Capítulo X

Teoremas fundamentales sobre las derivadas

§ 1. Observaciones preliminares

Como hemos visto, la solución de numerosos problemas se reduce al cálculo de las derivadas de funciones conocidas. Por eso es importante saber hallar rápidamente las derivadas de funciones más o menos complicadas.

La operación de cálculo de una derivada se llama *derivación* (*diferenciación*), y la función que tiene una derivada finita sobre un conjunto dado se llama función *derivable* (*diferenciable*) sobre este conjunto. El estudio de la derivada y de sus aplicaciones lo efectúa la disciplina *cálculos diferenciales.*

En este capítulo examinaremos las reglas principales de la *derivación de funciones.*

Supondremos aquí que las funciones consideradas están definidas en cierto intervalo finito o infinito, si no se ha especificado lo contrario.

Antes de pasar al estudio de las reglas principales para hallar las derivadas, calculamos las derivadas de algunas funciones simples.

§ 2. Derivadas de algunas funciones simples

La derivada de una función $y = f(x)$ puede ser hallada mediante el siguiente procedimiento:

1) se le da al argumento x un incremento $\Delta x \neq 0$ y se halla para la función y el nuevo valor incrementado $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$;

2) restando del valor nuevo de la función $y + \Delta y$ su valor inicial $y = f(x)$ se obtiene el incremento Δy de la función;

3) se compone la relación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

4) se halla el límite de esta relación cuando $\Delta x \to 0$. El resultado del paso al límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$ es efectivamente la **derivada** y' de la función y respecto al argumento x, sí, claro está, este límite existe.

Aplicando este procedimiento hallemos las derivadas de algunas funciones simples (elementales).

I. Derivada de una potencia x^m, donde m es un número entero positivo. Sea

$$y = x^m.$$

Tenemos $y + \Delta y = (x + \Delta x)^m$ o, según el binomio de Newton,

$$y + \Delta y = x^m + mx^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^m,$$

de donde

$$\Delta y = mx^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^m$$

y

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{m-1}.$$

Pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$, hallamos

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = mx^{m-1}$$

Por consiguiente,

$$(x^m)' = mx^{m-1}. \tag{1}$$

Así, pues, tenemos un teorema: *la derivada de una potencia entera positiva de una variable independiente es igual al producto de su exponente por la misma base cuyo exponente está disminuido en una unidad.*

En particular, para $m = 1$ obtenemos

$$(x)' = 1,$$

es decir, *la derivada de una variable independiente es igual a la unidad.*

Tenemos también

$$(x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2,$$

etc.

OBSERVACIÓN. Como se mostrará más adelante, (§ 10) la fórmula (1) es válida para todo exponente m real y constante (en particular para un exponente fraccionario). Por eso tenemos, por ejemplo,

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0);$$

es decir, *la derivada de la raíz cuadrada de una variable independiente es igual a la magnitud inversa del duplo de la raíz.*

Cuando $x = 0$ la función $y = \sqrt{x}$ tiene una derivada $y' = \infty$ que es unilateral, porque $\Delta x \to +0$. Geométricamente esto significa que la tangente a la parábola $y = \sqrt{x}$ en el punto $x = 0$ es perpendicular al eje Ox.

II. Derivada del sen x. Sea

$$y = \operatorname{sen} x,$$

donde el argumento x está expresado en radianes. Tenemos

$$y + \Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x).$$

De aquí

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x+\Delta x) - \operatorname{sen} x, \text{ o sea } \Delta y = 2 \operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Dividiendo ambos miembros de la última igualdad por Δx obtendremos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

o sea

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$ y utilizando el teorema sobre el límite de un producto tenemos

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Del teorema sobre el límite de la relación entre el seno de un arco infinitamente pequeño y este mismo arco (véase el § 11 del cap. VII) se deduce que

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1.$$

Además, teniendo en cuenta la continuidad de la función $\cos x$, tenemos

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right] = \cos x.$$

Por consiguiente,

$$y' = 1\cdot\cos x = \cos x,$$

es decir,

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x. \tag{2}$$

Entonces obtenemos el teorema: *la derivada del* sen x *es igual al* $\cos x$.

III. Derivada del $\cos x$. Sea

$$y = \cos x.$$

En este caso $y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$ y, por consiguiente,

$$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x, \text{ o sea, } \Delta y = -2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

De aquí,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$, obtendremos

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Por cuanto

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \operatorname{sen} x,$$

hallamos finalmente

$$y' = -\operatorname{sen} x,$$

es decir,

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x. \tag{3}$$

De este modo, tenemos el teorema: *la derivada del* $\cos x$ *es igual al* $\operatorname{sen} x$ *tomado con el signo contrario.*

§ 3. Reglas principales de la derivación de funciones

Pasamos ahora a deducir las reglas principales de la derivación de funciones.

Supongamos que todas las funciones consideradas están definidas y son derivables sobre un intervalo común y que todos los valores utilizados del argumento x, así como los valores incrementados $x + \Delta x$ pertenecen a este intervalo.

I. Derivada de una constante. *La derivada de una constante es igual a cero.*

Una magnitud constante c puede ser considerada como una función

$$f(x) = c$$

que toma un solo valor.

Demos al argumento x un incremento $\Delta x \neq 0$; en este caso, por ser constante la función $f(x)$ al cambiar el argumento, obtendremos

$$f(x + \Delta x) = c.$$

Sustrayendo miembro a miembro la primera igualdad de la segunda, obtendremos

$$f(x+\Delta x)-f(x)=0,$$

de donde

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0.$$

Pasando ahora al límite cuando $\Delta x \to 0$ hallamos

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0,$$

es decir,

$$c'=0. \tag{1}$$

Traduciendo este resultado al lenguaje de mecánica, obtendremos la siguiente interpretación concreta de nuestro teorema: *la velocidad de un punto en reposo es igual a cero.*

II. Derivada de una suma. ***La derivada de una suma algebraica de un número finito de funciones derivables es igual a la suma algebraica de las derivadas de estas funciones.***

Sea, por ejemplo,

$$y=u+v-w,$$

donde u, v y w son funciones derivables de x.

Demos al argumento x un incremento Δx; en este caso cada una de las funciones u, v y w recibirá el incremento respectivo Δu, Δv y Δw; como resultado la función y recibirá el incremento Δy. Tenemos

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)-(w+\Delta w).$$

Sustrayendo miembro a miembro la primera igualdad de la segunda, hallamos

$$\Delta y=\Delta u+\Delta v-\Delta w.$$

Dividiendo los dos miembros de la última igualdad por Δx, tendremos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}-\frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Pasando ahora al límite cuando $\Delta x \to 0$, y teniendo en cuenta que cada sumando del segundo miembro tiene límite, hallamos

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}-\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x},$$

o, utilizando la definición de la derivada, finalmente obtendremos

$$y'=u'+v'-w'.$$

De este modo, *si cada una de las funciones u, v y w es derivable, la suma algebraica de estas funciones* (por ejemplo, $u+v-w$) *es* *también derivable; en este caso*

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'. \tag{2}$$

EJEMPLO 1. Calcular la derivada de la función $y = 2 - x + x^2$.

Aplicando la fórmula (1) del § 2, obtendremos $y' = (2)' - (x)' + (x^2)' = -1 + 2x$.

COROLARIO. *Si dos funciones derivables se diferencian en un sumando constante, sus derivadas son iguales.*

Efectivamente, si $f(x)$ es una función derivable y c es un sumando constante, tenemos

$$[f(x) + c]' = f'(x) + (c)' = f'(x) + 0 = f'(x).$$

III. Derivada de un producto. ***La derivada de un producto*** *de dos funciones derivables es igual a la suma del producto del primer factor por la derivada del segundo más el producto del segundo factor por la derivada del primero.*

Sea

$$y = uv,$$

donde u y v son funciones derivables de x. Demos a x un incremento Δx; en este caso u recibirá un incremento Δu, v recibirá un incremento Δv e y obtendrá un incremento Δy. Tenemos

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

o

$$y + \Delta y = uv + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Por consiguiente,

$$\Delta y = u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v.$$

De aquí

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x.$$

Pasando al límite en la última igualdad cuando $\Delta x \to 0$ y teniendo en cuenta que u y v no dependen de Δx tendremos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x.$$

o bien

$$y' = uv' + vu'.$$

De este modo, *si cada uno de los factores de u y v tiene derivada, el producto de estos factores tambien tendrá derivada; además*

$$(uv') = uv' + vu'. \tag{3}$$

EJEMPLO 2. Sea $y = x^3 \operatorname{sen} x$.

Aplicando la fórmula (3) y utilizando las fórmulas (1) y (2) del § 2, tendremos

$$y' = x^3 (\operatorname{sen} x)' + (x^3)' \operatorname{sen} x = x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x.$$

COROLARIO 1. *Se puede sacar un factor constante fuera del signo de derivación.*

Efectivamente, si c es un factor constante, tenemos

$$(cu)' = cu' + cu,$$

de donde, puesto que $c' = 0$, obtenemos

$$(cu)' = cu'.$$

COROLARIO 2. *Si*

$$y = uvw,$$

donde u, v y w son funciones derivables de x, entonces

$$y' = (uvw)' = [(uv)\,w]' = (uv)\,w' + (uv)'\,w = (uv)\,w' + \\ + (uv' + u'v)\,w = u'vw + uv'w + uvw'.$$

En general, *la derivada del producto de varias funciones derivables es igual a la suma de los productos de la derivada de cada una de estas funciones por todas las demás.*

IV. Derivada de un cociente. *Si el numerador y el denominador de una fracción son funciones derivables y si el denominador no se anula, la* ***derivada de la fracción*** *es otra fracción cuyo numerador es la diferencia entre el producto del denominador de la fracción por la derivada del numerador y el producto del numerador de la fracción por la derivada del denominador, mientras que el denominador es el cuadrado del denominador inicial.*

Sea

$$y = \frac{u}{v},$$

donde u y v son funciones derivables de x y $v \neq 0$. Demos al argumento x un incremento Δx. En este caso u, v, y recibirán respectivamente incrementos Δu, Δv, Δy, y tendremos

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}.$$

Sustrayendo miembro a miembro la primera igualdad de la segunda, obtendremos

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v},$$

o bien

$$\Delta y = \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{(v + \Delta v)\,v}.$$

De aquí hallamos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\,\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\,\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)\,v}. \tag{4}$$

Sea $\Delta x \to 0$. Como la función v es derivable en el punto x, ella es continua en este mismo punto (véase el § 5 del cap. IX) y, por consiguiente,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0.$$

Por eso, pasando al límite en la igualdad (4) y teniendo en cuenta que las funciones u y v tienen derivadas, obtenemos

$$y'=\frac{vu'-uv'}{v^2}.$$

o, definitivamente,

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}. \tag{5}$$

EJEMPLO 3. Sea $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.
Utilizando la fórmula (5) tendremos

$$y'=\frac{(x^2+1)(x^2-1)'-(x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$$
$$=\frac{(x^2+1)\,2x-(x^2-1)\,2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2\,x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

COROLARIO 1 *Si el denominador de una fracción es una magnitud constante*, entonces,

$$\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{cu'-uc'}{c^2}=\frac{u'}{c},$$

es decir,

$$\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{u'}{c}.$$

OBSERVACIÓN. El último resultado es evidente porque

$$\frac{u}{c}=\frac{1}{c}\cdot u$$

y, por consiguiente,

$$\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{1}{c}\,u'=\frac{u'}{c}.$$

COROLARIO 2. *Si el numerador de una fracción es una magnitud constante*, entonces,

$$\left(\frac{c}{v}\right)'=\frac{vc'-cv'}{v^2}=-\frac{cv'}{v^2}. \tag{6}$$

En particular, para $c = 1$ hallamos

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}. \tag{7}$$

EJEMPLO 4. Si $y = \frac{1}{x^2-1}$, de acuerdo con la fórmula (7) tenemos

$$y' = -\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}.$$

V. Derivada de una potencia con exponente entero negativo. Sea m un número entero positivo e

$$y = x^{-m},$$

o bien

$$y = \frac{1}{x^m}.$$

Aplicando la fórmula (7), obtendremos

$$y' = -\frac{(x^m)'}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}.$$

Por consiguiente,

$$(x^{-m})' = -mx^{-m-1}. \tag{8}$$

Acabamos de obtener la misma regla que para la derivación de una potencia entera positiva.

VI. Derivada de la tg x. Sea

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Utilizando la fórmula (5) hallamos

$$y' = \frac{\cos x \cdot (\operatorname{sen} x)' - \operatorname{sen} x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Entonces

$$(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x. \tag{9}$$

VII. Derivada de la ctg x. Sea

$$y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

En este caso tenemos

$$y' = \frac{\operatorname{sen} x \cdot (\cos x)' - \cos x\,(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x) - \cos x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

Entonces

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x. \tag{10}$$

§ 4. Derivada de una función compuesta

Examinemos una **función compuesta**

$$y = f\,[\varphi\,(x)]. \tag{1}$$

Si en la cadena de las relaciones funcionales $y = f\,(z)$ y $z = \varphi\,(x)$ el argumento x es el último, lo llamaremos *variable independiente* (para subrayar el hecho de que la variación de este argumento no depende del comportamiento de otras variables).

De este modo, cabe distinguir la noción de argumento de la de variable independiente. Por ejemplo, sea

$$y = \operatorname{sen} z \quad \text{y} \quad z = x^2.$$

Aquí z es el argumento de la función y, pero z no es, evidentemente, una variable independiente.

Supondremos para simplificar que la función $y = f\,(z)$ está definida y es derivable en un intervalo (A, B), y que la función $z = \varphi\,(x)$ está definida, es derivable en un intervalo (a, b) y toma los valores del intervalo (A, B). En este caso, la función (1) estará de antemano definida y es continua en el intervalo (a, b). La cuestión consiste en decidir si esta función es derivable.

TEOREMA. *Si $y = f\,(z)$ y $z = \varphi\,(x)$ son funciones derivables respecto a sus argumentos, la derivada de la función compuesta*

$$y = f\,[\varphi\,(x)]$$

existe y es igual a la derivada de la función dada y respecto al argumento intermedio z, multiplicada por la derivada del argumento intermedio z respecto a la variable independiente x, es decir,

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea x un valor admisible de la variable independiente. Demos a x un incremento suficientemente pequeño no nulo Δx; en este caso las funciones $z = \varphi\,(x)$ e $y = f\,(z)$ recibirán los incrementos correspondientes Δz y Δy. Puesto que según la hipótesis del teorema existe la derivada $y'_z = f'\,(z)$, se puede escribir, suponiendo que $\Delta z \neq 0$,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} = y'_z.$$

De aquí

$$\frac{\Delta y}{\Delta z} = y'_z + \alpha$$

(véase el § 6 del cap. VII), donde $\alpha \to 0$ cuando $\Delta z \to 0$ y, por consiguiente,

$$\Delta y = (y'_z + \alpha)\,\Delta z.$$

Predeterminamos un α infinitamente pequeño para $\Delta z = 0$, suponiendo que $\alpha = 0$ para $\Delta z = 0$. Entonces, la última igualdad también es justa para $\Delta z = 0$ porque en este caso sus dos miembros son evidentemente iguales a cero. Dividiendo los dos miembros de esta igualdad por Δx, tendremos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (y'_z + \alpha) \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Pasando ahora al límite cuando $\Delta x \to 0$ y teniendo en cuenta que en este caso $\Delta z \to 0$ y, por consiguiente, $\alpha \to 0$, obtendremos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (y'_z + \alpha) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x},$$

o bien,

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x, \tag{2}$$

lo que demuestra el teorema.

El teorema demostrado puede ser brevemente enunciado así:

La función derivable de otra función derivable, es también una función derivable.

OBSERVACION. En las designaciones de Leibniz la fórmula (2) adquiere la forma de la igualdad

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

EJEMPLO 1. Hallar la derivada de la función $y = \operatorname{sen}(x^2)$.

Tomando $z = x^2$, en este caso $y = \operatorname{sen} z$. De aquí

$$z'_x = 2x \quad \text{e} \quad y'_z = \cos z = \cos(x^2).$$

Por consiguiente, según la fórmula (1) tenemos,

$$y'_x = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cos(x^2).$$

EJEMPLO 2. Hallar la derivada de la función $y = \operatorname{sen}^3 x = (\operatorname{sen} x)^3$.

Tomamos $z = \operatorname{sen} x$; entonces $y = x^3$. De aquí

$$z'_x = \cos x \quad \text{e} \quad y'_z = 3z^2 = 3 \operatorname{sen}^2 x.$$

Por consiguiente,

$$y'_x = 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x.$$

Al adquirir cierta experiencia la variable intermedia z no se escribe, introduciéndola sólo mentalmente.

EJEMPLO 3. Hallar la derivada de la función $y=\sqrt{x^2+4x+3}$.

Utilizando la fórmula para la derivada de la raíz cuadrada (§ 2) y aplicando la regla de derivación de una función compuesta, tenemos

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+4x+3}}\cdot(x^2+4x+3)'=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2+4x+3}}\cdot(2x+4)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+3}}.$$

EJEMPLO 4. Hallar la derivada de la función $y=\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}$.

Tenemos

$$y'=3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)'=3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'=\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\cdot\sec^2\frac{x}{2}.$$

§ 5. Derivada de una función inversa

Sea

$$y=f(x) \tag{1}$$

una función derivable del argumento x definida sobre un intervalo (a, b). Si en la ecuación (1) y se considera argumento, y x, función, la nueva función

$$x=\varphi(y),$$

donde $f[\varphi(y)]\equiv y$, se llama, como sabemos, función **inversa** respecto a la dada. Nuestra tarea es: conociendo la derivada $y'_x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de la función $y=f(x)$, calcular la derivada $x'_y=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}$ de su función inversa $x=\varphi(y)$, suponiendo que la función inversa existe y es continua sobre el intervalo correspondiente (sin resolver la ecuación (1)).

TEOREMA. *La **derivada de la función inversa**, de una función derivable cuya derivada no es nula, es igual a la magnitud inversa de la derivada de la función inicial.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $y=f(x)$ una función derivable y sea $y'_x=f'(x)\neq 0$.

Sean $\Delta y\neq 0$ el incremento de la variable independiente y y Δx el incremento correspondiente de la función inversa $x=\varphi(y)$. Escribamos la igualdad

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=1:\frac{\Delta y}{\Delta x}\,^{1)}. \tag{2}$$

[1]) Se puede demostrar que, si en nuestras condiciones $\Delta y\neq 0$, entonces $\Delta x\neq 0$. Por eso la igualdad (2) no puede perder su sentido.

Pasando al límite en la igualdad (2) cuando $\Delta y \to 0$, y teniendo en cuenta que en este caso $\Delta x \to 0$ (por ser continua la función inversa), obtendremos

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

De aquí

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}, \tag{3}$$

donde x'_y es la derivada de la función inversa.

OBSERVACIÓN. Si se utilizan las designaciones de Leibniz, la fórmula (3) se escribirá así:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

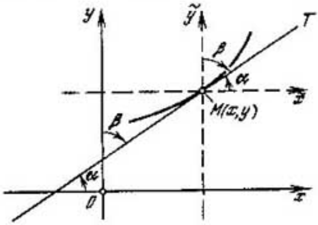

Fig. 104

Recordando la significación geométrica de la derivada se puede dar una interpretación simple de la fórmula (3). En un punto $M(x, y)$ de la gráfica de la función $y = f(x)$ trazamos la tangente MT a esta gráfica y dos rectas $M\tilde{x}$ y $M\tilde{y}$ paralelas respectivamente a los ejes de coordenadas Ox y Oy (fig. 104). Designando por α y β los ángulos formados por la tangente MT y las direcciones positivas de los ejes Ox y Oy, tendremos

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\angle TM\tilde{x}) = y'_x$$

y

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\angle TM\tilde{y}) = x'_y.$$

Puesto que $\alpha + \beta = \pi/2$, resulta

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = y'_x \cdot x'_y = 1,$$

lo que es equivalente a la fórmula (2).

EJEMPLO. Sea $y = x + x^3$. Tenemos $y'_x = 1 + 3x^2$ y, por consiguiente,

$$x'_y = \frac{1}{1 + 3x^2}.$$

§ 6. Derivada de una función implícita

Examinemos algunos ejemplos de derivación de **funciones implícitas.**

EJEMPLO 1. Hallar la derivada de la función y ($y > 0$) definida por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Resolviendo esta ecuación respecto a y y tomando el signo más según los datos del problema, tendremos nuestra función en forma explícita:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Su derivación no representa ahora ninguna dificultad.

Sin embargo, en ciertos casos es imposible resolver la ecuación dada respecto a y por medio de transformaciones elementales y nos vemos obligados a considerar a y como una función implícita de x. Por eso indicamos otro procedimiento para calcular la derivada de una función y implícita. Suponiendo que y está reemplazada en la ecuación dada por su expresión explícita, obtendremos la identidad

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\equiv 1,$$

siendo aquí y función de x. Es evidente que si dos funciones son idénticamente iguales entre sí, sus derivadas serán también iguales. Por eso al tomar las derivadas de los primero y segundo miembros de la identidad precedente y aplicando la regla de derivación de una función compuesta (§ 4) tendremos

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}y'=0,$$

de donde

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

EJEMPLO 2. Sea y una función implícita de x, positiva o negativa, definida por la ecuación

$$y^2=2px.$$

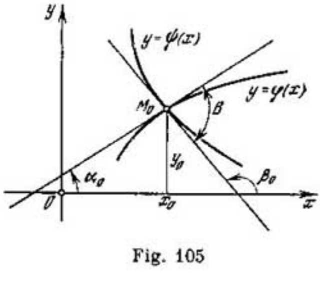

Fig. 105

Suponiendo que y es reemplazada por la expresión explícita correspondiente y derivando respecto a x los dos miembros de la identidad obtenida, tendremos $2yy'=2p$.

De aquí

$$y'=\frac{p}{y}.$$

OBSERVACIÓN. Si dos funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ no son idénticamente iguales y lo son solamente para cierto valor de x_0 del argumento

$$\varphi(x_0)=\psi(x_0),$$

esto no significa, en general, que $\varphi'(x_0)=\psi'(x_0)$. Esto se ve claramente en la fig. 105, donde

$$\varphi'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha_0 \quad \text{y} \quad \psi'(x_0)=\operatorname{tg}\beta_0.$$

De este modo, *en general no se puede derivar una igualdad miembro a miembro.*

§ 7. Derivada de una función logarítmica

Sea

$$y = \log_a x,$$

donde $x > 0$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Hallemos la derivada de esta función aplicando el procedimiento general descrito al comienzo del § 2.

Demos al argumento x (x está dado) un incremento $\Delta x \neq 0$ tal, que $x + \Delta x > 0$. En este caso la función y recibirá un incremento Δy y tendremos $y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x)$; por consiguiente,

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x$$

o, puesto que la diferencia de logaritmos es igual al logaritmo del cociente,

$$\Delta y = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Al dividir los dos miembros de la última igualdad por Δx, obtendremos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Considerando aquí que $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$ $(\alpha > -1)$, hallamos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\alpha} \log_a (1 + \alpha),$$

o, en virtud de la propiedad conocida del logaritmo:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a (1 + \alpha)^{1/\alpha}.$$

Sea $\Delta x \to 0$, en este caso es evidente que $\alpha \to 0$ (como el producto de un infinitésimo Δx por una constante $\frac{1}{x}$). Por eso

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{\alpha \to 0} [\log_a (1 + \alpha)^{1/\alpha}].$$

La función $F(\alpha) = (1 + \alpha)^{1/\alpha}$ es evidentemente continua para $\alpha \neq 0$. Como la función logarítmica es también continua y

$$\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e$$

(§ 12 del cap. VII), los signos $\lim\limits_{\alpha \to 0}$ y $\log_a$ pueden cambiar de lugar (§ 2 del cap. VIII)[1]):

$$\lim_{\alpha \to 0} [\log_a (1 + \alpha)^{1/\alpha}] = \log_a [\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha}] = \log_a e.$$

[1]) Suponiendo $F(0) = e$ predeterminamos la continuidad de la función $F(\alpha) = (1 + \alpha)^{1/\alpha}$ cuando $\alpha = 0$.

Por consiguiente

$$y' = \frac{1}{x}\log_a e.$$

De este modo tenemos la fórmula

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e. \tag{1}$$

Utilizando la relación conocida (véase el § 13 del cap. VII) $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$, la fórmula (1) puede ser escrita así:

$$(\log_a x') = \frac{1}{x \ln a}. \tag{1'}$$

En particular, considerando aquí que $a = e$ y recordando que $\ln e = 1$ obtendremos

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \tag{2}$$

es decir, *la **derivada del logaritmo natural** de una variable independiente es igual a la magnitud inversa de esta variable independiente.*

Otro caso particular importante se obtiene para $a = 10$:

$$(\log x)' = \frac{M}{x},$$

donde $M = \log e = 0,43429$ es el módulo de conversión.

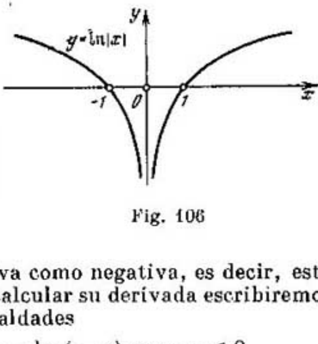

Fig. 106

La función logarítmica $y = \ln x$ está definida solamente para $x > 0$. Para las aplicaciones es cómodo examinar la función

$$y = \ln |x|$$

que tiene sentido tanto para x positiva como negativa, es decir, está definida para $x \neq 0$ (fig. 106). Para calcular su derivada escribiremos esta función con ayuda de dos igualdades

$$y = \ln x \text{ para } x > 0 \quad \text{e} \quad y = \ln(-x) \text{ para } x < 0.$$

De aquí obtenemos

$$y' = \frac{1}{x} \text{ para } x > 0$$

e

$$y' = \frac{1}{-x}\cdot(-x)' = -\frac{1}{x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} \text{ para } x < 0.$$

Por consiguiente,

$$y' = \frac{1}{x} \text{ para } x \neq 0, \text{ es decir, } (\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$

§ 8. Nociones sobre la derivada logarítmica

Sea

$$y = \ln z, \text{ donde } z = \varphi(x).$$

En este caso, aplicando la fórmula de derivación de una función compuesta, obtendremos

$$y'_x = (\ln z)'_x = (\ln z)'_z z'_x, \quad \text{o} \quad y'_x = \frac{1}{z} z'_x.$$

De este modo, tenemos

$$(\ln z)'_x = \frac{z'}{z}.$$

La derivada del logaritmo de una función se llama *derivada logarítmica* de esta función.

EJEMPLO. Hallar la derivada de la función $y = \ln(x^2 + 4x + 5)$.
Aplicando la última fórmula, tenemos

$$y' = \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5} = \frac{2x+4}{x^2+4x+5}.$$

§ 9. Derivada de una función exponencial

Sea

$$y = a^x, \quad \text{donde } a > 0.$$

Entonces

$$\ln y = x \ln a.$$

Derivando ambos miembros con respecto a x, tendremos [1]

$$\frac{1}{y} y' = \ln a,$$

de donde

$$y' = y \ln a,$$

y, finalmente,

$$(a^x)' = a^x \ln a. \qquad (1)$$

De este modo ***la derivada de una función exponencial*** *es igual al producto de esta función por el logaritmo natural de la base.*

EJEMPLO. Hallar la derivada de la función $y = 2^x$.
Aplicando la fórmula (1), tenemos

$$(2^x)' = 2^x \ln 2.$$

En particular, tomando en la fórmula (1) $a = e$, obtendremos

$$(e^x)' = e^x,$$

[1]) La existencia de y' resulta de la derivabilidad de la función logarítmica (véanse los §§ 7 y 5).

es decir, *la derivada de la función exponencial e^x es igual a la misma función*. En este sentido e^x es una función muy simple del análisis matemático.

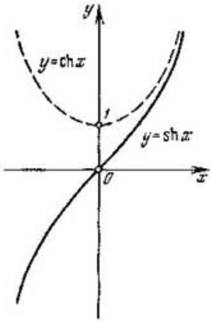

Fig. 107

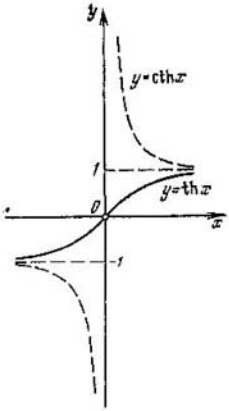

Fig. 108

En las aplicaciones se encuentran frecuentemente *funciones hiperbólicas* definidas formalmente por las igualdades

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{2}$$

(fig. 107) y

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \tag{3}$$

(fig. 108). Mediante las fórmulas (2) obtenemos la **relación fundamental**

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

En razón de las fórmulas (2) y (3) hallamos directamente las derivadas de las funciones hiperbólicas

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

§ 10. Derivada de una función potencial

Examinemos una función potencial

$$y = x^\alpha \qquad (x > 0), \tag{1}$$

donde α es un número real arbitrario.

Aplicando logaritmos a la igualdad (1), obtendremos

$$\ln y = \alpha \ln x. \tag{2}$$

De aquí

$$y = e^{\alpha \ln x}.$$

Por eso, en virtud del teorema sobre la derivada de una función compuesta (§ 4), la función potencial y es derivable.

Derivando la igualdad (2) con respecto a la variable x tendremos

$$\frac{y'}{y} = \alpha \cdot \frac{1}{x}.$$

De aquí,

$$y' = \alpha \frac{y}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

De este modo obtenemos una **regla general** de derivación de la función potencial

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} \tag{2}$$

es decir, *la derivada de la potencia de una variable independiente es igual al exponente de la potencia multiplicado por la base elevada a una potencia disminuida en una unidad.*

Si la función potencial (1) tiene sentido para $x \leqslant 0$, la fórmula (2) será también justa para $x \leqslant 0$.

§ 11. Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Las funciones inversas a las trigonométricas se llaman *funciones trigonométricas inversas o funciones circulares inversas* (Arcsen x, Arccos x, Arctg x, Arcctg x, etc.).

Los valores principales de las funciones trigonométricas inversas se obtienen como resultado de la inversión de las funciones trigonométricas derivables (con derivada distinta de cero en el dominio correspondiente) y, por consiguiente, en virtud del teorema sobre la derivada de la función inversa (§ 5) son también **derivables.** Hallemos sus derivadas.

I. Derivada del arcsen x. Sea

$$y = \operatorname{arcsen} x, \tag{1}$$

donde $-1 \leqslant x \leqslant 1$ y $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$ (véase el § 9 del cap. VI). La función inversa tiene la forma

$$x = \operatorname{sen} y, \tag{2}$$

con todo eso $x'_y = \cos y \neq 0$, si $y \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Aplicando la regla de derivación de una función inversa (§ 5), obtendremos

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}. \tag{3}$$

Como $\cos y > 0$ para $-\pi/2 < y < \pi/2$, entonces, teniendo en cuenta la igualdad (2), obtenemos

$$\cos y = +\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1-x^2} > 0, \quad -1 < x < 1.$$

Por consiguiente, en virtud de la (3) nos queda

$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

es decir

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4}$$

De la fórmula (4) se deduce que la curva (1) tiene para $x = \pm 1$ tangentes verticales.

II. Derivada del arccos x. Sea

$$y = \arccos x,$$

en este caso

$$x = \cos y,$$

además, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ y $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

La aplicación de la regla de derivación de la función inversa (§ 5) da

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\operatorname{sen} y}.$$

Puesto que $\operatorname{sen} y > 0$ para $0 < y < \pi$, entonces

$$\operatorname{sen} y = +\sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2} > 0 \quad (-1 < x < 1).$$

Por eso

$$y'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De este modo,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{5}$$

OBSERVACIÓN La fórmula (5) puede ser obtenida también por la relación

$$\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \pi/2.$$

III. Derivada del arctg x. Sea

$$y = \operatorname{arctg} x \quad (-\infty < x < +\infty, -\pi/2 < y < \pi/2)$$

y, por consiguiente, $x = \operatorname{tg} y$.

Tenemos (véase el § 3 del cap. VI)

$$y'_x \quad \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

De este modo,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

IV. Derivada del arcctg x. Sea

$$y = \operatorname{arcctg} x \quad (-\infty < x < +\infty,\ 0 < y < \pi),$$

entonces, $x = \operatorname{ctg} y$.

Tenemos (véase el § 3 del cap. VII)

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2},$$

es decir,

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

EJEMPLO.

$$\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \neq 0).$$

§ 12. Derivada arbitraria definida paramétricamente

Es, a veces, cómodo expresar la dependencia entre las variables x e y por dos ecuaciones

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{1}$$

donde t es una variable auxiliar (parámetro). Este procedimiento se utiliza muy frecuentemente en mecánica, donde el parámetro t designa generalmente el tiempo y las ecuaciones (1) son *ecuaciones paramétricas de la trayectoria* de un punto $M(x, y)$ en movimiento.

Hablando en general las ecuaciones (1) definen y como una función compuesta de x. Efectivamente, después de resolver (si es posible) la primera ecuación del sistema (1) respecto al parámetro t tendremos

$$t = \theta(x),$$

donde θ es la función inversa de la función φ. De aquí, eliminando el parámetro t de las ecuaciones (1), obtendremos

$$y = \psi(\theta(x)). \tag{2}$$

Aplicando la fórmula (2) es fácil calcular la derivada y'_x como derivada de una función compuesta.

Sin embargo, en la práctica, la eliminación del parámetro t resulta frecuentemente difícil y, a veces, imposible. Por eso daremos una regla para hallar la derivada y'_x sin eliminar el parámetro.

TEOREMA. *Si una función y del argumento x está dada en forma paramétrica* $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, donde las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son derivables y $\varphi'(t) \neq 0$, *la derivada de esta función es*

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{3}$$

DEMOSTRACION. En la sucesión de igualdades

$$y = \psi(t), \quad t = \theta(x),$$

donde $t = \theta(t)$ es la función inversa de $x = \varphi(t)$, examinaremos el parámetro t como un argumento intermedio. En este caso, según la regla de derivación de una función compuesta (§ 4), tenemos

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x. \tag{4}$$

Aplicando ahora la regla de derivación de la función inversa (§ 5), obtendremos

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}. \tag{5}$$

Por consiguiente, de las fórmulas (4) y (5) se deduce

$$y'_x = y'_t : x'_t$$

lo que se quería demostrar.

OBSERVACION. Utilizando las designaciones de Leibniz, la fórmula (3) puede obtener la forma de una igualdad evidente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}.$$

Esto subraya una vez más la comodidad de las designaciones de Leibniz.

EJEMPLO. Sea

$$x = t^2, \quad y = t^3. \tag{6}$$

Tenemos $x'_t = 2t$, $y'_t = 3t^2$. Por consiguiente,

$$y'_x = y'_t : x'_t = 3t^2 : 2t = \frac{3}{2} t$$

La validez de la última fórmula puede ser verificada directamente eliminando el parámetro t de las igualdades (6).

§ 13. Enumeración de las derivadas fundamentales

Todas las reglas y fórmulas de derivación de funciones de una variable independiente x, que acabamos de establecer, se reúnen en la tabla siguiente:

I. $c' = 0$.

II. $(u + v - w)' = u' + v' - w'$.

III. $(cu)' = cu'$.

IV. $(uv)' = uv' + vu'$.

V. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$.

VI. $y'_x = y'_z \cdot z'_x$.

VII. $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

VIII. $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x' = 1$.

IX. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

X. $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.

XI. $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$.

XII. $(\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$.

XIII. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

XIV. $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$.

XV. $(\operatorname{arcsen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

XVI. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

XVII. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

XVIII. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

§ 14. Noción sobre derivadas sucesivas

La derivada $f'(x)$ de una función $f(x)$ se llama *derivada primera* y representa cierta función nueva. Puede occurrir que esta función tenga su propia derivada. En este caso la derivada de la derivada primera se llama *derivada de segundo orden* o *derivada segunda* y se connota $f''(x)$. Así,

$$f''(x) = [f'(x)]'.$$

La derivada de la derivada segunda, si ella existe, se denomina *derivada tercera* y se connota $f'''(x)$, es decir,

$$f'''(x) = [f''(x)]',$$

etc.

Para la designación de las derivadas sucesivas se utilizan cifras romanas.

EJEMPLO Sea $y = \operatorname{sen} x$. En este caso, las derivadas sucesivas son:

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\operatorname{sen} x, \quad y''' = -\cos x, \quad y^{\text{IV}} = \operatorname{sen} x, \ldots$$

§ 15. Sentido físico de la derivada segunda

Como hemos visto, la derivada primera permite determinar la velocidad del movimiento. Mostremos que para calcular la aceleración hace falta utilizar la derivada segunda.

Sea $x = f(t)$ una ecuación que expresa la ley de movimiento de un punto M a lo largo del eje Ox. Supongamos que la velocidad del punto M sea v en el instante de tiempo t y $v + \Delta v$ en el instante $t + \Delta t$.

De este modo, Δv es la variación de la velocidad del punto durante el intervalo de tiempo Δt. La relación

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

se llama *aceleración media* del movimiento rectilíneo en el intervalo de tiempo Δt. El límite de esta relación cuando $\Delta t \to 0$, es decir,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t),$$

se llama *aceleración del punto M* en el instante dado t. Designando la aceleración con la letra j se puede escribir $j = v'(t)$. Pero $v = f'(t)$. Por consiguiente,

$$v'(t) = [f'(t)]' = f''(t).$$

Entonces tenemos

$$j = f''(t),$$

es decir, *la aceleración de un movimiento rectilíneo de un punto es igual a la derivada segunda del camino* [1]) *recorrido respecto al tiempo.*

EJERCICIOS

Hallar las derivadas de las funciones siguientes: **1.** a) $y = 3x^2 - x + 5$; b) $f(x) = 1/x^2$. ¿A qué son iguales $f'(1)$, $f'(-10)$? **2.** $y = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. **3.** $y = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x^2}$. **4.** $y = \frac{ax+b}{a+b}$. **5.** $y = x^2(2x-1)$. **6.** $y = (x+1)\sqrt{x}$. **7.** $y = x^2 \operatorname{sen} x$. **8.** $y = 1/(1+x^2)$. **9.** $y = \frac{2x}{1-x^2}$. **10.** $y = \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$. **11.** $y = \operatorname{sen}^2 x$. **12.** $y = \operatorname{sen} x^2$. **13.** $y = \cos^3 \frac{x}{2}$. **14.** $y = \cos \frac{x^3}{2}$. **15.** $y = \sqrt{1+x^2}$. **16.** $y = \ln \ln x$. **17.** $y = \ln^2 x$. **18.** $y = \ln x^2$. **19.** $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. **20.** $y = x^n + n^x$. **21.** $y = e^{-x^2}$. **22.** $y = e^{x/2}(x^2 - 4x + 8)$. **23.** $y = \arcsen \frac{x}{2}$. **24.** $x = \arccos \frac{1}{x}$. **25.** $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$. **26.** $y = (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2$. **27.** $f(x) = x + \operatorname{arcctg} x$. **28.** $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. **29.** $y = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsen x$. **30.** $y = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

Hallar las derivadas de las funciones implícitas derivables $y = y(x)$ definidas por las ecuaciones:

31. $x^2 + y^2 - xy = 1$. **32.** $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. **33.** a) $y = x + \ln y$; b) hallar y' en el punto $M(1, 1)$, si $\frac{x}{y} + 2xy = 3$.

34. Hallar las derivadas y'_x de las funciones dadas en forma paramétrica: a) $x = a\cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$; b) $x = \omega t$, $y = te^{\alpha t}$; c) $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\operatorname{sen} t$ para $t = 0$.

Hallar las derivadas segundas de las funciones siguientes:

35. a) $y = e^{-x^2}$; b) $y = x + \operatorname{sen} 2x$. **36.** $y = \ln x$. **37.** $y = x^2 e^{-x}$.

38. Hallar $f(0)$, $f'(0)$ y $f''(0)$, si $f(x) = \cos 3x$.

39. a) Escribir la ecuación de la tangente a la curva $y = x^2$ en el punto $M(2, 8)$; b) escribir la ecuación de la tangente a la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ en el punto $x = \pi$; c) escribir la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 2x$ en el punto $(8, 4)$.

---

[1]) Más exactamente: *de la abscisa del punto en movimiento.*

40. Escribir la ecuación de la tangente a la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

en el punto $M(x_1, y_1)$.

41. Escribir la ecuación de la tangente a la elipse $x = 10\cos t$, $y = 6\,\mathrm{sen}\,t$ en el punto correspondiente a $t = \pi/3$.

42. Llámase normal a una curva dada en su punto $M(x_1, y_1)$ a la perpendicular a la tangente de esta línea en el punto de tangencia M.

Escribir las ecuaciones de las normales a las curvas siguientes en los puntos dados:

a) $y = \mathrm{tg}\,x$ en el punto $O(0, 0)$;
b) $y^2 = 2x$ en el punto $M(8, 4)$;
c) $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, -4)$.

43. ¿Con qué velocidad aumentará el área de un círculo en el momento cuando su radio $R = 10$ m, si el radio del círculo crece a una velocidad de 2 m/s?

44. Una persona de $h = 175$ cm de altura se aleja con una velocidad de 1,5 m/s de una farola situada a una altura $H = 5$ m. ¿Con qué velocidad crecerá la longitud de su sombra?

45. La ley del movimiento de un punto es $x = x_0 + \alpha t + \frac{\beta}{2}t^2$. Hallar la velocidad y la aceleración del movimiento.

46. Conociendo la ecuación del movimiento de un punto $x = t - \mathrm{sen}\,t$ se pide determinar la velocidad y la aceleración de este punto.

Capítulo XI

Aplicaciones de las derivadas

§ 1. Teorema del incremento finito de una función y sus corolarios

TEOREMA DE LAGRANGE SOBRE EL INCREMENTO FINITO DE UNA FUNCION. *El incremento finito de una función derivable es igual al incremento correspondiente del argumento multiplicado por el valor de su derivada en un punto intermedio, es decir, si $f(x)$ es una función derivable sobre un intervalo $\langle a, b\rangle$ y x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ son cualesquiera valores pertenecientes a este intervalo, entonces*

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi), \tag{1}$$

donde $x_1 < \xi < x_2$.

DEMOSTRACION. Trazamos la secante AB por los puntos $A(x_1, f(x_1))$ y $B(x_2 f(x_2))$ de la gráfica de la función $y = f(x)$ (fig. 109). Deplazamos esta secante paralelamente a la posición inicial hasta que se

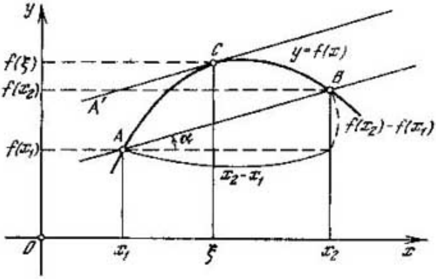

Fig. 109

convierta en la tangente $A'CB'$ a la gráfica de nuestra función en cierto punto $C(\xi, f(\xi))$[1], donde $x_1 < \xi < x_2$. De acuerdo con nuestra construcción el coeficiente angular de la secante AB es igual al de la tangente $A'CB'$, por eso

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

[1]) La existencia de esta posición se admite aquí sin demostración.

De aquí

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi)$$

lo que se quería demostrar[1]).

COROLARIO 1. *Si la derivada de una función arbitraria es igual a cero en un intervalo dado, la función es constante sobre este intervalo.*

Efectivamente, si por ejemplo,

$$f'(x) = 0 \quad \text{para } a < x < b,$$

entonces, tomando en la fórmula (1) $x_1 = x_0$, donde x_0 es cierto valor dado de (a, b), y $x_2 = x$, donde x es un valor cualquiera de este intervalo, tendremos

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(\xi) = 0.$$

De aquí

$$f(x) = f(x_0) = \text{const, si } a < x < b.$$

COROLARIO 2. *Si dos funciones tienen sus derivadas iguales en un intervalo, estas funciones difieren entre sí, en el intervalo examinado, a lo sumo en un sumando constante.*

Efectivamente, si

$$f_1'(x) = f_2'(x)$$

para $x \in \langle a, b \rangle$, sobre este intervalo tenemos

$$[f_1(x) - f_2(x)]' = f_1'(x) - f_2'(x) = 0.$$

Por consiguiente, en virtud del corolario 1 la función $f_1(x) - f_2(x)$ es constante para $a < x < b$, es decir,

$$f_1(x) - f_2(x) = C$$

para todos los valores de x pertenecientes al intervalo $\langle a, b \rangle$.

EJEMPLO. Como se sabe, para todo valor $-\infty < x < +\infty$ tenemos

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{y} \quad (-\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{arctg} x - (-\operatorname{arcctg} x) = C,$$

donde C es una constante. Considerando que en la última identidad $x = 1$, obtendremos

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = C, \quad \text{es decir } C = \frac{\pi}{2}.$$

De este modo

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

---

[1]) Se puede demostrar que el teorema de Lagrange sigue siendo válido, si la función es continua sobre un segmento $[a, b]$ y es derivable en el interior de este segmento (véase, por ejemplo, *N. Sájarnikov* «Matemáticas superiores», cap. II, § 5 (en ruso)).

TEOREMA SOBRE LAS RAÍCES DE UNA DERIVADA (teorema de Rolle). *El intervalo entre dos raíces consecutivas de una función derivable contiene siempre por lo menos una raíz de su derivada.*

DEMOSTRACIÓN Efectivamente, si $f(x)$ es una función derivable y

$$f(x_1) = f(x_2) = 0 \quad (x_1 < x_2),$$

según la fórmula (1), tenemos

$$(x_2 - x_1) f'(\xi) = 0,$$

o, puesto que $x_2 \neq x_1$

$$f'(\xi) = 0, \quad \text{donde } x_1 < \xi < x_2.$$

§ 2. Crecimiento y decrecimiento de una función de una variable

DEFINICIÓN. *Se dice que una función $f(x)$ es **creciente** en un intervalo $\langle a, b\rangle$, si a cualquier valor mayor del argumento x en este intervalo le corresponde un valor mayor de la función $f(x)$*; en otras palabras, la función $f(x)$ es creciente en el intervalo $\langle a, b\rangle$, si para cualesquiera valores de x_1 y x_2 de este intervalo (fig. 110, a), de la desigualdad

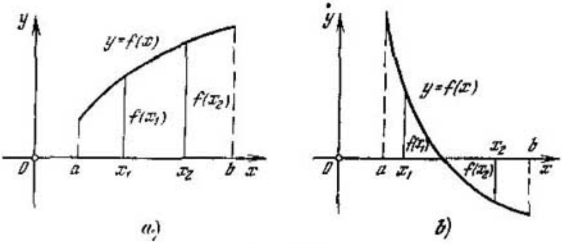

Fig. 110

$$x_2 > x_1$$

se deduce la desigualdad

$$f(x_2) > f(x_1).$$

De modo análogo se dice que $f(x)$ *es **decreciente** en un intervalo $\langle a, b\rangle$, si a un valor mayor del argumento x de este intervalo le corresponde un valor menor de la función*; en otras palabras, la función $f(x)$ es decreciente (fig. 110, b), si de la desigualdad

$$x_2 > x_1$$

se deduce la desigualdad

$$f(x_2) < f(x_1).$$

TEOREMA 1. CONDICIÓN NECESARIA DE CRECIMIENTO (DECRECIMIENTO) DE UNA FUNCIÓN.

1) *Si una función derivable es creciente en un intervalo, su derivada no es negativa en este intervalo.*

2) *Si una función derivable es decreciente en un intervalo, su derivada no es positiva en este intervalo.*

DEMOSTRACIÓN 1) Sea $f(x)$ una función derivable, creciente en un intervalo $\langle a, b\rangle$. Por definición de la derivada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

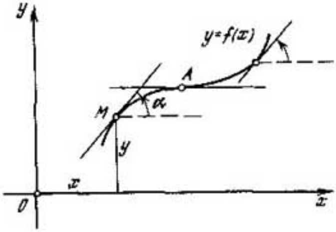

Fig. 111

Si los valores x y $x + \Delta x$ pertenecen al intervalo $\langle a, b\rangle$, entonces, en virtud del crecimiento de la función $f(x)$, el signo de su incremento $f(x+\Delta x) - f(x)$, donde $\Delta x \neq 0$ coincide con el signo de incremento Δx del argumento x. Por consiguiente, si Δx es suficientemente pequeño en valor absoluto, tenemos

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0.$$

Pasando al límite en la última desigualdad cuando $\Delta x \to 0$ y teniendo en cuenta que el límite de una función positiva no puede evidentemente ser negativo, obtendremos (§ 3 del cap. VII)

$$f'(x) \geqslant 0.$$

2) La demostración de la segunda parte del teorema es análoga a la de la primera.

OBSERVACIÓN. Geométricamente, la afirmación del teorema consiste en que las tangentes a la gráfica de una función derivable y creciente forman con la dirección positiva del eje Ox ángulos **agudos** α ($\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$) o en algunos puntos A son paralelas al eje Ox (fig. 111).

Para la gráfica de una función derivable y decreciente todas las tangentes forman ángulos **obtusos** con la dirección positiva del eje Ox o son paralelas a éste.

TEOREMA 2. CONDICIÓN SUFICIENTE DE CRECIMIENTO (DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN.

1) *Si la derivada de una función es positiva en el interior de un intervalo, esta función es creciente en este intervalo.*

2) *Si la derivada de una función es negativa en el interior de un intervalo, esta función es decreciente en este intervalo.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Sea, por ejemplo, $f(x)$ una función derivable tal, que

$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad a < x < b.$$

Para cualesquiera valores $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ pertenecientes al intervalo $\langle a, b \rangle$, según el teorema del incremento finito de una función, tenemos

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi),$$

donde ξ es un valor intermedio entre x_1 y x_2 y, por consiguiente, se encuentra en el interior del intervalo $\langle a, b \rangle$. Puesto que $x_2 - x_1 > 0$, y $f'(\xi) > 0$, de aquí obtenemos

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad \text{ó} \quad f(x_2) > f(x_1).$$

La función $f(x)$ es creciente en el intervalo $\langle a, b \rangle$.

2) La demostración de la segunda parte del teorema es completamente análoga a la de la primera.

La función creciente (o decreciente) se llama *monótona*. Los intervalos, en los cuales la función dada crece o decrece, se denominan *intervalos de monotonía* de esta función.

EJEMPLO. Estudiar el crecimiento y el decrecimiento de la función

$$f(x) = x^3 - 3x + 2.$$

Hallamos su derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1).$$

La derivada se anula en los valores $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$. Estos valores dividen el eje Ox en tres intervalos:

$$(-\infty, -1], [-1, 1], [1, +\infty),$$

tales que en el interior de cada uno de ellos la derivada $f'(x)$ no cambia de signo. Es evidente que la derivada $f'(x)$ es positiva en el interior de los intervalos primero y tercero y negativa en el segundo intervalo. De esto uno puede cerciorarse fácilmente si toma puntos pertenecientes a los intervalos correspondientes. Por consiguiente, la función $f(x)$ crece en el primer intervalo, decrece en el segundo y vuelve a crecer en el tercero (fig. 112).

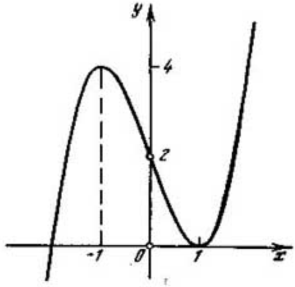

Fig. 112

§ 3. Noción sobre la regla de L'Hospital

Examinemos la relación

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

donde las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ están definidas y son derivables en el entorno U_a del punto a, con la probable exclusión del propio punto a. Puede ocurrir que cuando $x \to a$ ambas funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ tiendan a 0 ó a ∞, es decir, estas funciones son simultáneamente **infinitesimales** o **infinitas** cuando $x \to a$. Entonces, se dice que en el punto a la función $f(x)$ posee una indeterminación del tipo

$$\frac{0}{0} \text{ ó } \frac{\infty}{\infty}. \tag{1}$$

En este caso, utilizando las derivadas $\varphi'(x)$ y $\psi'(x)$ se puede deducir una regla simple para hallar el límite de la función $f(x)$ cuando $x \to a$, es decir, indicar un procedimiento para **salvar la indeterminación** del tipo (1). Esta regla está generalmente ligada al hombre del matemático francés L'Hospital quien la publicó por primera vez.

TEOREMA. *El límite de la relación de dos funciones infinitesimales o infinitas es igual al límite de la relación de sus derivadas (finita o infinita), si esta última existe (en el sentido indicado).*

DEMOSTRACIÓN. Efectuaremos la demostración sólo para la indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$ y supondremos, para simplificar, que las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son continuas en el punto a junto con sus derivadas $\varphi'(x)$ y $\psi'(x)$, y que $\psi'(x) \neq 0$. La demostración para el caso $\frac{\infty}{\infty}$ es mucho más complicada (véase, por ejemplo, «Curso de análisis matemático», t. I de *S. Nikolski* (en ruso)).

Entonces, sea

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a) = 0 \tag{2}$$

y

$$\lim_{x \to a} \psi(x) = \psi(a) = 0. \tag{2'}$$

La diferencia $\varphi(x) - \varphi(a)$ puede ser considerada como el incremento de la función $\varphi(x)$ en el punto a, que corresponde al incremento del argumento $\Delta x = x - a$. Por eso

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \varphi'(a), \tag{3}$$

y de modo análogo,

$$\lim_{x \to a} \frac{\psi(x) - \psi(a)}{x - a} = \psi'(a) \neq 0. \tag{3'}$$

Teniendo en cuenta las fórmulas (2) y (2') para $x \neq a$, obtendremos

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} = \frac{\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}}{\frac{\psi(x) - \psi(a)}{x - a}}.$$

De aquí, pasando al límite cuando $x \to a$ y utilizando las fórmulas (3) y (3′), tendremos

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}. \tag{4}$$

Pero hemos supuesto que las derivadas $\varphi'(x)$ y $\psi'(x)$ son continuas cuando $x \to a$ y que $\psi'(a) \neq 0$, por eso,

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \varphi'(x)}{\lim\limits_{x \to a} \psi'(x)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}. \tag{5}$$

Comparando las fórmulas (4) y (5), obtendremos la *regla de L'Hospital*

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}. \tag{6}$$

OBSERVACIÓN Prestemos atención al hecho de que en el segundo miembro de la fórmula (6) se toma la **relación de las derivadas** y no la derivada del cociente.

EJEMPLO 1. Hallar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 1}{\operatorname{sen} x}$.

Aquí, cuando $x = 0$ el numerador y el denominador de la fracción son iguales a cero, es decir, cuando $x \to 0$ tenemos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hospital (6), obtenemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{2^x \ln 2}{\cos x} = \frac{\ln 2}{1} = \ln 2.$$

EJEMPLO 2. Hallar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$.

Cuando $x \to +\infty$ tenemos una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando dos veces la regla de L'Hospital, obtenemos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 6.$$

De este modo, cuando $x \to +\infty$ la función exponencial crece con mayor rapidez que la función de potencia x^2.

Las indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ antes mencionadas, no son únicas. Por ejemplo, si

$$f(x) = \varphi(x)\,\psi(x),$$

y si $\varphi(x) \to 0$ y $\psi(x) \to \infty$ cuando $x \to a$, la función $f(x)$ cuando $x \to a$ tiene una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$. Otro ejemplo nos lo da la función

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

donde $\varphi(x) \to +\infty$ y $\psi(x) \to +\infty$ cuando $x \to a$. Aquí cuando $x \to a$ se obtiene una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Son también posibles otros tipos de indeterminaciones. Para resolver estas indeterminaciones, se trata de reducirlas, con ayuda de transformaciones idénticas, a una de las dos tipos principales $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$. Estas últimas se calculan generalmente aplicando la regla de L'Hospital.

EJEMPLO 3. Hallar $\lim\limits_{x \to +0} x \ln x$.

Aquí tenemos una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$. Escribiendo esta expresión en forma

$$\lim_{x \to +0} x \ln x = \lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}},$$

obtenemos una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. De aquí, aplicando la regla de L'Hospital, hallamos

$$\lim_{x \to +0} x \ln x = \lim_{x \to +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +0} (-x) = 0.$$

EJEMPLO 4. Hallar $\lim\limits_{x \to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$.

Esta expresión es una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Aplicando la fórmula $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, tendremos

$$\lim_{x \to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}.$$

La indeterminación así obtenida es del tipo $\frac{0}{0}$, por eso utilizamos la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - x \operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} =$$

$$= -\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = -\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x} = -\frac{0}{1+1} = 0.$$

El último resultado ha sido obtenido con ayuda del conocido límite $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (véase el § 11 del cap. VII). Aquí, durante la determinación del límite ha sido razonable, como en muchos otros casos, combinar la regla de L'Hospital con procedimientos elementales.

Para la función

$$f(x) = [\varphi(x)]^{\psi(x)}$$

en los casos:

$$\varphi(x) \to 0 \quad \text{y} \quad \psi(x) \to 0 \text{ cuando } x \to a$$
$$\varphi(x) \to \infty \quad \text{y} \quad \psi(x) \to 0 \text{ cuando } x \to a$$
$$\varphi(x) \to 1 \quad \text{y} \quad \psi(x) \to \infty \text{ cuando } x \to a$$

obtenemos, respectivamente, indeterminaciones de los tipos 0^0, ∞^0, 1^∞. Aquí es preferible aplicar logaritmos a la función $f(x)$.

EJEMPLO 5. Hallar

$$A = \lim_{x \to \pi/2} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}. \tag{7}$$

La igualdad (7) es una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicando el logaritmo de (7) y utilizando la continuidad de la función logarítmica, hallamos

$$\ln A = \ln [\lim_{x \to \pi/2} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}] =$$
$$= \lim_{x \to \pi/2} [\ln (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}] = \lim_{x \to \pi/2} (\operatorname{tg} x \cdot \ln \operatorname{sen} x) = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\operatorname{ctg} x}.$$

Aplicando la regla de L'Hospital a la indeterminación obtenida del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, tendremos

$$\ln A = \lim_{x \to \pi/2} \left(\frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} \right) = \lim_{x \to \pi/2} (-\operatorname{sen} x \cos x) = 0;$$

de donde $A = 1$.

§ 4. Fórmula de Taylor para un polinomio

Sea dado el polinomio

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \tag{1}$$

se requiere desarrollarlo en las potencias del binomio $x - x_0$, donde x_0 es cierto número. Este problema puede ser resuelto elementalmente, utilizando la identidad $x \equiv x_0 + (x - x_0)$. Sin embargo, se puede encontrar un procedimiento más simple. Sea

$$P(x) = A_0 + A_1 (x - x_0) + A_2 (x - x_0)^2 + \ldots A_n (x - x_0)^n \tag{2}$$

el desarrollo buscado, cuyos coeficientes $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ deben ser hallados. Tomando $x = x_0$ en la identidad (2), obtendremos $P(x_0) = A_0 + 0$, de donde

$$A_0 = P(x_0). \tag{3}$$

Diferenciando la identidad (2), tendremos

$$P'(x) = A_1 + 2A_2 (x - x_0) + \ldots + nA_n (x - x_0)^{(n-1)}.$$

y haciendo $x = x_0$, nos queda

$$A_1 = P' (x_0).$$

Después de la segunda diferenciación hallamos

$$P'' (x) = 2! A_2 + \ldots + n (n-1) A_n (x - x_0)^{(n-2)}$$

y para $x = x_0$, tenemos $P'' (x_0) = 2! A_2$, es decir,

$$A_2 = \frac{P'' (x_0)}{2!}. \tag{4}$$

Para determinar los restantes coeficientes del desarrollo (2) se puede utilizar el mismo procedimiento. Es evidente que tiene lugar la fórmula general

$$A_k = \frac{P^k (x_0)}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

donde, por definición, se tiene que $P^{(0)} (x) = P (x)$ y $0! = 1$. La fórmula (5) puede ser rigurosamente demostrada mediante el procedimiento de inducción matemática.

Introduciendo los coeficientes (5) en el desarrollo (2) se obtiene la *fórmula de Taylor* para un polinomio

$$P (x) = P (x_0) + P' (x_0) (x - x_0) + \frac{P'' (x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{P^{(n)} (x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

o, más brevemente,

$$P (x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)} (x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \tag{6}$$

Notemos que es fácil convencerse de que los coeficientes dominantes de los desarrollos (1) y (2) coinciden, es decir, $A_n = a_n$. Por eso es justa la igualdad

$$\frac{1}{n!} P^{(n)} (x_0) = a_n.$$

Si se toma $x_0 = 0$, el segundo miembro de la igualdad (6) será idénticamente igual al segundo miembro del polinomio (1). Por eso son justas las igualdades

$$\frac{P^{(k)} (0)}{k!} = a_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

EJEMPLO. Desarrollar el polinomio $P (x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3$ según las potencias del binomio $x + 1$.

Aquí $x_0 = -1$. Tenemos

$$P' (x) = -2 + 6x - 12x^2, \quad P'' (x) = 6 - 24x, \quad P''' (x) = -24$$

y

$$P (-1) = 10, \quad P' (-1) = -20, \quad P'' (-1) = 30, \quad P''' (-1) = -24.$$

De este modo, $P (x) = 10 - 20 (x + 1) + 15 (x + 1)^2 - 4 (x + 1)^3$.

§ 5. Binomio de Newton

Examinemos la función

$$f(x) = (a + x)^n, \tag{1}$$

donde n es un número natural. Tomando $x_0 = 0$ y utilizando la fórmula de Taylor (6) del § 4, obtendremos

$$(a + x)^n = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n, \tag{2}$$

donde

$$A_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Ya que de la (1) obtenemos

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots[n-(k-1)](a+x)^{n-k},$$

entonces $f(0) = a^n$ y

$$f^{(k)}(0) = n(n-1)\ldots[n-(k-1)]\,a^{n-k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

De este modo, $A_0 = a^n$ y

$$A_k = \frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}\,a^{n-k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Los números A_k se llaman *coeficientes binominales* y se designan convencionalmente del modo siguiente:

$$A_k = C_n^k, \tag{4}$$

dondo C_n^k se llama número de combinaciones de n elementos tomados de k (el sentido combinatorio de los números C_n^k será explicado más adelante, véase el § 10 del cap. XXV).

Y bien, partiendo de la igualdad (2), obtenemos la *fórmula de binomio de Newton*

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \ldots + x^n. \tag{5}$$

En particular, para $a = 1$ nos queda

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^n. \tag{5'}$$

§ 6. Fórmula de Taylor para una función

Supongamos que la función $f(x)$ tiene una derivada continua $f^{(N)}(x)$[1] de orden N en un intervalo (a, b) y $x_0 \in (a, b)$. Utilizando los resultados obtenidos en el párrafo anterior construimos el poli-

[1] De aquí, según el sentido de la operación de derivación, obtenemos que en el intervalo (a, b) existen las derivadas continuas $f(x) = f^{(0)}(x), f'(x), \ldots, f^{(N-1)}(x)$.

nomio de Taylor

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{1}$$

de potencia n, donde $n\leqslant N$.

El polinomio $P_n(x)$ puede ser considerado como una **aproximación** de la función dada. Designando con $R_n(x)$ el error correspondiente (llamando *término residual*), tendremos

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x). \tag{2}$$

Mostremos que cuando $x\to x_0$ el término residual $R_n(x)$ es un infinitésimo **de un orden superior** a n (*teorema de Peano*). Efectivamente, estudiemos el límite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right]}{(x-x_0)^n}. \tag{3}$$

Es evidente que aquí tenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando sucesivamente n veces la regla de L'Hospital (§ 3) y teniendo en cuenta la continuidad de la derivada $f^{(n)}(x)$, hallamos

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\left[f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}\right]}{n(x-x_0)^{n-1}}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-\left[f''(x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}\right]}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}=\ \ldots$$

$$\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)-[f^{(n)}(x_0)]}{n(n-1)\ldots1}=0.$$

Por consiguiente,

$$R_n(x)=o[(x-x_0)^n]. \tag{4}$$

De este modo obtenemos la *fórmula local de Taylor*:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o[(x-x_0)^n]\ ^{1)}. \tag{5}$$

---

[1]) En el caso general la fórmula (5) posee interés práctico, si x pertenece a un entorno suficientemente pequeño U_{x_0} del punto x_0.

En un caso particular, cuando $a < 0 < b$ y $x_0 = 0$, tendremos la llamada *fórmula local de Maclaurin*:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n). \tag{6}$$

EJEMPLO. Aproximar la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en un entorno del punto $x_0 = 0$ con un polinomio de Taylor $P_3(x)$ de tercer grado.

Tenemos $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, $f'''(x) = -\cos x$. De aquí $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$. Aplicando la fórmula (6), obtenemos

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3). \tag{7}$$

La fórmula (7) se utiliza frecuentemente para calcular senos de ángulos pequeños de x; aquí hay que tener en cuenta que x está expresado en radianes.

Considerando que $x - x_0 = h$, $x = x_0 + h$ y teniendo en cuenta que

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = \Delta f(x_0),$$

la fórmula (5) puede ser escrita así:

$$\Delta f(x_0) = hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o(h^n). \tag{8}$$

§ 7. Extremo de una función de una variable

DEFINICIÓN. *Se dice que una función $f(x)$ tiene un* ***máximo*** *$f(x_1)$ para un valor x_1 del argumento x, si en un entorno del punto x_1* (posiblemente muy pequeño) *se cumple la desigualdad* (fig. 113)

$$f(x_1) > f(x) \quad (x \neq x_1).$$

Análogamente, se dice que una función $f(x)$ tiene un ***mínimo*** *$f(x_2)$ para un valor x_2 del argumento x, si en un entorno del punto x_2 se cumple la desigualdad* (fig. 113)

$$f(x_2) < f(x) \quad (x \neq x_2).$$

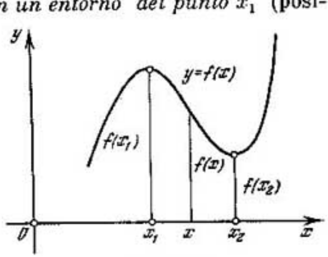

Fig. 113

El máximo o el mínimo de una función se llama *extremo de la función*, mientas que los valores del argumento para los cuales la función pasa por sus extremos se llaman *puntos de extremo de la función* (respectivamente: *puntos de máximo* o *puntos de mínimo de la función*).

De la definición se deduce que el extremo de una función posee en general, un **carácter local,** es decir, expresa el valor mayor o menor de la función respecto a sus **valores vecinos.** Por eso, la presencia de un extremo de una función para un cierto valor del argumento no depende, en absoluto, del comportamiento de la función lejos de este valor. Desde este punto de vista, está claro que un mínimo de una función puede ser mayor que un máximo, lo mismo que una hondonada en las montañas puede encontrarse a mayor altura sobre el nivel del mar que una pequeña cima.

Sea $f(x)$ una función definida sobre un segmento $[a, b]$ y con un extremo en el punto $x_0 \in [a, b]$. Si x_0 es un punto interior del segmento, la diferencia

$$f(x) - f(x_0) \qquad (x \neq x_0)$$

conserva su signo en cierto **entorno bilateral** $x_0 - h < x < x_0 + h$ $(x \neq x_0)$ del punto x_0. Semejante extremo se llama *bilateral.* Por ejemplo, la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ tiene un máximo bilateral para $x_0 = 0$ porque $f(x) < f(x_0) = 1$ para $-1 < x < 1$, $x \neq 0$. Si x_0 es un punto final del segmento $[a, b]$, por ejemplo, $x_0 = a$, entonces $f(x) - f(x_0)$ conserva su signo solamente en cierto entorno **unilateral** $a = x_0 < x < x_0 + h$ del punto x_0. Semejante extremo se llama *unilateral.* Por ejemplo, la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ tiene un mínimo unilateral para $x_0 = -1$ y para $x_0 = 1$.

En adelante con el vocablo extremo designaremos el extremo bilateral, es decir, supondremos que para un punto del extremeo x_0 de una función dada $f(x)$, existe cierto entorno $0 < |x - x_0| < h$ del punto x_0, en el cual la diferencia $f(x) - f(x_0)$ conserva el signo.

1. Condición necesaria para la existencia de un extremo en una función.

TEOREMA. *En el punto de extremo (bilateral) de una función diferenciable su derivada es igual a cero.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos, para mayor claridad, que x_0 es un punto de mínimo de la función $f(x)$. Por consiguiente,

$$f(x_0 + \Delta x_0) > f(x_0),$$

si $\Delta x_0 \neq 0$ es suficientemente pequeño en valor absoluto. De aquí,

$$\frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} > 0, \quad \text{si } \Delta x_0 > 0$$

y

$$\frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} < 0, \quad \text{si } \Delta x_0 < 0.$$

Pasando en estas desigualdades al límite cuando $\Delta x_0 \to 0$ para la derivada en el punto x_0 igual a

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0},$$

obtendremos, respectivamente,

$$f'(x_0) \geqslant 0, \text{ si } \Delta x_0 > 0, \quad \text{y } f'(x_0) \leqslant 0, \text{ si } \Delta x_0 < 0.$$

Como el valor de la derivada $f'(x_0)$ no debe depender del modo con el cual Δx_0 tiende a cero, resulta que

$$f'(x_0) = 0. \tag{1}$$

El teorema queda demostrado.

Interpretación geométrica. La condición (1) significa geométricamente que en el punto de extremo de una función diferenciable $y = f(x)$ la tangente a su gráfica es paralela al eje Ox (fig. 114, *a*).

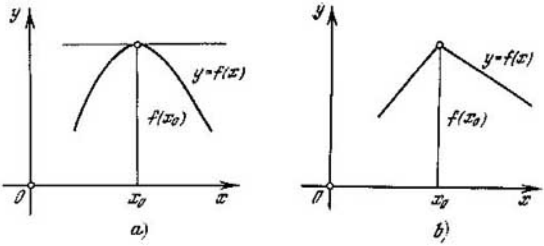

Fig. 114

COROLARIO. *Una función continua puede tener un extre mo solamente en los puntos donde la derivada de la función es igual a cero o no existe.*

Efectivamente, si la función $f(x)$ admite en el punto de extremo x_0 una derivada $f'(x_0)$, esta derivada será igual a cero, según el teorema demostrado: $f'(x_0) = 0$.

El hecho de que en el punto de extremo de una función continua puede no existir derivada, lo muestra el ejemplo de una función cuya gráfica tiene forma de una «línea quebrada» (fig. 114, *b*).

Llámanse **valores críticos** del argumento x a los valores en los cuales la derivada $f'(x)$ de una función dada $f(x)$ es igual a cero o no existe (por ejemplo, deviene al infinito).

2. Condiciones suficientes para la existencia de un extremo de una función.

El hecho de que $f'(x_0) = 0$ no significa todavía que la función $f(x)$ tiene un extremo en el punto $x = x_0$.

Efectivamente, sea $f(x) = x^3$. En este caso $f'(x) = 3x^2$ y, por consiguiente, $f'(0) = 0$. Sin embargo, $f(0)$ no es un extremo de la función dada porque la diferencia $f(x) - f(0)$ cambia de signo cuando cambia el signo del argumento x (véase la fig. 57).

Entonces, la función $f(x)$ no pasa por un extremo para todo valor crítico del argumento x. Por eso, junto con la condición necesaria daremos las condiciones suficientes para la existencia de un extremo de una función.

TEOREMA 1 (primera regla). *Si una función derivable $f(x)$ es tal, que para un valor x_0 de su argumento x la derivada $f'(x)$ es igual a cero y cambia su signo al pasar por este valor*[1], *el número $f(x_0)$ es un extremo de la función $f(x)$* y

1) *la función $f(x)$ tiene un máximo en $x = x_0$, si su derivada $f'(x)$ es primero positiva y después, negativa;*

2) *la función $f(x)$ tiene un mínimo en $x = x_0$, si su derivada $f'(x)$ es primero negativa y después positiva.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Sea $f'(x_0) = 0$, al mismo tiempo

$$f'(x) > 0 \quad \text{para } x_0 - \varepsilon < x < x_0$$

y

$$f'(x) < 0 \quad \text{para } x_0 < x < x_0 + \varepsilon,$$

donde ε es un número positivo suficientemente pequeño.

De aquí, en virtud del teorema 2 del § 2 se deduce que la función $f(x)$ crece en el segmento $[x_0 - \varepsilon, x_0]$ y decrece en el segmento $[x_0, x_0 + \varepsilon]$. Por consiguiente, en un entorno inmediato de x tenemos

$$f(x_0) > f(x), \quad \text{si } x < x_0,$$

y también

$$f(x_0) > f(x), \quad \text{si } x > x_0.$$

En otras parablas cuando $x = x_0$ la función $f(x)$ tiene un **máximo.**

2) En forma análoga se demuestra la segunda parte del teorema.

OBSERVACIÓN Se puede demostrar que el teorema permanece válido, si en el punto crítico x_0 la derivada $f'(x_0)$ no existe, y la función $f(x)$ es continua en $x = x_0$.

TEOREMA 1'. *Si la derivada $f'(x)$ de una función derivable $f(x)$ se anula en $x = x_0$, pero no cambia el signo al pasar por este valor, entonces la función $f(x)$ no tiene extremo para $x = x_0$.*

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, si, por ejemplo, $f'(x_0) = 0$ y

$$f'(x) > 0 \text{ para } x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon, \quad x \neq x_0,$$

---

[1]) Decimos que una función $F(x)$ cambia de signo pasando por un valor x_0, si existe un ε positivo suficientemente pequeño y tal, que

$$F(x) < 0 \quad \text{para} \quad x_0 - \varepsilon < x < x_0,$$
$$F(x) > 0 \quad \text{para} \quad x_0 < x < x_0 + \varepsilon,$$

o

$$F(x) > 0 \quad \text{para} \quad x_0 - \varepsilon < x < x_0,$$
$$F(x) < 0 \quad \text{para} \quad x_0 < x < x_0 + \varepsilon.$$

la función $f(x)$ crece tanto en el segmento $[x_0 - \varepsilon, x_0]$, como en el segmento $[x_0, x_0 + \varepsilon]$. Por consiguiente, la función no tiene máximo ni mínimo en $x = x_0$.

