# *Capítulo XVIII*

# Elementos de álgebra vectorial

## § 1. Escalares y vectores

Una magnitud que se caracteriza completamente por su valor numérico en un sistema de unidades elegido se llama *magnitud escalar* o simplemente *escalar*. Tales, son, por ejemplo, la masa y el volumen de un cuerpo, la temperatura de un medio, etc. Un escalar se determina **por un número** que puede ser positivo, negativo o igual a cero.

Una magnitud que además de su valor numérico se caracteriza también por su **dirección** y **sentido** se llama *magnitud vectorial*

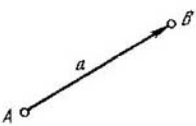


Fig. 168

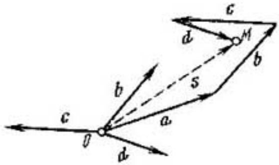


Fig. 169

o simplemente *vector*. Tales son, por ejemplo, la fuerza, el desplazamiento, la velocidad, etc. Un vector se determina por un número y una dirección.

Los vectores se designan generalmente por letras gruesas, por ejemplo, $\boldsymbol{a}$. Geométricamente el vector se representa por un segmento orientado en el espacio (fig. 168); se utilizan en este caso la designación $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, donde el punto $A$ es el origen del segmento y el punto $B$ es su extremo. En adelante para más claridad consideraremos los vectores como segmentos orientados.

Llámase *módulo* (*longitud*) del vector $\boldsymbol{a}$

$$|\boldsymbol{a}| = a$$

su valor numérico sin tener en cuenta su dirección. (Naturalmente, $|\overrightarrow{AB}|$ designa el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$). El vector $\boldsymbol{0}$ cuyo módulo es igual a cero se llama *vector nulo* (la dirección del vector nulo es arbitraria).

Se dice que dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son *iguales*, si ellos están situados sobre rectas paralelas o coincidentes (paralelismo en sentido amplio) y poseen una misma longitud y están dirigidos en un mismo sentido. Convenimos en no distinguir los vectores iguales e introduciremos de este modo la noción de *vector libre*. En otras palabras, un vector libre puede ser transportado a cualquier punto del espacio a condición de que la longitud y la dirección del mismo siguen siendo las mismas. En particular, los orígenes de vectores libres pueden estar en un punto común. En adelante expondremos **la teoría de vectores libres** en el espacio de tres dimensiones.

## § 2. Suma de vectores

DEFINICION. *Llámase* ***suma*** *de varios vectores, por ejemplo,* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ (fig. 169) *al vector*

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$$

*igual en magnitud y en dirección a la resultante* $\overrightarrow{OM}$ *de la línea quebrada del espacio, construida sobre estos vectores.*

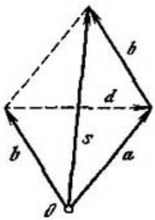


Fig. 170

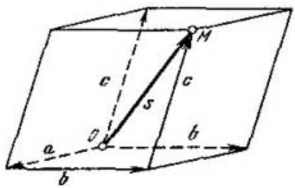


Fig. 171

En el caso de dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ (fig. 170) su suma $\boldsymbol{s}$ está representada por la diagonal del paralelogramo construido sobre estos vectores que parte de su punto de aplicación común (*regla del paralelogramo*).

Puesto que en un triángulo la longitud de uno de los lados es más pequeña que la suma de otros dos lados, la fig. 170 nos da

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|,$$

es decir, *el módulo de la suma de dos vectores no supera la suma de módulos de estos vectores.*

En el caso de tres vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ (fig. 171) su suma $\boldsymbol{s}$ es igual a la diagonal $\overrightarrow{OM}$ del paralelepípedo construido sobre estos vectores (*regla del paralelepípedo*).

Es fácil verificar que para la adición vectorial son justas las propiedades siguientes:

1) *propiedad conmutativa*

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a},$$

es decir, *la suma vectorial no depende del orden de sumandos*;

2) *propiedad asociativa*

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c},$$

es decir, *la suma de tres (o más) vectores no depende del orden de colocación de los paréntesis*.

Para cada vector $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ (fig. 172) existe un vector opuesto $-\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA'}$ que tiene una misma longitud, pero está dirigido en

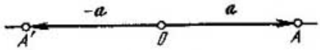

Fig. 172

sentido opuesto. Según la regla del paralelogramo tenemos, evidentemente,

$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0},$$

donde $\boldsymbol{0}$ es el **vector nulo**.

Es fácil verificar que

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}.$$

## § 3. Diferencia de vectores

Se llama *diferencia de vectores* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$ (fig. 173) al vector

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b},$$

tal, que

$$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}. \quad (1)$$

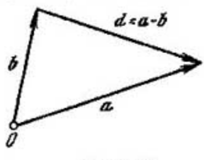

Fig. 173

Notemos que en el paralelogramo construido sobre los vectores dados $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ (fig. 170) su diferencia está representada por la segunda diagonal, convenientemente orientada de este paralelogramo.

El fácil verificar que es justa la regla siguiente de sustracción:

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}).$$

## § 4. Multiplicación de un vector por un escalar

DEFINICION. *Llámase* ***producto de un vector a por un escalar*** $k$ (fig. 174) *a un vector*

$$\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{a}k$$

*de longitud* $b = |k|\, a$, *cuya dirección:* 1) *coincide con la dirección del vector* $\boldsymbol{a}$, *si* $k > 0$; 2) *es de sentido contrario si* $k < 0$; 3) *es arbitraria si* $k = 0$.

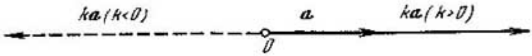


Fig. 174

No es difícil de convencerse de que esta operación vectorial posee las siguientes propiedades:

1) $(k + l)\, \boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{a}$,

$k\, (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$

2) $k\, (l\boldsymbol{a}) = (kl)\, \boldsymbol{a}$;

3) $1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}, \quad (-1)\, \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}, \quad 0 \cdot \boldsymbol{a} = 0$

($k$, $l$ son escalares).

EJEMPLO. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{a}$.

Si un vector no nulo $\boldsymbol{a}$ se divide por su longitud $a = |\boldsymbol{a}|$ (es decir, se multiplica por el escalar $1/a$), se obtiene un vector unitario $\boldsymbol{e}$ llamado *orto* de mismo sentido: $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{a}/a$. De donde se deduce la fórmula estándar de un vector

$$\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}. \tag{1}$$

La fórmula (1) es formalmente justa también para un vector nulo $\boldsymbol{a} = 0$, donde $a = 0$ y $\boldsymbol{e}$ es un vector unitario arbitarario.

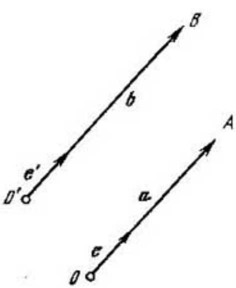


Fig. 175

## § 5. Vectores colineales

DEFINICIÓN. *Dos vectores* $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ *y* $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{O'B}$ (fig. 175) *se llaman* ***colineales***, *si ellos son paralelos en sentido amplio (es decir, si están situados sobre rectas paralelas o sobre una misma recta).*

Como la dirección de un vector nulo es absolutamente arbitraria, se puede considerar **que el vector nulo es colineal a cualquier vector.**

TEOREMA. *Dos vectores no nulos* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$ *son colineales, si y sólo si, ellos son proporcionales*, es decir, *si*

$$\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a} \tag{1}$$

($k$ es un escalar).

DEMOSTRACIÓN. 1) Supongamos que los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a} \neq 0$, $\boldsymbol{b} \neq 0$) son colineales y $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$ son sus vectores unitarios.

Tenemos

$$\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{b} = b\boldsymbol{e}'. \tag{2}$$

Es evidente que

$$\boldsymbol{e}' = \pm \boldsymbol{e}, \tag{3}$$

donde el signo «+» corresponde a los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ de igual sentido y el signo «—», a los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ de sentidos opuestos.

De las fórmulas (2) y (3) deducimos que

$$\boldsymbol{b} = \pm b\boldsymbol{e} = \pm \frac{b}{a} \cdot (a\boldsymbol{e}) = \pm \frac{b}{a} \boldsymbol{a}.$$

De donde se deduce la fórmula (1), donde $k = \pm \frac{b}{a}$.

2) Si la igualdad (1) está cumplida, el carácter colineal de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ se deduce inmediatamente del sentido de la multiplicación de vectores por un escalar (§ 4).

## § 6. Vectores coplanares

DEFINICIÓN. *Tres vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ se llaman coplanares, si ellos son paralelos en sentido amplio a un cierto plano* (es decir, *son paralelos a un plano o están situados en este plano*).

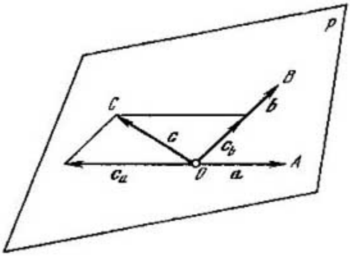


Fig. 176

Se puede decir también que los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son coplanares si, y sólo si, ellos después de llevarse a un origen común, se encuentran en un mismo plano.

De acuerdo con la definición, tres vectores, entre los cuales por lo menos uno es nulo, son coplanares.

TEOREMA. *Tres vectores no nulos, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son coplanares si, y solo si, uno de ellos es una combinación lineal de los otros dos*, es decir, por ejemplo,

$$\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b} \tag{1}$$

($k$, $l$ son escalares).

DEMOSTRACIÓN. 1) Supongamos que los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son coplanares, están situados en un plano $P$ (fig. 176) y tienen un punto de aplicación común (origen común) $O$.

Supongamos primeramente que estos vectores no son todos colineales de par en par, por ejemplo, los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ no son colineales. En este caso, descomponiendo el vector $\boldsymbol{c}$ en una suma de vectores $\boldsymbol{c}_a$ y $\boldsymbol{c}_b$ respectivamente colineales a los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ obtendremos, en virtud del § 5,

$$c = c_a + c_b = ka + lb, \tag{2}$$

donde $k$ y $l$ son los escalares correspondientes.

Si los vectores $a$, $b$, $c$ son colineales de par en par, se puede escribir

$$c = ka = ka + 0b, \tag{3}$$

y resulta que de este modo de nuevo se satisface la condición (1).

2) Recíprocamente, si los vectores $a = \overrightarrow{OA}$, $b = \overrightarrow{OB}$ y $c = \overrightarrow{OC}$ (fig. 176) satisfacen la condición (1), en virtud del sentido de las operaciones vectoriales correspondientes, el vector $c$ está situado en un plano que contiene los vectores $a$ y $b$, es decir, estos vectores son coplanares.

EJEMPLO. Los vectores $a$, $a + b$, $a - b$ son coplanares, porque

$$a = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b).$$

## § 7. Proyección de un vector sobre un eje

Llámase *eje* a una recta orientada. El sentido de la recta está generalmente indicado por una flecha. El sentido dado del eje se considera positivo, el otro se llama **negativo.**

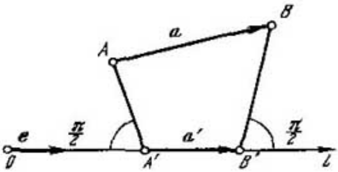

Fig. 177

DEFINICIÓN 1. *Llámase proyección de un punto $A$ sobre un eje $l$* (fig. 177) *a la base $A'$ de la perpendicular $AA'$ trazada del punto $A$ a este eje.*

Aquí se entiende por perpendicular $AA'$ la recta que interseca el eje $l$ y forma con éste un ángulo recto [1]). De este modo, la proyección $A'$ es la intersección del eje $l$ con el plano que pasa por el punto $A$ y es perpendicular al eje $l$.

DEFINICIÓN 2. *Llámase componente de un vector $a = \overrightarrow{AB}$ respecto al eje $l$* (fig. 177) *a un vector*

$$a' = \overrightarrow{A'B'}$$

*cuyo origen $A'$ es la proyección del origen $A$ del vector $a$ sobre el eje $l$ y cuyo extremo $B'$ es la proyección del extremo $B$ de este vector sobre el eje $l$.*

[1]) Recordemos que todos los objetos geométricos se examinan aquí en el espacio tridimensional.

DEFINICIÓN 3. *Llámase* ***proyección de un vector a sobre un eje l*** *a un escalar*

$$a_l = \pm \mid \overrightarrow{A'B'} \mid$$

*igual a la longitud (al módulo) de componente* $\boldsymbol{a}'$ *respecto al eje l tomado con el signo más, si la dirección de la componente coincide con la del eje l y menos en caso contrario.*

*Si* $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, consideran que $a_l = 0$.

Notemos que si $\boldsymbol{e}$ es el vector unitario del eje $l$, para la componente $\boldsymbol{a}'$ es justa la igualdad

$$\boldsymbol{a}' = a_l \boldsymbol{e}. \qquad (1)$$

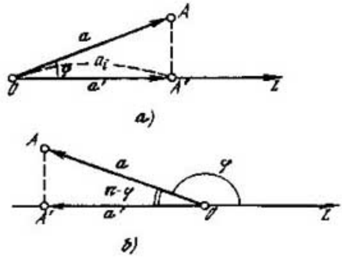


Fig. 178

TEOREMA 1. *La proyección de un vector* $\boldsymbol{a}$ *sobre el eje l es igual al producto de la longitud a del vector por el coseno del ángulo formado por la dirección del eje y la del vector, es decir:*

$$a_l = a \cos \varphi, \quad \varphi = \angle(\boldsymbol{a}, l). \ (2)$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que el vector $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ es libre (fig. 178), se puede suponer que su origen $O$ se encuentra sobre el eje $l$.

1) Si el ángulo $\varphi$ formado por el vector $\boldsymbol{a}$ y el eje $l$ es agudo $\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, la dirección de la componente $\boldsymbol{a}' = \overrightarrow{OA'}$ del vector $\boldsymbol{a}$ coincide con la del eje $l$ (fig. 178, *a*). En este caso tenemos

$$a_l = \text{proy}_l \boldsymbol{a} = + \mid \overrightarrow{OA'} \mid = \mid \overrightarrow{OA} \mid \cos \varphi = a \cos \varphi.$$

2) Si el ángulo $\varphi$ formado por el vector $\boldsymbol{a}$ y el eje $l$ es obtuso $\left(\frac{\pi}{2} < \varphi \leqslant \pi\right)$ (fig. 178, *b*), la dirección de la componente $\boldsymbol{a}' = \overrightarrow{OA'}$ del vector $\boldsymbol{a}$ es opuesta a la del eje $l$. En este caso obtenemos

$$a_l = \text{proy}_l \boldsymbol{a} = - \mid \overrightarrow{OA'} \mid = - \mid \overrightarrow{OA} \mid \cos (\pi - \varphi) = a \cos \varphi.$$

De este modo, la fórmula (2) queda demostrada.

COROLARIO 1. *La proyección de un vector sobre un eje es:* 1) *positiva, si el ángulo formado por el vector y el eje es agudo;* 2) *negativa, si este ángulo es obtuso;* 3) *igual a cero, si este ángulo es recto.*

COROLARIO 2. *Las proyecciones de vectores iguales sobre un mismo eje, son iguales entre sí.*

TEOREMA 2. ***La proyección de la suma de varios vectores sobre un eje dado es igual a la suma de las proyecciones de estos vectores sobre este eje.***

DEMOSTRACIÓN Sea, por ejemplo,

$$s = a + b + c,$$

donde (fig. 179) $a = \overrightarrow{OA}$, $b = \overrightarrow{AB}$ y $c = \overrightarrow{BC}$ y, por consiguiente, $s = \overrightarrow{OC}$.

Designando las proyecciones de los puntos $O$, $A$, $B$, $C$ sobre el eje $l$ por $O'$, $A'$, $B'$, $C'$ y teniendo en cuenta el sentido de las componentes (véase la fig. 179) tenemos

$$\text{proy}_l\ s = +\,|\overrightarrow{O'C'}| = +\,|\overrightarrow{O'A'}| + |\overrightarrow{A'B'}| - |\overrightarrow{B'C'}| =$$
$$= \text{proy}_l\ a + \text{proy}_l\ b + \text{proy}_l\ c, \qquad (3)$$

lo que se debía demostrar.

COROLARIO *La proyección de una línea vectorial cerrada sobre cualquier eje es igual a cero.*

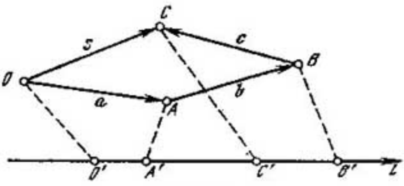


Fig. 179

TEOREMA 3. *Al multiplicar un vector por un escalar, su proyección sobre el eje dado se multiplica por este escalar*, es decir,

$$\text{proy}_l\ (ka) = k\ \text{proy}_l\ a. \qquad (4)$$

La fórmula (4) se deduce del teorema 1 y del sentido de la multiplicación de un vector por un escalar.

COROLARIO. *La proyección de una combinación lineal de vectores es igual a la combinación lineal de las proyecciones de estos vectores*, es decir,

$$\text{proy}_l\ (k_1 a + k_2 b) = k_1\ \text{proy}_l\ a + k_2\ \text{proy}_l\ b.$$

## § 8. Coordenadas cartesianas en el espacio

Sean (fig. 180) $Ox$, $Oy$, $Oz$, tres ejes mutuamente perpendiculares en el espacio tridimensional (*ejes de las coordenadas*) que parten de un punto común $O$ (*origen de las coordenadas*) y forman *tres números derechos* **(es sistema derecho de coordenadas)**, es decir, orientados según la regla de sacacorchos. En otras palabras un observador dirigido según el eje $Oz$, el giro más corto del eje $Ox$ hacia el eje $Oy$, es a sinistrorso. Tres planos $Oyz$, $Ozx$, y $Oxy$, mutuamente perpendiculares que pasan por los ejes correspondientes, se llaman *planos de las coordenadas*; ellos dividen todo el espacio en ocho **octantes**.

Para cada punto $M$ del espacio (fig. 180) existe un radio vector $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ cuyo origen es el origen de las coordenadas $O$ y cuyo extremo es el punto dado $M$.

DEFINICIÓN. *Llámanse* ***coordenadas cartesianas rectangulares*** *$x$, $y$, $z$ de un punto $M$, las proyecciones de su radio vector $\boldsymbol{r}$ sobre los ejes de las coordenadas correspondientes*:

$$x = r_x, \quad y = r_y, \quad z = r_z. \quad (1)$$

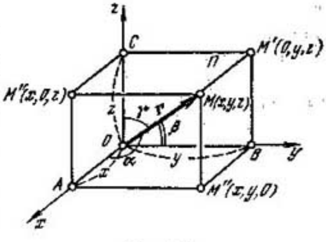


Fig. 180

En adelante, para abreviar la exposición llamaremos a las coordenadas cartesianas rectangulares solamente **coordenadas rectangulares.**

Un punto $M$ de coordenadas $x$, $y$, $z$ se designa por $M(x, y, z)$; la primera coordenada se llama *abscisa*; la segunda, *ordenada*, y la tercera, *aplicada* del punto $M$.

Para hallar estas coordenadas tracemos por el punto $M$ tres planos $MA$, $MB$, $MC$ perpendiculares respectivamente a los ejes $Ox$, $Oy$, $Oz$ (fig. 180). En este caso obtenemos sobre estos ejes los segmentos orientados

$$OA = x, \quad OB = y, \quad OC = z, \quad (2)$$

que son numéricamente iguales a las coordenadas del punto $M$.

El radio vector $\boldsymbol{r}$ es la diagonal del paralelepípedo $\Pi$ de dimensiones $|x|$, $|y|$, $|z|$, formado por los planos $MA$, $MB$, $MC$ y los planos de las coordenadas. Por eso

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3)$$

Si designamos por $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ $(0 \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant \pi)$ los ángulos formados por el radio vector $\boldsymbol{r}$ y los ejes de las coordenadas, tendremos

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta, \quad z = r\cos\gamma. \quad (4)$$

Los $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ se llaman *cosenos directores* del radio vector $\boldsymbol{r}$. Teniendo en cuenta la (3) se obtiene de las (4)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1, \quad (5)$$

es decir, *la suma de los cuadrados de cosenos directores del radio vector de un punto del espacio es igual a* 1.

De las fórmulas (4) se deduce que la coordenada del punto $M$ es **positiva**, si el ángulo formado por el radio vector de este punto y el eje de las coordenadas correspondiente es agudo, y **negativa**, si este ángulo es obtuso. En particular, en el primer octante del espacio, cuyas aristas constituyen los semiejes positivos de coordenadas, todas las coordenadas de los puntos son positivas. En los otros octantes del espacio las coordenadas negativas de los puntos serán aquellas que corresponden a las aristas del octante orientadas en sentidos negativos.

Las dimensiones $|x|$, $|y|$, $|z|$ del paralelepípedo $\Pi$ son iguales a las distancias respectivas del punto $M$ a los planos de las coordenadas $Oyz$, $Ozx$, $Oxy$. De este modo, *las coordenadas cartesianas rectangulares de un punto $M$ del espacio representan las distancias entre este punto y los planos de coordenadas tomadas con los signos correspondientes.*

En particular, si el punto $M(x, y, z)$ pertenece al plano $Oyz$, entonces $x = 0$; si pertenece al plano $Ozx$, $y = 0$, y si está en el plano $Oxy$, $z = 0$, y viceversa.

## § 9. Longitud y dirección de un vector

Sea $\boldsymbol{a}$ un vector dado en el espacio $Oxyz$. Las proyecciones de este vector sobre los ejes de coordenadas

$$a_x = \text{proy}_x \boldsymbol{a}, \quad a_y = \text{proy}_y \boldsymbol{a}, \quad a_z = \text{proy}_z \boldsymbol{a} \tag{1}$$

se llaman *coordenadas del vector* $\boldsymbol{a}$; en este caso el vector será escrito así: $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$.

Puesto que el vector $\boldsymbol{a}$ es libre, él puede ser considerado como el radio vector del punto $M(a_x, a_y, a_z)$. De aquí obtenemos la longitud del vector

$$|\boldsymbol{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \tag{2}$$

es decir, *el módulo de un vector es igual a la raíz cuadrada de la suma de cuadrados de sus coordenadas.*

Los cosenos directores del vector $\boldsymbol{a}$ se determinan mediante las ecuaciones

$$a_x = a\cos\alpha, \quad a_y = a\cos\beta, \quad a_z = a\cos\gamma, \tag{3}$$

y

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \tag{4}$$

es decir, *la suma de cuadrados de cosenos directores de un vector es igual a la unidad.* Los cosenos directores de un vector no nulo determinan unívocamente su dirección. Por consiguiente, un vector se caracteriza enteramente por sus coordenadas.

EJEMPLO. Hallar la longitud y la dirección del vector $\boldsymbol{a} = \{1, 2, -2\}$.

Tenemos

$$a = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$$

y

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{1}{3}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{a} = \frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a} = -\frac{2}{3}.$$

De donde

$$\alpha = \arccos\frac{1}{3} \approx 70°30', \quad \beta = \arccos\frac{2}{3} \approx 48°10',$$
$$\gamma = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) \approx 131°50'.$$

De este modo, el vector $\boldsymbol{a}$ forma ángulos agudos con los ejes de coordenadas $Ox$ y $Oy$ y un ángulo obtuso con el eje $Oz$.

## § 10. Distancia entre dos puntos del espacio

Sean $M_1(x_1, y_1, z_1)$ el origen del segmento $\boldsymbol{l} = \overrightarrow{M_1M_2}$ y $M_2(x_2, y_2, z_2)$ su extremo. Los puntos $M_1$ y $M_2$ pueden ser dados por sus radio vectores $\boldsymbol{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$ y $\boldsymbol{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$ (fig. 181). Examinando el vector $\boldsymbol{l} = \overrightarrow{M_1M_2}$, del $\triangle OM_1M_2$

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1. \qquad (1)$$

Proyectando esta igualdad vectorial sobre los ejes de las coordenadas y teniendo en cuenta las propiedades de las proyecciones, obtendremos

$$l_x = x_2 - x_1, \quad l_y = y_2 - y_1,$$
$$l_z = z_2 - z_1. \qquad (2)$$

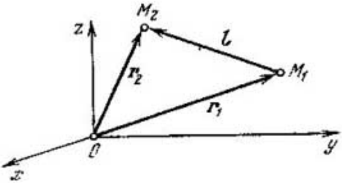


Fig. 181

De este modo, *las proyecciones de un segmento orientado sobre los ejes de las coordenadas son iguales a las diferencias de las coordenadas correspondientes del extremo y del origen de este segmento.*

Mediante la fórmula (2) obtenemos la **longitud del segmento** (o de otro modo la **distancia entre dos puntos** $M_1$ y $M_2$)

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (3)$$

Entonces, *la distancia entre dos puntos del espacio es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias entre las coordenadas de mismo nombre de estos puntos.*

EJEMPLO. Un cohete se desplaza rectilíneamente desde el punto $M_1$ (10, −20, 0) al punto $M_2$ (−30, −50, 40) (las distancias están indicadas en kilómetros). Calcular el camino $l$ recorrido por el cohete.

Aplicando la fórmula (3) tenemos

$$l = \sqrt{(-30-10)^2 + (-50+20)^2 + (40-0^2)} =$$
$$= \sqrt{1600 + 900 + 1600} = \sqrt{4100} \approx 64,4 \text{ km}.$$

Notemos que al calcular los cosenos directores del vector del desplazamiento de $l$ no es difícil determinar la dirección del movimiento del cohete.

## § 11. Operaciones sobre vectores, dados por sus coordenadas

Sea $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ un vector dado por sus proyecciones sobre los ejes de cordenadas $Ox$, $Oy$, $Oz$.

Construyamos un paralelepípedo (fig. 182), cuya diagonal es el vector $\boldsymbol{a}$ y de aristas sirven sus componentes $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ respecto a los ejes de coordenadas correspondientes. Tenemos la descomposición

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3. \quad (1)$$

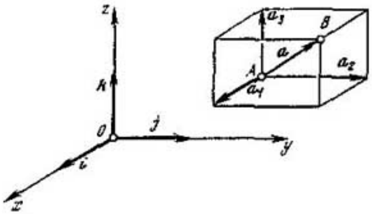


Fig. 182

Si introducimos vectores unitarios $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ orientados según los ejes de las coordenadas, teniendo en cuenta la relación que existe entre las componentes de un vector y sus proyecciones (§ 7) tendremos

$$\boldsymbol{a}_1 = a_x \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{a}_2 = a_y \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{a}_3 = a_z \boldsymbol{k}. \quad (2)$$

Sustituyendo estas expresiones en la igualdad (1) obtenemos *la forma coordenada del vector*

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}. \quad (3)$$

Notemos que la descomposición (3) del vector $\boldsymbol{a}$ es única. Efectivamente, sea

$$\boldsymbol{a} = a'_x\boldsymbol{i} + a'_y\boldsymbol{j} + a'_z\boldsymbol{k}. \quad (3')$$

De donde, restando la igualdad (3') de la igualdad (3) y utilizando las propiedades conmutativa y asociativa de la suma de vectores (§ 2), así como las propiedades de la diferencia de vectores (§ 3) tendremos

$$0 = (a_x - a'_x)\,\boldsymbol{i} + (a_y - a'_y)\,\boldsymbol{j} + (a_z - a'_z)\,\boldsymbol{k}.$$

Si por lo menos uno de los coeficientes de los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ es distinto de cero, los vectores $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ serían coplanares (§ 5), lo que es falso. Por esó

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = a_z,$$

y la unicidad de la descoposición (3) queda demostrada.

Si $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, es evidente que tenemos también

$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}. \quad (4)$$

Las operaciones lineales sobre vectores que acabamos de examinar, pueden ser escritas ahora así:

1) $$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda a_x\boldsymbol{i} + \lambda a_y\boldsymbol{j} + \lambda a_z\boldsymbol{k},$$

o, más brevemente: $\lambda\boldsymbol{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$ ($\lambda$ es un escalar). De este modo, *para multiplicar un vector por un escalar se multiplican las* *coordenadas del vector por este escalar.*

2) $$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_x \pm b_x)\,\boldsymbol{i} + (a_y \pm b_y)\,\boldsymbol{j} + (a_z \pm b_z)\,\boldsymbol{k}$$

o, más brevemente: $\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = \{a_x \pm b_x,\ a_y \pm b_y,\ a_z \pm b_z\}$.

De este modo, *para sumar (restar) vectores se suman (se restan) sus coordenadas homónimas.*

EJEMPLO. Hallar el valor y la dirección de la resultante $\boldsymbol{F}$ de dos fuerzas

$$\boldsymbol{F}_1 = \{10,\ 20,\ 30\} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{F}_2 = \{30,\ 20,\ 10\}.$$

Tenemos

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \{10 + 30,\ 20 + 20,\ 30 + 10\} = \{40,\ 40,\ 40\}.$$

De donde

$$F = |\boldsymbol{F}| = 40\sqrt{3}$$

y

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 1/\sqrt{3},$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, son los cosenos directores de la resultante $\boldsymbol{F}$.

## § 12. Producto escalar de vectores

DEFINICION. ***El producto escalar** de dos vectores **a** y **b** es el número obtenido de multiplicar las longitudes (módulos) de estos vectores por el*

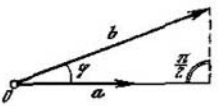


Fig. 183

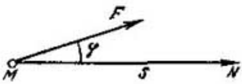


Fig. 184

*coseno del ángulo formado por ellos*, es decir, con las notaciones usuales

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \equiv (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = ab\cos\varphi, \tag{1}$$

donde $\varphi = \angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$.

Notemos que en la fórmula (1) el producto escalar puede ser escrito además como $\boldsymbol{ab}$ omitiendo el punto. Puesto que (fig. 183)

$$b = \cos\varphi = \text{proy}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} \quad \text{y} \quad a\cos\varphi = \text{proy}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a},$$

se puede escribir

$$\boldsymbol{ab} = a \cdot \text{proy}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = b \cdot \text{proy}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}, \tag{2}$$

es decir, *el producto escalar de dos vectores es igual a la longitud de uno de ellos multiplicada por la proyección del otro vector sobre el eje que tiene la dirección del primero.*

**Interpretación física del producto escalar.** Sea $\boldsymbol{F}$ una fuerza constante que asegura un desplazamiento rectilíneo $\boldsymbol{s} = \overrightarrow{MN}$ de un punto material. Si la fuerza $\boldsymbol{F}$ forma un ángulo $\varphi$ con el desplazamiento $\boldsymbol{s}$ (fig. 184), entonces como aprendimos en Física, el trabajo realizado por la fuerza $\boldsymbol{F}$ para efectuar el desplazamiento $\boldsymbol{s}$ es igual

$$A = Fs \cos \varphi.$$

Según la fórmula (1) se tiene

$$A = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}, \tag{3}$$

de este modo, *el trabajo realizado por una fuerza constante durante un desplazamiento rectilíneo de su punto de aplicación es igual al producto escalar del vector de la fuerza por el vector del desplazamiento.*

Las propiedades principales del producto escalar de vectores son las siguientes:

1) *El producto escalar de dos vectores no depende del orden de estos vectores* (***propiedad conmutativa***);

$$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}. \tag{4}$$

Esta fórmula se deduce inmediatamente de la (1).

2) Para tres vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$, es justa la **propiedad distributiva**;

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}, \tag{5}$$

es decir, *en el producto escalar de una suma de vectores por un vector se puede «abrir el paréntesis».*

Efectivamente en base a la fórmula (2) y teniendo en cuenta las propiedades de las proyecciones de vectores (el teorema 2 del § 7) tenemos

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \text{proy}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\text{proy}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a} + \text{proy}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} =$$

$$= \text{proy}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \text{proy}\ \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}.$$

3) *El producto escalar de un vector por sí mismo* (*cuadrado escalar de un vector*) *es igual al cuadrado del módulo de este vector*, es decir

$$\boldsymbol{a}^2 = a^2.$$

Efectivamente

$$\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = aa \cos (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}}) = a^2.$$

De donde obtenemos la fórmula para el vector

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}. \tag{6}$$

4) *Se puede sacar un factor escalar del signo del producto escalar*, es decir,

$$(\lambda \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \lambda \boldsymbol{b}) = \lambda (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}). \tag{7}$$

Esta propiedad se obtiene fácilmente de la (1).

(5) *El producto escalar de una combinación lineal de vectores por un vector arbitrario es igual a la misma combinación lineal de*

*vectores dados, por este vector*, es decir,

$$(\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) = \lambda\ (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}) + \mu\ (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$$

($\lambda$ y $\mu$ son escalares).

Es una consecuencia evidente de 2) y 4).

De la definición (1) resulta que el coseno del ángulo $\varphi = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ entre dos vectores no nulos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es igual a

$$\cos \varphi = \frac{\boldsymbol{ab}}{ab}. \tag{8}$$

De la fórmula (8) se deduce que *dos vectores* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$ *son perpendiculares (ortogonales)*, es decir, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, si y sólo si,

$$\boldsymbol{ab} = 0. \tag{9}$$

Esta afirmación es también justa para el caso cuando por lo menos un vector $\boldsymbol{a}$ o $\boldsymbol{b}$ es nulo.

EJEMPLO. Hallar la proyección del vector $\boldsymbol{a}$ sobre el vector $\boldsymbol{b}$.

Designando por $\varphi$ el ángulo formado por estos vectores tenemos

$$\text{proy}_b\ \boldsymbol{a} = a \cos \varphi = \boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{ab}}{ab} = \boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{b} = \boldsymbol{ae},$$

donde $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{b}}{b}$ es el vector unitario del vector $\boldsymbol{b}$.

## § 13. Producto escalar de vectores dados por sus coordenadas

Sea

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k} \tag{1}$$

y

$$\boldsymbol{b} = b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}. \tag{2}$$

Multiplicando estos vectores como polinomios (algo correcto en virtud de las propiedades del § 12) y teniendo en cuenta las relaciones

$$\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{ki} = 0$$

y

$$\boldsymbol{ii} = \boldsymbol{jj} = \boldsymbol{kk} = 1$$

tendremos

$$\boldsymbol{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{3}$$

De este modo, *el producto escalar de dos vectores es igual a la suma de productos de sus coordenadas homónimas*. De aquí, designando por $\varphi$ el ángulo formado por los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ obtendremos

$$\cos \varphi = \frac{\boldsymbol{ab}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{4}$$

EJEMPLO. Determinar el ángulo $\varphi$ formado por los vectores

$$\boldsymbol{a} = \{1, +2, 3\} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{b} = \{-3, 2, -1\}.$$

Según la fórmula (4) tenemos

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot(-3)+2\cdot 2+3\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+2^2+(-1)^2}} = -\frac{2}{14} = -\frac{1}{7} = -0{,}143.$$

De donde

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) \approx 98°10'.$$

Supongamos que los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son colineales (paralelos). De acuerdo con la condición de carácter colineal (§ 5)

$$\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}, \tag{5}$$

donde $k$ es un escalar, equivale a $b_x = ka_x$, $b_y = ka_y$, $b_z = ka_z$ o

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}. \tag{6}$$

De este modo, *los vectores son colineales si, y sólo si, sus coordenadas homónimas son proporcionales.*

Para los vectores perpendiculares (ortogonales) $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tenemos

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

y, por consiguiente, $\cos\varphi = 0$ o según la fórmula (4)

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Entonces, *dos vectores son perpendiculares si, y sólo si, la suma de los productos pares de sus coordenadas homónimas es igual a cero.*

## § 14. Producto vectorial de vectores

Recordamos que tres vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ no coplanares forman un sistema *derecho* (fig. 185, *a*) o *izquierdo* (fig. 185, *b*), si está orientado por la regla de la mano derecha o de la mano izquierda, respectivamente.

Observemos que si en el sistema de tres vectores no coplanares $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, se permutan dos vectores, el sistema cambia su orientación, o sea, si era derecho pasa a ser izquierdo, y viceversa.

En adelante al sistema derecho de tres vectores, lo consideraremos **estándar.**

DEFINICION. *Llámase* ***producto vectorial*** *de dos vectores* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$ *a otro vector*

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \tag{1}$$

*para el cual:*

1) *el módulo es igual al área del paralelogramo construido sobre los vectores dados*, es decir,

$$c = |\boldsymbol{c}| = ab \operatorname{sen} \varphi, \tag{2}$$

donde $\varphi = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ (fig. 186);

2) *este vector es perpendicular a los vectores que se multiplican* (en otras palabras, es perpendicular al plano del paralelogramo construido sobre ellos), es decir $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$;

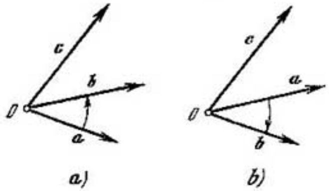


Fig. 185

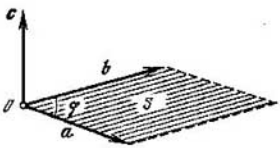


Fig. 186

3) *si los vectores no son colineales, los vectores* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *forman un sistema derecho de tres vectores*

Indiquemos las propiedades principales del producto vectorial.

1) *Si se cambia el orden de factores el producto vectorial cambia su signo por el opuesto conservando el módulo*, es decir,

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}). \tag{3}$$

Efectivamente, al permutar los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ el área del paralelogramo construido sobre ellos permanece invariable, es decir,

$$|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|.$$

Sin embargo, los tres vectores $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ forman un sistema izquierdo. Por eso, la dirección del vector $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ es opuesta a la dirección del vector $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ no son colineales). Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son colineales, la igualdad (3) es evidente.

De este modo *el producto vectorial de dos vectores no es conmutativo.*

2) *El cuadrado vectorial es igual al vector nulo*, es decir,

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}.$$

Es una consecuencia evidente de la propiedad (1).

3) *Se puede sacar un factor escalar del signo del producto vectorial*, es decir, si $\lambda$ es escalar,

$$(\lambda \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \times \lambda \boldsymbol{b}) = \lambda (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

Esta propiedad se deduce directamente del sentido del producto del vector por el escalar y de la definición del producto vectorial.

4) *Para cualesquiera tres vectores* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *es justa la igualdad*

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}), \qquad (4)$$

es decir, el producto vectorial posee la **propiedad distributiva.**

Ejemplo.

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})=$$
$$=0+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+0=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),$$

de donde, en particular, tenemos

$$|(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|=2|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|,$$

es decir, el área del paralelogramo construido sobre las diagonales del paralelogramo dado es igual al área doble de este paralelogramo.

Con ayuda del producto vectorial es cómodo formular **la condición suficiente y necesaria de la colinealidad** de dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, que se comprueba fácilmente:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0.$$

## § 15. Producto vectorial dado por sus coordenadas

Sean

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \qquad (1)$$

y

$$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}. \qquad (2)$$

Multiplicando vectorialmente estas igualdades y utilizando las propiedades del producto vectorial obtenemos la suma de nueve sumandos

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=[a_xb_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_yb_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_zb_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})]+$$
$$+[a_xb_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})]+$$
$$[a_xb_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+a_yb_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})]. \qquad (3)$$

De la definición del producto vectorial se deduce que para los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ es justa la siguiente «tabla de multiplicar»:

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=0,\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=0,\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$$

y

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=-(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=-(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=$$
$$=-(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})=\boldsymbol{j}.$$

Por eso, mediante la fórmula (3) obtenemos

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}(a_yb_z-a_zb_y)+\boldsymbol{j}(a_zb_x-a_xb_z)+\boldsymbol{k}(a_xb_y-a_yb_x)=$$
$$=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix} \qquad (4)$$

conservando el orden de seguimiento de letras $x$, $y$, $z$).

Para que se pueda recordar con más comodidad, la fórmula (4) se escribe en forma de un determinante del tercer orden (véase el cap. XVII)

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{5}$$

De la fórmula (4) se deduce que

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2. \tag{6}$$

Geométricamente, la fórmula (6) da el cuadrado del área del paralelogramo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

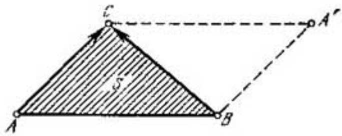


Fig. 187

EJEMPLO. Hallar el área del triángulo $ABC$ de vértices $A$ (1, 1, 0), $B$ (1, 0, 1) y $C$ (0, 1, 1).

El área $S$ del triángulo $ABC$ es igual a $\frac{1}{2}$ del área del paralelogramo construido sobre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ (fig. 187). Utilizando las fórmulas para las proyecciones de segmentos orientados (§ 10) tenemos

$$\overrightarrow{AB}=\{0,\ -1,\ 1\}\quad \text{y}\quad \overrightarrow{AC}=\{-1,\ 0,\ 1\};$$

de donde

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}+$$

$$+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

Por consiguiente,

$$S=\frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\,|=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

## § 16. Producto mixto de vectores

DEFINICIÓN. *Llámase* ***producto mixto*** *(o producto vectorial escalar)* ***de los vectores***, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *y* $\boldsymbol{c}$ *al número*

$$\boldsymbol{abc}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}. \tag{1}$$

Construyamos un paralelepípedo $\Pi$ (fig. 188) cuyas aristas son los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ que parten del origen común $O$.

En este caso, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=S$ es el área del paralelogramo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, es decir, es el área de la base del paralelepípedo. La altura de este paralelepípedo $H$ es evidentemente igual a

$$H = \pm \operatorname{proy}_S c = \pm c \cos \varphi, \tag{2}$$

donde $S = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ y el signo «+» corresponde al ángulo agudo $\varphi = \angle(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{S})$, y el signo «—» corresponde al ángulo obtuso $\varphi$. En el primer caso, los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ forman un sistema derecho y en el segundo caso, un sistema izquierdo.

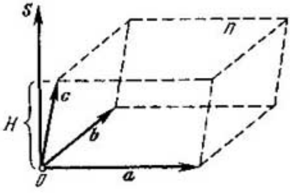

Fig. 188

De acuerdo con la definición del producto escalar (§ 12) tenemos

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{c} = S \cdot \operatorname{proy}_S \boldsymbol{c} = \pm SH = \pm V, \tag{3}$$

donde $V$ es el volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

De aquí,

$$\boldsymbol{abc} = \pm V,$$

es decir, *el producto mixto de tres vectores es igual al volumen $V$ del paralelepípedo, construido sobre estos vectores, tomado con el signo «+», si estos vectores forman un sistema derecho, y con el signo «—», si ellos forman un sistema izquierdo.*

Son justas las siguientes propiedades del producto mixto.

1) *Un producto mixto no varía con la permutación cíclica de sus factores*, es decir,

$$\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{bca} = \boldsymbol{cab}.$$

Efectivamente, en este caso no cambia el volumen del paralelepípedo П, ni la orientación de sus aristas.

2) *Al permutar dos factores adyacentes, un producto mixto cambia su signo por el inverso*, es decir,

$$\boldsymbol{bac} = \boldsymbol{acb} = \boldsymbol{cba} = -\boldsymbol{abc}.$$

Esto se deduce del hecho de que una permutación de factores adyacentes, conserva el volumen del paralelepípedo y cambia la orientación de los tres vectores, es decir, un sistema derecho pasa a ser izquierdo y viceversa.

Con ayuda del producto mixto obtenemos la condición necesaria y suficiente de la coplanaridad de tres vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$:

$$\boldsymbol{abc} = 0$$

(el volumen del paralelepípedo es igual a cero).

Si

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{c} = c_x\boldsymbol{i} + c_y\boldsymbol{j} + c_z\boldsymbol{k},$$

utilizando las expresiones para los productos vectorial (§ 15) y escalar (§ 13), obtendremos

$$\boldsymbol{abc} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) =$$

$$= (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} =$$

$$= a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix},$$

es decir,

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

## EJERCICIOS

1. Hallar la longitud y la dirección del vector

$$\boldsymbol{a} = \{1,\ -1,\ \sqrt{2}\}.$$

2. Hallar el valor y la dirección de la resultante $\boldsymbol{F}$ de tres fuerzas $\boldsymbol{F}_1 = \{10,\ 20,\ 0\}$, $\boldsymbol{F}_2 = \{0,\ -10,\ 20\}$, $\boldsymbol{F}_3 = \{-10,\ 0,\ -20\}$.

3. Hallar la proyección del vector $\boldsymbol{a} = \{1,\ 2,\ -2\}$ sobre el vector $\boldsymbol{b} = \{1,\ 0,\ -1\}$.

4. Calcular el trabajo de la fuerza $\boldsymbol{F} = \{10,\ 20,\ 30\}$, si el punto de su aplicación efectúa un desplazamiento rectilíneo del punto $M\ (0,\ 1,\ 2)$ al punto $N\ (3,\ -4,\ 5)$.

5. Calcular el área $S$ y el ángulo $\varphi$ del paralelogramo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a} = \{1,\ -2,\ 3\}$ y $\boldsymbol{b} = \{3,\ 2,\ 1\}$.

6. ¿Son coplanares los vectores $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{k} + \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$?

*Capítulo XIX*

# Nociones de geometría analítica en el espacio

## § 1. Ecuación de la superficie y de la línea en el espacio

DEFINICIÓN 1 *Llámase* ***ecuación de la superficie*** *en el espacio $Oxyz$ a aquella, de variables $x$, $y$, $z$, que es satisfecha por las coordenadas de todos los puntos de la superficie dada y no lo es por las coordenadas de los puntos que no se encuentran sobre esta superficie.*

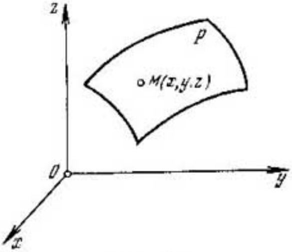


Fig. 189

Es decir, si

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

es una ecuación de una superficie $P$ (fig. 189), entonces para $M(x, y, z) \in P$ [1] tenemos $F(x, y, z) = 0$ y para $N(x, y, z) \notin P$ [2] tenemos $F(x, y, z) \neq 0$.

De este modo la ecuación (1) es válida solamente cuando el punto $M(x, y, z)$ pertenece a esta superficie. Las coordenadas de un punto arbitrario de la superficie se llaman *coordenadas corrientes* del punto. Por eso para componer una ecuación de una superficie es necesario vincular entre sí las coordenadas corrientes de sus puntos.

EJEMPLO 1 **(ecuación de planos de coordenadas).**

Todo punto $M(x, y, z)$ situado sobre el plano de coordenadas $Oyz$ tiene una abscisa $x = 0$; y viceversa, si para un punto cualquiera $M(x, y, z)$ su abscisa $x = 0$, este punto está situado sobre el plano $Oyz$. Por consiguiente,

$$x = 0$$

es la ecuación del plano de coordenadas $Oyz$.

De modo análogo

$$y = 0 \quad \text{y} \quad z = 0$$

son, respectivamente, las ecuaciones de los planos de coordenadas $Oxz$ y $Oxy$.

---

[1] La fórmula $M \in P$ significa que el punto $M$ pertenece a la superficie $P$ (véase el § 1 del cap. II).

[2] La fórmula $N \notin P$ significa que el punto $N$ no pertenece a la superficie $P$.

En el caso más general

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c \tag{2}$$

son las ecuaciones de tres planos perpendiculares a los ejes de coordenadas $Ox$, $Oy$, $Oz$ correspondientes, los cuales cortan sobre estos ejes segmentos iguales numéricamente a $a$, $b$ y $c$.

TEOREMA *La ecuación de una superficie cilíndrica cuyas, generatrices son paralelas al eje de coordenadas, no contiene la coordenada corriente homónima con la de este eje de coordenadas, y viceversa.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos, por ejemplo, que una superficie cilíndrica $P$ está formada por un desplazamiento de una recta $MN \parallel Oz$ (*generatriz*) a lo largo de la línea dada $L$, situada en el plano $Oxy$ (*directriz*) (fig. 190).

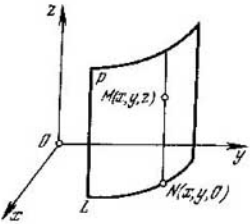


Fig. 190

Designamos por $M(x, y, z)$ un punto de la superficie $P$ de coordenadas corrientes $x$, $y$, $z$. La generatriz $MN$ que pasa por el punto $M$ corta la directriz evidentemente en el punto $N(x, y, 0)$.

Sea

$$F(x, y) = 0 \tag{3}$$

la ecuación de la directriz $L$ en el plano de coordenadas $Oxy$. Las coordenadas del punto $N$ satisfacen esta ecuación. Puesto que el punto $M$ de la superficie $P$ tiene la misma abscisa $x$ y la misma ordenada $y$ que el punto $N$, y que la variable $z$ no toma parte en la ecuación (3), entonces las coordenadas del punto $M$ satisfacen también la ecuación (3). De este modo, las coordenadas de todo punto $M(x, y, z)$ de la superficie $P$ satisfacen la ecuación (3). A la inversa, si las coordenadas de un punto cualquiera $M(x, y, z)$ satisfacen la ecuación (3), este punto está situado sobre una recta $MN \parallel Oz$ tal, que su traza sobre el plano $Oxy$, punto $N(x, y, 0)$, se encuentra sobre la línea $L$; lo que significa que el punto $M$ pertenece a la superficie cilíndrica $P$. Por consiguiente,

$$P(x, y) = 0$$

es *la ecuación de la superficie cilíndrica* en el espacio $Oxyz$, además, en esta ecuación falta la coordenada $z$.

EJEMPLO 2 **(ecuación del cilindro elíptico).** *Un cilindro elíptico,* cuya base es una elipse de semiejes $a$ y $b$ y su eje es $Oz$ (fig. 191) tiene, en virtud del teorema precedente, la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En particular, para $a = b$, obtenemos la ecuación de un cilindro circular

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Una línea $L$ en el espacio puede ser dada como una intersección de dos superficies dadas $P_1$ y $P_2$ (fig. 192). Un punto $M(x, y, z)$ de

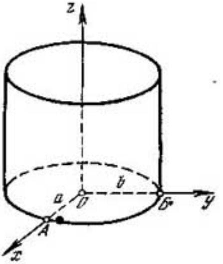


Fig. 191

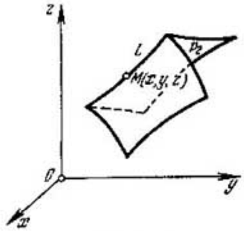


Fig. 192

la línea $L$ pertenece tanto a la superficie $P_1$, como a la superficie $P_2$ y, por consiguiente, las coordenadas de este punto satisfacen las ecuaciones de ambas superficies.

Por eso, la ecuación de una línea en el espacio es un sistema de dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

que son las ecuaciones de las superficies que determinan la línea dada.

No hay que pensar que para hallar las ecuaciones de una línea hace falta «resolver» el sistema (4). Esto, hablando en general, es imposible, porque el número de ecuaciones del sistema (4) es menor que el número de incógnitas. El sentido exacto de las igualdades (4) es el siguiente: *a la línea $L$ le pertenecen solamente los puntos $M(x, y, z)$ cuyas coordenadas satisfacen las dos ecuaciones del sistema* (4).

Notemos que la línea dada puede ser definida de modo distinto, como una intersección de superficies. Por eso a una línea en el espacio le corresponde un número infinito de sistemas de ecuaciones equivalentes.

DEFINICIÓN 2. *Llámanse* ***ecuaciones de la línea*** *en el espacio $Oxyz$ un par de ecuaciones tal, con variables $x$, $y$, $z$, al que satisfacen las coordenadas de todo punto perteneciente a la línea dada y no satisfacen las coordenadas de cualquier otro punto no perteneciente a esta línea.*

EJEMPLO 3. **(ecuaciones de los ejes de coordenadas).** El eje $Ox$ puede ser considerado como una intersección de los planos de coordenadas $Oxy$ y $Oxz$. Por eso

$$\left.\begin{aligned} y &= 0, \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

es *la ecuación del eje* $Ox$.

Análogamente,

$$\left.\begin{aligned} x &= 0, \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{y} \quad \left.\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

son *las ecuaciones de los ejes* $Oy$ *y* $Oz$, respectivamente.

EJEMPLO 4. Escribir la ecuación de una circunferencia $\Gamma$ de radio $R = 1$, cuyo centro se encuentra en el punto $C$ (0, 0, 2) y cuyo plano es paralelo al plano de coordenadas $Oxy$ (fig. 193).

La circunferencia $\Gamma$ puede ser considerada como una intersección de un cilindro circular de radio 1 y el eje $Oz$ por un plano horizontal situado a dos

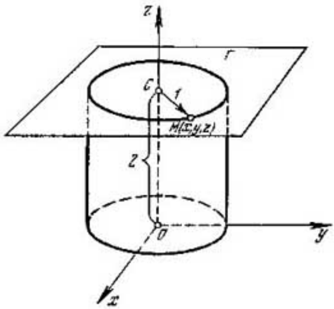


Fig. 193

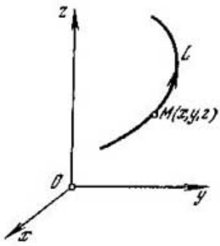


Fig. 194

unidades por encima del plano de coordenadas $Oxy$. Por eso la ecuación de la circunferencia $\Gamma$ es

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ z &= 2. \end{aligned}\right\}$$

En Mecánica la línea $L$ se considera frecuentemente como *la traza de un punto en movimiento* (fig. 194). