ y,\ z), \tag{12}$$

donde $\rho(x,\ y,\ z)$ es la divergencia del vector a.

Solución. Según la condición

$$\operatorname{div} a=\rho.$$

Puesto que el campo del vector a es de potencial, entonces $a=$ $=\operatorname{grad} u$, donde u es el potencial del campo. Sustituyendo en (13) $a=\operatorname{grad} u$ obtenemos div grad $u=\rho$ o, ya que div grad $u=\Delta u$, entonces $\Delta u=\rho$.

Para el caso particular, en los puntos del campo en los que la divergencia es igual a cero, la ecuación (12) se transforma en la ecuación de Laplace $\Delta u=0$. La ecuación de Laplace—Poisson da la posibilidad de hallar la función potencial u mediante la integración de la ecuación diferencial en las derivadas parciales. En ciertos casos esto resulta ser más cómodo.

Muchas veces en electroestática prefieren en vez de la función u tomar la función inversa por el signo $v=-u$. Entonces $a=$ $=-\operatorname{grad} v$. De acuerdo con lo que en la teoría del campo electroestático la ecuación de Poisson tiene la forma

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \tag{14}$$

Examinemos un ejemplo elemental para la aplicación de la ecuación de Poisson.

Ejemplo 5. Sea dos láminas paralelas infinitas, encargadas con las cargas distintas, AA_1 y BB_1 tienen los potenciales v_1 y v_2, pero para la mayor precisión $v_1>v_2$. Hallar el campo E entre las láminas (fig. 36).

Solución. Dirigimos el eje Ox perpendicularmente a estas láminas en dirección del decrecimiento del potencial, y el plano yOz lo hacemos coincidir con la lámina AA_1 que tiene la carga positiva. Vamos a buscar la función potencial de la ecuación de Poisson. En virtud de la simetría del problema respecto al eje Ox y de la infinidad de láminas se puede concluir que como las superficies equipotenciales serán los planos paralelos a las láminas, y la

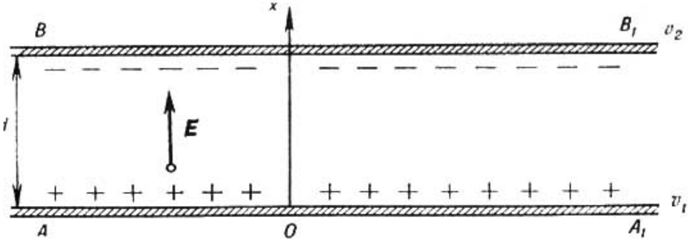

FIG. 36

función v va a depender sólo de una variable x. La ecuación (14) obtiene la forma

$$\frac{d^2v}{dx^2}=0, \tag{15}$$

puesto que las cargas volumétricas faltan en todo el espacio entre las láminas. Integrando (15), hallamos

$$v = C_1x + C_2 \tag{16}$$

(C_1, C_2 son las constantes arbitrarias).

Vamos a exigir que para $x = 0$ la función v obtenga el valor v_1 y para $x = d$, donde d es la distancia entre las láminas, ella obtenga el valor v_2. Lo que da $C_2 = v_1$, $v_2 = C_1d + C_2$, de donde $C_2 = v_1$, $C_1 = \frac{v_2-v_1}{d}$. Sustituyendo estos valores de C_1, C_2 en (16), obtendremos

$$v=\frac{v_2-v_1}{d}\,x+v_1=v_1-\frac{v_1-v_2}{d}\,x.$$

El vector $\boldsymbol{E}$ se determina según la fórmula $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} v$, lo que da

$$\boldsymbol{E}=\frac{v_1-v_2}{d}\,\boldsymbol{i},$$

entonces el campo será homogéneo y será dirigido por el eje Ox. La magnitud E en todo punto es igual a $|\boldsymbol{E}| = \frac{v_1-v_2}{d}$, es decir, es igual a la caída del potencial por la unidad de la distancia mínima entre las láminas.

244. Sea que la función escalar $\varphi(M)$ satisface la ecuación de Laplace. Mostrar que el vector $\nabla\varphi$ es solenoidal y irrotacional.

245. Mostrar que $\Delta(uv) = u\,\Delta v + v\,\Delta u + 2(\nabla u, \nabla v)$.

246. Demostrar que si $\boldsymbol{r}$ es radio vector, entonces

$$\Delta r = \begin{cases} \dfrac{2}{r} & \textit{en el espacio}, \\ \dfrac{1}{r} & \text{en el plano}. \end{cases}$$

247. Verificar: ¿son armónicos o no los siguientes campos escalares?

a) $u = x^2 + 2xy - y^2$,

b) $u = x^2y + y^2z + z^2x$,

c) $u = x^2 - y^2$.

248. Mostrar que el campo escalar

$$u = \ln\frac{1}{r}, \quad \text{donde } r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (r \neq 0),$$

es armónico.

249. Hallar todos los campos armónicos que dependen solo de x.

250. Hallar el aspecto general del polinomio homogéneo armónico de la segunda potencia de x e y.

251. Hallar todas las soluciones de la ecuación de Poisson $\Delta u = x^{n-2}$ que dependen sólo de x.

Ejemplo 6. Fórmulas de Green. Sean φ, ψ dos funciones escalares del punto. Vamos a componer el vector $\boldsymbol{a} = \varphi \operatorname{grad} \psi$. Entonces $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \psi) = \varphi \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi + (\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi) = \varphi \cdot \Delta\psi + (\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi)$.

Ahora empleando la fórmula de Gauss—Ostrogradski, tenemos:

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dv.$$

Notamos que en nuestro caso

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0) = (\varphi \operatorname{grad} \psi, \boldsymbol{n}^0) = \varphi(\operatorname{grad} \psi, \boldsymbol{n}^0) = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}.$$

Como resultado obtenemos la *primera fórmula de Green*

$$\iiint_V [\varphi\Delta\psi + (\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi)]\, dv = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\sigma \qquad (17)$$

la cual para $\varphi = \psi$ se convierte en la fórmula

$$\iiint\limits_V [\varphi\Delta\varphi + |\operatorname{grad}\varphi|^2]\,dv = \oiint\limits_\Sigma \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma. \tag{18}$$

Si en la fórmula (17) poner $\varphi \equiv 1$, entonces obtenemos

$$\iiint\limits_V \Delta\psi\,dv = \oiint\limits_\Sigma \frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\sigma.$$

En la fórmula (17) cambiamos de sitios φ y ψ y restamos la fórmula obtenida

$$\iiint\limits_V [\psi\Delta\varphi + (\operatorname{grad}\psi, \operatorname{grad}\varphi)]\,dv = \oiint\limits_\Sigma \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma$$

de la fórmula (17). Obtendremos entonces la *segunda fórmula de Green*

$$\iiint\limits_V (\varphi\cdot\Delta\psi - \psi\cdot\Delta\varphi)\,dv = \oiint\limits_\Sigma \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\sigma.$$

Se supone aquí que todas las funciones, con las cuales operamos, lo mismo que sus derivadas que se encuentran en las fórmulas, son continuas en el dominio que examinamos.

Ejemplo 7. Hallar la integral superficial

$$I = \oiint\limits_\Sigma \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\sigma,$$

tomada por la esfera Σ: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ para $\varphi = x^2 + y^2$ y $\psi = y^2 + z^2$.

Solución. En virtud de la primera fórmula de Green la integral incógnito es igual a

$$I = \iiint\limits_V [\varphi\,\Delta\psi + (\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi)]\,dv,$$

donde el dominio de integración V es la esfera: $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

Tenemos $\Delta\psi = 4$, $\operatorname{grad}\varphi = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{i}$, $\operatorname{grad}\psi = 2y\boldsymbol{i} + 2z\boldsymbol{k}$; $(\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi) = 4y^2$, por lo tanto

$$I = \iiint\limits_V (4x^2 + 4y^2 + 4y^2)\,dv = 4\iiint\limits_V (x^2 + 2y^2)\,dv.$$

Pasando a las coordenadas esféricas $x = r\cos\varphi \operatorname{sen}\theta$, $y = r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta$, $z = r\cos\theta$, obtendremos

$$I = 4\iiint\limits_V (r^2\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta + 2r^2\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta)\, r^2\operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= 4\int_0^{2\pi}(\cos^2\varphi + 2\operatorname{sen}^2\varphi)\, d\varphi\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\theta\, d\theta\int_0^1 r^4\, dr =$$

$$= \frac{4}{5}\int_0^{2\pi}(1+\operatorname{sen}^2\varphi)\, d\varphi\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{12}{5}\pi\left(-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{16}{5}\pi.$$

Ejemplo 8. Hallar la integral superficial

$$I = \oiint\limits_{\Sigma}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) d\sigma,$$

tomado por la superficie Σ: $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, $z = H$, $H > 0$, si $\varphi = x^2 + y^2 + x + z$, $\psi = x^2 + y^2 + 2z + x$.

Solución. La integral buscada según la segunda fórmula de Green es igual a

$$I = \iiint\limits_V (\varphi\,\Delta\psi - \psi\,\Delta\varphi)\, dv.$$

Para las funciones dadas φ y ψ tenemos $\Delta\varphi = 4$, $\Delta\psi = 4$ y por consiguiente,

$$I = -4\iiint\limits_V z\, dv.$$

Pasando a las coordenadas cilíndricas $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\operatorname{sen}\varphi$, $z = z$, obtenemos

$$I = -4\iiint\limits_V z\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = -4\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{R}\rho\, d\rho\int_0^{H} z\, dz = -2\pi R^2H^2.$$

Ejemplo 9. Hallar la integral superficial

$$I = \oiint\limits_{\Sigma}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma$$

por la superficie cerrada Σ, limitada por los planos:
$x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, si $\varphi=e^x \operatorname{sen} y+1$.

Solución. La función dada es armónica, puesto que $\Delta\varphi = e^x \operatorname{sen} y - e^x \operatorname{sen} y \equiv 0$. Por eso según la fórmula (18), obtendremos

$$I=\iiint\limits_V |\mathbf{grad}\,\varphi|^2\,dv.$$

Hallamos el módulo de gradiente de la función φ:

$$\mathbf{grad}\,\varphi = e^x \operatorname{sen} y\cdot \boldsymbol{i} + e^x \cos y\cdot \boldsymbol{j} \quad |\,\mathbf{grad}\,\varphi\,| = e^x.$$

La integral buscada es igual a

$$I=\iiint\limits_V e^{2x}\,dv=\int_0^1 e^{2x}\,dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} dz=\frac{1}{8}(e^2-5).$$

252. Calcular la integral superficial

$$I=\oiint\limits_\Sigma \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\sigma$$

por la superficie cerrada Σ: $\{x^2+y^2+z^2=1,\ y=0,\ y\geqslant 0\}$, si $\varphi=z^2$, $\psi=x^2+y^2-z^2$.

253. Calcular la integral superficial $I=\oiint\limits_\Sigma \left(\varphi\times\times\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\sigma$, **tomada por toda la superficie del cilindro cerrado** Σ: $\{x^2+y^2=1,\ z=0,\ z=1\}$, si $\varphi=2x^2$, $\psi=x^2+z^2$.

254. Calcular la integral superficial $I=\oiint\limits_\Sigma \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma$, si $\varphi=\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}$, mientras que Σ es la esfera: $x^2+y^2+z^2=R^2$.

255. Hallar la integral superficial $I=\oiint\limits_\Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma$, si $\varphi=e^x \operatorname{sen} y+e^y \operatorname{sen} x+z$, y Σ es el elipsoide de tres ejes $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

§ 22. POTENCIAL VECTORIAL

Dado el campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M) = P(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$$

es solenoidal en el dominio G, es decir, div $\boldsymbol{a}(M) = 0$ en G.

Definición. El vector $\boldsymbol{b}(M) = P_1(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Q_1(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + R_1(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$ que en el dominio G satisface la condición

$$\text{rot } \boldsymbol{b}(M) = \boldsymbol{a}(M) \tag{1}$$

o en la forma de coordenadas

$$\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} = P, \quad \frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial Q_1}{\partial x} = Q, \quad \frac{\partial R_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} = R, \tag{2}$$

se llama el *potencial vectorial* del campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$.

Para el campo solenoidal vectorial $\boldsymbol{a}(M)$ el potencial vectorial $\boldsymbol{b}(M)$ se determina no unívocamente: el vector $\boldsymbol{B}(M) = \boldsymbol{b}(M) + \text{grad } f(M)$, donde $f(M)$ es la función escalar diferenciable arbitraria también satisface la condición (1), puesto que rot (grad $f(M)) \equiv \mathbf{0}$.

