V.A. Kudriávtsev
B.P. Demidóvich

Breve Curso de *Matemáticas* Superiores

$$\sum_{n=1}^{\infty}$$

Editorial Mir Moscú

BREVE CURSO
DE MATEMÁTICAS
SUPERIORES

В. А. Кудрявцев
Б. П. Демидович

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Москва «Наука»

V. A. Kudriávtsev
B. P. Demidóvich

Breve Curso de Matemáticas Superiores

Editorial Mir
Moscú

Traducido del ruso por
S. A. Bulánov

Impreso en la URSS

На испанском языке

УДК 51=60

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica; manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, 1-110, GSP, URSS.

ISBN 5-03-000654-0

Indice

Introducción

En los últimos años, en la enseñanza de las matemáticas en las facultades especializadas, se nota una serie de nuevas tendencias. Cabe apuntar las principales.

a) Debido al desarrollo de la computación ha crecido sensibles mente el interés por los métodos numéricos de resolución de lo- problemas.

b) Se ha elevado la importancia del álgebra lineal. En muchos casos la geometría analítica se considera como una ilustración geométrica de los objetos geométricos correspondientes.

c) Para las aplicaciones, se siente la necesidad del álgebra vectorial.

d) No se discute el hecho de que el especialista en ciencias naturales debe tener conocimientos del análisis armónico.

e) Es necesario enseñar a los estudiantes los conceptos sobre los métodos numéricos (cuantitativos) de resolución de las ecuaciones diferenciales. Además, se deben impartir conocimientos sobre las ecuaciones de la física matemática.

f) Para algunas especialidades se requiere un conocimiento básico de los elementos de la teoría de las probabilidades.

Este libro toma en consideración estos hechos, modernizando el curso de matemáticas superiores.

La finalidad principal de la obra es la de servir como texto de estudio de matemáticas superiores para los estudiantes de las facultades de ciencias naturales (en especial de las facultades de geología, geografía, biología y agronomía).

Además de la exposición de los conceptos más importantes, en el libro se brindan aplicaciones en diversos campos. Actualmente las matemáticas superiores sirven de fundamento teórico de la mayoría de las disciplinas científico-naturales y técnicas. El dominio de los métodos matemáticos y la capacidad de utilizarlos en la práctica, son elementos imprescindibles para el buen desempeño de todo especialista en ciencias naturales.

Los autores

Capítulo I

Sistema de coordenadas cartesianas rectangulares en el plano y su aplicación a problemas simples

§ 1. Coordenadas cartesianas rectangulares de un punto sobre el plano

Llámanse *coordenadas de un punto* sobre el plano a los números que determinan la posición del primero en el segundo.

Las coordenadas cartesianas rectangulares sobre el plano se introducen del modo siguiente: se elige en dicho plano un punto O (*origen de las coordenadas*) y dos rectas orientadas, perpendiculares entre sí, Ox y Oy (*ejes de las coordenadas*) que pasan por dicho punto (fig. 1). Para mayor comodidad del examen suponemos que el eje Ox (*eje de las abscisas*) es horizontal y está dirigido de izquierda a derecha, a que el eje Oy (*eje de las ordenadas*) es vertical y está dirigido de abajo hacia arriba; de este modo el eje Oy está girado con respecto al eje Ox en un ángulo de 90° en el sentido contrario al de las agujas del reloj[1]). Además se elige una escala para medir las distancias.

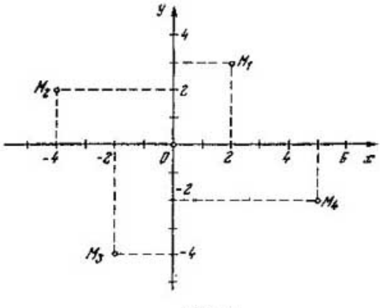

Fig. 1

Consideramos para un punto M dado, dos números: *la abscisa x y la ordenada y.*

Llámase *abscisa x* al número que expresa, en cierta escala, la distancia entre el punto y el eje de las ordenadas tomado con el signo «+», si el punto está situado a la derecha del eje de las ordenadas, y con el signo «—», si el punto se encuentra a la izquierda del eje de las ordenadas.

Llámase *ordenada y* al número que expresa, en cierta escala (generalmente la misma que para la abscisa) la distancia entre el punto y el eje de las abscisas tomado con el signo «+», si el punto está encima del eje de abscisas, y con el signo «—», si el punto se sitúa por debajo del eje de las abscisas.

---

[1]) La disposición de los ejes y la elección de sus sentidos positivo y negativo son, en general, arbitrarias.

Estos dos números x e y se toman como las **coordenadas** del punto M, pues determinan totalmente la posición del punto sobre el plano, es decir: *a cada par de números x e y le corresponde un solo punto cuyas coordenadas son estos mismos números; y recíprocamente, cada punto del plano posee determinadas coordenadas x e y*. Si un punto M tiene las coordenadas x e y, esto se escribirá así: $M(x, y)$ (primero se escribe la abscisa x y después la ordenada y). Como siempre el signo «+» puede ser omitido en la notación de las coordenadas.

	I	II	III	IV
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

Fig. 2

Los ejes Ox y Oy dividen el plano en cuatro partes llamadas *cuadrantes*. Efectuando la numeración de estos cuadrantes (I, II, III y IV) en el sentido contrario al de las agujas del reloj, y partiendo del cuadrante en el que las dos coordenadas son positivas, se obtiene la tabla siguiente y la **figura 2** para los signos de las coordenadas:

	I	II	III	IV
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

El segmento OM que une el origen de las coordenadas O con el punto M (fig. 6) se llama *radio vector* de este punto. Designando con φ el ángulo formado por el segmento OM y el sentido positivo del eje Ox, y con r su longitud, se deduce recurriendo al triángulo OMM' para el punto M situado en el primer cuadrante:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = r\operatorname{sen}\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

No es difícil convencerse de que las fórmulas (1) serán justas para todas las coordenadas de los puntos situados en todos los cuadrantes. De este modo el signo de la abscisa x del punto M coincide con el del coseno y el signo de su ordenada y coincide con el signo del seno en el cuadrante correspondiente.

Es fácil ver que si un punto pertenece al eje de las abscisas, su ordenada y es igual a cero; si este punto pertenece al eje de las ordenadas, su abscisa x es nula y viceversa. Por consiguiente, si un punto coincide con el origen de las coordenadas, sus coordenadas serán iguales a cero.

EJEMPLO. Los puntos $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ y $M_4(x_4, y_4)$ de la fig. 1 tienen las coordenadas: $x_1 = +2$, $y_1 = +3$; $x_2 = -4$, $y_2 = +2$; $x_3 = -2$, $y_3 = -4$; $x_4 = +5$, $y_4 = -2$.

Para abreviar, en adelante las coordenadas cartesianas rectangulares serán solamente llamadas **coordenadas rectangulares**.

En los párrafos siguientes examinaremos la aplicación de las coordenadas rectangulares en el plano en la resolución de problemas sencillos.

§ 2. Transformación del sistema de las coordenadas rectangulares

Para resolver algunos problemas, a veces es útil elegir en reemplazo del sistema de coordenadas dado Oxy otro sistema de coordenadas rectangulares $O'x'y'$ orientado de un modo determinado respecto al primero. Por ejemplo, para el caso de los vuelos interplanetarios, se puede utilizar un sistema de coordenadas, cuyo origen se encuentra en el centro de la Tierra (sistema **geocéntrico** de coordenadas); pero es más cómodo utilizar un sistema de coordenadas con origen en el centro del Sol (sistema **heliocéntrico** de coordenadas).

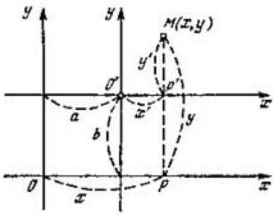

Fig. 3

Surge el problema de cómo transformar un sistema de coordenadas en otro.

Primeramente examinemos un caso muy simple (fig. 3) cuando los ejes del «nuevo sistema de coordenadas» $O'x'y'$ son paralelos a los del «viejo sistema de coordenadas» Oxy y tienen las mismas direcciones que las de este segundo sistema (*traslación paralela del sistema de coordenadas*).

Supongamos que el origen del nuevo sistema de coordenadas es el punto O' cuyas coordenadas son (a, b) en el viejo sistema de coordenadas. Entonces el punto M del plano, cuyas «viejas coordenadas» son (x, y), tendrá las «nuevas coordenadas» $[x', y']$ (para que resulte más claro las escribimos entre corchetes). De la fig. 3 obtenemos inmediatamente

$$x' = x - a, \quad y' = y - b, \tag{1}$$

es decir, *las nuevas coordenadas del punto son iguales a las viejas menos las viejas del nuevo origen.*

Recíprocamente, de las (1) hallamos

$$x = x' + a, \quad y = y' + b. \tag{2}$$

Supongamos ahora que el «nuevo sistema» de coordenadas $Ox'y'$ con el mismo origen O se hace girar en un ángulo α respecto al «viejo sistema» (fig. 4), es decir, $\angle x'Ox = \alpha$; el ángulo α se considera positivo, si el giro se produce en sentido contrario al de las agujas del reloj, y negativo, si el giro se realiza en el sentido opuesto (*rotación del sistema de coordenadas*).

Designemos por β el ángulo formado por el radio vector $r = OM$ del punto M y el eje Ox'; en este caso el segmento OM teniendo en cuenta el signo del ángulo β[1]), formará con el eje Ox un ángulo $\alpha + \beta$. Ahora mediante las fórmulas (1) del § 1 para cualquier posición del punto M, tendremos

$$x = r\cos(\alpha + \beta) = r\cos\alpha\cos\beta - r\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta, \tag{3}$$

e

$$y = r\,\mathrm{sen}(\alpha + \beta) = r\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + r\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta. \tag{4}$$

Como las nuevas coordenadas del punto M son, evidentemente,

$$x' = r\cos\beta, \quad y' = r\,\mathrm{sen}\,\beta, \tag{5}$$

a partir de las fórmulas (3) y (4) obtenemos

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\,\mathrm{sen}\,\alpha, \\ y &= x'\,\mathrm{sen}\,\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Para memorizar mejor las fórmulas del sistema (6), se utiliza el método mnemotécnico siguiente: se dice que la primera fórmula de (6) contiene un **desorden total** y que la segunda contiene un **orden total**. Efectivamente, en el segundo miembro de la primera fórmula, se tiene primero el coseno y luego el seno; además está presente el signo «—». La segunda fórmula del sistema (6) no posee, en este sentido, irregularidades.

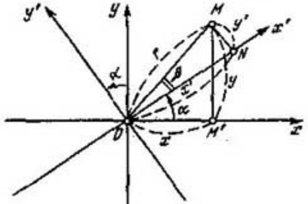

Fig. 4

Las fórmulas (6) expresan las viejas coordenadas x e y del punto M por medio de sus nuevas coordenadas x' e y'. Para poder expresar las nuevas coordenadas x' e y' mediante las viejas x e y, es suficiente resolver el sistema (6) respecto a x' e y'. Sin embargo se puede proceder de un modo más simple: a saber, tomamos el sistema $Ox'y'$ por el «viejo» y el sistema Oxy, por el «nuevo». Si en este caso se tiene en cuenta que el segundo sistema está girado a un ángulo $-\alpha$ respecto

[1]) Aquí el ángulo β se considera positivo, si el radio vector OM está girado respecto al eje Ox' en el sentido contrario al de las agujas del reloj, y negativo, si está girado en el sentido de las agujas del reloj.

al primero y sistituimos en las fórmulas (6) x' e y' respectivamente por x e y y viceversa, además considerando que $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ y que $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ tendromos

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha, \\ y' &= -x\operatorname{sen} + y\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Por fin, en el caso general cuando el nuevo origen de las coordenadas es el punto O' (a, b) y el eje $O'x'$ forma con el eje Ox un ángulo α compatibilizando las fórmulas (2) y (6) hallamos

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha, \\ y &= b + x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

De modo análogo, de las fórmulas (1) y (7) obtenemos

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\alpha + (y-b)\operatorname{sen}\alpha, \\ y' &= -(x-a)\operatorname{sen}\alpha + (y-b)\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Las relaciones (8) y (9) muestran que las fórmulas de transformación de las coordenadas rectangulares (de traslación y de rotación de ejes) son **funciones lineales** tanto de las coordenadas nuevas como de las viejas, es decir, en esas relaciones estas coordenadas son de primer grado.

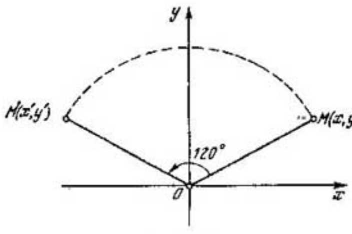

Fig. 5

EJEMPLO. Al segmento OM, cuyo punto M tiene las coordenadas (x, y) se ha girado en un ángulo $\alpha = 120°$ en sentido contrario al de las agujas del reloj (fig. 5). ¿Cuáles serán las coordenadas x' e y' de la nueva posición M' del punto M?

Suponiendo que el punto M está ligado con el sistema móvil de coordenadas $Ox'y'$ mediante las fórmulas (6), hallamos

$$x' = x\cos 120° - y\operatorname{sen} 120° = -(x + y\sqrt{3})/2,$$
$$y' = x\operatorname{sen} 120° + y\cos 120° = (x\sqrt{3} - y)/2.$$

§ 3. Distancia entre dos puntos en el plano

1) Hallamos primeramente la distancia r desde un punto M (x, y) hasta el origen de las coordenadas O $(0, 0)$ (fig. 6).

La distancia $r = OM$ es evidentemente la hipotenusa del triángulo rectángulo $\Delta OMM'$ cuyos catetos son $OM' = |x|$ y $M'M = |y|$.

De acuerdo con el teorema de Pitágoras obtenemos

$$r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

De este modo, *la distancia desde un punto al origen de las coordenadas es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las coordenadas de este punto.*

2) En el caso general, supongamos que debemos hallar la distancia $d=AB$ entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ (fig. 7).

Fig. 6

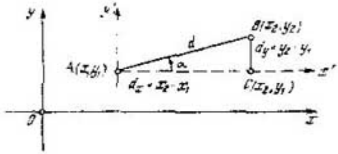

Fig. 7

Elegimos un nuevo sistema de coordenadas $Ax'y'$, cuyo origen coincide con el punto A y sus ejes son paralelos a los anteriores y tienen respectivamente las mismas direcciones. En este caso, en el nuevo sistema, las coordenadas de los puntos A y B serán (§ 2) $A\,[0,\ 0]$ y $B\,[x_2-x_1,\ y_2-y_1]$, de donde, basándonos en la fórmula (1) obtenemos

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}, \tag{2}$$

es decir, *la distancia entre dos puntos en el plano (cualquiera que sea la disposición de los mismos) es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias de las coordenadas respectivas de estos puntos.*

NOTA. La fórmula (2) da también la longitud del segmento AB.
Es fácil determinar la dirección de este segmento. A partir del triángulo rectangular ΔABC tenemos

$$d_x=d\cos\alpha=x_2-x_1,\quad d_y=d\operatorname{sen}\alpha=y_2-y_1 \tag{3}$$

(d_x y d_y son las proyecciones del segmento AB sobre los ejes de las coordenadas Oxy), de donde obtenemos

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{d},\qquad \operatorname{sen}\alpha=\frac{y_2-y_1}{d},\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

donde d se define por la fórmula (2).

EJEMPLO. Un vehículo se desplaza por el terreno desde el punto $A\,(-30,\ 80)$ hasta el punto $B\,(50,\ 20)$ (respecto a un cierto sistema de coordenadas Oxy). Las coordenadas de los puntos están dadas en kilómetros. Hallar el tramo d recorrido por el vehículo, si éste se desplaza en línea recta.

Utilizando la fórmula (2) tenemos

$$d=\sqrt{(50+30)^2+(20-80)^2}=\sqrt{6400+3600}=100\ \text{(km)}.$$

§ 4. División del segmento en una relación dada

Supongamos que el segmento AB (fig. 8) que une los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ está dividido por el punto C en dos segmentos AC y CB. La relación entre los segmentos AC y CB es igual a l $(l \geqslant 0)$:

$$\frac{AC}{CB} = l. \tag{1}$$

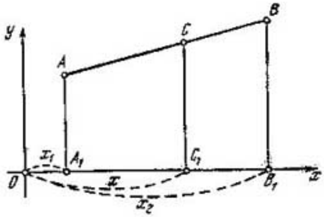

Fig. 8

Se requiere expresar las coordenadas x e y del punto $C(x, y)$ por medio de las coordenadas de los extremos del segmento AB.

Bajemos respectivamente las perpendiculares AA_1, BB_1 y CC_1 desde los puntos A, B y C al eje Ox. En este caso obtendremos que tres rectas paralelas A_1A, C_1C, B_1B intersecan los lados del ángulo (no representado en la figura) formado por las rectas AB y Ox. Como se sabe de la geometría elemental un haz de rectas paralelas divide los lados de un ángulo en partes proporcionales; por eso

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1} = \frac{AC}{CB},$$

de donde basándose en la igualdad (1) tendremos

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1} = l. \tag{2}$$

En la fig. 8 se ve que $A_1C_1 = OC_1 - OA_1 = x - x_1$, $C_1B_1 = OB_1 - OC_1 = x_2 - x$. Sustituyendo estas expresiones en la fórmula (2) obtendremos

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = l. \tag{3}$$

Resolviendo la ecuación (3) respecto a la abscisa incógnita x tendremos

$$x = \frac{x_1 + lx_2}{1+l};$$

de modo análogo

$$y = \frac{y_1 + ly_2}{1+l}.$$

Así, pues, las coordenadas del punto $C(x, y)$ que dividen el segmento AB según la relación dada (desde A hacia B) se determinan por las fórmulas

$$x = \frac{x_1 + lx_2}{1+l}, \quad y = \frac{y_1 + ly_2}{1+l}. \tag{4}$$

2*

Si el punto C divide el segmento AB en dos partes iguales, $AC = CB$ y, por consiguiente, $l = AC/CB = 1$. Designando las coordenadas del punto medio del segmento AB por $\bar{x}$, $\bar{y}$ de la fórmula (4) obtendremos

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}, \tag{5}$$

es decir, ***las coordenadas del punto medio** de un segmento son iguales a las semisumas de las coordenadas correspondientes de sus extremos.*

NOTA. Para deducir las fórmulas (4) y (5) hemos supuesto que los extremos A y B del segmento AB están situados en el primer cuadrante y que, por consiguiente, las coordenadas de los puntos A y B son positivas. Se puede fácilmente demostrar que las fórmulas (4) y (5) serán también válidas en el caso cuando uno o los dos extremos del segmento AB están situados en otros cuadrantes y, por consiguiente, una o varias coordenadas de los puntos A y B son negativas.

EJEMPLO. Calcular las coordenadas del punto $C(x, y)$ que divide el segmento AB entre los puntos $A(-5, -3)$ y $B(4, -6)$ en la relación $AC/CB = 3/2$.

En este caso $l = 3/2$ y, por consiguiente,

$$x = \frac{-5 + \frac{3}{2}\cdot 4}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{2}{5}, \qquad y = \frac{-3 + \frac{3}{2}\cdot(-6)}{1 + \frac{3}{2}} = -4\frac{4}{5}.$$

§ 5. Area de un triángulo

Supongamos que es necesario hallar el área S del triángulo ABC (fig. 9) cuyos vértices son $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

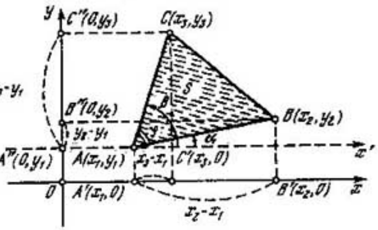

Fig. 9

Supongamos que $AB = c$, $AC = b$ y que los ángulos formados por estos lados y el eje Ox son respectivamente iguales a α y β.

Según el § 3 (véase la nota) tenemos (fig. 9)

$$\left.\begin{aligned} A'B' &= c_x = c\cos\alpha = x_2 - x_1, \\ A''B'' &= c_y = c\,\mathrm{sen}\,\alpha = y_2 - y_1 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

y

$$\left.\begin{aligned} A'C' &= b_x = b\cos\beta = x_3 - x_1, \\ A''C'' &= b_y = b\,\mathrm{sen}\,\beta = y_3 - y_1. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Sea $\varphi = \angle CAB$; es evidente (fig. 9) que $\varphi = \beta - \alpha$. Según la conocida fórmula trigonométrica obtenemos

$$S = \frac{1}{2} bc\,\mathrm{sen}\,\varphi = \frac{1}{2} bc\,\mathrm{sen}\,(\beta - \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} bc\,(\mathrm{sen}\,\beta\cos\alpha - \cos\beta\,\mathrm{sen}\,\alpha) = \frac{1}{2}(b_y c_x - b_x c_y), \qquad (3)$$

de donde, en virtud de los sistemas (1) y (2) tenemos

$$S = \frac{1}{2}[(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]. \qquad (4)$$

Es necesario remarcar que para otra disposición de los vértices la fórmula (4) puede dar un área negativa S del triángulo. Por eso la fórmula que determina el área del triángulo se escribe generalmente en forma siguiente

$$S = \pm\frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)], \qquad (4')$$

donde el signo se elige de manera que dicha área sea positiva.

Utilizando la noción de *determinante de segundo orden*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

se puede escribir la fórmula (4′) en una forma más fácil para memorizar

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

La fórmula (4′) se simplifica si el punto $A(x_1, y_1)$ se encuentra en el origen de las coordenadas. Es decir, suponiendo que $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ obtenemos

$$S = \pm\frac{1}{2}(x_2 y_3 - x_3 y_2).$$

Si los puntos A, B, C pertenecen a una recta, el área $S = 0$; y a la inversa, si $S = 0$, los vértices A, B y C pertenecen a una recta.

EJEMPLO. Un solar tiene forma de triángulo cuyos vértices son $A(-2, -1)$, $B(3, 5)$ y $C(-1, 4)$ (las dimensiones están indicadas en kilómetros). Calcular el área S de este solar.

Según la fórmula (5) tenemos

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3+2 & -1+2 \\ 5+1 & 4+1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}(25 - 6) = 9{,}5\ (\mathrm{km}^2),$$

o sea $S = 950$ ha.

OBSERVACIÓN. El cálculo de un polígono se reduce a la determinación de áreas triangulares. Para eso es suficiente dividir el polígono en triángulos cuyas áreas se calculan por la fórmula (4).

EJERCICIOS

1. Marcar los puntos: A (2, 3), B (—4, 1), C (2, —3), D (—2, —2), E (—5, 0).

2. Determinar las coordenadas de los vértices de un triángulo equilátero situado en el primer cuadrante, de lado igual a 10, si uno de sus vértices coincide con el origen de las coordenadas O y la base del triángulo está situada en el eje Ox.

3. Determinar las coordenadas del punto M (x, y) simétrico al punto A (1, 2) respecto: a) al eje Ox; b) al eje Oy; c) a las bisectrices de los cuadrantes I y III; a las bisectrices de los cuadrantes II y IV.

4. La recta MN es paralela al eje de las ordenadas y se encuentra a la derecha de éste a una distancia de 5 unidades. Hallar las coordenadas del punto A_1 simétrico al punto A (2, 4) respecto a la recta MN, así como las coordenadas del punto B_1 simétrico al punto B (—1, 3) respecto a la recta MN.

5. Hallar sobre el eje Ox un punto situado a una distancia de 5 unidades del punto A (3, 4).

6. El segmento AB, donde A (2, 5) y B (4, 8) está dividido por el punto C según la relación de 2 : 3. Hallar las coordenadas del punto C.

7. El punto C (2, 3) divide el segmento AB en una relación de 1 : 2. Hallar las coordenadas del punto B, si se sabe que las del punto A son $x = 1$ e $y = 2$.

8. Los vértices de un triángulo son A (—2, 0), B (6, 6) y C (1, —4). Hallar la longitud de la bisectriz trazada a partir del vértice A.

9. En los puntos A (—2, 1) y B (7, 4) están respectivamente situadas las masas $m_1 = 10$ g y $m_2 = 20$ g. Hallar las coordenadas del centro de masas de este sistema.

10. Hallar las coordenadas del centro de masas N de un triángulo ABC con vértices A (—2, 1), B (2, —1), C (4, 3). (El centro de masas del triángulo coincide con el punto de intersección de sus medianas. Como se sabe, este punto divide cada una de las medianas según la relación de 2 : 1 contando a partir del vértice.)

11. El segmento situado entre los puntos A (x_0, y_0) y B (x, y) está dividido en n partes iguales. Determinar las coordenadas x_i e y_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ de los puntos de división.

12. Calcular el área de un triángulo de vértices A (—2, —2), B (—1, 3) y C (3, —1).

13. Demostrar que los puntos A (—7, —3), B (—1, 1) y C (2, 3) pertenecen a una misma recta.

14. El área del triángulo ABC cuyos vértices son A (—2, 1), B (2, 2) y C $(4, y)$ es igual a 15. Determinar la ordenada del vértice C.

15. Un bosque tiene forma de cuadrilátero con vértices A (0 m, 200 m), B (200 m, 100 m), C (500 m, 300 m) y D (100 m, 700 m).
Hallar el área del bosque.

Capítulo II

Ecuación de la línea

§ 1. Conjuntos

Se entiende por *conjunto* $X = \{x, x', x'', \ldots\}$ una colección de algunos *elementos* $x, x', x'', \ldots$. Si x es un elemento del conjunto X, se escribe $x \in X$ (se lee: x pertenece al conjunto X); si y no es un elemento de un conjunto X, se escribe $y \notin X$ (se lee: y no pertenece al conjunto X).

EJEMPLO 1. X es el conjunto de todos los estudiantes en el aula dada.

EJEMPLO 2. $X = \{1, 2, 3, \ldots\}$ es el conjunto de números naturales.

Es útil introducir la noción de conjunto vacío $\varnothing$, es decir, de un conjunto que no contiene elementos. Esto nos dispensa en particular de la necesidad de demostrar cada vez la existencia de un solo elemento del conjunto dado.

EJEMPLO 3. El conjunto de hombres con tres cabezas es vacío.

Los conjuntos X y X' se consideran *iguales*: $X = X'$, si están compuestos por los mismos elementos.

DEFINICIÓN 1. *El conjunto Y, compuesto por una parte de elementos del conjunto X o que coincide con éste, se llama* ***subconjunto*** *del conjunto X; en este caso se escribe*

$$Y \subset X. \tag{1}$$

Convenimos en considerar que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

Si los conjuntos se representan por medio de «figuras lógicas», a la relación (1) le corresponde la fig. 10.

Utilizando el símbolo $\forall$ que se lee «para todo», se puede mostrar la relación (1) bajo la forma equivalente siguiente:

$$\forall y \in Y \Rightarrow y \in X, \tag{1'}$$

donde la flecha $\Rightarrow$ reemplaza la palabra «implica».

EJEMPLO 4. Sea X el conjunto de todos los estudiantes (varones y mujeres) de primer año y sea Y el conjunto de todas las estudiantes de primer año. Es evidente que $Y \subset X$.

Si $Y \subset X$ y $X \subset Y$, entonces, es evidente que $X = Y$.

DEFINICIÓN 2. *Se llama* ***unión (suma)*** *de dos conjuntos X e Y al conjunto $X \cup Y$ (el signo $\cup$ es el símbolo de unión) compuesto de todos* *los elementos pertenecientes al menos a uno de los conjuntos dados, es decir, pertenecientes a X, a Y, o bien a X e Y simultáneamente* (fig. 11).

Análogamente se determina la *unión* de un número mayor de conjuntos. Por ejemplo, por unión $X \cup Y \cup Z$ de tres conjuntos se

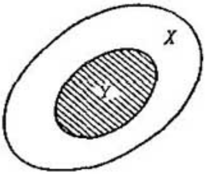

Fig. 10

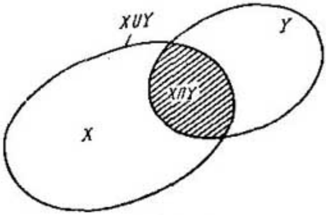

Fig. 11

entiende el conjunto de todos los elementos pertenecientes al menos a uno de tres conjuntos X, Y, Z. Lógicamente, el símbolo de unión de conjuntos corresponde a la conjunción disyuntiva «o».

EJEMPLO 5. $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

DEFINICIÓN 3. *Se llama* ***intersección (producto)*** *de dos conjuntos X e Y al conjunto $X \cap Y$ ($\cap$ es el signo de intersección), compuesto de todos los elementos pertenecientes al mismo tiempo a X y a Y (parte común de dos conjuntos)* (fig. 11).

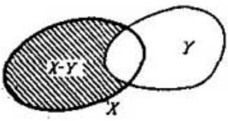

Fig. 12

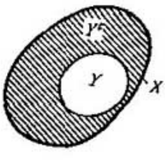

Fig. 13

De este modo, el signo de intersección de conjuntos corresponde lógicamente a la conjunción **copulativa** «y». Si los conjuntos X e Y no poseen elementos comunes, la intersección de ellos es vacía:

$$X \cap Y = \varnothing.$$

Del mismo modo se define la *intersección* de un número mayor de conjuntos. Por ejemplo, por intersección $X \cap Y \cap Z$ de tres conjuntos se entiende el conjunto de todos los elementos pertenecientes al mismo tiempo a los conjuntos X, Y y Z.

EJEMPLO 6. $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$.

DEFINICIÓN 4. *Se llama **diferencia** de conjuntos X e Y (se escribe $X \setminus Y$) al conjunto de los elementos de X que no pertenecen al conjunto Y* (fig. 12).

Si $Y \subset X$, el conjunto $Y^C = X \setminus Y$ se llama *complemento* del conjunto Y hasta el conjunto X (fig. 13).

Es evidente que $Y \cup Y^C = X$, $Y \cap Y^C = \varnothing$.

EJEMPLO 7. $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\} = \{1\}$.

§ 2. El método de coordenadas en el plano

En el capítulo I hemos visto cómo, utilizando las coordenadas rectangulares, los problemas geométricos se pueden resolver de modo puramente algebraico.

La parte de las matemáticas que estudia las propiedades de las figuras geométricas con ayuda del álgebra se llama *geometría analítica* y la aplicación, para estos fines de las coordenadas, se llama *método de coordenadas*.

Antes hemos utilizado el método de coordenadas para resolver una serie de problemas importantes, pero particulares. Pasamos ahora a la exposición sistemática del método utilizado en la geometría analítica para resolver el **problema general** que consiste en estudiar, por medio del análisis matemático, la forma, disposición y las propiedades de una línea dada.

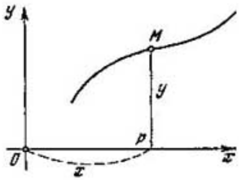

Fig. 14

Supongamos que tenemos una línea en el plano (fig. 14). Las coordenadas x e y de un punto perteneciente a esta línea no pueden ser arbitrarias; éstas deben ser sometidas a ciertas limitaciones condicionadas por las propiedades geométricas de la línea dada. La circunstancia de que los números x e y representan las coordenadas de un punto perteneciente a dicha línea se escribe analíticamente en forma de una ecuación, denominada *ecuación de la línea en el plano*.

La esencia del método de coordenadas consiste en que a cada línea le corresponde su ecuación[1]) y luego las propiedades de esta línea se estudian por medio de un análisis teórico de la ecuación correspondiente.

§ 3. La línea considerada como un conjunto de puntos

Una línea en el plano se define generalmente como *un conjunto de puntos* que poseen ciertas propiedades geométricas propias solamente a ellos.

---

[1]) Más exactamente, una clase de ecuaciones equivalentes.

EJEMPLO 1. La circunferencia de radio R (fig. 15) es el conjunto de todos los puntos del plano situados a la distancia R del punto O **(centro de la circunferencia).**

En otras palabras, sólo pertenecen a la circunferencia los puntos, cuya distancia hasta el centro de la circunferencia es igual a su radio.

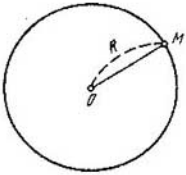

Fig. 15

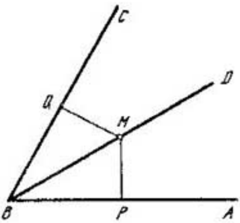

Fig. 16

EJEMPLO 2. La bisectriz del ángulo ABC (fig. 16) es el conjunto de todos los puntos situados dentro del ángulo y equidistantes de sus lados.

Esto confirma que: 1) para cada punto M de la bisectriz BD las longitudes de las perpendiculares MP y MQ bajadas respectivamente sobre los lados BA y BC del ángulo son iguales: $MP = MQ$; 2) cada punto interior del ángulo ABC, que no pertenece a su bisectriz, se encuentra más cerca de uno de los lados del ángulo que del otro.

§ 4. Ecuaciones de la línea en el plano

Formulemos ahora una definición más precisa de la ecuación de una línea en el plano[1]).

DEFINICIÓN. *Llámase* ***ecuación de una línea (ecuación de una curva)*** *perteneciente al plano Oxy a aquella a la cual satisfacen las coordenadas x e y de cada punto de la línea dada y no es satisfecha por las coordenadas de cualquier punto no situado sobre esta línea.*

De este modo para constatar que una ecuación dada es la ecuación de una cierta línea K, es necesario y suficiente: 1) demostrar que las coordenadas de cualquier punto perteneciente a la línea K satisfacen esta ecuación; 2) demostrar, recíprocamente, que si las coordenadas de cierto punto satisfacen esta ecuación, el punto obligatoriamente pertenece a la línea K.

---

[1]) En este libro por *curva* se entiende toda linea, independientemente de que sea recta o no.

De aquí automáticamente se deduce que: 1′) si las coordenadas de cualquier punto no satisfacen la ecuación dada, el punto no pertenece a la línea K; 2′) si el punto no pertenece a la línea K, sus coordenadas x e y no satisfacen la ecuación dada.

Si un punto M (x, y) se desplaza por la línea K, sus coordenadas x e y, variando, satisfacen en todo momento la ecuación de esta curva. Por eso las coordenadas del punto M (x, y) se llaman *coordenadas corrientes* del punto M de la línea K.

Las coordenadas corrientes del punto M de la curva dada K sobre el plano Oxy se designan generalmente con x e y, la primera de ellas es la abscisa del punto M y la segunda, su ordenada. Sin embargo, si resultase conveniente, las coordenadas corrientes del punto M pueden ser designadas con cualesquiera letras, por ejemplo, M (X, Y) o M (ξ, η), etc. Así, por ejemplo, las ecuaciones

$$y = 2x \quad \text{e} \quad Y = 2X,$$

donde los puntos N (x, y) y N (X, Y) pertenecen al plano Oxy y son las ecuaciones de una misma recta de este plano.

La ecuación de la línea, noción fundamental de la geometría analítica, se explica mediante una serie de ejemplos.

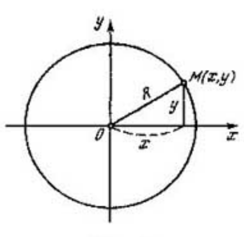

Fig. 17

EJEMPLO 1. Escribir la ecuación de una circunferencia, cuyo radio es igual a R, con centro en el origen de las coordenadas.

Sobre la circunferencia (fig. 17) tomamos un punto arbitrario M (x, y) y lo unimos con el centro O. Según la definición de circunferencia, tenemos $OM = R$, es decir, $\sqrt{x^2 + y^2} = R$, de donde

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{1}$$

La ecuación (1) vincula entre sí las coordenadas x e y de cada punto de la circunferencia dada. Y a la inversa, si las coordenadas del punto M (x, y) satisfacen la ecuación (1) es evidente que $OM = R$ y, por consiguiente, el punto pertenece a nuestra circunferencia. De este modo, la ecuación (1) es una circunferencia de radio R con centro en el origen de las coordenadas.

EJEMPLO 2. Escribir las ecuaciones de bisectrices de ángulos de los cuadrantes de las coordenadas.

Examinemos primero la bisectriz de los ángulos de los cuadrantes I y III del sistema de coordenadas (fig. 18, *a*). Tomamos sobre esta bisectriz un punto arbitrario M (x, y). Si el punto M está situado en el primer cuadrante, su abscisa y su ordenada serán positivas e iguales entre sí (de acuerdo con la propiedad de bisectriz). Si el punto M (x, y) se halla en el III cuadrante, su abscisa y su ordenada serán negativas e iguales en valor absoluto; por eso las coordenadas x e y de este punto serán también iguales. Por consiguiente, en ambos casos tenemos

$$x = y. \tag{2}$$

Recíprocamente, si las coordenadas x e y de un punto cualquiera M (x, y) satisfacen la ecuación (2), este punto evidentemente pertenece a la bisectriz de los ángulos de los cuadrantes I y III. Por eso la ecuación (2) corresponde a la bisectriz de los ángulos de los cuadrantes I y III.