Utilizando estos teoremas para establecer si una función derivable $f(x)$ pasa por un extremo, se hallan primeramente los valores críticos del agrumento de esta función, es decir, los valores de x_0 para los cuales

$$f'(x_0) = 0$$

y después, eligiendo para cada uno de estos valores x_0 un intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ tan pequeño que no contenga otros valores críticos (si esto es posible), se verifica la naturaleza de este valor por la tabla siguiente:

$f'(x_0 - h)$	$f'(x_0 + h)$	Conclusión
+	+	No hay extremo
+	−	Máximo
−	+	Mínimo
−	−	No hay extremo

donde la variable h recorre el intervalo

$$0 < h < \varepsilon.$$

EJEMPLO. Inverstigar si la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ tiene puntos extremos.

SOLUCIÓN. Hallamos la derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3).$$

Igualando a cero la derivada y resolviendo la ecuación cuadrática correspondiente, obtenemos las raíces de la derivada: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. De aquí

$$f'(x) = 3(x - 1)(x - 3).$$

Inverstigamos cómo varía el signo de la derivada $f'(x)$ en el entorno del valor $x = 1$.

Para todo número h positivo y suficientemente pequeño tenemos

x	$f'(x)$
$1 - h$	+
$1 + h$	−

Por consiguiente, la función $f(x)$ tiene en $x = 1$ un máximo igual a $f(1) = 9$. De modo análogo obtenemos para $x = 3$

x	$f'(x)$
$3 - h$	−
$3 + h$	+

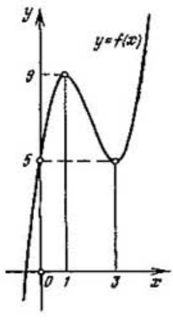

Fig. 115

Por eso la función $f(x)$ tiene en $x = 3$ un mínimo igual a $f(3) = 5$.

La gráfica de la función $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ está representada en la fig. 115.

TEOREMA 2 (segunda regla). *Si para una función derivable $f(x)$ en un punto x_0 su derivada primera $f'(x)$ es igual a cero, su derivada segunda $f''(x)$ existe y es distinta de cero, es decir, si*

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) \neq 0,$$

la función $f(x)$ tiene en este punto un extremo, a saber: 1) si $f''(x_0) > 0$, $f(x_0)$ es un ***mínimo de la función*** *$f(x)$, y 2) si $f''(x_0) < 0$, $f(x_0)$ es un* ***máximo de la función*** *$f(x)$.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Supongamos primero que $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$. Sea $x = x_0 + \Delta x_0$ un punto vecino de x_0. Puesto que la derivada segunda $f''(x)$ es la derivada de la derivada primera $f'(x)$, tenemos

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x_0) - f'(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}$$

(aquí utilizamos el hecho de que $f'(x_0) = 0$). De este modo, la magnitud variable $\frac{f'(x)}{x - x_0}$ tiende al límite $f''(x_0) \neq 0$, lo que significa que a partir de un cierto instante esta magnitud tiene el signo de su límite (lema del § 6 del cap. VII), es decir, en nuestro caso el signo «+». Por eso

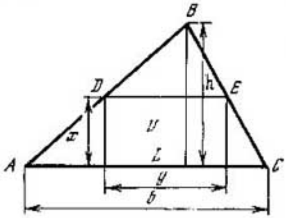

Fig. 116

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0 \text{ para } 0 < |x - x_0| < \varepsilon,$$

donde ε es un número positivo suficientemente pequeño. De aquí obtenemos que el numerador y el denominador de la fracción $\frac{f'(x)}{x - x_0}$ tienen signos iguales y entonces

$$f'(x) < 0 \quad \text{para } x_0 - \varepsilon < x < x_0$$

y

$$f'(x) > 0 \quad \text{para } x_0 < x < x_0 + \varepsilon.$$

Vemos que la derivada $f'(x)$ negativa antes del punto x_0 se veulve positiva después de pasar por este punto. Según el teorema 1, el número $f(x_0)$ es un **mínimo de la función** $f(x)$.

2) En forma análoga se demuestra que si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, el número $f(x_0)$ es un ***máximo de la funcion*** $f(x)$.

La teoría sobre el extremo de funciones tiene numerosas aplicaciones prácticas.

PROBLEMA. Sea dado un triángulo ABC cuya base es $AC = b$ y la altura es $BL = h$ (fig. 116). Hallar el rectángulo del área máxima que puede ser inscrito en este triángulo.

Designamos la altura KL del rectángulo buscado por x y la base DE por y (fig. 116). En este caso su área será

$$U = xy.$$

Las variables x y y no son independientes, ellas están ligadas por una cierta relación. Efectivamente, de la semejanza de los triángulos DBE y ABC, y teniendo en cuenta que sus alturas BK y BL son proporcionales a las bases DE y AC, tenemos

$$\frac{BK}{BL} = \frac{DE}{AC},$$

o, puesto que $BK = h - x$, $DE = y$, $BL = h$, $AC = b$, resulta

$$\frac{h-x}{h} = \frac{y}{b},$$

de donde

$$y = \frac{b}{h}(h - x).$$

Excluyendo y de la expresión de U, hallamos

$$U = \frac{b}{h}(h - x)\,x = \frac{b}{h}(hx - x^2). \tag{2}$$

Buscamos el máximo de esta función. Diferenciando, hallamos

$$U' = \frac{b}{h}(h - 2x)$$

Igualando la derivada U' a cero, hallamos

$$h - 2x = 0 \quad ó \quad x = \frac{h}{2}.$$

Es fácil ver que este valor de x es realmente el máximo de la función U. Efectivamente, al calcular la derivada segunda tenemos

$$U'' = -\frac{2b}{h} < 0.$$

Por consiguiente, para $x = \frac{h}{2}$ el área U tiene un máximo y de la fórmula (2) obtenemos

$$U_{\text{máx}} = \frac{bh}{4}.$$

De este modo, el área del mayor rectángulo inscrito en un triángulo es igual a la mitad del área de este triángulo.

§ 8. Concavidad y convexidad de la gráfica de una función. Puntos de inflexión

DEFINICIÓN *La gráfica de una función derivable $y = f(x)$ se llama* ***cóncava hacia arriba***[1]) *(o* ***convexa hacia abajo***[2])) *en el intervalo $\langle a, b\rangle$, si la parte correspondiente de la gráfica*

$$y = f(x) \quad (x \in \langle a, b\rangle) \tag{1}$$

está situada por encima de la tangente que pasa por cualquier punto suyo $M(x, f(x))$ (fig. 117, a).

De modo análogo, la gráfica de una función derivable $y = f(x)$ se llama ***convexa hacia arriba*** *(o* ***cóncava hacia abajo****) en el intervalo*

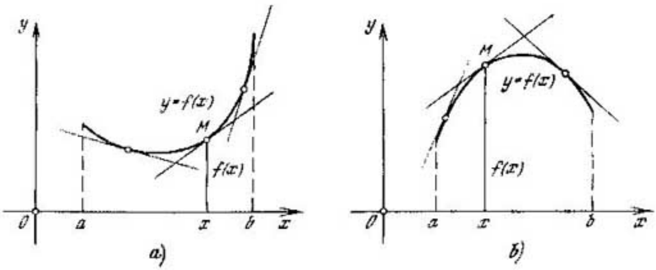

Fig. 117

$\langle a, b\rangle$, si la parte correspondiente de la curva (1) está situada por debajo de la tangente que pasa por cualquier punto suyo $M(x, f(x))$ (fig. 117, b).

Condición suficiente para que la gráfica de una función sea cóncava (convexa).

TEOREMA 1). *Si para una función dos veces derivable $y = f(x)$ su derivada segunda $f''(x)$ es positiva en el interior del intervalo $\langle a, b\rangle$, la gráfica de esta función es cóncava hacia arriba en este intervalo.*

2) *Si la derivada segunda $f''(x)$ es negativa en el interior del intervalo $\langle a, b\rangle$, la gráfica de la función $y = f(x)$ es cóncava hacia abajo en este intervalo.*

DEMOSTRACIÓN 1) Sea $f''(x) > 0$ para $a < x < b$, y sea x_0 un punto cualquiera perteneciente al intervalo $\langle a, b\rangle$. Comparemos en el punto x la ordenada y de la curva $y = f(x)$ con la ordenada $\overline{y}$ de su tangente M_0N trazada en el punto $M_0(x_0, f(x_0))$ (fig. 118).

---

[1]) Es decir, en la dirección positiva del eje Oy.
[2]) Es decir, en la dirección negativa del eje Oy.

Puesto que el coeficiente angular de la tangente M_0N es igual a $f'(x_0)$, entonces (véase el § 3 del cap. III)

$$\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

De aquí,

$$\delta = y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0). \tag{2}$$

Utilizando el teorema de Lagrange (§ 1), tendremos

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(\xi),$$

donde $\xi \in (x_0, x)$.

Por eso de la fórmula (2) obtenemos

$$\delta = (x - x_0)[f'(\xi) - f'(x_0)]. \tag{3}$$

Como $f''(x) = [f'(x)]' > 0$, la derivada $f'(x)$ es una función creciente.

Sea $x < x_0$; entonces es evidente que $\xi < x_0$ y, por consiguiente, en virtud del crecimiento de $f'(x)$, tenemos $f'(\xi) < f'(x_0)$. De la fórmula (3) se deduce que $\delta > 0$.

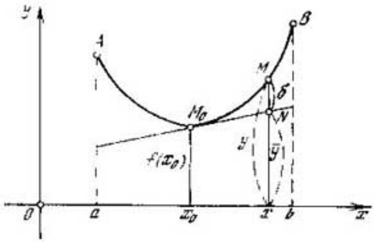

Fig. 118

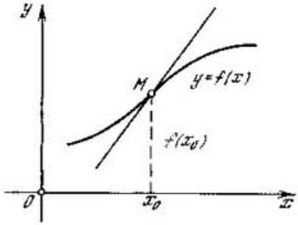

Fig. 119

Si ahora $x > x_0$, entonces $\xi > x_0$ y por eso $f'(\xi) > f'(x_0)$. De la fórmula (3) nuevamente deducimos que $\delta > 0$.

De este modo, para $x \neq x_0$ tenemos

$$\delta = y - \bar{y} > 0, \quad \text{es decir, } y > \bar{y}. \tag{4}$$

De aquí se deduce que cuando $a < x < b$, la curva $y = f(x)$ está situada por encima de sus tangentes y en este caso la gráfica de la función $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $\langle a, b \rangle$.

2) Mediante un procedimiento análogo se demuestra que si $f''(x) < 0$ para $a < x < b$, la gráfica de la función $y = f(x)$ es cóncava **hacia abajo** sobre el intervalo $\langle a, b \rangle$.

DEFINICIÓN. *Llámase* ***punto de inflexión*** *de la gráfica de una función derivable $y = f(x)$, al punto donde una curva cóncava se vuelve convexa, o viceversa* (*fig. 119*).

TEOREMA *Si la derivada segunda $f''(x)$ de una función $y = f(x)$ se anula en el punto x_0 y, al pasar por este punto cambia su signo, el punto $M(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión de la gráfica de la función.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la derivada segunda $f''(x)$ se anula en el punto M y cambia su signo; por ejemplo, se vuelve negativa. En este caso a la izquierda del punto M la derivada segunda de la función $f(x)$ es positiva y, por lo tanto, para $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ la concavidad de la gráfica de la función está dirigida hacia arriba; a la derecha del punto M la derivada segunda $f''(x)$ es negativa y por eso para $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ la gráfica de la función $y = f(x)$ es convexa hacia arriba. De este modo en el punto M la curva $y = f(x)$ cambia la concavidad por la convexidad y por eso el punto M es un punto de inflexión de esta curva.

OBSERVACIÓN. La derivada segunda $f''(x_0)$ de la función $y = f(x)$ puede también no existir en el punto de inflexión x_0; por ejemplo, haciéndose infinita.

EJEMPLO. Sea dada la *curva de Gauss* $y = e^{-x^2}$.

Tenemos

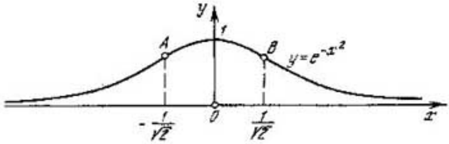

Fig. 120

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

y

$$y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2} = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}.$$

La derivada segunda y'' se anula, si $x^2 - \frac{1}{2} = 0$, de donde

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

El cambio de signo de la derivada segunda se caracteriza por la tabla siguiente:

x	$-\infty < x < -1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2} < x < +\infty$
y''	+	−	+

Por consiguiente, los puntos $A\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ y $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ son los puntos de inflexión de la curva dada (fig. 120).

§ 9. Resolución aproximada de ecuaciones

Examinemos la ecuación

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

donde la función $f(x)$ está definida y es continua en el intervalo $\langle a, b\rangle$. El valor $\xi \in \langle a, b\rangle$ que satisface la ecuación (1), es decir tal, que $f(\xi) = 0$, se llama *raíz* de esta ecuación (o *cero* de la función $f(x)$).

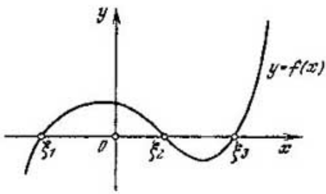

Fig. 121

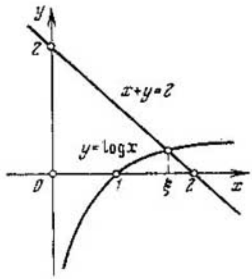

Fig. 122

Geométricamente las raíces de la ecuación (1) son abscisas de los puntos de intersección de la gráfica de la función $y = f(x)$ con el eje Ox (fig. 121).

Para la resolución geométrica de la ecuación (1) es a veces cómodo reemplazarla por una ecuación equivalente

$$\varphi(x) = \psi(x). \tag{2}$$

Las raíces de la ecuación (1) se determinan en este caso como las **abscisas de los puntos de intersección** de las curvas $y = \varphi(x)$ e $y = \psi(x)$.

EJEMPLO 1. Resolver gráficamente la ecuación

$$x + \log x = 2. \tag{3}$$

Es evidente que tenemos $\log x = 2 - x$. De aquí, la raíz de la ecuación (3) es la abscisa del punto de intersección de la curva logarítmica $y = \log x$ y la recta $y = 2 - x$ (fig. 122).

Al trazar estas curvas sobre un papel milimetrado, hallamos la raíz aproximada de la ecuación (3): $\xi \approx 1{,}77$.

Geométricamente es intuitivo el siguiente teorema: *si una función continua $f(x)$ toma en los extremos de un segmento* $[\alpha, \beta] \subset \langle a, b\rangle$[1])

[1]) La escritura $[\alpha, \beta] \subset \langle a, b\rangle$ significa que el segmento $[\alpha, \beta]$ está contenido en el intervalo $\langle a, b\rangle$.

valores de signos opuestos, es decir $f(\alpha) f(\beta) < 0$, entonces existe en el interior del segmento $[\alpha, \beta]$ por lo menos un cero de la función $f(x)$ (es decir, existe obligatoriamente una raíz de la ecuación $f(x) = 0$).

Esta raíz será **única**, si la derivada $f'(x)$ no cambia su signo en (α, β) (en vista de que la función $f(x)$ es monótona).

Suponiendo que la función $f(x) = 0$, donde $f(x)$ es continua sobre $\langle a, b\rangle$, posee una raíz única ξ en el interior del segmento $[\alpha, \beta] \subset \langle a, b\rangle$ y que la condición $f(\alpha) f(\beta) < 0$ se cumple, indicaremos unos procedimientos sencillos para hallar el valor aproximado de esta raíz.

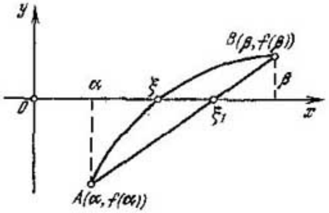

Fig. 123

A. Método de la división en mitades. Sea dada una función $f(x)$ continua en $[\alpha, \beta]$, y sea $f(\alpha) f(\beta) < 0$. Dividimos el segmento $[\alpha, \beta]$ en dos partes iguales y sea γ la mitad de este segmento. Si $f(\gamma) = 0$, entonces γ es la raíz incógnita. Si $f(\gamma) \neq 0$, designemos por $[\alpha_1, \beta_1]$ aquella mitad $[\alpha, \gamma]$ o $[\gamma, \beta]$ en los extremos de la cual la función $f(x)$ tiene signos opuestos. Luego aplicamos de nuevo el método de la división en dos partes iguales, etc. Finalmente hallaremos la raíz exacta de la ecuación $f(x) = 0$ y obtendremos la sucesión de segmentos

$$[\alpha, \beta] \supset [\alpha_1, \beta_1] \supset \ldots,$$

en el interior de los cuales se encuentra la raíz buscada ξ.

Como la longitud del n-ésimo segmento $[\alpha_n, \beta_n]$, igual a $\frac{\beta-\alpha}{2^n}$, tiende a 0 cuando $n \to \infty$, entonces repitiendo este procedimiento un número de veces suficientemente grande y considerando que $\xi \approx \frac{1}{2}(\alpha_n + \beta_n)$ se puede determinar la raíz buscada ξ con cualquier precisión deseada.

B. Método de cuerdas. El método de la división en mitades puede ser precisado sustituyendo el arco $\widehat{AB}$ de la curva $y = f(x) (\alpha \leqslant x \leqslant \beta)$ por su cuerda $\overline{AB}$ que pasa por los puntos terminales $A(\alpha, f(\alpha))$ y $B(\beta, f(\beta))$ y tomando como valor aproximado de la raíz ξ de la ecuación $f(x) = 0$ la abscisa ξ_1 del punto de intersección de la cuerda $\overline{AB}$ con el eje Ox (fig. 123).

Si $f(\alpha) f(\beta) < 0$, esto es equivalente a tomar como valor aproximado de la raíz ξ el punto ξ_1 que divide el segmento $[\alpha, \beta]$ en la relación $|f(\alpha)| : |f(\beta)|$ (*método de partes proporcionales*).

La ecuación de la cuerda $\overline{AB}$ es (véase el § 4 del cap. III)

$$y-f(\alpha)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha). \tag{4}$$

Tomando $y=0$ en la ecuación (4) hallamos el punto de intersección $x=\xi_1$ de la cuerda $\overline{AB}$ con el eje Ox (fig. 123):

$$\xi_1=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f(\beta)-f(\alpha)}(\beta-\alpha). \tag{5}$$

El número ξ_1 se toma como la primera aproximación de la raíz ξ. Si $f(\xi_1)\neq 0$, se puede aplicar la fórmula (5) a aquel segmento $[\alpha, \xi_1]$ o $[\xi_1, \beta]$ en los extremos del cual la función $f(x)$ toma valores de signos contrarios, etc.

EJEMPLO 2. Empleando el método de cuerdas se pide hallar la raíz de la ecuación

$$f(x)\equiv x^3+x-12=0. \tag{6}$$

Para determinar la raíz aproximada de la ecuación (6) se pueden trazar las gráficas de funciones $y=x^3$ e $y=12-x$. Por medio de una estimación aproximada constatamos que la raíz buscada, es decir, la abscisa del punto de intersección de las gráficas, se encuentra en el intervalo (2, 3). Efectivamente

$$f(2)=8+2-12=-2 \quad \text{y} \quad f(3)=27+3-12=+18.$$

Por eso se puede suponer que $\alpha=2$ y $\beta=3$.

Aplicando la fórmula (5), obtendremos el valor aproximado de la raíz:

$$\xi_1=2-\frac{-2}{18+2}(3-2)=2{,}1.$$

Notemos que

$$f(\xi_1)=9{,}261+2{,}1-12=-0{,}639.$$

Por eso, para precisar el valor de ξ_1 es conveniente aplicar la fórmula (5) al segmento $[2{,}1;\ 3]$.

C. Método de las tangentes. Reemplacemos ahora el arco $\overset{\frown}{AB}$ de la curva $y=f(x)$ por la tangente AC trazada por el punto $A(\alpha, f(\alpha))$ (fig. 124). Como el coeficiente angular de la tangente AC es igual a $f'(\alpha)$, su ecuación se escribirá así:

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha). \tag{7}$$

De aquí, considerando que $y=0$ hallamos el valor aproximado de la raíz ξ:

$$\bar{\xi}_1=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \tag{8}$$

(*fórmula de Newton*).

Notemos que si en nuestra gráfica trazamos una tangente en el punto $B\ [\beta, f(\beta)]$ (fig. 124), el punto de intersección $\overline{\xi}_1'$ de esta tangente con el eje Ox dará una aproximación mala de la raíz ξ. Conveniente aquí observar la siguiente regla: *si la derivada segunda $f''(x)$ de la función conserva su signo en el intervalo (α, β), la tangente*

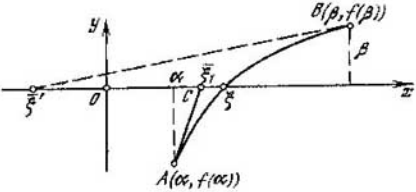

Fig. 124

debe ser trazada en aquel punto terminal del arco $\widehat{AB}$, donde el signo de la función coincide con el signo de la derivada segunda.

EJEMPLO 3. Determinar, aplicando el método de las tangentes, la raíz de la ecuación (6) situada en el intervalo (2, 3).

Aquí $f''(x) = 6x > 0$ para $2 \leqslant x \leqslant 3$, además, $f(3) = +18$. Por eso se considera que en la fórmula (3) $\alpha = 3$. Puesto que $f'(x) = 3x^2 + 1$ y $f'(3) = 28$, tenemos

$$\overline{\xi}_1 = 3 - \frac{18}{28} = 2{,}36$$

Notemos para controlar, que

$$f(\overline{\xi}_1) = 13{,}14 + 2{,}36 - 12 = +3{,}35.$$

Como en nuestro caso $\xi_1 < \xi < \overline{\xi}_1$, donde $\xi_1 = 2{,}10$ y $\overline{\xi}_1 = 2{,}36$ puede considerarse que

$$\xi \approx \frac{1}{2}(\xi_1 + \overline{\xi}_1) = \frac{1}{2}(2{,}10 + 2{,}36) = 2{,}23.$$

Aquí

$$f(2{,}23) = 11{,}09 + 2{,}23 - 12 = 1{,}32.$$

Para precisar el valor de la raíz pueden aplicarse los métodos de las cuerdas y de las tangentes al segmento $[2{,}10;\ 2{,}23]$, etc.

§ 10. Construcción de gráficas de funciones

Hemos mostrado en párrafos precedentes que con ayuda de las primeras y segundas derivadas se estudian las propiedades generales de las funciones. Utilizando los resultados de este estudio puede obtenerse una idea clara de la naturaleza de la función y, en particular, construir el trazado matemáticamente correcto de su gráfica.

La investigación de una función $y = f(x)$ (que consideraremos elemental) en los casos más simples es conveniente efectuarla de acuerdo con el esquema siguiente.

1) Al analizar las propiedades de una función $f(x)$, determinamos su **dominio de existencia**; supongamos, para simplificar, que éste será un intervalo $\langle a, b \rangle$. Es también útil establecer la simetría de la gráfica (si la función es par o impar, periódica o no, etc.).

2) Hallamos los **puntos de discontinuidad** de la función. Investigamos también el comportamiento de la función cuando $x \to a$ y $x \to b$, donde a y b son los puntos de frontera del dominio de existencia de la función.

3) Resolviendo la ecuación

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

determinamos las raíces (ceros) de la función. Establecemos el signo de la función en diferentes dominios, teniendo en cuenta que una función elemental puede cambiar su signo solamente al pasar por el cero o por un punto de discontinuidad.

4) Resolviendo la ecuación

$$f'(x) = 0, \tag{2}$$

hallamos los **valores críticos del argumento para la función** $f(x)$. Estudiando después el signo de la derivada $f'(x)$ en cada uno de los intervalos comprendidos entre dos valores críticos consecutivos, determinamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y establecemos la naturaleza de estos valores críticos.

5) Resolviendo la ecuación

$$f''(x) = 0, \tag{3}$$

determinamos los **valores críticos del argumento para la derivada** $f'(x)$. Luego hallamos el signo de la derivada $f''(x)$ en cada uno de los intervalos comprendidos entre dos valores críticos consecutivos del argumento para la derivada $f'(x)$, establecemos los intervalos de convexidad y concavidad hacia las y positivas de la gráfica de la función $f(x)$ y hallamos los puntos de inflexión.

En los casos más complicados, se deben investigar también los puntos en los cuales las derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$ no existen.

Es posible que para resolver las ecuaciones (1), (2) y (3) haga falta recurrir a los métodos aproximados (véase el § 9).

Conformando, para concluir, una tabla de los valores que la función toma en sus **puntos característicos** (puntos extremos del dominio de existencia de la función, puntos de discontinuidad, puntos de intersección de la gráfica de la función con los ejes de coordenadas, puntos de extremo, puntos de inflexión, etc.) y teniendo en cuenta los resultados del estudio efectuado más arriba, representamos gráficamente esta función.

A veces es suficiente un estudio incompleto de la función.

EJEMPLO. Trazar la gráfica de la función $y = x + \sqrt{1-x}$.

Investiguemos la función según el esquema arriba indicado.

1) La función está definida, si $0 \leqslant 1 - x < +\infty$. De aquí, su dominio de existencia será: $-\infty < x \leqslant 1$.

2) La función no tiene puntos de discontinuidad, y

$$\lim_{x\to-\infty} y = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1} y = y(1) = 1.$$

3) Resolviendo la ecuación $x + \sqrt{1-x} = 0$, obtenemos la raíz de la función

$$x_0 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx -1{,}62.$$

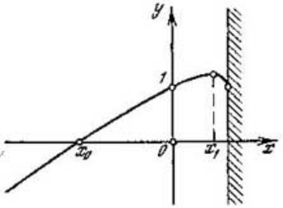

Fig. 125

En este caso $y < 0$, si $-\infty < x < x_0$ e $y > 0$, si $x_0 < x \leqslant 1$.

4) Hallamos la derivada

$$y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}.$$

Igualándola a cero obtenemos un punto crítico $x_1 = \frac{3}{4}$. Además, es evidente que y' se convierte en ∞ cuando $x = 1$. Por eso, $x_2 = 1$ también será un punto crítico.

Los intervalos de monotonía de la función son $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ y $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ y es fácil convencerse, estudiando el signo de la derivada, de que la función crece en el primer intervalo y decrece en el segundo. Por consiguiente, x_1 es el punto máximo de la función. En el punto x_2 la función tiene, evidentemente, un mínimo de frontera.

5) Hallamos la derivada segunda

$$y'' = -\frac{1}{4(1-x)^{3/2}}.$$

Puesto que la derivada segunda es negativa por doquier, la gráfica de la función es cóncava hacia abajo y no tiene puntos de inflexión.

Agrupamos en una tabla los resultados de nuestros estudios. La gráfica modelo de la función se muestra en la fig. 125.

x	y	y'	y''	Conclusión
$-\infty$ $x_0 \approx -1{,}62$ 0	$-\infty$ 0 1	$+$	$-$	La función crece
$y_1 = 0{,}75$	$1{,}25$	0		La función pasa por un máximo
....	...	$-$		La función decrece
1	1	$-\infty$		

EJERCICIOS

1. Hallar el incremento de la función $f(x) = x^3$ en el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 2$ y verificar el teorema del incremento finito de la función.

2. Comprobar el teorema sobre las raíces de la derivada para la función

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

en los segmentos $[1, 2]$ y $[2, 3]$.

Determinar los intervalos de monotonía de las funciones siguientes:

3. $f(x) = x^2 - 4x - 1$. 4. $f(x) = 3x - x^3$. 5. $f(x) = xe^{-x}$.

Hallar los límites de las funciones:

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$. 7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 2^x}{\ln(1+x)}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$. Deducir una fórmula para la rectificación aproximada de los arcos pequeños:

$$x \approx \frac{1}{3}(2 \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x).$$

9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\operatorname{sen} \pi x}$. 10. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{1{,}01^x}$.

11. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln^2 x}{\sqrt[100]{x}}$. 12. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x) \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x \arcsen \dfrac{2}{x}\right)$. 14. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

15. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$ 16. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{x}{1-x}}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{sen} x}$.

Calcular los extremos de las funciones:

18. $y = x(a-x)$ $(a > 0)$. 19. $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 1$.

20. $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$. 21. $y = \sqrt{2+x-x^2}$.

22. $y = xe^{-2x}$.

23. Inscribir un rectángulo de área máxima en un semicírculo de radio a.

24. En la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, inscribir un rectángulo de área máxima de lados paralelos a los ejes de elipse.

25. En una esfera de radio a inscribir un cono de volumen máximo.

26. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja de lado a hecha de una hoja cuadrada de papel para que su volumen sea máximo?

27. Determinar los puntos de inflexión de la gráfica de la función $y = x^2 - x^3$.

Construir las gráficas de las funciones:

28. $y = 3x - x^3$. 29. $y = x^2(2-x)^2$.

30. $y=\frac{x^2}{1+x^2}$. **31.** $y=x+\frac{1}{x}$. **32.** $y=\frac{x}{1+x}$.

33. $y=\frac{8}{4-x^2}$. **34.** $y=x\sqrt{1-x}$.

35. $y=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$. **36.** $y=\operatorname{sen} x+\cos x \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

37. $y=x \ln x$ [1]. **38.** $y=xe^{-x}$ [1].

39. $y=x-\operatorname{arctg} x$.

---

[1]) Véase la indicación en el apartado «Respuestas».

Capítulo XII

Diferencial

§ 1. Noción sobre la diferencial de una función

Sea dada una función **derivable (diferenciable)**

$$y = f(x).$$

El incremento Δy de la función y constituye una característica importante de la variación de esta función sobre un segmento finito dado $[a, b]$. Pero la determinación directa del incremento de la función es a veces difícil de lograr. En este caso, se procede generalmente del modo siguiente: el segmento $[a, b]$ se divide en un número finito de segmentos suficientemente pequeños $[x, x + \Delta x]$ y se considera aproximadamente que sobre cada uno de estos segmentos el incremento de la función tiene lugar según la ley de proporcionalidad directa (por ejemplo, un elemento pequeño de una línea curva se considera como rectilíneo; un movimiento no uniforme de un punto durante un intervalo de tiempo pequeño se considera como un movimiento uniforme, etc., donde la "pequeñez" se entiende en el sentido conocido). En otras palabras se supone que sobre un segmento suficientemente pequeño $[x, x + \Delta x]$ tiene lugar la igualdad aproximada

$$\Delta y \approx k\Delta x,$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad que no depende de Δx, pero depende, en general, de x. Si se halla en este caso que con una elección conveniente del coeficiente de proporcionalidad la diferencia $\Delta y - k\Delta x$ será un infinitésimo de un orden superior respecto a Δx, es decir, la magnitud

$$\frac{\Delta y - k\,\Delta x}{\Delta x} = \alpha \tag{1}$$

será un infinitésimo cuando $\Delta x \to 0$, entonces la magnitud

$$dy = k\Delta x$$

se llama *diferencial de la función y* en el punto x (aquí la letra d es el símbolo de la diferencial). En este caso, como se deduce de la relación (1), es justa la igualdad

$$\Delta y = k\Delta x + \alpha\Delta x, \tag{2}$$

donde $\alpha \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

En otras palabras (véase el § 8 del cap. VII),

$$\Delta y = dy + o(\Delta x).$$

DEFINICION. *Llámase **diferencial de una función** a una magnitud proporcional al incremento de la variable independiente y que se diferencia del incremento de esta función por una función infinitesimal de orden superior en comparación con el incremento de la variable independiente.*

El sumando $k\Delta x$ en la fórmula (2) se llama frecuentemente *parte lineal principal* del incremento de la función (o *término lineal principal del incremento*). Por eso se puede decir que *la diferencial de una función es la parte lineal principal del incremento infinitesimal de esa función.*

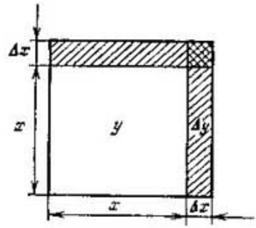

Fig. 126

EJEMPLO 1. Sea $y = x^2$ una función que expresa el área de un cuadrado de lado x (fig. 126). Si se le otorga al lado x un incremento Δx, su valor nuevo será $x + \Delta x$ y, por consiguiente, el área y del cuadrado obtendrá el incremento

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2, \quad \text{o bien}$$

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

El primer sumando del segundo miembro de la última igualdad es evidentemente la parte lineal principal del incremento de la función para $\Delta x \to 0$. Por eso

$$dy = 2x\Delta x$$

En la fig. 126 el incremento Δy de la función y está representado por la superficie de toda la parte rayada, mientras que la diferencial dy de la función se representa con la superficie de la parte rayada menos el área del cuadrado pequeño que se encuentra en el ángulo superior derecho del cuadrado grande.

TEOREMA SOBRE LA UNICIDAD DE LA DIFERENCIAL. *Una función dada puede tener una sola diferencial.*

DEMOSTRACION. Efectivamente, supongamos que una función $y = f(x)$ tenga dos diferenciales: $dy = k\Delta x$ y $d_1y = k_1\Delta x$. En virtud de la definición de la diferencial, tenemos

$$\Delta y = k\Delta x + \alpha\Delta x \quad \text{y} \quad \Delta y = k_1\Delta x + \alpha_1\Delta x,$$

donde α y α_1 son infinitésimos cuando $\Delta x \to 0$, de donde

$$k\Delta x + \alpha\Delta x = k_1\Delta x + \alpha_1\Delta x$$

y, por consiguiente, cuando $\Delta x \neq 0$ tenemos $k - k_1 = \alpha_1 - \alpha$.

Pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$, en la última igualdad obtenemos

$$k - k_1 = 0,$$

es decir, $k = k_1$. De este modo las diferenciales dy y d_1y coinciden. El teorema queda demostrado.

De la definición de diferencial se deduce inmediatamente que *la diferencial de una función difiere del incremento de esta función en una magnitud infinitesimal de orden superior en comparación con el incremento de la variable independiente.* Esta circunstancia se aplica frecuentemente para los cálculos aproximados.

EJEMPLO 2. Sea dada la función $y = x^3 - x^2 + 2x + 3$. Hallar Δy y dy para $x = 1$ y compararlos entre sí en tres casos: a) $\Delta x = 1$; *b*) $\Delta x = 0{,}1$; c) $\Delta x = 0{,}01$.

Tenemos $\Delta y = [(x + \Delta x)^3 - (x - \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) + 3] - (x^3 - x^2 + 2x + 3)$.

Efectuando las operaciones algebraicas necesarias, obtendremos

$$\Delta y = (3x^2 - 2x + 2)\cdot\Delta x + (3x - 1)\cdot(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

El primer sumando del segundo miembro de la última igualdad expresa evidentemente la parte lineal principal del incremento de la función. Por consiguiente,

$$dy = (3x^2 - 2x + 2)\cdot\Delta x.$$

Tomando $x = 1$ obtendremos la tabla siguiente:

Δx	Δy	dy	$\frac{dy}{\Delta y}$ (en %)
1	6	3	50
0,1	0,321	0,3	93
0,01	0,030201	0,03	99

Esta tabla muestra claramente que la parte de la diferencial dy en el incremento Δy tiende al 100% cuando $\Delta x \to 0$.

§ 2. Relación entre la diferencial y la derivada de una función. Diferencial de una variable independiente

TEOREMA 1. *Si una función posee diferencial, esta función tiene también derivada.*

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, sea dada la función $y = f(x)$ y sea

$$dy = k\Delta x$$

la diferencial de esta función. Como se sabe, el incremento Δy de la función puede escribirse así

$$\Delta y = k\Delta x + \alpha\Delta x,$$

donde α es un infinitésimo cuando $\Delta x \to 0$. De aquí $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k + \alpha$ y, por consiguiente,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k,$$

es decir, la derivada y' existe y es igual a la magnitud de k.

COROLARIO. *La diferencial de una función es igual al producto de la derivada de esta función por el incremento de la variable independiente*, es decir,

$$dy = y' \Delta x. \tag{1}$$

TEOREMA 2. *Si una función posee derivada, ella tiene también diferencial.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función $y = f(x)$ tiene la derivada

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$

De aquí $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, donde α es un infinitésimo cuando $\Delta x \to 0$ y, por consiguiente,

$$\Delta y = y' \Delta x + \alpha \Delta x. \tag{2}$$

El primer sumando $y' \Delta x$ de la suma (2) es evidentemente la parte lineal principal del incremento Δy, o sea, es la diferencial de la función y. De este modo, la función posee la diferencial

$$dy = y' \Delta x.$$

El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Ahora está claro por qué una función de una variable independiente que tiene una derivada se llama *derivable* o *diferenciable*.

Hasta ahora hemos utilizado el concepto de diferencial de una función. Introduzcamos el concepto de *diferencial de la variable independiente*.

DEFINICIÓN. *Se entiende por* ***diferencial de la variable independiente*** *la diferencial de una función idéntica a la variable independiente*, es decir, la diferencial de la función $y = x$.