De tal modo, dos potenciales vectoriales del campo solenoidal $\boldsymbol{a}(M)$ se distinguen uno del otro por un gradiente del campo escalar. El hallazgo del potencial vectorial $\boldsymbol{b}(M)$ del campo solenoidal $\boldsymbol{a}(M)$ se reduce a la determinación de cierta solución particular del sistema (2) de las tres ecuaciones diferenciales en las derivadas parciales respecto a las tres funciones incógnitas $P_1(x, y, z)$, $Q_1(x, y, z)$, $R_1(x, y, z)$.

El potencial vectorial $\boldsymbol{b}(M)$ se puede construirla mediante el método siguiente. Usando la elección arbitraria del vector $\boldsymbol{b}(M)$, para simplificar la solución ponemos, por ejemplo, $P_1(x, y, z) \equiv 0$, es decir, vamos a buscar el vector $\boldsymbol{b}(M)$ en la forma de $\boldsymbol{b}(M) = Q_1(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + R_1(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$. En este caso el sistema de ecuaciones diferenciales (2) para hallar las funciones incógnitas $Q_1(x, y, z)$ y $R_1(x, y, z)$ obtiene la forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} &= P, \\ \frac{\partial R_1}{\partial x} &= -Q, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} &= R. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

De la segunda y la tercera ecuaciones de este sistema hallamos

$$R_1(x, y, z) = -\int Q(x, y, z)\,dx + C_1(y, z),$$

$$Q_1(x, y, z) = \int R(x, y, z)\,dx + C_2(y, z),$$

donde $C_1(y, z)$ y $C_2(y, z)$ son todas funciones diferenciables de y y z. Para simplificar tomemos $C_2(y, z) \equiv 0$ y escojamos la función $C_1(y, z)$ de tal modo, que satisfaga también la primera ecuación del sistema (3). Para esto sustituimos en la primera ecuación las expresiones halladas para Q_1 y R_1:

$$-\frac{\partial}{\partial y}\int Q(x, y, z)\,dx+\frac{\partial C_1}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial z}\int R(x, y, z)\,dx=P(x, y, z).$$

De aquí hallamos

$$\frac{\partial C_1}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int Q(x, y, z)\,dx+\frac{\partial}{\partial z}\int R(x, y, z)\,dx+P(x, y, z).$$

Es muy fácil comprobar que el segundo miembro de esta ecuación no depende de x debido a que $\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M)=0$ en G.

Integrando la última igualdad por y, hallamos

$$C_1(y, z)=\int\left[\frac{\partial}{\partial y}\int Q(x, y, z)\,dx+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\int R(x, y, z)\,dx+P(x, y, z)\right]dy+C_3(z). \quad (4)$$

Suponiendo en (4) $C_3(z)\equiv 0$ y sustituyendo (4) en la expresión para $R_1(x, y, z)$, obtendremos la solución particular del sistema (3)

$$P_1\equiv 0, \quad (5)$$

$$Q_1=\int R(x, y, z)\,dx, \quad (6)$$

$$R_1=\int\left[\frac{\partial}{\partial y}\int Q(x, y, z)\,dx+\frac{\partial}{\partial z}\int R(x, y, z)\,dx+\right.$$
$$\left.+P(x, y, z)\right]dy-\int Q(x, y, z)\,dx. \quad (7)$$

El vector $\boldsymbol{b}(M)$, cuyas coordenadas $P_1(x, y, z)$, $Q_1(x, y, z)$ y $R_1(x, y, z)$ se determinan por fórmulas (5), (6), (7) es la potencial vectorial, puesto que dicho vector satisface la condición $\operatorname{rot}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$.

Ejemplo 1. Hallar el potencial vectorial $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}(x, y, z)$ para el campo solenoidal prefijado por el vector

$$\boldsymbol{a}=2y\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{j}+2x\boldsymbol{k}.$$

Solución. Buscamos el potencial $\boldsymbol{b}$ en la forma:

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}(x, y, z)=Q_1(x, y, z)\boldsymbol{j}+R_1(x, y, z)\boldsymbol{k},$$

donde $Q_1(x, y, z)$ y $R_1(x, y, z)$ hallamos mediante las fórmulas (7) y (8). Puesto que en el caso dado $P=2y$, $Q=-z$, $R=2x$, entonces obtendremos

$$Q_1(x, y, z)=\int 2x\,dx=x^2,$$

$$R_1(x, y, z)=\int z\,dx+\int 2y\,dy=xz+y^2,$$

Pues,

$$\boldsymbol{b}(x, y, z) = x^2\boldsymbol{j} + (xz + y^2)\boldsymbol{k}.$$

Mediante la verificación directa se puede cerciorarse de que rot $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ lo que significa que este vector es el potencial vectorial del campo dado.

Observación. Debido a la elección arbitraria del vector $\boldsymbol{b}$ en vez de la condición $P_1(x, y, z) \equiv 0$ se puede exigir que $Q_1(x, y, z) \equiv 0$ ó $R_1(x, y, z) \equiv 0$. El sistema de ecuaciones (2) y las fórmulas (5), (6), (7) se cambiarán respectivamente.

Hallar los potenciales vectoriales de los campos solenoidales:

256. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.
257. $\boldsymbol{a} = 2y\boldsymbol{i} + 2z\boldsymbol{j}$.
258. $\boldsymbol{a} = (e^x - e^y)\boldsymbol{k}$.
259. $\boldsymbol{a} = 6y^2\boldsymbol{i} + 6z\boldsymbol{j} + 6x\boldsymbol{k}$.
260. $\boldsymbol{a} = 3y^2\boldsymbol{i} - 3x^2\boldsymbol{j} - (y^2 + 2x)\boldsymbol{k}$.
261. $\boldsymbol{a} = ye^{x^2}\boldsymbol{i} + 2yz\boldsymbol{j} - (2xyze^{x^2} + z^2)\boldsymbol{k}$.

Si el campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ es solenoidal en el dominio G, que es estelar (véase el § 19, el capítulo IV) con el centro en el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ (el campo $\boldsymbol{a}(M)$ puede no estar determinado en el punto O), entonces una de los potenciales vectoriales $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(M)$ se puede hallarla mediante la fórmula

$$\boldsymbol{b}(M) = \int_0^1 [\boldsymbol{a}(M^1), \boldsymbol{r}(M)]\, t\, dt, \tag{8}$$

z), donde $\mathbf{r}(M) = x\mathbf{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ es el radio vector del punto $M(x, y,$ y el punto $M'(tx, ty, tz)$ al variar el parámetro t desde 0 hasta 1, recorre el tramo OM.

Ejemplo 2. Aplicando la fórmula (8) hallar la potencial vectorial del campo solenoidal $\boldsymbol{a} = 2y\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + 2x\boldsymbol{k}$.

Solución. El campo vectorial dado está definido en todo el espacio tridimensional que es el dominio estelar con el centro en el origen de coordenadas, por tanto para hallar el potencial vectorial se puede utilizar la fórmula (8). En el punto $M'(tx, ty, tz)$ tenemos

$$\boldsymbol{a}(M') = 2ty\boldsymbol{i} - tz\boldsymbol{j} + 2tx\boldsymbol{k}.$$

Hallamos el producto vectorial

$$[\boldsymbol{a}(M'), \boldsymbol{r}(M)] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2ty & -tz & 2tx \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= [-(2xy + z^2)\boldsymbol{i} + (2x^2 - 2yz)\boldsymbol{j} + (2y^2 + xz)\boldsymbol{k}]\, t.$$

Mediante la fórmula (8) hallamos

$$\boldsymbol{b}(M) = \int_0^1 [-(2xy+z^2)\,\boldsymbol{i} + (2x^2-2yz)\,\boldsymbol{j} + (2y^2+xz)\,\boldsymbol{k}]\,t^2\,dt =$$

$$= -\frac{1}{3}(2xy+z^2)\,\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}(x^2+yz)\,\boldsymbol{j} + \frac{1}{3}(2y^2+xz)\,\boldsymbol{k}.$$

Es muy fácil demostrar que rot $\boldsymbol{b}(M) = \boldsymbol{a}(M)$.

Observación. En los ejemplos 1 y 2 para el mismo campo solenoidal $\boldsymbol{a} = 2y\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + 2x\boldsymbol{k}$ recibimos distintos potenciales vectoriales:

$$b_1(M) = x^2\boldsymbol{j} + (xz+y^2)\,\boldsymbol{k},$$

$$b_2(M) = -\frac{1}{3}(2xy+z^2)\,\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}(x^2-yz)\,\boldsymbol{j} + \frac{1}{3}(2y^2+xz).$$

Estas se distinguen uno del otro por el sumando que es igual al gradiente de cierto campo escalar $f(M)$. Dicho sumando juega papel de la constante arbitraria (cuando sobre ella actúa el rotor). El sumando está representado como el gradiente de cierta función escalar $f(M)$. Hallamos esta función para nuestro caso. Tenemos

$$\operatorname{grad} f(M) = \boldsymbol{b}_1(M) - \boldsymbol{b}_2(M) = \frac{1}{3}(2xy+z^2)\,\boldsymbol{i} +$$

$$+ \frac{1}{3}(x^2+2yz)\,\boldsymbol{j} + \frac{1}{3}(2xz+y^2)\,\boldsymbol{k}.$$

Para hallar el campo escalar $f(M)$ apliquemos la fórmula (3) del § 19, en la cual como el punto (x_0, y_0, z_0) tomemos el origan de coordenadas $O(0, 0, 0)$. Entonces obtendremos

$$f(M) = \int_0^x 0\cdot dx + \int_0^y \frac{1}{3}x^2\,dy + \int_0^z \frac{1}{3}(2xz+y^2)\,dz + C =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2y + y^2z + z^2x) + C,$$

donde C es la constante arbitraria.

Ejemplo 3. Hallar el potencial vectorial $\boldsymbol{b}$ del campo magnético $\boldsymbol{H}$ engendrado por la carga eléctrica e que se mueve con la velocidad constante $\boldsymbol{v}$.

Solución. Según la ley de Bio—Savart la intensidad del campo magnético es igual a

$$H(M) = \frac{[e\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}]}{4\pi r^3}, \tag{9}$$

donde r es la distancia del punto M hasta la carga e.

Puesto que $\boldsymbol{H}$ es el vector solenoidal, es decir, div $\boldsymbol{H} = 0$, entonces para él existe la potencial vectorial $\boldsymbol{b}$ tal que $\boldsymbol{H}$ = rot $\boldsymbol{b}$

o teniendo en cuenta la fórmula (9),

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{b} = \frac{[e\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}]}{4\pi r^3} = \frac{e}{4\pi} \frac{[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}]}{r^3}.$$

Reescribiremos la última fórmula en la forma siguiente

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{b} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[e\boldsymbol{v}, \frac{x}{r^3} \boldsymbol{i} \right] + \left[e\boldsymbol{v}, \frac{y}{r^3} \boldsymbol{j} \right] + \left[e\boldsymbol{v}, \frac{z}{r^3} \boldsymbol{k} \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[\boldsymbol{i}, -\frac{ex\boldsymbol{v}}{r^3} \right] + \left[\boldsymbol{j}, -\frac{ey\boldsymbol{v}}{r^3} \right] + \left[\boldsymbol{k}, -\frac{ez\boldsymbol{v}}{r^3} \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[\boldsymbol{i}, \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e\boldsymbol{v}}{r} \right) \right] + \left[\boldsymbol{j}, \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e\boldsymbol{v}}{r} \right) \right] + \left[\boldsymbol{k}, \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e\boldsymbol{v}}{r} \right) \right] \right\}.$$

Aplicando esta igualdad que es muy fácil verificar

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left[\boldsymbol{i}, \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x} \right] + \left[\boldsymbol{j}, \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y} \right] + \left[\boldsymbol{k}, \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z} \right],$$

obtendremos

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{b} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \frac{e\boldsymbol{v}}{r},$$

de donde

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e\boldsymbol{v}}{r}.$$

Aplicando la fórmula (8) hallar los potenciales de los campos solenoidales definidos en los dominios estelares:

262. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}$.

263. $\boldsymbol{a} = 6x\boldsymbol{i} - 15y\boldsymbol{j} + 9z\boldsymbol{k}$.

264. $\boldsymbol{a} = 5x^2y\boldsymbol{i} - 10xyz\boldsymbol{k}$.

265. $\boldsymbol{a} = 2 \cos xz \cdot \boldsymbol{j}$.