Examinemos ahora la bisectriz de los ángulos de los cuadrantes II y IV (fig. 18, *b*). Tomemos sobre ésta un punto cualquiera N (x, y). Este punto puede estar situado en el II o en el IV cuadrante, pero sus coordenadas x e y son iguales en valor absoluto y de signos contrarios. Por consiguiente, en ambos casos tenemos

$$y = -x. \tag{3}$$

Y a la inversa, si un punto cualquiera N (x, y) satisface la ecuación (3), este punto evidentemente pertenece a la bisectriz de los ángulos de los cuadrantes II y IV. De este modo, la ecuación (3) es la ecuación de la bisectriz de los ángulos de los cuadrantes II y IV.

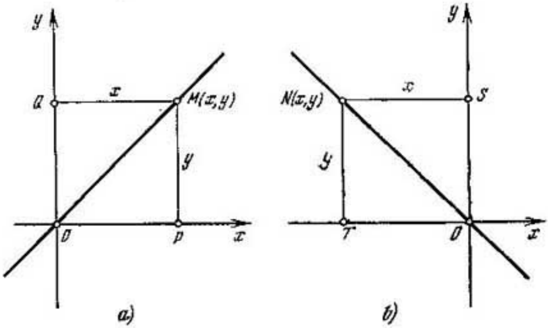

Fig. 18

EJEMPLO 3. Escribir la ecuación de una recta paralela al eje de ordenadas.

Sean la recta $AB \parallel Oy$ y el segmento $OA = a$ (fig. 19, *a*). En este caso, para todo punto M (x, y) de la recta AB la abscisa es

$$x = a. \tag{4}$$

Recíprocamente, si la abscisa de un punto M (x, y) es igual a a, este punto pertenece a la recta AB.

De este modo, la ecuación (4) es la ecuación de una recta paralela al eje Oy y que se encuentra de éste a una distancia igual al valor numérico de a; este valor es positivo, si la recta está situada a la derecha del eje Oy, y negativo si la recta se dispone a la izquierda del eje Oy.

En particular, cuando $a = 0$ obtenemos la ecuación del eje de las ordenadas: $x = 0$.

EJEMPLO 4. Formular la ecuación de la recta paralela al eje de las abscisas.

De modo totalmente análogo, si la recta $CD \parallel Ox$ y $OC = b$ (fig. 19, *b*), su ecuación será

$$y = b;$$

además, si la recta CD está encima del eje Ox, entonces b es positiva; si la recta CD se encuentra debajo del eje Ox, entonces b es negativa.

En particular, cuando $b = 0$, obtenemos la ecuación del eje de las abscisas: $y = 0$.

EJEMPLO 5. Hallar la línea cuya distancia al punto B (12, 16) es dos veces mayor que la distancia al punto A (3, 4).

Si $M(x, y)$ es un punto arbitrario de la línea incógnita, entonces según los datos del problema, tenemos

$$2\,AM = BM. \tag{5}$$

Para formular la ecuación de esta línea se deben expresar AM y BM por medio de las coordenadas x e y del punto M. Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos (§ 3 del cap. I) tenemos

$$AM = \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}, \quad BM = \sqrt{(x-12)^2+(y-16)^2}$$

de donde según la ecuación (5)

$$2\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2} = \sqrt{(x-12)^2+(y-16)^2}.$$

Esta es la ecuación de la línea incógnita.

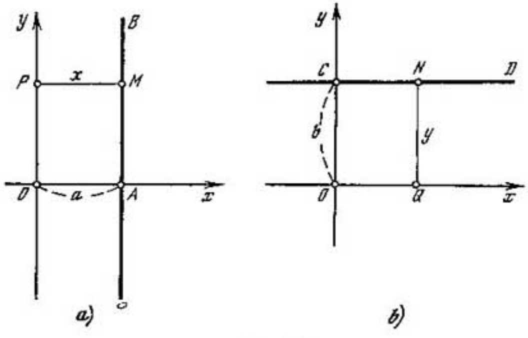

Fig. 19

Pero una ecuación así no permite juzgar fácilmente acerca de la naturaleza de la línea, por eso es necesario simplificarla. Después de elevar al cuadrado los dos miembros y eliminar los paréntesis obtenemos

$$4x^2 - 24x + 36 + 4y^2 - 32y + 64 = x^2 - 24x + 144 + y^2 - 32y + 256.$$

Después de algunas transformaciones sencillas obtenemos la ecuación equivalente

$$x^2 + y^2 = 100.$$

Comparando la ecuación obtenida con la (1) vemos que la línea incógnita es una circunferencia de radio 10, con centro en el origen de las coordenadas.

§ 5. Trazado de una línea a partir de su ecuación

Si las variables x e y están unidas por una ecuación, el conjunto de puntos $M(x, y)$, cuyas coordenadas satisfacen a esta ecuación, representa, en general, una línea en el plano (*«imagen geométrica de la ecuación»*).

En casos particulares esta línea puede degenerar en uno o en varios puntos. También son posibles casos cuando a la ecuación no le corresponde un conjunto de puntos cualesquiera.

Por ejemplo, a la ecuación

$$(x-1)^2+(y-2)^2=0$$

le corresponde un solo punto (1, 2), porque a esta ecuación satisface un solo par de valores: $x=1$ e $y=2$.

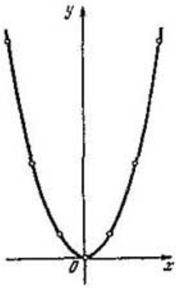

Fig. 20

A la ecuación

$$x^2+y^2=-1$$

no le corresponde ningún conjunto de puntos porque a esta ecuación no puede satisfacer ningún valor real de x e y.

Conociendo la ecuación de la línea ésta se puede construir punto por punto.

EJEMPLO. Trazar la línea expresada por la ecuación

$$y=x^2 \tag{1}$$

(generalmente se dice más brevemente: trazar la línea $y=x^2$).

Dando en la ecuación (1) valores numéricos a la abscisa x y calculando los valores numéricos correspondientes de la ordenada y se obtiene la tabla siguiente:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	9	4	1	0	1	4	9	...

Después de marcar en el plano los puntos correspondientes, se ve que ellos determinan el trazado de cierta línea; el contorno de esta línea se aprecia con mayor claridad, si el número de puntos crece. Uniendo estos puntos con una línea, cuyo carácter tiene en cuenta la posición de los puntos intermedios[1]), obtendremos la línea determinada por la ecuación (1) (fig. 20). Esta línea se llama *parábola*.

§ 6. Algunos problemas elementales

El conocimiento de la ecuación de una línea permite resolver fácilmente problemas sencillos relacionados con la posición de esta línea en el plano.

---

[1]) Para poder juzgar sobre la posición de los puntos intermedios de la línea tenemos que estudiar previamente las propiedades generales de la ecuación de la misma (véase el cap. XI más detalladamente).

PROBLEMA 1. Sean dadas la ecuación de una línea K y las coordenadas de un punto M (a, b). Determinar, si el punto M pertenece a la línea K.

En otras palabras, es preciso determinar si pasa o no la línea K por el punto M.

Partiendo de la noción de ecuación de la línea obtenemos la siguiente **regla**: *para determinar, si el punto M pertenece a la línea K es necesario reemplazar con las coordenadas del punto las variables de esta ecuación. Si en este caso se cumple la ecuación* (es decir, como resultado del reemplazo se obtiene una igualdad), *el punto pertenece a la línea; en caso contrario, si las coordenadas del punto no satisfacen la ecuación de la línea, este punto no pertenece a ella.*

En un caso particular, la línea pasa por el origen de las coordenadas si, y solo si, la ecuación de la línea se cumple para $x = 0$ e $y = 0$.

EJEMPLO 1. Sea dada la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 25. \tag{1}$$

Determinar, si los puntos M $(-3, 4)$ y N $(4, -2)$ pertenecen a esta circunferencia.

Introduciendo las coordenadas del punto M en la ecuación (1) obtenemos la identidad

$$(-3)^2 + 4^2 = 25.$$

Por consiguiente, el punto M pertenece a esta circunferencia.

De modo análogo, reemplazando las coordenadas del punto N en la ecuación (1), tendremos

$$4^2 + (-2)^2 \neq 25.$$

De este modo, el punto N no pertenece a esta circunferencia.

PROBLEMA 2. Hallar el punto de intersección de dos líneas dadas por sus ecuaciones.

El punto de intersección pertenece al mismo tiempo a ambas líneas. Por consiguiente, las coordenadas de este punto satisfacen las ecuaciones de ambas líneas. De aquí obtenemos la siguiente **regla**: *para hallar las coordenadas del punto de intersección de dos líneas es suficiente resolver el sistema formado por sus ecuaciones.* Si este sistema no tiene soluciones reales, las líneas no se intersecan.

EJEMPLO 2. Hallar los puntos de intersección de la parábola $y = x^2$ con la recta $y = 4$.

Resolviendo el sistema

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2, \\ y &= 4, \end{aligned}\right\}$$

obtenemos dos puntos de intersección A $(-2, 4)$ y B $(2, 4)$.

PROBLEMA 3. Hallar los puntos de intersección de una línea dada con los ejes de coordenadas.

Este problema es un caso particular del problema 2.

Teniendo en cuenta que la ecuación del eje Ox es $y = 0$ obtenemos la **regla**: *para hallar las abscisas de los puntos de intersección de la línea dada con el eje Ox es necesario tomar $y = 0$ en la ecuación de esta línea y resolver la ecuación obtenida respecto a x.*

Del mismo modo, la ecuación del eje Oy es $x = 0$, de donde obtenemos la **regla**: *para hallar las ordenadas de los puntos de intersección de la línea dada con el eje Oy se debe tomar $x = 0$ en la ecuación de esta línea y resolver la ecuación obtenida respecto a y.*

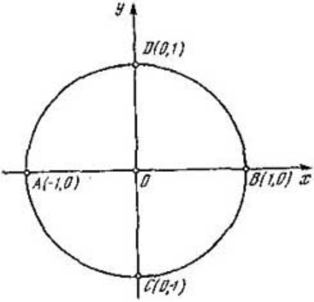

Fig. 21

EJEMPLO 3. Hallar los puntos de intersección de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (2)$$

con los ejes de las coordenadas.

Considerando que en la ecuación (2) $y = 0$, obtenemos $x^2 = 1$, se decir $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$. De aquí hallamos los dos puntos de intersección de esta circunferencia con el eje Ox (fig. 21): $A\ (-1,\ 0)$ y $B\ (1,\ 0)$.

Del mismo modo, considerando que en la ecuación (2) $x = 0$ obtenemos $y^2 = 1$, es decir, $y_1 = -1$ e $y_2 = 1$. Por consiguiente, hay dos puntos de intersección de esta circunferencia con el eje Oy (fig. 21): $C\ (0,\ -1)$ y $D\ (0,\ 1)$.

§ 7. Dos problemas fundamentales de la geometría analítica en el plano

Resumiendo el contenido de este capítulo, se puede decir que a cada línea en el plano le corresponde cierta ecuación entre las coordenadas corrientes $(x,\ y)$ de un punto de esta línea. Y viceversa, a cada ecuación con x e y, donde x e y son las coordenadas de un punto en el plano, le corresponde en general cierta línea cuyas propiedades son enteramente determinadas por esta ecuación.

Como resultado surgen, naturalmente, dos problemas fundamentales de la geometría analítica en el plano.

1) *Dada una línea, considerada como un conjunto de puntos, escribir la ecuación de esta línea.*

2) *Sea dada la ecuación de una línea. Con ayuda de esta ecuación estudiar las propiedades geométricas (la forma y disposición) de esta línea.*

§ 8. Líneas algebraicas

DEFINICIÓN. *Llámase* **línea (o curva) de grado n** $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ *a la determinada por una ecuación de grado n respecto a las coordenadas rectangulares corrientes.*

Tales líneas se llaman algebraicas. Por ejemplo, las líneas

$$x + y - 1 = 0, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

son respectivamente curvas de primero, segundo y tercer grado.

La forma general de una curva de primer grado es

$$Ax + By + C = 0,$$

donde los coeficientes A y B no son simultáneamente iguales a cero, es decir, $A^2 + B^2 \neq 0$. Como se demostrará más adelante (véase el cap. III) todas las curvas de primer grado son líneas rectas.

La forma general de una curva de segundo grado es

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde los coeficientes A, B y C no son simultáneamente iguales a cero, es decir, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Observemos que no a toda ecuación de segundo orden le corresponde una curva real en el plano. Por ejemplo, a la ecuación $x^2 + 2xy + y^2 + 1 = 0$ no le corresponde ninguna curva sobre el plano Oxy, porque es evidente que no existen números reales x e y que satisfagan esta ecuación.

En los capítulos siguientes estudiaremos detalladamente la curva de primer grado (línea recta) y examinaremos las principales curvas de segundo grado (circunferencia, elipse, hipérbola, parábola).

La ecuación de una curva de grado n puede ser escrita en la forma siguiente:

$$\sum_{\substack{p,\, q=0 \\ p+q\leqslant n}}^{n} a_{pq}x^p y^q = 0, \tag{1}$$

donde por lo menos uno de los coeficientes dominantes a_{pq}, es decir, tales que $p + q = n$, se diferencia de cero ($\sum$ es el signo de la suma).

Señalemos una propiedad importante: **el grado de la curva (1) no depende de la elección del sistema de coordenadas rectangulares.**

Efectivamente, eligiendo otro sistema de coordenadas rectangulares $O'x'y'$ a partir de las fórmulas de transformación (§ 2) tenemos

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1x' + b_1y' + c_1, \\ y &= a_2x' + b_2y' + c_2, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

donde a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2)$ son coeficientes constantes.

De aquí resulta que la ecuación de la curva (1) en las nuevas coordenadas $O'x'y'$ tiene la forma

$$\sum_{\substack{p',\, q'=0 \\ p'+q'\leqslant n'}}^{n'} a'_{p'q'}x'_{p'}y'_{q'} = 0, \tag{3}$$

donde n' es el grado de la curva transformada. Es evidente que $n' \leqslant n$.

De modo análogo, partiendo de la ecuación (3) y efectuando el paso inverso de las coordenadas x', y' a las coordenadas x, y, obtendremos la ecuación (1) en la cual $n \leqslant n'$. Por consiguiente, $n' = n$.

EJERCICIOS

1. Escribir la ecuación de la línea, con la distancia de sus puntos hasta el eje Ox dos veces mayor que hasta el eje Oy.

2. Escribir la ecuación de la línea, cuyos puntos son equidistantes de los puntos dados: A (2, 1) y B (—3, 0).

3. ¿Cuál es la curva que describe el centro de gravedad del triángulo ABC cuyos vértices A (6, 0) y B (—6, 0) son fijos, si el tercer C (x_3, y_3) describe la circunferencia $x_3^2 + y_3^2 = 36$?

4. ¿Qué imágenes geométricas corresponden a las ecuaciones: a) $xy = 0$; b) $x^2 + y^2 = 0$; c) $x^2 - 1 = 0$; d) $y^2 - 3y + 2 = 0$; e) $x^2 - xy = 0$?

5. Construir por sus puntos las curvas dadas por las ecuaciones: a) $y = 2 - x$; b) $y = 2x - x^2$; c) $y = \pm\sqrt{100 - x^2}$; d) $y = \pm\frac{3}{5}\sqrt{100 - x^2}$.

6. Indicar cuáles puntos de A (0, 0), B (1, 1), C (1, —1), D (—1, —1), E (1, 2) pertenecen a la curva $y = x^2$ y cuáles no.

7. Hallar los puntos de intersección de la curva $y = 2 + x - x^2$ con los ejes de las coordenadas.

8. Hallar los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$ con la recta $x - y = 0$.

Capítulo III

La línea recta

§ 1. Ecuación de la recta

Sea PQ cierta recta perteneciente al plano Oxy (fig. 22). Tracemos por un punto arbitrario M_0 (x_0, y_0) de esta recta (llamado condicionalmente «punto de partida») una línea recta M_0x' paralela al eje Ox y orientada en el mismo sentido que este eje. En este caso el ángulo menor no negativo $\varphi = \angle QM_0x'$ $(0 \leqslant \varphi < \pi)$, formado

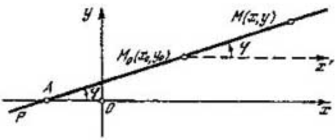

Fig. 22

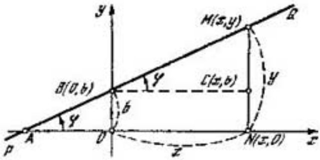

Fig. 23

por la semirrecta M_0Q situada encima del eje M_0x' o en este eje, y el eje M_0x', se llama *ángulo* entre la recta dada y el eje Ox. Es evidente que este ángulo no depende de la selección del punto M_0. Si la recta PQ corta el eje Ox en cierto punto A $(a, 0)$, φ es el ángulo ordinario entre las dos rectas orientadas. Si $PQ \parallel Ox$, es evidente que $\varphi = 0$. El punto de partida M_0 de la recta y el ángulo φ («dirección de la recta») determinan simplemente la posición de esta recta sobre el plano.

1) Sea primeramente $0 \leqslant \varphi < \pi/2$. En este caso la recta PQ corta el eje Oy en un punto B $(0, b)$, que puede ser considerado como el punto de partida.

Sea $y = NM$ la ordenada del punto corriente M (x, y) de la recta (fig. 23) que se compone de dos partes:

$$y = NC + CM, \tag{1}$$

la primera de las cuales es constante y la segunda, variable. Al introducir el coeficiente angular $\operatorname{tg} \varphi = k$, de la fig. 23 se tiene, para $x \geqslant 0$,

$$NC = b \quad \text{y} \quad CM = BC \operatorname{tg} \varphi = kx. \tag{2}$$

De este modo, para $x \geqslant 0$,

$$y = b + kx. \tag{3}$$

No es difícil de demostrar que la fórmula (3) es también válida para $x < 0$.

Acabamos de demostrar que las coordenadas de cualquier punto $M(x, y)$ de la recta PQ satisfacen la ecuación (3). Es fácil convencernos de lo opuesto: si las coordenadas de un punto cualquiera $M_1(x_1, y_1)$ satisfacen la ecuación (3), el punto M_1 pertenece **necesariamente** a la recta PQ. Por consiguiente, la ecuación (3) es la de la recta PQ (llamada *ecuación de la recta con coeficiente angular*). Las magnitudes constantes b y k (*parámetros*) tienen las significaciones siguientes: $b = OB$ es el *segmento inicial* (más exactamente, la *ordenada al origen*) y $k = \operatorname{tg} \varphi$ es el *coeficiente angular*. Remarquemos que si el punto B está situado encima del eje Ox, $b > 0$ y si B se encuentra debajo del eje Ox, $b < 0$. Cuando $b = 0$, la recta pasa por el origen de las coordenadas y su ecuación es

$$y = kx. \tag{4}$$

Cuando $k = 0$ obtenemos la ecuación de una recta paralela al eje Ox:

$$y = b.$$

2) Si $\pi/2 < \varphi < \pi$, mediante razonamientos análogos llegamos también a la ecuación (3).

3) Si $\varphi = \pi/2$, es decir, la recta AB es perpendicular al eje Ox, su ecuación es (véase el cap. II)

$$x = a, \tag{5}$$

donde a es la abscisa **de la traza** de esta recta sobre el eje Ox (es decir, la abscisa del punto donde ella corta el eje Ox).

OBSERVACIÓN. Como casos particulares obtenemos las ecuaciones de los ejes de las coordenadas:

$$y = 0 \text{ (eje } Ox) \quad \text{y} \quad x = 0 \text{ (eje } Oy). \tag{6}$$

Es fácil construir una recta según su ecuación.

EJEMPLO. Construir la recta dada por la ecuación

$$y = \frac{3}{2}x - 4.$$

Se sabe que dos puntos determinan por completo la posición de una recta: por eso es suficiente con hallar dos puntos por los cuales pasa la recta. En esta ecuación $b = -4$. Por consiguiente, la recta pasa por el punto $B(0, -4)$. Por otro lado, las coordenadas x e y de cualquier punto perteneciente a nuestra recta están relacionadas con la ecuación dada. Por eso, al conocer la abscisa de un punto de la recta, por medio de la ecuación de ésta hallaremos la ordenada de este punto. Supongamos, por ejemplo, que $x = 2$; mediante la ecuación de la recta obtenemos $y = -1$. De este modo, nuestra recta pasa por los puntos $A\ (2, -1)$ y $B\ (0, -4)$. Al construir estos puntos por sus coordenadas y trazar por ellos una recta (fig. 24) obtendremos la recta buscada.

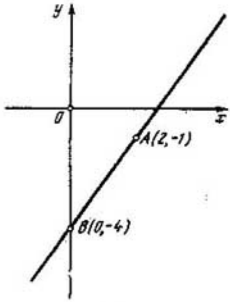

Fig. 24

De lo explicado se deduce que para una recta arbitraria en el plano se puede componer su ecuación; a la inversa, conociendo la ecuación de una recta, se puede construirla. De este modo, la ecuación de una recta caracteriza completamente su posición sobre el plano.

De las fórmulas (3) y (5) se deduce que la ecuación de una recta es de **primer grado** respecto a las coordenadas corrientes x e y. Es también justa la afirmación recíproca.

TEOREMA. *Toda ecuación no degenerada de primer grado*

$$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0) \qquad (7)$$

es la ecuación de una línea recta perteneciente al plano Oxy *(ecuación general de la recta).*

DEMOSTRACIÓN. 1) Sea primeramente $B \neq 0$. En este caso la ecuación (7) puede ser escrita así:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \qquad (8)$$

Comparándola con la (3) obtenemos que ésta es la ecuación de la recta con coeficiente angular $k = -A/B$ y la ordenada al origen $b = -C/B$.

2) Sea ahora $B = 0$; en este caso $A \neq 0$. Tenemos, $Ax + C = 0$ y

$$x = -C/A. \qquad (9)$$

La ecuación (9) es la de una recta paralela al eje Oy que corta un segmento $a = -C/A$ en el eje Ox.

Todos los casos posibles están agotados, el teorema queda demostrado.

§ 2. Ángulo entre dos rectas

Examinemos dos rectas (no paralelas al eje Oy) representadas por sus ecuaciones con coeficientes angulares (fig. 25):

$$y = kx + b, \quad \text{donde } k = \operatorname{tg}\varphi \qquad (1)$$

e

$$y = k'x + b', \quad \text{donde } k' = \operatorname{tg}\varphi' \qquad (2)$$

Se requiere determinar el ángulo θ entre ellas. Más exactamente entendremos por θ el ángulo más pequeño obtenido como resultado de una rotación en sentido contrario al de las agujas del reloj de la segunda recta, respecto a la primera ($0 \leqslant \theta < \pi$). Este ángulo θ (fig. 25) es igual al ángulo ACB del triángulo ABC. Como se sabe de la geometría elemental, el ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes. Por eso

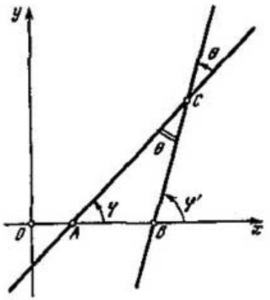

Fig. 25

$$\varphi' = \varphi + \theta \quad \text{o} \quad \theta = \varphi' - \varphi;$$

de aquí, aplicando una conocida fórmula trigonométrica, obtenemos

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\varphi' - \varphi) = \frac{\operatorname{tg}\varphi' - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi'}.$$

Sustituyendo $\operatorname{tg}\varphi$ y $\operatorname{tg}\varphi'$ respectivamente por k y k' tendremos definitivamente

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k' - k}{1 + kk'}. \tag{3}$$

La fórmula (3) da la expresión de la tangente del ángulo entre dos rectas por los coeficientes angulares de estas rectas.

Ahora deduzcamos las condiciones de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas.

Si las rectas (1) y (2) son paralelas, entonces $\varphi' = \varphi$ y, por consiguiente,

$$k' = k. \tag{4}$$

Recíprocamente, si se cumple la condición (4), teniendo en cuenta que φ' y φ se encuentran dentro de los límites de 0 a π tenemos

$$\varphi' = \varphi, \tag{5}$$

y, por consiguiente, las rectas examinadas son paralelas o se juntan (paralelismo en sentido amplio).

REGLA 1. *Las rectas sobre el plano son paralelas (en sentido amplio), si, y sólo si, sus coeficientes angulares son iguales entre sí.*

Si dos rectas son perpendiculares, $\theta = \pi/2$ y, por consiguiente,

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{1 + kk'}{k' - k} = 0;$$

de aquí $1 + kk' = 0$ y

$$k' = -1/k. \tag{6}$$

Es también justa la afirmación recíproca.

REGLA 2. *Dos rectas en el plano son perpendiculares si, y sólo si, sus coeficientes angulares son inversos y de signos contrarios*[1]).

Sean dadas ahora las ecuaciones de las rectas en forma general:

$$Ax + By + C = 0 \tag{7}$$

y

$$A'x + B'y + C' = 0. \tag{8}$$

Suponiendo que $B \neq 0$ y $B' \neq 0$ obtenemos

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \tag{7'}$$

e

$$y = -\frac{A'}{B'}x - \frac{C'}{B'}. \tag{8'}$$

Por consiguiente, los coeficientes angulares de estas rectas son:

$$k = -\frac{A}{B}, \quad k' = -\frac{A'}{B'}. \tag{9}$$

Con ayuda de la fórmula (3) realizando cálculos sencillos, hallamos la tangente del ángulo formado por estas rectas:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{AB' - A'B}{AA' + BB'}. \tag{10}$$

De aquí obtenemos: 1) la **condición de paralelismo** de dos rectas ($\theta = 0$)

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} \tag{11}$$

y 2) la **condición de perpendicularidad** de dos rectas ($\theta = \pi/2$)

$$AA' + BB' = 0. \tag{12}$$

Destaquemos, en particular, que las rectas

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{y} \quad Bx - Ay + C_1 = 0$$

son mutuamente perpendiculares.

EJEMPLO. Determinar el ángulo formado por las rectas $y = x$ e $y = 1{,}001\,x + 10$.

Aquí los coeficientes angulares de las rectas son: $k = 1$ y $k' = 1{,}001$. Mediante la fórmula (3) obtenemos

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1{,}001 - 1}{1 + 1\cdot 1{,}001} = \frac{0{,}001}{2{,}001} \approx 0{,}0005 = \frac{1}{2000}.$$

---

[1]) Para las rectas paralelas a los ejes Ox y Oy se supone que $1/0 = \infty$ y $1/\infty = 0$.

Puesto que para los ángulos θ pequeños es válida la igualdad aproximada $\theta \approx \operatorname{tg} \theta$, entonces

$$\theta \approx \frac{1}{2000} \text{ rad} \approx \frac{1}{2000} \cdot 57°18' = \frac{3438'}{2000} \approx 1{,}7'.$$

§ 3. Ecuación de la recta que pasa por un punto conocido en una dirección dada

Sea que la recta PM forma un ángulo φ con la dirección positiva del eje Ox (fig. 26) y pasa por el punto dado $P(x_1, y_1)$. Deduzcamos la ecuación de esta recta, suponiendo primero que no es paralela al eje Oy.

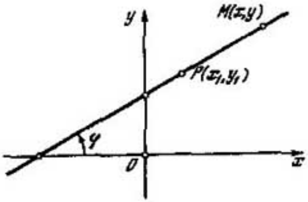

Fig. 26

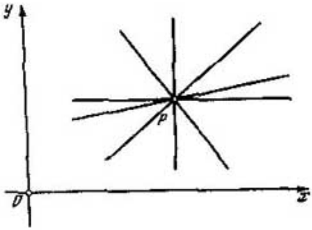

Fig. 27

En este caso, como sabemos, la ecuación de la recta se escribe así:

$$y = kx + b, \tag{1}$$

donde: $k = \operatorname{tg} \varphi$ es el coeficiente angular de la recta; b, la longitud del segmento cortado por nuestra recta sobre el eje Oy. Como el punto $P(x_1, y_1)$ pertenece a la recta PM, sus coordenadas x_1 e y_1 satisfacen la ecuación (1), es decir,

$$y_1 = kx_1 + b. \tag{2}$$

Sustrayendo la igualdad (2) de la (1), obtendremos

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{3}$$

Ésta es precisamente la ecuación de la recta incógnita.

Si la recta que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ es paralela al eje Oy, su ecuación será, evidentemente

$$x = x_1. \tag{4}$$

Si k es un número dado, la ecuación (3) representa una recta bien determinada. Si k es un parámetro variable, esta ecuación determina un *haz de rectas* que pasan por el punto $P(x_1, y_1)$ (fig. 27). En este caso k se llama *parámetro del haz*.

EJEMPLO 1. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto P (3, 2) y es paralela a la recta:

$$y=\frac{4}{3}x-7.$$

Puesto que la recta incógnita es paralela a la recta dada, su coeficiente angular $k = 4/3$. Por consiguiente, según la fórmula (3) la ecuación de está recta se escribe así

$$y-2=\frac{4}{3}(x-3)$$

o

$$y=\frac{4}{3}x-2.$$

EJEMPLO 2. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto P (4, 5) y es perpendicular a la recta:

$$y=-\frac{2}{3}x+7.$$

Puesto que la recta incógnita es perpendicular a la recta con coeficiente angular $k = -2/3$, entonces su coeficiente angular es $k' = -1/k = 3/2$. Por consiguiente, según la fórmula (3), la ecuación de esta recta es:

$$y-5=\frac{3}{2}(x-4)$$

o, en definitiva,

$$y=\frac{3}{2}x-1.$$

§ 4. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados

Sa sabe que por dos puntos que no coinciden se puede trazar solamente una recta. Determinemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$.

Supongamos primero que $x_1 \neq x_2$, es decir, la recta PQ no es paralela al eje Oy. Puesto que la recta PQ pasa por el punto $P(x_1, y_1)$, su ecuación tiene la forma (véase el § 3)

$$y - y_1 = k(x - x_1), \tag{1}$$

donde k es el coeficiente angular desconocido de esta recta. Sin embargo, se sabe que nuestra recta pasa también por el punto $Q(x_2, y_2)$, por eso las coordenadas x_2 e y_2 de este punto deben satisfacer la ecuación (1). De aquí,

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

y, por consiguiente, para $x_2 \neq x_1$ tenemos

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{2}$$

Sustituyendo la expresión (2) del coeficiente angular k en la ecuación (1) obtenemos la ecuación de la recta PQ:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1). \tag{3}$$

Esta ecuación para $y_1 \neq y_2$ puede ser también escrita en forma de proporción

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{3'}$$

Si $x_1 = x_2$, es decir, la recta que pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es paralela al eje Oy, la ecuación de esta recta será evidentemente

$$x=x_1.$$

EJEMPLO. Escribir la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(4, -2)$ y $Q(3, -1)$.

Según la ecuación (3) tenemos

$$\frac{x-4}{3-4}=\frac{y+2}{-1+2}, \quad \text{o bien} \quad y=-x+2.$$

§ 5. Ecuación de la recta en «segmentos»

Deduzcamos la ecuación de la recta cuya posición en el plano está definida por los segmentos no nulos que ella corta al intersecar los ejes de las coordenadas. Supongamos, por ejemplo, que la recta AB corta sobre el eje Ox el segmento $OA = a$ y sobre el eje Oy, el segmento $OB = b$ (fig. 28). Con todo eso está claro que la posición de la recta está enteramente determinada.

Para deducir la ecuación de la recta AB notemos que ella pasa por los puntos $A(a, 0)$ y $B(0, b)$; por eso su ecuación se deduce fácilmente de la ecuación (3') (véase el § 4), si consideramos que $x_1 = a$, $y_1 = 0$ y $x_2 = 0$, $y_2 = b$. Tenemos

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0},$$

de donde

$$\frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1,$$

y, finalmente,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{1}$$

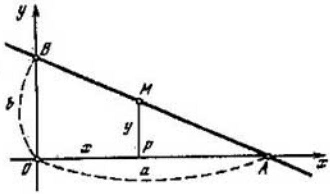

Fig. 28

La ecuación obtenida es precisamente la *ecuación de la recta en «segmentos»*. Aquí x e y son habitualmente las coordenadas de un punto arbitrario $M(x, y)$ situado sobre la recta AB (fig. 28).

EJEMPLO. Escribir las ecuaciones de la recta AB que corta el segmento $OA = 5$ sobre el eje Ox y el segmento $OB = -4$ sobre el eje Oy.
Suponiendo que en la ecuación (1) $a = 5$ y $b = -4$ obtendremos

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-4} = 1, \quad \text{o bien} \quad \frac{x}{5} - \frac{y}{4} = 1.$$

OBSERVACIÓN. La ecuación de una recta que pasa por el origen de las coordenadas o que es paralela a uno de los ejes, no puede ser escrita como la ecuación de una recta en «segmentos».

§ 6. Punto de intersección de dos rectas

Sean dadas dos rectas

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

y

$$A'x + B'y + C' = 0. \tag{2}$$

El punto de intersección de estas rectas pertenece tanto a la primera como a la segunda. Por eso las coordenadas del punto de intersección deben satisfacer tanto la ecuación de la primera recta como la de la segunda. Por consiguiente, *para hallar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas es suficiente resolver el sistema formado por las ecuaciones de estas rectas.*

Eliminando sucesivamente las incógnitas x e y de las ecuaciones (1) y (2) tendremos

$$(AB' - A'B)\,x + (CB' - C'B) = 0 \tag{3}$$

y

$$(AB' - A'B)\,y + (AC' - A'C) = 0. \tag{4}$$

De aquí, si $AB' - A'B \neq 0$, obtenemos para las coordenadas del punto de intersección de las rectas, las expresiones siguientes:

$$x = -\frac{CB' - C'B}{AB' - A'B}, \quad y = -\frac{AC' - A'C}{AB' - A'B}, \tag{5}$$

o, introduciendo los determinantes de segundo orden (véase el § 5 del cap. I), tenemos

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} C & B \\ C' & B' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}, \quad y = -\frac{\begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}. \tag{6}$$

Para las rectas (1) y (2) son posibles los tres casos siguientes.

1) $AB' - A'B \neq 0$, es decir,

$$\frac{A'}{A} \neq \frac{B'}{B}.$$

Según el § 2 las rectas no son paralelas. Las coordenadas de su único punto de intersección se determinan mediante las fórmulas (6).

2) $AB' - A'B = 0$, $CB' - C'B \neq 0$ o $AC' - A'C \neq 0$, es decir,

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} \neq \frac{C'}{C}.$$

Las rectas son paralelas (véase el § 2) y no hay punto de intersección. Analíticamente se ve que por lo menos una de las ecuaciones (3) ó (4) contradice las condiciones iniciales y esto significa que el sistema (1) y (2) es incompatible.

3) $AB' - A'B = 0$, $CB' - C'B = 0$, $AC' - A'C = 0$, es decir,

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}.$$

Las rectas (1) y (2) se juntan y de este modo existe un sinnúmero de puntos de intersección. En este caso los primeros miembros de las ecuaciones (1) y (2) difieren solamente por un factor constante y, por consiguiente, el sistema de estas ecuaciones admite un sinnúmero de soluciones.

EJEMPLO. Resolviendo el sistema de ecuaciones de las rectas

$$3x + 4y - 10 = 0,$$
$$2x + 5y - 9 = 0$$

obtenemos $x = 2$, $y = 1$. Por consiguiente, estas rectas se intersecan en el punto $N(2, 1)$.

§ 7. Distancia de un punto a una recta

Examinemos la recta KL representada por la ecuación general

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

y el punto $M(x_1, y_1)$. Como **distancia** entre el punto M y la recta KL (o entre la recta KL y el punto M) se entiende la longitud de la per-

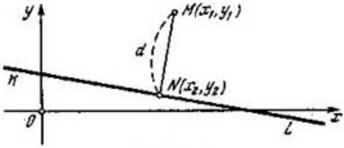

Fig. 29

pendicular $d = MN$ ($MN \perp KL$) bajada desde el punto M hasta la recta KL (fig. 29).

La ecuación de la perpendicular MN puede ser escrita en la forma (véase el § 2)

$$B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0, \tag{2}$$

de donde, para el pie de la perpendicular $N(x_2, y_2)$ tendremos

$$B(x_2 - x_1) - A(y_2 - y_1) = 0 \tag{3}$$

y, por consiguiente,

$$\frac{x_2-x_1}{A}=\frac{y_2-y_1}{B}=t, \tag{4}$$

donde t es el factor de proporcionalidad. Por eso

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{A^2+B^2}\,|t|. \tag{5}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que el punto $N(x_2, y_2)$ se encuentra en la recta KL y que mediante la (4) tenemos $x_2 = x_1 + At$, $y_2 = y_1 + Bt$, obtenemos

$$\begin{aligned} Ax_2 + By_2 + C &= A(x_1 + At) + B(y_1 + Bt) + C = \\ &= (Ax_1 + By_1 + C) + t(A^2 + B^2) = 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$t=-\frac{Ax_1+By_1+C}{A^2+B^2}. \tag{6}$$

De este modo en virtud de la fórmula (5) tenemos

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{7}$$

En particular, suponiendo que $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, obtenemos la distancia de la recta hasta el origen de las coordenadas

$$d_0=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{8}$$

OBSERVACIÓN. Al dividir los dos miembros de la ecuación de la recta (1) por $\sqrt{A^2+B^2}$ obtendremos la ecuación

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0, \tag{9}$$

cuyo miembro indepenendiente $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ es numéricamente igual a la distancia entre la recta y el origen de las coordenadas. Esta ecuación de la recta se denomina *normada*.