Puesto que

$$y' = 1 \quad \text{para} \quad y = x, \tag{3}$$

entonces, según la fórmula (1), tenemos

$$dx = \Delta x,$$

es decir, *la diferencial de una variable independiente es igual al incremento de esta última.*

Utilizando esta propiedad se puede escribir la fórmula (1) en la forma simétrica siguiente

$$dy = y'dx. \tag{4}$$

Así pues, *la diferencial de una función es igual al producto de la derivada de esta función por la diferencial de la variable independiente.*

Dividiendo ambos miembros de la última fórmula por dx, obtendremos

$$\frac{dy}{dx} = y'.$$

En otras palabras: *la derivada de una función es igual a la relación de la diferencial de esta función por la diferencial de la variable independiente.*

Hasta el presente, la notación $\frac{dy}{dx}$ ha tenido un carácter simbólico; ahora podemos considerar esta expresión como una fracción ordinaria, donde dy es el numerador y dx el denominador.

§ 3. Interpretación geométrica de la diferencial

Aclaremos el significado geométrico de la diferencial. Examinemos la gráfica de una función $y = f(x)$.

Sean $M(x, y)$ y $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$ dos puntos de la curva dada (fig. 127). Trazamos por el punto M la tangente MT a la gráfica de la función (aquí T es el punto de intersección de la tangente con $M'N \parallel Oy$) y examinamos el triángulo ΔMTN de catetos $MN = \Delta x$ y NT ($MN \parallel Ox$, $NT \parallel Oy$). Si se designa con φ el ángulo formado por la tangente MT y la dirección positiva del eje Ox, tendremos

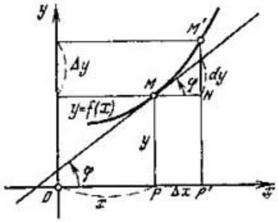

Fig. 127

$$NT = \Delta x \operatorname{tg} \varphi.$$

Pero de la interpretación geométrica de la derivada resulta que $\operatorname{tg} \varphi = f'(x) = y'$. Por eso,

$$NT = y'\Delta x = dy.$$

De este modo, tenemos el teorema siguiente:

La diferencial de una función $y = f(x)$ en punto x dado ***es igual al incremento de la ordenada de la tangente*** *a la gráfica de la función en este punto, cuando el incremento de x es Δx.*

OBSERVACIÓN. Señalemos que, en general, el incremento de la función $\Delta y = NM'$ (fig. 127) no es igual a la diferencial $dy = NT$ de esta función. En particular: 1) si la gráfica de la función presenta su concavidad hacia arriba, entonces

$$\Delta y > dy;$$

2) si la gráfica de la función presenta su concavidad hacia abajo,

$$\Delta y < dy.$$

§ 4. Interpretación física de la diferencial

Sea conocida la ley del movimiento de un punto M a lo largo del eje Ox:

$$x = f(t),$$

donde x es la distancia entre el punto M y el origen O y t es el tiempo. Se supone que el punto M se desplaza en un mismo sentido. Durante un intervalo de tiempo infinitamente pequeño dt el punto M ocupará la posición M' después de recorrer un camino igual a

$$\Delta x = f(t + dt) - f(t).$$

Esto es el **incremento verdadero del camino** recorrido.

Según la fórmula (4) del § 3, la diferencial del camino dx es igual a

$$dx = x'_t dt.$$

Pero x'_t, que representa la derivada de la distancia respecto al tiempo, es la velocidad de movimiento v en el instante de tiempo t; por eso

$$dx = v\, dt.$$

De este modo, *la diferencial del camino es igual al incremento ficticio de éste, y que será obtenido si se supone que a partir del instante de tiempo dado el punto efectúa un movimiento uniforme conservando la velocidad adquirida.*

Por ejemplo, si el velocímetro de un automóvil indica 60 km/h, el conductor que estima que en 1 minuto el recorrido del vehículo será igual a 1 kilómetro, en realidad no calcula el incremento del camino recorrido en 1 minuto (que puede ser no igual a 1 kilómetro a causa del movimiento no uniforme), sino que la **diferencial del camino.**

§ 5. Cálculo aproximado de incrementos pequeños de una función

Si Δx es pequeño en valor absoluto, el incremento de la función derivable $f(x)$

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

difiere de su diferencial

$$df(x) = f'(x)\, \Delta x$$

en una magnitud infinitamente pequeña respecto a Δx. De aquí tenemos la igualdad aproximada

$$f(x+\Delta x)-(x)\approx f'(x)\,\Delta x, \tag{1}$$

o sea,

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\,\Delta x. \tag{1'}$$

Estas igualdades son muy útiles para cálculos aproximados. Notemos que la fórmula (1') es el término lineal de la fórmula de Taylor (§ 6 del cap. XI).

EJEMPLO 1. Hallar $\sqrt[3]{1,1}$. Considerando que en la fórmula (1') $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x=1$, $\Delta x=0,1$, tendremos $\sqrt[3]{1,1}=\sqrt[3]{1}+0,1\dfrac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}=1+0,1\cdot\dfrac{1}{3}=1,033$.

Mediante las tablas, hallamos $\sqrt[3]{1,1}=1,032$.

Examinemos otro problema, de importancia para los cálculos aproximados.

PROBLEMA Para una función dada

$$y=f(x)$$

el error absoluto límite de su argumento x es igual a Δ_x, es decir,

$$|\Delta x|\leqslant\Delta_x.$$

¿Cuáles son los errores absoluto Δ_y y relativo δ_y límites de la función y?

Según la fórmula (1) tenemos

$$|\Delta y|\approx|y'|\,|\Delta x|;$$

por consiguiente, cuando $y'\neq 0$ se puede considerar

$$\Delta_y=|y'|\,\Delta_x \tag{2}$$

y

$$\delta_y=\frac{\Delta y}{|y|}=|(\ln y)'|\,\Delta_x.$$

EJEMPLO 2. Un ángulo $x=60^\circ$ está definido con una exactitud de hasta 1°. ¿Cómo incidirá esto en el cálculo del seno de este ángulo?

Aquí $\Delta_x=\text{arc }1^\circ=\pi/180\approx 1/57$. Por eso, el error para $y=\text{sen }x$ según la fórmula (2), donde $y'=\cos x$, puede alcanzar un valor $\Delta_y=\cos 60^\circ\cdot\Delta_x\approx\dfrac{1}{114}\approx 0,01$.

§ 6. Equivalencia del incremento y de la diferencial de una función

Introduzcamos el concepto de funciones infinitesimales *equivalentes* o *asintóticamente iguales.*

DEFINICION. *Dos funciones infinitesimales* $\alpha = \alpha(x)$ *y* $\beta = \beta(x)$ *se denominan* ***equivalentes*** *cuando* $x \to a$, *si el límite de cociente es igual a la unidad, es decir, cuando*

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = 1.$$

Para designar la equivalencia de los infinitésimos α y β se utiliza el símbolo de equivalencia $\sim$, es decir, se escribe $\alpha \sim \beta$.

Por e emplo,

$$\operatorname{sen} \alpha \sim \alpha$$

cuando $\alpha \to 0$, porque

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = 1.$$

Remarquemos que *si dos infinitésimos* α *y* β *son equivalentes, su diferencia es un infinitésimo de orden superior respecto a cada uno de ellos.*

Efectivamente, si $\frac{\alpha}{\beta} \to 1$, tenemos

$$\frac{\alpha - \beta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} - 1 \to 0,$$

es decir, $\alpha - \beta$ es de un orden superior que β (§ 8 del cap. VII). Se puede desarrollar un razonamiento análogo para α.

Inversamente, *si la diferencia de dos infinitésimos* α *y* β *es otro infinitésimo de orden superior respecto a cada uno de ellos, los infinitésimos* α *y* β *son equivalentes.*

En efecto, suponiendo, por ejemplo, que

$$\frac{\alpha - \beta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} - 1 \to 0$$

obtenemos $\frac{\alpha}{\beta} \to 1$ y, por consiguiente, $\alpha \sim \beta$.

En particular, *quitando (o adicionando) de un infinitésimo otro infinitésimo de orden superior, obtenemos un infinitésimo equivalente al primero.*

Por ejemplo, cuando $x \to 0$, tenemos

$$(x + 1000\, x^2) \sim x.$$

Señalemos una propiedad importante de los infinitésimos equivalentes.

TEOREMA 1. *Al calcular el límite de la razón de dos infinitésimos éstos se pueden reemplazar por infinitésimos equivalentes a ellos (suponiendo que el límite de la razón, finito o infinito, existe).*

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, sean $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ y $\beta(x) \sim \sim \beta_1(x)$ cuando $x \to a$. Tenemos

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}. \tag{1}$$

Pasando al límite en la identidad (1) obtendremos

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} =$$
$$= 1 \cdot \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot 1 = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

EJEMPLO. Puesto que sen $x \sim x$ cuando $x \to 0$ (§ 11 del cap. VII), tenemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x + 5x^2}{\operatorname{sen} 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

TEOREMA 2. *Un incremento infinitamente pequeño de una función es equivalente a la diferencial de esta función para todos los valores de la variable independiente en los cuales la derivada de la función es finita y distinta de cero.*

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, si la función $y = f(x)$ es derivable, aplicando la fórmula (2) del § 2, obtendremos

$$\Delta y = dy + \alpha \Delta x, \tag{2}$$

donde α es un infinitésimo cuando $\Delta x \to 0$.

Puesto que según los datos del teorema cuando $\Delta x \neq 0$ tenemos $dy = y' \Delta x \neq 0$, entonces

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{\alpha}{y'}.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1,$$

es decir, los infinitésimos Δy y dy son equivalentes cuando $\Delta x \to 0$.

EJEMPLO. Sea dada la función $f(x) = (1 + x)^\alpha$. Tenemos

$$\Delta f(0) = f(x) - f(0) = (1 + x)^\alpha - 1$$

y

$$df(0) = f'(0)(x - 0) = \alpha x.$$

Por eso

$$(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \text{ cuando } x \to 0.$$

OBSERVACIÓN En general, si una función $f(x)$ es derivable en el punto $x = 0$, entonces cuando $x \to 0$ tenemos

$$\Delta f(0) = f(x) - f(0) \sim f'(0)\, x. \tag{3}$$

De la fórmula (3) en particular, cuando $x \to 0$, obtenemos

a) sen $x \sim x$;

b) $a^x - 1 \sim x \ln a \ (a > 0)$;

c) $\ln(1 + x) \sim x$.

§ 7. Propiedades de la diferencial

Examinemos ahora algunas propiedades de la diferencial, análogas a las de la derivada.

En las enunciaciones que siguen supondremos sin especificar cada vez que todas las funciones examinadas tienen derivadas, es decir, son derivables.

I. Diferencial de una constante. *La diferencial de una constante es igual a cero.*

Considerando que en la fórmula (4) del § 2 $y = c$ e $y' = 0$, obtendremos

$$dc = 0.$$

II. Diferencial de una suma. *La diferencial de la suma algebraica de funciones derivables es igual a la suma algebraica de las diferenciales de estas funciones.*

Efectivamente, si u, v y w son funciones derivables de una variable independiente x, tendremos, por ejemplo,

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'.$$

Multiplicando los dos miembros por dx obtendremos

$$(u + v - w)'\, dx = u'dx + v'dx - w'dx,$$

de donde, en virtud de la fórmula (4) del § 2, deducimos

$$d(u + v - w) = du + dv - dw.$$

III. *Si dos funciones derivables se diferencian en un sumando constante, sus diferenciales son iguales.*

Tenemos

$$d(u + c) = du + dc.$$

Considerando aquí c constante y, por consiguiente, $dc = 0$, obtendremos

$$d(u + c) = du.$$

IV. *Se puede sacar un factor constante del signo de diferencial.*

Efectivamente, si c es constante,

$$(cu)' = cu'.$$

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por dx obtendremos

$$(cu)'dx = c\,(u'dx),$$

o sea,

$$d\,(cu) = cdu.$$

V. Diferencial de un producto. *La diferencial del producto de dos factores es igual a la suma del producto del primer factor por la diferencial del segundo y del producto del segundo factor por la diferencial del primero.*

Efectivamente, si u y v son funciones derivables de x, tenemos

$$(uv)' = uv' + vu'.$$

Multiplicando los dos miembros por dx, obtendremos

$$(uv)'dx = u\,(v'dx) + v\,(u'dx),$$

o sea

$$d\,(uv) = udv + vdu.$$

VI. Diferencial de un cociente. *La diferencial de una fracción (de un cociente) es también igual a una fracción cuyo numerador es el producto del denominador de la fracción por la diferencial del numerador menos el producto del numerador por la diferencial del denominador y cuyo denominador es el cuadrado del denominador de la fracción.*

Tenemos

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Multiplicando los dos miembros por dx obtendremos

$$\left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{v\,(u'\,dx) - u\,(v'\,dx)}{v^2}.$$

De aquí,

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

VII. Diferencial de una función compuesta. *La diferencial de una función compleja (función de funciones) es igual al producto de la derivada de esta función respecto al argumento intermedio por la diferencial de este argumento intermedio (las dos funciones son derivables).*

Sea $y = f\,[\varphi\,(x)]$. Supongamos que $\varphi\,(x) = u$ y, por consiguiente, $y = f\,(u)$. Si $f\,(u)$ y $\varphi\,(x)$ son funciones derivables, entonces, según el teorema sobre la derivada de una función compuesta, se puede escribir

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Al multiplicar los dos miembros de la igualdad por la diferencial dx de la variable independiente x, obtendremos

$$y'_x\,dx = y'_u\,(y'_x dx). \qquad (1)$$

Pero $y'_x\,dx = dy$ y $u'_x dx = du$; por consiguiente, la igualdad (1) puede ser escrita así:

$$du = y'_u du. \tag{2}$$

OBSERVACIÓN. Por su forma, la fórmula (2) coincide con la fórmula (4) del § 2, pero entre ellas hay una diferencia esencial: en la fórmula (4) x es una variable independiente y, por consiguiente, $dx = \Delta x$, mientras que en la fórmula (2) u es función de la variable independiente x y por eso, en general, $du \neq \Delta u$.

De la fórmula (2) se deduce el teorema siguiente.

VIII. Independencia de la forma de la diferencial con respecto a la elección de la variable independiente. *La diferencial de una función es igual al producto de la derivada de esta función por la diferencial del argumento, no importa si este argumento es una variable independiente o una función diferenciable de otra variable independiente.*

A partir de las fórmulas de derivadas (§ 12 del cap. X) obtenemos la correspondiente tabla de diferenciales, donde u es una función derivable arbitraria.

Tabla de funciones diferenciales

I. $du^n = nu^{n-1}\,du.$

II. $da^u = a^u \ln a\,du \quad (a > 0),\ de^u = e^u\,du.$

III. $d(\log_a u) = \dfrac{du}{u \ln a}\ (a > 0,\ a \neq 1),\ d(\ln u) = \dfrac{du}{u}.$

IV. $d(\operatorname{sen} u) = \cos u\,du.$

V. $d(\cos u) = -\operatorname{sen} u\,du.$

VI. $d(\operatorname{tg} u) = \dfrac{du}{\cos^2 u}.$

VII. $d(\operatorname{ctg} u) = -\dfrac{du}{\operatorname{sen}^2 u}.$

VIII. $d(\operatorname{arcsen} u) = \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$

IX. $d(\arccos u) = -\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$

X. $d(\operatorname{arctg} u) = \dfrac{du}{1+u^2}.$

XI. $d(\operatorname{arcctg} u) = -\dfrac{du}{1+u^2}.$

XII. $df(u) = f'(u)\,du.$

§ 8. Diferenciales de orden superior

Sea x una variable independiente e $y = f(x)$ una función derivable. Según la fórmula (4) del § 2 tenemos

$$df(x) = f'(x)\,dx, \tag{1}$$

de este modo, la diferencial de la función $f(x)$ es función de dos argumentos: x y dx.

En adelante supondremos que dx es la diferencial de la variable independiente x y tiene un valor arbitrario, pero **fijo**, independiente de x, y que es el mismo para todas las funciones examinadas.

Si dx es fija, $df(x)$ es una función de x proporcional a la derivada $f'(x)$, con coeficiente de proporcionalidad igual a dx. Puede ocurrir que esta función posea también una diferencial[1]); en este caso, esta última se llama *diferencial segunda* (o *diferencial de segundo orden*) de la función $f(x)$, y la diferencial definida por la fórmula (1), lleva el nombre de *diferencial de primer orden* (o *diferencial primera*).

DEFINICIÓN Llámase ***diferencial segunda*** (***o diferencial de segundo orden***) *$d^2 f(x)$ de una función $f(x)$ a la diferencial de la diferencial primera de esta función*, es decir

$$d^2 f(x) = d\,[df(x)]. \tag{2}$$

De modo análogo, llámase *diferencial tercera* (o *diferencial de tercer orden*) $d^3 f(x)$ de una función $f(x)$, a la diferencial de la diferencial segunda de esta función, es decir,

$$d^3 f(x) = d\,[d^2 f(x)].$$

Así se definen sucesivamente las *diferenciales de órdenes superiores*.

Deduzcamos ahora una fórmula para la diferencial segunda de una función $f(x)$ de la variable independiente x, suponiendo que esta función es dos veces derivable, es decir, posee segunda derivada. Puesto que

$$df(x) = f'(x)\,dx,$$

la fórmula (2) nos da

$$d^2 f(x) = d\,[f'(x)\,dx]. \tag{3}$$

Si x es una variable independiente, entonces dx es igual a Δx y no depende evidentemente de x, es decir, dx desempeña respecto a la variable x el papel de una constante. Por eso, en la fórmula (3) se saca el factor dx del signo de diferenciación y se obtiene

$$d^2 f(x) = dx \cdot d\,[f'(x)].$$

Puesto que $f'(x)$ es de nuevo una función de x, de la fórmula (1) se deduce

$$d\,[f'(x)] = [f'(x)]'\,dx = f''(x)\,dx.$$

De aquí se halla definitivamente

$$d^2 f(x) = f''(x)\,dx^2, \quad \text{donde } dx^2 = (dx)^2. \tag{4}$$

---

[1]) Para esto es suficiente que exista la derivada segunda $f''(x)$.

De este modo obtenemos el teorema.

La diferencial segunda de una función dada es igual al producto de la derivada segunda de esta función por el cuadrado de la diferencial de la variable independiente.

Señalemos que en el caso general la fórmula (4) no puede ser aplicada si x no es una variable independiente, porque dx no puede considerarse aquí como un factor independiente de x.

Si se toma $f(x) = y$, la fórmula (4) se puede escribir así: $d^2y = y''dx^2$; de donde tenemos

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2},$$

es decir, *la derivada segunda de una función dada es igual a la relación entre la diferencial segunda de esta función y el cuadrado de la diferencial de la variable independiente.*

Si x es una variable independiente, entonces tenemos por analogía con la fórmula (4),

$$d^3f(x) = f'''(x)\,dx^3, \quad d^4f(x) = f^{\mathrm{IV}}(x)\,dx^4,$$

etc.

Introduciendo ahora en las fórmulas (4) y (5)

$$f(x) \equiv x.$$

En este caso $f'(x) = 1$, $f''(x) = 0$, $f'''(x) = 0$, . . . Por consiguiente,

$$d^2x = 0,\ d^3x = 0,\ \ldots$$

Obtenemos el teorema.

Las diferenciales de orden superior de una variable independiente son iguales a cero.

EJERCICIOS

Hallar la diferencial dy de las funciones siguientes, si:

1. $y = 3x^2$. 2. $y = x \operatorname{sen} x + \cos x$. 3. $y = \dfrac{x}{1-x^2}$. 4. $y = \sqrt{1-x^2}$. 5. $y = \ln x$. 6. $y = x^2$, donde $x = 2 - t + t^2$.

7. Sea $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 6$. Hallar y comparar Δy y dy si: a) $x = 1$, $\Delta x = 1$; b) $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$.

8. La arista de un cubo es $x = 10$ m. ¿Cuál será el incremento del volumen de este cubo, si su arista se aumenta en $\Delta x = 0{,}1$ m?

Hallar las soluciones exacta y aproximada.

9. Reemplazando el incremento de una función por su diferencial se pide calcular aproximadamente:

a) $\sqrt[3]{0{,}95}$; b) $\cos 60°20'$; c) arctg 1,02.

10. ¿Cuál será el error límite absoluto de la función $y = \operatorname{tg} x$, si $x = 60° \pm 1°$?

11. Hallar dy y d^2y, si $y = e^{-x^2}$.

Capítulo XIII

Integral indefinida

§ 1. Función primitiva. Integral indefinida

El problema fundamental del cálculo diferencial consiste en hallar la diferencial o la derivada de una función dada. El cálculo integral resuelve el **problema inverso:** a partir de la diferencial dada y, por consiguiente, de la derivada de una función incógnita $F(x)$ es necesario hallar esta función. En otras palabras, teniendo la expresión

$$dF(x) = f(x)\,dx \tag{1}$$

o, respectivamente,

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

donde $f(x)$ es una función conocida, hace falta hallar la función $F(x)$. Supondremos, para simplificar, que la igualdad (1) se cumple sobre un cierto intervalo finito o infinito.

La función buscada $F(x)$ se llama en este caso **función primitiva** de la función $f(x)$. De este modo, podemos dar la siguiente definición de la función primitiva.

DEFINICIÓN. *Llámase **función primitiva** de una función dada $f(x)$ en un intervalo dado, a una función $F(x)$ cuya derivada es igual a $f(x)$ o cuya diferencial es igual a $f(x)\,dx$ en el intervalo considerado.*

Por ejemplo, una de las funciones primitivas para la función $3x^2$ será x^3, porque $(x^3)' = 3x^2$. La función primitiva no es única, puesto que $(x^3+1)' = 3x^2$, $(x^3-5)' = 3x^2$, etc., por eso las funciones x^3+1, x^3-5, etc., son también primitivas de la función $3x^2$. Por consiguiente, la función dada tiene un **conjunto infinito** de funciones primitivas.

En nuestro ejemplo, cada dos primitivas se diferencian entre sí por un cierto sumando constante. Mostremos que esto tendrá lugar también en el caso general.

TEOREMA. *Dos primitivas distintas de una misma función definida en un cierto intervalo, se diferencian entre sí en este intervalo en un sumando constante.*

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente sea $f(x)$ una función definida sobre un intervalo $\langle a, b\rangle$, y sean $F_1(x)$ y $F_2(x)$ sus primitivas, es decir,

$$F_1'(x) = f(x) \quad \text{y} \quad F_2'(x) = f(x).$$

De aquí,

$$F_1'(x) = F_2'(x).$$

Pero, si dos funciones poseen derivadas idénticas, ellas se diferencian entre sí en un sumando constante (§ 1 del cap. XI, el corolario 2 del teorema sobre el incremento finito de una función). Por consiguiente,

$$F_1(x) - F_2(x) = C,$$

donde C es una magnitud constante, lo que debíamos demostrar.

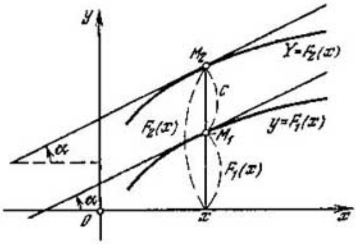

Fig. 128

Interpretación geométrica. Si

$$y = F_1(x) \quad \text{e} \quad Y = F_2(x)$$

son primitivas de una misma función $f(x)$, las tangentes a sus gráficas en puntos de abscisa común x son paralelas: $\operatorname{tg} \alpha = F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ (fig. 128). En tal caso, la distancia entre estas curvas tomada a lo largo del eje Oy, permanece constante:

$$F_2(x) - F_1(x) = C,$$

es decir, estas curvas son, en cierto sentido, «paralelas».

COROLARIO. *Agregando a cualquier primitiva $F(x)$ para la función dada $f(x)$, definida en un intervalo $\langle a, b \rangle$, todas las constantes posibles C, obtendremos todas las primitivas para la función $f(x)$.*

Efectivamente, por una parte, si $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$, es decir, si $F'(x) = f(x)$, entonces la función $F(x) + C$, donde C es una constante arbitraria, debido a que la derivada de una constante es nula, ella es también primitiva de la función $f(x)$, porque

$$[F(x) + C]' = F'(x) + C' = f(x).$$

Por otra parte, acabamos de demostrar que toda primitiva de la función $f(x)$ puede ser obtenida agregando a $F(x)$ un sumando constante elegido C.

Por consiguiente, la fórmula

$$F(x) + C, \tag{2}$$

donde $-\infty < C < +\infty$, y $F(x)$ es una primitiva cualquiera de la función $f(x)$ que agota todo el conjunto de las primitivas de la función $f(x)$.

En adelante supondremos, si no acordamos lo contrario, que la función considerada $f(x)$ está definida y es continua sobre un intervalo acotado o infinito $\langle a, b \rangle$.

Introduzcamos ahora una noción fundamental del cálculo integral, la de integral indefinida.

DEFINICIÓN. *Llámase* **integral indefinida** *de la función* $f(x)$ *o de la expresión diferencial* $f(x)\,dx$, *y se connota con el símbolo*

$$\int f(x)\,dx,$$

la expresión general de todas las primitivas de la función continua $f(x)$.

En este caso, la función $f(x)$ se denomina *función subintegral* y la expresión $f(x)\,dx$ se llama *expresión subintegral*.

Recordando la definición de la función primitiva se puede decir que la integral indefinida $\int f(x)\,dx$ representa sobre un intervalo dado **una función de forma general** cuya diferencial es igual a la expresión subintegral $f(x)\,dx$ y, por consiguiente, una función cuya derivada respecto a la variable x es igual a la función subintegral $f(x)$ en todos los puntos del intervalo examinado.

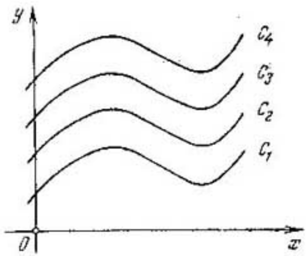

Fig. 129

Sea $F(x)$ una primitiva perfectamente determinada de una función $f(x)$. Como hemos visto, cualquier otra primitiva de esta función es de la forma $F(x) + C$, donde C es una constante. De acuerdo con la definición de integral indefinida, se puede escribir

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{3}$$

donde $F'(x) = f(x)$ y la constante C puede tomar cualquier valor y, por eso, se llama *constante arbitraria*.

EJEMPLO. Como hemos visto, una de las primitivas de la función $3x^2$ es la función x^3. Por eso

$$\int 3x^2dx = x^3 + C.$$

Una integral indefinida geométricamente

$$y = F(x) + C$$

representa una familia de curvas «paralelas» (fig. 129).

De la definición de integral indefinida se deduce que si tenemos una *ecuación diferencial* (es decir, una ecuación que contiene diferenciales) (más detalladamente véase el cap. XIX) de tipo

$$dy = f(x)\,dx,$$

donde la función $f(x)$ es continua sobre un intervalo (a, b), la solución general de esta ecuación para $a < x < b$ es dada por la fórmula

$$y = \int f(x)\, dx.$$

§ 2. Propiedades principales de la integral indefinida

A partir de la fórmula (3) del párrafo precedente, deduzcamos las propiedades principales de la integral indefinida.

I. *La diferencial de una integral indefinida es igual a la expresión subintegral y la derivada de una integral indefinida es igual a la función subintegral.*

Esta propiedad se deduce inmediatamente de la definición de la integral indefinida.

De este modo, tenemos

$$d \int f(x)\, dx = f(x)\, dx \tag{1}$$

y

$$\left[\int f(x)\, dx\right]' = f(x).$$

II. *La integral indefinida de la diferencial de una función continua derivable es igual a esta función, con precisión de hasta un sumando constante.*

Efectivamente, sea

$$\int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)\, dx,$$

donde $\varphi'(x)$ es una función continua. La función $\varphi(x)$ es evidentemente una primitiva de la función $\varphi'(x)$. Por eso tenemos

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C. \tag{2}$$

OBSERVACIÓN En las fórmulas (1) y (2) los signos d y $\int$ que siguen uno tras otro en cualquier orden, se neutralizan (si no se tiene en cuenta el sumando constante). En este sentido, *la diferenciación y la integración son operaciones matemáticas contrarias.*

III. *Se puede sacar un factor constante no nulo del signo de la integral indefinida*, es decir, si la constante $A \neq 0$,

$$\int Af(x)\, dx = A \int f(x)\, dx. \tag{3}$$

Efectivamente, sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$. En virtud de la fórmula (3) del § 1 tenemos

$$A \int f(x)\, dx = A[F(x) + C] = AF(x) + C_1, \tag{4}$$

donde $C_1 = AC$; C y C_1 son constantes arbitrarias para $A \neq 0$. Pero $AF(x)$ es una primitiva de la función $Af(x)$ porque

$$[AF(x)]' = AF'(x) = Af(x).$$

Por eso, de la fórmula (4) se obtiene la fórmula requerida (3).

OBSERVACIÓN. **Para $A = 0$ la fórmula (3) no es válida, puesto que su primer miembro es una constante arbitraria y su segundo miembro es idénticamente igual a cero.**

IV. *La integral indefinida de una suma algebraica de un número finito de funciones continuas, es igual a la suma algebraica de integrales indefinidas de estas funciones*, es decir, si, por ejemplo, las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son continuas sobre un intervalo (a, b), entonces

$$\int [f(x)+g(x)-h(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx - \int h(x)\,dx \qquad (5)$$

para $x \in (a, b)$.

Efectivamente, sean $F(x)$, $G(x)$ y $H(x)$ las primitivas respectivas de las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$, $H'(x) = h(x)$ para $x \in (a, b)$. En virtud de la fórmula (3) del § 1 tenemos

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx - \int h(x)\,dx = [F(x)+C_1] + \\ + [G(x)+C_2] - [H(x)+C_3] = [F(x)+G(x)-H(x)] + C, \qquad (6)$$

donde C_1, C_2, C_3 son constantes arbitrarias y $C = C_1 + C_2 - C_3$ es, evidentemente, una constante arbitraria. Pero la función $F(x) + G(x) - H(x)$ es una primitiva de la función $f(x) + g(x) - h(x)$ porque

$$[F(x) + G(x) - H(x)]' = F'(x) + G'(x) - H'(x) = \\ = f(x) + g(x) - h(x).$$

Por consiguiente,

$$\int [f(x)+g(x)-h(x)]\,dx = F(x)+G(x)-H(x)+C. \qquad (7)$$

De las fórmulas (6) y (7) se deduce la igualdad (5).

§ 3. Tabla de las integrales indefinidas más simples

Aprovechando el hecho de que la integración es una operación inversa de la diferenciación, no es difícil obtener una tabla de las integrales más simples. Para eso partiremos de la fórmula (3) del § 1, la cual parafraseamos ahora del modo siguiente: si

$$dF(x) = f(x)\,dx,$$

entonces

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Tratando las fórmulas de diferenciación dadas, obtenemos

I. Como $d\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right) = x^m\,dx$, entonces $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ $(m \neq -1)$.

II. " $d(\ln|x|) = \frac{dx}{x}$, " $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ (para $x < 0$ y para $x > 0$).

III. " $d(e^x) = e^x\,dx$, " $\int e^x\,dx = e^x + C$.

IV. " $d\left(\frac{a^x}{\ln a}\right) = a^x\,dx$ " $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

V. " $d(\operatorname{sen} x) = \cos x\,dx$, " $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$.

VI. " $d(-\cos x) = \operatorname{sen} x\,dx$, " $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$.

VII. " $d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$, " $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

VIII. " $d(-\operatorname{ctg} x) = \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}$, " $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

IX. Como $\left.\begin{aligned} d(\operatorname{arcsen} x) &= \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ d(-\arccos x) &= \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}\right\}$ entonces $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C = -\arccos x + C_1$.

X. " $\left.\begin{aligned} d(\operatorname{arctg} x) &= \frac{dx}{1+x^2}, \\ d(-\operatorname{arcctg} x) &= \frac{dx}{1+x^2}, \end{aligned}\right\}$ " $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1$.

Para hacer la tabla más completa agregamos dos fórmulas más, cuya validez puede ser verificada por la diferenciación:

XI. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$; $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$.

XII. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln|x + \sqrt{x^2+\alpha}| + C$, donde la constante $\alpha \neq 0$ (véase el § 7).

Puesto que (véase el § 9 del cap. X) d (ch x) = sh $x\,dx$ y d (sh x) = ch $x\,dx$, tenemos otras dos fórmulas útiles.

XIII. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$. **XIV.** $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$.

Las integrales que contiene esta tabla las llamaremos *tabuladas* y es preciso recordarlas bien.

EJEMPLO 1. $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$.

EJEMPLO 2. $\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

§ 4. Independencia del tipo de una integral indefinida, respecto a la elección del argumento

En la tabla de integrales principales (tabuladas) se supuso que x es una variable independiente. Sin embargo, esta tabla conserva completamente su valor, si se entiende por x toda función continuamente diferenciable de una variable independiente.

En efecto, sean: x, una variable independiente; $f(x)$, una función continua en un intervalo dado, y $F(x)$, su primitiva, es decir, $F'(x) = f(x)$. Tenemos

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{1}$$

Supongamos ahora que

$$u = \varphi(x),$$

donde $\varphi(x)$ es una función continuamente diferenciable [1]) y examinemos la integral

$$\int f(u)\,du = \int f(u)\,u'\,dx. \tag{2}$$

En tal caso, *la función compuesta*

$$F(u) = F(\varphi(x)) \tag{3}$$

es primitiva de la función subintegral de la integral (2). Efectivamente, en virtud de la independencia de la diferencial primera respecto a la elección de la variable independiente, obtenemos

$$dF(u) = F'(u)\,du = f(u)\,du \tag{4}$$

y, por consiguiente,

$$\frac{d}{dx}[F(u)] = \frac{dF(u)}{du}\,\frac{du}{dx} = f(u)\,u'. \tag{4'}$$

[1]) Es decir, se supone que la derivada $\varphi'(x)$ es continua.

Por eso

$$\int f(u)\,du = F(u) + C, \tag{5}$$

donde $F'(u) = f(u)$.

De este modo, de la validez de la fórmula (1) se deduce la validez de la fórmula (5); en este caso la última fórmula se obtiene a partir de la precedente por una sustitución formal de x por u. Partiendo de esta propiedad, obtenemos *la tabla generalizada de las integrales más simples*

$$\int u^m\,du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1), \quad \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C, \text{ etc.},$$

donde u es una función cualquiera continuamente derivable de una variable independiente. Esta tabla es el resultado de la inversión de las fórmulas generalizadas de diferenciación (§ 7 del cap. XII).

Eligiendo de diferentes modos la función u, se puede alargar considerablemente la tabla de las integrales más simples.

EJEMPLO. De la fórmula 1 se deduce que

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C. \tag{6}$$

Reemplazando aquí x por sen x se obtiene

$$\int \operatorname{sen} x\, d(\operatorname{sen} x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C, \quad \text{es decir} \quad \int \operatorname{sen} x \cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C.$$

Luego sustituyendo en la fórmula (6), por ejemplo, la función $\ln x$ en lugar de x, tenemos

$$\int \ln x\, d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C \quad \text{o} \quad \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C,$$

etc.

Aquí se hace más comprensible la importancia de saber reducir la expresión diferencial dada $f(x)\,dx$ a la forma de

$$f(x)\,dx = g(u)\,du,$$

donde u es una función de x y g es una función más fácil de integrar que f.

Señalemos una serie de transformaciones de la diferencial, que serán útiles más adelante:

1) $dx = d(x + b)$, donde b es una constante;

2) $dx = \frac{1}{a} d(ax)$, donde la constante $a \neq 0$;

3) $dx = \frac{1}{a} d(ax + b) \quad (a \neq 0)$;

4) $x\,dx = \frac{1}{2} d(x^2)$;

5) $\operatorname{sen} x\,dx = -d(\cos x)$;

6) $\cos x\,dx = d(\operatorname{sen} x)$.

En general

$$\varphi'(x)\,dx = d\varphi(x).$$

Utilizando estas transformaciones de diferenciales calculemos algunas integrales indefinidas.

EJEMPLO 1.

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C \quad (a \neq 0).$$

EJEMPLO 2

$$\int \sqrt{x-2}\,dx = \int (x-2)^{\frac{1}{2}}\,d(x-2) = \frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

EJEMPLO 3.

$$\int \operatorname{sen} 5x\,dx = \frac{1}{5}\int \operatorname{sen} 5x\,d(5x) = -\frac{1}{5}\cos 5x + C.$$

EJEMPLO 4.

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

EJEMPLO 5.

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

EJEMPLO 6.

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

EJEMPLO 7.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

EJEMPLO 8

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \mp\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \mp\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} =$$

$$= \mp\operatorname{arcsen}\frac{1}{x} + C = -\operatorname{arcsen}\frac{1}{|x|} + C, \text{ donde } |x| > 1.$$

EJEMPLO 9.

$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\,d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

§ 5. Noción sobre los métodos principales de integración

Para calcular una integral dada se debe, si es posible, reducirla por un procedimiento u otro a una integral tabulada, para hallar así el resultado buscado. En nuestro curso estudiaremos solamente los procedimientos de integración que se utilizan más frecuentemente y mostraremos su aplicación mediante ejemplos simples.

Los procedimientos de integración más importantes son: 1) *integración por descomposición*; 2) *integración por sustitución*; 3) *integración por partes*.

1. Integración por descomposición. Sea $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$; en este caso, en virtud de la propiedad IV del § 2 tenemos

$$\int f(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$$

Si es posible, los sumandos $f_1(x)$ y $f_2(x)$ se eligen de tal modo que sus integrales se calculen directamente.

EJEMPLO 1.

$$\int (1-\sqrt{x})^2\,dx = \int (1-2\sqrt{x}+x)\,dx = \int dx - \int 2\sqrt{x}\,dx + \int x\,dx =$$
$$= \int dx - 2\int x^{1/2}\,dx + \int x\,dx = x - 2\,\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} +$$
$$+ C = x - \frac{4}{3}\,x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C.$$

OBSERVACION. No es necesario poner después de cada sumando una constante arbitraria porque su suma es también una constante arbitraria que escribimos al final.

EJEMPLO 2

$$\int \frac{x^4-6x^3-8x^2+9x-5}{x^2}\,dx = \int \left(x^2-6x-8+\frac{9}{x}-\frac{5}{x^2}\right)dx =$$
$$= \int x^2\,dx - 6\int x\,dx - 8\int dx + 9\int \frac{dx}{x} - 5\int x^{-2}\,dx = \frac{x^3}{3} - 6\cdot\frac{x^2}{2} -$$
$$-8x + 9\ln|x| - 5\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^3}{3} - 3x^2 - 8x + 9\ln|x| + \frac{5}{x} + C.$$

EJEMPLO 3.

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

EJEMPLO 4. $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx.$

Puesto que $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, entonces

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x\,d(2x) =$$
$$= \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C.$$

EJEMPLO 5. $\int \operatorname{sen} x \cos 3x \, dx$.

Puesto que $\operatorname{sen} x \cos 3x = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x)$, tenemos

$$\int \operatorname{sen} x \cos 3x \, dx = \frac{1}{2} \int (\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x) \, dx = \frac{1}{8} \int \operatorname{sen} 4x \, d(4x) -$$
$$- \frac{1}{4} \int \operatorname{sen} 2x \, d(2x) = -\frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

2. Integración por sustitución (método de introducción de una nueva variable).

Sean: $f(x)$, una función continua sobre un intervalo (a, b), y $x = \varphi(t)$ una función continuamente derivable sobre un intervalo (α, β), además la función φ aplica el intervalo (α, β) en el intervalo (a, b).

Debido a que la integral indefinida es independiente de la elección del argumento (§ 4) y teniendo en cuenta que $dx = \varphi'(t)\, dt$, obtenemos *la fórmula de cambio de variable en una integral indefinida*

$$\int f(x) \, dx = \int f(\varphi(t)) \, \varphi'(t) \, dt. \tag{1}$$

La integral del segundo miembro de la igualdad (1) puede ser más simple que la del primer miembro de esta igualdad, o incluso pertenecer a las tabuladas.

Examinemos algunos ejemplos.

EJEMPLO 6. $\int x \sqrt{x-5} \, dx$.

Para eliminar la raíz, hacemos $\sqrt{x-5} = t$. De aquí, $x = t^2 + 5$ y, por consiguiente, $dx = 2t \, dt$.

Efectuando la sustitución, se obtiene, sucesivamente,

$$\int x \sqrt{x-5} \, dx = \int (t^2+5)\, t \cdot 2t \, dt = \int (2t^4 + 10t^2) \, dt = 2 \int t^4 \, dt + 10 \int t^2 dt =$$
$$= 2 \cdot \frac{t^5}{5} + 10 \cdot \frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5} (x-5)^{5/2} + \frac{10}{3} (x-5)^{3/2} + C.$$

EJEMPLO 7. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \ (a > 0)$.

Aquí es cómodo aplicar una sustitución trigonométrica $x = a \operatorname{sen} t$, de donde $dx = a \cos t \, dt$. Por consiguiente,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 t} \cdot a \cos t \, dt = a^2 \int \cos^2 t \, dt =$$
$$= \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) \, dt = \frac{a^2}{2} \int dt + \frac{a^2}{4} \int \cos 2t \, d(2t) = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \operatorname{sen} 2t + C.$$

Volviendo a la variable x, tendremos

$$\operatorname{sen} t = \frac{x}{a} \quad \text{y} \quad t = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}.$$

Luego,

$$\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t = 2 \operatorname{sen} t \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} = 2\,\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Por eso obtendremos definitivamente

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C. \qquad (2)$$

A veces es útil aplicar la fórmula (1) escribiéndola de derecha a izquierda:

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = \int f[\varphi(x)]\,d\varphi(x), \qquad (3)$$

o

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt,$$

donde

$$t = \varphi(x).$$

En la práctica es deseable no introducir una nueva variable t, limitándose a aplicar la fórmula (1). Los ejemplos más simples de este tipo han sido examinados en el § 4. Aquí examinaremos algunos ejemplos más.

EJEMPLO 8. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\operatorname{ctg} x}}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx.$

Tomando $t = 1+\operatorname{ctg} x$, $dt = -\dfrac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}$, tendremos

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\operatorname{ctg} x}}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -\int (1+\operatorname{ctg} x)^{1/3} d(1+\operatorname{ctg} x) =$$

$$= -\int t^{1/3}\,dt = -\frac{3}{4}\,t^{4/3} + C = -\frac{3}{4}(1+\operatorname{ctg} x)^{4/3} + C.$$

EJEMPLO 9. $\displaystyle\int \left(\ln x + \frac{1}{\ln x}\right)\frac{dx}{x}.$

Puesto que $\dfrac{dx}{x} = d(\ln x)$, tenemos

$$\int \left(\ln x + \frac{1}{\ln x}\right)\frac{dx}{x} = \int \ln x\, d(\ln x) + \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \frac{1}{2}\ln^2 x + \ln|\ln x| + C.$$

EJEMPLO 10.

$$\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}-1} = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C$$

(véase la fórmula XI del § 3).

3. Integración por partes. Sean u y v dos funciones de x continuamente derivables. De acuerdo con la fórmula de la diferencial de un producto (la V del § 7 del cap. XII) tenemos

$$d\,(uv) = u\,dv + v\,du;$$

de donde

$$u\,dv = d\,(uv) - v\,du.$$

Integrando obtendremos

$$\int u\,dv = \int d\,(uv) - \int v\,du,$$

o definitivamente

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (4)$$

Esto es *la fórmula de integración por partes.*

La fórmula deducida muestra que la integral $\int u\,dv$ se reduce a la integral $\int v\,du$ que puede resultar más simple que la integral inicial o incluso pertenecer a las tabuladas.

Examinemos algunos ejemplos.

EJEMPLO 11. $\int \ln x\,dx.$

Haciendo aquí $u = \ln x$ y $dv = dx$, obtendremos $du = d \ln x = \frac{dx}{x}$ y $v = x.$

Por consiguiente, en virtud de la fórmula (4), tendremos

$$\int \ln x\,dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C.$$

EJEMPLO 12. $\int x \cos x\,dx.$

Tomando $u = x$ y $dv = \cos x\,dx$, tenemos $du = dx$ y $v = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x.$ Aplicando la fórmula de integración por partes (4), obtendremos

$$\int x \cos x\,dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

En la práctica se puede aprender a emplear la fórmula (4) sin escribir aparte las expresiones para las funciones u y v.

EJEMPLO 13.

$$\int x \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{arctg} x\,d\,(x^2+1) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[(x^2+1) \operatorname{arctg} x - \int (x^2+1)\,d \operatorname{arctg} x \right] =$$

$$= \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int (x^2+1) \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\,x + C.$$

§ 6. Integración de fracciones racionales con denominadores de segundo grado

Se trata de calcular las integrales de tipo

$$\int \frac{P(x)}{ax^2+bx+c}\,dx, \tag{1}$$

donde $P(x)$ es un polinomio entero y a, b, c son constantes, $a \neq 0$. Al dividir el numerador $P(x)$ por el denominador ax^2+bx+c obtenemos un polinomio $Q(x)$ como cociente y un binomio lineal $mx+n$ como resto (porque el grado del resto es inferior al grado del divisor), de donde

$$\frac{P(x)}{ax^2+bx+c} = Q(x) + \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}.$$

La integral del polinomio $Q(x)$ se calcula inmediatamente; por eso mostraremos cómo se calculan las integrales de tipo

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Deduzcamos primeramente dos integrales fundamentales.

I. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C \quad (a \neq 0),$

es decir,

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C \quad (a \neq 0). \tag{2}$$

II. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} \quad (a \neq 0).$

Tenemos

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a}\,\frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right).$$

De aquí,

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right) = \frac{1}{2a}\left[\int\frac{d(x-a)}{x-a}-\int\frac{d(x+a)}{x+a}\right] = \frac{1}{2a}\left[\ln|x-a|-\ln|x+a|\right]+C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

Entonces (comparar con el § 3 del cap. XI),

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0). \tag{3}$$

Los resultados (2) y (3) se deben guardar en la memoria. Agregamos a las integrales I y II la integral

$$\text{III.} \int \frac{x\,dx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 \pm a^2)}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} \ln |x^2 \pm a^2| + C.$$

EJEMPLO 1.

$$\int \frac{dx}{2x^2+3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(x\sqrt{2})}{(x\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \left(x \sqrt{\frac{2}{3}} \right) + C.$$

EJEMPLO 2. $\int \frac{dx}{x^2-5} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}} \right| + C.$

El procedimiento principal para calcular la integral (1) es el siguiente: el trinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$ se completa hasta que haya un cuadrado perfecto[1]). Luego, si el coeficiente $m = 0$, la integral (1) se reduce a la integral I ó a la integral II. Si $m \neq 0$, la integral (1) se reduce a las integrales I y III ó a las integrales II y III. Con unos ejemplos mostraremos de qué modo hay que hacerlo.

EJEMPLO 3.

$$\int \frac{dx}{x^2-10x+16} = \int \frac{dx}{(x^2-2\cdot 5x+25)+(16-25)} =$$
$$= \int \frac{d(x-5)}{(x-5)^2-3^2} = \frac{1}{2\cdot 3} \ln \left| \frac{(x-5)-3}{(x-5)+3} \right| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-8}{x-2} \right| + C.$$

EJEMPLO 4.

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+4} = \int \frac{dx}{\left(x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)+\left(4-\frac{9}{4}\right)} =$$
$$= \int \frac{d\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{7}} + C.$$

EJEMPLO 5. $I = \int \frac{x\,dx}{x^2+x+1} = \int \frac{x\,dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$. Hacemos $x+\frac{1}{2}=t$, de donde $x = t-\frac{1}{2}$ y $dx = dt$.

[1]) Suponemos que el trinomio de segundo grado no es un cuadrado perfecto.

Por consiguiente,

$$I=\int \frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\int \frac{t\,dt}{t^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}}-$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

EJEMPLO 6. $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+1}$.

Al dividir x^4 por x^2+1, tenemos $\frac{x^4}{x^2+1}=x^2-1+\frac{1}{x^2+1}$, de donde

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx=\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\int x^2\,dx-\int dx+\int \frac{dx}{x^2+1}=\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg} x+C.$$

OBSERVACIÓN. Si el trinomio de segundo grado ax^2+bx+c posee raíces reales y diferentes x_1 y x_2, entonces, como se demuestra en los cursos de análisis más detallados, para calcular la integral (1) se puede descomponer la función subintegral en fracciones simples:

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\equiv\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}, \tag{4}$$

donde A y B son coeficientes indefinidos. Los números A y B se calculan mediante una reducción de la identidad (4) a un tipo entero e igualando los coeficientes de mismas potencias de x en la igualdad obtenida.

EJEMPLO 7. Hallar $I=\int \frac{x+2}{x^2+5x-6}\,dx$.

Igualando el denominador a cero, obtenemos la ecuación $x^2+5x-6=0$; hallamos sus raíces: $x_1=1$ y $x_2=-6$. De acuerdo con la fórmula (4) tenemos

$$\frac{x+2}{x^2+5x-6}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+6}. \tag{5}$$

De aquí, al liberarse del denominador y teniendo en cuenta que

$$x^2+5x-6=(x-1)(x-6)$$

obtendremos $x+2\equiv A(x+6)+B(x-1)$, o

$$x+2\equiv(A+B)x+(6A-B). \tag{6}$$

Igualando entre sí los coeficientes de iguales potencias de x en el primero y el segundo miembros de la última igualdad tendremos

$$\left.\begin{array}{l} A+B=1, \\ 6A-B=2. \end{array}\right\}$$

Por consiguiente, $A=\frac{3}{7}$, $B=\frac{4}{7}$.

Notemos que los coeficientes A y B pueden determinarse de modo muy simple a partir de la identidad (6), considerando primeramente que $x=1$ de donde $3=A\cdot 7$ y $A=\frac{3}{7}$, y luego, considerando que $x=-6$, esto nos da $-4=B(-7)$ y $B=\frac{4}{7}$.

Por medio del desarrollo (5) obtenemos

$$I=\frac{3}{7}\int\frac{d(x-1)}{x-1}+\frac{4}{7}\int\frac{d(x+6)}{x+6}=$$
$$=\frac{3}{7}\ln|x-1|+\frac{4}{7}\ln|x+6|+C=\frac{1}{7}\ln\{|x-1|^3(x+6)^4\}+C.$$

§ 7. Integración de irracionalidades simples

1. Si la expresión subintegral contiene solamente una irracionalidad **lineal** $\sqrt[n]{ax+b}$ $(a\neq 0)$, es útil efectuar la sustitución

$$t=\sqrt[n]{ax+b}.$$

EJEMPLO 1. Hallar $I=\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x+1}}$.

Consideramos que $t=\sqrt[3]{x+1}$, de donde $x=t^3-1$ y $dx=3t^2\,dt$.

Tenemos

$$I=\int\frac{(t^3-1)\cdot 3t^2\,dt}{t}=3\int(t^4-t)\,dt=\frac{3}{5}t^5-\frac{3}{2}t^2+C=$$
$$=\frac{3}{5}(x+1)^{5/3}-\frac{3}{2}(x+1)^{2/3}+C.$$

2. La integral de una irracionalidad **cuadrática** simple

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

con ayuda del complemento del trinomio del segundo grado ax^2+ $+bx+c$ hasta un cuadrado perfecto, se reduce a una de las dos integrales

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha\pm x^2}}$$

cuyos cálculos se dan más abajo.

I. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} \quad (\alpha \neq 0)$.

Aplicamos aquí *la sustitución de Euler*

$$\sqrt{x^2+\alpha} = t - x,$$

donde t es una nueva variable. Elevando al cuadrado los dos miembros de esta igualdad tendremos $x^2 + \alpha = t^2 - 2tx + x^2$, o sea,

$$\alpha = t^2 - 2tx.$$

Diferenciando los dos miembros de la última igualdad obtendremos $0 = 2t\,dt - 2x\,dt - 2t\,dx$, o sea,

$$t\,dx = (t - x)\,dt.$$

De aquí

$$\frac{dx}{t-x} = \frac{dt}{t}, \quad \text{es decir,} \quad \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \frac{dt}{t}.$$

De este modo, tenemos

$$\int \frac{dt}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C.$$

Por último expresando t en función de x, hallamos definitivamente la integral tabulada XII (§ 3)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln|x + \sqrt{x^2+\alpha}| + C \quad (\alpha \neq 0). \tag{1}$$

Hace falta guardar en la memoria esta fórmula.

EJEMPLO 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}$.

Aplicando la fórmula (1) tenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}}.$$

Considerando aquí $x-3=t$, obtendremos sucesivamente

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = \ln(t + \sqrt{t^2+4}) + C.$$

Puesto que $t = x - 3$, tendremos definitivamente

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}} = \ln[x-3+\sqrt{(x-3)^2+4}] + C =$$

$$= \ln(x-3+\sqrt{x^2-6x+13}) + C.$$

II. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$

EJEMPLO 3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} + C =$$

$$= \operatorname{arcsen} \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C.$$

§ 8. Integración de funciones trigonométricas

Para las aplicaciones es importante saber calcular las integrales

$$I = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx,$$

donde m y n son números enteros no negativos.

Aquí hay dos casos:

1) por lo menos uno de exponentes m o n es un número impar;

2) los dos exponentes m y n son números pares.

En el primer caso la integral I se calcula inmediatamente.

EJEMPLO 1. Hallar $I = \int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$.

Consideramos sucesivamente

$$I = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x (\operatorname{sen} x \, dx) = -\int (1-\cos^2 x) \cos^2 x d(\cos x) =$$

$$= -\int \cos^2 x \, d(\cos x) + \int \cos^4 x \, d(\cos x) = -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + C.$$

En el segundo caso, para calcular la integral I se utilizan las fórmulas del argumento doble:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x.$$

EJEMPLO 2. Hallar $I = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$.

Tenemos

$$I = \int (\operatorname{sen} x \cos x)^2 \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right)^2 \frac{1+\cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \operatorname{sen}^2 2x (1+\cos 2x) \, dx = \frac{1}{8} \int \operatorname{sen}^2 2x \, dx + \frac{1}{8} \int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x \, dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{1-\cos 4x}{2} dx + \frac{1}{16} \int \operatorname{sen}^2 2x \, d(\operatorname{sen} 2x) =$$

$$= \frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{16} \int \cos 4x \, dx + \frac{1}{16} \cdot \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{3} =$$

$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 2x + C.$$

En la teoría de series de Fourier (el § 17 del cap. XXI) tienen mucha importancia las integrales

$$\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx, \quad \int \cos mx \cos nx\, dx, \quad \int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx.$$

Ellas se calculan a partir de las fórmulas trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)].$$

EJEMPLO.

$$\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 5x\, dx=\frac{1}{2}\int(\cos 4x-\cos 6x)\, dx=\frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x-\frac{1}{12}\operatorname{sen} 6x+C.$$

§ 9. Integración de algunas funciones trascendentes

La integral

$$\int P(x)\, e^{ax}\, dx,$$

donde $P(x)$ es un polinomio, se calcula por el método de integración por partes que se aplica el número de veces necesario.

EJEMPLO.

$$\int x^2e^{2x}\, dx=\frac{1}{2}\int x^2\, d(e^{2x})=\frac{x^2}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot 2x\, dx=\frac{x^2}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\int x\, d(e^{2x})=$$

$$=\frac{x^2}{2}e^{2x}-\frac{x}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}\int e^{2x}\, dx=\frac{x^2}{2}e^{2x}-\frac{x}{2}e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+C=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)e^{2x}+C.$$

Por un procedimiento análogo se calculan las integrales de tipo

$$\int P(x)\operatorname{sen} ax\, dx \quad \text{y} \quad \int (P(x)\cos ax\, dx,$$

donde $P(x)$ es un polinomio.

§ 10. Teorema de Cauchy. Noción sobre las integrales "incalculables"

Hasta aquí hemos sabido hallar para ciertas funciones continuas $f(x)$ sus integrales indefinidas

$$\int (f(x)\, dx.$$

Se puede preguntar, si es siempre así, es decir, 1) si toda función continua $f(x)$ posee una integral indefinida y 2) si esa integral existe, mediante qué procedimiento se puede hallarla.

De respuesta a la primera parte de esta pregunta sirve el teorema de Cauchy que es el teorema fundamental del cálculo integral.

TEOREMA DE CAUCHY. *Toda función continua tiene su primitiva.*

En otras palabras, *para cada función $f(x)$ continua en un intervalo (a, b), existe una función $F(x)$ cuya derivada en el intervalo (a, b) es exactamente igual a la función dada $f(x)$, es decir,*

$$F'(x) = f(x).$$

Por eso existe una integral indefinida

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

donde C es una constante arbitraria.

La demostración de este teorema, debido a su complejidad, no se incluye en esta obra.

Con esto el teorema no responde a la segunda parte de nuestra pregunta: si se da una función continua $f(x)$, de qué modo se puede hallar su integral indefinida. El teorema de Gauchy no afirma que la primitiva de una función dada puede ser realmente hallada con ayuda de un número finito de operaciones conocidas y que la respuesta puede ser expresada por funciones elementales (algebraicas, exponenciales, trigonométricas, etc.). Además existen funciones elementales continuas cuyas integrales no son funciones elementales. Tales integrales se llaman frecuentemente **«incalculables»**, entendiendo por esto que ellas no pueden ser expresadas con ayuda de un número finito de funciones elementales.

Por ejemplo, se puede demostrar que las integrales

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}$$

y muchas otras no se reducen a una combinación finita de funciones elementales y, por consiguiente, son «incalculables» en nuestra acepción de la palabra.

EJERCICIOS

Consultando la tabla de integrales simples se pide hallar las integrales indefinidas siguientes:

1. $\int (x^2-3x+1)\,dx.$ 2. $\int \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 dx.$

3. $\int \frac{x-2\sqrt{x}+2}{x^2\sqrt[3]{x}}\,dx.$ 4. $\int (a^x+b^x)^2\,dx.$

5. $\int (\operatorname{sen} 3x+\cos 5x)\,dx.$ 6. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}.$

INDICACIÓN. Aplicar la identidad: $1=\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x$.

7. $\int \frac{dx}{x^2+2}$. 8. $\int \frac{dx}{2-3x^2}$. 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

10. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$. 11. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

12. $\int \frac{x\,dx}{1+x^2}$. 13. $\frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$.

Aplicando el procedimiento de descomposición se pide hallar las integrales:

14. $\int \frac{x^2}{1-x}\,dx$. 15. $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$. 16. $\int \frac{x^2}{1-x^2}\,dx$.

17. $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\,dx$. 18. $\int \frac{dx}{4-x^2}$.

19. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$. 20. $\int \cos^2 5x\,dx$.

21. $\int \operatorname{sen} x \cos 7x\,dx$. 22. $\int \cos 3x \cos 5x\,dx$.

Aplicando las sustituciones indicadas se pide hallar las integrales siguientes:

23. $\int x\sqrt{x-1}\,dx \quad (\sqrt{x-1}=t)$. 24. $\frac{dx}{1+\sqrt{x}} \quad (\sqrt{x}=t)$.

25. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} \quad (x=\operatorname{sen} t)$.

26. $\int \frac{dx}{1+2e^x} \quad (e^x=t)$.

Aplicando el procedimiento de integración por partes se pide calcular las integrales:

27. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$. 28. $\int x\ln x\,dx$. 29. $\int x\operatorname{sen} x\,dx$.

30. $\int xe^x\,dx$. 31. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$. 32. $\int x^2e^x\,dx$.

Hallar las integrales de las fracciones racionales siguientes:

33. $\int \frac{dx}{3x^2+7}$. 34. $\int \frac{dx}{5x^2-2}$. 35. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

36. $\int \frac{dx}{1+x+x^2}$. 37. $\int \frac{dx}{x^2-3x+1}$.

38. $\int \frac{dx}{x^2+8x-9}$. 39. $\int \frac{3x+5}{x^2+8x+15}\,dx$.

40. $\int \frac{x^2}{x^2+4x+5}\,dx$.

Hallar las integrales de las funciones irracionales

41. $\int \sqrt[3]{2x-3}\,dx$. 42. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}\,dx$. 43. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$.

44. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$. 45. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$. 46. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$.

47. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$.

Hallar las integrales de funciones trigonométricas:

48. $\int \operatorname{sen} x \cos^3 x\,dx$. 49. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$.

50. $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$. 51. $\int \cos^4 x\,dx$.

52. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(x+\alpha)\,dx$. 53. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

INDICACIÓN. Aplicar la fórmula $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$.

Hallar las integrales de funciones transcendentes:

54. $\int x^2 e^{-x}\,dx$. 55. $\int (x^2+2x+3)\,e^x\,dx$.

56. $\int (x-1) \operatorname{sen} 2x\,dx$. 57. $\int e^{-2x} \cos 3x\,dx$.

58. $\int x \operatorname{arcctg} x\,dx$. 59. $\int \ln^2 x\,dx$. 60. $\int \operatorname{arcsen} x\,dx$.

Capítulo XIV

Integral definida

§ 1. Noción sobre integral definida

Sean $f(x)$ una función continua en un segmento dado $[a, b]$, donde $a < b$ o $a > b$ y $F(x)$ una función primitiva de $f(x)$ (véase el § 1 del cap. XIII), es decir, $F'(x) = f(x)$ para $x \in [a, b]$.

DEFINICIÓN. *Por **integral definida***

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

de una función dada $f(x)$ continua en un segmento dado $[a, b]$ se entiende el incremento correspondiente de la primitiva de esta función, es decir

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{2}$$

(fórmula de Newton — Leibniz).

Además, se considera que

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

para toda función $f(x)$ definida en el punto a (a es arbitrario). De este modo, la fórmula (2) es también justa para $a = b$.

En la expresión (1) los números a y b se denominan *límites de integración*, *inferior* y *superior*, respectivamente; $[a, b]$ se llama *intervalo de integración*, y $f(x)$, *función subintegral*. La fórmula (2) puede ser expresada en forma de una **regla**: *la integral definida es igual a la diferencia de los valores que toma la primitiva de la función subintegral en los límites de integración superior e inferior*. Al introducir para la diferencia la notación

$$F(b) - F(a) = F(x)\,|_a^b,$$

donde la línea vertical se llama *interpolación*, la fórmula (2) puede ser escrita así

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,|_a^b, \tag{3}$$

hace falta recordar que para descifrar la interpolación se pone primeramente el **límite superior** y luego el **inferior**.

EJEMPLO. Calcular la integral de x^2 entre 2 y 4.

Ya que la una de primitivas de x^2 es $\frac{1}{3}x^3$, la fórmula (3) nos da

$$\int_2^4 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^4 = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = 18\frac{2}{3}.$$

Notemos que el resultado será el mismo, si se utiliza otra primitiva de x^2, por ejemplo, $\frac{x^3}{3} + 1$ ó $\frac{x^3}{3} - 2$, etc. Este fenómeno es de carácter general.

TEOREMA. *La integral definida de una función continua no depende de la elección de la primitiva para la función subintegral.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $F(x)$ y $F_1(x)$ dos primitivas diferentes de la función subintegral $f(x)$ de la integral (1) continua en un intervalo $[a, b]$. En virtud del teorema fundamental para la integral indefinida (§ 1 del cap. XIII) tenemos

$$F_1(x) = F(x) + C,$$

donde C es una magnitud constante. De aquí,

$$F_1(x)\,|_a^b = F_1(b) - F_1(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] =$$
$$= F(b) - F(a) = F(x)\,|_a^b = \int_a^b f(x)\,dx,$$

lo que se debía demostrar.

COROLARIO.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int (f(x)\,dx\,|_a^b, \tag{4}$$

donde se entiende por $\int f(x)\,dx$ *una de las primitivas de la función* $f(x)$.

La fórmula (4) establece la relación entre la integral definida y la integral indefinida correspondiente. Señalemos una diferencia formal que existe entre ellas: la integral definida es un **número**, mientras que la integral indefinida es una **función**.

Según el teorema de Cauchy (véase el § 10 del cap. XIII) toda función continua sobre un segmento posee una primitiva, de donde se deduce el teorema siguiente:

TEOREMA. *Para toda función continua en un segmento* $[a, b]$ *existe una integral definida correspondiente.*

OBSERVACIÓN. Sea $y' = f(x)$, es decir,

$$dy = f(x)\,dx. \tag{5}$$

La integración de la igualdad (5) dentro de los límites de a hasta b nos da

$$y(b) - y(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{6}$$

Esta última fórmula se aplica frecuentemente en la práctica.

El estudio de integrales indefinidas y definidas, así como de sus aplicaciones, es el objeto del *cálculo integral.*

§ 2. Integral definida con su límite superior variable

Sea $f(x)$ una función continua sobre un segmento $[a, b]$. Examinemos la integral

$$\int_a^x f(t)\,dt, \tag{1}$$

donde $t \in [a, x] \subset [a, b]$ (para evitar toda confusión hemos designado la variable de integración por otra letra).

Si $F(x)$ es una **primitiva** de la función $f(x)$, es decir,

$$F'(x) = f(x),$$

según la fórmula de Newton — Leibniz tenemos

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a). \tag{2}$$

De aquí

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}[F(x) - F(a)] = F'(x) - [F(a)]' = f(x) - 0 = f(x).$$

Por consiguiente, la derivada de una integral definida con el límite superior variable respecto a este último es igual al valor de la función subintegral para este límite:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \tag{3}$$

De este modo, la integral

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{4}$$

es una **primitiva** de la función subintegral $f(x)$. Notemos que de la fórmula (2) se deduce que $\Phi(a) = 0$, es decir, $\Phi(x)$ es **aquella de las primitivas de la función $f(x)$ que se anula cuando $x = a$.**

EJEMPLO. Tenemos

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt=\sqrt{1+x^2}.$$

Examinemos ahora una integral definida con el límite inferior variable

$$\int_x^b f(t)\,dt,$$

donde $x\in[a,b]$.

De acuerdo con la fórmula de Newton — Leibniz tenemos

$$\frac{d}{dx}\left[\int_x^b f(x)\,dx\right]=\frac{d}{dx}[F(b)-F(x)]=[F(b)]'-F'(x)=-f(x).$$

De este modo, *la derivada de una integral definida con el límite inferior variable respecto a este último es igual al valor de la función subintegral para este límite, tomado con el signo opuesto.*

OBSERVACIÓN. Si una función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, entonces, en virtud de la relación que existe entre la integral indefinida y la función primitiva (§ 1 del cap. XIII), tendremos

$$\int f(x)\,dx=C+\int_a^x f(t)\,dt$$

para $a\leqslant x\leqslant b$, donde C es una constante arbitraria.

§ 3. Interpretación geométrica de la integral definida

Examinemos el área $S(x)$ [1] de un trapecio curvilíneo variable (fig. 130) que está limitado por arriba por una curva continua $Y =$

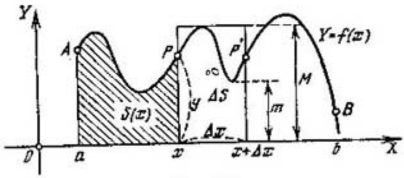

Fig. 130

$= f(X)$ $(a\leqslant X\leqslant b,\ f(X)\geqslant 0)$, por abajo por el eje OX $(Y = 0)$, a la izquierda por una vertical fija $X = a$ y a la derecha por una vertical móvil $X = x$ $(a\leqslant x\leqslant b)$.

[1]) Sobre la noción de área véase la nota para el teorema del § 9.

Se puede imaginar que una inundación se produce a lo largo del eje OX de tal modo que el frente de agua se desplaza de izquierda a derecha

Consideremos que x obtiene un incremento Δx (para mayor certeza supongamos que $\Delta x > 0$). En este caso el área variará en una magnitud ΔS (fig. 130) que representa el área de la banda limitada por el arco $\widehat{PP'}$ de la curva, el eje OX y dos verticales $X = x$ y $X = x + \Delta x$. Hagamos

$$m = \min_{x \leqslant X \leqslant x+\Delta x} f(X)$$

y

$$M = \max_{x \leqslant X \leqslant x+\Delta x} f(X).$$

Comparando el área ΔS con las áreas de los rectángulos que tienen Δx como base común y m y M como alturas, tendremos

$$m\,\Delta x \leqslant \Delta S \leqslant M\,\Delta x\ ^{1)}, \tag{1}$$

de donde

$$m \leqslant \frac{\Delta S}{\Delta x} \leqslant M. \tag{2}$$

Supongamos ahora que $\Delta x \to +0$. En este caso, en virtud de la continuidad de la función $f(X)$, tenemos

$$m \to f(x) \quad \text{y} \quad M \to f(x), \tag{3}$$

de donde, de acuerdo con el teorema sobre el límite de una varible intermedia (§ 8 del cap. VII), obtenemos

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x).$$

Análogamente, para $\Delta x \to -0$ tendremos

$$\lim_{x \to -0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x).$$

Por consiguiente, existe un límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{dS}{dx} = f(x). \tag{4}$$

De este modo, *la derivada del área de un trapecio curvilíneo variable es igual para todo valor del argumento $X = x$ a su ordenada de frontera $y = f(x)$* **(teorema de Newton-Leibniz)**

---

[1]) Aquí la igualdad no se excluye, porque la función $f(X)$ puede ser constante.

Mediante la fórmula (4) obtenemos

$$dS = f(x)\,dx. \tag{5}$$

Sea S el área total del trapecio curvilíneo (fig. 130) limitada por la curva $Y = f(X)$, el eje OX y dos verticales $X = a$ y $X = b$. Integrando la igualdad (5) dentro de los límites a y b y teniendo en cuenta que $S(a) = 0$, tendremos mediante la fórmula (6) del § 1

$$S = S(b) - S(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{6}$$

De este modo, la *integral definida* (6) *de una función continua no negativa es igual, para* $a \leqslant b$, *al área del trapecio curvilíneo correspondiente* [1]) **(interpretación geométrica de la integral definida).**

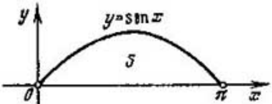

Fig. 131

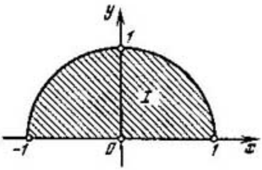

Fig. 132

EJEMPLO 1. Calcular el área S de una semionda de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ (fig. 131).

Partiendo de la interpretación geométrica de la inegral definida tenemos

$$S = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2$$

(unidades cuadradas correspondientes).

EJEMPLO 2. Aclarar la interpretación geométrica de la integral

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \tag{7}$$

y utilizándola, calcular la integral.

Como $y = \sqrt{1 - x^2}$ es la ecuación de la semicircunferencia superior $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$, la integral I representa el área de un semicírculo de radio 1 (fig. 132).

Por eso $I = \pi/2$; este resultado puede ser también obtenido por un cálculo directo de la integral (7).

[1]) Para el área del trapecio curvilíneo en el caso de la función $f(x)$ que cambia su signo véase la observación del § 5.

§ 4. Interpretación física de la integral definida

PROBLEMA. Conociendo la velocidad de movimiento rectilíneo $v = v(t)$ de un punto, se pide hallar el camino recorrido por este punto durante un intervalo de tiempo $0 \leqslant t \leqslant T$.

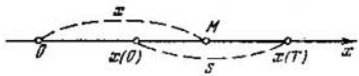

Fig. 133

Suponiendo que la trayectoria del punto es el eje Ox (fig. 133) y $x = x(t)$ es la ecuación del movimiento, tendremos (§ 2 del cap. IX)

$$v(t) = \frac{dx}{dt}. \tag{1}$$

De aquí

$$dx = v(t)\,dt. \tag{2}$$

Integrando la igualdad (2) dentro de los límites de 0 hasta T, obtendremos el camino recorrido por el punto durante el tiempo T:

$$s = x(T) - x(0) = \int_0^T v(t)\,dt\ ^{1)}. \tag{3}$$

OBSERVACIÓN. De la (3) se deduce la ecuación de movimiento del punto

$$x = x_0 + \int_0^t v(t)\,dt,$$

donde $x_0 = x(0)$.

EJEMPLO. Se considera que un cohete se lanza verticalmente. ¿A qué altura subirá el cohete en 10 s, si su velocidad varía según la ley

$$v = 2 + \frac{1}{(t+1)^2}\ \frac{\text{km}}{\text{s}}\ ?$$

¿Cuál es la velocidad de vuelo media del cohete durante este intervalo de tiempo?

El camino recorrido por el cohete durante 10 s es igual a

$$s = \int_0^{10} \left[2 + \frac{1}{(t+1)^2}\right] dt = \left(2t - \frac{1}{t+1}\right)\Big|_0^{10} = \left(20 - \frac{1}{11}\right) - (0-1) \approx$$

$\approx 21{,}09$ km.

Por eso la velocidad media correspondiente del cohete es igual a

$$v_{\text{med}} = \frac{21{,}09}{10} = 2{,}109 \text{ km/s}.$$

---

[1]) De un modo más preciso la fórmula (3) da el incremento de la abscisa del punto en movimiento, es decir, *el desplazamiento del punto durante el tiempo T*. El camino recorrido será obtenido en el caso cuando la velocidad $v(t)$ no cambia de signo, es decir, se desplaza siempre en el mismo sentido (véase el § 2 del cap. IX).

§ 5. Propiedades principales de la integral definida

Para establecer las propiedades principales de la integral definida partiremos de la fórmula de Newton — Leibniz (§ 1):

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{1}$$

donde la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y $F'(x) = f(x)$ para $x \in [a, b]$.

Para más claridad dividamos todas las propiedades de la integral definida en grupos.

A. Propiedades generales.

I. *El valor de la integral definida no depende de la designación de la variable de integración*, es decir,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt,$$

donde x, t, son letras cualesquiera.

Esta propiedad se deduce directamente de la fórmula (1).

Se puede establecer la siguiente analogía: los documentos diplomáticos con idéntico contenido escritos en diferentes lenguas son auténticos.

II. *La integral definida que tiene límites de integración idénticos es igual a cero* (en virtud del convenio adoptado).

Notemos que esta proposición corresponde a la fórmula de Newton — Leibniz:

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0.$$

III. *Si se permutan los dos límites de integración de una integral definida, ésta toma el valor opuesto.*

Efectivamente, si permutamos los límites de integración, la fórmula (1) nos da

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)] = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

B. Propiedad de aditividad.

IV. *Si el intervalo de integración $[a, b]$ está dividido en un número finito de intervalos parciales, la integral definida tomada sobre el intervalo $[a, b]$ es igual a la suma de integrales definidas tomadas sobre todos los intervalos parciales.*

Efectivamente sea, por ejemplo, $[a, b] = [a, c] \cup [c, b)$, donde $a \leqslant c \leqslant b$. En este caso, considerando que $F'(x) = f(x)$, tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(c) - F(a)] +$$

$$+ [F(b) - F(c)] = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

OBSERVACION La fórmula (3) resulta justa también en el caso cuando c se encuentra fuera del segmento $[a, b]$ y la función subintegral $f(x)$ es continua sobre los segmentos $[a, c]$ y $[c, b]$.

C. Propiedades de linealidad.

V. *Se puede sacar un factor constante fuera del signo de la integral definida.*

Efectivamente, sea $F(x)$ una función primitiva de $f(x)$ en $[a, b]$, y sea A una constante. En este caso, $AF(x)$ es una primitiva de $Af(x)$, porque

$$[AF(x)]' = AF'(x) = Af(x).$$

Tenemos

$$\int_a^b Af(x)\,dx = AF(x)\big|_a^b = AF(b) - AF(a) =$$

$$= A[F(b) - F(a)] = A\int_a^b f(x)\,dx.$$

VI. *La integral definida de una suma algebraica de un número finito de funciones continuas es igual a la suma algebraica de integrales definidas de estas funciones.*

Efectivamente, examinemos, por ejemplo, la suma algebraica

$$f(x) + g(x) - h(x) \tag{4}$$

de tres funciones continuas $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, y sean $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$, primitivas de estas funciones, es decir,

$$F'(x) = f(x), \quad G'(x) = g(x), \quad H'(x) = h(x).$$

En este caso $F(x) + G(x) - H(x)$ es una primitiva de la suma (4), porque

$$[F(x) + G(x) - H(x)]' = F'(x) + G'(x) - H'(x) = f(x) + g(x) - h(x).$$

De aquí tenemos

$$\int_a^b [f(x)+g(x)-h(x)]\,dx = [F(x)+G(x)-H(x)]\Big|_a^b =$$

$$= [F(b)+G(b)-H(b)]-[F(a)+G(a)-H(a)] =$$

$$= [F(b)-F(a)]+[G(b)-G(a)]-[H(b)-H(a)] =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx.$$

D. Propiedades de monotonía.

VII. *Si la función subintegral de una integral definida es continua no negativa, y el límite de integración superior es mayor o igual al límite inferior, la integral definida es también no negativa.*

Efectivamente, sea $f(x) \geqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Puesto que $F'(x) = f(x) \geqslant 0$, la primitiva $F(x)$ es una función creciente (o más exactamente, una función no decreciente). En tal caso para $b \geqslant a$ tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \geqslant 0.$$

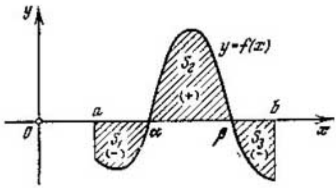

Fig. 134

VIII. *Una desigualdad de funciones continuas puede ser integrada miembro a miembro a condición de que el límite de integración superior sea mayor que el límite inferior.*

Efectivamente, sea $f(x) \leqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, donde las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas sobre el segmento $[a, b]$. Puesto que $g(x) - f(x) \geqslant 0$, de acuerdo con las propiedades VI y VII para $b > a$ tenemos

$$\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0,$$

de aquí,

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

OBSERVACIÓN. Sea $f(x)$ una función continua alternativa sobre un segmento $[a, b]$, donde $b > a$. Por ejemplo (fig. 134), $f(x) \leqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant \alpha$, $f(x) > 0$ para $\alpha < x < \beta$ y $f(x) \leqslant 0$ para $\beta \leqslant x \leqslant b$.

Partiendo de la propiedad de aditividad IV, teniendo en cuenta la interpretación geométrica de la integral (§ 3), tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx = -S_1 + S_2 - S_3 \qquad (5)$$

donde S_1, S_2, S_3 son las áreas de trapecios curvilíneos correspondientes.

De este modo, *para $a < b$, la integral definida representa, en el caso general, la suma algebraica de las áreas de los trapecios curvilíneos correspondientes, donde las áreas de trapecios situados por encima del eje Ox se toman con el signo « + », y las áreas de los trapecios situados por debajo del eje Ox, con el signo «—».*

Si $b < a$, todo es a la inversa.

Notemos que el área de la superficie rayada en la fig. 134 se expresa por la integral

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = S_1 + S_2 + S_3 \quad (b > a).$$

§ 6. Teorema del valor medio

TEOREMA *La integral definida de una función continua es igual al producto de la longitud del intervalo de integración por el valor de la función subintegral para un cierto valor intermedio del argumento* [1]).

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente en virtud de la fórmula de Newton — Leibniz tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \qquad (1)$$

donde $F'(x) = f(x)$. Aplicando a la diferencia de las primitivas el teorema del incremento finito de la función (§ 1 del cap. XI), obtendremos

$$F(b) - F(a) = (b-a)\,F'(c) = (b-a)\,f(c),$$

donde $a < c < b$. De aquí,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c), \qquad (2)$$

donde $a < c < b$.

OBSERVACIÓN. Cuando $f(x) \geqslant 0$ la fórmula (2) puede tener una interpretación geométrica sencilla. Efectivamente, su primer miem-

---

[1]) Se supone que el límite de integración superior es mayor que el límite inferior.

bro representa el área del trapecio curvilíneo $AabB$, donde AB tiene la ecuación $y = f(x)$, mientras que a y b son las abscisas de los puntos A y B. El segundo miembro de esta fórmula expresa el área de un rectángulo de base $b - a$ y de altura cC igual a $f(c)$ (fig. 135).

De este modo, desde el punto de vista geométrico la fórmula (2) significa que se puede siempre hallar sobre el arco AB un punto C de abscisa c comprendido entre a y b tal, que el área del rectángulo correspondiente $aDEb$ de altura cC sea exactamente igual al área del trapecio curvilíneo $aABb$.

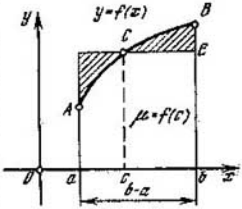

Fig. 135

Entonces, *el área de un trapecio curvilíneo limitado por una curva continua es igual al área de un rectángulo de la misma «base» y de altura igual a una ordenada media de la línea.*

El número $f(c) = \mu$ se llama *valor medio* de la función $f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$. De la fórmula (2) se deduce

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx. \tag{3}$$

EJEMPLO 1. La intensidad de una corriente alterna es igual a $i = i_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}$, donde $i_0 > 0$ es el valor máximo de la corriente, T es el período y t es el tiempo.

Hallar el valor medio del cuadrado de la intensidad de la corriente durante el período T.

De acuerdo con la fórmula (3) tenemos

$$\mu = \overline{i^2} = \frac{1}{T} \int_0^T i^2\, dt = \frac{i_0^2}{T} \int_0^T \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi t}{T}\, dt,$$

donde la raya indica una operación de mediación. Como $\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$, entonces

$$\overline{i^2} = \frac{i_0^2}{2T} \int_0^T \left(1 - \cos\frac{4\pi t}{T}\right) dt = \frac{i_0^2}{2T}\left(t - \frac{T}{4\pi} \operatorname{sen} \frac{4\pi t}{T}\right)\Bigg|_0^T = \frac{i_0^2}{2}. \tag{4}$$

La raíz cuadrada del valor medio del cuadrado de la intensidad de la corriente se llama *intensidad efectiva de la corriente*, es decir, $i_{ef} = \sqrt{\overline{i^2}}$. De acuerdo con la fórmula (4) obtenemos un resultado importante para la electrotecnia:

$$i_{ef.} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}. \tag{5}$$

COROLARIO. Sean $m = \min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$ y $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$.

Puesto que $m \leqslant f(x) \leqslant M$ de la fórmula (2) se deduce para $a < b$

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{6}$$

EJEMPLO 2. Evaluar la integral $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\operatorname{sen}^2 x}$.

Puesto que $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x} \leqslant 1$ para $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, en virtud de la fórmula (6) tenemos $\frac{\pi}{4} \leqslant I \leqslant \frac{\pi}{2}$. Se puede tomar aproximadamente

$$I \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) \approx \frac{1}{2}(0{,}79+1{,}57)=1{,}18.$$

El valor exacto de la integral es $I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}12$.

§ 7. Integración por partes en la integral definida

Sean $u = u(x)$ y $v = v(x)$ dos funciones continuamente derivables [1]) sobre un segmento $[a, b]$.

Tenemos

$$d[u(x)v(x)] = v(x)\,du(x) + u(x)\,dv(x).$$

Integrando esta igualdad entre a y b y teniendo en cuenta el hecho de que

$$du(x) = u'(x)\,dx \quad \text{y} \quad dv(x) = v'(x)\,dx,$$

hallamos

$$u(x)v(x)|_a^b = \int_a^b v(x)u'(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

De aquí, obtenemos *la fórmula de integración por partes en la integral definida*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx. \tag{1}$$

Para abreviar la escritura se utiliza

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = u(x)v(x)|_a^b.$$

[1]) Es decir, que tienen las derivadas continuas $u'(x)$ y $v'(x)$.

EJEMPLO. Hallar

$$\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx.$$

Suponiendo que $u=x$, $dv=\cos x \, dx = d\,(\text{sen}\, x)$, obtendremos $du=dx$ $v=\text{sen}\, x$.

Aplicando la fórmula (1) tendremos

$$\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = x \,\text{sen}\, x \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \text{sen}\, x \, dx =$$

$$= 2\pi \,\text{sen}\, 2\pi - 0 \cdot \text{sen}\, 0 + \cos x \Big|_0^{2\pi} = \cos 2\pi - \cos 0 = 0.$$

§ 8. Cambio de variable en una integral definida

Sea dada una integral definida

$$\int_a^b f(x)\, dx, \tag{1}$$

donde $f(x)$ es una función continua en un segmento $[a, b)$. Supongamos que por una razón cualquiera es deseable introducir una nueva variable t ligada con la variable inicial x por la relación

$$x = \varphi(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta), \tag{2}$$

donde $\varphi(t)$ es una función continuamente derivable en el segmento $[a, b]$. Si en este caso: 1) durante la variación de t desde α hasta β la variable x cambia de a a b, es decir,

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b, \tag{3}$$

y 2) la función compuesta $f(\varphi(t))$ está definida y es continua en el segmento $[\alpha, \beta]$ [1]), es justa la fórmula

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt. \tag{4}$$

Para demostrarlo examinemos la función compuesta

$$F(\varphi(t)),$$

donde $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$, es decir

$$F'(x) = f(x).$$

---

[1]) Si los valores de $\varphi(t)$ pertenecen al segmento $[a, b]$, la condición 2. es superflua (véase el teorema 4 sobre la continuidad de una función compuesta (§ 4 del cap. VIII).

Aplicando la regla de diferenciación de una función compuesta obtendremos

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t),$$

por consiguiente, la función $F(\varphi(t))$ es una primitiva de la función $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$.

De aquí, en virtud de la fórmula de Newton — Leibniz y teniendo en cuenta la igualdad (3) tendremos

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx,$$

lo que se debía demostrar.

OBSERVACION. Al calcular una integral definida mediante el cambio de variable, no es necesario volver a la variable inicial, es suficiente introducir los nuevos límites de integración con ayuda de las fórmulas (3).

EJEMPLO. Calcular

$$\int\limits_{0}^{3} x\sqrt{1+x}\,dx. \tag{5}$$

Es natural suponer que

$$t = \sqrt{1+x}, \tag{6}$$

de donde $x = t^2 - 1$ y $dx = 2t\,dt$. Los nuevos límites de integración se determinan a partir de la fórmula (6): tomando $x = 0$ tendremos $t = 1$ y considerando que $x = 3$ obtendremos $t = 2$. Por consiguiente,

$$\int\limits_{0}^{3} x\sqrt{1+x}\,dx = \int\limits_{1}^{2}(t^2-1)\cdot t\cdot 2t\,dt = 2\int\limits_{1}^{2}(t^4-t^2)\,dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{1}^{2} = 2\left(\frac{32-1}{5} - \frac{8-1}{3}\right) = \frac{62}{5} - \frac{14}{3} = 7\frac{11}{15}.$$

§ 9. Integral definida como límite de una suma integral

Sea $f(x)$ una función continua sobre un segmento $[a, b]$. Supongamos para fijar la idea que $f(x) \geqslant 0$ sobre $[a, b]$, donde $a < b$. En este caso su integral definida

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx \tag{1}$$

representa geométricamente el área S del trapecio curvilíneo $aABb$ comprendido entre la curva dada $y = f(x)$, el eje Ox ($y = 0$) y dos verticales $x = a$ y $x = b$ (fig. 136).

Hace más de 2000 años los matemáticos griegos utilizaban para el cálculo aproximado de un área S, el procedimiento siguiente.

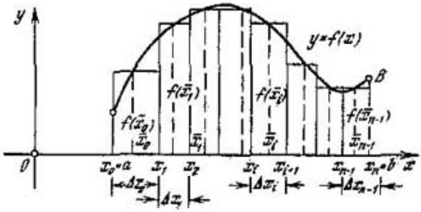

Fig. 136

Una figura S [1]) se divide en un número suficientemente grande de bandas verticales limitadas por perpendiculares al eje Ox trazadas en los puntos

$$x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b \; (a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b).$$

Cada una de estas bandas puede ser considerada aproximadamente como un rectángulo de base $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1)$ y de una altura intermedia $f(\bar{x}_i)$, donde $x_i \leqslant \bar{x}_i \leqslant$ $\leqslant x_{i+1}$. En este caso el área de semejante rectángulo es evidentemente igual a

$$f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

y, por consiguiente, el área de la figura escalonada compuesta de n rectángulos será

$$S_n = f(\bar{x}_0)\,\Delta x_0 + f(\bar{x}_1)\,\Delta x_1 + \ldots + f(\bar{x}_{n-1})\,\Delta x_{n-1} \tag{2}$$

o en una forma abreviada

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i, \tag{2'}$$

donde la letra Σ designa el signo de **sumar** y debajo de este signo se escribe el término general (típico) de la suma; además se indica el número de sumandos y se especifica cuáles de ellos componen la suma.

---

[1]) Designamos aquí por la misma letra S el trapecio curvilíneo y su área. La diferencia entre ellos es evidente del contexto.

17—0102

La (2) ó (2′) se llama *suma integral* para la función $f(x)$ [1]. Puesto que cuando $n \to \infty$ y $\max\limits_i |\Delta x_i| \to 0$ nuestras bandas en el límite se transforman en ordenadas de la gráfica de la función $y = f(x)$, es natural esperar que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Efectivamente es justo el teorema siguiente.

TEOREMA. *Si una función $f(x)$ es continua sobre un segmento $[a, b]$, el límite de su suma integral S_n cuando $n \to \infty$ y $\max\limits_i |\Delta x_i| \to 0$ es igual a la integral definida correspondiente de esta función*, es decir,

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx^{2)}. \tag{4}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Supongamos que $S = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. En virtud de la propiedad de aditividad (§ 5 del cap. IV) tenemos

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx.$$

De aquí, aplicando el teorema del valor medio (§ 6), tendremos

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \tag{5}$$

donde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i > 0$ y $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Examinemos la suma integral

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i, \tag{6}$$

donde $\overline{x}_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

---

[1] La noción de suma integral (2′) se generaliza naturalmente en el caso de una función que cambia el signo.

[2] En este sentido el signo de integral es una S (signo de suma) estilizada y la designación de toda la integral definida es una notación abreviada de una suma de un número infinitamente grande de términos infinitamente pequeños de tipo $f(x)\,\Delta x = f(x)\,dx$ sobre el segmento $[a, b]$ (de nuestro punto de vista, límite de semejante suma).

Por medio de las fórmulas (5) y (6) obtenemos

$$S-S_n=\sum_{i=0}^{n-1}[f(\xi_i)-f(\bar{x}_i)]\,\Delta x_i, \tag{7}$$

de donde

$$|S-S_n|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}|f(\xi_i)-f(\bar{x}_i)|\,|\Delta x_i|. \tag{8}$$

Si ε es un número positivo arbitrario, entonces para un máx $|\Delta x_i|$ suficientemente pequeño en virtud de la continuidad de la función $f(x)$ están aseguradas las desigualdades

$$|f(\xi_i)-f(\bar{x}_i)|<\varepsilon \tag{9}$$

(propiedades de **continuidad uniforme de la función** $f(x)$, véase, por ejemplo, *S. Nikolski*, Curso de análisis matemático, tomo I, cap. 9). Por eso de las (9) y (8) se deduce:

$$|S-S_n|<\sum_{i=0}^{n-1}\varepsilon\Delta x_i=\varepsilon(b-a), \tag{10}$$

donde $(b-a)$ es la longitud del segmento $[a, b]$.

De la desigualdad (10) por ser ε arbitrario se deduce que

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S, \tag{11}$$

es decir, la igualdad (3) es justa.

OBSERVACIÓN. Si $y=f(x)\geqslant 0$ en $[a, b]$, **por definición**, el área del trapecio curvilíneo $aABb$ es el número

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n,$$

suponiendo que este límite exista.

COROLARIO. *Si una función* $f(x)\geqslant 0$ *es continua en un segmento* $[a, b]$, *el trapecio curvilíneo* $\{a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$ *posee un área finita*, es decir, *es una figura cuadrable.*

§ 10. Noción sobre el cálculo aproximado de integrales definidas

La integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

de una función dada $y=f(x)$, no puede ser siempre calculada de modo preciso. Sin embargo, partiendo de la interpretación geométrica de la integral definida se pueden obtener numerosas fórmulas aproximadas con ayuda de las cuales la integral definida se calcula con la precisión deseable. Examinemos aquí la fórmula más simple, llamada *fórmula de los trapecios*.

Como se sabe (§ 3) la integral (1) es en sí el área (teniendo en cuenta el signo, véase la nota en la pág. 252) del trapecio curvilíneo limitado por la línea $y = f(x)$, el eje Ox y dos ordenadas $x = a$ y $x = b$ (fig. 137).

Dividamos el segmento $[a, b]$ en n partes iguales de longitud $h = \frac{b-a}{n}$ (*paso de subdivisión*).

Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ($x_0 = a$, $x_n = b$) las abscisas de los puntos de la división, e $y_0, y_1, \ldots, y_n$, las ordenadas correspondientes de la curva. Tenemos las **fórmulas de cálculo**

$$x_i = x_0 + ih, \quad y_i = f(x_i)$$

($i = 0, 1, 2, \ldots, n$). Como resultado de esta construcción nuestro trapecio está dividido en una serie de bandas verticales de igual

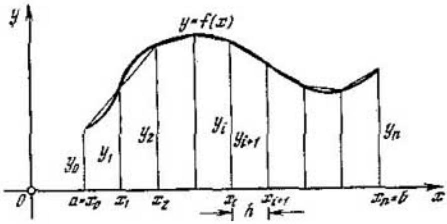

Fig. 137

ancho h, cada una de las cuales puede ser considerada aproximadamente como un trapecio. Al sumar las áreas de estos trapecios tendremos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \ldots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n),$$

o bien,

$$\int_a^b y\,dx \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) \tag{2}$$

(*fórmula de los trapecios*). La formula (2) puede ser escrita brevemente así

$$\int_a^b y\,dx \approx h\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i y_i, \tag{3}$$

donde $\varepsilon_i = \frac{1}{2}$ para $i=0$ e $i=n$ y $\varepsilon_i = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

El error

$$R_n = \int_a^b y\,dx - h \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i y_i$$

se llama *término residual* de la fórmula de los trapecios (3). Está demostrado que si la función $y = f(x)$ posee derivada segunda $f''(x)$ continua en el segmento $[a, b]$, entonces

$$|R_n| \leqslant \frac{b-a}{12} M_2 h^2, \quad \text{donde} \quad M_2 = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|.$$

EJEMPLO. Calcular aproximadamente $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = I$.

Dividimos el intervalo de integración $[0, 1]$ en diez partes ($n = 10$); por consiguiente, el paso de subdivisión es $h = 0{,}1$.

Las abscisas de los puntos de división x_i ($i = 0, 1, \ldots, 10$) y las ordenadas correspondientes $y_i = \sqrt{1+x_i^2}$ calculadas con ayuda de la tabla de raíces cuadradas se dan en la tabla que sigue. Para comodidad de cálculos las ordenadas y_i están multiplicadas por un factor ε_i tal, que $\varepsilon_i = \frac{1}{2}$ para $i = 0$ e $i = 10$ (señaladas por un asterisco) y $\varepsilon_i = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, 9$.

i	x_i	$\varepsilon_i y_i$
0	0,0	0,5000 *
1	0,1	1,0050
2	0,2	1,0198
3	0,3	1,0440
4	0,4	1,0770
5	0,5	1,1180
6	0,6	1,1662
7	0,7	1,2207
8	0,8	1,2806
9	0,9	1,3454
10	1,0	0,7071 *
$\sum$		11,4838

Aplicando la fórmula (3) se obtiene $I \approx 0{,}1 \cdot 11{,}4838 \approx 1{,}148$. El valor exacto de la integral es

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) \approx 1{,}1479.$$

§ 11. Fórmula de Simpson

Obtenemos una fórmula más exacta, si consideraremos parabólico el perfil de la banda curvilínea.

Examinemos una banda vertical (fig. 138) limitada por la curva continua $y = f(x)$, el eje Ox ($y = 0$) y dos verticales $x = -h$ y $x = h$.

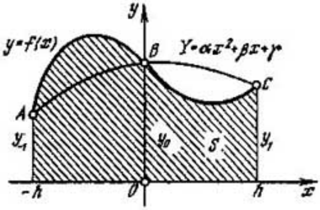

Fig. 138

Si h es pequeño, la curva $y = f(x)$ puede ser aproximadamente reemplazada por una parábola

$$Y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad (1)$$

que pasa por los puntos $A(-h, y_{-1})$, $B(0, y_0)$ y $C(h, y_1)$. En este caso

$$\int_{-h}^{h} y\,dx = I$$

será aproximadamente igual a

$$\int_{-h}^{h} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,dx = \left(\frac{\alpha x^3}{3} + \frac{\beta x^2}{2} + \gamma x\right)\Big|_{-h}^{h} = \frac{2\alpha}{3}h^3 + 2\gamma h. \qquad (2)$$

Considerando en la fórmula (1) sucesivamente que $x = -h$, 0, h, obtenemos

$$y_{-1} = \alpha h^2 - \beta h + \gamma, \quad y_0 = \gamma, \quad y_1 = \alpha h^2 + \beta h + \gamma, \qquad (3)$$

de donde

$$\gamma = y_0, \quad \alpha = \frac{y_{-1} - 2y_0 + y_1}{2h^2}. \qquad (4)$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula (2) tendremos

$$\int_{-h}^{h} y\,dx \approx \frac{1}{3}h\,(y_{-1} - 2y_0 + y_1) + 2y_0 h = \frac{h}{3}(y_{-1} + 4y_0 + y_1) \qquad (5)$$

(*fórmula de Simpson*).

EJEMPLO. Calcular con ayuda de la fórmula de Simpson

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx.$$

Suponiendo que $h=\frac{\pi}{2}$, tenemos $y_{-1}=0$, $y_0=1$, $y_1=0$. Por consiguiente,

$$I\approx\frac{\pi}{6}(0+4+0)=\frac{2}{3}\pi\approx 2{,}07$$

(el valor exacto es $I=2$).

Utilizando una traslación paralela del sistema de ejes de coordenadas se puede escribir la fórmula de Simpson así

$$\int_a^b y\,dx=\frac{h}{3}\left[y(a)+4y\left(\frac{a+b}{2}\right)+y(b)\right], \tag{5'}$$

donde $h=\frac{b-a}{2}$.

OBSERVACIÓN. Para aumentar la precisión de cálculo de una integral definida $\int_a^b y\,dx$ se divide el intervalo $[a, b]$ en n intervalos parciales, donde n es un número natural suficientemente grande y a cada uno de ellos se aplica la fórmula de Simpson (5′) considerando que $h=\frac{b-a}{2n}$. En virtud de la propiedad de aditividad la integral definida dada representará aproximadamente la suma de resultados así obtenidos (*fórmula parabólica*).

§ 12. Integrales impropias

Por definición de la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

se supone que: 1) el intervalo de integración $[a, b]$ es finito y 2) la función subintegral $f(x)$ está definida y continua en el segmento $[a, b]$. Semejante integral definida se llama *propia* (la palabra «propia» generalmente se omite). Si una de las condiciones 1) ó 2) no se cumple, llamaremos a la expresión (1) *integral definida impropia*. Aclaremos el sentido de esta nueva noción para dos casos muy simples.

1. Sea $f(x)$ una función continua para $a\leqslant x<+\infty$. En este caso según la definición se supone que

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Si el límite (2) existe, *la integral impropia que tiene límite de integración infinito*, dispuesto en el primer miembro de la igualdad (2), *es* *convergente* y su valor se determina mediante la fórmula (2); en caso contrario la igualdad (2) pierde su sentido, dicen que la integral impropia en el primer miembro *es divergente* y no le atribuye algún valor numérico.

Geométricamente para una función $f(x)$ no negativa sobre $[a, \infty]$ la integral impropia (2) representa el área de una figura curvilínea limitada por la línea dada $y = f(x)$, el eje Ox y por la vertical $x = a$ (fig. 139).

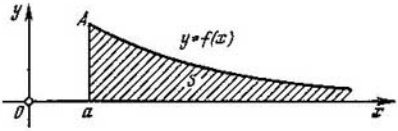

Fig. 139

Sea $F(x)$ una primitiva de la función subintegral $f(x)$. De acuerdo con la fórmula (2) tenemos

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} [F(b) - F(a)].$$

Si se introduce la notación condicional

$$F(+\infty) = \lim_{b \to +\infty} F(b),$$

se obtiene para una integral impropia convergente con límite superior infinito *la fórmula de Newton — Leibniz generalizada*:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a), \tag{3}$$

donde $F'(x) = f(x)$.

EJEMPLO 1.

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{0}^{+\infty} = \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

II. Sea $f(x)$ una función continua para $a \leqslant x < b$ y discontinua en el punto $x = b$. La *integral impropia* correspondiente *de la función discontinua* se define en este caso por la fórmula

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \tag{4}$$

y se llama *convergente* o *divergente* en dependencia de que exista o no el límite en el segundo miembro de la igualdad (4).

Si existe una función $F(x)$ continua en el segmeto $[a, b]$ y tal que

$$F'(x) = f(x) \quad \text{para} \quad a \leqslant x < b$$

(*primitiva generalizada*), para la integral impropia (4) se verifica la **formula de Newton — Leibniz generalizada:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} [F(b-\varepsilon) - F(a)] = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

EJEMPLO 2.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\,\Big|_0^1 = 2 - 0 = 2.$$

EJERCICIOS

1. Calcular la integral definida $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx$ y dar su interpretación geométrica.

Calcular las integrales definidas:

2. $\int\limits_0^1 x^4\,dx$. 3. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x}$. 4. $\int\limits_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

5. $I = \int\limits_x^y e^{t^2}\,dt$. Hallar: a) $\frac{dI}{dy}$; b) $\frac{dI}{dx}$.

6. Calcular el valor medio de la función $f(x) = \sqrt{x}$ sobre el segmento $[1; 9]$.

7. Aplicando el procedimiento de integración por partes, calcular las integrales:

a) $\int\limits_0^{2\pi} x \operatorname{sen} 2x\,dx$; b) $\int\limits_0^1 (x-1)\,e^{-x}\,dx$.

8. Al efectuar el cambio de variable indicado, calcular las integrales definidas siguientes:

a) $\int\limits_0^4 \sqrt{4 - x^2}\,dx$, $x = 2 \operatorname{sen} t$; b) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$, $x = t^2$.

9. Calcular el valor aproximado de la integral $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ a) mediante la fórmula de trapecios; b) mediante la fórmula de Simpson dividiendo el intervalo $[0; 1]$ en $n = 10$ partes iguales. Comparar los resultados obtenidos con el valor exacto igual a $\ln 2 \approx 0{,}69315$.

10. Calcular las integrales impropias siguientes:

a) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$; b) $\int\limits_{-1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; c) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$.

Capítulo XV

Aplicaciones de la integral definida

§ 1. Area en coordenadas rectangulares

PROBLEMA 1. Calcular el área S de un trapecio curvilíneo $aABb$ acotado por una línea continua dada $y = f(x)$, el segmento $a \leqslant x \leqslant b$ del eje Ox y por dos verticales $x = a$ y $x = b$, si $f(x) \geqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$ (fig. 140).

En virtud de la interpretación geométrica de la integral definida tenemos

$$S = \int_a^b y\, dx, \qquad (1)$$

donde $y = f(x)$ es la función dada.

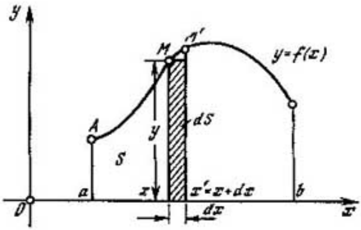

Fig. 140

OBSERVACION. La fórmula (1) puede ser fundamentada de otro modo. Consideremos el área S como una magnitud variable formada por el desplazamiento de la ordenada corriente $xM = y$ de su posición inicial aA a su posición final bB. Dando a la abscisa corriente x un incremento $\Delta x = dx$ obtendremos un **incremento de área** ΔS que representa el área de la banda vertical $xMM'x'$ (fig. 140), encerrada entre las ordenadas x y $x' = x + dx$. La **diferencial del área** dS es la parte lineal principal del incremento ΔS cuando $\Delta x \to 0$ y es evidentemente igual al área del rectángulo de base dx y de altura y [1]); por eso

$$dS = y\, dx \qquad (2)$$

(*elemento del área en coordenadas rectangulares*). Integrando la igualdad (2) dentro de los límites de $x = a$ hasta $x = b$ tendremos la fórmula (1):

$$S = \int_a^b y\, dx.$$

[1]) Se puede demostrar rigurosamente que para una función continua $y = f(x)$ el área $y\, dx$ del rectángulo se diferencia del área de la banda ΔS en un infinitésimo de un orden superior a dx.

El ejemplo que acabamos de examinar ilustra la aplicación del **método de la diferencial** cuya esencia consiste en que, partiendo de razones simples, se determina primeramente la diferencial de la magnitud buscada y luego, después de la integración entre los límites correspondientes, se halla el valor de la propia magnitud buscada. Este método se examina más detalladamente en la teoría de ecuaciones diferenciales (cap. XXII).

En los párrafos que siguen conoceremos con ayuda de unos ejemplos concretos dos métodos principales que se utilizan en la teoría de la integral definida: 1) el método de sumas de integración (véase el § 9 del cap. XIV) y 2) el método de la diferencial.

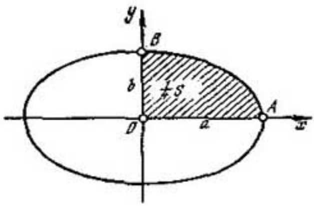

Fig. 141

EJEMPLO 1. Calcular el área S de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

En vista de la simetría se puede calcular el área S de una cuarta parte de la elipse (fig. 141).

De la ecuación de la elipse para el primer cuadrante deducimos

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

de donde, por medio de la fórmula (1), obtenemos

$$\frac{1}{4}S=\int_0^a y\,dx=\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Efectuemos la sustitución trigonométrica $x = a \operatorname{sen} t$, $dx = a \cos t\, dt$. Los nuevos límites de integración $t = \alpha$ y $t = \beta$ se determinan a partir de las ecuaciones $0 = a \operatorname{sen} t$, $a = a \operatorname{sen} t$. Se puede considerar que $\alpha = 0$ y $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Por consiguiente,

$$\frac{1}{4}S=\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2 t}\cdot a\cos t\,dt=$$

$$=ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\frac{ab}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\left(t+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{ab}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}ab$$

y

$$S=\pi ab.$$

En particular, suponiendo que $a = b$ obtendremos el área del círculo de radio a, $S = \pi a^2$.

OBSERVACIÓN En casos más complicados tratan de representar la figura en forma de una suma o de una diferencia de trapecios curvilíneos.

PROBLEMA 2. Calcular el área de la superficie plana acotada por dos líneas continuas:

$$y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x) \quad (y_2 \geqslant y_1)$$

y por dos verticales $x = a$ y $x = b$ (fig. 142).

Supondremos que las funciones $y_1 = f_1(x)$ e $y_2 = f_2(x)$ son no negativas sobre un segmento $[a, b]$. Esto puede ser siempre alcanzado mediante una traslación paralela del eje Ox.

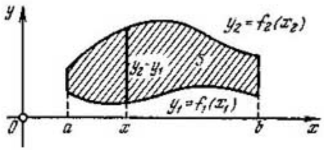

Fig. 142

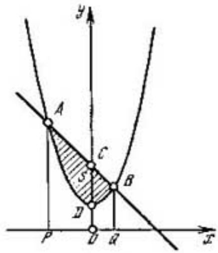

Fig. 143

El área buscada S puede ser considerada como una diferencia de áreas de dos trapecios curvilíneos limitados por las líneas dadas. Por eso

$$S = \int_a^b y_2\, dx - \int_a^b y_1\, dx$$

y, por consiguiente,

$$S = \int_a^b (y_2 - y_1)\, dx, \tag{3}$$

donde $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ son las funciones dadas. Notemos que

$$y_2 - y_1 = f_2(x) - f_1(x)$$

representa el «espesor» del área S en el punto x.

EJEMPLO 2. Calcular el área S limitada por la parábola $y = x^2 + 1$ y la recta $x + y = 3$ (fig. 143).

Resolviendo el sistema de ecuaciones de la parábola y de la recta:

$$\left.\begin{array}{r} y = x^2 + 1, \\ x + y = 3, \end{array}\right\}$$

hallamos las abscisas de puntos de intersección: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

Suponiendo que $y_2 = 3 - x$ e $y_1 = x^2 + 1$ obtenemos por medio de la fórmula (3)

$$S = \int_{-2}^{1} [(3-x)-(x^2+1)]\, dx = \int_{-2}^{1} (2-x-x^2)\, dx =$$

$$= \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1} = 2\,(1+2) - \frac{1}{2}\,(1-4) - \frac{1}{3}\,(1+8) =$$

$$= 6 + \frac{3}{2} - 3 = 4\,\frac{1}{2}\,.$$

La fórmula (1) permite también calcular las áreas de figuras simples en el caso cuando las curvas que las limitan están dadas en forma paramétrica.

EJEMPLO 3 Calcular el área S limitada por el primer arco de cicloide

$$x = a\,(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a\,(1 - \cos t) \tag{4}$$

y por el eje Ox (fig. 47 del § 4 del cap. V).

Tenemos

$$S = \int_{0}^{2\pi a} y\, dx.$$

Efectuemos en esta integral el cambio de variables al tomar por la variable independiente el parámetro t. De la ecuación (4) obtendremos

$$dx = a\,(1 - \cos t)\, dt,$$

sabiendo que $t = 0$ cuando $x = 0$ y $t = 2\pi$ cuando $x = 2\pi a$. Por consiguiente

$$S = \int_{0}^{2} a\,(1-\cos t)\cdot a\,(1-\cos t)\, dt =$$

$$= a^2 \int_{0}^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\, dt = a^2 \left[(t - 2\operatorname{sen} t)\Big|_{0}^{2\pi} + \int_{0}^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt \right] =$$

$$= a^2 \left[2\pi + \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\Big|_{0}^{2\pi} \right] = a^2\,(2\pi + \pi) = 3\pi a^2.$$

De este modo, obtenemos el **teorema de Galileo**: *el área, limitada por un arco de cicloide y su cuerda, es igual al triple del área del círculo generatriz.*

§ 2. El área en coordenadas polares

PROBLEMA. Calcular el área S del sector OAB limitado por una línea continua dada

$$\rho = f\,(\varphi)$$

y dos rayos $\varphi = \alpha$ y $\varphi = \beta$, donde ρ y φ son coordenadas polares (fig. 144).

Para resolver el problema utilicemos el **método de la diferencial.**

Imaginemos que el área S está formada gracias al desplazamiento del radio polar variable $\rho = f(\varphi)$ cuando el ángulo φ ha variado de $\varphi = \alpha$ a $\varphi = \beta$ (fig. 144). Si el ángulo polar corriente φ obtiene un incremento $d\varphi$, el incremento del área ΔS = área OMM'. La diferen-

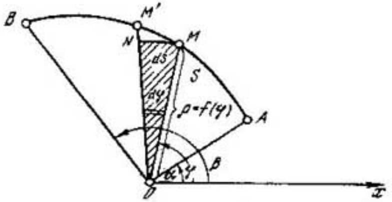

Fig. 144

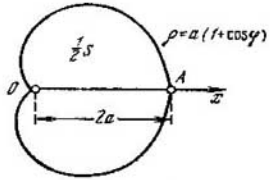

Fig. 145

cial dS representa la parte lineal principal del incremento ΔS cuando $d\varphi \to 0$ y es igual al área del sector circular OMN de radio ρ y de ángulo de centro $d\varphi$ [1]); por eso

$$dS = \frac{1}{2}\widehat{MN}\cdot OM = \frac{1}{2}\rho d\varphi\cdot\rho = \frac{1}{2}\rho^2\, d\varphi \tag{1}$$

(*elemento del área en coordenadas polares*). La integración de la igualdad (1) dentro de los límites de $\varphi = \alpha$ a $\varphi = \beta$ nos dará el área buscada

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2\, d\varphi,$$

donde $\rho = f(\varphi)$ es la función dada.

EJEMPLO. Hallar el área limitada por la cardioide

$$\rho = a(1+\cos\varphi).$$

Componiendo la tabla de valores, obtendremos:

φ	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{2}{3}\pi$	$\pm\frac{5}{6}\pi$	$\pm\pi$
ρ	$2a$	$\approx 1,9$	$\frac{3}{2}a$	a	$\frac{a}{2}$	$\approx 0,1\ a$	0

Al construir los puntos de cardioide de acuerdo con los valores de φ y ρ, tomados en nuestra tabla, se puede hacer una idea aproximada acerca de la forma de esta curva (fig. 145).

[1]) Efectivamente, por analogía con la significación física de la diferencial (§ 4 del cap. XII) la diferencial del área dS es igual al incremento ficticio del área S durante el giro del radio polar ρ en un ángulo $d\varphi$ sin cambiar la longitud del radio, de donde está claro que dS es el área del sector circular de radio ρ y del ángulo central $d\varphi$.

Puesto que la cardioide es evidentemente simétrica respecto al eje polar, es suficiente calcular el área de su mitad superior y luego duplicarla. Designando por S toda el área limitada por la cardioide tendremos

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\rho^2\,d\varphi.$$

De aquí,

$$S=\int_0^{\pi}\rho^2\,d\varphi=a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi=$$

$$=a^2\left(\int_0^{\pi}d\varphi+2\int_0^{\pi}\cos\varphi\,d\varphi+\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\right),$$

o, ya que

$$\int_0^{\pi}d\varphi=\pi,\qquad \int_0^{\pi}\cos\varphi\,d\varphi=\operatorname{sen}\varphi\Big|_0^{\pi}=0,$$

$$\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2}\left(\varphi+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\varphi\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2},$$

finalmente

$$S=\frac{3\pi}{2}a^2.$$

§ 3. Longitud del arco en coordenadas rectangulares

DEFINICIÓN. *Llámase longitud de un arco AB al límite hacia el cual tiende la longitud de la línea quebrada inscrita en este arco cuando el número de lados de la quebrada aumenta indefinidamente y la longitud del lado más grande tiende a cero.*

Digamos que una curva es *suave*, si ésta es continua y en cada punto tiene una tangente que cambia continuamente su posición de un punto a otro. Es evidente que una curva es suave, si su ecuación puede ser escrita así

$$y=f(x)\quad (a\leqslant x\leqslant b),\tag{1}$$

donde la función $f(x)$ es continua y posee una derivada $f'(x)$ continua en el segmento $[a, b]$ dado.

TEOREMA. *Toda curva suave (1) posee un arco de longitud finita determinada.*

DEMOSTRACIÓN. Inscribamos en la curva suave dada (1) una línea quebrada $M_0M_1M_2\ldots M_n$ (fig. 146), donde $M_0=A(a, f(a))$ y $M_n=B(b, f(b))$. Proyectando los lados $\overline{M_{i-1}M_i}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ de la quebrada sobre el eje Ox obtendremos la subdivisión del segmento $[a, b]$ en un sistema de segmentos Δx_i. Sea Δy_i un incremento de la función dada $y = f(x)$ sobre el segmento Δx_i (fig. 146). Según el teorema de Pitágoras tenemos

$$\overline{M_{i-1}M_i} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

Aplicando el teorema de Lagrange sobre el incremento finito de una función (§ 1 del cap. XI) obtendremos $\Delta y_i = \Delta x_i f'(\overline{x}_i)$, donde $\overline{x}_i$ es

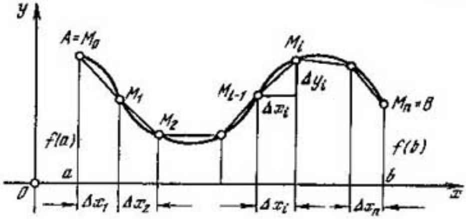

Fig. 146

un punto intermediario del segmento Δx_i [1]). De aquí

$$\overline{M_{i-1}M_i} = \sqrt{1 + f'^2(\overline{x}_i)}\,\Delta x_i.$$

y, por consiguiente, la longitud de toda la quebrada $M_0M_1 \ldots M_n$ (es decir, su perímetro) es igual a

$$\Pi_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\overline{x}_i)}\,\Delta x_i.$$

Para hallar la longitud l de la curva (1) hace falta pasar al límite en la última expresión suponiendo que $n \to \infty$ y máx $\Delta x_i \to 0$. De este modo

$$l = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\overline{x}_i)}\,\Delta x_i.$$

Acabamos de obtener el límite de la suma integral para la función continua

$$F(x) = \sqrt{1 + f'^2(x)}$$

(véase el § 9 del cap. XIV). Por eso $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$ o

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx, \tag{2}$$

donde $y' = f'(x)$.

[1]) Geométricamente $\overline{x}_i$ es el punto del segmento Δx_i en el cual la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ es paralela a su cuerda $\overline{M_{i-1}M_i}$.

Diferencial del arco en coordenadas rectangulares. Sean $A(a, h)$ un punto fijo y $M(x, y)$ un punto variable de una curva (fig. 147). La longitud del arco $l = AM$ es en este caso función de la variable x.

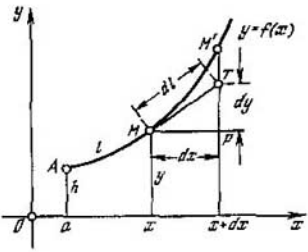

Fig. 147

Según la fórmula (2) tenemos

$$l = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Utilizando el teorema relacionado a la derivada de una integral definida que tiene el límite superior variable (§ 2 del cap. XIV), obtendremos

$$l' = \sqrt{1 + y'^2}$$

y, por consiguiente,

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Esto es efectivamente *la fórmula de la diferencial del arco en coordenadas rectangulares*

Puesto que

$$y' = \frac{dy}{dx}, \text{ entonces}$$

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}. \tag{3}$$

Es interesante notar que la última fórmula es el teorema de Pitágoras para un triángulo infinitamente pequeño MTP (fig. 147).

EJEMPLO 1. Calculemos la longitud del arco de un segmento de *catenaria*. Se llama así la línea cuya forma toma un hilo pesado atado en dos puntos.

La ecuación de esta línea en un sistema de coordenadas adecuadamente elegido es ésta:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right), \tag{4}$$

donde a es un número positivo (*parámetro de la catenaria*).

La ecuación (4) puede ser escrita más sencillamente

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \tag{4'}$$

donde ch es el coseno hiperbólico (véase el § 9 del cap. X).

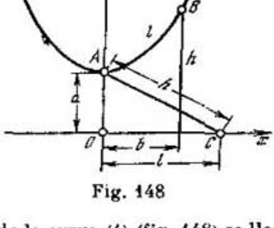

Fig. 148

El punto A $(0, a)$ que es el punto más bajo de la curva (4) (fig. 148) se llama *vértice* de la catenaria.

Calculemos la longitud del arco AB de la catenaria suponiendo que la abscisa del punto B es igual a b y su ordenada es igual a h. Derivando la ecuación

(4') tendremos

$$y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}.$$

Luego deducimos

$$1 + y'^2 = 1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a} = \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}.$$

Por consiguiente,

$$\sqrt{1 + y'^2} = \operatorname{ch} \frac{x}{a},$$

de donde, de acuerdo con la fórmula (2), obtendremos

$$\widehat{AB} = \int_0^b \operatorname{ch} \frac{x}{a}\, dx = a \int_0^b \operatorname{ch} \frac{x}{a}\, d\left(\frac{x}{a}\right) = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \Big|_0^b = a \left(\operatorname{sh} \frac{b}{a} - \operatorname{sh} 0\right) = a \operatorname{sh} \frac{b}{a}$$

(véase la fórmula XIV del § 3 del cap. XIII).

La fórmula para la longitud del arco AB resulta más sencilla si su segundo miembro se expresa en función de la ordenada h del punto B. Efectivamente, es evidente que

$$h = a \operatorname{ch} \frac{b}{a}.$$

En virtud de la identidad $\operatorname{sh}^2 \frac{b}{a} = \operatorname{ch}^2 \frac{b}{a} - 1$ tenemos

$$\widehat{AB} = a \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{b}{a} - 1} = \sqrt{h^2 - a^2},$$

es decir, el arco AB es igual al cateto OC del triángulo rectangular OAC (fig. 148) cuya hipotenusa es $AC = h$ y el otro cateto es $OA = a$.

OBSERVACIÓN. Sea necesario calcular la longitud l del arco de una curva dada paramétricamente:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad [t_0 \leqslant t \leqslant T],$$

donde $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son funciones continuamente derivables en el segmento $[t_0, T]$. Se puede demostrar que la fórmula (3) para la diferencial del arco dl es en este caso igualmente justa. Como $dx = x'dt$, $dy = y'dt$, tenemos

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

Integrando la última expresión entre $t = t_0$ y $t = T$, obtendremos la longitud del arco

$$l = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

EJEMPLO 2. Calcular la longitud del arco de una circunferencia

$$x = a \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t$$

de $t = 0$ hasta $t = T$.

Aquí $dx = -a \operatorname{sen} t\, dt$, $dy = a \cos t\, dt$, por eso

$$dl = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t}\, dt = a\, dt$$

y, por consiguiente,

$$l = \int_0^T a\, dt = aT.$$

EJEMPLO 3. Calcular la longitud del arco de la astroide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

(fig. 149). La ecuación de la astroide puede ser escrita de forma

$$(x^{1/3})^2 + (y^{1/3})^2 = (a^{1/3})^2.$$

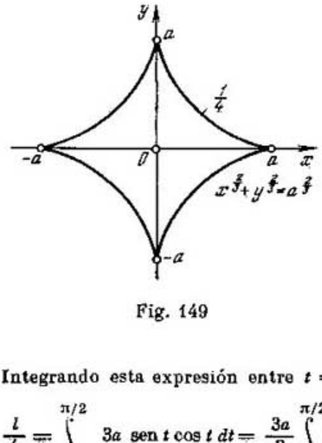

Fig. 149

Es natural introducir el parámetro t considerando que $x^{1/3} = a^{1/3} \cos t, y^{1/3} = a^{1/3} \operatorname{sen} t$, de donde obtenemos *la ecuación de astroide en forma paramétrica*

$$x = a \cos^2 t, \quad y = a \operatorname{sen}^3 t \tag{6}$$

donde $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

La curva (6) es simétrica, por eso es suficiente hallar una cuarta parte del arco l correspondiente a la variación del parámetro t de 0 a $\frac{\pi}{2}$. Tenemos

$$dx = -3a \cos^2 t \operatorname{sen} t\, dt,$$
$$dy = 3a \operatorname{sen}^2 t \cos t\, dt,$$

de donde,

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 3a \operatorname{sen} t \cos t\, dt.$$

Integrando esta expresión entre $t = 0$ y $t = \frac{\pi}{2}$ obtendremos

$$\frac{l}{4} = \int_0^{\pi/2} 3a \operatorname{sen} t \cos t\, dt = \frac{3a}{2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2t\, dt =$$
$$= \frac{3a}{4}(-\cos 2t)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{3a}{4}(1+1) = \frac{3}{2}a.$$

Por consiguiente, toda la longitud del arco de astroide es igual a $l = \frac{3}{2}a \cdot 4 = 6a$.

§ 4. Longitud del arco en coordenadas polares

Deduzcamos primeramente la diferencial dl del arco en coordenadas polares. Según la fórmula (3) del § 3 tenemos

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2,$$

donde x e y son coordenadas cartesianas rectangulares de un punto del arco.

Como se sabe, las fórmulas de paso de las coordenadas polares ρ y φ a las coordenadas rectangulares x e y son siguientes:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi.$$

De aquí,

$$dx = \cos \varphi d\rho - \rho \operatorname{sen} \varphi d\varphi, \quad dy = \operatorname{sen} \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi.$$

Al elevar al cuadrado obtendremos

$$(dx)^2 = \cos^2 \varphi (d\rho)^2 - 2\rho \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi \, d\rho \, d\varphi + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi (d\varphi)^2,$$

$$(dy)^2 = \operatorname{sen}^2 \varphi (d\rho)^2 + 2\rho \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \, d\rho \, d\varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi (d\varphi)^2.$$

Sumando miembro a miembro estas igualdades tendremos

$$(dl)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2 (d\varphi)^2.$$

Por consiguiente,

$$dl = \sqrt{(d\rho)^2 + \rho^2 (d\varphi)^2}.$$

Esta última fórmula se puede expresar de la forma siguiente:

$$dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \, d\varphi, \qquad (1)$$

donde $\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}$.

PROBLEMA. Calcular la longitud l del arco de una curva continuamente derivable

$$\rho = f(\varphi)$$

entre los puntos $A(\alpha, f(\alpha))$ y $B(\beta, f(\beta))$, donde ρ y φ son las coordenadas polares (fig. 150). Integrando la igualdad (1) dentro de los límites de $\varphi = \alpha$ a $\varphi = \beta$, obtendremos la longitud *del arco en coordenadas polares*

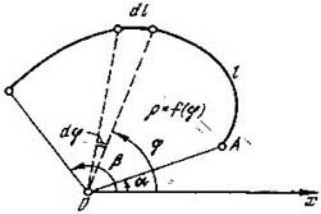

Fig. 150

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \, d\varphi,$$

donde $\rho = f(\varphi)$ es la función dada y $\rho' = f'(\varphi)$ es su derivada.

EJEMPLO. Calculemos la longitud total del arco de cardioide (fig. 145)

$$\rho = a(1 + \cos \varphi).$$

Tenemos $\rho' = -a \operatorname{sen} \varphi$. Por eso

$$\rho^2 + \rho'^2 = a^2 (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi) =$$

$$= a^2 (2 + 2 \cos \varphi) = 2a^2 (1 + \cos \varphi) = 4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2},$$

y, por consiguiente,

$$\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = 2a \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|.$$

Designando por $\frac{1}{2}l$ la longitud del arco de la parte superior de la cardioide obtendremos

$$\frac{1}{2}l=2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\left(\frac{\varphi}{2}\right)=4a\left(\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=4a.$$

Las partes superior e inferior de la cardioide son simétricas y por eso su longitud total es $l = 8a$.

§ 5. Cálculo del volumen de un cuerpo según las secciones transversales conocidas

PROBLEMA. Conociendo la ley de variación del área de la sección transversal de un cuerpo se pide hallar el volumen V de este cuerpo (fig. 151).

Sean Ox una dirección elegida y

$$S = S(x)$$

el área de la sección transversal por un plano perpendicular al eje Ox en un punto de la abscisa x. Supondremos que la función $S(x)$ es conocida y continuamente variable cuando x varía. Además, supondremos que el contorno es, en cierto sentido, también «continuamente» variable.

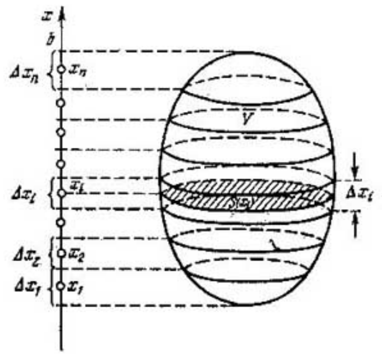

Fig. 151

Proyectando el cuerpo sobre el eje Ox obtendremos un segmento $[a, b]$ que nos da la dimensión lineal del cuerpo en la dirección del eje Ox.

Dividamos el segmento $[a, b]$ en un gran número de pequeños segmentos Δx_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) y tracemos por los puntos de división planos perpendiculares al eje Ox. Resulta que el cuerpo queda partido en n capas, cada una de las cuales puede ser considerada aproximadamente igual a $S(x_i)\,\Delta x_i$, donde x_i es un punto del segmento Δx_i (véase la fig. 151), obtendremos para el volumen V del cuerpo la expresión siguiente

$$V\approx\sum_{i=0}^{n} S(x_i)\,\Delta x_i. \qquad (1)$$

Si $n \to \infty$ y máx $|\Delta x_i| \to 0$ la igualdad aproximada (1) se hace más exacta y en el límite obtendremos

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\,\Delta x_i.$$

La suma (1) es una suma integral para la función continua $S(x)$ y su límite es una integral definida correspondiente (§ 9 del cap. XIV). Por eso

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{2}$$

EJEMPLO 1. Hallar el volumen V de la pirámide de base B y de altura H (fig. 152).

Tomemos como eje Ox la recta que pasa por el vértice O de la pirámide perpendicular a su base y dirigida desde el vértice hacia la base.

Sea S el área de la sección de la pirámide por un plano dispuesto a una distancia x del vértice. Puesto que las áreas de secciones paralelas de la pirámide se relacionan como los cuadrados de sus distancias al vértice, es decir, $\frac{S}{B} = \frac{x^2}{H^2}$, entonces $S = \frac{B}{H^2}x^2$. Aplicando la fórmula (2) del párrafo precedente obtenemos

$$V = \int_0^H S\,dx = \frac{B}{H^2}\int_0^H x^2\,dx = \frac{B}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}BH,$$

lo que coincide con la conocida fórmula de geometría.

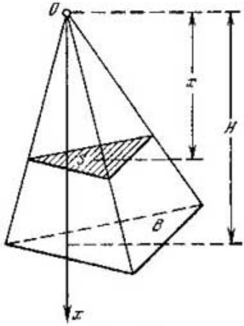

Fig. 152

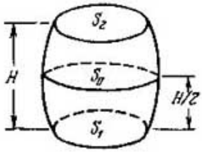

Fig. 153

EJEMPLO 2. Sean (fig. 153) S_1 y S_2 las áreas de las secciones inferior y superior de un cuerpo en forma de tonel y S_0 el área de su sección media. En este caso, aplicando la fórmula de Simpson (§ 11 del cap. IX) a la integral (2) obtendremos

$$V = \int_0^H S(x)\,dx = \frac{H}{6}(S_1 + S_2 + 4S_0),$$

donde H es la altura del cuerpo (*fórmula de Simpson para los volúmenes*).

§ 6. Volumen del cuerpo de revolución

PROBLEMA. Calcular el volumen V_x de un cuerpo engendrado por la rotación alrededor del eje Ox de un trapecio curvilíneo $aABb$ limitado por una curva continua dada

$$y = f(x) \quad (f(x) \geqslant 0),$$

un segmento $a \leqslant x \leqslant b$ del Ox y por dos verticales $x = a$ y $x = b$ (fig. 154).

Este problema es un caso particular del problema examinado en el párrafo precedente.

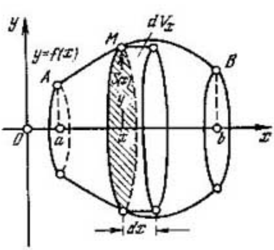

Fig. 154

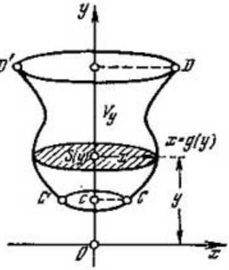

Fig. 155

Aquí el área de la sección variable $S = S(x)$ correspondiente a la abscisa x es un círculo de radio y, por eso $S(x) = \pi y^2$, de donde, en virtud de la fórmula (2) del § 5, tenemos

$$V_x = \pi \int_a^b y^2\,dx, \tag{1}$$

donde $y = f(x)$ es la función dada.

La fórmula (1) puede ser también obtenida directamente por el método de la diferencial. *El elemento de volumen* dV_x es evidentemente un cilindro de base S y de altura dx[1]). Por consiguiente,

$$dV_x = \pi y^2 dx.$$

De aquí, integrando desde $x = a$ hasta $x = b$ obtendremos la fórmula (1).

OBSERVACION. Sea un trapecio curvilíneo $cCDd$, limitado por una línea continua unívoca $x = g(y)$, un segmento $c \leqslant y \leqslant d$ del eje Oy y por dos paralelas $y = c$ e $y = d$, que gira alrededor del eje Oy (fig. 155). En este caso, por analogía con la fórmula (1), el volu-

[1]) En otras palabras dV_x es la parte lineal principal del incremento del volumen variable V_x cuando la sección $S(x)$ se desplaza en una magnitud infinitamente pequeña dx.

men V_y del cuerpo de revolución es igual a

$$V_y = \pi \int_c^b x^2 dy, \tag{2}$$

donde $x = g(y) \geqslant 0$ es la función dada.

EJEMPLO. Calcular el volumen de un cuerpo limitado por la superficie obtenida por la revolución de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

alrededor de su eje mayor a (eje Ox) (fig. 156).

Como la elipse (3) es simétrica respecto a los ejes de coordenadas, es suficiente hallar el volumen formado por la rotación alrededor del eje OX del área OAB igual a una cuarta parte del área de la elipse (fig. 156) y duplicar el resultado obtenido.

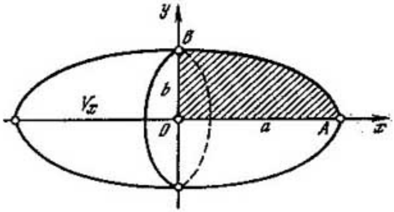

Fig. 156

Designemos el volumen del cuerpo de revolución por V_x; entonces, en virtud de la fórmula (1), tenemos

$$\frac{1}{2} V_x = \pi \int_0^a y^2 \, dx,$$

donde 0 y a son las abscisas de los puntos B y A. Mediante la ecuación de la elipse hallamos $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. De aquí

$$\frac{1}{2} V_x = \pi \int_0^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \int_0^a dx - \frac{\pi b^2}{a^2} \int_0^a x^2 \, dx =$$

$$= \pi b^2 \cdot x \Big|_0^a - \frac{\pi b^2}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \pi a b^2 - \frac{\pi b^2}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} \pi a b^2.$$

Por consiguiente, tenemos definitivamente

$$V_x = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

De un modo análogo cuando la elipse (3) gira alrededor del eje menor b el volumen del cuerpo de revolución correspondiente es igual a

$$V_y = \frac{4}{3} \pi a^2 b.$$

Considerando que $a = b$ obtendremos el volumen de la esfera de radio a:

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

§ 7. Trabajo de una fuerza variable

PROBLEMA Calcular el trabajo A de una fuerza variable continua $F(x)$ aplicada a un punto material M cuando éste se desplaza a lo largo del eje Ox de la posición $x = a$ a la posición $x = b$, suponiendo que el sentido de la fuerza coincide con el del desplazamiento.

Supongamos que el punto M se ha desplazado de la posición x a la $x + dx$ (fig. 157). Sobre un intervalo infinitamente pequeño

Fig. 157

$[x, x + dx]$ de la longitud dx la fuerza $F(x)$ **puede ser considerada como constante.** Por eso el trabajo elemental de esta fuerza es igual a

$$dA = F(x)\,dx. \tag{1}$$

Integrando la expresión (1) desde $x = a$ hasta $x = b$ obtendremos el trabajo total

$$A = \int_a^b F(x)\,dx \tag{2}$$

EJEMPLO ¿Qué trabajo hace falta aplicar a un resorte para alargarlo en 5 cm, si una fuerza de 100 N estira el resorte en 1 cm?

Según la ley de Hooke la fuerza elástica F que actúa sobre el resorte crece proporcionalmente al alargamiento x del resorte, es decir,

$$F = kx.$$

Aquí el desplazamiento x está expresado en metros y la fuerza F en newtones. Para determinar el coeficiente de proporcionalidad k consideramos, según los datos del problema, que $F = 100$ N para $x = 0{,}01$ m, de donde $100 = k \cdot 0{,}01$, es decir, $k = 10\,000$ y, por consiguiente, $F = 10\,000\,x$. En virtud de la fórmula (2) el trabajo buscado es igual a

$$A = \int_0^{0,05} 10\,000x\,dx = 5\,000x^2 \Big|_0^{0,05} = 12{,}5\text{J}.$$

§ 8. Otras aplicaciones físicas de la integral definida

Para ilustrar los métodos principales: 1) el método de la diferencial y 2) el método de sumas integrales en la teoría de la integral definida, examinemos unos ejemplos.

EJEMPLO 1. La concentración de una sustancia (g/m³) varía en el agua según la ley

$$C = \frac{10x}{x+1} \tag{1}$$

(x es la profundidad de la capa).

¿Qué cantidad de sustancia Q contiene una columna de agua vertical cuya sección transversal $S = 1$ m^2 y la profundidad varía de 0 a 200 m?

Examinemos una capa infinitamente pequeña de la columna de agua de sección S y de espesor dx situada a la profundidad x (fig. 158).

La cantidad de sustancia que contiene esta capa es igual a

$$dQ = C \cdot S\, dx = \frac{10x}{x+1}\, dx. \qquad (2)$$

Integrando esta expresión dentro de los límites de 0 hasta 200 obtendremos

$$Q = 10 \int_0^{200} \frac{x\, dx}{x+1} = 10 \int_0^{200} \frac{(x+1)-1}{x+1}\, dx =$$

$$= 10\,[x - \ln(x+1)]\big|_0^{200} = 10\,(200 - \ln 201) =$$

$$= 10 \cdot (200 - 5{,}3) = 1947 \text{ (g)}.$$

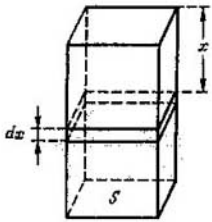

Fig. 158

EJEMPLO 2. ¿Cuál es la fuerza con la cual una barra homogénea $0 \leqslant x \leqslant l$ de densidad lineal δ atrae un punto material P (a) $(a > l)$ de masa m (fig. 159)?

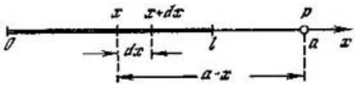

Fig. 159

Según la ley de Newton un elemento infinitamente pequeño de la barra $[x, x + dx]$ de masa $\delta\, dx$ atrae un punto material P con una fuerza cuyo valor es igual a

$$dF = -k\,\frac{m\delta\, dx}{(a-x)^2} \qquad (3)$$

donde k es el coeficiente de proporcionalidad (constante de gravitación). Puesto que las fuerzas de atracción actúan en el mismo sentido, sus valores dF pueden ser algebraicamente adicionados y, por consiguiente, integrados (ya que una integral es el límite de una suma algebraica)

$$F = -km\delta \int_0^l \frac{dx}{(a-x)^2} = -km\delta \cdot \frac{1}{a-x}\Big|_0^l =$$

$$= -km\delta\left(\frac{1}{a-l} - \frac{1}{a}\right) = -\frac{km\delta l}{a\,(a-l)}\,.$$

EJEMPLO 3. Determinar el valor de la fuerza de presión del agua sobre un disco vertical de radio R cuyo centro está sumergido en el agua a una profundidad H ($H > 2R$).

Tomemos como eje Ox la recta vertical con el origen de coordenadas O que coincide con el centro del círculo (fig. 160). Partamos el círculo dado en n bandas horizontales estrechas de espesor Δx_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Examinemos la i-ésima banda $AA'B'B$ de espesor Δx_i que se encuentra a la distancia x_i del centro (fig. 160). Si Δx_i es una magnitud pequeña, esta banda puede ser considerada de modo aproximado como un rectángulo, y por eso su área es

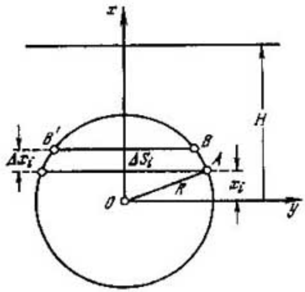

Fig. 160

$$\Delta S_i \approx AB \cdot \Delta x_i = 2\sqrt{R^2 - x_i^2}\,\Delta x_i.$$

Considerando que el nivel de sumersión de esta banda es igual a $H - x_i$, obtendremos según la ley de Pascal la fuerza de presión del agua sobre esta banda

$$\gamma (H - x_i)\,\Delta S_i = 2\gamma (H - x_i)\sqrt{R^2 - x_i^2}\,\Delta x_i,$$

donde γ es el peso específico del agua.

Sumando estas expresiones obtendremos el valor aproximado de la fuerza de presión P que el agua ejerce sobre esta banda

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} 2\gamma (H - x_i)\sqrt{R^2 - x_i^2}\,\Delta x_i. \tag{4}$$

La fórmula (4) es tanto más exacta, cuanto más pequeña sea Δx_i. En el límite, cuando $n \to \infty$ y máx $\Delta x_i \to 0$, obtendremos una fórmula exacta para la fuerza de presión del agua

$$P = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\gamma (H - x_i)\sqrt{R^2 - x_i^2}\,\Delta x_i. \tag{5}$$

La suma (4) es la suma integral para la función

$$f(x) = 2\gamma (H - x)\sqrt{R^2 - x^2};$$

por eso su límite es la integral definida correspondiente. Por consiguiente, mediante (5) hallamos

$$P = 2\gamma \int_{-R}^{R} (H - x)\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \pi\gamma R^2 H.$$

EJERCICIOS

Hallar las áreas de figuras limitadas por las líneas siguientes:

1. Las parábolas $y = x^2$, $y^2 = x$.
2. La hipérbola $xy = a^2$ y las rectas $y = 0$, $x = b$, $x = 2b$ $(b > 0)$.
3. La parábola $y = 2x - x^2$ y el eje Ox.
4. La curva de Agnesi $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ $(a > 0)$ y el eje Ox.
5. La curva $y = e^x$ y las rectas $x = 0$ e $y = e$.
6. La parábola $y = 2(x - 1)(3 - x)$ y el eje Ox.
7. La parábola $y^2 = 2(x - 1)$ y la recta $x = 3$.
8. La curva $y \approx 2^x$ y las rectas $y = 2$ y $x = 0$.
9. Las parábolas $y = 1 - x^2$ e $y = x^2 - 7$.

9.1. Hallar el área de la superficie limitada por la astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\,\mathrm{sen}^3 t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

10. Hallar la longitud del arco del segmento de la parábola semicúbica $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ desde el punto $x_1 = 0$ hasta el punto $x_2 = 8$.

11. Hallar la longitud del segmento de la curva $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x$ a partir del punto $x_1 = 1$ hasta el punto $x_2 = e$.

11.1. Hallar la longitud de un arco de la cicloide

$$x = a(t - \mathrm{sen}\, t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

12. Construir la lemniscata $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ y hallar el área de la superficie limitada por esta línea.

13. Construir la «rosa de tres pétalos» $\rho = a\,\mathrm{sen}\, 3\varphi$ y hallar el área de la superficie limitada por esta línea.

14. Calcular la longitud del arco de la espiral logarítmica

$$\rho = ae^{m\varphi} \qquad (a > 0,\ m > 0),$$

situada en el interior del círculo $\rho = a$.

15. Construir la curva $\rho = 2a\,\mathrm{sen}^2 \frac{\varphi}{2}$ y calcular la longitud de su arco.

16. Hallar el volumen de un obelisco cuyas bases son rectángulos de lados A, B y a, b y de altura igual a h.

17. Integrando, calcular el volumen de la esfera de radio R.

Calcular el volumen del cuerpo engendrado por la rotación alrededor del eje Ox de una superficie plana limitada por las líneas siguientes:

18. $y = 2x - x^2$, $y = 0$.
19. Un semiarco de la sinusoide $y = \mathrm{sen}\, x$ e $y = 0$.
20. $y = \sec x$, $y = 0$, $x = \pm\frac{\pi}{4}$.
21. $y = x^2$, $y = 2x$.

Calcular el volumen del cuerpo engendrado por la rotación alrededor del eje Oy de una superficie plana limitada por las líneas siguientes:

22. $y = h\left(\frac{x}{a}\right)^2$, $y = h$ (paraboloide de revolución).
23. $y = e^{-x}$, $y = 0$, y $x = 0$.
24. La velocidad de un punto varía en función del tiempo t según la ley

$$v = 0{,}01t^3\ [\mathrm{m/s}].$$

¿Qué camino recorrerá el punto en 10 s? ¿Cuál es la velocidad media de movimiento?

25. El calor específico de una sustancia a la temperatura t es igual a $c = 0{,}2 + 0{,}001t \left[\frac{J}{t\cdot{}^\circ\mathrm{C}}\right]$. ¿Qué cantidad de calor hace falta gastar para calentar 1 g de sustancia desde 0 hasta 100 °C?

26. La densidad lineal de una barra $0 \leqslant x \leqslant l$ de longitud l es igual a $q = q_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$, donde q_0 es una constante. Hallar la masa de la barra.

27. Un cilindro de 20 cm de diámetro y de 80 cm de longitud está lleno de vapor a una presión de 100 N/cm^2. Calcular el trabajo que debe ser efectuado para reducir a la mitad el volumen del vapor a la temperatura constante.

28. Hallar la fuerza de presión efectuada por el agua sobre un panel vertical en forma de un semicírculo de radio a, cuyo diámetro está situado al nivel del agua.

Capítulo XVI

Números complejos

§ 1. Operaciones aritméticas con números complejos

Como se sabe, se llama *número complejo* a la expresión del tipo

$$z = x + iy \equiv x + yi, \tag{1}$$

donde x e y son números reales e i es la unidad imaginaria.

Los números de forma $x + i0 = x$ son idénticos a los números reales; en particular, $0 + i0 = 0$. Los números de forma $0 + iy = iy$ se llaman *imaginarios puros*.

Los números reales x e y se llaman, respectivamente, la *parte real* y la *parte imaginaria* del número z y se designan del modo siguiente

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z. \tag{2}$$

Llámase *módulo* del número complejo z al número no negativo

$$|z| = |(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2|^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0. \tag{3}$$

Llámase *número conjugado* $\bar{z}$ del (1) al número complejo

$$\bar{z} = x + i(-y) \equiv x - iy. \tag{4}$$

De este modo,

$$\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z \tag{5}$$

y

$$|\bar{z}| = |z|. \tag{6}$$

Está definida en el conjunto de números complejos la relación de la igualdad de dos números, así como las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y de división, del modo siguiente.

I. Sean $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$. En este caso,

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \quad \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2.$$

En particular, $z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 0$.

II. $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$.

De aquí se deduce que

$$\operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Re} z_1 \pm \operatorname{Re} z_2 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$$

III. $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

De aquí obtenemos, en particular, una relación importante

$$i^2 = (0 + i1)\,(0 + i1) = (0 - 1) + i\,(0 + 0) = -1. \tag{7}$$

Notemos que la regla de multiplicación III se obtiene formalmente por medio de la multiplicación de los binomios $x_1 + iy_1$ y $x_2 + iy_2$ teniendo en cuenta la (7).

Es también evidente que para $z = x + iy$ y $\bar{z} = x - iy$ tenemos:

$$z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$$

IV. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \dfrac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i\,(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ $(z_2 \neq 0)$.

Son fáciles de verificar las propiedades siguientes:

1) $\overline{(\bar{z})} = z$; $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$; 3) $\overline{z_1z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$; 4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ $(z_2 \neq 0)$;

5) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$.

§ 2. Plano complejo

Examinemos un plano respecto a las coordenadas cartesianas Oxy. A todo número complejo $z = x + iy$ se le puede poner en correspondencia un punto del plano $z\,(x, y)$ (fig. 161), esta correspondencia es biunívoca. El plano en el que se realiza esta correspondencia se llama *plano complejo* y en vez de números complejos se hace referencia a **los puntos del plano complejo.**

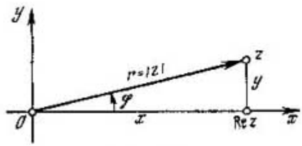

Fig. 161

Los números **reales** están situados sobre el eje Ox; $z = x + 0i = x$; por eso se llama *eje real*. Sobre el eje Oy se sitúan los números **imaginarios puros** $z = 0 + iy = iy$; por eso él se llama *eje imaginario*.

Notemos que $r = |z|$ es la distancia del origen de las coordenadas al punto z.

A cada punto z le corresponde su **radio vector** $\overrightarrow{Oz}$; el ángulo formado por el radio vector del punto z y el eje Ox se llama *argumento* $\varphi = \operatorname{Arg} z$ de este punto. Aquí $-\infty < \operatorname{Arg} z < +\infty$. El argumento del punto cero $z = 0$ es arbitrario. El valor del $\operatorname{Arg} z$ el más pequeño en módulo se llama *valor principal* y se connota $\arg z$:

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi. \tag{1}$$

Para el argumento φ tenemos (fig. 161)

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \text{sen } \varphi = \frac{y}{r}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{y}{x}, \tag{2}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

EJEMPLO. 1) $\arg 2 = 0$; 2) $\arg(-1) = \pi$; 3) $\arg i = \pi/2$.

El módulo r y el argumento φ de un número complejo pueden ser considerados (véase la fig. 161) como coordenadas polares del punto z. De aquí obtenemos

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r \text{ sen } \varphi. \tag{3}$$

De este modo, tenemos la expresión **trigonemétrica** del número complejo

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir \text{ sen } \varphi = r(\cos\varphi + i \text{ sen } \varphi), \tag{4}$$

donde $r = |z|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

TEOREMA 1. *Para sumar números complejos se suman sus radios vectores (según la regla del paralelogramo).*

Efectivamente, si el número $z_1 = x_1 + iy_1$ corresponde al punto de coordenadas (x_1, y_1), y el número $z_2 = x_2 + iy_2$, al punto de coordenadas (x_2, y_2), entonces al número $z_1 + z_2$ le corresponde el punto $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Como los triángulos rectángulos de catetos x_2 e y_2, que vienen sombreados (fig. 162), son iguales, el cuadrilátero de vértices $0, z_1, z_1 + z_2, z_2$ es un paralelogramo. Por consiguiente, el radio vector del punto $z_1 + z_2$ es la suma de los radios vectores de los puntos z_1 y z_2 (comparar con el § 2 del cap. XVIII).

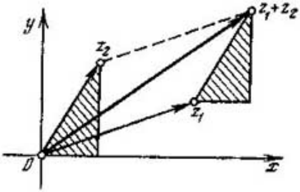

Fig. 162

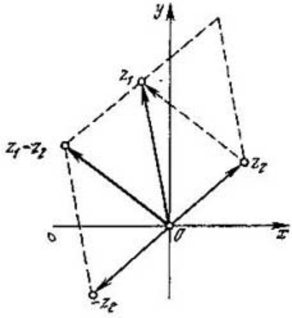

Fig. 163

COROLARIO. *Puesto que $|z|$ es la longitud del vector $\overrightarrow{Oz}$,*

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

TEOREMA 2 *Para restar números complejos se efectúa la sustracción de sus radios vectores.*

Puesto que $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, entonces $z_1 - z_2$ es igual a la segunda diagonal del paralelogramo construido sobre los vectores $\overrightarrow{Oz}$ y $\overrightarrow{Oz'}$ (fig. 163), es decir, es igual a la diferencia de los radios vectores de los puntos z_1 y z_2 (comparar con el § 3 del cap. XVIII).

COROLARIO *La distancia entre dos puntos z y z' es igual a*

$$\rho(z', z) = |z' - z|.$$

§ 3. Teoremas sobre el módulo y el argumento

TEOREMA 1 *El módulo del producto de números complejos es igual al producto de los módulos de estos números y el argumento del producto es igual a la suma de los argumentos de los factores.*

Efectivamente, si

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\,\mathrm{sen}\,\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\,\mathrm{sen}\,\varphi_2),$$

tenemos

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \mathrm{sen}\,\varphi_1\,\mathrm{sen}\,\varphi_2) + i(\mathrm{sen}\,\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\,\mathrm{sen}\,\varphi_2)] = r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\,\mathrm{sen}(\varphi_1+\varphi_2)].$$

De aquí,

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1|\cdot|z_2|$$

y

$$\mathrm{Arg}\, z_1 z_2 = \varphi_1 + \varphi_2 = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2, \tag{1}$$

donde los valores de las funciones multívocas Arg, situados en los primero y segundo miembros de la igualdad (1), deben ser elegidos convenientemente. En adelante hay que tener en cuenta esta observación.

COROLARIO *El módulo de una potencia entera positiva de un número complejo es igual a la misma potencia del módulo de este número, y el argumento de la potencia es igual al argumento del número multiplicado por el exponente de la potencia, es decir,*

$$|z^n| = |z|^n, \quad \mathrm{Arg}\, z^n = n\,\mathrm{Arg}\, z$$

(n es un número entero positivo).

La demostración se deduce directamente del examen del producto de factores iguales.

EJEMPLO Construir el punto $z' = iz$. Tenemos

$$|z'| = |i|\cdot|z| = |z|,$$

$$\mathrm{Arg}\, z' = \mathrm{Arg}\, iz = \arg i + \arg z = \frac{\pi}{2} + \arg z.$$

Por consiguiente, cuando el vector $\overrightarrow{Oz}$ se multiplica por i, gira en un ángulo recto en el sentido contrario al de las agujas del reloj (fig. 164).

TEOREMA 2. *El módulo del cociente de dos números complejos es igual al cociente de los módulos de estos números y el argumento del cociente es igual a la diferencia de argumentos del dividendo y del divisor.*

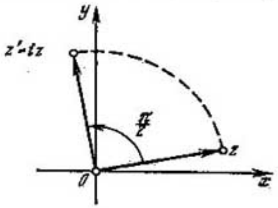

Fig. 164

Sea

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1),$$
$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2) \neq 0.$$

Puesto que

$$\bar{z}_2 = r_2 (\cos \varphi_2 - i \operatorname{sen} \varphi_2) = r_2 [\cos(-\varphi_2) + i \operatorname{sen}(-\varphi_2)],$$

en virtud del teorema 1 tenemos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \frac{\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1}{\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2} \frac{(\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1) [\cos(-\varphi_2) + i \operatorname{sen}(-\varphi_2)]}{(\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)(\cos \varphi_2 - \operatorname{sen} \varphi_2)} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (r_2 \neq 0).$$

De aquí,

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \varphi_1 - \varphi_2 = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

§ 4. Extracción de raíces de un número complejo

Sea

$$\sqrt[n]{z} = \rho (\cos \psi + i \operatorname{sen} \psi), \tag{1}$$

donde $z = r (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$. En este caso, en virtud del § 3, tenemos

$$z = [\rho (\cos \psi + i \operatorname{sen} \psi)]^n = \rho^n (\cos n\psi + i \operatorname{sen} n\psi), \tag{2}$$

de donde obtenemos

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{3}$$

De este modo

$$\rho = \sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{|z|}$$

y

$$\psi = \operatorname{Arg} \sqrt[n]{z} = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}.$$

Notemos que por $\sqrt[n]{r}$ se entiende aquí el valor aritmético de la raíz.

Aquí es suficiente tomar por k sólo los valores $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, porque para los restantes valores de k se obtiene la repetición de los mismos valores hallados de la raíz.

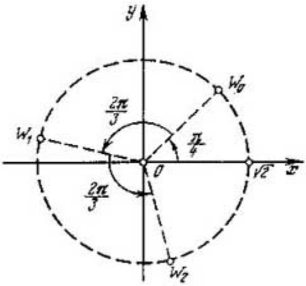

Fig. 165

Por consiguiente, tenemos definitivamente

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2k\pi}{n} + \right.$$
$$\left. + i \operatorname{sen} \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right)$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \quad (4)$$

De la fórmula (4) se deduce que la raíz n-ésima de todo número complejo $z \neq 0$ posee exactamente n valores.

EJEMPLO. Hallar $W = \sqrt[3]{-1+i}$. Puesto que $-1+i = \sqrt{2} \times \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right)$, en virtud de la fórmula (4) tenemos

$$W = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right) =$$
$$= \sqrt[6]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right] \quad (k = 0, 1, 2).$$

De aquí,

$$W_0 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right),$$
$$W_1 = \sqrt[6]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} \right) \right] =$$
$$= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{11}{12} \pi + i \operatorname{sen} \frac{11}{12} \pi \right),$$
$$W_2 = \sqrt[6]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} \right) \right] =$$
$$= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{19}{12} \pi + i \operatorname{sen} \frac{19}{12} \pi \right).$$

Los puntos W_0, W_1, W_2 son los puntos equidistantes situados sobre la circunferencia de radio $\sqrt[6]{2}$ (fig. 165).

§ 5. Noción de la función de una variable compleja

Sean dados dos planos complejos Oxy (plano z) y $O'uv$ (plano w).

DEFINICION. *Si a todo punto $z \in E$ (E es el conjunto de puntos del plano z) le corresponde, de acuerdo con una cierta ley f, un punto único $w \in E'$ (E' es el conjunto de puntos del plano w), se dice que w es* ***función*** *(unívoca) de z*

$$w = f(z) \tag{1}$$

con dominio de definición E y cuyos valores pertenecen a E' (fig. 166). Si el conjunto de valores de la función $f(z)$ agotan todo el conjun-

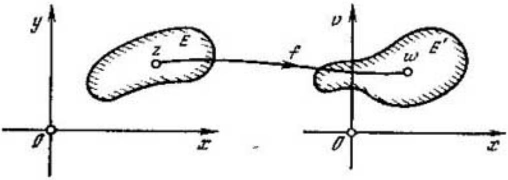

Fig. 166

to E', entonces E' se llama *conjunto de valores* (*dominio de variación*) de la función $f(z)$. En este caso escriben

$$E' = f(E). \tag{2}$$

Los conjuntos E y E' pueden ser representados sobre un mismo plano complejo.

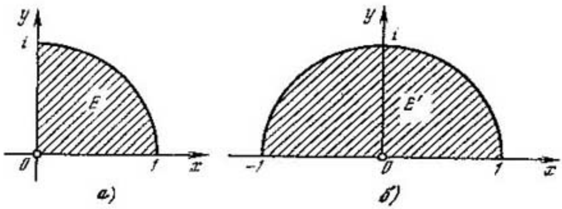

Fig. 167

De este modo, **toda función compleja realiza una aplicación unívoca unilateral de un conjunto en otro**. Gracias a esta propiedad las funciones complejas se utilizan en hidrodinámica y aerodinámica, porque ellas permiten describir cómodamente la «historia» del movimiento de un volumen de líquido (o de gas).

La rama de matemáticas que estudia las propiedades de las funciones complejas se llama *teoría de funciones de una variable compleja*.

EJEMPLO. ¿Cuál es la imagen del sector E

$$0 < \arg z < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < |z| < 1$$

(fig. 167, *a*) con la aplicación $w = z^2$?

Tenemos

$$\arg w = 2 \arg z < \pi \quad \text{y} \quad |w| = |z|^2 < 1.$$

Por eso, la imagen E' es un semicírculo (fig. 167, *b*).

EJERCICIOS

1. Hallar $z = \frac{(1+i)^{100}}{(\sqrt{3}-i)^{50}}$.

2. Construir los dominios siguientes:

a) $0 < \operatorname{Re} z < 1$; b) $\operatorname{Im} z > 2$; c) $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$; d) $|z| < 1$.

3. Sea un cuadrado de vértices 0, 1, $1 + i$, i en el plano z. ¿Cuál será su imagen por aplicación $w = z^2$?

Capítulo XVII

Determinantes de segundo y tercer órdenes

§ 1. Determinantes de segundo orden

Llámase *determinante* de segundo orden a la expresión

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \tag{1}$$

(véase también el § 5 del cap. I).

Los números a_1, b_1, a_2, b_2 se llaman *elementos* del determinante; ellos forman dos filas y dos columnas. En adelante consideraremos siempre que todas las magnitudes examinadas son **reales**.

La fórmula (1) da la regla de «desarrollo» (de cálculo) de un determinante del segundo orden, a saber: *el determinante del segundo orden es igual a la diferencia de productos de sus elementos de la primera y la segunda diagonales.*

Con ayuda de determinantes del segundo orden es cómodo resolver los sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1, \\ a_2 x + b_2 y &= c_2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Semejante sistema lineal, en el cual los términos independientes se encuentran en los segundos miembros será llamado, para precisar la idea, sistema *estandar*.

Por *solución* del sistema (2) se entiende todo par de números (x, y) que transforma este sistema en una identidad. Si un tal par es único, la solución del sistema se llama **única**. Se introduce análogamente la noción de **solución** de un sistema que posee n incógnitas ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Para hallar las soluciones del sistema (2) aplicamos el **método de eliminación**. Multiplicando la primera ecuación del sistema (2) por b_2, la segunda ecuación por b_1 y sumándolas tendremos

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x = c_1 b_2 - c_2 b_1. \tag{3}$$

De un modo análogo multiplicando la primera ecuación del sistema (2) por a_2, la segunda ecuación por a_1 y sumándolas obtendremos

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, y = a_1 c_2 - a_2 c_1. \tag{4}$$

Introduzcamos el *determinante del sistema*

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

así como los determinantes auxiliares

$$D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Notemos que los determinantes D_x y D_y se obtienen a partir del determinante del sistema D, por medio de la sustitución de los coeficientes de la incógnita indicada por los términos constantes correspondientes.

Las ecuaciones (3) y (4) toman la forma

$$Dx = D_x, \quad Dy = D_y. \tag{5}$$

Si $D \neq 0$, resulta que el sistema (2) tiene una sola solución

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D} \tag{6}$$

(*fórmulas de Cramer*); se puede verificar por la sustitución directa del sistema (2), que el sistema de números (6) es la solución del sistema (2).

OBSERVACIÓN. Si el determinante $D = 0$, esto significa que el sistema (2) no tiene solución (es decir, es incompatible) o, al contrario, posee una infinidad de soluciones (es decir, es indeterminado).

EJEMPLO. Resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} 7x-6y&=5, \\ 8x-7y&=-10. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Tenemos

$$D=\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -49+48=-1,$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -10 & -7 \end{vmatrix} = -35-60=-95, \quad D_y=\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & -10 \end{vmatrix} = $$

$$= -70-40=-110,$$

de donde, aplicando las fórmulas de Cramer (6) obtenemos

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-95}{-1}=95, \quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-110}{-1}=110.$$

Geométricamente, la solución (95; 110) representa el punto de intersección de rectas (7).

§ 2. Sistema de dos ecuaciones homogéneas con tres incógnitas

Examinemos el sistema homogéneo

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z=0.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Este sistema es siempre compatible, porque admite evidentemente una solución nula $x=0$, $y=0$, $z=0$. Sin embargo, es interesante hallar soluciones **no nulas** (x, y, z) del sistema (1). Sea, por ejemplo, $z \neq 0$. En este caso el sistema (1) puede ser escrito así

$$\left.\begin{aligned} a_1\frac{x}{z}+b_1\frac{y}{z}=-c_1,\\ a_2\frac{x}{z}+b_1\frac{y}{z}=-c_2,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

de donde, suponiendo que $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$, obtenemos

$$\frac{x}{z}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} -c_1 & b_1\\ -c_2 & b_2\end{vmatrix}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}, \tag{3}$$

$$\frac{y}{z}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & -c_1\\ a_2 & -c_2\end{vmatrix}=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}. \tag{4}$$

Introduzcamos la *matriz de coeficientes del sistema* (1)

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{matrix}\right\|. \tag{5}$$

Los determinantes del segundo orden D_1, D_2 y D_3 que se obtienen a partir de la matriz (5) suprimiendo la columna correspondiente, se llaman *menores* de esta matriz. De este modo, tenemos

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=D.$$

Utilizando estas notaciones se puede escribir las ecuaciones (3) y (4) del modo siguiente

$$\frac{x}{z}=\frac{D_1}{D_3},\quad \frac{y}{z}=-\frac{D_2}{D_3},$$

de donde obtenemos

$$\frac{x}{D_1}=\frac{y}{-D_2}=\frac{z}{D_3}. \tag{6}$$

Las igualdades (6) son evidentemente justas también para la solución nula.

De este modo, tenemos la siguiente **regla**: *las incógnitas de un sistema homogéneo* (1) *son proporcionales a los menores correspondientes de su matriz de coeficientes tomados con signos apropiados.*

Designando por t el coeficiente de proporcionalidad para las relaciones (6) obtendremos un sistema completo de soluciones del sistema (1):

$$x = D_1t, \quad y = -D_2t, \quad z = D_3t \quad (-\infty < t < +\infty). \tag{7}$$

Durante la deducción de las fórmulas (7) hemos supuesto que $D = D_3 \neq 0$. Sin embargo es fácil convercernos de que las fórmulas (7) se quedan justas, si **cualquier** menor (por lo menos uno) D_1, D_2, D_3 es distinto de cero.

OBSERVACIÓN. Si todos los menores D_1, D_2, D_3 son iguales a cero, el sistema exige un estudio especial.

EJEMPLO. Resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} x-2y+3z=0,\\ 4x+5y-6z=0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Componiendo la matriz de coeficientes

$$\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{Vmatrix},$$

hallamos sus menores

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}=12-15=-3,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}=-6-12=-18,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=5+8=13.$$

Según la fórmula (7) el sistema completo de soluciones del sistema (8) es siguiente:

$$x = -3t, \quad y = +18t, \quad z = 13t,$$

donde $-\infty < t < +\infty$.

La solución no nula más simple del sistema (1), que se obtiene cuando $t = 1$, es $x = -3$, $y = 18$, $z = 13$.

§ 3. Determinantes de tercer orden

DEFINICIÓN 1. *Por **determinante** de tercer orden se entiende la expresión*

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Los números a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ se llaman *elementos del determinante*; ellos forman tres **filas** y tres **columnas** del determinante.

Desarrollando los determinantes del segundo orden (menores) de la fórmula (1) y agrupando los términos del mismo signo resulta que el determinante del tercer orden representa una suma de seis términos

$$D = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1, \qquad (2)$$

tres de los cuales se toman con el signo «+» y los tres restantes con el signo «—».

EJEMPLO. Calcular

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Aplicando la fórmula (1) tenemos

$$D = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) = 0.$$

Más abajo indicaremos los procedimientos más simples para calcular determinantes de tercer orden.

DEFINICIÓN 2. *Llámase* ***menor*** *del elemento del determinante de tercer orden al determinante de segundo orden obtenido a partir del determinante dado, suprimiendo la fila y la columna de este elemento.*

Por ejemplo, para el determinante (3) el menor de su elemento 2 situado en la segunda fila y en la primera columna es el determinante

$$M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2.$$

En adelante diremos, para abreviar, que el elemento de un determinante de tercer orden ocupa un *lugar par*, si la suma de números de su fila y de su columna es un número par y un *lugar impar*, si esta suma es un número impar.

DEFINICION 3. *Llámase cofactor (complemento algebraico) de un elemento de un determinante de tercer orden al menor de este elemento tomado con el signo «+», si el elemento ocupa un lugar par y con el signo «—», si su lugar es impar.*

De este modo, si M es el menor del elemento del determinante, i y j son el número de la fila y el número de la columna, respectivamente, su cofactor es

$$A = (-1)^{i+j} M.$$

Por ejemplo, para el elemento c_2 del determinante (1) que se encuentra en la segunda fila y en la tercera columna, su cofactor es

$$C_2 = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Los signos correspondientes que obtienen en este caso los menores de elementos del determinante pueden ser dados por la tabla

+	−	+
−	+	−
+	−	+

En adelante nos pondremos de acuerdo para designar los complementos algebraicos de los elementos del determinante con las letras mayúsculas correspondientes.

TEOREMA DEL DESARROLLO. *El determinante de tercer orden es igual a la suma de productos pares de elementos de cualquier fila o columna por sus complementos algebraicos.*

De este modo, para el determinante (1) son justos seis desarrollos siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} D = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1, \\ D = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2, \\ D = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 \end{array}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} D = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3, \\ D = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3, \\ D = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Es fácil verificar que las fórmulas (4) y (5) dan la misma expresión (2) tomada como definición.

OBSERVACIÓN. Con ayuda de las fórmulas de tipo (4) y (5) se puede introducir por inducción los determinantes de orden superior.

§ 4. Principales propiedades de los determinantes

Al formular estas propiedades no indicaremos el orden del determinante, porque ellas son justas para los determinantes de cualquier orden.

I. (Equivalencia de filas y de columnas). *El valor de un determinante no varía cuando todas sus filas se reemplazan por columnas correspondientes*, es decir

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Efectivamente, desarrollando el primer determinante según los elementos de la primera fila y el segundo determinante según los elementos de la primera columna, obtendremos, de acuerdo con el teorema del desarrollo (§ 3), un mismo resultado.

II. *Si se reordenan los términos de dos filas paralelas del determinante, su valor absoluto conserva el valor inicial y su signo se cambia por el opuesto.*

Sea, por ejemplo, que en el determinante

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2}$$

están reordenadas la primera y la segunda filas, en este caso obtendremos el determinante

$$\widetilde{D}=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{2'}$$

Desarrollando el determinante $\widetilde{D}$ según los elementos de la segunda fila y teniendo en cuenta el hecho de que durante la reordenación de dos filas se ha cambiado la paridad de los lugares de estos elementos, tendremos

$$\widetilde{D}=a_1(-A_1)+b_1(-B_1)+c_1(-C_1)=-D.$$

Se obtiene también el mismo resultado en otros casos.

COROLARIO 1. *Si en un determinante los elementos de una fila son respectivamente iguales a los de la otra fila, este determinante es igual a cero.*

Efectivamente, sea por ejemplo,

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Permutando en este determinante las dos primeras filas, obtendremos, en virtud del teorema, el determinante $-D$. Pero es evidente que esta operación no modifica el determinante D; por eso $-D = D$ y, por consiguiente, $D=0$.

COROLARIO 2. *La suma de los productos pares de elementos de una fila de un determinante por los complementos algebraicos de los elementos correspondientes de otra fila paralela es igual a cero*, es decir, para el determinante (2) tenemos

$$\left.\begin{aligned} a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2=0, \\ a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3=0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

etc., así como

$$\left.\begin{aligned} a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3 = 0, \\ a_1C_1 + a_2C_2 + a_3C_3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

etc., (en total se pueden escribir doce igualdades de este tipo).

Los primeros miembros de todas las igualdades (3) y (4) representan los desarrollos de los determinantes correspondientes de tercer orden, que contienen dos filas iguales paralelas y, por consiguiente, son iguales a cero. Por ejemplo,

$$a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

(aquí el desarrollo debe ser efectuado por la segunda fila).

III. *Se puede sacar fuera del signo del determinante un factor común de los elementos de una fila*, es decir,

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

etc.

Esta propiedad se deduce directamente del desarrollo del determinante según los elementos de la fila correspondiente.

COROLARIO 1 *Si todos los elementos de una fila cualquiera de un determinante son iguales a cero, el determinante es igual a cero.*

COROLARIO 2 *Si los elementos de una fila cualquiera de un determinante son respectivamente proporcionales a los elementos de una otra fila, el determinante es igual a cero.*

Por ejemplo, tenemos

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

etc.

IV. *Si en un determinante los elementos de una fila son sumas de dos sumandos, el determinante puede ser descompuesto en la suma de dos determinantes correspondientes.*

Por ejemplo, tenemos

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1+\beta_1 & c_1+\gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1+\alpha_1)\, A_1 + (b_1+\beta_1)\, B_1 + (c_1+\gamma_1)\, C_1 =$$

$$= (a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1) + (\alpha_1A_1 + \beta_1B_1 + \gamma_1C_1) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

etc.

COROLARIO. *El valor del determinante no cambia, si se añaden (o restan) a los elementos de una fila cualquiera números proporcionales a los elementos de una otra línea paralela con el mismo coeficiente de proporcionalidad* (llamadas **«transformaciones elementales del determinante»**).

Efectivamente, sea

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Examinemos, por ejemplo, los determinantes

$$\widetilde{D} = \begin{vmatrix} a_1 \pm ka_2 & b_1 \pm kb_2 & c_1 \pm kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Utilizando las propiedades IV y III tendremos

$$\widetilde{D} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \pm k \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D \pm k \cdot 0 = D.$$

Las transformaciones elementales dan un procedimiento cómodo para el cálculo de determinantes.

EJEMPLO. Calcular el determinante **simétrico**

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Restando la primera fila multiplicada por dos de la segunda fila y la primera fila multiplicada por tres de la tercera fila obtendremos

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 24 - 16 = 8.$$

§ 5. Sistema de tres ecuaciones lineales

Examinemos un sistema lineal estándar de tres ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

cuyos términos independientes se encuentran en los segundos miembros. Por *solución* del sistema se entienden los tres números (x, y, z) que satisfacen este sistema.

Introducimos el *determinante del sistema*

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{2}$$

así como los *determinantes auxiliares*

$$D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Multiplicando sucesivamente las ecuaciones del sistema (1) por los complementos algebraicos A_1, A_2, A_3 de los elementos correspondientes a_1, a_2, a_3 de la primera columna del determinante D obtendremos

$$\begin{aligned} (a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3)\,x+(b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3)\,y+ \\ +(c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3)\,z=d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3, \end{aligned} \tag{4}$$

de donde, aplicando el teorema de desarrollo (§ 3) y el corolario 2 de la propiedad II, tendremos $Dx+0\cdot y+0\cdot z=D_x$, es decir,

$$Dx=D_x. \tag{5}$$

De un modo análogo, utilizando los complementos algebraicos de los elementos de la segunda y la tercera columnas del determinante D, hallamos

$$Dy=D_y, \quad Dz=D_z. \tag{5'}$$

Si el determinante del sistema $D\neq 0$, a partir de las ecuaciones (5) y (5') obtenemos la **solución única** del sistema (1):

$$x=\frac{D_x}{D}, \quad y=\frac{D_y}{D}, \quad z=\frac{D_z}{D}\,^{1)}. \tag{6}$$

[1]) De hecho, hemos demostrado que si la solución del sistema (1) existe, ella se expresa por las fórmulas (6). Con reemplazos inmediatos uno puede cerciorarse de que cuando $D\neq 0$, las fórmulas (6) brindan la solución del sistema (1).

De este modo tenemos **la regla de Cramer**: *las incógnitas de un sistema lineal estándar* (1) *con determinante no nulo, son fracciones cuyo denominador es el determinante del sistema y los numeradores son iguales a los determinantes auxiliares correspondientes.*

OBSERVACIÓN. Si el determinante del sistema $D = 0$, este sistema (1) es incompatible o tiene una infinidad de soluciones.

EJEMPLO. Resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z&=1,\\ 2x+3y+z&=0,\\ 3x+y+2z&=0. \end{aligned}\right\}$$

Tenemos

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Restando la primera columna multiplicada por dos de la segunda columna y la primera columna multiplicada por tres de la tercera columna, obtendremos

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -5\\ 3 & -5 & -7 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} -1 & -5\\ -5 & -7 \end{vmatrix}=7-25=-18\neq 0.$$

Para los determinantes auxiliares hallamos los valores siguientes:

$$D_x=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1\\ 1 & 2 \end{vmatrix}=5,\quad D_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1\\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-1,$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3\\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-7.$$

Aplicando la regla de Cramer obtenemos la solución del sistema:

$$x=-\frac{5}{18},\qquad y=\frac{1}{18},\qquad z=\frac{7}{18}.$$

§ 6. Sistema homogéneo de tres ecuaciones lineales

Examinemos el sistema lineal

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z&=0,\\ a_3x+b_3y+c_3z&=0, \end{aligned}\right\}\tag{1}$$

cuyos términos independientes son iguales a cero. Este sistema lineal se llama *homogéneo*.

El sistema lineal homogéneo (1) admite evidentemente una solución nula $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y, por consiguiente, es siempre compatible.

Es interesante estudiar los casos cuando el sistema homogéneo posee soluciones no nulas.

TEOREMA. *Un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas posee soluciones no nulas, si y sólo si, su determinante es igual a cero*, es decir,

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

DEMOSTRACIÓN Supongamos que el sistema (1) tiene una solución no nula (x_1, y_1, z_1). Si su determinante $D \neq 0$, entonces en virtud de las fórmulas de Cramer el sistema (1) posee solamente la solución nula, lo que contradice el supuesto. Por consiguiente, $D = 0$.

Sea $D = 0$. En este caso, el sistema (1) es incompatible o tiene una infinidad de soluciones. Pero nuestro sistema es compatible porque posee una solución nula. Por consiguiente, el sistema (1) admite una infinidad de soluciones, incluso no nulas.

OBSERVACIÓN Indiquemos un procedimiento que permite hallar las soluciones no nulas del sistema (1) en el caso típico.

Sea el determinante del sistema $D = 0$. Supongamos que no todos sus menores del segundo orden son iguales a cero.

Supongamos que

$$C_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3}$$

(esto siempre se puede alcanzar con ayuda de una reordenación de ecuaciones y de un cambio de la numeración de incógnitas).

Examinemos el subsistema compuesto de las dos primeras ecuaciones del sistema (1):

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

En virtud del § 2 las soluciones de este sistema son las siguientes

$$x = A_3t, \quad y = B_3t, \quad z = C_3t \tag{5}$$

$(-\infty < t < +\infty)$, donde A_3, B_3, C_3 son los complementos algebraicos correspondientes. Sustituyendo estos números en la tercera ecuación no utilizada del sistema (1) y teniendo en cuenta que el determinante $D = 0$, obtendremos

$$a_3x + b_3y + c_3z = (a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3)\, t = Dt \equiv 0.$$

Por consiguiente, las fórmulas (5), donde t es arbitrario dan todas las soluciones del sistema completo (1).

Geométricamente las ecuaciones del sistema (1) son las ecuaciones de tres planos en el espacio $Oxyz$ (véase el § 2 del cap. XIX). Si el determinante $D \neq 0$, estos planos se intersecan en un solo punto O (0, 0, 0); si el determinante $D = 0$, pero no todos sus menores del segundo orden son iguales a cero, estos planos se intersecan en nuestro caso según una recta (como las «hojas de un libro»). Hemos dejado sin examinar el caso cuando los tres planos se juntan.

§ 7. Sistema de ecuaciones lineales con numerosas incógnitas. Método de Gauss

Examinemos el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=a_{1,\,n+1}, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=a_{2,\,n+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=a_{n,\,n+1}. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Aquí los coeficientes del sistema poseen un doble índice: a saber, el coeficiente a_{ij} tiene para el primer índice i el número de la ecuación y para el segundo j, el número de la incógnita. Para la comodidad de cálculos los términos independientes están designados por $a_{i,n+1}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

El método más simple de resolver el sistema (1) es el **método de eliminación.** Vamos a explicarlo en forma del **esquema de Gauss** (habitualmente denominado *método de Gauss*).

Sea, para precisar, $a_{11} \neq 0$ el «**coeficiente dominante**». Al dividir todos los términos de la primera ecuación por a_{11} tendremos una ecuación **reducida**

$$x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n=\alpha_{1,n+1}, \tag{2}$$

donde

$$\alpha_{1j}=\frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1). \tag{3}$$

Examinemos la i-ésima ecuación del sistema (1):

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n=a_{i,n+1}. \tag{4}$$

Para hacer desaparecer x_1 en esta ecuación multipliquemos la ecuación reducida (2) por a_{i1} y restemos la ecuación obtenida de la ecuación (4). En este caso tendremos

$$a_{i2}^{(1)}x_2+\ldots+a_{in}^{(1)}x_n=a_{i,n+1}^{(1)} \tag{5}$$

donde

$$a_{ij}^{(1)}=a_{ij}-a_{i1}\alpha_{1j} \quad (j=2,\ 3,\ \ldots,\ n+1) \tag{6}$$

De este modo obtenemos un sistema más corto

$$\left.\begin{array}{l} a_{22}^{(1)}x_2+\ldots+a_{2n}^{(1)}x_n=a_{2,\,n+1}^{(1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2+\ldots+a_{nn}^{(1)}x_n=a_{n,\,n+1}^{(1)}, \end{array}\right\} \tag{7}$$

cuyos coeficientes se determinan mediante las fórmulas (6).

Si su **coeficiente dominante** $a_{22}^{(1)} \neq 0$, entonces aplicando el procedimiento indicado arriba se puede excluir x_2 del sistema (7), los nuevos coeficientes serán calculados con ayuda de las fórmulas de tipo (6), etc. Esta parte de cálculos se llama **paso directo del método de Gauss.**

Para determinar las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ examinemos la ecuación reducida

$$\left.\begin{aligned} x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n&=\alpha_{1,\,n+1},\\ x_2+\ldots+\alpha_{2n}^{(1)}x_n&=\alpha_{2,\,n+1}^{(1)},\\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\ x_n&=\alpha_{n,\,n+1}^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

De donde hallamos sucesivamente las incógnitas (paso inverso)

$$\left.\begin{aligned} n&=\alpha_{n,\,n+1}^{(n-1)},\\ x_{n-1}&=\alpha_{n-1,\,n+1}^{(n-2)}-\alpha_{n-1,\,n}^{(n-2)}x_n,\\ \cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_1&=\alpha_{1,\,n+1}-\alpha_{1n}x_n-\ldots-\alpha_{1,\,n-1}x_{n-1}-\ldots-\alpha_{12}x_2 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Notemos que las operaciones (9) se hacen sin división.

Si un coeficiente dominante de turno resulta ser igual a cero, es conveniente permutar adecuadamente las ecuaciones del sistema. Es posible que el sistema (1) sea incompatible. En este caso, el método de Gauss es naturalmente irrealizable.

EJEMPLO. Resolver por medio del método de Gauss el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-3x_2+4x_3&=20,\\ 3x_1+4x_2-2x_3&=-11,\\ 4x_1+2x_2+3x_3&=9. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Componemos la tabla de coeficientes del sistema (10), considerando los términos independientes del mismo para $x^0 = 1$.

x_1	x_2	x_3	x^0	$\sum$	
2	−3	4	20	23	I
3	4	−2	−11	−6	
4	2	3	9	18	
1	−1,5	2	10	11,5	
	8,5	−8	−41	−40,5	II
	8	−5	−31	−28	
	1	−0,625	−3,875	−3,5	
		−2,6875	−8,0625	−10,75	III
		1	3	4	
		1	3	4	IV
	1		−2	−1	
1			1	2	

La última columna $\sum$ contiene las sumas de elementos de las filas correspondientes de la tabla; esta columna sirve para controlar los cálculos.

Considerando el coeficiente 2 marcado como dominante y dividiendo por este coeficiente todos los elementos de la primera fila de la tabla (incluyendo lo que figura en la columna $\sum$) obtenemos los coeficientes de la primera ecuación reducida (véase la tabla). El control corriente de cálculos consiste en asegurar que el elemento de la columna $\sum$ es igual a la suma de todos los otros elementos de esta línea. Con esto termina el llenado de la sección I de la tabla.

Luego, utilizando la fórmula (6), calculamos los coeficientes del sistema corto que no contiene la incógnita x_1. Para más claridad llamaremos **reducida** a la línea que contiene los coeficientes de la ecuación reducida y a la columna que contiene el coeficiente dominante de la sección la llamaremos **dominante**. En este caso, partiendo de la fórmula (6), se puede enunciar la siguiente **regla:** *los coeficientes transformados del esquema de Gauss son iguales a sus coeficientes iniciales menos el producto de sus «proyecciones» sobre la línea reducida y la columna dominante correspondientes.* Aplicando esto llenamos la sección II de la tabla incluyendo la columna de control. Para comodidad de los cálculos tomamos el elemento 8 en calidad de coeficiente dominante de la sección II (véase la tabla).

Actuando de modo análogo llenamos la sección III de la tabla. Así concluye el paso directo del método de Gauss.

Las incógnitas x_3, x_2 y x_1 se determinan sucesivamente a partir de ecuaciones reducidas

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 3,\\
x_2 - 0{,}625x_3 &= -3{,}875,\\
x_1 - 1{,}5x_2 + 2x_3 &= 10.
\end{aligned}
$$

De donde,

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 3,\\
x_2 &= -3{,}875 + 0{,}625\cdot 3 = -2,\\
x_3 &= 10 - 2\cdot 3 + 1{,}5\cdot(-2) = 1
\end{aligned}
$$

(**paso inverso**). Los resultados del paso inverso se incluyen en la sección IV de la tabla.

Notemos que si se toman como términos independientes los elementos de la columna $\sum$ se obtiene para las incógnitas los valores $\hat{x}_3 = 4$, $\hat{x}_2 = -1$, $\hat{x}_1 = 2$ que superan en una unidad los valores de las incógnitas x_3, x_2, x_1. Esta circunstancia permite el **control final** de los cálculos.

EJERCICIOS

1. Calcular los determinantes del segundo orden:

a) $\begin{vmatrix} -7 & 6 \\ 8 & -7 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

2. Resolver con ayuda de determinantes el sistema

$$
\left.\begin{aligned}
x + 0{,}9y &= 1,\\
1{,}1x + y &= -2.
\end{aligned}\right\}
$$

3. Hallar las soluciones del sistema

$$
\left.\begin{aligned}
x + y &= 1,\\
2x + 2y &= \alpha
\end{aligned}\right\}
$$

(α es un parámetro).

4. Hallar el punto de intersección de las rectas

$$\left.\begin{array}{r} 5x+\alpha y=1, \\ x-5y=-3 \end{array}\right\}$$

(α es un parámetro).

5. Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x-3y+5z=0, \\ 7x-9y-11z=0. \end{array}\right\}$$

Indicar alguna solución entera no nula de este sistema.

6. Calcular los determinantes del tercer grado:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}.$$

7. Resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}=0.$$

8. Resolver con ayuda de determinantes el sistema

$$\left.\begin{array}{r} -x+3y+5z=1, \\ 3x+y+3z=2, \\ 5x+3y-z=-3. \end{array}\right\}$$

9. Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=0, \\ 2x-3y+4z=0, \\ 3x-y+7z=0. \end{array}\right\}$$

10. Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} \alpha x=0, \\ x+y=0. \\ x+z=0 \end{array}\right\}$$

(α es un parámetro).

11. Mediante el método de Gauss, resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=-10, \\ 2x_1+3x_2+4x_3-5x_4=-8, \\ 3x_1+4x_2-5x_3-6x_4=4, \\ 4x_1-5x_2-6x_3-7x_4=24. \end{array}\right\}$$