266. $\boldsymbol{a} = \dfrac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 > 0.$

CAPÍTULO VI

COODINADAS CURVILINEAS: OPERACIONES *PRINCIPALES DEL ANALISIS VECTORIAL* EN LAS COORDENADAS CURVILÍNEAS

§ 23. COORDENADAS CURVILINEAS

En muchos problemas es más cómodo definir la posición del punto M del espacio no con las tres coordenadas cartesianas (x, y, z), sino con los tres otros números (q_1, q_2, q_3) que más satisfacen el problema particular a estudiar.

Dado que a cada punto M le corresponde la terna definida de los números (q_1, q_2, b_3), e inversamente a cada tal terna de los números le corresponde el único punto M. En este caso las magnitudes q_1, q_2, q_3 las llaman *coordenadas curvilíneas del punto M*.

Superficies de coordenadas en el sistema de las coordenadas curvilíneas q_1, q_2, q_3 se llaman las superficies

$$q_1 = C_1, \tag{1}$$

$$q_2 = C_2, \tag{2}$$

$$q_3 = C_3, \tag{3}$$

en las cuales una de las coordenadas conserva un valor constante.

Las líneas de la intersección de dos superficies de coordenadas se llaman las *líneas de coordenadas*.

A lo largo de la línea de intersección de las superficies de coordenadas (2) y (3) las coordenadas q_2 y q_3 conservan los valores constantes; se cambia sólo la coordenada q_1. Por analogía en las líneas de intersección de las superficies (1) y (3) ó (1) y (2) se cambian respectivamente solamente q_2 y q_3.

Trazamos los vectores de unidad $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ dirigidos por tangentes a las líneas de coordenadas (q_1), (q_2), (q_3) en el punto M en dirección del incremento de las variables q_1, q_2, q_3 respectivamente (fig. 37). *Conviene tomar los versores $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ siempre en tal orden para que su conjunto forme la terna derecha.*

Señalemos la diferencia radical entre las coordenadas curvilíneas y las cartesianas. En el sistema de coordenadas cartesianas los vectores $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ son constantes para todos los puntos del espacio *y son iguales a $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ respectivamente. En cualquier otro sistema* ellos cambian sus direcciones pasando de un punto M al otro.

Las coordenadas cilíndricas y esféricas sirven de ejemplo de las coordenadas curvilíneas. Estudiemos las coordenadas cilíndricas y esféricas.

1°. *Coordenadas cilíndricas.* En las coordenadas cilíndricas la posición del punto M del espacio se determina con las tres coordenadas:

$$\begin{aligned} q_1 &= \rho, \quad 0 \leqslant \rho < +\infty, \\ q_2 &= \varphi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ q_3 &= z, \quad -\infty < z < +\infty. \end{aligned} \tag{4}$$

Las superficies de coordenadas son:

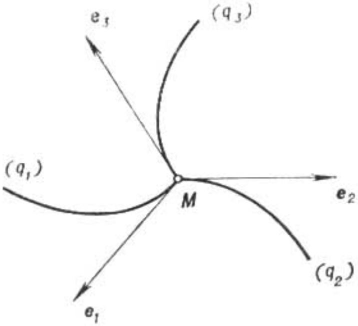

FIG. 37

$\rho =$ const son los cilindrios circulares con el eje Oz;
$\varphi =$ const son semiplanos contiguos al eje Oz:
$z =$ const son los planos perpendiculares al eje Oz.
Las líneas de coordenadas son: las líneas (ρ), rayos perpendiculares al eje Oz y que tienen el origen en este eje; las líneas (φ) son las circunferencias con el centro en el eje Oz que se encuentran en los planos perpendiculares a este eje; las líneas (z) son las rectas paralelas al eje Oz (fig. 38).

La conexión de las coordenadas cartasianas con las cilíndricas se determina por las fórmulas

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \operatorname{sen} \varphi, \\ z &= z. \end{aligned} \tag{5}$$

2°. *Coordenadas esféricas.* En las coordenadas esféricas la posición del punto M del espacio se determina por las coordenadas siguientes:

$$\begin{aligned} q_1 &= r, \quad 0 \leqslant r < +\infty, \\ q_2 &= \theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \\ q_3 &= \varphi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \end{aligned} \tag{6}$$

Las superficies de coordenadas son (fig. 39):

r = const son las esferas con el centro en el punto O;

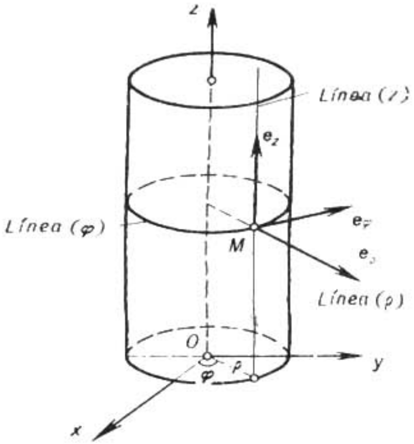

FIG. 38

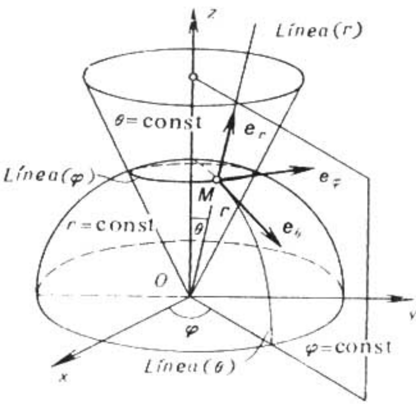

FIG. 39

θ = const son los semiconos con el eje Oz;

φ = const son los semiplanos contiguos al eje Oz.

Las líneas de coordenadas son las:

líneas (r), los rayos que salen del punto O;
líneas (θ), los meridianos en la esfera;
líneas (φ), las paralelas en la esfera.

La *conexión* de las coordenadas cartesianas con las esféricas se determina mediante las fórmulas:

$$\begin{aligned} x &= r \cos\varphi \operatorname{sen}\theta, \\ y &= r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned} \tag{7}$$

El sistema de las coordenadas curvilíneas se llama *ortogonal*, si en cada punto M los versores $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ son ortogonales a pares. *Las líneas de coordenadas y las superficies de coordenadas en tal* sistema serán ortogonales también. Los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas sirven de ejemplo de los sistemas de coordenadas ortogonales curvilíneas. Más adelante vamos a examinar sólo los sistemas ortogonales de coordenadas.

Dado $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1, q_2, q_3)$ que es el radio vector del punto M. Entonces

$$d\boldsymbol{r} = H_1\, dq_1\boldsymbol{e}_1 + H_2\, dq_2\boldsymbol{e}_2 + H_3\, dq_3\boldsymbol{e}_3. \tag{8}$$

Aquí

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}, \quad i = 1, 2, 3,$$

son los coeficientes Lamé del sistema dado de las coordenadas curvilíneas.

En las coordenadas cilíndricas

$$q_1 = \rho, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$$

en virtud de (5) *tenemos*

$$H_1 = H_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = 1,$$

$$H_2 = H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \rho,$$

$$H_3 = H_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1.$$

En las coordenadas esféricas

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \varphi$$

en virtud (7) *tenemos*

$$H_1 = H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1,$$

$$H_2 = H_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = r,$$

$$H_3 = H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r \operatorname{sen}\theta.$$

Los valores

$$dl_i = H_i dq_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

que figuran en la fórmula (8), son las diferenciales de longitudes de los arcos de las líneas de coordenadas. Esta idea permite en muchos casos calcular más fácilmente los coeficientes Lamé. Pues en el caso de las coordenadas cilíndricas (4) (véase la fig. 38) las diferenciales de longitudes de los arcos de las líneas de coordenadas (ρ), (φ), (z) serán

$$d(\rho) = 1 \cdot d\rho, \quad \text{de donde } H_1 = 1;$$
$$d(\varphi) = \rho \cdot d\varphi, \quad \text{de donde } H_2 = \rho;$$
$$d(z) = 1 \cdot dz, \quad \text{de donde } H_3 = 1.$$

Igualmente muy fácilmente se puede obtener las expresiones para los coeficientes Lamé en el caso de las coordenadas esféricas (6).

§ 24. OPERACIONES PRINCIPALES DEL ANALISIS VECTORIAL EN LAS COORDENADAS CURVILÍNEAS

1°. Ecuaciones diferenciales de las líneas vectoriales. Sea que tenemos el campo del vector

$$\boldsymbol{a} = a_1(q_1, q_2, q_3)\,\boldsymbol{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\,\boldsymbol{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\,\boldsymbol{e}_3.$$

Las ecuaciones de las líneas vectoriales en las coordenadas curvilíneas q_1, q_2, q_3 tienen la fórmula de

$$\frac{H_1\,dq_1}{a_1(q_1, q_2, q_3)} = \frac{H_2\,dq_2}{a_2(q_1, q_2, q_3)} = \frac{H_3\,dq_3}{a_2(q_1, q_2, q_3)}.$$

Particularmente, en las coordenadas cilíndricas ($q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$):

$$\frac{d\rho}{a_1(\rho, \varphi, z)} = \frac{\rho\,d\varphi}{a_2(\rho, \varphi, z)} = \frac{dz}{a_3(\rho, \varphi, z)}; \tag{1}$$

en las coordenadas esféricas ($q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$):

$$\frac{dr}{a_1(r, \theta, \varphi)} = \frac{r\,d\theta}{a_2(r, \theta, \varphi)} = \frac{r \operatorname{sen}\theta\,d\varphi}{a_3(r, \theta, \varphi)}.$$

Ejemplo 1. El campo vectorial es dado en las coordenadas cilíndiricas:

$$\boldsymbol{a}(M) = \boldsymbol{e}_\rho + \varphi \boldsymbol{e}_\varphi.$$

Hallar las líneas vectoriales de este campo.

Solución. Según la condición del problema $a_1 = 1$, $a_2 = \varphi$, $a_3 = 0$. En virtud de la fórmula (1) tenemos

$$\frac{d\rho}{1} = \frac{\rho\,d\varphi}{\varphi} = \frac{dz}{0}.$$

De aquí

$$\left.\begin{array}{l} z=C_1, \\ \rho=C_2\varphi; \end{array}\right\}$$

estos son los espirales de Arquímedes que se encuentran en los planos paralelos al plano xOy.

2°. *Gradiente en las coordenadas ortogonales.* Sea que tenemos el campo escalar

$$u = u\,(q_1,\ q_2,\ q_3).$$

Entonces

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\,e_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\,e_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\,e_3.$$

En particular, para las coordenadas cilíndricas ($q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$):

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\,e_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,e_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\,e_z; \tag{2}$$

en las coordenadas esféricas ($q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$):

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\,e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\,e_\theta + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,e_\varphi. \tag{3}$$

Ejemplo 2. Calcular el gradiente del campo escalar dado en las coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z): $u = \rho + z\cos\varphi$.

Solución. Aplicando la fórmula (2), obtenemos

$$\operatorname{grad} u = 1\cdot e_\rho - \frac{1}{\rho}\,z\operatorname{sen}\varphi\cdot e_\varphi + \cos\varphi\cdot e_z.$$

Ejemplo 3. Hallar el gradiente del campo escalar dado en las coordenadas esféricas (r, θ, φ)

$$u = r + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} - \operatorname{sen}\theta\cos\varphi.$$

Solución. Aplicando la fórmula (3), obtendremos

$$\operatorname{grad} u = \left(1 - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r^2}\right) e_r + \frac{\cos\theta}{r}\left(\frac{1}{r} - \cos\varphi\right) e_\theta + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{r}\,e_\varphi.$$

3°. ***Rotor en las coordenadas ortogonales.*** Sea

$$a = a_1(q_1,\ q_2,\ q_3)\,e_1 + a_2(q_1,\ q_2,\ q_3)\,e_2 + a_3(q_1,\ q_2,\ q_3)\,e_3.$$

Entonces

$$\operatorname{rot} a = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{H_2H_3}\,e_1 & \dfrac{1}{H_1H_3}\,e_2 & \dfrac{1}{H_1H_2}\,e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ a_1H_1 & a_2H_2 & a_3H_3 \end{vmatrix}.$$

En particular, en las coordenadas cilíndricas ($q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$):

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} \boldsymbol{e}_\rho & \boldsymbol{e}_\varphi & \frac{1}{\rho} \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & \rho a_2 & a_3 \end{vmatrix}; \qquad (4)$$

en las coordenadas esféricas ($q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$):

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \boldsymbol{e}_r & \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \boldsymbol{e}_\theta & \frac{1}{r} \boldsymbol{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_1 & r a_2 & r \operatorname{sen} \theta \cdot a_3 \end{vmatrix}. \qquad (4')$$

Ejemplo 4. Calcular el rotor del campo vectorial dado en las coordenadas cilíndricas

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{sen} \varphi \cdot \boldsymbol{e}_\rho + \frac{\cos \varphi}{\rho} \boldsymbol{e}_\varphi - \rho z \boldsymbol{e}_z.$$

Solución. Utilizando la fórmula (4), obtendremos

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} \boldsymbol{e}_\rho & \boldsymbol{e}_\varphi & \frac{1}{\rho} \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi & -\rho z \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\rho} \boldsymbol{e}_\rho (0 - 0) - \boldsymbol{e}_\varphi (-z - 0) + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{e}_z (0 - \cos \varphi) = z \boldsymbol{e}_\varphi - \frac{\cos \varphi}{\rho} \boldsymbol{e}_z.$$

4°. *Divergencia en las coordenadas ortogonales.* Sea dado el campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = a_1 (q_1, q_2, q_3) \boldsymbol{e}_1 + a_2 (q_1, q_2, q_3) \boldsymbol{e}_2 + a_3 (q_1, q_2, q_3) \boldsymbol{e}_3.$$

Entonces

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial (a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (a_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial (a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right].$$

En particular, en las coordenadas cilíndricas ($q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$):

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho a_1)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_3}{\partial z};$$

En las coordenadas esféricas $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 a_1)}{\partial r} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial (\operatorname{sen} \theta \cdot a_2)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial a_3}{\partial \varphi}. \qquad (5)$$

Ejemplo 5. Mostrar que el campo del vector

$$a=\frac{2\cos\theta}{r^3}e_r+\frac{\operatorname{sen}\theta}{r^3}e_\theta$$

es solenoidal.