De la fórmula (7) obtenemos la **regla**: *para determinar la distancia de un punto a una recta, es necesario introducir en el primer miembro de la ecuación normada de esta recta las coordenadas del punto dado y calcular el valor absoluto del resultado obtenido.*

EJEMPLO. Determinar la distancia entre el punto $M(-2, 7)$ y la recta $24x + 7y - 2 = 0$.

Normando la ecuación de esta recta tendremos

$$\frac{24+7y-2}{\sqrt{24^2+7^2}}=0 \quad \text{ó} \quad \frac{24x+7y-2}{25}=0,$$

de donde la distancia buscada es

$$d=\frac{|24\cdot(-2)+7\cdot 7-2|}{25}=\frac{1}{25}=0{,}04.$$

EJERCICIOS

1. Trazar las rectas dadas por las ecuaciones:
a) $y = 2x - 1$; b) $2x - 3y - 6 = 0$.

2. Las bases de un trapecio isósceles son iguales a 10 y 6, el ángulo a la base es de 60°. Escribir las ecuaciones de los lados de este trapecio tomando como ejes de coordenadas la base mayor y el eje de simetría del trapecio.

3. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto M (3, 4) y forma un ángulo de 45° con la recta $y = 2x + 1$.

4. Escribir la ecuación de la recta paralela a las rectas $3x + 2y - 6 = 0$, $6x + 4y - 3 = 0$ y equidistante de ellas.

5. Sea dado el segmento AB cuyos extremos son A (—3, 2) y B (1, —1). Escribir la ecuación de la recta que une el punto medio del segmento con el origen de las coordenadas.

6. Sea dado el triángulo ABC, cuyos vértices son A (4, 2), B (—2, 4) y C (—1, —4). Escribir la ecuación de la mediana que pasa por el vértice C y hallar su longitud.

7. Sea dado el triángulo ABC cuyos vértices son A (5, 3), B (—3, 4) y C (—2, —5). Escribir la ecuación de la altura que pasa por el vértice B y hallar su longitud.

8. Sea dado el triángulo ABC cuyos vértices son A (6, 4), B (—3, 5) y C (—2, —6). Escribir la ecuación de la recta que pasa por el vértice A y es paralela a la mediana que pasa por el vértice B.

9. Trazar la recta que pasa por el punto (5, 2) y corta segmentos iguales sobre los ejes de las coordenadas.

10. El espesor de una capa carbonífera es $y_1 = 5$ m cuando $x_1 = 100$ m e $y_2 = 15$ m cuando $x_2 = 200$ m. Suponiendo que la capa tiene forma de cuña, hallar la ley de variación de su espesor y en función de la distancia x. ¿Cuál será el espesor cuando $x = 300$ m? ¿En qué punto del corte el espesor de la capa $y = 10$ m?

11. Hallar el punto de intersección de las rectas:
a) $5x - 7y - 20 = 0$ y $7x - 10y + 15 = 0$;
b) $2x + 3y - 7 = 0$ y $4x + 6y + 11 = 0$;
c) $2x - y = 0$ y $x - 0{,}5y = 0$.

12. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $3x + 4y - 7 = 0$, $5x + 3y - 8 = 0$ y el origen de las coordenadas.

13. Hallar la proyección del punto M (1, 2) sobre la recta $5x + 2y + 20 = 0$.

14. Una recta pasa por el origen de las coordenadas y forma con el eje Ox un ángulo α; otra recta pasa por el punto A $(a, 0)$ y forma con el eje Ox un ángulo β $(\alpha \neq \beta)$. Hallar el punto de intersección de estas rectas.

15. Sea dado un triángulo cuyos vértices son A (—2, 1), B (2, —1), C (4, 3). Determinar las coordenadas del punto de intersección de las medianas de este triángulo.

16. Las ecuaciones de los lados del triángulo ABC son: $x + 7y - 11 = 0$ (AB); $2x + y + 4 = 0$ (BC); $3x - 5y - 7 = 0$ (CA). Calcular el área del triángulo ABC.

17. Hallar las distancias entre los puntos O (0, 0), A (1, 2), B (—2, 1) y la recta $3x - 4y + 10 = 0$.

18. Sea dado un triángulo cuyos vértices son A (1, 1), B (—2, 5) y C (—4, —3). Hallar la altura del triángulo trazada a partir del vértice C sobre el lado AB.

19. Hallar la longitud del segmento perpendicular a las rectas $3x + 4y - 10 = 0$ y $3x + 4y - 45 = 0$ y que se encuentra entre ellas.

20. Escribir las ecuaciones de las rectas paralelas a la recta $8x - 6y + 5 = 0$ y que se encuentran de ella a una distancia igual a 2.

21. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el origen de las coordenadas y que se encuentran a una distancia igual a 2/5 del punto A (2, 1).

Capítulo IV

Líneas de segundo grado (cónicas)

§ 1. Circunferencia

Deduzcamos la ecuación de la circunferencia (fig. 30) con centro en $C(x_0, y_0)$ y de radio R. Un punto arbitrario $M(x, y)$ de la circunferencia, cumplirá la igualdad

$$MC = R. \qquad (1)$$

Recordando la fórmula de la distancia entre dos puntos (§ 3 del cap. I) tenemos

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R. \qquad (2)$$

Puesto que los dos miembros de la igualdad (2) son positivos, elevándolos al cuadrado, obtenemos la ecuación equivalente

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2. \qquad (3)$$

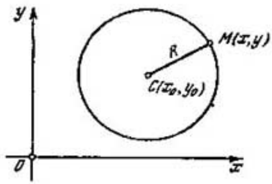

Fig. 30

Entonces, las coordenadas de cualquier punto $M(x, y)$ de la circunferencia dada satisfacen la ecuación (3). Es también justa la afirmación recíproca.

De este modo la (3) es la ecuación de la circunferencia de radio R con centro en el punto $C(x_0, y_0)$. Ella se llama *ecuación normal de la circunferencia.*

En particular, suponiendo que $x_0 = 0$, e $y_0 = 0$, obtendremos la ecuación de la circunferencia con centro en el origen de las coordenadas

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (4)$$

La ecuación de la circunferencia (3), después de algunas transformaciones sencillas, puede llevarse a la forma

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0, \qquad (5)$$

donde $\alpha = -2x_0$, $\beta = -2y_0$, $\gamma = x_0^2 + y_0^2 - R^2$.

De este modo, la circunferencia es una **curva de segundo grado** (véase el § 8 del cap. II).

Comparando la ecuación (5) con la ecuación general de la curva de segundo grado

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \qquad (6)$$

vemos que en la (5) $B = 0$ y, además, $A = 1$, $C = 1$, es decir, $A = C$.

Y a la inversa, si consideramos que en la (6) $B = 0$ y $A = C \neq \neq 0$:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{7}$$

Dividiendo miembro a miembro la ecuación (7) por $A \neq 0$ y suponiendo que

$$D/A = \alpha, \quad E/A = \beta, \quad E/A = \gamma \tag{8}$$

obtenemos una ecuación del tipo (5).

La (7) se llama *ecuación general de la circunferencia.*

Sin embargo, cabe destacar que no toda ecuación (7) es ecuación de una circunferencia real. Es fácil mostrar que la expresión (7) determina una curva real (circunferencia) solamente cuando $\frac{\alpha^2+\beta^2}{4} - \gamma \geqslant 0$, donde α, β, γ están dadas por las igualdades (8).

De este modo, *una curva real de segundo grado es una circunferencia si, y sólo si,* 1) *los coeficientes de los cuadrados de las coordenadas corrientes son iguales, y* 2) *está ausente el término que contiene el producto de coordenadas corrientes.*

§ 2. Curvas centrales de segundo grado

Examinemos la ecuación de la curva de segundo grado

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

$(A \neq 0,\ C \neq 0)$ sin el término del producto de las coordenadas x e y $(B = 0)$[1]). Completando los términos en x y en y respectivamente hasta obtener cuadrados perfectos, tendremos

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F. \tag{2}$$

De aquí, tomando

$$x_0 = -\frac{D}{2A}, \quad y_0 = -\frac{E}{2C} \tag{3}$$

y

$$\Delta = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F \tag{4}$$

obtenemos

$$A\,(x - x_0)^2 + C\,(y - y_0)^2 = \Delta. \tag{5}$$

El punto $O'\,(x_0,\ y_0)$ es el **centro de simetría de la curva** (5) (*centro de la curva*). Efectivamente, si el punto $M_1\,(x_1,\ y_1)$ pertenece a la

[1]) En nuestro curso breve, al examinar las ecuaciones generales de curvas de segundo grado, nos limitamos solamente a este caso.

curva (5), el punto M_2 (x_2, y_2), donde $x_2 = 2x_0 - x_1$, $y_2 = 2y_0 - y_1$, simétrico a M_1 respecto a O', evidentemente también pertenece a la curva (5) (fig. 31).

Las rectas $y = y_0$ y $x = x_0$ paralelas a los ejes de coordenadas Ox y Oy son los **ejes de simetría de la curva** (5) (*ejes de la curva*). Efectivamente, si un punto M $(x_0, y_0 - h)$ pertenece a la curva (5), el punto M' $(x_0, y_0 + h)$, simétrico a M con respecto a la recta $y = y_0$ pertenecerá también a esta curva. La recta $x = x_0$ posee la misma propiedad.

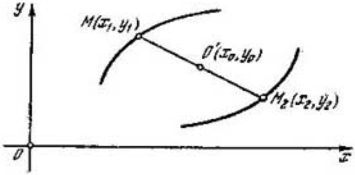

Fig. 31

Más abajo para simplificar el examen supondremos que el centro de la curva se encuentra en el origen de las coordenadas, es decir, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. En este caso la ecuación de la curva tendrá la forma

$$Ax^2 + Cy^2 = \Delta. \tag{6}$$

DEFINICIÓN 1. *La curva de segundo grado* (6) *se llama* ***elipse*** (*más exactamente, pertenece al* ***tipo elíptico***), *si los coeficientes A y C poseen signos iguales, es decir,*

$$AC > 0. \tag{7}$$

Supondremos, para fijar la idea, que $A > 0$ y $C > 0$ (ya que en caso contrario, los signos de los miembros de la ecuación (6) pueden ser sustituidos por los inversos).

Son posibles tres casos: 1) $\Delta > 0$; 2) $\Delta = 0$; 3) $\Delta < 0$.

En el primer caso, $\Delta > 0$, tenemos la *elipse real*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{8}$$

donde los números

$$a = \sqrt{\frac{\Delta}{A}}, \quad b = \sqrt{\frac{\Delta}{C}} \tag{9}$$

se llaman *semiejes de la elipse*. Se considera generalmente que $0 < b \leqslant a$ (esto puede ser siempre logrado mediante una elección conveniente de los ejes Ox y Oy). La igualdad (8) se llama *ecuación canónica de la elipse* con semiejes a y b (fig. 32). Los puntos A $(a, 0)$, B $(0, b)$, A' $(-a, 0)$, B' $(0, -b)$ se llaman *vértices de la elipse* y los segmentos $A'A = 2a$ y $B'B = 2b$, *ejes de la elipse*. Observemos que de la ecuación (8) tenemos $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$.

Notemos que cuando $a = b$ obtenemos la circunferencia

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

En el segundo caso cuando $\Delta = 0$, la curva (6) se concentra en el punto O (0, 0) (*elipse degenerada*).

Por fin, en el tercer caso cuando $\Delta < 0$, la curva (6) no posee puntos reales; la llaman convencionalmente *elipse imaginaria*.

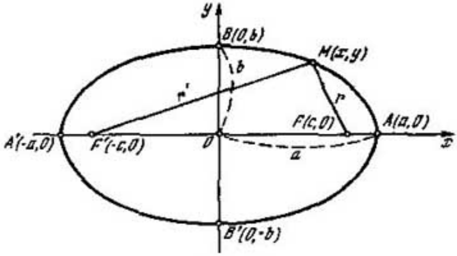

Fig. 32

DEFINICIÓN 2. *La curva de segundo grado* (6) *se llama hipérbola (más exactamente, curva* ***de tipo hiperbólico****), si los coeficientes A y C son de signos contrarios, es decir,*

$$AC < 0. \tag{10}$$

Para fijar la idea, supongamos que $A > 0$, entonces $C < 0$. Son posibles tres casos: 1) $\Delta > 0$, 2) $\Delta = 0$, 3) $\Delta < 0$.

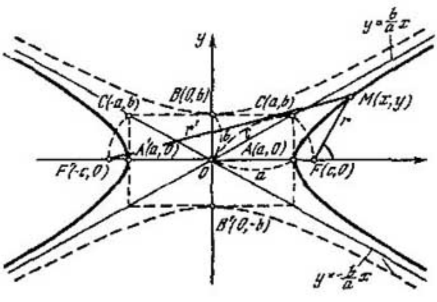

Fig. 33

En el primer caso cuando $\Delta > 0$ tenemos una *hipérbola con ecuación canónica*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{11}$$

donde $a = \sqrt{\frac{\Delta}{A}}$ *(semieje real)* y $b = \sqrt{\frac{\Delta}{-C}}$ *(semieje imaginario)* (fig. 33). Los puntos $A\ (a,\ 0)$ y $A'\ (-a,\ 0)$ se llaman *vértices de la hipérbola*. Notemos que $|x| \geqslant a$.

En el segundo caso cuando $\Delta = 0$ obtenemos un par de rectas que se intersecan (*hipérbola degenerada*)

$$(\sqrt{A}x - \sqrt{-C}y)(\sqrt{A}x + \sqrt{-C}y) = 0.$$

Por fin, en el tercer caso cuando $\Delta < 0$ obtenemos la hipérbola

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = -1 \tag{12}$$

con semiejes $a' = \sqrt{\frac{-\Delta}{A}}$ y $b' = \sqrt{\frac{\Delta}{C}}$. Si $a' = a$ y $b' = b$, la igualdad (12) se llama hipérbola *conjugada* de la hipérbola (11); sus vértices son: B (0, b) y B' (0, $-b$) (fig. 33).

El segmento $A'A = 2a$ se denomina *eje real*, el segmento $B'B = 2b$, *eje imaginario* de la hipérbola (11).

EJEMPLO. Determinar la naturaleza y la posición de la curva

$$x^2 + 2y^2 - 2x + 3y = 0.$$

Completando los términos que contienen x e y respectivamente, hasta obtener cuadrados perfectos, tendremos

$$(x-1)^2 + 2\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = 1 + \frac{9}{8},$$

de donde

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{17}{8}} + \frac{\left(y+\frac{3}{4}\right)^2}{\frac{17}{16}} = 1.$$

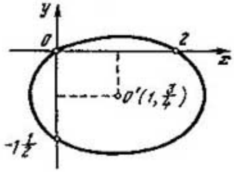

Fig. 34

Por consiguiente, la curva (13) es una elipse cuyos semiejes son $a = \sqrt{\frac{17}{8}} \approx 1,46$ y $b = \sqrt{\frac{17}{4}} \approx 1,03$, con centro en el punto $O'\left(1, -\frac{3}{4}\right)$ (fig. 34).

§ 3. Propiedades focales de las curvas centrales de segundo orden

Los puntos F (c, 0) y F' ($-c$, 0), donde

$$c = \sqrt{a^2 \mp b^2} \tag{1}$$

se llaman, respectivamente, *focos* de la elipse representada por la ecuación canónica (8), fig. 32 (el signo $-$) y de la hipérbola representada por la ecuación canónica (11), fig. 33 (el signo $+$).

La relación

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \tag{2}$$

se llama *excentricidad* de la curva central de segundo grado.

De la fórmula (1) tenemos: para la elipse $0 \leqslant \varepsilon < 1$, y para la hipérbola $1 < \varepsilon < +\infty$. Notemos que para la circunferencia $\varepsilon = 0$.

Sean $r = MF$ y $r' = MF'$ las distancias del punto M de la curva central de segundo grado a sus focos (llamados *radios focales del punto* M). Tenemos

$$r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \tag{3}$$

y

$$r' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \tag{4}$$

Puesto que

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde el signo «+» corresponde a una elipse, el signo «—», a una hipérbola, entonces

$$y^2 = \pm b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

y, por consiguiente, teniendo en cuenta la (1) obtenemos

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 \pm b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \\ &= \sqrt{\left(1 \mp \frac{b^2}{a^2}\right) x^2 - 2cx + (c^2 \pm b^2)} = \\ &= \sqrt{\frac{c^2}{a^2} x^2 - 2cx + a^2} = \left| \frac{c}{a} x - a \right| = |\varepsilon x - a| \end{aligned} \tag{5}$$

y de un modo análogo

$$r' = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 \pm b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = |\varepsilon x + a|. \tag{6}$$

Si la curva es elipse, $0 \leqslant \varepsilon < 1$, $|x| \leqslant a$ y por eso

$$r = a - \varepsilon x, \quad r' = a + \varepsilon x,$$

de donde,

$$r + r' = 2a; \tag{7}$$

además, para cualquier r y r' que satisfacen la igualdad (7) existe un punto de la elipse dada.

De este modo, *para todo punto de la elipse la suma de sus radios focales es una magnitud constante*. Esta propiedad se toma por la definición de la elipse **(propiedad característica de la elipse)**.

Para la hipérbola tenemos: $\varepsilon > 1$, $|x| \geqslant a$. Por eso

$$r = \pm(\varepsilon x - a), \quad r' = \pm(\varepsilon x + a),$$

donde el signo «+» corresponde a la rama derecha de la hipérbola ($x > 0$) y el signo «—» corresponde a su rama izquierda ($x < 0$), de donde

$$r' - r = \pm 2a. \tag{8}$$

Así, *para cualquier punto de la hipérbola el valor absoluto de la diferencia de sus radios focales es una magnitud constante* **(propiedad característica de la hipérbola).**

§ 4. La elipse como deformación uniforme de la circunferencia

Examinemos una circunferencia de radio a. Elijamos el sistema de coordenadas rectangulares Oxy y para simplificar, hacemos coincidir su origen con el centro de la circunferencia O (0, 0). Para mayor comodidad designamos con X e Y las coordenadas corrientes de un punto M de la circunferencia. En este caso, la ecuación de la circunferencia se escribirá así (véase el § 1)

$$X^2 + Y^2 = a^2. \tag{1}$$

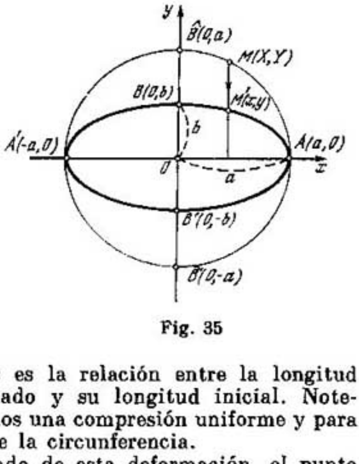

Fig. 35

Sometamos la circunferencia (1) a una deformación uniforme en dirección de uno de sus diámetros que sin alterar la generalidad de los razonamientos puede considerarse vertical, es decir, dirigida según el eje Oy. Sea k el coeficiente de deformación de la circunferencia en la dirección elegida, es decir, k es la relación entre la longitud del segmento vertical transformado y su longitud inicial. Notemos que cuando $0 \leqslant k < 1$ tenemos una compresión uniforme y para $k > 1$, una extensión uniforme de la circunferencia.

Supongamos que como resultado de esta deformación, el punto de la circunferencia M (X, Y) pasa al punto M' (x, y) de la curva transformada (fig. 35). Puesto que los puntos M y M' pertenecen a una misma vertical, tenemos

$$x = X, \quad y = kY, \tag{2}$$

de donde, para $k \neq 0$ [1]) obtendremos

$$X = x, \quad Y = \frac{y}{k}. \tag{3}$$

[1]) En el caso cuando $k = 0$, de la deformación de la circunferencia obtenemos un segmento $-a \leqslant x \leqslant a$, $y = 0$ que puede ser considerado como una elipse degenerada.

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (1) hallamos

$x^2 + \frac{y^2}{k^2} = a^2$, o bien

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{4}$$

donde $b = ka$, es decir, el punto transformado $M'(x, y)$ pertenece a la elipse de semiejes a y b.

Y a la inversa, si el punto $M'(x, y)$ pertenece a la elipse (4), el punto $M(X, Y)$ que le corresponde, es de la circunferencia (1).

De este modo, *el resultado de la deformación uniforme de una circunferencia en la dirección de uno de sus diámetros, es una elipse.*

§ 5. Asíntotas a la hipérbola

Examinemos la hipérbola (fig. 33)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Resolviendo la ecuación (1) respecto a y, obtenemos

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \tag{2}$$

o bien

$$y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}. \tag{3}$$

Si $|x|$ crece ilimitadamente, $\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \approx 1$, y, por consiguiente, tenemos en cierto sentido la igualdad aproximada

$$y \approx \pm \frac{b}{a} x.$$

Mostremos que las ramas de la hipérbola (1) se aproximan tanto como se quiera, a las rectas (fig. 33)

$$y = \pm \frac{b}{a} x, \tag{4}$$

llamadas *asíntotas a la hipérbola*. En efecto, para $x > 0$, tomemos, por ejemplo, el signo «+» en las fórmulas (2) y (4). Examinemos, respectivamente, los puntos $M(x, y)$ de la hipérbola (2) y $N(x, Y)$ de la recta (4), que tienen una abscisa común x. En este caso

$$Y - y = \frac{b}{a} x - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} =$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} =$$

$$= \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \to 0$$

cuando $x \to +\infty$.

Análogamente, se examinan otros tres casos: con el signo «—» en las fórmulas (2) y (4), cuando $x \to +\infty$; con el signo «+» en la fórmula (2) y «—» en la (4), cuando $x \to -\infty$ y, por fin, con el signo «—» en la (2) y «+» en la (4), cuando $x \to -\infty$.

Notemos que la hipérbola conjugada

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \tag{5}$$

posee (como es fácil verificar) las mismas asíntotas que la hipérbola (1).

La hipérbola equilátera ($a = b$)

$$x^2 - y^2 = a^2$$

posee las asíntotas $y = \pm x$ mutuamente perpendiculares.

§ 6. Gráfica de la proporcionalidad inversa

Examinemos la curva

$$xy = a^2 \quad (a > 0) \tag{1}$$

(fig. 36).

Eligiendo como nuevos ejes de coordenadas Ox' y Oy' las bisectrices de los ángulos de los cuadrantes de las coordenadas y teniendo en cuenta que el ángulo de giro es $\alpha = \frac{\pi}{4}$, tendremos (véase el § 2 del cap. I)

$$x = x' \cos\frac{\pi}{4} - y' \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}},$$

$$y = x' \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + y' \cos\frac{\pi}{4} = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}},$$

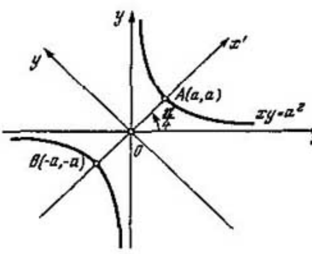

Fig. 36

de donde, en virtud de la fórmula (1), obtenemos

$$\frac{x'^2 - y'^2}{2} = a^2,$$

es decir,

$$x'^2 - y'^2 = 2a^2. \tag{2}$$

De este modo *la gráfica de la proporcionalidad inversa de la fórmula* (1), *es una hipérbola equilátera.*

§ 7. Curvas no centrales de segundo grado

Una curva de segundo grado se llama *no central*, si no tiene centro de simetría o posee un conjunto infinito de centros de simetría (es decir, no tiene un centro de simetría único).

Examinemos la curva de segundo grado

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{1}$$

donde $AC = 0$ y $A^2 + C^2 \neq 0$. Consideremos para mayor claridad, que

$$A = 0, \quad C \neq 0. \tag{2}$$

Además, supongamos que $D \neq 0$, pues en caso contrario tendríamos un par de rectas paralelas.

Completando en la ecuación (1) los miembros con y hasta un cuadrado perfecto, tendremos

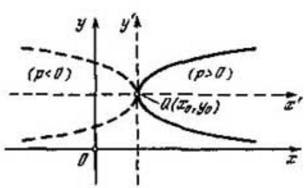

Fig. 37

$$C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -Dx - F + \frac{E^2}{4C},$$

o, suponiendo que

$$x_0 = -\frac{F}{D} + \frac{E^2}{4DC}, \quad y_0 = -\frac{E}{2C},$$

$$2p = -\frac{D}{C}, \tag{3}$$

obtendremos

$$(y - y_0)^2 = 2p\,(x - x_0). \tag{4}$$

La curva (4) se denomina *parábola* (fig. 37); el punto O' (x_0, y_0), *vértice de la parábola*, y el número p, *parámetro de la parábola*. Es

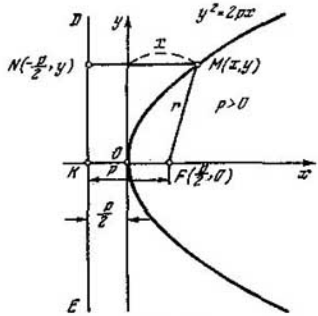

Fig. 38

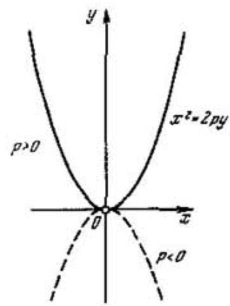

Fig. 38a

fácil convencerse de que la recta $y = y_0$ es el **eje de simetría de la parábola** (*eje de la parábola*); la parábola (4) no tiene centro de simetría.

Si el vértice de la parábola se encuentra en el origen de las coordenadas y Ox es el eje de ella, obtendremos la *ecuación canónica de* *la parábola*

$$y^2 = 2px, \tag{5}$$

donde el parámetro p generalmente se considera positivo (esto puede lograrse eligiendo la dirección conveniente del eje Ox; fig. 38).

Destaquemos que si se cambian los papeles de los ejes Ox y Oy, la ecuación canónica de la parábola adopta la forma

$$x^2 = 2py. \tag{6}$$

Ésta es la ecuación de una parábola **con eje vertical** (fig. 38a).

§ 8. Propiedades focales de la parábola

Examinemos la parábola (fig. 38)

$$y^2 = 2px \quad (p > 0). \tag{1}$$

El punto $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ se llama *foco* y la recta $x = -\frac{p}{2}$ *directriz* de la parábola.

Para un punto $M(x, y)$ su *radio focal* $r = MF$ es igual a

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} =$$
$$= \sqrt{x^2 + px + \frac{p^2}{4}} = x + \frac{p}{2}. \tag{2}$$

La distancia entre este punto y la directriz es igual a

$$MN = x + \frac{p}{2} = r.$$

De este modo, *la parábola es un conjunto de puntos del plano equidistantes de un punto dado (foco) y de una recta dada (directriz)*. Esta es la **propiedad característica de la parábola**.

EJEMPLO. Determinar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de la parábola $y = x^2$.

Comparando esta ecuación con la (6), obtendremos $2p = 1$, de donde $p = 1/2$. Por consiguiente, el foco de la parábola tiene las coordenadas $(0, 1/4)$ y la ecuación de la directriz es $y = -\frac{1}{4}$.

§ 9. Gráfica de un trinomio cuadrado

Examinemos el trinomio cuadrado

$$y = Ax^2 + Bx + C \quad (A \neq 0). \tag{1}$$

De aquí,

$$y = A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right). \tag{2}$$

Si completamos la expresión entre paréntesis hasta un cuadrado perfecto obtendremos

$$y=A\left[\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\left(\frac{C}{A}-\frac{B^2}{4A^2}\right)\right],$$

o bien

$$y-\frac{4AC-B^2}{4A}=A\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2. \tag{3}$$

Si hacemos

$$x_0=-\frac{B}{2A},\quad y_0=\frac{4AC-B^2}{4A}, \tag{4}$$

mediante la fórmula (3), obtendremos

$$y-y_0=A\,(x-x_0)^2. \tag{5}$$

Efectuando una traslación paralela del sistema de coordenadas

$$x'=x-x_0,\quad y'=y-y_0$$

tendremos definitivamente

$$y'=Ax'^2. \tag{6}$$

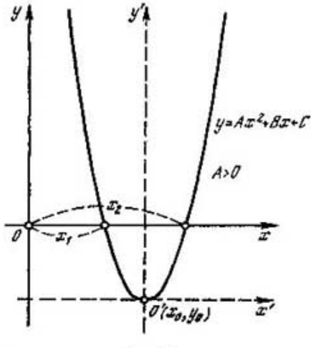

Fig. 39

La ecuación (6) (véase la fórmula (6) del § 7) es la ecuación canónica de una parábola con el eje vertical, cuyo vértice se encuentra en el punto O' (x_0, y_0) y parámetro $p=\frac{1}{2A}$. De este modo, *la gráfica del trinomio cuadrado es una parábola cuyo vértice se encuentra en el punto O' (x_0, y_0) y cuyo eje es paralelo a Oy* **(parábola con eje vertical desplazado, fig. 39).**

Notemos que las abscisas x_1 y x_2 de los puntos de intersección de la parábola (1) con el eje Ox son las raíces de la ecuación cuadrática

$$Ax^2+Bx+C=0. \tag{7}$$

Esta propiedad sirve de base para el método gráfico de resolución de la ecuación cuadrática (7).

EJEMPLO. Reducir la ecuación $y=x^2-4x+3$ a su forma canónica y construir la parábola correspondiente.

Al pasar el término independiente al primer miembro de la ecuación y completar el segundo miembro hasta un cuadrado perfecto tendremos

$$y-3+4=x^2-4x+4,$$

o sea,

$$y + 1 = (x - 2)^2.$$

Tomando que $x - 2 = x'$, $y + 1 = y'$, obtendremos

$$y' = x'^2.$$

De este modo, la ecuación dada es la de una parábola cuyo vértice se encuentra en el punto O' (2, —1) y el eje de simetría $O'y'$ es paralelo a Oy (fig. 40).

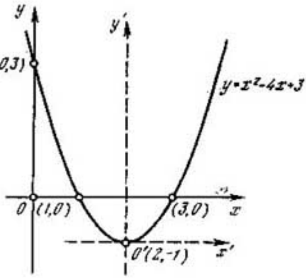

Fig. 40

EJERCICIOS

1. a) Hallar las coordenadas del centro C y del radio R de la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0.$$

b) Escribir la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen de las coordenadas y cuyo centro se encuentra en el punto C (1, 0).

c) Escribir la ecuación de la circunferencia tangente a los ejes de las coordenadas, si su centro se encuentra en el punto C (1/2, 1/2).

d) Escribir la ecuación de la circunferencia, de diámetro de la cual sirve un segmento con extremos A (—1, 2) y B (5, 6).

2. Escribir la ecuación de la recta que pasa por los centros de las circunferencias:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y - 3 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + x - 3y - 1 = 0.$$

Determinar la distancia entre los centros de estas circunferencias.

3. Hallar la ecuación de la cuerda común a las circunferencias:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 13 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 2x - 4y - 15 = 0.$$

4. Hallar los semiejes, las coordenadas de los focos y la excentricidad de la elipse

$$x^2 + 2y^2 = 8.$$

Construir esta elipse.

5. a) Escribir la ecuación canónica de la elipse, con longitud del semieje menor igual a 6, y distancia focal igual a 8.

b) Escribir la ecuación canónica de la elipse, si se sabe que la distancia entre los extremos de los ejes mayor y menor es igual a 5, y la suma de las longitudes de los semiejes, igual a 7.

c) Escribir la ecuación canónica de la elipse, si las distancias entre su foco y los extremos del eje mayor son iguales a 2 y 18.

6. Hallar la longitud del diámetro [1]) de la elipse $5x^2 + 7y^2 = 24$, que divide el ángulo formado por los ejes de las coordenadas en dos partes iguales.

7. a) Hallar los semiejes, las coordenadas de los focos y la excentricidad de la hipérbola

$$9x^2 - 16y^2 = 36.$$

[1] Es decir, de la cuerda que pasa por el centro de la elipse.

b) Escribir la ecuación canónica de la hipérbola, si la longitud de su eje real es igual a 8 y la distancia entre sus focos es igual a 10.
Construir estas hipérbolas.

8. Hallar la longitud del diámetro de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ perpendicular a la asíntota a la hipérbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ que pasa por los cuadrantes I y III.

9. Hallar la excentricidad de la hipérbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ y de su conjugada.

10. Hallar la distancia entre el foco F_1 de la hipérbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ y el foco F_2 de la hipérbola conjugada.

11. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por los focos de la hipérbola $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ y los focos de la hipérbola conjugada.

12. Las asíntotas de una hipérbola tienen las ecuaciones $y=\frac{4}{3}x$ e $y=-\frac{4}{3}x$. Hallar la excentricidad de la hipérbola, si su eje real coincide con el eje Ox.

13. Escribir la ecuación canónica de la parábola, si la distancia entre el foco y la directriz es igual a 10.

14. Determinar las coordenadas del foco y escribir la ecuación de la directriz de la parábola $y = 0{,}25\,x^2$.

15. El corte transversal de la pantalla de cristal de un proyector tiene forma de parábola. Determinar la posición del foco, si el diámetro de la pantalla es igual a 60 cm y la profundidad, igual a 30 cm.

16. Sea dada la parábola $y^2 = 12\,x$. Hallar la longitud de su cuerda que pasa por el punto M (8, 0) y forma con el eje de la parábola un ángulo de 60°.

17. Escribir la ecuación de la línea, cuyos puntos son equidistantes del punto A (0, 2) y del eje Ox.

18. Reducir la ecuación de la parábola $y = 2x^2 - 8x + 5$ a la forma canónica y determinar las coordenadas de su vértice.

19. Reducir la ecuación de la parábola $y = -3 + 4x - x^2$ a la forma canónica, y determinar las coordenadas de su vértice.

20. Reducir la ecuación de la parábola $x = y^2 - y + 2$ a la forma canónica y determinar las coordenadas de su vértice.

21. El arco de un puente ferroviario, cuya luz es $l = 60$ m, y la altura $h = 12$ m, tiene forma parabólica. Determinar la altura h_1 de soportes laterales del arco que se encuentran a 15 m de distancia de los extremos del puente.

Capítulo V

Coordenadas polares. Ecuaciones paramétricas de la línea

§ 1. Coordenadas polares

La idea principal del método de coordenadas consiste en que la posición de un punto sobre el plano se determina unívocamente por medio de dos números. La interpretación geométrica concreta de estos números, la brinda uno u otro sistema de coordenadas. Además del sistema de coordenadas rectangulares que hemos utilizado exclusivamente hasta ahora, el más importante es el *sistema de coordenadas polares* que pasamos a estudiar.

Tomamos en el plano un punto O que llamaremos *polo*. A partir del polo O trazamos una semirrecta orientada Ox llamada *eje polar* (fig. 41).

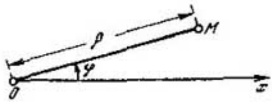

Fig. 41

Sea M un punto arbitrario del plano. Unimos el punto M con el polo mediante el segmento OM. La longitud del segmento $OM = \rho$, es decir, la distancia entre el punto M y el polo se llama *radio polar* del punto M, y el ángulo $\varphi = \angle xOM$ en el sentido sinistrorso, se denomina *ángulo polar*. El radio polar ρ y el ángulo polar φ son las *coordenadas polares* del punto M.

El punto M con coordenadas polares ρ y φ se escribe del modo siguiente: $M(\rho, \varphi)$, el radio polar ρ se pone en primer lugar, y el ángulo polar φ, en segundo.

En lo que se refiere a los valores tomados por las coordenadas polares, es evidentemente suficiente considerar los valores de ρ desde 0 hasta $+\infty$ $(0 \leqslant \rho < +\infty)$ y los valores de φ desde 0 hasta 2π $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$; en este caso, como hemos convenido, el ángulo φ se toma a partir del eje polar de derecha a izquierda. Sin embargo, en algunos casos es necesario examinar ángulos superiores a 2π, como también ángulos negativos, es decir, ángulos contados a partir del eje polar en el sentido dextrorso.

§ 2. Relaciones entre las coordenadas rectangulares y las polares

Examinemos la transformación de las coordenadas polares en coordenadas rectangulares y viceversa.