Solución. Aplicando la fórmula 5), obtendremos

$$\operatorname{div} a=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{2\cos\theta}{r^3}\right)+\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\operatorname{sen}\theta}{r^3}\right)+0=$$

$$=\frac{1}{r^2}\left(-\frac{2\cos\theta}{r^2}\right)+\frac{1}{r^4\operatorname{sen}\theta}2\operatorname{sen}\theta\cos\theta=0$$

en todas las partes, donde $r\neq 0$. Esto significa que el campo del vector a es solenoidal en todas partes, menos el punto $r=0$.

267. Hallar las ecuaciones de las líneas vectoriales de los siguientes campos

a) $a=e_q+\frac{1}{\rho}e_\varphi+e_z$;

b) $a=qe_q+\varphi e_\varphi+ze_z$;

c) $a=\frac{2\alpha\cos\theta}{r^3}e_r+\frac{\alpha\operatorname{sen}\theta}{r^3}e_\theta\alpha=\text{const}$.

Hallar los gradientes de los campos escalares:

a) En las coordenadas cilíndricas

268. $u=\rho^2+2\rho\cos\varphi-e^z\operatorname{sen}\varphi$.

269. $u=\rho\cos\varphi+z\operatorname{sen}^2\varphi-3\rho$.

b) En las coordenadas esféricas

270. $u=r^2\cos\theta$.

271. $u=3r^2\operatorname{sen}\theta+e^r\cos\varphi-r$.

272. $u=\mu\frac{\cos\theta}{r^2}$, $\mu=\text{const}$.

Calcular la divergencia de los vectores:

a) En las coordenadas cilíndricas

273. $a=\rho e_\rho+z\operatorname{sen}\varphi e_\varphi+e^\varphi\cos ze_z$.

274. $a=\varphi\operatorname{arctg}\rho e_\rho+2e_\varphi-z^2e^ze_z$.

b) En las coordenadas esféricas

275. $a=r^2e_r-2\cos^2\varphi e_\theta+\frac{\varphi}{r^2+1}e_\varphi$.

Calcular el rotor de los campos vectoriales siguientes:

276. $a=(2r+\alpha\cos\varphi)e_r-\alpha\operatorname{sen}\theta e_\theta+r\cos\theta e_\varphi$, $\alpha=\text{const}$.

277. $\boldsymbol{a} = r^2\boldsymbol{e}_r + 2\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta - \varphi\boldsymbol{e}_\varphi$.

278. $\boldsymbol{a} = \cos\varphi\boldsymbol{e}_\rho - \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\boldsymbol{e}_\varphi + \rho^2\boldsymbol{e}_z$.

279. Mostrar que el campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = \frac{2\cos\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_r + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_\theta$$

es potencial.

280. Mostrar que el campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = f(r)\,\boldsymbol{e}_r,$$

donde f es la función diferenciable cualquiera, es potencial.

5°. *Cálculo del flujo en las coordenadas curvilíneas.* Sea S una parte de la superficie de coordenadas $q_1 = C$, donde $C = \text{const}$, limitada con las líneas de coordenadas

$$q_2 = \alpha_1, \quad q_2 = \alpha_2 \qquad (\alpha_1 < \alpha_2);$$
$$q_3 = \beta_1, \quad q_3 = \beta_2 \qquad (\beta_1 < \beta_2).$$

Entonces el flujo del vector

$$\boldsymbol{a} = a_1(q_1, q_2, q_3)\,\boldsymbol{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\,\boldsymbol{e}_2 + \\ + a_3(q_1, q_2, q_3)\,\boldsymbol{e}_3$$

a través de la superficie S en dirección del vector $\boldsymbol{e}_1$ se calcula según la fórmula

$$\Pi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{\beta_1}^{\beta_2} a_1(C, q_2, q_3)\,H_2(C, q_2, q_3)\,H_3 \times \\ \times (C, q_2, q_3)\,dq_3\,dq_2. \qquad (9)$$

Análogamente, se calcula el flujo a través de la parte de la superficie $q_2 = C$ o a través de la parte de la superficie $q_3 = C$, donde $C = \text{const}$.

Ejemplo 6. Calcular el flujo del campo vectorial dado en las coordenadas cilíndricas:

$$\boldsymbol{a} = \rho\boldsymbol{e}_\rho + z\boldsymbol{e}_\varphi,$$

a través de la superficie exterior de la superficie lateral del cilindro $\rho = 1$ limitado por los planos $z = 0$, $z = 1$.

Solución. El cilindro es la superficie de coordenadas $\rho = C = \text{const}$, y por lo tanto el flujo buscado es:

$$\Pi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 C^2\,dz\,d\varphi = 2\pi C^2,$$

de donde para la superficie $\rho = 1$ obtenemos $\Pi = 2\pi$.

Ejemplo 7. Hallar el flujo del campo vectorial dado en las coordenadas esféricas:

$$\boldsymbol{a} = r^2\theta \boldsymbol{e}_r + re^2\theta \boldsymbol{e}_\theta$$

a través de la parte exterior de la semiesfera superior S del radio R con el centro en el origen de coordenadas.

Solución. La semiesfera S es la parte de la superficie de coordenadas $r = \text{const}$, precisamente $r = R$. En la superficie S tenemos

$$q_1 = r = R; \quad q_2 = \theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$q_3 = \varphi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Teniendo en cuenta que en las coordenadas esféricas

$$H_1 = H_r = 1, \quad H_2 = H_\theta = r, \quad H_3 = H_\varphi = r \operatorname{sen} \theta.$$

Mediante la fórmula (6) hallamos

$$\Pi = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} R^4\theta \operatorname{sen} \theta \, d\varphi = 2\pi R^4 \int_0^{\pi/2} \theta \operatorname{sen} \theta \, d\theta = 2\pi R^4.$$

Calcular el flujo del campo vectorial dado en las coordenadas cilíndricas a través de la superficie dada S.

281. $\boldsymbol{a} = \rho \boldsymbol{e}_\rho - \cos \varphi \boldsymbol{e}_\varphi + z\boldsymbol{e}_z$,

S es la superficie cerrada formada por el cilindro $\rho = 2$, y con los planos $z = 0$ y $z = 2$.

282. $\boldsymbol{a} = \rho \boldsymbol{e}_\rho + \rho\varphi \boldsymbol{e}_\varphi - 2z\boldsymbol{e}_z$,

S es la superficie cerrada formada por el cilindro $\rho = 1$, los semiplanos $\varphi = 0$ y $\varphi = \pi/2$ y los planos $z = -1$, $z = 1$.

283. Hallar el flujo del campo vectorial dado en las coordenadas esféricas:

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2} \boldsymbol{e}_r$$

a través de la esfera del radio R y con el centro en el origen de coordenadas.

284. Hallar el flujo del vector dado en las coordenadas esféricas:

$$\boldsymbol{a} = r\boldsymbol{e}_r + r \operatorname{sen} \theta \boldsymbol{e}_\theta - 3r\varphi \operatorname{sen} \theta \boldsymbol{e}_\varphi$$

a través de la semiesfera superior del radio R.

285. Hallar el flujo del vector dado en las coordenadas esféricas:

$$\boldsymbol{a} = r^2\boldsymbol{e}_r + R^2 \cos \varphi \boldsymbol{e}_\varphi$$

a través de la esfera $r = R$.

286. Hallar el flujo del vector dado en las coordenadas esféricas:

$$a = re_r - r \operatorname{sen} \theta \cdot e_\varphi,$$

a través del semicírculo del radio R dispuesto en el semiplano $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (el flujo se tomó en dirección del vector e_φ).

287. Hallar el flujo del vector dado en las coordenadas esféricas:

$$a = r \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cdot e_\theta + r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi e_\varphi,$$

a través del lado exterior de la parte del semicono $\sqrt{3}\, z^2 = x^2 + y^2$ limitada de arriba por el plano $z = \sqrt{3}$ $(0 \leqslant z \leqslant \sqrt{3})$.

6°. Hallazgo del potencial en las coordenadas curvilíneas. Sea en las coordenadas curvilíneas q_1, q_2, q_3 dado el campo vectorial

$$a(M) = a_1(q_1, q_2, q_3)\, e_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\, e_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\, e_3$$

que es potencial en algún dominio Ω del cambio de variables q_1, q_2, q_3, es decir, rot $a = 0$ en Ω.

Para hallar el potencial $u = u(q_1, q_2, q_3)$ de este campo la igualdad $a(M) = \operatorname{grad} u(M)$ escriben en la forma de

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} e_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} e_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} e_3.$$

De aquí sigue que

$$\frac{\partial u}{\partial q_1} = a_1 H_1, \quad \frac{\partial u}{\partial q_2} = a_2 H_2, \quad \frac{\partial u}{\partial q_3} = a_3 H_3. \tag{7}$$

Esto es el sistema de las ecuaciones diferenciales de las derivadas parciales, integrando el cual hallamos el potencial buscado $u = u(q_1, q_2, q_3) + C$, donde C es una constante arbitraria.

El sistema de las ecuaciones diferenciales (7) se resuelve del mismo modo como para hallar la potencial en las coordenadas cartesianas.

El sistema de las ecuaciones diferenciales (7) tiene la forma
1) en las coordenadas cilíndricas $(q_1 = \rho,\ q_2 = \varphi,\ q_3 = z)$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = a_\rho, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \rho a_\varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = a_z; \tag{7'}$$

2) en las coordenadas esféricas $(q_1 = r,\ q_2 = \theta,\ q_3 = \varphi)$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = a_r, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = r a_\theta, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = r \operatorname{sen} \theta \cdot a_\varphi. \tag{7''}$$

Ejemplo 8. Hallar el potencial del campo vectorial prefijado en las coordenadas cilíndricas:

$$\boldsymbol{a}=\left(\frac{\operatorname{arctg} z}{\rho}+\cos\varphi\right)\boldsymbol{e}_\rho-\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\ln\rho}{1+z^2}\boldsymbol{e}_z.$$

Solución. Según la fórmula (4) hallamos

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_\rho & \boldsymbol{e}_\varphi & \frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\operatorname{arctg} z}{\rho}+\cos\varphi & -\rho\operatorname{sen}\varphi & \frac{\ln\rho}{1+z^2}\end{vmatrix}=0\qquad(\rho>0),$$

es decir, el campo dado es de potencial. El potencial buscado $u = u(\rho, \varphi, z)$ es la solución del siguiente sistema de las ecuaciones diferenciales:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial\rho}&=\frac{\operatorname{arctg} z}{\rho}+\cos\varphi,\\ \frac{\partial u}{\partial\varphi}&=-\rho\operatorname{sen}\varphi,\\ \frac{\partial u}{\partial z}&=\frac{\ln\rho}{1+z^2}.\end{aligned}\right\}$$

De la primera ecuación mediante la integración por ρ hallamos que

$$u=\ln\rho\cdot\operatorname{arctg} z+\rho\cos\varphi+C(\varphi, z).\tag{8}$$

Diferenciando (8) respecto de φ, obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-\rho\operatorname{sen}\varphi+\frac{\partial C}{\partial\varphi},$$

y puesto que $\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-\rho\operatorname{sen}\varphi$, entonces $\frac{\partial C}{\partial\varphi}\equiv 0$, es decir, $C = C_1(z)$. De tal modo

$$u=\ln\rho\cdot\operatorname{arctg} z+\rho\cos\varphi+C_1(z).$$

De aquí

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\ln\rho}{1+z^2}+C_1'(z)$$

En virtud de la tercera ecuación del sistema tenemos

$$\frac{\ln\rho}{1+z^2}=\frac{\ln\rho}{1+z^2}+C_1'(z),$$

o sea, $C_1'(z)\equiv 0$ de donde $C_1(z)\equiv C=\text{const}$. Y el potencial del campo dado

$$u(\rho, \varphi, z)=\ln\rho\cdot\operatorname{arctg} z+\rho\cos\varphi+C.$$

En los problemas siguientes es necesario convencerse que los campos vectoriales prefijados en las coordenadas cilíndricas con potenciales y hallar sus potenciales.

288. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_\varphi+\boldsymbol{e}_z$.

289. $\boldsymbol{a}=\rho\boldsymbol{e}_\rho+\frac{\varphi}{\rho}\boldsymbol{e}_\varphi+z\,\boldsymbol{e}_z$.

290. $\boldsymbol{a}=\varphi z\boldsymbol{e}_\rho+z\boldsymbol{e}_\varphi+\rho\varphi\boldsymbol{e}_z$.

291. $\boldsymbol{a}=e^\rho\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{e}_\rho+\frac{1}{\rho}e^\rho\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+2z\boldsymbol{e}_z$.

292. $\boldsymbol{a}=\varphi\cos z\boldsymbol{e}_\rho+\cos z\boldsymbol{e}_\varphi-\rho\varphi\operatorname{sen}z\boldsymbol{e}_z$.

Ejemplo 9. Hallar el potencial del campo vectorial prefijado en las coordenadas esféricas:

$$\boldsymbol{a}=\frac{1}{r}e^{\theta\varphi}\boldsymbol{e}_r+\frac{\theta\ln r}{r\operatorname{sen}\theta}e^{\theta\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\ln r}{r}\varphi e^{\theta\varphi}\boldsymbol{e}_\theta.$$

Solución. Según la fórmula (4′) obtenemos que

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\operatorname{sen}\theta\cdot\boldsymbol{e}_\varphi\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ \frac{1}{r}e^{\theta\varphi} & \varphi\ln r\cdot e^{\theta\varphi} & \theta\ln r\cdot e^{\theta\varphi}\end{vmatrix}=0.$$

El campo dado es potencial en el dominio donde $r>0$, $\theta\neq n\pi$ $(n=0,\ \pm1,\ \ldots)$.

Para hallar el potencial $u=u\,(r,\theta,\varphi)$ el sistema de ecuaciones diferenciales (7) tiene la forma

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r}&=\frac{1}{r}e^{\theta\varphi},\\ \frac{\partial u}{\partial\theta}&=\varphi e^{\theta\varphi}\ln r,\\ \frac{\partial u}{\partial\varphi}&=\theta\cdot e^{\theta\varphi}\ln r.\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

Al integrar la primera ecuación del sistema (9), obtenemos

$$u=e^{\theta\varphi}\ln r+C\,(\varphi,\ \theta).\qquad(10)$$

Diferenciando (10) por θ y teniendo en cuenta la segunda ecuación del sistema, obtendremos

$$\varphi e^{\theta\varphi}\ln r=\varphi e^{\theta\varphi}\ln r+\frac{\partial C}{\partial\theta},$$

o sea, $\frac{\partial C}{\partial\theta}\equiv0$, de donde $C\,(\varphi,\theta)\equiv C_1\,(\varphi)$ y por tanto

$$u=e^{\theta\varphi}\ln r+C_1\,(\varphi).\qquad(11)$$

Diferenciando (11) por φ y teniendo en cuenta la tercera ecuación del sistema (9) hallamos

$$\theta e^{\theta\varphi} \ln r = \theta e^{\theta\varphi} \ln r + C_1'(\varphi)$$

o $C_1'(\varphi) = 0$, de donde $C_1(\varphi) = C = \text{const}$. La potencial buscado es igual a

$$u(r, \theta, \varphi) = e^{\theta\varphi} \ln r + C.$$

Demostrar la potencialidad de los siguientes campos vectoriales prefijados en las coordenadas esféricas hallar sus potenciales.

293. $\boldsymbol{a} = \theta \boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{e}_\theta$.

294. $\boldsymbol{a} = 2r\boldsymbol{e}_r + \dfrac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \boldsymbol{e}_\varphi + \dfrac{1}{r} \boldsymbol{e}_\theta$.

295. $\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{2} \varphi^2 \cdot \boldsymbol{e}_r + \dfrac{\varphi}{\operatorname{sen} \theta} \boldsymbol{e}_\varphi + \dfrac{\theta}{r} \boldsymbol{e}_\theta$.

296. $\boldsymbol{a} = \cos\varphi \operatorname{sen}\theta \cdot \boldsymbol{e}_r + \cos\varphi \cos\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta - \operatorname{sen}\varphi \cdot \boldsymbol{e}_\varphi$.

297. $\boldsymbol{a} = e^r \operatorname{sen}\theta \cdot \boldsymbol{e}_r + \dfrac{1}{r} e^r \cos\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta + \dfrac{2\varphi}{(1+\varphi^2)\, r \operatorname{sen}\theta} \boldsymbol{e}_\varphi$.

7°. *Cálculo de la integral lineal y de la circulación del campo vectorial en las coordenadas curvilíneas.* Dado que el campo vectorial

$$\boldsymbol{a}(M) = a_1(q_1, q_2, q_3)\, \boldsymbol{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\, \boldsymbol{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\, \boldsymbol{e}_3$$

es definido y continuo en el dominio Ω de la variación de las coordenadas ortogonales curvilíneas q_1, q_2, q_3.

La diferencial $d\boldsymbol{r}$ del radio vector $\boldsymbol{r}$ del punto cualquiera $M(q_1, q_2, q_3) \in \Omega$, como es conocido, es igual (véase el § 23, (8))

$$d\boldsymbol{r} = H_1\, dq_1 \boldsymbol{e}_1 + H_2\, dq_2 \boldsymbol{e}_2 + H_3\, dq_3 \boldsymbol{e}_3.$$

Por eso la integral lineal del vector $\boldsymbol{a}(M)$ por la curva orientada plana o parcialmente plana $L \subset \Omega$ será igual a

$$\int_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int_L a_1 H_1\, dq_1 + a_2 H_2\, dq_2 + a_3 H_3\, dq_3. \tag{12}$$

En particular, para las coordenadas cilíndricas $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$ obtendremos

$$\boldsymbol{a} = a_\rho(\rho, \varphi, z)\, \boldsymbol{e}_\rho + a_\varphi(\rho, \varphi, z)\, \boldsymbol{e}_\varphi + a_z(\rho, \varphi, z)\, \boldsymbol{e}_z,$$

$$d\boldsymbol{r} = d\rho \boldsymbol{e}_\rho + \rho\, d\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + dz \boldsymbol{e}_z,$$

por eso

$$\int_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int_L a_\rho\, d\rho + a_\varphi \rho\, d\varphi + a_z\, dz; \tag{13}$$

para las coordenadas esféricas $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$ obtendremos

$$\boldsymbol{a} = a_r(r, \theta, \varphi)\, \boldsymbol{e}_r + a_\theta(r, \theta, \varphi)\, \boldsymbol{e}_\theta + a_\varphi(r, \theta, \varphi)\, \boldsymbol{e}_\varphi,$$

$$d\boldsymbol{r} = dr \cdot \boldsymbol{e}_r + r\, d\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta + r \operatorname{sen}\theta\, d\varphi \cdot \boldsymbol{e}_\varphi,$$

y, por consiguiente,

$$\int_L (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = \int_L a_r\, dr + r a_\theta\, d\theta + r a_\varphi \operatorname{sen}\theta\, d\varphi. \qquad (14)$$

La circulación C del campo vectorial $\boldsymbol{a}(M)$ en las coordenadas curvilíneas q_1, q_2, q_3 se calcula en el caso general mediante la fórmula (12), y en el caso de las coordenadas cilíndricas o esféricas ella se calcula por medio de la fórmula (13) ó (14) respectivamente.

Ejemplo 10. *Calcular la integral lineal en el campo vectorial* prefijado en las coordenadas cilíndricas

$$\boldsymbol{a} = 4\rho \operatorname{sen}\varphi\cdot\boldsymbol{e}_\rho + ze^\rho\cdot\boldsymbol{e}_\varphi + (\rho+\varphi)\cdot\boldsymbol{e}_z,$$

a lo largo de la recta

$$L: \begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{4} \\ z = 0 \end{cases}$$

del punto $O\left(0, \dfrac{\pi}{4}, 0\right)$ hasta el punto $A\left(1, \dfrac{\pi}{4}, 0\right)$.

Solución. En el ejemplo dado

$$a_\rho = 4\rho \operatorname{sen}\varphi,\ a_\varphi = ze^\rho,\ a_z = \rho+\varphi.$$

Según la fórmula (13) la integral lineal buscada

$$\int_{OA} (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = \int_{OA} 4\rho \operatorname{sen}\varphi\, d\rho + \rho z e^\rho\, d\varphi + (\rho+\varphi)\, dz.$$

En la recta L tenemos:

$$\varphi = \frac{\pi}{4},\quad d\varphi = 0;\quad z = 0,\quad dz = 0;\quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1.$$

Por tanto

$$\int_{OA} (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = \int_{OA} 2\sqrt{2}\,\rho\, d\rho = \sqrt{2}\int_0^1 2\rho\, d\rho = \sqrt{2}.$$

Ejemplo 11. Calcular la integral lineal en el campo vectorial prefijado en las coordenadas esféricas

$$\boldsymbol{a} = e^r \operatorname{sen}\theta\cdot\boldsymbol{e}_r + 3\theta^2 \operatorname{sen}\varphi\cdot\boldsymbol{e}_\theta + r\varphi\theta\cdot\boldsymbol{e}_\varphi$$

a lo largo de la línea

$$L: \begin{cases} r = 1 \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},$$

en dirección del punto $M_0\left(1, 0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ hasta el punto $M_1\left(1, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ (fig. 40).

Solución. Línea L es el arco de la circunferencia con el centro en el origen de coordenadas y el radio $R = 1$ que se encuentra en el plano yOz. Las coordenadas del vector dado son iguales a

$$a_r = e^r \operatorname{sen} \theta, \quad a_\theta = 3\theta^2 \operatorname{sen} \varphi, \quad a_\varphi = r\varphi\theta.$$

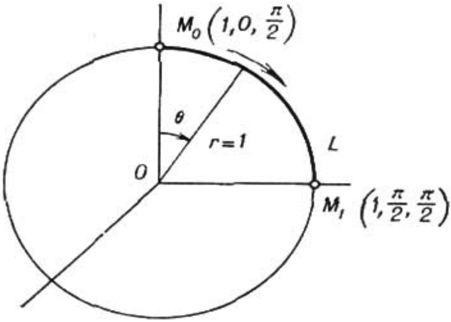

FIG. 40

En virtud de la fórmula (14) la integral lineal tiene la forma

$$\int\limits_L (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = \int\limits_L e^r \operatorname{sen} \theta\, dr + 3\theta^2 r \operatorname{sen} \varphi\, d\theta + r^2 \varphi\theta \operatorname{sen} \theta\, d\varphi.$$

Teniendo en cuenta que en la línea L se cumplen las condiciones:

$$r = 1, \quad dr = 0; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad d\varphi = 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},$$

obtendremos

$$\int\limits_L (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = \int\limits_L 3\theta^2\, d\theta = \int\limits_0^{\pi/2} 3\theta^2\, d\theta = \frac{\pi^3}{8}.$$

Ejemplo 12. Calcular la circulación del campo vectorial prefijado en las coordenadas cilíndricas

$$\boldsymbol{a} = \rho \operatorname{sen} \varphi \cdot \boldsymbol{e}_\rho + \rho z \cdot \boldsymbol{e}_\varphi + \rho^3 \cdot \boldsymbol{e}_z,$$

a lo largo de la curva

$$L: \begin{cases} \rho = \operatorname{sen} \varphi, \\ z = 0, \end{cases} \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Solución. Las coordenadas del vector dado

$$a_\rho = \rho \operatorname{sen} \varphi, \quad a_\varphi = \rho z, \quad a_z = \rho^3.$$

El contorno L es una curva cerrada que se encuentra en el plano $z = 0$ (fig. 41).

Sustituyendo las coordenadas del vector dado en la fórmula (13) obtendremos

$$C = \oint_L \rho \operatorname{sen} \varphi \, d\rho + \rho^2 z \, d\varphi + \rho^3 \, dz.$$

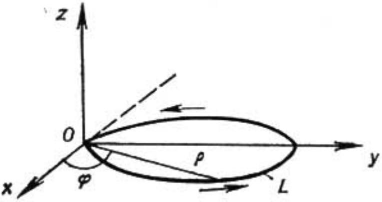

FIG. 41

En la curva L tenemos:

$$z = 0, \; dz = 0; \; \rho = \operatorname{sen} \varphi, \; d\rho = \cos \varphi \, d\varphi, \; 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Por eso la circulación buscada será igual a:

$$C = \oint_L \rho \operatorname{sen} \varphi \, d\rho = \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi = 0.$$

Ejemplo 13. Calcular la circulación del vector prefijado en la coordenadas esféricas

$$\boldsymbol{a} = r\boldsymbol{e}_r + (R + r) \operatorname{sen} \theta \cdot \boldsymbol{e}_\varphi,$$

por la circunferencia

$$L: \begin{cases} r = R, \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

en dirección del incremento del ángulo φ.

Solución. En el ejemplo dado

$$a_r = r, \; a_\theta = 0, \; a_\varphi = (R + r) \operatorname{sen} \theta.$$

Según la fórmula (14) la circulación buscada es igual a

$$C = \oint_L r \, dr + (R + r) \operatorname{sen} \theta r \operatorname{sen} \theta \, d\varphi = \oint_L r \, dr + r (R + r) \operatorname{sen}^2 \theta \, d\varphi.$$

En la circunferencia L dada, cuyo centro se encuentra en el origen de coordenadas, tenemos

$$r = R, \quad dr = 0; \quad \theta = \frac{\pi}{2}; \qquad 0 \leqslant \varphi < \pi,$$

y, por consiguiente,

$$C = 2R^2 \oint_L d\varphi = 2R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^2.$$

Calcular la integral lineal por las líneas dadas L en los campos vectoriales prefijados en las coordenadas cilíndricas.

298. $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{e}_\rho + \rho\varphi \cdot \boldsymbol{e}_\varphi + \cos\varphi \cdot \boldsymbol{e}_z$,
L es el segmento de la recta: $\{\rho = a, \varphi = 0, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$.

299. $\boldsymbol{a} = \rho\boldsymbol{e}_\rho + 2\rho\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + z\boldsymbol{e}_z$,
L es la semiesfera: $\{\rho = 1, z = 0, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$.

300. $\boldsymbol{a} = e^\rho \cos\varphi \cdot \boldsymbol{e}_\rho + \rho \operatorname{sen}\varphi \cdot \boldsymbol{e}_\varphi + \rho\boldsymbol{e}_z$,
L es la espira de la línea helicoidal: $\{\rho = R, z = \varphi, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$.

Calcular la integral lineal por la línea dada L en los campos vectoriales prefijados en las coordenadas esféricas.

301. $\boldsymbol{a} = e^r \cos\varphi \cdot \boldsymbol{e}_r + 20 \cos\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta + \varphi \cdot \boldsymbol{e}_\varphi$,
L es la semiesfera: $\{r = 1, \varphi = 0, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$.

302. $\boldsymbol{a} = 4r^3 \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \boldsymbol{e}_r + \theta \cdot \varphi \cdot \boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta + \cos^2\varphi \cdot \boldsymbol{e}_\varphi$, L es el segmento de la recta: $\left\{\varphi = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{\pi}{4}, 0 \leqslant r \leqslant 1\right\}$.

303. $\boldsymbol{a} = \operatorname{sen}^2\theta \cdot \boldsymbol{e}_r + \operatorname{sen}\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta + r\varphi\theta \cdot \boldsymbol{e}_\varphi$, L es el segmento de la recta: $\left\{\varphi = \frac{\pi}{2}, r = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}, \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$.

Calcular por los contornos dados la circulación de los campos vectoriales prefijados en las coordenadas cilíndricas.

304. $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{e}_\rho + \rho z\boldsymbol{e}_\varphi + \rho\boldsymbol{e}_z$,
L es la circunferencia: $\{\rho = 1, z = 0\}$.

305. $\boldsymbol{a} = \rho \operatorname{sen}\varphi \cdot \boldsymbol{e}_\rho - \rho^2 z\boldsymbol{e}_\varphi + \rho^2\boldsymbol{e}_z$,
L es la circunferencia: $\{\rho = R, z = R\}$.

306. $\boldsymbol{a} = z \cos\varphi \cdot \boldsymbol{e}_\rho + \rho\boldsymbol{e}_\varphi + \varphi^2\boldsymbol{e}_z$,
L es el bucle: $\{\rho = \operatorname{sen}\varphi, z = 1\}$.

Calcular por los contornos dados L la circulación de los vectores prefijados en las coordenadas esféricas.

307. $\boldsymbol{a} = r\theta\boldsymbol{e}_r + r \operatorname{sen}\theta \cdot \boldsymbol{e}_\varphi$,
L es la circunferencia: $\left\{r = 1, \theta = \frac{\pi}{4}\right\}$.

308. $\boldsymbol{a} = r \operatorname{sen} \theta \cdot \boldsymbol{e}_r + \theta e^{\theta} \boldsymbol{e}_\theta$,

L es el bucle: $\left\{ r = \operatorname{sen} \varphi,\ \theta = \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \right\}$.

309. $\boldsymbol{a} = r\varphi\theta \cdot \boldsymbol{e}_\varphi$,

L es el contorno limitado por la semiesfera $\left\{ r = R,\ \varphi = \frac{\pi}{4},\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \right\}$
y por su diámetro vertical; $\left\{ \varphi = \frac{\pi}{4},\ \theta = 0 \right\}$.

§ 25. OPERADOR DE LAPLACE EN LAS COORDENADAS ORTOGONALES

Si $u = u(q_1, q_2, q_3)$ es la función escalar, entonces

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \boldsymbol{e}_3. \tag{1}$$

Si

$$\boldsymbol{a} = a_1(q_1, q_2, q_3)\, \boldsymbol{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\, \boldsymbol{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\, \boldsymbol{e}_3,$$

entonces

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (a_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (a_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (a_3 H_1 H_2) \right]. \tag{2}$$

Aplicando las fórmulas (1) y (2) para el operador de Laplace Δu obtenemos la expresión siguiente:

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right].$$

En las coordenadas cilíndricas

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

En las coordenadas esféricas

$$\Delta u=\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right]=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+$$
$$+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Ejemplo. Hallar todas las resoluciones de la ecuación de Laplace $\Delta u=0$, que dependen sólo de la distancia r.

Solución. Al escribir la ecuación de Laplace en las coordenadas esféricas y al tomar en consideración la simetría esférica de la solución (que no debe ser función de θ y de φ), obtendremos

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0 \qquad (u=u(r)).$$

De aquí

$$r^2\frac{\partial u}{\partial r}=C_1,$$

de modo que

58

$$u=\frac{C_1}{r}+C_2,$$

donde C_1, C_2 son constantes.

310. Dado el campo escalar $u=u(M)$ en las coordenadas cilíndricas

$$u(\rho,\ \varphi,\ z)=\rho^2\varphi+z^2\varphi^3-\rho\varphi z.$$

Hallar Δu.

311. Dado el campo escalar $u=u(M)$ en las coordenadas esféricas

$$u(r,\ \theta,\ \varphi)=r^2\varphi\theta+r^3\varphi^2+\varphi+\theta^2.$$

Hallar Δu.

312. ¿Son armónicas las funciones siguientes?

1) $u=\rho^2\cos 2\varphi$,

2) $u=r\cos 2\theta$.

313. Hallar todas las funciones armónicas posibles;

1) que dependen sólo de θ,

2) que dependen sólo de φ,

(en el sistema de coordenadas esférico).

314. Hallar todas las resoluciones de la ecuación de Poisson

$$\Delta u=r^{n-1}$$

en el sistema de coordenadas esférico, si $u=u(r)$.

RESPUESTAS

1. a) Semirrecta $\left.\begin{matrix} x=2 \\ y=-z \end{matrix}\right\} y \geqslant 0,\ z \leqslant 0$ que pasa dos veces cuando $-\infty < t + \infty$; b) para $t \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ punto $\boldsymbol{r}(t) = \frac{t^2+1}{(t+1)^2}\boldsymbol{i} + \frac{2t}{(t+1)^2}\boldsymbol{j}$ recorre dos veces la semirrecta $x + y = 1,\ x \geqslant \frac{1}{2},\ y \geqslant \frac{1}{2}$; c) $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1; \end{matrix}\right\}$

d) $y = \frac{x^2}{3},\ z = \frac{x^3}{9}$; e) $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x - y = 0$.

7. $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$. 8. $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$. 9. $-\boldsymbol{j} + \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{k}$.

10. $-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$. 11. $e\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$. 12. No. 14. No.

17. a) $2\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \boldsymbol{r}\right)$; b) $\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|^2 + \left(\boldsymbol{r}, \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)$; c) $\left[\boldsymbol{r}, \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right]$.

21. Las circunferencias que se encuentran en los planos perpendiculares al vector $\boldsymbol{a}$.

22. La hodógrafa de velocidad es la línea helicoidal: $x = a\cos t,\ y = a \operatorname{sen} t,\ z = 2bt$; la hodógrafa de aceleración es la circunferencia: $x = -a \operatorname{sen} t,\ y = a \cos t,\ z = 2b$.

26. $\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{a}}{du}\frac{du}{dt}$; $\frac{d^2\boldsymbol{a}}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{a}}{du^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{d\boldsymbol{a}}{du}\frac{d^2u}{dt^2}$.

28. $(t-1)e^t\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\boldsymbol{j} - \operatorname{arctg} t \cdot \boldsymbol{k} + \boldsymbol{c}$.

29. $\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\cdot\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}e^{t^2}\boldsymbol{j} + \operatorname{sen} t \cdot \boldsymbol{k} + \boldsymbol{c}$.

30. $e^{\operatorname{sen} t}\cdot\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t^2 \cdot \boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k} + \boldsymbol{c}$.

31. $\frac{t^3}{6}\boldsymbol{i} + (t\cos t - \operatorname{sen} t)\boldsymbol{j} + \frac{2^t}{\ln 2}\boldsymbol{k} + \boldsymbol{c}$.

11—01406

32. $\frac{2}{3}j+\pi k$. 33. $(1-e^{-\frac{1}{2}})i+(e^{\frac{1}{2}}-1)j+(e-1)k$

34. $-\ln 2\cdot j+k$. 35. $2\pi^2 i+\pi j+\pi^2 k$.

36. $R=\frac{\sqrt{2}}{|\operatorname{sen} 2t|}$. 37. $R=\frac{2}{3}|t|(1+9t^2)^{3/2}$

38. $R=6$. 39. $R=\frac{1}{2}a\pi$.

40. $R=2a\operatorname{ch}^2 t$. 41. $x+y=0$. 42. $x-y-\sqrt{2}z=0$.

43. $\frac{1}{T}=\frac{1}{3}$. 44. $\frac{1}{T}=\frac{1}{2a\operatorname{ch}^2 t}$.

45. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=C$ es la familia de elipsoides de tres ejes.

46. $x^2+y^2-z=C$ es la familia de paraboloides.
47. $x^2+y^2=Cz$ es la familia de paraboloides.
48. $2y^2+9z^2=C$ es la familia de cilindros elípticos.
49. $x+2y-z=C$ es la familia de los planos paralelos.
50. Familia de semiplanos que se obtiene de un haz de planos $a_1x+a_2y+a_3z=C(b_1x+b_2y+b_3z)$, que pasan por la recta

$$\left.\begin{aligned} a_1x+a_2y+a_3z=0, \\ b_1x+b_2y+b_3z=0, \end{aligned}\right\}$$

mediante la exclusión de la propia recta. Aquí a_1, a_2, a_3 son las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$; b_1, b_2, b_3 son las coordenadas del vector $\boldsymbol{b}$.
51. $x^2+y^2+z^2=C^2$ es la familia de las esferas concéntricas.

52. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{r})=C$ ó $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=C$ es la familia de los planos paralelos.

53. $2x-y=C$ es la familia de rectas paralelas.
54. $y=Cx$, $C>0$, $x\neq 0$, es la familia de rayos con el vértice excluido $O(0, 0)$.
55. $y^2=Cx$ es la familia de parábolas.
56. $x^2-y^2=C$ es la familia de hipérbolas.
57. $y=-x\ln C-C$, $C>0$ es la familia de rectas.

58. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. 59. $\frac{-\sqrt{21}}{3}$. 60. $\frac{\sqrt{3}}{3}e^3$. 61. $-\frac{2}{5}$. 62. $\frac{3}{5}\sqrt{2}$.

63. $\frac{1}{4}$. 64. 0. 65. $\frac{2\sqrt{3}}{3}(\sqrt{2}+3)$. 66. 0. 67. -2.

68. $\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{a^2+R^2}}$. 69. $\dfrac{2}{3}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$.

70. $\boldsymbol{k}$. 71. $\varphi=\pi$. 72. $\varphi=0$.

73. $\varphi=0$. 74. $y=-x+2n\pi,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$.

75. $x^2+y^2+z^2=1$. 78. $\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^2}$. 79. $\boldsymbol{a}$. 80. $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{r})+\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{r})$.

81. $2|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{r}-2(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{r})\boldsymbol{a}$. 86. $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{2u}{r}$.

87. $\dfrac{\partial u}{\partial l}=-\dfrac{\cos(\widehat{\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{l}})}{r^2}$; $\dfrac{\partial u}{\partial l}=0$ para $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{l}$.

88. $\dfrac{\partial u}{\partial l}=\dfrac{1}{r^2}$. 89. $\dfrac{\partial u}{\partial l}=1$.

90. $\dfrac{\partial u}{\partial l}=\dfrac{(\operatorname{grad} u,\ \operatorname{grad} v)}{|\operatorname{grad} v|}$; $\dfrac{\partial u}{\partial l}=0$, si $\operatorname{grad} u\perp\operatorname{grad} v$.

91. a) 1 en dirección del eje Oy;
b) 3 en dirección del vector $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$.

92. $y=C_1x;\ z=C_2x$. 93. $\left.\begin{aligned} y&=\frac{a_2}{a_1}x+C_1,\\ z&=\frac{a_3}{a_1}x+C_2.\end{aligned}\right\}$

94. $\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=C_1^2,\\ x+y+z&=C_2.\end{aligned}\right\}$ 95. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{z}=1,$
$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y^2}=4.$

96. $x^2=C_1y,\ z=C_2$. 97. $z=C_1x,\ y=C_2$.

98. $xy=C_1,\ z=C_2$. 99. $x=C_1,\ 2y^2-z^2=C_2$.

100. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=C_1,\ z=C_2$.

101. $y^2+z^2=C_1,\ x=C_2$. 102. $x=C_1y,\ x=C_2z$.

103. $\left.\begin{aligned} \frac{x}{b_{01}}&=\frac{y}{b_{02}}+C_1,\\ \frac{x}{b_{01}}&=\frac{z}{b_{03}}+C_3,\end{aligned}\right\}$, donde $b_{01},\ b_{02},\ b_{03}$ son las coordenadas del vector $\boldsymbol{b}_0$.

104. $\Pi=-3$. 105. $\Pi=\pi R^2\gamma$. 106. $\Pi=\pi R^2h$.

107. $\Pi=4\pi R^3f(R)$. 108. $\Pi=\dfrac{a^3}{2}$. 109. $\Pi=\dfrac{\pi}{6}$.

110. $\Pi=\frac{1}{2}\pi R^2h$. **111.** $\Pi=\pi h^3$.

112. $\Pi=\frac{81}{8}\pi$. **113.** $\Pi=\frac{\pi}{4}$.

114. $\Pi=0$. **115.** $\Pi=\frac{\pi}{2}$. **116.** $\Pi=\frac{1}{4}$. **117.** $\Pi=4\pi R^3$.

118. a) $\Pi=-\frac{7}{6}$, b) $\Pi=-1/2$; c) $\Pi=\pi$. **119.** $\Pi=0$.

120. $\Pi=6\pi R$. **121.** $\Pi=0$. **122.** $\Pi=\pi$. **123.** $\Pi=0$.

124. $\Pi=\frac{2}{3}\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$. **125.** $\Pi=\frac{3}{8}R^4$.

126. $\Pi=\sqrt{2}\,\pi$. **127.** $\Pi=45\pi$. **128.** $\Pi=\frac{256}{3}\pi$.

129. $\Pi=8\pi$. **130.** $\Pi=0$. **131.** $\psi(r)=\frac{C}{r}$.

132. $7r^4$. **133.** 0. **134.** 0.
135. $\psi(z)=C-z$, $C=\text{const}$. **136.** $\Pi=4\pi R^3$.
137. $\operatorname{div} E=0\ (r\neq 0)$.

143. 16π. **144.** πH^3. **145.** $\frac{32}{3}\pi$. **146.** 0. **147.** $\frac{\pi}{3}$.

148. 4π. **149.** $\frac{19}{3}\pi$. **150.** $\frac{32}{3}\pi$. **151.** $2R^3$.

152. $\frac{81}{8}\pi$. **153.** -1. **154.** $-\pi$.

155. Solinoidal.
156. No solinoidal.
157. Solinoidal.

159. $\varphi(r)=\frac{C}{r^3}$, $r\neq 0$, $C=\text{const}$.

161. $\frac{r_2^2-r_1^2}{2}$. **162.** $\ln\frac{r_2}{r_1}$. **163.** $\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}$. **164.** 0.

166. $-\frac{4}{3}R^2$. **167.** $\frac{41}{6}$. **168.** a) $-\frac{14}{15}$, b) $\frac{2}{3}$. **169.** 0.

170. $\frac{5}{3}$. **171.** $3\sqrt{3}$. **172.** $\frac{1}{35}$.

173. $-\pi a^2$. **174.** 1.

175. -2π. **176.** $-\frac{\pi R^3}{4}$. **177.** $\frac{4}{3}$. **179.** $-2(z\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k})$.

180. $3(z^2-x^2)\,\boldsymbol{j}$. **181.** $(x+y)\,\boldsymbol{k}$. **191.** $\omega=\frac{1}{2}\operatorname{rot}v=-\frac{z}{2}\,\boldsymbol{j}$.

193. $f(x,\ z)=xz+x+z+C,\ C=\text{const.}$

195. 4π. **196.** -4π. **197.** $\frac{4}{3}$. **198.** -2π. **199.** $\frac{128}{3}$.

200. 729π. **201.** 0. **202.** $-\sqrt{2}\,\pi$.
203. $2\omega\pi a^2$. *Indicación.* $\boldsymbol{v}=[\omega,\ \boldsymbol{r}]$.
204. $\mu_c=1$. **205.** $\mu_c=3$. **206.** Depende.

207. No depende. **208.** Depende. **209.** -1. **210.** $\frac{4}{15}$.

211. 0. **212.** $\frac{2}{3}$. **213.** $\frac{\pi}{2}$. **214.** $\frac{1}{3}$.

216. $\frac{\pi}{2}$. *Indicación.* Completar la vía de integración L con el segmento OA del eje Ox.
217. No. **218.** Sí. **219.** No. **220.** Sí. **221.** No.
222. No. **223.** Sí. **226.** $\varphi=x^2yz$. **227.** $\varphi=x+xyz$.
228. $\varphi=x^2y-y^2+xz$. **229.** $\varphi=\ln|x+y+z|$.
230. $\varphi=\operatorname{arctg}(xyz)$. **231.** $\varphi=r$. **232.** $\varphi=\ln r$.

233. $\varphi=\frac{1}{3}r^3$. **234.** $\varphi=\alpha x+\beta y+\gamma z+C,\ C=\text{const.}$

235. $\varphi=xy+yz+zx+C$. **236.** $\varphi=xy+e^z+C$.
237. $\varphi=e^x\operatorname{sen}y+z+C$. **247.** a) Sí; b) no; c) sí.
249. $u=C_1x+C_2$.
250. $u=Ax^2+Bxy-Ay^2$, A y B cualesquiera.

251. $$u(x)=\begin{cases}\dfrac{x^n}{(n-1)\,n}+C_1x+C_2, & \text{si } n\neq 1,\\ x\ln|x|+C_1x+C_2, & \text{si } n=1\ (x\neq 0).\end{cases}$$

252. $I=\frac{-4}{15}\pi$. **253.** $I=-\frac{\pi}{3}$. **254.** $I=\frac{4}{3}\pi R^3$.

255. $I=0$.
256. $\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{j}+(y-x)\,\boldsymbol{k}$. **257.** $\boldsymbol{b}=(y^2-2xz)\,\boldsymbol{k}$.
258. $\boldsymbol{b}=(e^x-xe^y)\,\boldsymbol{j}$. **259.** $\boldsymbol{b}=3x^2\boldsymbol{j}+(2y^3-6xz)\,\boldsymbol{k}$.
260. $\boldsymbol{b}=-x(x+y^2)\,\boldsymbol{j}+(x^3+y^3)\,\boldsymbol{k}$.
261. $\boldsymbol{b}=-(xz^2+yze^{x^2})\,\boldsymbol{j}-2xyz\boldsymbol{k}$.

262. $\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(-z\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k})$.

263. $\boldsymbol{b}=-8yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+7xy\boldsymbol{k}$.
264. $\boldsymbol{b}=2xy^2z\boldsymbol{i}-3x^2yz\boldsymbol{j}+x^2y^2\boldsymbol{k}$.

265. $\boldsymbol{b}=\frac{1}{x}\operatorname{sen}xz\cdot\boldsymbol{i}-\frac{1}{z}\operatorname{sen}xz\cdot\boldsymbol{k}$

266. $\boldsymbol{b}=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}\,z-\boldsymbol{k}$.

267. a) $\rho=\varphi+C_1$, $\rho=z+C_2$, b) $\left.\begin{array}{l}\rho=\dfrac{1}{\ln C_1\varphi}\\ \rho=C_2 z\end{array}\right\}$,

c) $\varphi=C_1$, $r=C_2\operatorname{sen}^2\theta$.

268. $\operatorname{grad} u=2(\rho+\cos\varphi)\,\boldsymbol{e}_\rho-\left(2\operatorname{sen}\varphi+\dfrac{1}{\rho}e^z\cos\varphi\right)\times$
$\times\,\boldsymbol{e}_\varphi-e^z\operatorname{sen}\varphi\cdot\boldsymbol{e}_z$.

269. $\operatorname{grad} u=(\cos\varphi-3^\rho\ln 3)\,\boldsymbol{e}_\rho+\left(\dfrac{z}{\rho}\operatorname{sen}2\varphi-\operatorname{sen}\varphi\right)\times$
$\times\,\boldsymbol{e}_\varphi+\operatorname{sen}^2\varphi\cdot\boldsymbol{e}_z$.

270. $\operatorname{grad} u=2r\cos\theta\cdot\boldsymbol{e}_r-r\operatorname{sen}\theta\cdot\boldsymbol{e}_\theta$.

271. $\operatorname{grad} u=(6r\operatorname{sen}\theta+e^r\cos\varphi-1)\,\boldsymbol{e}_r+3r\cos\theta\cdot\boldsymbol{e}_\theta-$
$-\dfrac{e^r\operatorname{sen}\varphi}{r\operatorname{sen}\theta}\,\boldsymbol{e}_\varphi$.

272. $\operatorname{grad} u=-\mu\left(\dfrac{2\cos\theta}{r^3}\,\boldsymbol{e}_r+\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{r^3}\,\boldsymbol{e}_\theta\right)$.

273. $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=2+\dfrac{z}{\rho}\cos\varphi-e^\varphi\operatorname{sen}z$.

274. $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\dfrac{\varphi}{\rho}\operatorname{arctg}\rho+\dfrac{\varphi}{1+\rho^2}-(z^2+2z)\,e^z$.

275. $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=4r-\dfrac{2}{r}\cos^2\varphi\operatorname{ctg}\theta+\dfrac{1}{r(r^2+1)\operatorname{sen}\theta}$.

276. $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\dfrac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,\boldsymbol{e}_r-\left(2\cos\theta+\dfrac{\alpha\operatorname{sen}\varphi}{r\operatorname{sen}\theta}\right)\boldsymbol{e}_\theta-\dfrac{\alpha\operatorname{sen}\theta}{r}\,\boldsymbol{e}_\varphi$.

277. $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=-\dfrac{\varphi}{r}\operatorname{ctg}\theta\cdot\boldsymbol{e}_r+\dfrac{\varphi}{r}\,\boldsymbol{e}_\theta+\dfrac{2\cos\theta}{r}\,\boldsymbol{e}_\varphi$.

278. $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=-2\rho\boldsymbol{e}_\varphi+\dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\,\boldsymbol{e}_z$.

281. 24π. **282.** $\dfrac{1}{2}\pi$. **283.** 4π. **284.** $\dfrac{2}{3}\pi R^3$.

285. $4\pi R^4$. **286.** $-\dfrac{2}{3}R^3$.

287. 48. *Indicación.* Escribir las ecuaciones de las superficies en las coordenadas esféricas.

288. $u=\rho+\varphi+z+C$.

289. $u=\dfrac{1}{2}(\rho^2+\varphi^2+z^2)+C$. **290.** $u=\rho\varphi z+C$.

291. $u=e^\rho\operatorname{sen}\varphi+z^2+C$. **292.** $u=\rho\varphi\cos z+C$.

293. $u=r\theta+C$. **294.** $u=r^2+\varphi+\theta+C$.

295. $u=\frac{1}{2}(r\varphi^2+\theta^2)+C.$ **296.** $u=r\cos\varphi\operatorname{sen}\theta+C.$

297. $u=e^{\varphi}\operatorname{sen}\theta+\ln(1+\varphi^2)+C.$

298. 1. **299.** π^2. **300.** $2\pi R$. **301.** π^2. **302.** 1.

303. $\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1.$ **304.** 0. **305.** $-2\pi R^4$. **306.** π.

307. π. **308.** 0. **309.** 0. **310.** $\Delta u=4\varphi-\frac{\varphi z}{\rho}+\frac{6\varphi_z^2}{\rho^2}+2\varphi^3.$

311. $\Delta u=6\varphi\theta+12r\varphi^2+\frac{2}{r^2}+\varphi\operatorname{ctg}\theta+\frac{2\theta}{r^2}\operatorname{ctg}\theta+\frac{2r}{\operatorname{sen}^2\theta}.$

312. 1) Sí; 2. No.

313. 1) $u(\theta)=C_1\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right|+C_2$, 2) $u(\varphi)=C_1\varphi+C_2$.

314. $$u(r)=\begin{cases}\frac{r^{n+1}}{(n+1)(n+2)}+\frac{C_1}{r}+C_2, & n\neq-1,\ -2,\\ \ln r+\frac{C_1}{r}+C_2, & n=-1,\ (r\neq0)\\ -\frac{\ln r}{r}+\frac{C_1}{r}+C_2, & n=-2.\end{cases}$$

SUPLEMENTO I

PRINCIPALES OPERACIONES DEL ANALISIS VECTORIAL EN LAS COORDENADAS ORTOGONALES CURVILINEAS

1. Campo escalar está prefijado en las coordenadas ortogonales curvilíneas $u = u(q_1, q_2, q_3)$. Entonces

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1} e_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2} e_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3} e_3.$$

Operador de Laplace

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1 H_3}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right].$$

Casos particulares. a) El campo escalar está prefijado en las coordenadas cilíndricas $u = u(\rho, \varphi, z)$. Entonces

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho} e_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} e_z.$$

Operador de Laplace

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

b) El campo escalar está prefijado en las coordenadas esféricas $u = u(r, \theta, \varphi)$. Entonces

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r} e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi.$$

Operador de Laplace

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\operatorname{sen}\theta\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

II. Campo. vectorial está prefijado en las coordenadas ortogonales curvilíneas

$$a = a_1(q_1, q_2, q_3) e_1 + a_2(q_1, q_2, q_3) e_2 +$$
$$+ a_3(q_1, q_2, q_3) e_3.$$

Entonces

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial (a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (a_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial (a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right],$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{H_2 H_3} \boldsymbol{e}_1 & \frac{1}{H_1 H_3} \boldsymbol{e}_2 & \frac{1}{H_1 H_2} \boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ a_1 H_1 & a_2 H_2 & a_3 H_3 \end{vmatrix}.$$

Casos particulares. a) Campo vectorial está prefijado en las coordenadas cilíndricas

$$\boldsymbol{a} = a_1 (\rho, \varphi, z)\, \boldsymbol{e}_\rho + a_2 (\rho, \varphi, z) \boldsymbol{e}_\varphi + a_3 (\rho, \varphi, z)\, \boldsymbol{e}_z.$$

Entonces

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho a_1)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_3}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} \boldsymbol{e}_\rho & \boldsymbol{e}_\varphi & \frac{1}{\rho} \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & \rho a_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

b) Campo vectorial está prefijado en las coordenadas esféricas

$$\boldsymbol{a} = a_1 (r, \theta, \varphi)\, \boldsymbol{e}_r + a_2 (r, \theta, \varphi)\, \boldsymbol{e}_\theta + a_3 (r, \theta, \varphi)\, \boldsymbol{e}_\varphi.$$

Entonces

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (a_1 r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial (a_2 \operatorname{sen} \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial a_3}{\partial \varphi},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \boldsymbol{e}_r & \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \boldsymbol{e}_\theta & \frac{1}{r} \boldsymbol{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_1 & r a_2 & a_3 r \operatorname{sen} \theta \end{vmatrix}.$$

SUPLEMENTO II Elementos de areas de las superficies de coordenadas

Coordenadas	Superficies de coordenadas	Elementos de áreas
Generales q_1, q_2, q_3	$q_1=C=\text{const}$ $q_2=C=\text{const}$ $q_3=C=\text{const}$	$dS_1=H_2(C, q_2, q_3)\, H_3(C, q_2, q_3)\, dq_2 dq_3$ $dS_2=H_1(q_1, C, q_3)\, H_3(q_1, C, q_3)\, dq_1 dq_3$ $dS_3=H_1(q_1, q_2. C)\, H_2(q_1, q_2, C)\, dq_1 dq_2$
Cilíndricas $q_1=\rho$ $q_2=\varphi$ $q_3=z$	 $\rho=C=\text{const}$ $\varphi=C=\text{const}$ $z=C=\text{const}$	 $dS=C d\varphi\, dz$ $dS=d\rho\, dz$ $dS=\rho\, d\rho\, d\varphi$
Esféricas $q_1=r$ $q_2=\theta$ $q_3=\varphi$	 $r=C=\text{const}$ $\theta=C=\text{const}$ $\varphi=C=\text{const}$	 $dS=C^2 \operatorname{sen} \theta\, d\theta\, d\varphi$ $dS=r \operatorname{sen} C\, dr\, d\varphi$ $dS=r\, dr\, d\theta$

BIBLIOGRAFIA

Гольдфайн И. А., Векторный анализ и теория поля, ГИФМЛ, 1962. (I. A. Goldfain, Análisis vectorial y la teoría del campo)

2. B. P. Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, 7-a ed., Editorial «Mir», 1980.

3. Кальницкий Л. А., Добротин Д. А., Жевержеев В. Ф., Специальный курс высшей математики, «Высшая школа», 1976. (L. A. Kalnitzki, D. A. Dobrotin, V. F. Zheverzheev, Curso especial de matemáticas superiores)

4. Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Изд-во АН СССР, 1951. (N. E. Kochin, Curso del cálculo vectorial y los principios del cálculo tensorial)

5. Кручкович Г. И., Мордасова Г. М., Подольский В. А., Римский-Корсаков Б. С., Сулейманова Х. Р., Чегис И. А., Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики, «Высшая школа», 1970. (G. I. Kruchkovich y otros, Problemas y ejercicios de las temas especiales de matemáticas superiores)

6. Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, том II, «Высшая школа», 1973. (L. D. Kudriavtzev, Análisis matemático, Tomo II)

7. Ладон И. Ф., Основы векторного исчисления с приложениями к теории электромагнитного поля.— Издание ВЭТА, Ленинград, 1938. (I. F. Ladon, Fundamentos del cálculo vectorial con los suplementos a la teoría del campo electromagnético)

8. Лаптев Г. Ф., Элементы векторного исчисления, «Наука», 1975. (G. F. Laptev, Elementos del cálculo vectorial)

9. Мисюркеев И. В., Сборник задач и упражнений по методам математической физики, «Просвещение», 1975 (I. V. Misiurkeev, Problemas y ejercicios de los métodos de la física matemática)

10. Никольский С. М., Курс математического анализа, том II, «Наука», 1973. (S. M. Nikolski, Curso del análisis matemático, Tomo II)

11. Очан Ю. С., Сборник задач по методам математической физики, «Высшая школа», 1967.
(Ya. S. Ochan, Problemas de los métodos de la física matemática)
12. Пчелин Б. К., Векторный анализ для инженеров-электриков и радистов, «Энергия», 1968.
(B. K. Pchelin, Análisis vectorial para los ingenieros electricistas y de radio)

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, SGP, URSS.

En 1982 Editorial MIR publicará:

I. BRONSHTEIN, K. SEMENDIAEV

MANUAL DE MATEMATICAS PARA INGENIEROS Y ESTUDIANTES

El manual está compuesto por el Doctor en Ciencias Fisicomatemáticas, catedrático K. Semendiáev y por el catedrático I. Bronshtein. Contiene seis secciones: «Tablas y gráficas», «Matemática elemental», «Geometría analítica y diferencial», «Fundamentos del análisis matemático», «Capítulos complementarios del análisis» y «Tratamiento de las observaciones». Las tablas que vienen en el texto se dan con tres o cuatro cifras significativas y contienen los valores de los logaritmos decimales y naturales, las funciones exponenciales, hiperbólicas y trigonométricas, la función Gamma, las funciones de Bessel, los polinomios de Legendre, las integrales elípticas, la integral de probabilidad y otras tablas.
La matemática elemental comprende el Algebra, la Geometría y la Trigonometría. Los fundamentos del análisis matemático contiene una introducción al análisis, el cálculo diferencial e integral y las ecuaciones diferenciales ordinarias en derivadas parciales de 1° y 2° órdenes.
Los capítulos complementarios del análisis abarcan los números complejos y las funciones de variable compleja, el cálculo vectorial y las series de Fourier (análisis armónico). En la última sección se exponen los fundamentos de la teoría de probabilidades y de la teoría de errores, así como fórmulas empíricas y de interpolación.
Además de la gran cantidad de fórmulas que se exponen, los autores presentan una teoría breve y muestran el modo de resolver los problemas.
El libro está destinado a los estudiantes de las escuelas media y superior, así como a los especialistas.

N. EFIMOV

GEOMETRIA SUPERIOR

En este libro, escrito por el profesor N. Efímov, **lauredo con el premio Lenin y Doctor en Ciencias Fisicomatemáticas, se examina un gran número de problemas. Se da la argumentación matemática de: la geometría euclídea, las geometrías no euclídeas de Lobachevski y Riemann, la geometría proyectiva, la geometría de Minkovski y las cuestiones geométricas de la teoría especial de la relatividad, así como una noción general de las formas topológicas de la geometría de la curvatura constante. La obra se divide en tres partes. El material principal se expone en las primeras dos partes.** *El material* **de la tercera parte —nociones principales de la geometría de la curvatura constante— puede ser aprovechado en el trabajo de los círculos matemáticos.**

El libro se caracteriza por la claridad de su exposición y es comprensible para un amplio círculo de lectores, aunque las cuestiones que trata, por así decirlo, no siempre son sencillas. Esta monografía ha sido reeditada varias veces en la Unión Soviética y en otros países. Está destinada a los estudiantes de los centros docentes superiores, así como a todas aquellas personas que se interesan por las matemáticas.

V. MASLOV

MÉTODOS OPERATORIOS

La obra ofrecida, perteneciente a la pluma del Doctor en Ciencias Fisicomatemáticas V. Máslov, corresponde a la exposición de un curso de conferencias dictadas por el autor a los estudiantes de la facultad de matemática aplicada del Instituto de Construcción de Máquinas Electrónicas de Moscú. En la cuestiones contemporáneas de la matemática aplicada y de la física teórica, el análisis funcional y la teoría de los operadores lineales desempeñan un papel importante. Al mismo tiempo, los problemas actuales aplicados obligan a tratar las bases del análisis funcional desde otro punto de vista, e, incluso reformular la exposición tradicional de las mismas. Precisamente a este fin sirve este manual de estudio. En los primeros tres capítulos se exponen los principios del análisis funcional, necesarios para el método de resolución de una amplia clase de ecuaciones con derivadas parciales y de ecuaciones en diferencias finitas, propuesto por el autor. A este método se dedican los restantes capítulos del libro. El método de Máslov es una generalización de largo alcance del clásico método de operadores de Laplace—Heaviside. El mismo goza de gran estima en la URSS (en 1979, debido a ello, a esta obra le fue concebido el premio Estatal de la URSS) y en el extranjero.

La exposición tiene una evidente orientación aplicada. En calidad de ejemplos de empleo del método se muestran las resoluciones de muchos problemas físicos importantes.

El libro está destinado a los estudiantes de institutos de enseñanza superior, y será de utilidad a profesores de matemática y a los especialistas.