Supongamos que el polo del sistema de coordenadas polares coincide con el origen del sistema de coordenadas rectangulares Oxy, y el eje polar es el semieje positivo Ox (fig. 42). En este caso para un punto arbitrario M tenemos

$$OA = x, \quad AM = y, \quad OM = \rho, \quad \angle xOM = \varphi.$$

Considerando que el ángulo φ es agudo, mediante el triángulo AOM hallamos

$$OA = OM \cos\varphi, \quad AM = OM \operatorname{sen}\varphi,$$

o bien

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\varphi.$$

Las fórmulas obtenidas son válidas para cualquier ángulo φ. Así se expresan las coordenadas rectangulares del punto M en función de sus coordenadas polares. Luego, por medio del mismo triángulo rectangular AOM obtenemos

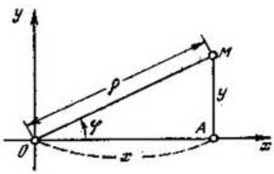

Fig. 42

$$OM = \sqrt{OA^2 + AM^2}, \quad \operatorname{t}\varphi = \frac{AM}{OA},$$

o sea

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

De este modo se expresan las coordenadas polares del punto por sus coordenadas rectangulares.

Notemos que durante la determinación del ángulo polar φ según $\operatorname{tg}\varphi$ es necesario tener en cuenta los signos de las coordenadas x e y.

Como hemos visto, las líneas pueden ser dadas por medio de ecuaciones que ligan sus coordenadas rectangulares corrientes. Mostremos ahora en un ejemplo sencillo, que las líneas pueden ser también definidas por ecuaciones en coordenadas polares.

EJEMPLO. Examinemos una curva

$$\rho = a\varphi,$$

donde a es un número positivo. Esta curva se llama *espiral de Arquímedes*. Para trazar esta curva componemos la tabla de valores correspondientes de φ y ρ:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	...
ρ	0	$\frac{\pi}{4}a$	$\frac{\pi}{2}a$	πa	$\frac{3}{2}\pi a$	$2\pi a$	$\frac{5}{2}\pi a$	...

Con ayuda de esta tabla podemos marcar los puntos y unirlos por una línea, precisando, si hace falta, la posición de los puntos intermediarios (fig. 43).

§ 3. Ecuaciones paramétricas de la línea

A veces, en lugar de la ecuación de la línea que liga las coordenadas rectangulares x e y es más comodo considerar las llamadas *ecuaciones paramétricas de la línea* que expresan las coordenadas corrientes x e y en función de una cierta variable (*parámetro*) t. Las ecuaciones paramétricas desempeñan un papel importante, por ejemplo,

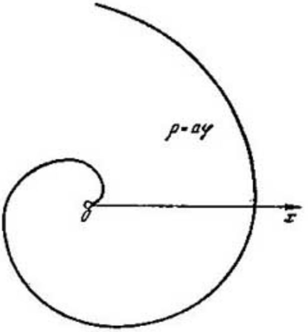

Fig. 43

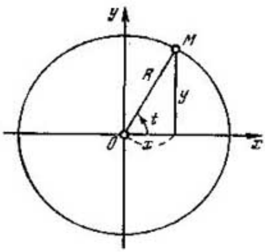

Fig. 44

en la mecánica donde las coordenadas x e y de un punto en movimiento $M(x, y)$ se examinan en función del tiempo (*ecuación del movimiento*).

EJEMPLO 1. Deduzcamos las ecuaciones paramétricas de una circunferencia.

Sea $M(x, y)$ un punto cualquiera de la circunferencia de radio R, cuyo centro se encuentra en el origen de las coordenadas (fig. 44). Designemos por t el ángulo xOM en el triángulo rectangular AOM que determina este punto. En este caso, tendremos evidentemente las igualdades

$$OA = OM \cos t, \quad AM = OM \operatorname{sen} t,$$

o sea,

$$x = R \cos t, \quad y = R \operatorname{sen} t. \tag{1}$$

Ésta es la *ecuación paramétrica de la circunferencia*.

Para obtener la ecuación ordinaria de la circunferencia es necesario excluir el parámetro t. Para eso elevamos las ecuaciones (1) al cuadrado y las sumamos:

$$x^2 + y^2 = R^2 (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = R^2.$$

EJEMPLO 2. Ecuaciones paramétricas de la elipse.

Una elipse de semiejes a y b puede ser considerada como una circunferencia de radio a comprimida uniformemente en dirección del diámetro vertical, donde el coeficiente de compresión es $k = b/a$

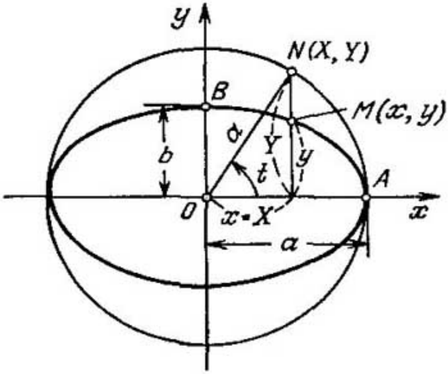

Fig. 45

(véase el § 4 del cap. IV). Sea M (x, y) un punto de la elipse y $N(X,Y)$ un punto de la circunferencia que le corresponde (fig. 45), donde

$$x = X, \quad y = \frac{b}{a}Y. \tag{2}$$

Sea t el ángulo formado por el radio ON de la circunferencia y la dirección positiva del eje Ox: $t = \angle NOx$. De las fórmulas (2) tenemos

$$x = X = a \cos t,$$

$$y = \frac{b}{a}Y = \frac{b}{a} \cdot a \operatorname{sen} t = b \operatorname{sen} t.$$

De este modo, *las ecuaciones paramétricas de la elipse* con semiejes a y b son

$$x = a \cos t, \quad y = b \operatorname{sen} t. \tag{3}$$

Eliminando el parámetro t de las ecuaciones (3), obtenemos la ecuación canónica de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Con las ecuaciones paramétricas de la línea, ésta se puede construir punto por punto.

EJEMPLO 3. Construir la curva

$$x = t^2, \quad y = 2t. \tag{4}$$

Componiendo la tabla de valores, tendremos

t	...	-2	-1	0	1	2	...
x	...	4	1	0	1	4	...
y	...	-4	-2	0	2	4	...

Introduciendo los puntos de coordenadas (x, y) en el plano Oxy y uniéndolos, obtendremos la curva buscada (fig. 46).

Esta curva es una parábola. Efectivamente, si eliminamos el parámetro t de la ecuación (4), obtendremos

$$y^2 = 4x,$$

es decir, la ecuación canónica de la parábola.

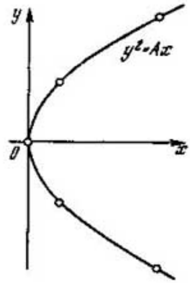

Fig. 46

§ 4. Ecuaciones paramétricas de la cicloide

DEFINICIÓN. *Llámase* ***cicloide*** *a la curva descrita por un punto de una circunferencia cuando ésta rueda sin deslizamiento por una línea recta* (fig. 47).

Deduzcamos las ecuaciones paramétricas de la cicloide, tomando como recta el eje Ox, suponiendo que el radio de la circunferencia que rueda es a y que el punto en movimiento M en la posición inicial coincide con el origen de las coordenadas. Tomamos como parámetro t el ángulo de giro (en radianes) del radio móvil MC de la circunferencia respecto al

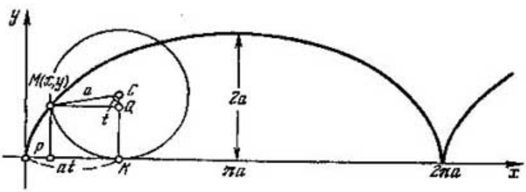

Fig. 47

radio vertical KC, donde K es el punto de contacto de la circunferencia con el eje Ox (fig. 47). Como la circunferencia rueda sin deslizamiento, tenemos evidentemente

$$OK = \widehat{MK} = at,$$

de donde, según la fig. 47, obtenemos, para las coordenadas corrientes del punto M de la cicloide, las expresiones siguientes:

$$x = OP = OK - PK = OK - MQ = at - a \operatorname{sen} t = a(t - \operatorname{sen} t)$$

e

$$y = PM = KC - QC = a - a\cos t = a(1 - \cos t).$$

De este modo, las ecuaciones paramétricas de la cicloide son

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

EJERCICIOS

1. Indicar los puntos de acuerdo con sus coordenadas polares: $A(5, 0)$, $B(2, \pi/4)$, $C(3, \pi/2)$, $D(1, \pi)$, $E(2, 5\pi/3)$.

2. ¿Cuáles son las coordenadas rectangulares de los puntos dados por sus coordenadas polares: $A(5, 0)$, $B(6, \pi/4)$, $C(2, \pi/2)$, $D(4, 5\pi/4)$?

3. Construir por puntos la espiral logarítmica $\rho = 2^{\varphi/\pi}$.

4. Escribir en coordenadas polares las ecuaciones de las líneas siguientes: a) $x = 1$; b) $y = -2$; c) $y = x$; d) $y = 2x$; e) $x + y = \sqrt{2}$; f) $x^2 + y^2 = 25$.

5. Escribir la ecuación de la recta $x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha - p = 0$ en coordenadas polares.

6. La ecuación de una curva en coordenadas polares es $\rho = a\cos\varphi$. Escribir la ecuación de esta misma curva en coordenadas rectangulares y esclarecer su naturaleza.

7. Una línea está dada en coordenadas polares por la ecuación $\rho = 1/(1 - \cos\varphi)$. Escribir su ecuación en coordenadas rectangulares.

8. Una línea está dada por las ecuaciones paramétricas $x = a\operatorname{sen} t$, $y = b\cos t$. Hallar su ecuación en coordenadas rectangulares.

9. Una línea está dada por sus ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \quad y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

Hallar su ecuación en coordenadas rectangulares.

10. Una línea está dada por sus ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = 4t$. Hallar su ecuación en coordenadas rectangulares.

11. Un punto se desplaza por el plano Oxy ocupando en el instante de tiempo t, contado a partir del momento inicial $t = 0$, la posición $M(200 - t, 100 - t)$. ¿En qué momento el punto llegará a la recta $8x - 6y + 10 = 0$ y cuáles serán sus coordenadas en ese instante?

Capítulo VI

Función

§ 1. Magnitudes constantes y variables

Al estudiar las leyes de la naturaleza a cada instante tropezamos con **magnitudes constantes** y **magnitudes variables.**

DEFINICIÓN. *Se llama* **magnitud constante** *a aquella que conserva un mismo valor (en general, o en un proceso dado; en el último caso la magnitud constante se denomina* ***parámetro****).*

Llámase ***magnitud variable*** *a la que puede tomar valores numéricos diferentes.*

Citemos ejemplos de magnitudes constantes y variables.

EJEMPLO 1. El diámetro y la longitud de la circunferencia pueden tomar, según las circunstancias, valores diferentes y, por consiguiente, son en general magnitudes variables, mientras que la relación de la longitud de la circunferencia a su diámetro es siempre de un mismo valor y, por consiguiente, es una magnitud constante llamada «número π» ($\pi = 3{,}14159\ldots$).

EJEMPLO 2. El volumen v y la presión p de una masa determinada de gas son magnitudes variables; sin embargo, como se sabe del curso de física, el producto vp es una magnitud constante para una temperatura dada. Si la temperatura varía, el producto vp también varía.

Notemos que en numerosos casos es cómodo para la generalización de las enunciaciones, considerar a las magnitudes constantes como magnitudes variables que toman un solo y único valor.

§ 2. Noción de función

Estudiando un fenómeno cualquiera generalmente nos encontramos con un conjunto de magnitudes variables ligadas entre sí de tal modo, que los valores de algunas de ellas (*variables independientes*) determinan por completo los valores de otras magnitudes (*variables dependientes* o *funciones*).

Al estudiar un gas, por ejemplo, nos interesa su volumen v, su temperatura t, su presión p. De acuerdo con la ley de Mendeléiev—Clapeyron, conociendo el volumen y la temperatura de un gas, podemos determinar unívocamente su presión; por consiguiente, las magnitudes v y t pueden considerarse como variables independientes, mientras que p, como una variable dependiente (función).

Demos ahora la **noción de función**, fundamental en las matemáticas superiores, limitándonos en principio al caso de dos variables.

DEFINICIÓN. *Una variable y es* **función** *de otra variable x, si ambas variables están ligadas entre sí de tal modo que a cada valor considerado de x, (valor admisible) le corresponde un valor único totalmente determinado de y*[1]).

Esta definición fue enunciada por primera vez en términos generales por N. I. Lobachevski, genial matemático ruso.

En este caso la variable x se llama *argumento* o *variable independiente*, mientras que y se denomina a veces *variable dependiente*. Respecto a las magnitudes mismas de x e y, se dice que ellas se encuentran *en relación funcional*.

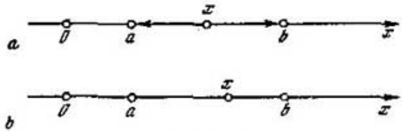

Fig. 48

El conjunto de todos los valores de la variable independiente x para los cuales la función y está definida se llama *dominio de definición* o *dominio de existencia* de esta función.

Más frecuentemente el dominio de definición de una función bien es un *intervalo* (a, b) (fig. 48,a), es decir, el conjunto de todos los valores de x que satisfacen la desigualdad

$$a < x < b$$

(es preciso subrayar que los valores $x = a$ y $x = b$ están aquí excluidos), o bien el segmento $[a, b]$ (fig. 48,b), es decir, el conjunto de todos los valores de x que satisfacen la desigualdad

$$a \leqslant x \leqslant b$$

(aquí los valores $x = a$ y $x = b$ están incluidos). En algunos casos el dominio de definición de la función representa un semiintervalo cerrado a la izquierda $[a, b)$ o cerrado a la derecha $(a, b]$, es decir, el conjunto de números x definidos por las condiciones $a \leqslant x < b$ o respectivamente, $a < x \leqslant b$. Llamaremos también *intervalo* al conjunto de puntos que representa un segmento o un semiintervalo y lo escribiremos $\langle a, b\rangle$.

Se examinan también intervalos infinitos: $(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$, es decir, el conjunto de todos los números menores que a; $(b, +\infty) = \{x \mid x > b\}$, es decir, el conjunto de todos los números mayores que b; $(-\infty, +\infty)$, el conjunto de todos los números

[1]) En adelante supondremos que, si no se ha acordado nada en contrario, las magnitudes y los números que se examinan toman solamente valores reales.

reales (véase el § 1 del cap. VII). Los intervalos $(-\infty, a]$ y $[b, +\infty)$ tienen sentido análogo.

El hecho de que y sea función de x se escribe abreviadamente así:

$$y = f(x), \tag{1}$$

donde el símbolo f se llama *característica de la función*. Para designar la dependencia funcional (1) se puede, en lugar de la letra f, utilizar cualquier otra letra (por ejemplo, g, h, F, φ, etc.), pero las diferentes funciones existentes en un mismo problema deben ser designadas con letras diferentes.

El valor particular de la función $f(x)$, para $x = a$, se escribe así: $f(a)$. Por ejemplo, si

$$f(x) = x(1 - x),$$

entonces

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = -2, \text{ etc.}$$

Con algunos ejemplos se aclara la noción de función.

EJEMPLO 1. Según la fórmula del área del círculo,

$$S = \pi R^2,$$

se deduce que a cada valor admisible (es decir, positivo), del radio R le corresponde un valor determinado de la superficie S. Por consiguiente, S es una función de R definida en el intervalo infinito: $0 < R < +\infty$.

EJEMPLO 2. De acuerdo con la ley de Boile—Mariotte a una temperatura constante tenemos $vp = C$, donde v, es el volumen de un gas; p, su presión y C, una magnitud constante. De aquí,

$$v = \frac{C}{p}.$$

Por consiguiente, a cada valor de la presión p le corresponde un volumen determinado de gas v. En base a razonamientos físicos se deduce que el dominio de definición de esta función es el intervalo infinito

$$0 < p < +\infty.$$

EJEMPLO 3. Hallar el dominic que define la función

$$y = \sqrt{4 - x^2}.$$

Esta función tiene sentido, si $4 - x^2 \geqslant 0$, de donde

$$x^2 \leqslant 4 \quad \text{ó} \quad |x| \leqslant 2.$$

Por consiguiente, el dominio de definición de la función es el segmento

$$-2 \leqslant x \leqslant 2.$$

Para tener una idea concreta del comportamiento de una función, se construye el *gráfico de la función*, considerando la variable independiente x y la función y como coordenadas rectangulares de cierto punto M en el plano Oxy.

DEFINICIÓN. *Llámase* ***gráfico*** *de la función $y = f(x)$ al conjunto de todos los puntos $M(x, y)$ del plano Oxy, cuyas coordenadas están ligadas por una dependencia funcional dada.*

En otras palabras, el gráfico de la función es una línea, cuya ecuación es la igualdad que define la función.

Por ejemplo, para la función (2) tenemos

$$x^2 + y^2 = 4, \quad y \geqslant 0$$

y su gráfico es evidentemente la semicircunferencia superior de radio $R = 2$, con centro en el origen de las coordenadas (fig. 49). La fig. 49 muestra que el dominio de definición de la función es el segmento $[-2, 2]$.

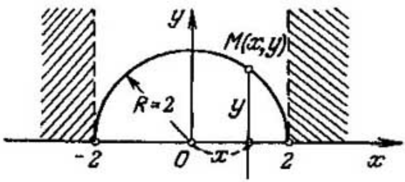

Fig. 49

Destaquemos que al construir el gráfico de la función $y = f(x)$ podemos determinar aproximadamente las raíces de la ecuación

$$f(x) = 0$$

como las abscisas de los puntos de intersección del gráfico con el eje Ox.

Si a cada valor de la variable x le corresponde un valor de la variable y, tenemos una *función unívoca* de x; si a un valor de la variable x le corresponden varios (dos, tres, etc.) o una infinidad de valores de la variable y, entonces y se denomina *función multívoca* (biunívoca, triunívoca, etc.) de x.

Por ejemplo, $y = x^2$ es una función unívoca de x. También $y = \operatorname{sen} x$ es una función unívoca de x. La función $y = \pm\sqrt{x}$ es una función biunívoca de x; $y = \operatorname{Arcsen} x$ es una función multívoca (tiene infinidad de valores) de x.

En adelante, con el concepto de «función» entenderemos una función unívoca, si no se dice lo contrario.

§ 3. Dependencias funcionales elementales

1. *Dependencia proporcional directa*

DEFINICIÓN. *Dos magnitudes variables se llaman directamente proporcionales, si al variar una de ellas en cierta relación, la otra varía en la misma relación.*

Como ejemplos de magnitudes directamente proporcionales se pueden dar: la longitud de la circunferencia y su radio; el camino recorrido por un cuerpo con movimiento uniforme y el tiempo transcurrido; el alargamiento de una barra elástica y la carga, etc.

Sean x e y magnitudes directamente proporcionales, y sea k el valor de y para $x = 1$. En virtud de la definición tenemos

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{k},$$

de donde

$$y = kx;$$

la magnitud constante k se denomina *coeficiente de proporcionalidad*. La función (1) se llama función *lineal homogénea*. Su gráfico es una línea recta que pasa por el origen de las coordenadas con coeficiente angular k (fig. 50).

2. Dependencia lineal

DEFINICIÓN. *Dos magnitudes variables x e y son* ***linealmente dependientes*** *si*

$$y = y_0 + kx, \tag{2}$$

donde k e y_0 son magnitudes constantes.

La función (2) se llama *lineal*; su gráfico es una línea recta (fig. 51) con segmento inicial (ordenada al origen) y coeficiente angular k.

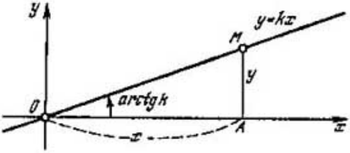

Fig. 50

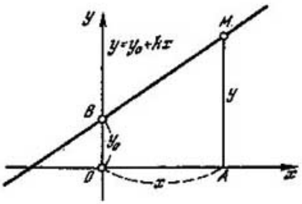

Fig. 51

Como ejemplos de magnitudes linealmente dependientes se tienen la distancia de un punto en movimiento rectilíneo y uniforme al origen y el tiempo; la longitud de una barra y su temperatura, etc.

3. Dependencia inversamente proporcional

DEFINICIÓN. *Dos magnitudes variables son* ***inversamente proporcionales***, *si al variar una de ellas en cierta relación, la otra varía en relación inversa.*

Como ejemplos de magnitudes inversamente proporcionales pueden servir: la velocidad de un movimiento uniforme y el tiempo necesario para recorrer una distancia dada; el volumen ocupado por un gas (a temperatura constante) y la presión; la intensidad de la corriente (con fuerza electromotriz constante) y la resistencia del circuito, etc.

Sean x e y magnitudes inversamente proporcionales, y supongamos que cuando $x = 1$, $y = k$. De acuerdo con la definición tenemos

$$\frac{x}{1} = \frac{k}{y},$$

de donde

$$y = \frac{k}{x}.$$

La gráfica de esta función cuando $k > 0$ es una hipérbola equilátera (o una de sus ramas) (fig. 52). Si $k < 0$ obtendremos una hipérbola situada en los cuadrantes II y IV.

4. Dependencia cuadrática

En el caso más simple, la *dependencia cuadrática* tiene la forma

$$y = kx^2, \tag{3}$$

donde k es una magnitud constante. La gráfica de la función (3) es una parábola (o una de sus ramas) (fig. 53); cuando $k > 0$ ella se sitúa encima del eje Ox, y por debajo del eje Ox, cuando $k < 0$.

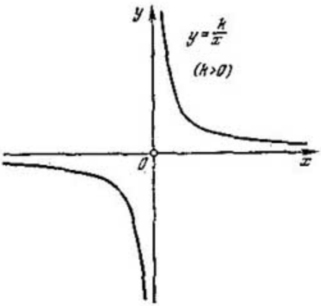

Fig. 52

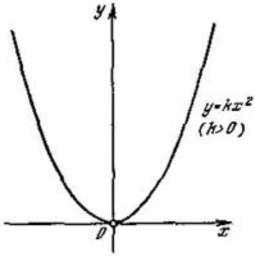

Fig. 53

De ejemplos de magnitudes entre las cuales existe dependencia cuadrática pueden servir: la superficie y el radio de un círculo; el camino recorrido por un cuerpo en caída libre y el tiempo de caída, etc.

5. Dependencia sinusoidal

La *dependencia sinusoidal*

$$y = A \text{ sen } (\omega x + \varphi) \tag{4}$$

desempeña un papel importante durante el estudio de los procesos periódicos.

La función (4) se denomina *armónica*; las constantes correspondientes (parámetros) A, ω, φ se llaman, respectivamente, *amplitud*, *frecuencia* y *fase inicial*. La función y es **periódica con período**

$$T = 2\pi/\omega,$$

es decir, los valores de la función $y = y(x)$ en los puntos x y $x + T$, que se diferencian en un período, son iguales. Tenemos efectivamente

$$y(x + T) = A \text{ sen } [\omega (x + T) + \varphi] =$$
$$= A \text{ sen } (\omega x + 2\pi + \varphi) =$$
$$= A \text{ sen } (\omega x + \varphi) = y(x).$$

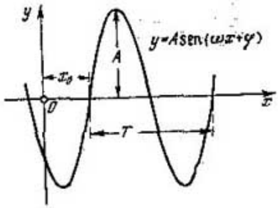

Fig. 54

La función armónica (4) puede ser reducida a la forma

$$y = A \text{ sen } \omega (x - x_0),$$

donde $x_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$. De aquí deducimos que la gráfica de la función armónica es una **sinusoide deformada** de amplitud A y período T, obtenida por la traslación a lo largo del eje Ox en un valor x_0 (fig. 54) (véanse más detalles en el § 9).

Como ejemplos de la dependencia sinusoidal pueden citarse: la desviación de las partículas de aire respecto a la posición de equilibrio en el caso de propagación de una onda sonora de amplitud constante y el tiempo; la intensidad de una corriente sinusoidal monofásica y el tiempo, etc.

§ 4. Representaciones de una función

Se consideran generalmente tres modos de representación de una función: analítico, tabular y gráfico.

1. Modo analítico de representación de una función

Si una función se halla expresada mediante una fórmula, se dice que es *analítica*. Por ejemplo, en la fórmula del volumen de la esfera

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

el volumen V es función del radio R dada analíticamente.

Si la función

$$y = f(x)$$

está representada por una **fórmula**, su **característica** f designa el conjunto de operaciones a efectuar en un orden determinado sobre el valor del argumento x para obtener el valor correspondiente de la función y [o, lo que es lo mismo, el valor de la función $f(x)$].

Sea, por ejemplo,

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}. \tag{1}$$

Aquí la característica f designa el siguiente conjunto de operaciones:

1) elevación al cuadrado del argumento x;
2) sustracción de una unidad del resultado obtenido;
3) extracción de la raíz cúbica de la diferencia correspondiente.

Conociendo la característica f y dándole al argumento x distintos valores, obtendremos los valores correspondientes de la función $f(x)$. Así, por ejemplo, para nuestra función (1) tenemos

$$f(-1) = \sqrt[3]{(-1)^2 - 1} = 0,$$
$$f(0) = \sqrt{0^2 - 1} = -1, \quad f(1) = \sqrt[3]{1^2 - 1} = 0,$$

etc.

Un sentido análogo obtienen las expresiones

$$f(x+h) = \sqrt[3]{(x+h)^2 - 1},$$

etc.

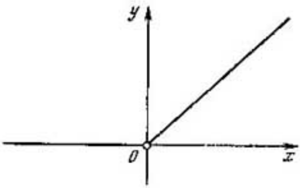

Fig. 55

En algunos casos, la función puede ser representada por varias fórmulas.

Sea, por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \leqslant 0, \\ x, & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

Esta función es perfectamente definida, porque para cada valor del argumento x podemos indicar el valor correspondiente de la función $f(x)$. A saber, si x es negativo o nulo, $f(x)$ será igual a cero. Por ejemplo,

$$f(0) = 0, \quad f(-1/2) = 0, \quad f(-1) = 0,$$

etc.

Si x es positivo, $f(x)$ será igual al valor del argumento. Por ejemplo,

$$f(3/4) = 3/4, \quad f(5) = 5,$$

etc.

De este modo, dos fórmulas

$$f(x) = 0, \quad \text{si} \quad x \leqslant 0,$$

y

$$f(x) = x, \quad \text{si} \quad x > 0,$$

determinan una función (fig. 55).

2. Modo de representación tabular de una función

Supongamos que deseamos establecer la dependencia entre la temperatura media anual $t°$ y la altura h de la región sobre el nivel del mar expresada en kilómetros. Introducimos los resultados de nuestras observaciones en la tabla:

h	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$t°$	$+7,9$	$+4,6$	$+0,1$	$-5,0$	$-10,7$	$-16,9$	$-23,7$	$-30,8$	$-38,0$

Esta tabla muestra que la temperatura media anual varía junto con la altura de la región sobre el nivel del mar; a cada valor de la altura h le corresponde un valor determinado de la temperatura $t°$. Por consiguiente, la temperatura media anual $t°$ es función de la altura h de la región sobre el nivel del mar; en este caso la correspondencia entre las variables $t°$ y h se establece en la tabla. Este modo de representar la función se llama *tabular.*

Conociendo la expresión analítica de una función, la misma se puede representar en forma de una tabla para los valores del argumento que nos interesan. Sea dada, por ejemplo, la función

$$y = x^3.$$

Dando a x una serie de valores numéricos y calculando los valores correspondientes de y, obtendremos la tabla:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	-27	-8	-1	0	1	8	27	...

Podemos ver que si la función está dada analíticamente (es decir por una fórmula), es posible construir para ella una tabla o, como dicen, *tabular la función.*

Se tabulan generalmente funciones que tienen una expresión analítica complicada (es decir, expresadas por una fórmula complicada), pero se encuentran con frecuencia en la práctica. Así, por ejemplo, se utilizan ampliamente las siguientes tablas: de funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, etc., (tablas de valores trigonométricos naturales), $\log x$ (tablas de logaritmos), etc. Para estas funciones existen fórmulas expresadas mediante series infinitas (véase el § 12 del cap. XXI) pero ellas son muy complicadas para un empleo práctico.

Surge la pregunta, de si es siempre posible pasar de la representación tabular de una función a su expresión analítica, es decir, expresarla por medio de una fórmula.

Antes de responder a esta pregunta, cabe señalar que la tabla no da todos los valores de la función y que los valores intermedios pueden ser solamente hallados aproximadamente (por la llamada *interpolación de la función*). Por eso, en el caso general, es imposible hallar una expresión analítica precisa de la función a partir de su representación tabular.

Sin embargo siempre se puede construir una fórmula, o incluso varias, que den, para los valores del argumento que figuran en la tabla, los valores tabulares correspondientes de la función. Este tipo de fórmula se llama *de interpolación*.

3. *Representación gráfica de una función*

Las representaciones analítica y tabular no dan una imagen evidente. Esta insuficiencia se salva con la *representación gráfica* de la función $y = f(x)$, cuando la correspondencia entre el argumento x y la función y se establece por medio de una gráfica (fig. 56). Para hallar aquí el valor de la función y correspondiente al valor del argumento, por ejemplo, x, hace falta trazar el segmento $OA = x$ sobre el eje Ox en el sentido correspondiente y luego trazar la perpendicular AM hasta su intersección con la gráfica. Si se toma la longitud de esta perpendicular con el signo conveniente, obtenemos el número

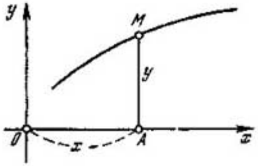

Fig. 56

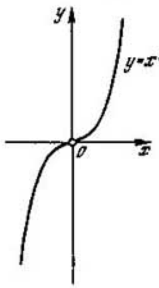

Fig. 57

$$y = f(x).$$

Dando a x diferentes valores, obtendremos, con este procedimiento, los valores correspondientes de la función y que, si es necesario, pueden ser escritos en una tabla.

Un ejemplo de representación gráfica de la función es el llamado *barograma* (diagrama obtenido con ayuda de un aparato autorregistrador llamado barógrafo) que indica gráficamente la variación de la presión atmosférica en función del tiempo.

Para construir la gráfica de la función $y = f(x)$ dada analíticamente es necesario componer una tabla de valores x e y de esta función y luego tomando x como abscisa e y como ordenada del punto, se construye el sistema de puntos del plano. Si unimos estos puntos por medio de una línea, cuya forma tiene en cuenta, en la medida de lo posible, el carácter de los valores intermedios de la función, obtendremos la representación gráfica aproximada de esta función.

Por ejemplo, utilizando los datos de la tabla de la pág. 75 construimos el gráfico de la función

$$y = x^3$$

(*parábola cúbica*) (fig. 57).

§ 5. Noción de la función de varias variables

La noción de función de una sola variable se generaliza naturalmente en el caso de varias variables.

DEFINICIÓN. *Una magnitud variable u se llama función (unívoca)* ***de varias variables****, por ejemplo, de dos variables: x e y, si a cada conjunto considerado de valores (admisibles) de x e y le corresponde un valor determinado de la magnitud u.*

Aquí x e y se denominan *variables independientes* o *argumentos*; el conjunto de sus valores considerados se llama *dominio de definición* o *dominio de existencia* de la función u. El dominio de existencia de la función de dos variables x e y es, en general, cierto conjunto de puntos del plano Oxy.

El hecho de que u es la función de x e y se escribe generalmente así:

$$u = f(x, y),$$

donde f es la *característica de la función*. Claro está que en vez de f se puede utilizar cualquier otra letra.

EJEMPLO 1. El área U de un rectángulo, cuyos lados son iguales a x e y se expresa por la fórmula

$$U = xy.$$

Es evidente que U es una función de dos argumentos determinada en el dominio $x > 0$, $y > 0$.

EJEMPPO 2. La ecuación del estado de un gas tiene la forma

$$vp = RT,$$

donde v es el volumen ocupado por la masa dada del gas; p, la presión del gas; T, la temperatura absoluta, y R es una constante. Resolviendo esta ecuación respecto a v, obtendremos

$$v = \frac{RT}{p}.$$

Vemos que v es función de dos variables: de la presión p y de la temperatura absoluta T; esta función está definida en el dominio $p > 0$, $T > 0$.

La función u de tres variables x, y, y z puede designarse así:

$$u = f(x, y, z).$$

EJEMPLO 3. El volumen $V = xyz$ y la superficie total $S = 2xy + 2yz + 2zx$ de un paralelepípedo rectangular, cuyas dimensiones lineales x, y, z son las funciones de tres argumentos x, y, z definidas en el dominio $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

§ 6. Noción de función implícita

Una función se llama *explícita*, si está dada por una fórmula, cuyo segundo miembro no contiene ninguna variable dependiente. Por ejemplo, la función $y = x^2$ es explícita.

Una función y del argumento x se llama *implícita*, si está dada por la ecuación

$$F(x, y) = 0, \qquad (1)$$

no resuelta respecto a la variable dependiente. Por ejemplo, la función y $(y > 0)$ definida por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ es implícita.

Para expresar en forma explícita la función y dada por la ecuación (1) es necesario resolver esta ecuación respecto a y. Puesto que para un valor dado del argumento x la ecuación (1) puede tener muchas (incluso una infinidad de) raíces y, la función implícita es, en general, una función multívoca.

El conjunto de valores del argumento x, para cada uno de los cuales la ecuación (1) posee, por lo menos, una raíz real y, representa el *dominio de existencia* de la función implícita correspondiente. Cabe hacer notar que no toda ecuación (1) define una función implícita. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

no define evidentemente una función (en el dominio real).

EJEMPLO. Sea que x e y están vinculados por la ecuación

$$x^2 + y^3 = 1.$$

Aquí y es una función implícita del argumento x. Resolviendo esta ecuación respecto a y obtendremos

$$y = \sqrt[3]{1 - x^2}.$$

Esta última fórmula nos da y como función explícita de x.

A veces resulta difícil resolver la ecuación (1) respecto a y. Por ejemplo, la *ecuación de Kepler*

$$y - \varepsilon \operatorname{sen} y = x \quad (0 < \varepsilon < 1),$$

no puede ser resuelta con procedimientos elementales respecto a y. En este caso, la función y se estudia utilizando directamente la ecuación que la define.

§ 7. Función recíproca

Sea y una función del argumento x:

$$y = f(x). \tag{1}$$

Dando a x valores, obtendremos los correspondientes de y. Sin embargo, considerando y como argumento, y x, como función, se pueden asignar valores a y, calculando los valores correspondientes de x. En tal caso, la ecuación (1) definirá x como una función implícita de y. Esta última función se llama *función recíproca* o *inversa* respecto a la función dada y.

Suponiendo que la ecuación (1) está resuelta respecto a x obtendremos la expresión explícita de la función recíproca

$$x = \varphi(y), \tag{2}$$

donde la función $\varphi(y)$ satisface, para todos los valores admisibles de y, la condición

$$f[\varphi(y)] = y. \tag{3}$$

EJEMPLO 1. En la fórmula del volumen de la esfera

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \tag{4}$$

el radio R es el argumento, el volumen V, la función. Al resolver la ecuación (4) respecto a R, obtendremos la función recíproca de la función dada:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

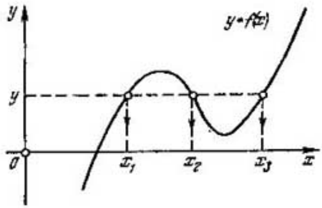

Fig. 58

A veces se usan designaciones normalizadas: se entiende como x la variable independiente; como y, la función, es decir, la variable dependiente. En tal caso, la función recíproca debe ser escrita así:

$$y = \varphi(x).$$

Por ejemplo, se puede decir que las funciones $y = 2^x$ e $y = \log_2 x$ son recíprocas.

La función recíproca de una función unívoca puede ser **multívoca** (fig. 58), es decir, a un valor dado de y pueden corresponder varios valores $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de la función recíproca $x = \varphi(y)$ (fig. 58). En ciertos casos se logra obtener una función recíproca unívoca, introduciendo en sus valores posibles restricciones suplementarias.

EJEMPLO 2. La función biunívoca $x = \pm\sqrt{y}$ es recíproca respecto a la función $y = x^2$. Si convenimos tomar para la raíz sólo el valor aritmético, la relación recíproca será una función unívoca.

Es evidente que la función recíproca respecto a la función (2) es la función (1). Por eso las funciones f y φ ligadas por la relación (3), son **recíprocamente inversas.** Una de ellas se llama *función directa* y la otra, *función inversa*.

Notemos que una misma curva

$$y = f(x)$$

representa el gráfico de la función dada y el gráfico de su función recíproca, según estén trazados los valores del argumento, sobre el eje Ox o sobre el eje Oy.

Si nos ponemos de acuerdo en designar la variable independiente con x y la variable dependiente con y, entonces, para obtener del gráfico de la función dada $y = f(x)$ el de su función recíproca $y = \varphi(x)$ es suficiente reflejar de forma especular el primer gráfico respecto a la bisectriz de los cuadrantes I y III de las coordenadas (fig. 59).

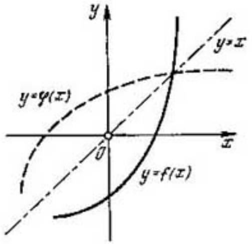

Fig. 59

§ 8. Clasificación de funciones de un solo argumento

En dependencia de la naturaleza de las operaciones que se deben efectuar sobre el valor del argumento, a fin de obtener el valor correspondiente de la función, se establece la siguiente clasificación de las funciones.

1) Si las operaciones a realizar sobre el argumento x y sobre ciertas constantes son adiciones, sustracciones, multiplicaciones, elevaciones a potencias enteras y positivas (un número finito de veces), se obtiene una *función racional entera* o *polinomio*. La forma general de esta función es:

$$P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m,$$

donde m es un número entero positivo o igual a cero, y los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m$, son números constantes.

2) La función representada en forma del cociente de la división de dos funciones racionales enteras

$$R(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n}$$

se llama *función racional fraccionaria*.

El conjunto de las funciones racionales enteras y fraccionarias forma la clase de las *funciones racionales*.

3) Si además de las cinco operaciones algebraicas arriba indicadas, se efectúa sobre el argumento un número finito de extracciones de las raíces, y el resultado obtenido no es una función racional, se

obtiene una *función irracional*. Por ejemplo,

$$f(x)=\sqrt{\frac{5x^2+4x-7}{3x^2-8x+4}}+(\sqrt[5]{x}+1)^3.$$

Aquí por raíz se entiende generalmente su valor aritmético.

El conjunto de funciones racionales enteras y fraccionarias forma la clase de las *funciones algebraicas explícitas*.

4) En el caso más general, se llama *función algebraica* a una función multívoca implícita definida por la ecuación

$$p_0(x)\,y^n+p_1(x)\,y^{n-1}+\ldots+p_{n-1}(x)\,y+p_n(x)=0,$$

donde n es un número entero positivo y los coeficientes $p_0(x)$, $p_1(x)$, . . ., $p_{n-1}(x)$, $p_n(x)$ son funciones racionales enteras de x, y el coeficiente $p_0(x)$ no es idénticamente igual a cero [1]). Por ejemplo, la raíz de la ecuación $y^5+y-x^2=0$ es una función algebraica. Notemos que esta función no es explícita, ya que la ecuación algebraica de la potencia superior a cuatro no puede ser, en general, resuelta en radicales.

5) Toda función no algebraica se llama *función trascendente*.

Las funciones trascendentes más simples (llamadas *funciones trascedentes elementales*) son:

a) la función exponencial a^x, donde a es un número distinto de uno;

b) la función logarítmica $\log_a x$, donde $a>0$ y $a\neq 1$;

c) las funciones trigonométricas: sen x, cos x, tg x, ctg x, sec x, cosec x;

d) las funciones trigonométricas inversas: Arcsen x, Arccos x, Arctg x, Arcctg x, Arcsec x, Arccosec x.

Las funciones algebraicas, trascendentes elementales y sus combinaciones finitas se llaman *funciones elementales*. Éstas son las principales funciones que consideraremos a lo largo de nuestro curso.

Señalemos que en nuestro curso utilizaremos, como regla, solamente funciones elementales unívocas, imponiendo, si hace falta, restricciones suplementarias a las funciones multívocas que se examinen.

§ 9. Gráficas de las funciones elementales principales

Mostraremos aquí las gráficas de algunas funciones elementales fundamentales.

I. Función potencial

$$y=x^n, \tag{1}$$

donde n es un número entero.

Esta función se define para $-\infty<x<+\infty$, si $n\geqslant 0$ y para $0<|x|<+\infty$, si $n<0$.

---

[1]) Las funciones algebraicas generalmente son consideradas en un dominio complejo.

Si $n \geqslant 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), las gráficas de las funciones (1) representan **parábolas**, respectivamente, de grados cero, primero, segundo, etc. (fig. 60).

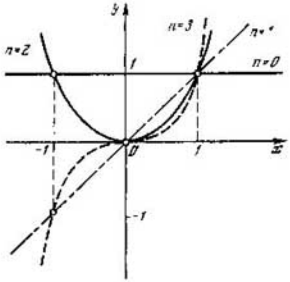

Fig. 60

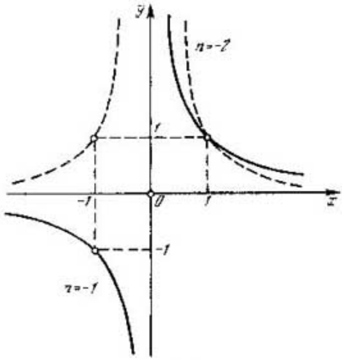

Fig. 61

Si $n < 0$ ($n = -1, -2, \ldots$), las gráficas de las funciones (1) representan hipérbolas de diversos grados (fig. 61).

II. Función radical

$$y = \sqrt[n]{x}, \tag{2}$$

donde n es un número natural.

El dominio de definición de la función: $0 \leqslant x < +\infty$ para n par y $-\infty < x < +\infty$ para n impar.

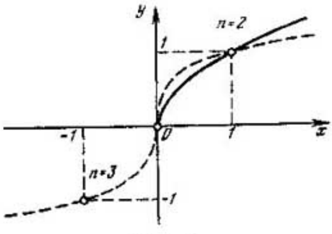

Fig. 62

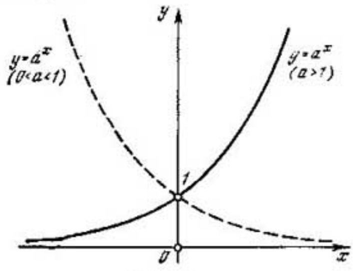

Fig. 63

Puesto que $x = y^n$, la función (2) es recíproca respecto a la función potencial (1). Por eso, las gráficas de las funciones radicales son parábolas o sus partes de distintos grados n (fig. 62).

III. Función exponencial

$$y = a^x,$$

donde a es un número constante, $a > 0$, $a \neq 1$.

Esta función está definida para todos los valores de x. La función es positiva y crece monótonamente desde 0 hasta $+\infty$ cuando $a > 1$ y decrece monótonamente desde $+\infty$ hasta 0, cuando $0 < a < 1$ (fig. 63).

IV. Función logarítmica

$$y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1). \quad (3)$$

El dominio de definición es

$$0 < x < +\infty.$$

Puesto que la fórmula (3) da

$$x = a^y,$$

la función logarítmica es recíproca respecto a la exponencial. Por eso la gráfica de la función logarítmica se obtiene de la función exponencial con ayuda de la representación especular de esta última respecto a la bisectriz de los ángulos de los cuadrantes I y III de las coordenadas (fig. 64).

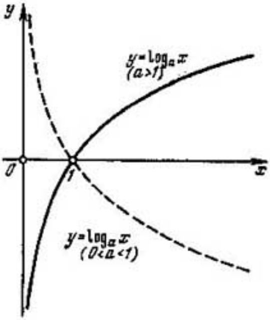

Fig. 64

V. Funciones trigonométricas

En las matemáticas superiores el argumento de una función trigonométrica es un número que puede ser considerado como la medida del ángulo correspondiente expresado en radianes.

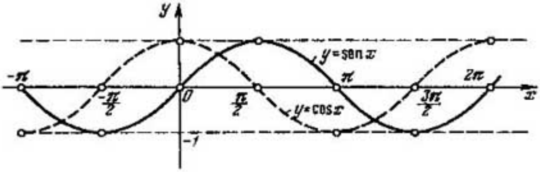

Fig. 65

Nos limitaremos a describir las funciones trigonométricas más importantes.

a) $$y = \text{sen}\, x.$$

Esta función está definida para todos los valores de x. La función $\text{sen}\, x$ está acotada ($|\,\text{sen}\, x\,| \leqslant 1$) y es periódica con período 2π (es decir, los valores de la función se repiten cuando el argumento varía en 2π; su gráfica es una *sinusoide* (fig. 65).

b) $$y = \cos x.$$

Esta función posee propiedades análogas a las de sen x. Su gráfica es una *cosinusoide*, que es una sinusoide dezplazada hacia la izquierda a $\frac{\pi}{2}$ (fig. 65). Efectivamente, $\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

c) $$y = \operatorname{tg} x.$$

Esta función está definida para $x \neq \frac{2k+1}{2}\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Su período es igual a π. La gráfica de la función es una *tangensoide* (función tangente) (fig. 66).

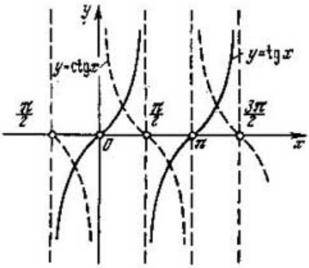

Fig. 66

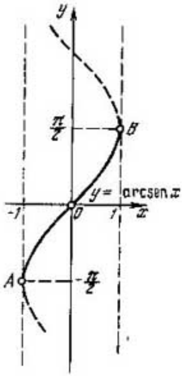

Fig. 67

d) $$y = \operatorname{ctg} x.$$

Esta función está definida para $x \neq k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Su período es igual a π. La gráfica de la función es una *cotangensoide* geométricamente idéntica a la de la tangensoide (fig. 66).

VI. Funciones trigonométricas inversas

a) $$y = \arcsin x, \tag{4}$$

es decir, *y es un arco tomado entre los límites*

$$-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2, \tag{5}$$

cuyo seno es igual a x:

$$\operatorname{sen} y = x \tag{6}$$

(***significado principal***). La función (4) está unívocamente definida sobre el segmento $[-1, 1]$; su gráfica es una parte de la sinusoide (el arco AB en la fig. 67).

Si se invierte la igualdad (6), sin imponer la condición (5), es decir, si se hallan todos los valores de y, cuyos senos son iguales a x, obtenemos la **función multívoca**

$$y = \text{Arcsen}\, x,$$

cuyo gráfico es una sinusoide dirigida a lo largo del eje Oy. Basándose en las propiedades de los arcos que poseen el mismo seno, se deduce la fórmula

$$\text{Arcsen}\, x = (-1)^k \arcsin x + k\pi$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

b) $$y = \arccos x, \qquad (7)$$

es decir, *y es un arco tomado entre los límites*

$$0 \leqslant y \leqslant \pi, \qquad (8)$$

cuyo coseno es igual a x:

$$\cos y = x \qquad (9)$$

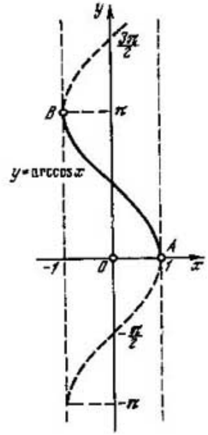

Fig. 68

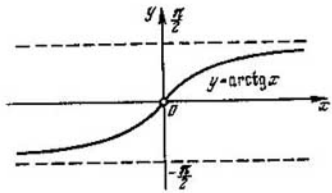

Fig. 69

(***significado principal***). La función (7) está unívocamente definida sobre el segmento $[-1, 1]$; su gráfica es una parte de cosinusoide (el arco AB en la fig. 68).

Resolviendo la ecuación (9) respecto a y, se obtiene, en el caso general, la **función multívoca**

$$y = \text{Arccos}\, x,$$

cuya gráfica es una cosinusoide dirigida a lo largo del eje Oy. En este caso es justa la fórmula

$$\text{Arccos}\, x = \pm \arccos x + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

c) $$y = \text{arctg}\, x, \qquad (10)$$

es decir, *y es un arco tomado entre los límites*

$$-\pi/2 < y < \pi/2, \qquad (11)$$

cuya tangente es igual a x:

$$\operatorname{tg} y = x \tag{12}$$

(significado principal).

La función (10) está unívocamente definida en el intervalo $-\infty < x < +\infty$; su gráfica es un arco de tangensoide (fig. 69).

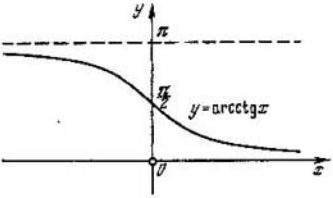

Fig. 70

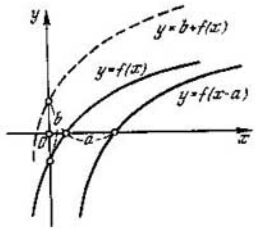

Fig. 71

Resolviendo la ecuación (12) respecto a y, se obtiene, en el caso general, la **función multívoca**

$$y = \operatorname{Arctg} x,$$

cuya gráfica está compuesta de un número infinito de tangensoides desplazadas (10). Es justa la fórmula

$$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

d) $$y = \operatorname{arcctg} x, \tag{13}$$

es decir, *y es un arco tomado entre los límites*

$$0 < y < \pi, \tag{14}$$

cuya cotangente es igual a x:

$$\operatorname{ctg} y = x. \tag{15}$$

La función (13) está unívocamente definida en el intervalo de $-\infty < x < +\infty$; su gráfica es un arco de cotangensoide (fig. 70).

Si en la ecuación (15) se hallan para cada valor de x todos los valores de y, cuya cotangente es igual a x, se obtiene la función multívoca

$$y = \operatorname{Arcctg} x, \tag{16}$$

cuya gráfica está compuesta de infinidad de cotangensoides desplazadas (13). Tenemos

$$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Las gráficas examinadas de funciones elementales principales deben ser memorizadas. Utilizándolas se puede construir fácilmente una gran cantidad de gráficas de funciones elementales, considerándolas como **«funciones elementales fundamentales transformadas»**.

Sea una función

$$y = f(x) \tag{17}$$

cuya gráfica es conocida (fig. 71).

Examinemos las transformaciones más importantes de esta gráfica.

1) La gráfica

$$y = f(x - a)$$

representa la gráfica inicial (17) **desplazada a lo largo del eje Ox a una magnitud igual a a** (fig. 71).

2) La gráfica

$$y = b + f(x)$$

se obtiene a partir de la gráfica (17), **trasladando esta última a lo largo del eje Oy a una magnitud igual a b** (fig. 71).

3) La gráfica

$$y = cf(x) \quad (c \neq 0) \tag{18}$$

se obtiene a partir de la gráfica de la función $f(x)$ **por compresión** en $1/c$ de las ordenadas de aquélla para $0 < c < 1$ y, **por extensión**

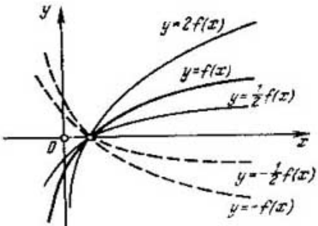

Fig. 72

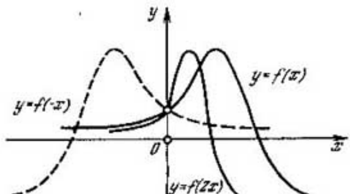

Fig. 73

en c veces de sus ordenadas, para $1 < c < +\infty$, conservando las abscisas correspondientes (fig. 72).

Si $-\infty < c < 0$, la gráfica (18) es la **representación especular** de la gráfica $y = -cf(x)$ **respecto al eje** Ox (fig. 72).

4) La gráfica

$$y = f(kx) \quad (k \neq 0) \tag{19}$$

se obtiene a partir de la gráfica de la función $y = f(x)$ **aumentando** en $1/k$ veces las abscisas de sus puntos para $0 < k < 1$, y **dismi-**

nuyendo en k veces las abscisas de sus puntos para $1 < k < +\infty$, conservando sus ordenadas (fig. 73).

Si $-\infty < k < 0$ la gráfica (19) es una **imagen especular** de la gráfica

$$y = f(-kx)$$

respecto al eje Oy (fig. 73).

Las reglas indicadas son geométricamente evidentes, su demostración la dejamos al lector.

Combinando las transformaciones de 1) a 4), se pueden construir las gráficas de funciones relativamente complicadas a partir de gráficas de funciones simples.

EJEMPLO. Construir la gráfica de la función $y = 3$ sen $2x$.

De acuerdo con las reglas de transformación 3) y 4), esta gráfica es la sinusoide $y =$ sen x, con las abscisas de sus puntos reducidas a la mitad y las ordenadas aumentadas al triple (en valor absoluto, conservando el signo, fig. 74).

Para construir la gráfica de una función es importante tener en cuenta *la simetría y la periodicidad de la gráfica.*

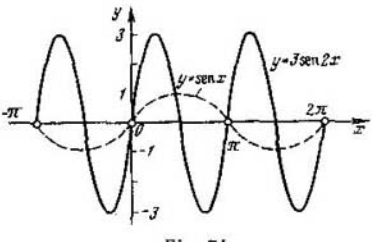

Fig. 74

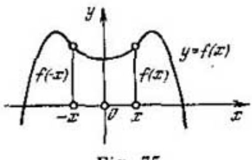

Fig. 75

DEFINICIÓN 1 *Una función $f(x)$ se llama* ***par****, si no cambia su valor cuando el signo del argumento es opuesto*, es decir, si

$$f(-x) = f(x).$$

Por ejemplo, las funciones $x^0 = 1$, x^2, $\cos x$, etc., son pares.

La gráfica de una función par $y = f(x)$ es evidentemente **simétrica respecto al eje** Oy (fig. 75). Por eso, en el caso de una funcóin par, es suficiente construir solamente la mitad derecha de la gráfica ($x \geqslant 0$); su mitad izquierda ($x \leqslant 0$) es una imagen especular de la mitad derecha respecto al eje de ordenadas.

DEFINICIÓN 2 *Una función $f(x)$ se llama* ***impar*** *si al cambiar el signo del argumento, cambia también el signo de la función, pero su valor numérico se conserva, es decir, si*

$$f(-x) = -f(x).$$

Por ejemplo, son funciones impares x, x^3, sen x, tg x, arcsen x, arctg x, etc.

La gráfica de una función impar $y = f(x)$ es evidentemente **simétrica respecto al origen de las coordenadas** (fig. 76). Por eso, para construir la gráfica de una función impar es suficiente trazar su mitad derecha ($x \geqslant 0$); la otra mitad de la gráfica ($x \leqslant 0$) se obtiene haciendo girar la mitad derecha en 180°.

DEFINICIÓN 3. *Una función $f(x)$ se llama* ***periódica****, si existe un número positivo T* ***(período de la función)*** *tal que*

$$f(x+T) \equiv f(x)$$

(fig. 77). En el § 3 del capítulo VI ya encontramos funciones periódicas; por ejemplo, sen x (período 2π), cos x (período 2π), tg x (período π), ctg x (período π), etc.

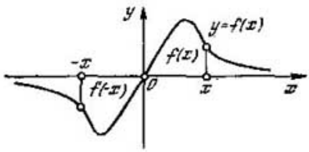

Fig. 76

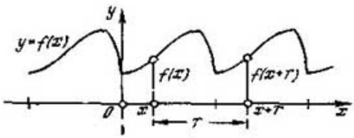

Fig. 77

Para construir una gráfica de una función periódica es suficiente con trazar sobre un segmento una longitud igual al período de esta función (*dominio principal*) y construir después la continuación periódica de la gráfica dando los mismos valores de las ordenadas a los puntos cuyas abscisas difieren en un número múltiplo del período.

§ 10. Interpolación de funciones

Examinemos la función $y = f(x)$ dada por las dos primeras columnas de la tabla siguiente

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
.	.	.	.
x_{-3}	y_{-3}	Δy_{-3}	$\Delta^2 y_{-3}$
x_{-2}	y_{-2}	Δy_{-2}	$\Delta^2 y_{-2}$
x_{-1}	y_{-1}	Δy_{-1}	$\Delta^2 y_{-1}$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$
x_2	y_2	Δy_2	.
x_3	y_3	.	.

Suponemos que los valores tabulados . . ., x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, . . . del argumento x son **equidistantes**; en otras palabras, la diferencia

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{1}$$

es una magnitud constante (Δ es el símbolo de la diferencia). La magnitud h se llama *paso de la tabla*. Para estudiar la regularidad del comportamiento de la función y, completamos nuestra tabla con las *diferencias de primer orden* Δy (*primeras diferencias*)

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{2}$$

Si la función $y = y_0 + kx$ es lineal, su diferencia $\Delta y_i = kh$ es una magnitud constante.

Se pueden componer de un modo análogo las *diferencias de segundo orden* (*segundas diferencias*)

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) =$$
$$= y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{3}$$

etc.

Si la función y es lineal, sus segundas diferencias $\Delta^2 y_i$ son iguales a cero. Para una función cuadrática $y = a + bx + cx^2$ sus segundas diferencias $\Delta^2 y_i$ son constantes (¡verificarlo!).

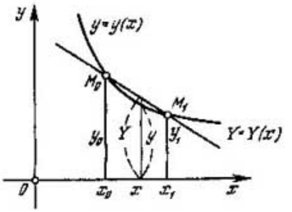

Fig. 78

Por *interpolación* se entiende la determinación aproximada de los valores de una función y, para valores intermedios del argumento x, no tabulados.

Supongamos que el paso h de la tabla sea pequeño y las diferencias Δy_i sean casi constantes. Sea x_0 el valor **menor** tabulado más cercano al valor no tabulado dado de x, es decir, $x_0 < x < x_1$. En el intervalo (x_0, x_1) la función y puede ser considerada aproximadamente como una Y lineal tal, que $Y(x_0) = y_0$ e $Y(x_1) = y_1$. Esto significa geométricamente que reemplazamos el arco $\overset{\frown}{M_0M_1}$ de la curva por la cuerda correspondiente $\overline{M_0M_1}$ (fig. 78). Puesto que el coeficiente angular de la cuerda $\overline{M_0M_1}$ es igual a

$$k = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h},$$

entonces

$$y \approx Y = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) \tag{4}$$

(*interpolación lineal*).

Al introducir la magnitud

$$\frac{x-x_0}{h}=t \tag{5}$$

(«la distancia entre los puntos x y x_0 se mide en pasos»), se puede escribir la fórmula aproximada (4) así:

$$y=y_0+t\,\Delta y_0. \tag{6}$$

Con ayuda de la fórmula (6) se puede efectuar una interpolación inversa, es decir, hallar el valor correspondiente del argumento x por el valor de la función y ($y_0 \leqslant y \leqslant y_1$). Efectivamente, tenemos

$$t=\frac{y-y_0}{\Delta y_0}. \tag{7}$$

De aquí, mediante la fórmula (5), obtenemos

$$x=x_0+th. \tag{8}$$

EJEMPLO 1. Sea dada la función $y=y(x)$ en la tabla:

x	1	1,02	1,04
y	1.21	1,44	1,69

Efectuando la interpolación lineal hallar y (1,005). ¿Cuál es valor de x, si $y(x)=1{,}5$?

Aquí el paso $h=0{,}02$. Considerando que $x_0=1$, tenemos

$$t=\frac{1{,}005-1}{0{,}020}=\frac{1}{4},$$

de donde, mediante la fórmula (6), hallamos

$$y=1{,}21+\frac{1}{4}\cdot 0{,}02=1{,}215.$$

Para la interpolación inversa, consideramos que $x_0=1{,}02$ e $y_0=1{,}44$. De aquí, $\Delta y_0=1{,}69-1{,}44=0{,}25$. Por medio de las fórmulas (7) y (8), hallamos

$$t=\frac{1{,}5-1{,}44}{0{,}25}=\frac{0{,}06}{0{,}25}=0{,}24$$

y $x=1{,}02+0{,}24\cdot 0{,}02=1{,}0248$.

Notemos que para $x \in (x_0, x_1)$ se obtiene una fórmula de interpolación lineal análoga, si en vez del valor menor más cercano tabulado de x_0, se utiliza el valor mayor tabulado más cercano de x_1, lo cual es a veces más cómodo. A saber, tenemos

$$y \approx y_1+\frac{\Delta y_0}{h}(x-x_1). \tag{4'}$$

Para obtener resultados más precisos se recurre a veces a la *interpolación cuadrática*. Para eso se reemplaza la función y en el intervalo (x_0, x_2) por un trinomio cuadrado $\widetilde{Y}$ tal, que

$$\widetilde{Y}(x_0) = y_0, \quad \widetilde{Y}(x_1) = y_1, \quad \widetilde{Y}(x_2) = y_2, \tag{9}$$

donde x_0 sigue siendo el valor tabulado mínimo más cercano al valor dado de x que no figura en la tabla. Esto significa geométricamente que el arco $\widehat{M_0M_1M_2}$ del gráfico de la función $y = y(x)$ es reemplazado de modo aproximado por una parábola de eje vertical que pasa por los puntos M_0, M_1, M_2 (fig. 79).

Escribimos la función $\widetilde{Y}$ en la forma artificial siguiente:

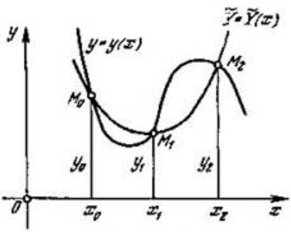

Fig. 79

$$\widetilde{Y} = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)(x - x_1). \tag{10}$$

Haciendo $x = x_0$, en virtud de la fórmula (9), obtenemos

$$\widetilde{Y}(x_0) = y_0 = a,$$

de donde

$$a = y_0. \tag{11}$$

De modo análogo, para $x = x_1$, tendremos

$$\widetilde{Y}(x_1) = y_1 = a + b(x_1 - x_0),$$

de donde, utilizando la fórmula (11) y teniendo en cuenta que $x_1 - x_0 = h$, hallamos

$$b = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}. \tag{12}$$

Por fin, para $x = x_2$ tenemos

$$\widetilde{Y}(x_2) = y_2 = a + b(x_2 - x_0) + c(x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$

de donde, puesto que $x_2 - x_0 = 2h$ y $x_2 - x_1 = h$, entonces, teniendo en cuenta las fórmulas (11) y (12), obtenemos

$$c = \frac{y_2 - y_0 - \frac{\Delta y_0}{h}\cdot 2h}{2h^2} = \frac{(y_2 - y_1) + (y_1 - y_0) - 2\Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}. \tag{13}$$

De este modo, tenemos definitivamente

$$y \approx \widetilde{Y} = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) \tag{14}$$

(*fórmula de interpolación cuadrática*).

Suponiendo que

$$\frac{x-x_0}{h}=t \tag{15}$$

y

$$\frac{x-x_1}{h}=\frac{(x-x_0)-(x_1-x_0)}{h}=t-1, \tag{16}$$

obtendremos una fórmula de interpolación cuadrática más cómoda

$$y\approx y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0. \tag{17}$$

EJEMPLO 2. La función $y=y(x)$ está dada por dos primeras columnas de la tabla:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0,20	1,2214	626	33
<u>0,25</u>	<u>1,2840</u>	<u>659</u>	<u>33</u>
0,30	1,3499	692	
0,35	1,4191		

Utilizando la fórmula de interpolación cuadrática, hallar y (0,27).

En calidad de valor inicial, elegimos $x_0=0{,}25$ (los elementos necesarios de la tabla están subrayados). El paso de la tabla $h=0{,}05$.

Calculamos las diferencias $\Delta y_0=0{,}0659$ y $\Delta^2 y_0=0{,}0033$ (para abreviar, los decimales no se indican en la tabla).

Tenemos

$$t=\frac{0{,}27-0{,}25}{0{,}05}=0{,}4,$$

de donde, mediante la fórmula (17), obtenemos

$$y(0{,}27)=1{,}2840+0{,}4\cdot 0{,}0659+\frac{0{,}4\cdot(-0{,}6)}{2}\cdot 0{,}0033=$$
$$=1{,}2840+0{,}0264-0{,}0004=1{,}3100.$$

EJERCICIOS

1. En el triángulo ABC de base $AC=b$ y de altura $BD=h$ se traza una recta EF, paralela a AC y separada de ella a una distancia x. Expresar el área y del trapecio $AEFC$ como función de x. Determinar el dominio de definición de esta función y construir su gráfica.

2. Determinar el dominio de existencia de las funciones:

a) $y=\sqrt{x-2}$; b) $y=\sqrt{x^2-1}$; c) $y=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$; d) $y=\log(1+x)$.

3. Hallar $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(-x)$, $f(1/x)$, $f(x+1)$, si $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

4. Sabiendo que $f(1) = -2{,}23$ y $f(2) = 1{,}05$, hallar el valor aproximado de $f(1,3)$ considerando que la función es lineal sobre el segmento $[1, 2]$ (*interpolación lineal*).

5. Los resultados de la medición de x e y están dados en la tabla:

x	10	15	25
y	10	20	40

Hallar la dependencia entre x e y, si se sabe que ésta es lineal.

6. Hallar una función racional entera de segundo grado:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

tal que $f(0) = -3$, $f(1) = 0$, $f(2) = 5$.

7. Sean $\varphi(x) = x^2$ y $\psi(x) = 2^x$. Hallar $\varphi[\psi(x)]$ y $\psi[\varphi(x)]$.

8. Hallar $f[f(x)]$ y $f\{f[f(x)]\}$, si $f(x) = 1/(1-x)$.

9. Hallar las funciones explícitas recíprocas de funciones siguientes:

a) $y = 2x + 3$; b) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$; c) $y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$.

10. Construir las gráficas de las siguientes funciones elementales:

a) $y = x^{2/3}$; b) $y = \frac{1}{x-2}$; c) $y = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$; d) $y = \log(x+2)$; e) $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; f) $y = \operatorname{sen}^2 x$ $\left(\textbf{Indicación: } \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right)$; g) $y = 4\operatorname{sen}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$; h) $y = -\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; i) $y = -\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{2}$; k) $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$.

11. Hallar los valores aproximados de las raíces reales de la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$, y construir la gráfica de la función $y = x^3 - 3x + 1$.

12. Hallar el valor aproximado de la raíz más pequeña de la ecuación $\operatorname{tg} x = x$, construyendo las gráficas de funciones $y = \operatorname{tg} x$ e $y = x$.

13. La función $y = y(x)$ está dada por la tabla:

x	0,6	0,7
y	1,8221	2,0138

Utilizando la interpolación, hallar $y(0{,}63)$. ¿Cuál es el valor de x, si $y(x) = 2$?

Capítulo VII

Teoría de los límites

§ 1. Números reales

En matemáticas por *magnitud* se entiende todo lo que puede ser medido; en este caso la naturaleza física de la magnitud no tiene importancia para nosotros. Por eso las conclusiones de las matemáticas poseen un carácter absolutamente **general**, y pueden ser aplicadas a todas las magnitudes. El proceso de medición de una magnitud consiste en su comparación con otra magnitud de la misma naturaleza, tomada como unidad. El resultado de medir una magnitud es un *número* que expresa el valor de la magnitud medida. Si la magnitud a medir y la unidad de medición son **conmensurables** (es decir, tienen una medida común), el resultado de la medición es un *número racional*

$$x = \frac{m}{n},$$

donde m y n son números enteros. Si la magnitud a medir y la unidad de medición son **no conmensurables** (es decir, no tienen una medida común), el resultado de la medición es un *número irracional* (por ejemplo, $\sqrt{2}$, π, etc.) que puede ser expresado en forma de una fracción decimal infinita no periódica

$$x = p_0, \quad p_1 p_2 \ldots p_n \ldots$$

Si en esta fracción se toma un número finito de cifras después de la coma, se obtendrán ciertos números racionales que expresarán con la precisión deseada el valor de la magnitud que se mide, por eso, para las medidas prácticas podemos conformarnos con los números racionales. Sin embargo, para enunciar las leyes generales es preciso utilizar números irracionales (por ejemplo, el área del círculo $S = \pi R^2$, donde π es un número irracional). Los números racionales e irracionales se llaman *números reales* [1]). Para la representación geométrica de los números reales se utiliza el eje numérico Ox (fig. 80), sobre el cual se sitúan en escala determinada los números racionales (los enteros $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ y los fraccionarios $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{2}{3}, \ldots$ etc.) e irracionales. Como resultado todos los números reales se

[1]) En adelante, si no se menciona lo contrario, entenderemos como «número» al «número real».

sitúan sobre el eje numérico, ocupándolo enteramente, es decir, *a cada número real le corresponde un punto determinado del eje numérico, y viceversa, a cada punto del eje numérico le corresponde un número real.* Por eso en vez de las palabras un «número real» dicen frecuentemente un «punto».

Fig. 80

Al conjunto de todos los números reales x se le agregan dos símbolos, $-\infty$ y $+\infty$, con las propiedades siguientes:

$$-\infty < x < +\infty.$$

Este sistema de números reales se llama *ampliado*. Se supone que es justa la siguiente aritmética:

a) $x \pm \infty = \pm\infty$;

b) $\frac{x}{\pm\infty} = 0$;

c) $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$, si $x > 0$

y

$$x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty, \text{ si } x < 0.$$

Los números reales pueden ser positivos o negativos. En algunos casos es preciso examinar el valor absoluto de un número real, ignorando su signo.

DEFINICIÓN *Llámase* ***valor absoluto*** (*o* ***módulo***) *de un número real al valor aritmético de este número.*

El valor absoluto del número a se designa así: $|a|$. Por ejemplo, $|-5| = 5$, $|+3| = 3$. En general, si x es un número real, entonces

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Es evidente que para todo número x tiene lugar la igualdad $|-x| = |x|$.

Si los números reales están repartidos sobre el eje numérico, el valor absoluto $|x|$ de todo número x representa en sí la distancia desde el punto correspondiente A, de abscisa x hasta el origen O: $|x| = OA$ (fig. 81).

De aquí se deduce que, si el valor absoluto de un número x satisface la desigualdad

$$|x| < a \quad (\text{o} \quad |x| \leqslant a), \tag{1}$$

el número x se subordina a la acotación

$$-a < x < a \quad \text{(o, respectivamente, } -a \leqslant x \leqslant a), \qquad (2)$$

es decir, x pertenece al intervalo $(-a, a)$ (o al segmento $[-a, a]$). En particular, para todo número x es justa la desigualdad

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|.$$

Recíprocamente, si tiene lugar una de las desigualdades dobles (2), se cumplirá una de las desigualdades (1).

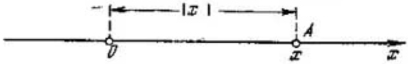

Fig. 81

Una afirmación más general es: si

$$|x - x_0| < a \quad (\text{o} \quad |x - x_0| \leqslant a),$$

entonces, tenemos

$$x_0 - a < x < x_0 + a \quad (\text{o} \quad x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a)$$

puesto que $|x - x_0|$ es igual a la distancia entre los puntos x y x_0. La reciprocidad es también justa (fig. 82).

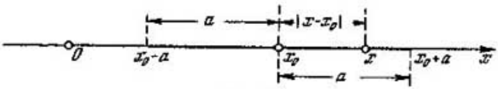

Fig. 82

El valor absoluto de un número real posee las propiedades siguientes:

1) ***El valor absoluto de una suma*** *de dos o varios números es inferior o igual a la suma de los valores absolutos de estos números.*

Efectivamente, supongamos primero que x e y son números reales de signos iguales, es decir, $xy \geqslant 0$. Es evidente que tenemos

$$|x + y| = |\pm|x| \pm |y|| = |\pm(|x| + |y|)| = |x| + |y|$$

(por ejemplo, $|-3 - 5| = |-(3 + 5)| = 3 + 5$).

Ahora, sean x e y números reales de signos contrarios, es decir, $xy < 0$. Supongamos para mayor certeza que $|x| \geqslant |y|$. En este caso tenemos

$$|x + y| = |\pm|x| \mp |y|| = |\pm(|x| - |y|)| = |x| - |y| < |x| + |y|$$

(por ejemplo, $|-5 + 2| = |-(5 - 2)| = 5 - 2 < 5 + 2$).

De este modo, para todo número real x e y es justa la desigualdad

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|, \tag{3}$$

donde el signo de igualdad tiene lugar solamente cuando los números x e y son del mismo signo.

OBSERVACIÓN. La desigualdad (3) se extiende fácilmente al caso de un número cualquiera de sumandos, por ejemplo,

$$|x + y + z| = |(x + y) + z| \leqslant |x + y| + |z| \leqslant$$
$$\leqslant |x| + |y| + |z|.$$

2. ***El valor absoluto de la diferencia*** *de dos números es superior o igual a la diferencia de los valores absolutos de estos números.*

Efectivamente en virtud de la propiedad (1) tenemos

$$|x| = |y + (x - y)| \leqslant |y| + |x - y|.$$

De aquí

$$|x - y| \geqslant |x| - |y|.$$

3) ***El valor absoluto del producto*** *de dos o más números es igual al producto de los valores absolutos de estos números,* por ejemplo,

$$|xy| = |x|\,|y|.$$

4) ***El valor absoluto de un cociente*** *es igual al cociente de los valores absolutos (si el divisor es distinto de cero),* es decir, si $y \neq 0$, entonces

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

5) ***El valor absoluto de una potencia,*** *entera positiva o entera negativa, es igual a la potencia correspondiente del valor absoluto de la base, es decir,*

$$|x^n| = |x|^n.$$

La demostración de las proposiciones 3) — 5), que son casi evidentes, la dejamos al lector.

§ 2. Errores de números aproximados

Al medir una magnitud, cuyo valor exacto es igual a a, obtenemos generalmente su *valor aproximado* x; la diferencia $a - x$ se llama *error* del número aproximado x. A a lo denominamos *número exacto* y a x, *número aproximado*. Si $x \leqslant a$, x se llama *aproximación por defecto*, si $x \geqslant a$, x se denomina *aproximación por exceso*.

DEFINICIÓN 1. *El valor absoluto de la diferencia entre el valor exacto del número a y un valor aproximado x de este número se llama* ***error absoluto*** Δ_0, *es decir*

$$\Delta_0 = |a - x|. \tag{1}$$

Si el valor exacto del número a es desconocido, la fórmula (1) no permite determinar el error absoluto Δ_0 del número aproximado x. En este caso se limita a una *estimación por exceso* del error absoluto Δ_0, es decir, se halla un número positivo Δ que difiere poco de Δ_0; un número tal, que

$$\Delta_0 \leqslant \Delta. \tag{2}$$

El número Δ que satisface la desigualdad (2) se llama *error absoluto límite* del número aproximado x. Es evidente que tenemos

$$x - \Delta \leqslant a \leqslant x + \Delta; \tag{3}$$

o, en forma abreviada

$$a = x \pm \Delta. \tag{3'}$$

Ocurre frecuentemente que son conocidos dos números aproximados x_1 y x_2 entre los cuales se encuentra el número exacto a:

$$x_1 \leqslant a \leqslant x_2.$$

En este caso se puede escribir

$$a = x \pm \Delta,$$

donde $x = (x_2 + x_1)/2$ y $\Delta = (x_2 - x_1)/2$.

El error absoluto, tomado sin tener en cuenta el valor que se mide, no caracteriza la precisión de una medición. Por ejemplo, si al medir la longitud de una mesa $a_1 = 2$ m y la longitud de un ferrocarril $a_2 = 200$ km, se ha cometido un mismo error absoluto $\Delta_1 = \Delta_2 = 0{,}1$ m, esto no significa que las mediciones son de igual calidad. El segundo resultado es evidentemente más exacto que el primero. Para juzgar acerca del grado de precisión de las mediciones se introduce la noción de *error relativo*.

DEFINICION 2. *Llámase* ***error relativo*** δ_0 *de un número aproximado* x *a la relación del error absoluto de este número respecto al valor absoluto del número exacto correspondiente* a, *es decir*,

$$\delta_0 = \frac{\Delta_0}{|a|}, \tag{4}$$

de donde

$$\Delta_0 = |a|\,\delta_0, \tag{5}$$

es decir, *el error absoluto de un número aproximado es igual al error relativo de éste multiplicado por el valor absoluto del número exacto correspondiente.*

Si el número exacto a es desconocido o muy complicado de hallar, se da la **estimación superior** del número δ_0. El número δ que satisface la desigualdad

$$\delta_0 \leqslant \delta,$$

se llama *error relativo límite* del número aproximado x. Es evidente que si $x > 0$, se puede hacer

$$\delta = \frac{\Delta}{x-\Delta},$$

donde Δ es un error absoluto límite del número x tal, que $x - \Delta > 0$.

EJEMPLO 1. ¿Cuál es el error relativo límite δ del número $x = 3,14$ que sustituye el número π?

Como $3,14 < \pi < 3,142$, el error absoluto Δ_0 del número x satisface la desigualdad $\Delta_0 < 0,002$. De aquí,

$$\delta_0 = \frac{\Delta_0}{\pi} < \frac{0,002}{3,14} < 6,4\cdot 10^{-4}.$$

Por consiguiente, se puede considerar que $\delta = 0,064\%$.

Como el número exacto a en numerosos casos es difícil de hallar, en la práctica se considera que $a \approx x$, donde x es un número aproximado suficientemente cercano a a, y se utilizan fórmulas aproximadas

$$\delta_0 \approx \frac{\Delta_0}{|x|} \tag{4'}$$

y

$$\Delta_0 \approx |x|\,\delta_0 \tag{5'}$$

($\approx$ es el signo de igualdad aproximada). Las fórmulas correspondientes son igualmente justas para los errores límites.

EJEMPLO 2. El resultado de una medición con una precisión de 0,5% es igual a $x = 25,7$ m. Determinar el error absoluto límite de esta medición.

Según la fórmula (5') tenemos $\Delta \approx 25,7\cdot 1/2\cdot 0,01 \approx 0,13$. Por consiguiente, la magnitud a medir a puede ser considerada igual a $a = 25,7 \pm 0,13$ m.

Introduzcamos algunas nociones ligadas a la representación de números en el sistema decimal y limitemos nuestro análisis al caso de números enteros [1]). Toda cifra en la representación decimal de un número distinto de cero, y el cero, si éste no designa un orden decimal o no reemplaza una cifra incógnita o rechazada, se llama *cifra significativa* de este número. Por ejemplo, el número 0,0507 posee tres cifras significativas: 5, 0 y 7. La escritura del número 27 600 no permite juzgar sobre el número de cifras significativas; si este número tiene cuatro cifras significativas, debe ser escrito, por ejemplo, así: $2,760\cdot 10^4$. Las cifras significativas de un número aproximado se dividen en cifras *exactas* e *inexactas*.

DEFINICION 3 *Se dice que un número aproximado tiene n* ***cifras significativas exactas*** *(unidades decimales contando de izquierda a derecha), si el error absoluto de este número no pasa 1/2 unidad de su n-ésimo orden.*

---

[1]) La influencia del signo puede ser considerada separadamente.

Por ejemplo, si el número $x = 2,356$ tiene tres cifras exactas 2, 3, 5, el error absoluto de este número es

$$\Delta_0 \leqslant \frac{1}{2} \cdot 0,01 = 0,005.$$

Las tablas matemáticas se componen de tal modo, que todas las cifras indicadas en ellas son exactas. Por ejemplo, para las tablas de logaritmos de cuatro cifras se garantiza que el error absoluto de la mantisa de cada número es

$$\Delta_0 \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}.$$

En algunos casos, el error absoluto de un número aproximado puede alcanzar la **unidad** de su n-ésimo orden; entonces se dice que este número tiene *n cifras exactas en sentido amplio*. Si el error absoluto de un número aproximado puede alcanzar dos unidades de su n-ésimo orden, se dice que las $n - 1$ primeras cifras significativas del número son *exactas* y la n-ésima es *dudosa*.

La noción de cifras exactas no debe ser entendida al pie de la letra, es decir, en tal sentido que si un número tiene n signos exactos, las n primeras cifras del número aproximado y las n primeras cifras del número exacto coinciden entre sí. Por ejemplo, si $a = 1$ es un número exacto y $x = 0,999$ es un número aproximado, todas las cifras de x son evidentemente exactas en sentido amplio, aunque ninguna de las cifras del número exacto a coincide con la cifra correspondiente del número aproximado dado. Sin embargo, en la mayoría de los casos esta noción puede ser verídica en sentido lato.

La cantidad de cifras exactas del número aproximado caracteriza la precisión de la medida y permite hallar el error relativo límite de este número.

EJEMPLO 3. El número aproximado $x = 8,3047$ tiene dos cifras exactas. ¿Cuál es el error relativo límite δ de este número?

Aquí el error absoluto es

$$\Delta_0 \leqslant \frac{1}{2} \cdot 0,1 = 0,05.$$

De acuerdo con la fórmula (4) tenemos una evaluación del error relativo

$$\delta_0 \approx \frac{0,05}{8,3047} = 0,006.$$

Por consiguiente, aproximadamente se puede considerar que $\delta = 0,6\%$.

Y a la inversa, conociendo el error relativo límite de un número aproximado se puede determinar la cantidad de sus cifras exactas.

EJEMPLO 4. El error relativo límite del número aproximado $x = 623,809$ es igual a $\delta = 0,2\%$. ¿Cuántas cifras exactas tiene este número?

Utilizando la fórmula (5′), hallamos el valor del error absoluto de nuestro número aproximado Δ_0 que es $\Delta_0 \approx 0{,}2 \cdot 0{,}01 \cdot 623{,}809 \approx 1{,}2$. Se puede considerar no muy rigurosamente que el número x tiene las tres primeras cifras exactas en sentido amplio.

En general, en la notación definitiva del número aproximado no hay razón alguna guardar cifras no exactas; en último caso, se puede tener una cifra de reserva. Por eso las cifras del número aproximado que no son exactas generalmente se rechazan o, como se dice, se **redondea** el número aproximado. Con frecuencia tenemos que redondear números exactos muy grandes.

REGLA DE REDONDEO. 1) *Si la primera cifra rechazada de un número (contando de izquierda a derecha) es* ***inferior*** *a 5, las cifras restantes se dejan sin cambios*; 2) *si la primera de las cifras rechazadas es* ***superior o igual*** *a 5, la primera de las cifras restantes se aumenta en una unidad.*

Por ejemplo, redondeando el número $\pi = 3{,}141592\ldots$ hasta cinco, cuatro, y tres cifras significativas, se obtienen respectivamente los números aproximados: 3,1416; 3,142 y 3,14.

Se considera especialmente un caso particular cuando se redondea una cifra de un número cuya última cifra es 5. En este caso *la última cifra conservada queda sin cambios si es par, y se aumenta en una unidad, si ella es impar (regla de las cifras pares).*

Hablando en general, al redondear un número aproximado, aumentamos su error absoluto añadiendo al error absoluto del número el *error de redondeo.*

Al aplicar la regla de redondeo es evidente que el error de redondeo no supera 1/2 unidad de la última cifra decimal conservada.

De esto se deduce que:

1) *si un número exacto está redondeado hasta n cifras significativas el número aproximado obtenido tendrá n cifras decimales exactas*;

2) *si un número aproximado que tiene n cifras decimales exactas está redondeado hasta n cifras significativas, el nuevo número aproximado obtenido tendrá n cifras decimales exactas en el sentido amplio.*

§ 3. Límite de una función

En el análisis matemático se estudian generalmente magnitudes **adimensionales**, es decir, privadas de contenido físico. Los conjuntos de valores de tales magnitudes representan en sí conjuntos de números. Partiendo de este hecho y utilizando los símbolos lógicos $\forall$ («para todo») y $\exists$ («existe», «se halla») se puede formalizar la definición de la función dada en el capítulo VI (§ 2).

DEFINICIÓN 1. *Sean X e Y dos conjuntos de números dados. Si en virtud de una correspondencia f que confronta los elementos del conjunto X a los elementos del conjunto Y, $\forall x \in X$, $\exists y \in Y$ (único), entonces y se denomina* ***función*** *unívoca de x definida en el conjunto X.*

Este hecho se designa brevemente del siguiente modo,

$$y = f(x) \quad (x \in X)^{1)}. \tag{1}$$

El **conjunto de valores de la función** (1) según el sentido de la definición está incluido en Y, es decir, $\{f(x)\} \subset Y$.

Se puede decir que la función f efectúa la *aplicación* del conjunto X en el conjunto Y (fig. 83).

Si $\{f(x)\} = Y$, es decir, todo elemento $y \in Y$ es valor de la función f, se puede decir que la función f *aplica* el conjunto X **en el conjunto** Y.

EJEMPLO. La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ $(0 < x < 2\pi)$ aplica el intervalo $X = (0, 2\pi)$ sobre el segmento $Y = [-1, 1]$.

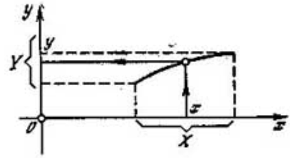

Fig. 83

Supongamos que la función $y = f(x)$ establece una **correspondencia recíprocamente unívoca** entre los elementos de los conjuntos X e Y, es decir, $\forall x \in X$ existe solamente una *imagen* $y = f(x) \in Y$ e inversamente, $\forall y \in Y$ se hallará una sola *preimagen* $x \in X$ tal, que $f(x) = y$. En este caso, la función $x = f^{-1}(y)$ $(y \in Y)$ que establece una correspondencia entre los elementos de los conjuntos Y y X se llama *función recíproca* de $y = f(x)$. En otras palabras, la función recíproca f^{-1}

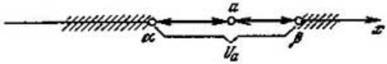

Fig. 84

es una aplicación del conjunto Y sobre el conjunto X. Es evidente que las funciones $y = f(x)$ y $x = f^{-1}(y)$ son **mutuamente recíprocas**.

DEFINICION 2. *Entendemos por* **entorno** U_a *de un punto* a *(*a *es un número real) todo intervalo* $\alpha < x < \beta$ *que rodea este punto* $(\alpha < a < \beta)$ *y del cual se excluye el punto* a (fig. 84).

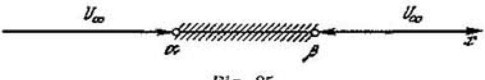

Fig. 85

Se entiende por *entorno* U_∞ del símbolo $\infty \equiv \pm\infty$, el exterior de todo segmento $[\alpha, \beta]$ (fig. 85), es decir, $U_\infty = (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$. Por supuesto, el símbolo ∞ no está contenido en su entorno.

1) Más exactamente por función (1) conviene entender la correspondencia misma f que a toda $x \in X$ hace corresponder su imagen $y \in Y$. En este caso $f(x)$ representa el **valor de la función** f en el punto x. Sin embargo, en la práctica el símbolo $f(x)$, donde x adquiere todos los valores posibles, se llama también **función**.

OBSERVACIÓN Habitualmente se entiende por entorno de un punto a todo intervalo $I_a = (\alpha, \beta)$ que contiene el punto a, es decir, si I_a es el entorno del punto a, entonces $I_a \ni a$. En nuestra definición del entorno U_a de un punto a excluimos (para mayor comodidad de los razonamientos ulteriores) al propio punto a, es decir, consideramos que $a \notin U_a$. Semejante conjunto de puntos se llama generalmente entorno **perforado** (o **puntuado**) del punto a.

Con cierta libertad se puede decir que el conjunto de puntos $U_a = (\alpha, a) \cup (a, \beta)$ se llama **entorno del punto** a (en el sentido de nuestra definición). Esta definición de entorno concuerda con su compresión habitual. Por ejemplo, es natural suponer que en el entorno de la ciudad de Moscú no entra la propia ciudad; máxima que al definir los entornos **unilaterales** del punto a: $U_a^- = (\alpha, a)$ *entorno izquierdo*) y $U_a^+ = (a, \beta)$ (*entorno derecho*), el punto a se excluye siempre véase el § 4).

Entonces, en adelante por *entorno* de un punto a, si no se estipula lo contrario, entenderemos todo intervalo que rodea este punto, sin incluir al punto.

En los casos cuando sea más cómodo considerar que el entorno del punto a contiene este punto, lo llamaremos «entorno completo del punto a».

No es difícil convencernos de que: 1) la suma (unión) de un número cualquiera de entornos de un punto a y, 2) el producto (intersección) de un número finito de entornos de un punto a son también entornos de este punto.

Para un número positivo δ, el entorno U_a de un punto a será llamado δ-*entorno*, si $U_a = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$, es decir, si

$$0 < |x - a| < \delta, \quad \forall x$$

(véase la fig. 86).

Sea $f(x)$ una función definida sobre un conjunto X. El punto a (a es finito) se denomina *punto límite* (*punto de acumulación*) de este

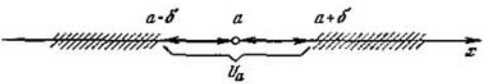

Fig. 86

conjunto, si en **todo** δ-entorno U_a se contiene una infinidad de elementos $x \in X$, es decir, $U_a \cap X \neq \varnothing\ \forall U_a$. En el caso más simple se puede suponer que la función $f(x)$ está definida en cierto entorno del punto a, mientras que en el propio punto a la función $f(x)$ no debe tener obligatoriamente sentido.

Pues sea a un punto límite del conjunto X que es el dominio de la definición de la función $f(x)$.

DEFINICIÓN 3. *Un número A se llama **límite de la función** $f(x)$ cuando $x \to a$ (a es un número), es decir,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

si para todo $\varepsilon > 0$ *existe un* δ*-entorno* $U_a = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$, $\delta = \delta(\varepsilon)$ *depende de* ε, *tal que*

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad para \quad x \in U_a\ ^{1)}. \tag{2}$$

Claro está que la desigualdad (2) debe cumplirse para todo x donde la función $f(x)$ está definida, es decir, para $x \in X \cap U_a$; según la definición del punto límite en cada entorno U_a el conjunto de tales valores no es vacío.

OBSERVACION 1. Según el sentido de la definición del límite de una función los números ε y $\delta = \delta(\varepsilon)$ pueden ser considerados como suficientemente pequeños.

DEFINICIÓN 4. *La afirmación*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

es equivalente a la siguiente:

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad para \quad |x| > \Delta, \tag{3}$$

donde $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ *depende de* ε.

El conjunto de todos los puntos x para los cuales $|x| > \Delta$ es evidentemente un entorno **simétrico** U_∞ del símbolo ∞; en este caso se supone que en estas condiciones para todo entorno de tal género $U_\infty \cap X \neq \varnothing$; se puede decir convencionalmente que ∞ es un punto límite del conjunto X, dominio de definición de la función $f(x)$.

Reuniendo las definiciones 2 y 3 se obtiene la definición general del límite de una función cuando $x \to a$, que sirve para un a finito, y para $a = \infty$.

Definición general del límite de una función. *Sea $f(x)$ una función definida sobre un conjunto X y sea a un punto límite de este conjunto. El punto A es el* ***límite de la función*** *$f(x)$ cuando $x \to a$ si, y solo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un entorno U_a del punto a* [2] *tal, que*

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x \in U_a \cap X \tag{4}$$

(en este caso $U_a \cap X \neq \varnothing$).

Este hecho se escribe brevemente del modo siguiente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \tag{5}$$

o

$$f(x) \to A \quad \text{cuando} \quad x \to a. \tag{5'}$$

---

[1] Para simplificar la explicación utilizamos aquí el δ-entorno del punto a, es decir, su entorno **simétrico**. Sin embargo, la definición sigue en vigor para un entorno cualquiera $\widetilde{U}_a = (\alpha, a) \cup (a, \beta)$, puesto que él contiene evidentemente el δ-entorno del punto a, donde $\delta = \min(a - \alpha, \beta - a) > 0$.

[2] No obligatoriamente simétrico.

EJEMPLO 1. Mostrar que

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4. \qquad (6)$$

Supondremos, para comodidad de los razonamientos, que $1 < x < 3$, es decir, $|x-2| < 1$.

Sea $\varepsilon > 0$ un número arbitrario. Tenemos

$$|x^2-4| = |x-2|\,|x+2| = |x-2|(x+2) < 5|x-2| < \varepsilon,$$

si $|x-2| < \varepsilon/5$ y $|x-2| < 1$, de donde se puede escribir

$$\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{5},\ 1\right) > 0.$$

De este modo la igualdad (6) está demostrada. Observemos que aquí el δ-entorno del punto $x = 2$ es completo, es decir, contiene el punto 2.

EJEMPLO 2. Mostrar que

$$\frac{x}{x+1} \to 1 \text{ cuando } x \to \infty. \qquad (7)$$

Tenemos

$$\left|\frac{x}{x+1} - 1\right| = \frac{1}{|x+1|} = \frac{1}{|x-(-1)|} \leqslant \frac{1}{|x|-|-1|} = \frac{1}{|x|-1} < \varepsilon,$$

si

$$|x| > 1 + \frac{1}{\varepsilon} = \Delta,$$

lo que es equivalente a la afirmación (7).

OBSERVACIÓN 2. No cabe pensar que la función $f(x)$ permanece constantemente inferior a su límite.

Son posibles tres casos: 1) la función no supera su límite, por ejemplo,

$$\frac{x^2}{x^2+1} \to 1 \text{ cuando } x \to \infty, \text{ además, } \frac{x^2}{x^2+1} < 1;$$

2) la función no es inferior a su límite, por ejemplo $x^2 \to 0$ cuando $x \to 0$ y $x^2 > 0$ cuando $x \neq 0$;

3) la función oscila alrededor de su límite tomando valores inferior o superior a este límite; por ejemplo,

$$2 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 2 \text{ cuando } x \to \infty.$$

OBSERVACIÓN 3. Al considerar el límite de la función $f(x)$ cuando $x \to a$ para simplificar la exposición se podría suponer que la función $f(x)$ está definida en cierto entorno del punto a.

Pero, como muestran los ejemplos más simples, esto no es cómodo para las aplicaciones.

EJEMPLO 3. Sea

$$f(x) = \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}}{x} \quad (x > 0).$$

Esta función está definida sobre el conjunto $X = (0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup \ldots$, que no es un entorno de un punto alejado infinitamente ∞. Pese a todo, según nuestro punto de vista tenemos $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Señalemos una proposición simple.

TEOREMA 1. *Si una función $f(x) = c$ es constante en un entorno de un punto a, entonces,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = c,$$

siendo c el límite único de esta función cuando $x \to a$.

Dejamos al lector la demostración de este teorema.

No debe confundirse la función que admite un límite con la **función acotada.**

DEFINICIÓN 5. *La función $f(x)$ se llama* **acotada** *sobre un conjunto dado X, si existe un número positivo M tal, que*

$$|f(x)| \leqslant M \quad para \quad x \in X.$$

Si tal número M no existe, la función $f(x)$ se llama *no acotada.*

LEMA. *La función $f(x)$ que tiene un límite A cuando $x \to a$, es acotada en un entorno del punto a.*

Efectivamente, eligiendo $\varepsilon = 1$, tenemos $|f(x) - A| < 1$ para $x \in U_a$, donde U_a es un entorno correspondiente del punto a. De aquí para todos los valores admisibles del argumento x [1]) obtenemos

$$|f(x)| = |[f(x) - A] + A| \leqslant |f(x) - A| + \\ + |A| < 1 + |A| = M,$$

si solamente $x \in U_a$.

OBSERVACIÓN 4. La afirmación recíproca no es justa: una función acotada puede no tener límite.

Por ejemplo, la función $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ es acotada para $0 < |x| < +\infty$ y no tiene límite cuando $x \to 0$.

Prestemos atención a otro teorema que establece la relación entre las cotas de la función y su límite.

TEOREMA 2. *Sea que existe $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ y*

$$M < f(x) < N \tag{8}$$

en cierto entorno U_a del punto a. Entonces,

$$M \leqslant A \leqslant N. \tag{9}$$

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, sea $A < M$. Suponiendo que $\varepsilon = M - A > 0$, tendremos en cierto entorno V_a del punto a

$$|f(x) - A| < M - A, \quad \text{es decir,} \quad -(M - A) < f(x) - \\ - A < M - A.$$

---

[1]) Es decir, para $x \in U_a$, donde la función $f(x)$ tiene sentido.

De aquí, eligiendo $x \in V_a \cap U_a$, obtendremos $f(x) < M$, que contradice la desigualdad izquierda (8).

La suposición de que $A > N$ se refuta de modo análogo.

OBSERVACIÓN 5. El teorema 2 sigue siendo justo si en la desigualdad (8) una o las dos desigualdades no son rigurosas.

COROLARIO. *Una función positiva no puede tener límite negativo.*

OBSERVACIÓN 6. La noción de límite de la función de una variable se extiende naturalmente a los casos de funciones de varias variables.

Examinemos, por ejemplo, una función de dos variables $f(x, y)$ dada sobre un conjunto X del plano Oxy.

Como *entorno* $U_{a,b}$ del punto $M_0(a, b)$ (a y b son finitos) tomamos el interior de un rectángulo $\{\alpha_1 < x < \beta_1, \alpha_2 < y < \beta_2\}$ construido alrededor del punto M_0 (es decir, $\alpha_1 < a < \beta_1$, $\alpha_2 < b < \beta_2$), del cual el punto M_0 se excluye.

En tal caso la afirmación

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A$$

significa que $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, U_{a,b}$ tal, que para $\forall\, M(x, y) \in U_{a,b}$ es justa la desigualdad

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon. \tag{10}$$

Claro está que en este caso se supone que en todo entorno $U_{a,b}$ se hallarán puntos $M(x, y)$ en los cuales la función $f(x, y)$ tiene sentido (*punto límite*).

Esta definición se generaliza fácilmente en el caso cuando a, b o ambos, son los símbolos ∞.

§ 4. Límites unilaterales de una función

En los anexos se encuentran **límites unilaterales de una función.**

Introduzcamos la noción de entornos **izquierdo y derecho** de un punto a (a es un número).

DEFINICIÓN 1. 1) *Cualquier intervalo $U_a^- = (\alpha, a)$, cuyo extremo derecho es el punto a, se llama **entorno izquierdo** de este punto.*

2) *De modo análogo, todo intervalo $U_a^+ = (a, \beta)$, cuyo extremo izquierdo es el punto a, se llama **entorno derecho** de este punto.*

La escritura simbólica $x \to a - 0$, significa que x toma valores pertenecientes a un entorno izquierdo del punto a, es decir, $x \to a$, $x < a$.

De modo análogo, la escritura $x \to a + 0$, significa que $x \to a$, $x > a$.

DEFINICIÓN 2. 1) *La fórmula*

$$\lim_{x \to a - 0} f(x) = A,$$

donde la función $f(x)$ está definida sobre un conjunto X, a es un punto límite (finito) de este conjunto, y A es un número, significa que $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ U_a^-$ tal, que

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \textit{para} \quad x \in X \cap U_a^{-}\ {}^{1)} \tag{1}$$

(límite izquierdo de la función).

2) *Análogamente, la fórmula*

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = B$$

(donde B es un número) tiene el siguiente sentido:

$$|f(x) - B| < \varepsilon \quad \textit{para} \quad x \in X \cap U_a^{+}\ {}^{2)}, \tag{2}$$

donde $\varepsilon > 0$ es arbitrario y U_a^+ depende de ε (límite derecho de la función).

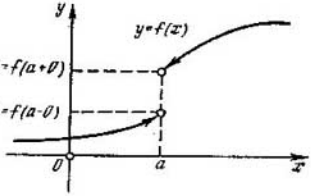

Fig. 87

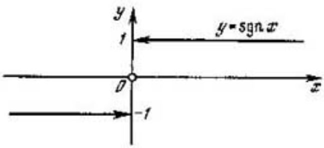

Fig. 88

Para los números A y B se utilizan las escrituras simbólicas (fig. 87):

$$A = f(a - 0) \quad \text{y} \quad B = f(a + 0).$$

Si la función $f(x)$ está definida en el punto a, su valor en este punto se designa con $f(a)$; claro está que éste puede no coincidir con los números $f(a - 0)$ y $f(a + 0)$.

DEFINICION 3. *Por* ***entorno del símbolo*** $-\infty$ *se entiende todo intervalo* $(-\infty, \alpha)$, *y por entorno del símbolo* $+\infty$, *todo intervalo* $(\beta, +\infty)$.

Las fórmulas

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A' \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = B'$$

significan, respectivamente, que

$$|f(x) - A'| < \varepsilon \quad \text{para} \quad x \in (-\infty, \Delta_1),$$

y

$$|f(x) - B'| < \varepsilon \quad \text{para} \quad x \in (\Delta_2, +\infty),$$

donde ε es arbitrario, $x \in X$ y $\Delta_i = \Delta_i(\varepsilon)$ $(i = 1, 2)$.

[1]) Podemos, claro está, detenernos en el estudio de δ-entornos izquierdos del punto a: $U_a^- = (a - \delta, a)$, donde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

[2]) Generalmente se supone que $U_a^+ = (a, a + \delta)$, donde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

EJEMPLO. Sea $f(x) = \operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}$ $(x \neq 0)$ (fig. 88). Tenemos

$$\lim_{x \to -0} f(x) = -1, \quad \lim_{x \to +0} f(x) = 1^{1)}.$$

OBSERVACION 5. Para que la función $f(x)$ tenga un límite (cuando $x \to a$ (a es un número)), es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad

$$f(a - 0) = f(a + 0).$$

§ 5. Límite de una sucesión

Se llama *sucesión*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$

a la función $x_n = f(n)$ definida sobre el conjunto de números naturales $X = \{1, 2, \ldots\}$.

Por analogía con el límite de una función en un punto alejado infinitamente, se introduce la noción de **límite de una sucesion.** Precisamente, un número a es el *límite de la sucesión* x_n $(n = 1, 2, \ldots)$:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a^{\,2)},$$

si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal número N dependiente de ε, que para todos los números naturales $n > N$ se cumple la desigualdad

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

EJEMPLO Sea $x_1 = 0{,}9$, $x_2 = 0{,}99$, $x_3 = 0{,}999$, ...
Tenemos

$$x_n = 1 - \frac{1}{10^n} \; (n = 1, 2, \ldots).$$

Sea $\varepsilon > 0$ un número arbitrario. En este caso $|x_n - 1| = \frac{1}{10^n} <$ $< \varepsilon$, si $n > \log \frac{1}{\varepsilon} = N$. Por consiguiente,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 1.$$

§ 6. Infinitésimos

DEFINICIÓN. *Una función $\alpha(x)$ se llama* ***infinitesimal*** *cuando $x \to a$ (a es un número real o el símbolo ∞), si para todo $\varepsilon > 0$ existe un*

---

1) Aquí para abreviar se utilizan las designaciones $-0 \equiv 0 - 0$ y $+0 \equiv \equiv 0 + 0$.

2) Hablando rigurosamente hay que escribir $n \to +\infty$. Pero como n es un numero natural, $n \to \infty$ y $n \to +\infty$ es lo mismo.

entorno U_a del punto a tal, que

$$|\alpha(x)| < \varepsilon \quad \text{para} \quad x \in U_a\ ^{1)}. \tag{1}$$

La condición (1) es equivalente a

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0, \tag{2}$$

es decir, *el límite de una función infinitesimal $\alpha(x)$ es igual a cero y viceversa*. En otras palabras

$$\alpha(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to a. \tag{3}$$

De modo análogo se define una función infinitesimal cuando $x \to a - 0$ y $x \to a + 0$, así como cuando $x \to -\infty$ o $x \to +\infty$.

OBSERVACIÓN Si

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \tag{4}$$

en virtud de la definición del límite de la función, obtenemos que la diferencia $f(x) - A$ es un infinitésimo. De este modo, mediante la fórmula (4) obtenemos una representación de la función $f(x)$ que tiene el límite A cuando $x \to a$, de la forma

$$f(x) = A + \alpha(x), \tag{5}$$

donde $\alpha(x) \to 0$ cuando $x \to a$.

Inversamente, si la fórmula (5) es justa para la función $f(x)$, el número A es el límite de esta función cuando $x \to a$. De la fórmula (5) se deduce un ***lema*** importante **sobre la conservación del signo de la función.**

LEMA *Si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \neq 0$, *el signo de la función* $f(x)$ $(x \in X)$ *coincide con el signo del número A en un entorno U_a del punto a.*

Efectivamente, sea $\varepsilon = |A| > 0$. Eligiendo el entorno U_a de tal modo que $|\alpha(x)| < |A|$ para $x \in U_a$, tendremos, en virtud de la igualdad (5),

$$\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} A\ ^{2)},$$

donde $x \in U_a \cap X$.

EJEMPLO. Un punto M se desplaza a lo largo del eje Ox siguiendo la ley de movimiento

$$x = 2^{-t} \operatorname{sen} t \quad (t \text{ es el tiempo}).$$

---

[1]) Como siempre la desigualdad (1) debe verificarse para aquelas x, con las que la función $\alpha(x)$ está definida. Además se supone que el conjunto de tales valores de x no es vacío en todo entorno U_a del punto a.

[2]) La escritura sgn x se lee: «signo de x». La función sgn x se define del modo siguiente: $\operatorname{sgn} x = +1$, si $x > 0$; $\operatorname{sgn} 0 = 0$; $\operatorname{sgn} x = -1$, si $x < 0$ (fig. 88).

Es evidente que $|x| \leqslant 2^{-t} < \varepsilon$, si $t > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} = T$. Por eso

$$\lim_{x \to +\infty} x = 0.$$

De este modo, el punto M efectúa movimientos oscilatorios amortiguados alrededor del origen de las coordenadas.

OBSERVACIÓN. Según el sentido de la definición (1) la función $f(x) \equiv 0$ es, en un entorno U_a, una **función infinitesimal**, cuando $x \to a$.

Subrayemos que ninguna función constante $f(x) = c \neq 0$, donde el número c es, en valor absoluto, tan pequeño como se desee, puede ser llamada función infinitesimal. Por eso las magnitudes físicas llamadas infinitesimales (por ejemplo, la masa de la molécula, las dimensiones del átomo, la carga del electrón, etc.) no son infinitésimos desde el punto de vista matemático.

§ 7. Infinitos

DEFINICIÓN. *Una función $f(x)$ se llama **infinita** cuando $x \to a$ (a es un número o el símbolo ∞):*

$$f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to a, \tag{1}$$

si para cualquier $E > 0$ existe un entorno U_a del punto a tal, que para todos los valores admisibles del argumento x

$$|f(x)| > E \quad \text{para} \quad x \in U_a. \tag{2}$$

Si $f(x)$ es una función infinita cuando $x \to a$, se escribe convencionalmente

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

EJEMPLO. $\operatorname{tg} x \to \infty$ para $x \to \frac{\pi}{2}$.

Las escrituras

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

significan, respectivamente: $f(x) < -E$ para $x \in U_a$ y $f(x) > E$ para $x \in U_a$ ($E > 0$ es arbitrario y el entorno U_a depende de E).

Se demuestra fácilmente la afirmación siguiente.

LEMA. 1) *Si $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a$, entonces $1/f(x) \to 0$ cuando $x \to a$;* 2) *si $\alpha(x) \to 0$ cuando $x \to a$ ($\alpha(x) \neq 0$ para $x \neq a$), entonces $1/\alpha(x) \to \infty$, cuando $x \to a$.*

OBSERVACIÓN. Una función no acotada puede no ser infinita.

Por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

no es acotada en todo entorno del punto $x = 0$, sin embargo, no es infinita cuando $x \to 0$.

§ 8. Teoremas fundamentales de infinitésimos

TEOREMA 1. *La suma algebraica de un número finito de funciones infinitesimales, cuando $x \to a$* [1]) *es una función infinitesimal, cuando $x \to a$.*

DEMOSTRACIÓN. Para simplificar nos limitamos a examinar el caso de tres funciones: $\alpha(x) \to 0$, $\beta(x) \to 0$ y $\gamma(x) \to 0$, cuando $x \to a$.

Examinemos su suma algebraica

$$\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x).$$

Sea $\varepsilon > 0$ un número positivo cualquiera. En este caso $\varepsilon/3$ será también un número positivo.

En virtud de la definición de infinitésimo, existen tres entornos U'_a, U''_a, U'''_a caracterizados por el número $\frac{\varepsilon}{3}$ y tales que,

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para } x \in U'_a, \tag{1}$$

$$|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para } x \in U''_a, \tag{2}$$

$$|\gamma(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para } x \in U'''_a. \tag{3}$$

La intersección $U_a = U'_a \cap U''_a \cap U'''_a$ es un entorno del punto a en el cual **se verifican simultáneamente** las tres desigualdades (1), (2) y (3). De este modo

$$|\alpha(x)+\beta(x)-\gamma(x)| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| + |-\gamma(x)| =$$
$$= |\alpha(x)| + |\beta(x)| + |\gamma(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

si $x \in U_a$ y $x \in X$. Esto significa que

$$\alpha(x) + \beta(x) - \gamma(x) \to 0, \text{ cuando } x \to a.$$

El teorema queda demostrado.

En particular, *la diferencia de dos funciones infinitesimales cuando $x \to a$, es una función infinitesimal para $x \to a$.*

DEFINICION. *Se dice que una función $f(x)$ es* ***acotada*** *cuando $x \to a$, si ella está acotada en un entorno U_a del punto a.*

TEOREMA 2. *El producto de una función acotada, cuando $x \to a$, por una función infinitesimal, para $x \to a$ es una función infinitesimal para $x \to a$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$|f(x)| \leqslant M \quad (M > 0) \quad \text{para} \quad x \in V_a,$$

[1]) Aquí y en adelante en este párrafo supondremos que todas las funciones examinadas están a priori definidas sobre un conjunto común X, para el cual a es un punto finito. Los valores considerados de x son tales que $x \in X$.

donde V_a es un entorno del punto a, y sea

$$\alpha(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to a.$$

En este caso, para un $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un entorno $U_a \subset \subset V_a$, tal, que

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{para} \quad x \in U_a. \tag{4}$$

De aquí tenemos

$$|f(x)\,\alpha(x)| = |f(x)|\,|\alpha(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

si $x \in U_a$. De este modo $f(x)\,\alpha(x) \to 0$ cuando $x \to a$.

TEOREMA 3. *El producto de un número finito de funciones infinitesimales, cuando $x \to a$ es también una función infinitesimal cuando $x \to a$.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Examinemos primeramente dos funciones $\alpha(x) \to 0$ y $\beta(x) \to 0$, cuando $x \to a$.

Considerando que $0 < \varepsilon < 1$ y razonando como en el teorema 1 nos aseguramos de que existe un entorno U_a tal que

$$|\alpha(x)| < \varepsilon, \quad |\beta(x)| < \varepsilon \quad \text{para} \quad x \in U_a,$$

de donde

$$|\alpha(x)\,\beta(x)| = |\alpha(x)| \cdot |\beta(x)| < \varepsilon \cdot \varepsilon < \varepsilon, \quad \text{si} \quad x \in U_a.$$

Por consiguiente, $\alpha(x)\,\beta(x) \to 0$, cuando $x \to a$.

2) Si tenemos, por ejemplo, tres funciones $\alpha(x) \to 0$, $\beta(x) \to 0$, $\gamma(x) \to 0$, cuando $x \to a$, entonces, utilizando la primera parte de la demostración, obtenemos $\alpha(x)\,\beta(x)\,\gamma(x) = [\alpha(x)\,\beta(x)]\,\gamma(x) \to \to 0$, cuando $x \to a$.

COROLARIO. *Una potencia entera positiva $[\alpha(x)]^n$ de una función infinitesimal $\alpha(x) \to 0$, cuando $x \to a$, es una función infinitesimal para $x \to a$.*

OBSERVACIÓN. En lo que se refiere a la relación de dos funciones infinitesimales $\alpha(x) \to 0$ y $\beta(x) \to 0$, cuando $x \to a$, ésta puede ser una función de comportamiento arbitrario cuando $x \to a$.

EJEMPLO. Sean $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = 2x + x^2$, $\gamma(x) = x^2$. Aquí cuando $x \to 0$ tenemos

$$\alpha(x) \to 0, \quad \beta(x) \to 0, \quad \gamma(x) \to 0;$$

$$\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 2 + x \to 2; \quad \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = x \to 0; \; \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \frac{1}{x} \to \infty.$$

La división permite comparar entre sí funciones infinitesimales.

DEFINICION 1. *Dos funciones infinitesimales $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ cuando $x \to a$ son de igual orden, para $x \to a$, si su relación tiene un límite* *finito no nulo, es decir,*

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k \neq 0.$$

DEFINICIÓN 2. *Se dice que cuando $x \to a$ un infinitésimo $\beta(x)$ es de orden* **superior** *a otro infinitésimo $\alpha(x)$* (o lo que es lo mismo, *que el orden de un infinitésimo $\alpha(x)$ es* **inferior** *al orden de un infinitésimo $\beta(x)$), si la relación $\beta(x)/\alpha(x)$ es una función infinitesimal cuando $x \to a$,* es decir,

$$\lim_{x \to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0.$$

En este caso se escribe

$$\beta(x) = o[\alpha(x)], \quad \text{cuando} \quad x \to a.$$

DEFINICIÓN 3. *Se dice que una función infinitesimal $\beta(x)$* **es de orden** *n (n es un número natural) respecto a un infinitésimo $\alpha(x)$, cuando $x \to a$, si*

$$\lim_{x \to a} \frac{\beta(x)}{\alpha^n(x)} = k \neq 0.$$

Si $\beta(x) = o[\alpha^n(x)]$, cuando, $x \to a$ (es decir, $k = 0$), el orden de $\beta(x)$ es superior a n en comparación con $\alpha(x)$.

§ 9. Teoremas fundamentales sobre los límites

Aquí supondremos también que las funciones examinadas en cada uno de los teoremas que siguen están definidas sobre un conjunto común X para el cual a es un punto límite (punto de acumulación).

TEOREMA 1. *Si cada sumando de una suma algebraica de un número finito de funciones tiene un límite cuando $x \to a$, el límite de esta suma algebraica existe para $x \to a$ y es igual a la suma algebraica de los límites de sus sumandos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dada, por ejemplo, la suma algebraica de tres funciones $f(x) + g(x) - h(x)$, donde

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \quad \lim_{x \to a} g(x) = B, \quad \lim_{x \to a} h(x) = C.$$

Como las funciones difieren de sus límites en infinitésimos, obtenemos

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad g(x) = B + \beta(x), \quad h(x) = C + \gamma(x), \tag{1}$$

donde $\alpha(x) \to 0$, $\beta(x) \to 0$, $\gamma(x) \to 0$ cuando $x \to a$. De las igualdades (1), aplicando el teorema sobre la suma algebraica de infinitésimos (§ 8, teorema 1), tendremos

$$f(x) + g(x) - h(x) = (A + B - C) + [\alpha(x) + \beta(x) - \gamma(x)], \tag{2}$$

donde $\alpha(x) + \beta(x) - \gamma(x) \to 0$ cuando $x \to a$. De la igualdad (2) se deduce que la suma $f(x) + g(x) - h(x)$ difiere del número $A + B - C$ en un infinitésimo y, por consiguiente, este número es el límite de la suma dada. Así, tenemos

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x) - h(x)] = A + B - C =$$
$$= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) - \lim_{x\to a} h(x), \tag{3}$$

lo que se debía demostrar.

COROLARIO. *Una función puede tener un solo límite para $x \to a$.*

Efectivamente, si $f(x) \to A$ y $f(x) \to A'$ cuando $x \to a$, obtendremos, según el teorema 1,

$$f(x) - f(x) = 0 \to A - A', \quad \text{cuando} \quad x \to a.$$

Como el límite de una función constante es único e igual a la función misma (§ 3, teorema 1), deducimos que $A - A' = 0$, es decir, $A' = A$.

OBSERVACIÓN. En los datos del teorema se supone que cada una de las funciones tiene su límite y se demuestra que su suma también lo tiene. Lo inverso no es, en general, justo: la existencia del límite de una suma no significa que los sumandos tienen límites. Por ejemplo, tenemos

$$\lim_{x\to\infty} (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = 1,$$

mientras que $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen}^2 x$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \cos^2 x$ no existen, y por eso aquí

$$\lim_{x\to\infty} (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) \neq \lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}^2 x + \lim_{x\to\infty} \cos^2 x.$$

De este modo la formulación: «el límite de una suma es igual a la suma de los límites de los sumandos», no es precisa.

Una observación análoga es correcta para los límites de un producto (teorema 2) y de un cociente (teorema 4).

TEOREMA 2. *Si cada uno de los factores de un producto de un número finito de funciones tiene un límite cuando $x \to a$, el límite de este producto cuando $x \to a$ es igual al producto de los límites de los factores.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Examinemos primeramente el producto de dos factores $f(x)\, g(x)$, sea

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = B.$$

Tenemos

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad g(x) = B + \beta(x), \tag{4}$$

donde $\alpha(x) \to 0$ y $\beta(x) \to 0$ cuando $x \to a$. De aquí obtenemos

$$f(x)\, g(x) = AB + \gamma(x), \tag{5}$$

donde

$$\gamma(x) = A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\,\beta(x). \tag{6}$$

De los teoremas fundamentales sobre los infinitésimos (los teoremas 1, 2 y 3 del § 8) se deduce que $\gamma(x) \to 0$ cuando $x \to a$. Por eso, en virtud de la igualdad (5), tendremos

$$\lim_{x \to a} [f(x)\, g(x)] = AB = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x). \tag{7}$$

2) Examinemos ahora, por ejemplo, el producto de tres funciones $f(x)\, g(x)\, h(x)$ que tienen límites finitos cuando $x \to a$. Utilizando la primera parte de la demostración, hallamos

$$\lim_{x \to a} [f(x)\, g(x)\, h(x)] = \lim_{x \to a} \{f(x)\, [g(x)\, h(x)]\} =$$
$$= \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} [g(x)\, h(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x) \lim_{x \to a} h(x).$$

COROLARIO 1. *Se puede sacar un factor constante fuera del signo de límite.*

Efectivamente, si c es una función constante, entonces

$$\lim_{x \to a} [cf(x)] = \lim_{x \to a} c \lim_{x \to a} f(x) = c \lim_{x \to a} f(x).$$

COROLARIO 2. *Si una función $f(x)$ tiene un límite cuando $x \to a$, el límite de una potencia entera positiva de esta función cuando $x \to a$ es igual a la misma potencia del límite de esta función, es decir,*

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$$

(n es un número natural).

EJEMPLO 1.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x+10)(x+20)^2(x+30)^3}{x^6} = \lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{10}{x}\right) \left(1 + \frac{20}{x}\right)^2 \times \right.$$
$$\left. \times \left(1 + \frac{30}{x}\right)^3 \right] = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{10}{x}\right) \times$$
$$\times \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{20}{x}\right)^2 \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{30}{x}\right)^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

LEMA. *Sea $f(x) \to A \neq 0$ cuando $x \to a$. En este caso la función de valor inverso $1/f(x)$ está acotada en un entorno del punto a, U_a.*

Efectivamente, tomemos $\varepsilon = |A| > 0$. De acuerdo con la definición del límite de una función tenemos

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} = \frac{|A|}{2}, \quad \text{cuando} \quad x \in U_a,$$

para todos los valores admisibles de x. De aquí obtenemos

$$|f(x)| = |A - [A - f(x)]| \geqslant |A| - |A - f(x)| >$$
$$> |A| - \frac{|A|}{2} = \frac{|A|}{2} > 0, \text{ cuando } x \in U_a.$$

De este modo

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|A|},$$

si $x \in U_a$, lo que se quería demostrar.

TEOREMA 3 *Si una función $f(x)$ tiene un límite distinto de cero cuando $x \to a$, el límite de la función de valor inverso $1/f(x)$, cuando $x \to a$, es igual al valor inverso del límite de esta función*, es decir,

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}. \tag{8}$$

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, sea $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 0$. Entonces, según el lema y teniendo en cuenta que el producto de la función acotada por un infinitésimo es un infinitésimo (§ 8, teorema 2), tendremos

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{A} = \frac{1}{A}\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot[A - f(x)] \to 0 \text{ cuando } x \to a.$$

De aquí obtenemos

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{A} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}.$$

TEOREMA 4. *Si el dividendo $f(x)$ y el divisor $g(x)$ tienen límites cuando $x \to a$ y el límite del divisor es distinto de cero, el límite de su cociente (fracción) cuando $x \to a$ es igual al cociente de los límites del dividendo (numerador de la fracción) y del divisor (denominador de la fracción)*, es decir,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{9}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$. En este caso, utilizando el teorema sobre el límite del producto (teorema 2) y el teorema sobre el valor inverso de la función (teorema 3), obtendremos

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right] = \lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} =$$

$$= \lim_{x\to a} f(x)\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

EJEMPLO 2

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)} = \frac{2}{3}.$$

Sin demostrarlo citemos otro teorema.

TEOREMA 5. *Si una función $f(x)$ tiene límite cuando $x \to a$ y $\sqrt[n]{f(x)}$ (n es un número natural) existe en el punto a y en un entorno suyo U_a, entonces*

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}. \tag{10}$$

§ 10. Algunos criterios de la existencia del límite de una función

No toda función, incluso acotada, tiene límite. Por ejemplo, sen x no tiene límite cuando $x \to \infty$, aunque $|\operatorname{sen} x| \leqslant 1$.

Indiquemos dos criterios de existencia del límite de una función.

TEOREMA SOBRE UNA FUNCION INTERMEDIA *Sea que una función $f(x)$ está encajada en un entorno U_a de un punto a entre dos funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ que tienen un mismo límite A cuando $x \to a$* (fig. 89), *es decir,*

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x) \tag{1}$$

y

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{x \to a} \psi(x) = A. \tag{2}$$

En este caso, la función $f(x)$ tiene el mismo límite:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A. \tag{3}$$

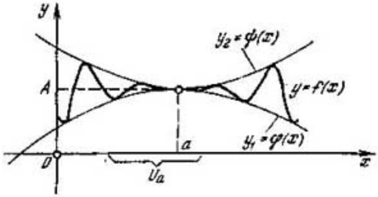

Fig. 89

DEMOSTRACIÓN. De la desigualdad (1) tenemos

$$\varphi(x) - A \leqslant f(x) - A \leqslant \psi(x) - A.$$

De aquí,

$$|f(x) - A| \leqslant \text{máx}\,(|\varphi(x) - A|, \quad |\psi(x) - A|). \tag{4}$$

En virtud de la condición (2), para todo $\varepsilon > 0$ existe un entorno U_a tal, que

$$|\varphi(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{y} \quad |\psi(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{cuando} \quad x \in U_a. \tag{5}$$

Por eso, de la desigualdad (4) obtenemos

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad x \in U_a, \tag{6}$$

es decir, la igualdad (3) es justa.

DEFINICION. 1) *Una función $f(x)$ se llama* ***creciente*** *(****no decreciente****) sobre un conjunto dado X, si de la desigualdad $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in X$) se deduce la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ (respectivamente, $f(x_1) \leqslant \leqslant f(x_2)$).*

2) *Una función $f(x)$ se llama* **decreciente (no creciente)** *sobre un conjunto X, si de la desigualdad $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in X)$ se deduce la desigualdad $f(x_1) > f(x_2)$ (respectivamente, $f(x_1) \geqslant f(x_2)$).*

Una función creciente (no decreciente) o decreciente (no creciente) se llama *monótona* sobre un conjunto dado X.

TEOREMA *Sea $f(x)$ una función monótona y acotada para $x < a$ o $x > a$. En este caso existe su límite izquierdo*

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$$

o su límite derecho

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0).$$

A pesar de que este teorema es evidente, su demostración no puede ser realizada en este capítulo.

OBSERVACIÓN Una confirmación análoga es justa para $a = -\infty$ o para $a = +\infty$.

COROLARIO *Una sucesión acotada monótona creciente o decreciente x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, tiene límite.*

EJEMPLO. Examinemos una sucesión de perímetros $P_3, P_6, P_{12}, \ldots$ de polígonos regulares de n lados $(n = 3, 6, 12, \ldots)$ inscritos en una circunferencia de radio R y obtenidos por duplicación del número de sus lados.

Es fácil asegurarse de que

$$P_3 < P_6 < P_{12} < \ldots,$$

es decir, que el perímetro P_n crece monótonamente junto con n. Al mismo tiempo, la magnitud P_n está acotada, porque el perímetro de cada polígono regular de n lados, inscrito en la circunferencia, no supera al perímetro de todo polígono circunscrito y, en particular, por ejemplo, de un cuadrado circunscrito, es decir, que $P_n < 8R$.

Por consiguiente, existe

$$\lim_{n \to \infty} P_n = C,$$

que se toma por la **longitud de la circunferencia**.

§ 11. Límite de la relación del seno de un arco infinitamente pequeño y el propio arco

TEOREMA *El límite de la relación del seno de un arco infinitamente pequeño y el propio arco expresado en radianes, es igual a una unidad:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \tag{1}$$

DEMOSTRACIÓN. 1) Tomamos primero $x > 0$; como el arco x tiende a cero se puede considerar que $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Construyamos un ángulo $x = \angle AOB$ en el círculo trigonométrico de radio $R = 1$ (fig. 90). Sean: DB, la longitud de la perpendicular bajada desde el punto B sobre el radio OA, y AC, el segmento de la tangente a la circunferencia, trazada en el punto A hasta su intersección con la continuación del radio AB. Es evidente que

$$\text{área } \Delta OAB < \text{área sect. } OAB < \text{área } \Delta OAC.$$

Puesto que $DB = \operatorname{sen} x$ y $AC = \operatorname{tg} x$, según las fórmulas de la geometría elemental, obtendremos

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

es decir,

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x. \qquad (2)$$

Dividiendo los términos de la última desigualdad doble por sen x positivo, obtendremos

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{x}{\cos x}, \qquad (3)$$

o bien

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1. \qquad (4)$$

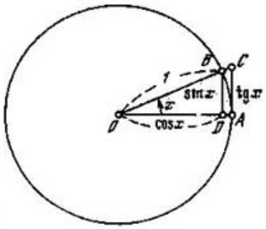

Fig. 90

Sea $x \to +0$; en este caso como resultado de consideraciones evidentes obtenemos $\cos x \to 1$ [1]). De este modo, de la desigualdad (4) se deduce que la función sen x/x está acotada por dos funciones que tienen un límite común igual a 1. Según el teorema sobre la función intermedia (§ 12), obtenemos

$$\lim_{x\to+0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \qquad (5)$$

2) Sea ahora $x < 0$; tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x},$$

donde $-x > 0$.
Por eso

$$\lim_{x\to-0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \qquad (5')$$

De las fórmulas (5) y (5′) se deduce evidentemente la igualdad (1) (véase la observación 5 del § 4).

[1]) Efectivamente, ya que en virtud de la fórmula (2) $|\operatorname{sen} x| \leqslant |x|$ ($|x| < \pi/2$), el seno de un arco infinitamente pequeño es un infinitésimo. De aquí, $1 - \cos x = 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \to 0$ para $x \to 0$, es decir, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

OBSERVACION De las fórmulas (2) se deduce que si $0 < |x| < \pi/2$, entonces

$$|\operatorname{sen} x| = \operatorname{sen} |x| < |x|.$$

Como $|\operatorname{sen} x|$ no es mayor que 1, para todo x es justa la desigualdad

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant |x|, \tag{6}$$

(la igualdad tiene lugar solamente cuando $x = 0$). La desigualdad (6) se utiliza frecuentemente para estimar los senos de arcos pequeños.

§ 12. El número e

Examinemos la expresión

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

donde n es un número natural.

Atribuyamos a n valores ilimitadamente crecientes y calculemos los valores correspondientes de la potencia $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Obtenemos la siguiente tabla:

n	1	2	10	100	1000	10 000	...
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2,25	2,594	2,705	2,717	2,718	...

Vemos que con el aumento de n, la potencia $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ varía más y más lentamente y tiende hacia un límite aproximadamente igual a 2,718. Demostremos que esto es efectivamente así.

TEOREMA. *La sucesión*

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

tiende a un límite finito situado entre 2 *y* 3.

DEMOSTRACION. Con ayuda de la fórmula del binomio de Newton (véase el § 5 del cap. XI), tendremos

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times$$
$$\times \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n,$$

o

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2 \cdot 3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{2 \cdot 3 \ldots n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \tag{1}$$

Para $n > 1$ todos los términos de la fórmula (1) son positivos y, además, si crece el exponente n, el número de términos aumenta y cada término correspondiente se hace más grande.

Por consiguiente, la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ crece a partir de su valor mínimo igual a 2 cuando el exponente n aumenta.

Por otra parte, es evidente que cada término del segundo miembro de la fórmula (1) se hace más grande, si todos los factores de los denominadores se reemplazan por 2 y cada una de las expresiones entre paréntesis se reemplaza por 1. Por eso

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Según la fórmula bien conocida para la suma de una progresión geométrica, tenemos

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^{n-1}}<1.$$

De aquí,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

De este modo, cuando n crece ilimitadamente, los términos de la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ aumentan constantemente quedando superior a 2 pero inferior a 3.

Por consiguiente, de acuerdo con el corolario del teorema del § 10 existe un límite finito de esta sucesión que pertenece evidentemente al segmento $[2, 3]$ (véase el teorema 2 del § 3). Este límite se llama número e [1]. Así

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

El valor aproximado de este número es $e = 2{,}7182818284\ldots$

Se puede demostrar que la función

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad (x\in(-\infty,\ -1)\cup(0,\ +\infty))$$

tiende al número e cuando $x\to\infty$:

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

[1] La designación del número e y su amplia utilización en numerosos problemas matemáticos es mérito del académico Euler. Se puede demostrar que $e < 3$.

Demos otra expresión para el número e. Considerando que $\frac{1}{x}=\alpha\ (\alpha>-1)$, tendremos

$$e=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Con ayuda del número e es fácil expresar numerosos límites.

EJEMPLO 1. Hallar

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}.$$

Considerando que $\frac{2}{x}=\alpha$ tendremos

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{2/\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}[(1+\alpha)^{1/\alpha}]^{2}=e^{2}.$$

La función de tipo

$$y=e^{x}, \tag{2}$$

donde $e=2{,}71828\ldots$, se llama *función exponencial*. Se utiliza también la designación

$$e^{x}=\exp x.$$

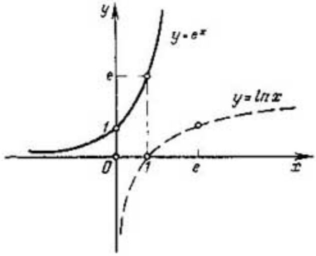

Fig. 91

La gráfica de la función (2) está representada en la fig. 91. La función exponencial desempeña un papel importante en el análisis matemático y en sus aplicaciones.

EJEMPLO 2. Supongamos que una reacción química transcurre de modo que a cada instante de tiempo t la velocidad de formación de una substancia es proporcional a la cantidad de esta última disponible en este instante.

Designemos por Q_0 la cantidad inicial de esta substancia (es decir la cantidad de la substancia al instante inicial $t=0$). Dividamos el intervalo de tiempo $(0,\ t)$ en n intervalos pequeños:

$$\left(0,\ \frac{t}{n}\right),\ \left(\frac{t}{n},\ \frac{2t}{n}\right),\ \ldots,\ \left(\frac{(n-1)\,t}{n},\ \frac{nt}{n}\right).$$

Si en el transcurso de estos intervalos sumamente pequeños la velocidad de la reacción se considera constante, entonces las cantidades de la sustancia en los momentos de tiempo

$$\frac{t}{n},\ \frac{2t}{n},\ \ldots,\ \frac{nt}{n}=t$$

serán respectivamente iguales a

$$Q_1 = Q_0 + kQ_0 \cdot \frac{t}{n} = Q_0\left(1 + \frac{kt}{n}\right),$$

$$Q_2 = Q_1 + kQ_1 \cdot \frac{t}{n} = Q_1\left(1 + \frac{kt}{n}\right) = Q_0\left(1 + \frac{kt}{n}\right)^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Q_n = Q_{n-1} + kQ_{n-1} \cdot \frac{t}{n} = Q_{n-1}\left(1 + \frac{kt}{n}\right) = Q_0\left(1 + \frac{kt}{n}\right)^n,$$

donde k es el coeficiente de proporcionalidad dado (*ley de porcentajes compuestos*). Pero, según los datos del problema, la cantidad de la substancia crece continuamente. Por eso para obtener una fórmula exacta hace falta suponer que el número de nuestros intervalos aumenta ilimitadamente y cada uno de ellos tiende a cero.

De aquí, considerando que $\frac{t}{n} \to 0$, obtendremos para la cantidad Q de substancia al instante de tiempo t la fórmula siguiente:

$$Q = \lim_{n \to \infty} \left[Q_0\left(1 + \frac{kt}{n}\right)^n\right].$$

Este límite se expresa fácilmente por el número e. En efecto, al introducir la designación $\frac{kt}{n} = \alpha$, donde $\alpha \to 0$, obtendremos

$$Q = Q_0 \lim_{\alpha \to 0} [(1+\alpha)^{1/\alpha}]^{kt},$$

es decir,

$$Q = Q_0 e^{kt}. \tag{3}$$

Ésta es la ley según la cual se efectúa el crecimiento de la substancia en nuestras condiciones.

La fórmula (3) se encuentra en el estudio de una serie de fenómenos tales como: la desintegración del radio (aquí $k < 0$), la reproducción de bacterias, etc. Estos ejemplos muestran la importancia del número e en el análisis matemático y sus aplicaciones.

§ 13. Nociones sobre logaritmos naturales

Si la base de logaritmos es el número e, ellos se llaman logaritmos *naturales* o *neperianos* [1]) y se designan

$$\log_e x = \ln x.$$

En matemáticas superiores se utilizan casi exclusivamente logaritmos naturales, porque, como veremos más adelante, las numerosas fórmulas en que ellos intervienen resultan más simples que aquellas donde figuran los logaritmos de otros sistemas [2]).

[1]) Por el nombre de Neper, matemático escocés, inventor de los logaritmos.

[2]) Además, en la práctica se encuentran frecuentemente funciones exponenciales del tipo (3) del párrafo precedente; por eso es más cómodo utilizar los logaritmos de base e.

Establezcamos una relación entre el logaritmo natural de un número y el logaritmo de la base a ($a > 0$, $a \neq 1$). Sea dado

$$y = \log_a x,$$

de donde

$$a^y = x.$$

Calculando los logaritmos de base e de los dos miembros de esta igualdad hallamos

$$y \ln a = \ln x.$$

De aquí

$$y = \frac{1}{\ln a} \ln x,$$

o

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x \qquad (1)$$

Esta fórmula expresa el logaritmo de base a del número x mediante el logaritmo natural de este mismo número.

Notemos que si se toma $x = e$ en la fórmula (1), se obtiene

$$\log_a e = \frac{1}{\ln a} \ln e = \frac{1}{\ln a}.$$

Considerando que en la fórmula (1) $a = 10$, obtendremos

$$\log x = \log_{10} x = M \ln x, \qquad (2)$$

donde $M = \frac{1}{\ln 10} = \log e = 0{,}43429$ es el *módulo de conversión* (de logaritmos naturales a decimales), y viceversa, mediante la fórmula (2) hallamos

$$\ln x = \frac{1}{M} \log x,$$

donde $\frac{1}{M} = \ln 10 = 2{,}30258$.

§ 14. Nociones sobre fórmulas asintóticas

Sean $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ dos funciones definidas en un entorno de un punto a.

Generalizando la definición dada en el § 8, diremos que

$$\psi(x) = o(\varphi(x)) \quad \text{cuando} \quad x \to a, \qquad (1)$$

si

$$\psi(x) = \alpha(x)\,\varphi(x), \qquad (2)$$

donde $\alpha(x) \to 0$, cuando $x \to a$.

Si $\varphi(x) \neq 0$ en un entorno del punto a, de la relación (2) tenemos

$$\lim_{x \to a} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = 0, \qquad (3)$$

(compárese con el § 8).

DEFINICION. *Si cuando $x \to a$ es justa la igualdad*

$$f(x) = \varphi(x) + o(\varphi(x)), \tag{4}$$

entonces $\varphi(x)$ se llama ***término asintótico*** *(o expresión asintótica) de la función $f(x)$ cuando $x \to a$.*

Se utiliza la escritura: $f(x) \sim \varphi(x)$ cuando $x \to a$. Si $\varphi(x) \neq 0$ para $x \in U_a$, de la fórmula (4), obtenemos

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1. \tag{5}$$

Aclaremos las condiciones de existencia de un término asintótico lineal **no nulo** para la función $f(x)$:

$$\varphi(x) = kx + b \text{ cuando } x \to \infty. \tag{6}$$

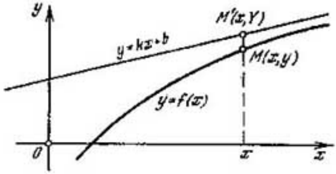

Fig. 92

Sea

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \tag{7}$$

donde $\alpha(x)$ es un infinitésimo cuando $x \to \infty$, es decir, $\alpha(x) = o(1)$ cuando $x \to \infty$; es también evidente que $\alpha(x) = o(kx + b)$, cuando $x \to \infty$.

De la (7) tendremos

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}. \tag{8}$$

Pasando al límite en la igualdad (8), cuando $x \to \infty$ y teniendo en cuenta que $\alpha(x)/x \to 0$ cuando $x \to \infty$, obtendremos

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}. \tag{9}$$

De la fórmula (7) hallamos

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx], \tag{10}$$

y viceversa, si existen los límites (9) y (10), y por lo menos uno de ellos es distinto de cero, es justo el desarrollo asintótico (7). Efectivamente, por la fórmula (10), donde k se determina de la igualdad (9), tenemos

$$\lim_{x \to a} [f(x) - kx - b] = 0,$$

de donde se deduce inmediatamente la fórmula (7).

La gráfica del término asintótico lineal $y = kx + b$ se llama *asíntota* de la curva $y = f(x)$ (fig. 92); cabe señalar que el caso cuando $k = 0$, $b = 0$ no se excluye. Aquí, para los puntos $M(x, y)$ de la curva, y $M'(x, Y)$ de la asíntota, $Y - y = MM' \to 0$ cuando $x \to \infty$ [1]).

EJEMPLO. Establecer una fórmula asintótica lineal para la función $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$, cuando $x \to +\infty$.

Utilizando las fórmulas (9) y (10), tenemos:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1$$

y

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

De este modo,

$$\sqrt{x^2+x+1} \sim x+\frac{1}{2}, \text{ cuando } x \to +\infty.$$

EJERCICIOS

1. Construir sobre el eje numérico los conjuntos de puntos que se definen por las desigualdades siguientes: a) $|x+2| < 1$; b) $|x-3| \geqslant 3$; c) $0 < |x-1| < 1/2$; d) $1 \leqslant |x| \leqslant 2$.

2. Al determinar la masa de un cuerpo se obtuvo un resultado aproximado $p = 2{,}57$ g con un error absoluto $\Delta_0 \leqslant 0{,}01$ g. Calcular el error relativo límite δ del número p.

3. ¿Cuántas cifras exactas tiene el número $x = 35{,}719$, si su error relativo es $\delta_0 \leqslant 1\%$?

Hallar los límites siguientes:

4. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1000x}{1+x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$; c) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.

5. a) $\lim\limits_{x\to9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$; b) $\lim\limits_{x\to8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. 7. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$.

8. $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2}$. 9. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a}$. 10. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$.

11. Estudiar el comportamiento de las raíces x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática

$$ax^2+bx+c=0,$$

si el coeficiente $a \to 0$ y los coeficientes $b \neq 0$ y c son constantes.

12. Sean $y_1 = x$, $y_2 = \sqrt{x^2+1}$. Mostrar que $\lim\limits_{x\to+\infty} (y_2-y_1) = 0$.

Aclarar el sentido geométrico de esta igualdad.

Hallar los límites siguientes:

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2^n}\right)$. 14. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+2^n}$. 15. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^n$. 17. $\lim\limits_{x\to0} (1-x)^{\frac{2}{x}}$. 18. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$.

---

[1]) Si los límites (9) y (10) existen cuando $x \to -\infty$ o $x \to +\infty$, la fórmula asintótica (7) es justa en las condiciones correspondientes. En este caso la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene una asíntota izquierda o, respectivamente, una asíntota derecha.

Capítulo VIII

Continuidad de una función

§ 1. Incremento del argumento y de la función. Continuidad de una función

Sea x cierto valor de una magnitud variable dada. Consideremos junto con x otro valor x_1 de esta variable. Introduzcamos la definición siguiente.

DEFINICIÓN. *Se llama* ***incremento*** *de una magnitud variable, la diferencia entre el nuevo valor de esta variable y su valor anterior*. En nuestro caso, el incremento de la variable es igual a $x_1 - x$.

Para designar el incremento se utiliza la letra griega Δ; así, por ejemplo, $\Delta x = x_1 - x$ designa el incremento de la variable x.

Al añadir al valor de una variable su incremento, se obtiene el *valor incrementado* de esta variable. Por ejemplo, $x + \Delta x$ es el valor incrementado de la variable x.

Supongamos que y sea una función del argumento x, es decir,

$$y = f(x). \qquad (1)$$

Demos al argumento x un incremento Δx; en este caso la función y obtendrá un incremento Δy. Este hecho puede ser evidentemente escrito así:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x). \qquad (2)$$

De las igualdades (1) y (2) se deduce que

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \qquad (3)$$

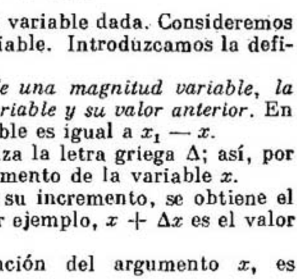

Fig. 93

EJEMPLO 1. Determinar el incremento de la variable x y el incremento de la función $y = x^2$, si el argumento x ha variado de -1 a 2.

Es evidente que aquí $\Delta x = 2 - (-1) = 3$ y $\Delta y = 2^3 - (-1)^3 = 9$.

Efectuemos una interpretación geométrica del incremento.

Sea la curva AB la gráfica de la función $y = f(x)$ (fig. 93).

Examinemos sobre esta curva un punto M de coordenadas corrientes x e y. Demos a la abscisa x del punto $M(x, y)$ un incremento Δx; entonces la ordenada y de este punto recibirá un incremento Δy. El punto $M(x, y)$ ocupará en este caso una nueva posición $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Sea C el punto de intersección de la recta que pasa por el punto M, paralela al eje Ox, y de la perpendicular $M'N'$ bajada desde el punto M' al eje Ox. Es evidente que

$$MC = \Delta x, \quad CM' = \Delta y.$$

Puede ocurrir que para cierto x el punto M' se aproxima ilimitadamente al punto M cuando Δx tiende a cero y, por consiguiente, Δy tiende también a cero. En tal caso la función $y = f(x)$ se denomina *función continua* para el valor dado de x. Más exactamente:

DEFINICIÓN 1 *Una función $f(x)$ definida sobre un conjunto X se llama* **continua** *para $x = x_1$ (o* **continua en el punto x_1**), *si:*

1) *la función está definida en $x = x_1$ (es decir, $x_1 \in X$);*

2) *el incremento de la función en el punto x_1 tiende a cero cuando el incremento del argumento $\Delta x_1 = x - x_1$ tiende a cero, es decir,*

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} [f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)] = 0, \tag{4}$$

donde el incremento infinitamente pequeño Δx_1 recorre solamente valores para los cuales $f(x_1 + \Delta x_1)$ tiene sentido. En este caso suponemos como siempre (véase el § 3 del cap. VII) que x_1 es un punto límite del conjunto X y de este modo en cualquier entorno U_{x_1} existen puntos $x_1 + \Delta x_1 \in X$ distintos de x_1 ($\Delta x_1 \neq 0$), para los cuales la función $f(x)$ está definida.

De un modo breve, *una función se llama* ***continua en un punto dado***, *si en este punto a un incremento infinitamente pequeño del argumento le corresponde un incremento infinitamente pequeño de la función.*

Utilizando la noción de límite de una función (§ 3 del cap. VII) obtenemos la definición desarrollada de **continuidad de una función en un punto**: *una función $f(x)$ es continua en un punto x_1 si, y sólo si,*

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_1) > 0$ *tal, que*

$$| f(x) - f(x_1) | = | f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1) | < \varepsilon, \tag{5}$$

si $x = x_1 + \Delta x_1$ y $0 < | \Delta x_1 | < \delta$ (Δx_1 es cualquier incremento admisible). Notemos que la desigualdad (5) evidentemente se cumple también para $\Delta x_1 = 0$, es decir, el entorno δ del punto x_1 puede ser interpretado aquí como un entorno **completo**: $| \Delta x_1 | < \delta$.

DEFINICIÓN 2. *Una función $f(x)$ se llama* ***continua sobre un conjunto dado*** X *si* 1) *está definida sobre este conjunto (es decir, $\forall x \in X$, $\exists f(x)$);* 2) *es continua en cada punto de este conjunto, es decir, $\forall x \in X$, es justa la igualdad*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = 0, \tag{6}$$

donde $x + \Delta x \in X$.

Notemos que el conjunto X está aquí interpretado como el dominio de definición de la función, es decir, que los puntos $x \notin X$ y $x + \Delta x \notin X$ no se examinan.

Por ejemplo, una función $f(x)$ es continua sobre un segmento $[a, b]$, si: 1) esta función está definida en cada punto de este segmento, 2) $\forall x \in [a, b]$ es justa la igualdad (6), donde $x + \Delta x \in [a, b]$.

EJEMPLO 2. La función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{para } x \notin [0, 1] \end{cases}$$

es continua sobre el segmento $X = [0, 1]$, aunque ella no es continua sobre el eje $-\infty < x < +\infty$.

EJEMPLO 3. Estudiar, si la función $y = x^2$ es continua.
Dando al argumento x un incremento Δx, obtendremos

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2,$$

donde Δy es el incremento de la función y. De aquí,

$$\Delta y = \Delta x \cdot (2x + \Delta x).$$

Es evidente que cualquiera que sea el valor fijo de x, Δy será un infinitésimo si Δx es un infinitésimo. Por consiguiente, la función $y = x^2$ es continua para todo valor del argumento x. En otras palabras, la función x^2 es continua sobre el intervalo infinito $[-\infty, +\infty]$.

Es también fácil demostrar la continuidad de la función potencial x^n, donde n es un número natural entero.

DEFINICIÓN 3. *El punto donde se altera la continuidad de una función, se llama* ***punto de discontinuidad*** *de esta función.*

Si $x = x_0$ es un punto de discontinuidad de la función $y = f(x)$, son posibles dos casos:

1) la función $f(x)$ está definida para $x = x_0$, además,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) \not\to 0$$

cuando $\Delta x_0 = x - x_0 \to 0$;

2) la función $f(x)$ no está definida para $x = x_0$ y hablar sobre un incremento de la función en el punto x_0 no tiene sentido. En este caso convenimos en llamar a $x = x_0$ punto de discontinuidad de la función $f(x)$ si, y sólo si, la función $f(x)$ está definida en un entorno inmediato de x_0 [1)].

Si una función $f(x)$ puede ser modificada o definida suplementariamente en el punto x_0 (es decir, elegir un número $f(x_0)$) de tal modo que la nueva función $f(x)$ sea continua para $x = x_0$, este punto se llama *punto de discontinuidad evitable* de la función $f(x)$. En el caso contrario, es decir, cuando la función $f(x)$ permanece discontinua en $x = x_0$ para toda elección del número $f(x_0)$, el punto x_0 se llama *punto de discontinuidad inevitable* de la función $f(x)$.

EJEMPLO 4. Examinemos una función $E(x)$ igual a la parte entera del número x, es decir, si $x = n + q$, donde n es un número entero y $0 \leqslant q < 1$, en-

[1)] Es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$ existen en el intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ puntos, donde la función $f(x)$ está definida.

tonces $E(x) = n$ (fig. 94). Por ejemplo, $E(\sqrt{2}) = 1$, $E(\pi) = 3$, $E(-1{,}5) = -2$, etc.

La función $E(x)$ es discontinua para todo valor entero del argumento x. Efectivamente, por ejemplo, para $x = 1$ y un incremento suficientemente pequeño de Δx tenemos

$$E(1 + \Delta x) = 1, \quad \text{si} \quad \Delta x > 0,$$
$$E(1 + \Delta x) = 0, \quad \text{si} \quad \Delta x < 0.$$

De aquí teniendo en cuenta que $E(1) = 1$, obtendremos

$$E(1+\Delta x) - E(1) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad \Delta x > 0, \\ -1, & \text{si} \quad \Delta x < 0. \end{cases}$$

Por consiguiente, el incremento de la función $\Delta y = E(1 + \Delta x) - E(1)$ no tiende a cero cuando $\Delta x \to 0$, y por eso la función es discontinua para $x = 1$.

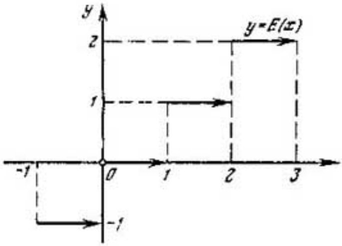

Fig. 94

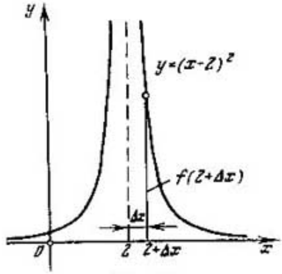

Fig. 95

Un razonamiento análogo puede ser desarrollado para cada uno de los valores $x = k$, donde k es un número entero.

EJEMPLO 5. Sea

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}.$$

Esta función no está definida para $x = 2$, pero tiene un sentido para todos los valores de $x \neq 2$ (fig. 95). Cualquiera que sea el valor atribuido a $f(2)$ siempre tendremos

$$f(2+\Delta x) - f(2) = \frac{1}{(\Delta x)^2} - f(2) \to \infty,$$

cuando $\Delta x \to 0$. De este modo en el caso examinado cualquiera que sea la elección del valor de $f(2)$, para $x = 2$, a un incremento infinitamente pequeño Δx del argumento le corresponde un incremento infinitamente grande Δy de la función. Esta función tiene un punto de discontinuidad inevitable para $x = 2$.

§ 2. Otra definición de la continuidad de una función

Teniendo en cuenta la importancia de la noción de continuidad de una función, daremos otra definición de la continuidad en un punto equivalente a la formulada antes.

DEFINICION. *Una función $f(x)$ se llama* **continua** *en $x = x_1$ si: 1) está definida en $x = x_1$; 2) tiene lugar la igualdad*

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)\ ^{1)} \qquad (1)$$

es decir, que una función es continua en un punto dado x_1 si, y sólo si, el límite de esta función, cuando $x \to x_1$, es igual al valor de la función en el punto límite (fig. 96). Se supone aquí que la variable x toma solamente los valores, para los cuales la función $f(x)$ tiene sentido. En otras palabras para una función $f(x)$ continua en x_1, de la condición $x \to x_1$, se deduce la relación límite

$$f(x) \to f(x_1).$$

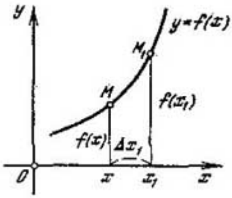

Fig. 96

Es fácil ver que: 1) si la función $f(x)$ es continua en $x = x_1$ en el sentido indicado antes (§ 1), es decir, si

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)] = 0, \qquad (2)$$

entonces, considerando que $x_1 + \Delta x_1 = x$, donde, evidentemente, $x \to x_1$ cuando $\Delta x_1 \to 0$, y utilizando el teorema sobre el límite de la suma geométrica, obtendremos

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1). \qquad (3)$$

Por consiguiente, la función $f(x)$ es también continua en $x = x_1$ en el sentido de nuestra definición;

2) a la inversa, es evidente que de la igualdad (3) se deduce la igualdad (2).

De este modo, la equivalencia de las dos definiciones queda demostrada por completo.

Para una función continua sobre un conjunto X, en virtud de la fórmula (1), para cada valor de $x_1 \in X$ se cumple la igualdad

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1).$$

Puesto que $x_1 = \lim\limits_{x \to x_1} x$, se obtiene

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(\lim_{x \to x_1} x),$$

es decir, *si una función es continua, los signos del límite y de la función son permutables.*

---

[1]) Aquí se supone habitualmente que x_1 es un punto límite del dominio de definición de la función $f(x)$.

En los cursos de análisis más detallados se demuestra que la fórmula (4) es también justa para toda función continua $x = \varphi(t)$ tal que $\varphi(t) \to x_1$ cuando $t \to t_1$. De este modo, tenemos una **condición reforzada de permutabilidad de la función $f(x)$ y del límite**:

$$\lim_{t \to t_1} f(\varphi(t)) = f(\lim_{t \to t_1} \varphi(t)). \tag{5}$$

De la definición 3 (§ 1) se deduce que *una función es discontinua en un punto dado si, y sólo si, 1) no existe límite de la función en este punto, ó 2) el límite de la función en el punto dado existe pero no coincide con el valor de la función en este punto.*

§ 3. Continuidad de las principales funciones elementales

1) La función potencial

$$y = x^n$$

(n es natural (véase la fig. 60)) es continua para todo valor de x (véase el ejemplo 2 del § 1).

2) La función exponencial

$$y = a^x \quad (a > 0)$$

(véase la fig. 63) es continua para todo valor de x.

3) La función trigonométrica

$$y + \text{sen } x$$

(véase la fig. 65) es continua para todo valor de x.

Efectivamente, dando al argumento x un incremento Δx y designando con Δy el incremento correspondiente de la función y, tendremos

$$y + \Delta y = \text{sen } (x + \Delta x),$$

de donde

$$\Delta y = \text{sen } (x + \Delta x) - \text{sen } x = 2 \text{ sen } \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

En virtud de la nota para el teorema del § 11 del cap. VII tendremos para $\Delta x \neq 0$

$$\left| \text{sen } \frac{\Delta x}{2} \right| < \frac{|\Delta x|}{2}.$$

Además,

$$\left| \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right| \leqslant 1.$$

Por eso

$$|\Delta y| < 2 \cdot \frac{|\Delta x|}{2} \cdot 1 = |\Delta x|,$$

es decir $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Por consiguiente, la función sen x es continua en el intervalo $]-\infty, +\infty[$.

Se demuestra exactamente igual, que

$$y = \cos x$$

es una función continua en el intervalo $]-\infty, +\infty[$ (véase la fig. 65).

§ 4. Teoremas fundamentales de las funciones continuas

TEOREMA 1. *La **suma** de un número finito de funciones continuas es una función continua* [1].

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son funciones continuas sobre un conjunto X, y x_1 es un punto cualquiera de este conjunto, entonces

$$\lim_{x\to x_1} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x\to x_1} f_1(x) + \lim_{x\to x_1} f_2(x) = f_1(x_1) + f_2(x_1),$$

es decir, el límite de la suma cuando $x \to x_1$, es igual al valor de ésta cuando $x = x_1$.

Por consiguiente, la función $f_1(x) + f_2(x)$ es también continua sobre el conjunto X.

TEOREMA 2. *El **producto** de un número finito de funciones continuas es una función continua.*

DEMOSTRACIÓN. Es análoga a la demostración del teorema 1.

COROLARIO. *Un polinomio entero*

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

es una función continua.

TEOREMA 3. *El **cociente** de la división de dos funciones continuas es una función continua en todos los puntos donde el divisor es distinto de cero.*

DEMOSTRACIÓN. Es análoga a la demostración del teorema 1.

COROLARIO. *Una función racional fraccionaria*

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m}$$

es continua en todos los lugares, excluyendo los valores de x, donde el denominador se anula.

TEOREMA 4. *La función continua de una función continua es también una función continua*; en otras palabras, la función compuesta de funciones continuas es continua.

---

[1] Se supone que todas las funciones examinadas están definidas y son continuas sobre un conjunto común X que no contiene puntos aislados (por ejemplo, sobre un intervalo (a, b) o un segmento $[a, b]$, etc.).

DEMOSTRACIÓN. Sea x_1 un punto cualquiera del dominio de definición de una función compuesta $f(\varphi(x))$, donde la función $u = \varphi(x)$ es continua en el punto x_1 y la función $f(u)$ es continua en el punto $u_1 = \varphi(x_1)$. En virtud de la condición reforzada de permutabilidad de una función continua y de su límite (§ 1), tenemos

$$\lim_{x \to x_1} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x \to x_1} \varphi(x)) = f(\varphi(x_1)),$$

es decir, la función compuesta $f(\varphi(x))$ es continua en el punto x_1.

Por ejemplo, en virtud del teorema 4, las funciones $(\operatorname{sen} x)^2 = \operatorname{sen}^2 x$ y $\operatorname{sen}(x^2)$ son continuas por ser continuas las funciones x^2 y $\operatorname{sen} x$.

Las funciones que se examinarán en adelante serán continuas en todos los lugares excepto, probablemente, para ciertos valores del argumento.

Por ejemplo, la función

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

(véase la fig. 66) es, según el teorema 3 de este párrafo, continua para todos los valores del argumento x a excepción de los valores para los cuales $\cos x = 0$, es decir, excepto los valores de $x = (2k - 1)\frac{\pi}{2}$, donde k es un número entero cualquiera.

De modo análogo, la función

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

(véase la fig. 66) es continua cuando $\operatorname{sen} x \neq 0$, es decir, cuando $k \neq k\pi$ (k es entero).

Es justo el teorema sobre la continuidad de la función recíproca que formulamos sin demostración.

TEOREMA 5. *Si una función $y = f(x)$ es continua y estrictamente monótona* [1]) *en el intervalo $\langle a, b\rangle$, existe una función unívoca recíproca $x = \varphi(y)$, definida sobre el intervalo $\langle f(a), f(b)\rangle$, igualmente continua y estrictamente monótona.*

En virtud de este teorema, el radical $\sqrt[n]{x}$ (n es un número natural) (véase la fig. 62), la función logarítmica $\log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) (véase la fig. 64), los valores principales de las funciones trigonométricas inversas $\operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ (véase las figs. 67—70) son continuas para todos los valores del argumento x en los cuales estas funciones están definidas.

---

[1]) Es decir, $f(x)$ es una función estrictamente creciente o estrictamente decreciente en $\langle a, b\rangle$.

§ 5. Interpretación de indeterminaciones

Puede ocurrir que una función $f(x)$ esté definida y es continua en todos los lugares excepto para un cierto valor de $x = x_1$ donde dicha función $f(x)$ pierde sentido (se vuelve **indeterminada**). Surge la cuestión: si es posible elegir un número $f(x_1)$ tal, que la función $f(x)$ completada sea continua en $x = x_1$.

De acuerdo con esto, es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad

$$f(x_1) = \lim_{x \to x_1} f(x).$$

Las operaciones necesarias para hallar el límite de la función $f(x)$ cuando $x \to x_1$ se llama en este caso *desarrollo de la indeterminación* y el propio límite $\lim\limits_{x \to x_1} f(x)$, si existe, lleva el nombre poco feliz de *valor auténtico de la función* $f(x)$ cuando $x = x_1$.

EJEMPLO 1. Sea

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}.$$

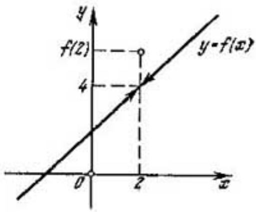

Fig. 97

Esta función no tiene sentido cuando $x = 2$. Considerando adicionalmente que

$$f(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4,$$

obtendremos una función continua en todos los lugares incluyendo $x = 2$. Si se supone que $f(2) \neq 4$, la función correspondiente será discontinua para $x = 2$ (fig. 97).

EJEMPLO 2. La función

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

es indeterminada cuando $x = 0$. Considerando adicionalmente que

$$f(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

obtendremos una función definida y continua para todos los valores del argumento x.

§ 6. Clasificación de los puntos de discontinuidad de una función

Un punto de discontinuidad x_0 de una función $f(x)$ se llama *punto de discontinuidad de primera especie*, si existen límites finitos unilaterales de la función (§ 4) (fig. 87):

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0), \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

(en este caso la función $f(x)$ no debe necesariamente estar definida en el punto x_0, es decir, $f(x_0)$ puede no existir).

La magnitud

$$\delta = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

se llama *salto de la función* $f(x)$ en el punto x_0.

Los puntos restantes de discontinuidad x_1 de la función $f(x)$ se llaman *puntos de discontinuidad de segunda especie*. Entre ellos tienen mucha importancia los puntos de discontinuidad infinita x_1 para los cuales existen límites unilaterales (finitos o infinitos)

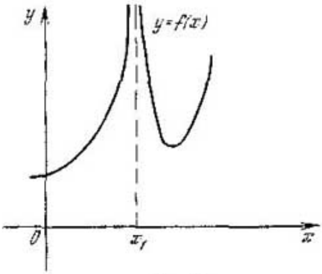

Fig. 98

$$\lim_{x \to x_1 - 0} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_1 + 0} f(x)$$

por lo menos uno de éstos es infinito (véase, por ejemplo, la fig. 98).

En este caso, la recta $x = x_1$ se denomina *asíntota vertical* de la gráfica de la función $y = f(x)$.

La función que admite sobre un intervalo dado solamente puntos de discontinuidad de primera especie en un número finito se llama *función continua a trozos* sobre este intervalo. Notemos que en los puntos de discontinuidad la función continua a trozos puede no estar definida.

Señalemos que para que se cumpla la continuidad de una función $f(x)$ en un punto x_0 es necesario y suficiente que sean iguales los tres números:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0),$$

(es decir, que el salto de la función en el punto x_0 sea igual a cero).

EJEMPLO. Determinar la naturaleza del punto de discontinuidad $x_0 = 0$ de la función

$$f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}.$$

Aquí tenemos

$$\lim_{x \to -0} \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = \pi \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +0} \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = 0.$$

Por consiguiente, $x_0 = 0$ es un punto de discontinuidad de primera especie.

EJERCICIOS

1. Determinar el incremento del argumento x y el incremento de la función $y = \log x$, si el argumento x varía de 10 a 100.

2. Mostrar que para la función lineal $y = ax + b$ el incremento Δy no depende de x.

3. Demostrar que la función $y = \sqrt{x}$ es continua.
4. Demostrar que la función $y = |x|$ es continua.

Determinar los puntos de discontinuidad de las funciones:

5. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)(x+2)(x+3)}$. 6. $f(x) = \operatorname{tg}\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. 7. $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \pi x}$.

Hallar el «valor auténtico» de las funciones: 8. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$, cuando $x = 1$. 9. $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x}}{4 - x}$, cuando $x = 4$. 10. $f(x) = \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2}$, cuando $x = 0$.

11. Determinar los puntos de discontinuidad de las funciones: a) $\dfrac{\sqrt{\operatorname{sen}(x^2)}}{x}$; b) $\operatorname{arctg} \dfrac{1}{1 - x}$; c) $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$.

Capítulo IX

Derivada

§ 1. El problema de la tangente

Sea M un punto fijo de una curva continua dada K (fig. 99). Examinemos la secante MM' que pasa por el punto M. Puede ocurrir que cuando el punto M' se aproxime ilimitadamente a lo largo de la curva al punto M, la secante MM' tienda a una cierta posición límite MT, es decir, que el ángulo $\gamma = \angle M'MT \to 0$ cuando $M' \to M$. En este caso la recta límite MT se llama *tangente*.

DEFINICION . *Se llama **tangente** en un punto dado M (punto de tangencia) a una curva continua dada, la posición límite de la secante*

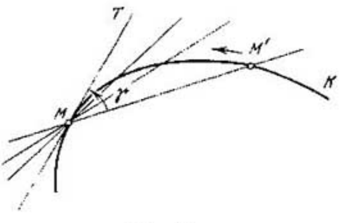

Fig. 99

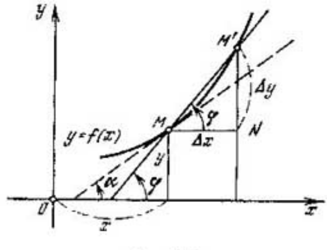

Fig. 100

MM' que pasa por el punto M, cuando el segundo punto de intersección M' se aproxima ilimitadamente al primer punto a lo largo de la curva.

Si la secante MM' no tiene posición límite cuando $M' \to M$, se dice que la tangente en el punto M a la curva dada **no existe**.

Mostremos ahora cómo se halla la ecuación de la tangente a una curva a partir de la ecuación de esta curva.

PROBLEMA. *Conociendo la ecuación de una línea continua*

$$y = f(x),$$

hallar la ecuación de la tangente a esta línea en un punto dado $M(x, y)$ suponiendo que la tangente existe.

Además del punto $M(x, y)$ tomemos en nuestra línea un otro punto $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$ (fig. 100). Al trazar la secante MM' y las rectas $MN \parallel Ox$ y $M'N \parallel Oy$ obtendremos un triángulo rectángulo MNM' de catetos $MN = \Delta x$ y $NM' = \Delta y$.

Sea φ el ángulo formado por la secante MM' y la dirección positiva del eje Ox. En este caso, es evidente que $\angle NMM' = \varphi$. Mediante el triángulo rectángulo MNM' determinamos el **coeficiente angular de la secante**

$$k' = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1}$$

Supongamos ahora que $M' \to M$; en este caso es evidente que $\Delta x \to 0$ y la secante MM' tiende a su posición límite, es decir, a la **tangente** MT en el punto M (consideramos que la tangente existe). Designemos con α el ángulo formado por la tangente MT y la dirección positiva del eje Ox. Cuando $\Delta x \to 0$, tendremos: $\varphi \to \alpha$ y si la tangente MT no es perpendicular al eje Ox, obtendremos, en virtud de la continuidad de la tangente,

$$\operatorname{tg} \varphi \to \operatorname{tg} \alpha,$$

de donde, pasando al límite, cuando $\Delta x \to 0$ en la igualdad (1) hallamos el **coeficiente** angular $k = \operatorname{tg} \alpha$ **de la tangente** MT:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{2}$$

El límite puesto en el segundo miembro de la igualdad (2) se llama *derivada* de la función $y = f(x)$ en el punto x y se designa brevemente así:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x) \tag{3}$$

(y' se lee: «y prima»).

De este modo, *el coeficiente angular de la tangente a la gráfica de la función es igual al valor de su derivada en el punto de tangencia*, es decir,

$$k = f'(x). \tag{4}$$

Conociendo el coeficiente angular de la tangente, es fácil escribir su ecuación. La tangente MT pasa por el punto de tangencia $M(x, y)$; por eso su ecuación (véase el § 3 del cap. III) es de la forma

$$Y - y = k(X - x),$$

donde X e Y son las coordenadas corrientes. Sustituyendo aquí el valor del coeficiente angular k y teniendo en cuenta que el punto M pertenece a la línea, obtendremos la ecuación de la tangente a esta línea

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x). \tag{5}$$

OBSERVACIÓN 1 Si se designan, para mayor claridad, las coordenadas del punto de tangencia por (x_1, y_1) y las coordenadas corrientes, como siempre, por (x, y), la *ecuación de la tangente* a la línea $y = f(x)$ en el punto $M_1(x_1, y_1)$ será la siguiente

$$y - y_1 = y_1'(x - x_1), \tag{5'}$$

donde $y_1 = f(x_1)$ e $y_1' = f'(x_1)$.

OBSERVACIÓN 2 Efectuando la deducción hemos supuesto que la tangente MT a la línea $y = f(x)$ en el punto M existe. Y viceversa, es fácil mostrar que si para la función $y = f(x)$ en el punto x existe una derivada finita, es decir, el límite (3) (tal función se llama *derivable en el punto* x), la gráfica de esta función en el punto correspondiente tiene una tangente (5) no paralela al eje Oy.

§ 2. Problema sobre la velocidad de movimiento de un punto

El problema de cálculo de la velocidad de un movimiento no uniforme nos conduce también a la noción de derivada.

Supongamos que un punto M se desplaza a lo largo de una recta que tomamos por el eje Ox (fig. 101). A cada valor del tiempo t le

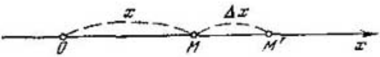

Fig. 101

corresponde una distancia determinada $OM = x$. Por consiguiente, se puede decir que la abscisa x del punto en movimiento es una función del tiempo t:

$$x = f(t).$$

Esta función se llama *ecuación del movimiento* y expresa la **ley de movimiento** de un punto.

PROBLEMA. *Conociendo la ley del movimiento, hallar la velocidad del punto en movimiento en cualquier instante de tiempo.*

Supongamos que en un instante de tiempo t el punto en movimiento ocupa la posición M, además, $OM = x$. En el instante $t + \Delta t$ el punto ocupará la posición M', donde $OM' = x + \Delta x$, de donde $x + \Delta x = f(t + \Delta t)$. Por consiguiente, el desplazamiento del punto M durante el tiempo Δt será

$$\Delta x = f(t + \Delta t) - f(t). \tag{1}$$

Si el punto M se desplaza durante el tiempo $[t, t + \Delta t]$ en un mismo sentido, entonces Δx representa numéricamente el **camino** recorrido por el punto durante el tiempo Δt [1]). La relación

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \tag{2}$$

expresa la **velocidad media** de variación de la abscisa x durante el intervalo de tiempo Δt denominada habitualmente *velocidad media de movimiento de un punto*. El límite de la velocidad media del movimiento, cuando el intervalo de tiempo Δt tiende a cero, se llama *velocidad de movimiento* en el instante de tiempo dado t. Designando esta velocidad por v, obtendremos

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{o} \quad v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}. \tag{3}$$

Se puede decir, por analogía con el problema de la tangente (§ 1), que la expresión obtenida (3) representa la **derivada** de la función x con respecto a la variable t, es decir,

$$v=f'(t).$$

De este modo, *la velocidad de un movimiento rectilíneo es igual a la derivada del camino respecto al tiempo* [2]).

OBSERVACIÓN. Señalemos que si $v=f'(t)$ conserva el signo en un cierto intervalo $a<t<b$, se puede demostrar (véase el § 2 del cap. XI) que para todo instante $t\in(a, b)$ el punto se desplaza siempre en el mismo sentido durante un intervalo de tiempo suficientemente pequeño $[t, t+\Delta t]$. De este modo, Δx representa el camino recorrido por el punto y la noción citada es localmente (es decir, para un intervalo de tiempo suficientemente pequeño) exacta.

Si para un instante de tiempo t_1 tenemos $f'(t_1)=0$, es decir, para un intervalo de tiempo infinitamente pequeño $\Delta t_1=t-t_1$ el desplazamiento correspondiente Δx del punto es un infinitésimo de orden superior, entonces Δx no representa en general el camino recorrido. Por ejemplo, una tal situación tiene lugar en el caso cuando el punto efectúa oscilaciones rápidamente amortiguadas alrededor de su posición de equilibrio. En este caso la fórmula (3) no es adecuada a nuestra definición.

§ 3. Definición general de la derivada

Históricamente la resolución de problemas sobre la tangente y de la velocidad de un movimiento, ha conducido a la noción de **derivada**, uno de los conceptos fundamentales de las matemáticas superiores. Para resolver estos problemas se debe efectuar en esencia

---

[1]) En el caso general, el desplazamiento de un punto y el camino recorrido por el mismo son diferentes. Por ejemplo, si durante el primer segundo después de iniciado el movimiento el punto se ha desplazado 10 m a la derecha y durante el segundo siguiente se movió 10 m a la izquierda, el desplazamiento del punto en el tiempo $\Delta t=2$ s es igual a $\Delta x=0$, mientras que el camino recorrido es $s=20$ m.

[2]) Más exactamente: *la velocidad es la derivada de la abscisa de un punto en movimiento, con respecto al tiempo.*

siempre la misma operación: hallar el límite de la relación entre el incremento de la función y el incremento del argumento.

Examinemos ahora esta cuestión en forma general.

Para simplificar supongamos que la función considerada $y = f(x)$ está definida en un cierto intervalo finito o infinito $X = (a, b)$ y es continua en este intervalo. Sea $x \in (a, b)$ un punto fijo del intervalo (a, b). Demos al argumento x un incremento $\Delta x \neq 0$ tal, que $x + \Delta x \in (a, b)$, en este caso la función y obtendrá un incremento correspondiente

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{1}$$

Componemos la relación

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{2}$$

Ella muestra cuántas veces en el intervalo dado $[x, x + \Delta x]$ el incremento de la función y es más grande que el incremento del argumento x; en otras palabras esta relación expresa la **velocidad media de variación de la función** y **respecto al argumento** x en el intervalo $[x, x + \Delta x]$.

Sea que $\Delta x \to 0$; en este caso $\Delta y \to 0$ (en virtud de la continuidad de la función y). Designemos por $X_1 \subset (a, b)$ el conjunto de puntos del intervalo (a, b), para los cuales el paso al límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{3}$$

tiene sentido.

En tal caso la fórmula

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (x \in X_1) \tag{4}$$

define una función $y' = f'(x)$ denominada *derivada de la función* $f(x)$.

DEFINICION. *Llámase* ***derivada*** *de una función $y = f(x)$ al límite, si existe, de la relación entre el incremento de la función y el incremento del argumento, cuando el incremento del argumento tiende a cero.*

De este modo la derivada de la función $f(x)$ es una cierta función $f'(x)$, ***obtenida*** de acuerdo con reglas determinadas de la función dada.

La función que tiene derivada sobre un conjunto X_1 se llama *función derivable* en este conjunto (véase el cap. XII).

Si $x \in X_1$ es fijo, en virtud de la igualdad (4), *la derivada y' es la velocidad de variación de la función y respecto al argumento x en el punto x.*

Para designar la derivada de una función dada $y = f(x)$ se utilizan además de

$$y' = f'(x) \quad \textbf{(Lagrange)}\ ^{1)}$$

los símbolos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) \quad \textbf{(Leibniz)}\ ^{2)}$$

(el sentido de esta designación será explicado en el cap. XII) e

$$\dot{y} = \dot{f}(x) \quad \textbf{(Newton)}\ ^{3)}.$$

En los casos cuando es necesario precisar el argumento (x, t, etc.) respecto al cual se toma la derivada de la función y, se utiliza para las derivadas correspondientes las designaciones

$$y'_x, \quad y'_t, \quad \text{etc.}$$

OBSERVACIÓN. Se define de un modo análogo la derivada de una función $y = f(x)$ definida sobre un conjunto X que no contiene puntos aislados. En particular, una función $f(x)$ es derivable sobre un segmento $[a, b]$, si para todo punto $x \in [a, b]$ existe el límite

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

se supone, además, que $x + \Delta x \in [a, b]$. Aquí

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

y

$$f'(b) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(b + \Delta x) - f(b)}{\Delta x}.$$

Para el valor de la derivada $y' = f'(x)$ de la función $y = f(x)$ en un punto fijo $x = x_1$ se utilizan las designaciones

$$(y')_{x=x_1} = [f'(x)]_{x=x_1} = f'(x_1).$$

Aquí $f'(x_1)$ es un número.

Utilizando la fórmula (1), se puede escribir más detalladamente la expresión para la derivada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{5}$$

Con ayuda de la fórmula (5), apoyándose en la teoría de los límites, se pueden hallar derivadas de funciones.

---

[1]) Se lee «y prima es igual a f prima de x».

[2]) $\frac{dy}{dx}$ se lee «dy sobre dx».

[3]) $\dot{y}$ se lee «y punto».

EJEMPLO 1. Hallar la derivada de la función $y = x^2$.

Sea x un valor fijo cualquiera del argumento. Dando a x un incremento $\Delta x \neq 0$ tendremos $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$. De aquí

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

y, por consiguiente,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

De este modo,

$$(x^2)' = 2x. \qquad (6)$$

Al resolver el problema de la tangente (§ 1) fue aclarada la significación geométrica de la derivada.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA *Para una función dada $y = f(x)$ su derivada $y' = f'(x)$ es igual, para todo valor de x, al coeficiente angular de la tangente a la gráfica de la función en el punto correspondiente.*

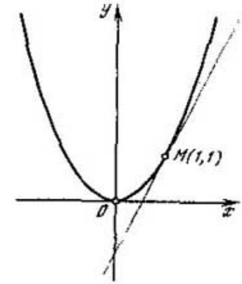

Fig. 102

EJEMPLO 2. Escribir la ecuación de la tangente a la curva $y = x^2$ en el punto $M(1, 1)$ (fig. 102).

Hallamos la derivada y' para $x = 1$. Según la fórmula (6) tenemos

$$y' = 2x.$$

De aquí

$$k = (y')_{x=1} = 2.$$

Entonces, la ecuación de la tangente se escribirá así

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{ó} \quad y = 2x - 1.$$

Notemos que la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto dado forma con la dirección positiva del eje Ox un ángulo agudo u obtuso en dependencia si la derivada en este punto es positiva o negativa. Si la derivada es igual a cero, la tangente a la gráfica de la función en el punto correspondiente es evidentemente paralela al eje Ox. Son justas también las afirmaciones recíprocas.

Luego, de la definición de derivada se deduce que la derivada y' da la velocidad de variación de la función $y = f(x)$ respecto al argumento x. Por ejemplo, si en un punto x cualquiera tenemos $y' = 2$, esto significa que en un intervalo pequeño $[x, x + \Delta x]$ el incremento Δy de la función y es aproximadamente dos veces mayor que el incremento del argumento x; esta relación será tanto más precisa cuanto menor sea $|\Delta x|$.

La derivada de la función $y = f(x)$ obtiene un sentido sumamente evidente, si el argumento x designa el tiempo. En este caso la relación

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

representa la **velocidad media de variación de la función** y **en el intervalo de tiempo** $[x, x + \Delta x]$, y el límite de esta relación

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

es la **variación de la función** y **en el instante de tiempo** x.

De este modo tenemos:

INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA DERIVADA. *Para una función* $y = f(x)$ *que varía con el tiempo* x, *la derivada* y'_x *es la velocidad de variación de esta función en el instante de tiempo dado* x.

La derivada permite estudiar el carácter de variación de la función. Cuanto mayor es el valor absoluto de la derivada, tanto más fuerte es la variación de la función y al variar x y, por consiguiente, tanto más bruscamente asciende o desciende la gráfica de esta función. Si la derivada de una función y es positiva, esto significa, evidentemente, que cuando el argumento x crece la función y también crece; si la derivada de la función es negativa, esto significa que la función y decrece cuando el argumento x crece. Este problema se estudia más detalladamente en el § 2 del cap. XI.

La noción de derivada halla numerosas aplicaciones en geometría, física, mecánica, química, biología y otras ciencias.

§ 4. Otras aplicaciones de la derivada

La rapidez con la cual se desarrollan los fenómenos físicos, químicos, biológicos y otros, por ejemplo, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo, la velocidad de una reacción química, etc., se expresan también con ayuda de la derivada. Expliquémoslo con algunos ejemplos.

EJEMPLO 1. Supongamos que la temperatura U de un cuerpo es una función decreciente del tiempo: $U = f(t)$.

Sea t un instante dado del tiempo. Si t recibe un incremento Δt, la temperatura U varía (decrece) en ΔU. En este caso la relación

$$\frac{\Delta U}{\Delta t}$$

es la *velocidad media* de enfriamiento del cuerpo. El límite de esta relación para $\Delta t \to 0$, es decir,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta t} = f'(t),$$

expresa la velocidad de enfriamiento del cuerpo en el instante dado t.

De este modo, *la velocidad de enfriamiento de un cuerpo es igual a la derivada de la temperatura del cuerpo respecto al tiempo*.

EJEMPLO 2. Sea x la cantidad de una sustancia formada como resultado de una reacción química en un intervalo de tiempo t. Es evidente que x es una función del tiempo t: $x = f(t)$.

Si t recibe un incremento Δt, x recibirá un incremento Δx. En este caso la relación

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

es la *velocidad media* de la reacción química y el límite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = f'(t)$$

expresa *la velocidad de la reacción química en el instante dado t.*

De este modo, *la velocidad de la reacción química es igual a la derivada de la masa reaccionante respecto al tiempo.*

§ 5. Relación entre la continuidad y la derivabilidad de una función

Hemos visto (§ 1 del cap. VIII) que una función

$$y = f(x) \tag{1}$$

se denomina *continua en el punto* x, si en este punto

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

La función (1) se llama *derivable en el punto* x, si ella tiene derivada en este punto, es decir, si existe un límite finito:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'. \tag{2}$$

Entre estas nociones del análisis matemático existe una relación simple.

TEOREMA. *Si una función es derivable en un punto, ella es continua en ese punto. La afirmación recíproca es incorrecta: una función continua puede no tener derivada.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función $y = f(x)$ es derivable en el punto x, es decir, la relación (2) está cumplida por esta función.

Escribamos la igualdad

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \quad (\Delta x \neq 0).$$

De aquí

$$\lim_{x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = y' \cdot 0 = 0.$$

Por consiguiente, la función $y = f(x)$ es continua en el punto x.

COROLARIO. *Si una función es discontinua en un punto, ésta no tiene derivada en este punto.*

Como ejemplo de función continua que no tiene derivada en un punto, se puede indicar la función

$$y = |x|$$

(fig. 103). Esta función es continua en $x = 0$, pero no es derivable para este valor (de la variable), porque en el punto $x = 0$ de la gráfica de la función no existe tangente.

Los matemáticos (**Weierstrass** y otros) supieron construir funciones continuas que no admiten derivadas en ningún punto.

Una distinción clara entre las nociones de continuidad y de derivabilidad de una función fue establecida por primera vez por **N.I. Lobachevski**, genial matemático ruso.

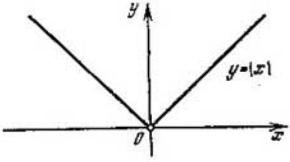

Fig. 103

Señalemos que la derivada $y' = f'(x)$ de una función continua $y = f(x)$ **no debe ser obligatoriamente continua.** Si una función $f(x)$ admite una derivada continua $f'(x)$ sobre un intervalo $\langle a, b \rangle$, la función se llama *suave* en ese intervalo. Una función $f(x)$ se llama *suave a trozos* en un intervalo $\langle a, b \rangle$ cuando su derivada $f'(x)$ admite solamente un número finito de puntos de discontinuidad, y todos de primera especie.

§ 6. Noción de derivada infinita

Si una función $y = f(x)$ es continua en un punto x_0 y si

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} = \infty, \tag{1}$$

se dice que la función $f(x)$ tiene una *derivada infinita* en el punto $x = x_0$. Por la significación geométrica de la derivada (§ 1), la derivada $y' = f'(x_0)$ es igual al coeficiente angular $k = \operatorname{tg} \alpha$ de la tangente en el punto x_0. Por eso, $\operatorname{tg} \alpha = \infty$ y, por consiguiente, $\alpha = \frac{\pi}{2}$. De este modo, la condición (1) significa geométricamente que la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene una tangente vertical en el punto x_0.

EJERCICIOS

1. ¿Qué se entiende por: a) pendiente media de un camino; b) pendiente de un camino en un punto dado?
2. ¿Qué significa: a) la densidad lineal media de una barra material; b) la densidad lineal de una barra en un punto dado?
3. ¿Qué se entiende por: a) velocidad media de la variación del área de un mar; b) velocidad de variación de área de un mar en un instante dado?
4. Definir: a) el calor específico medio de un cuerpo; b) el calor específico de un cuerpo.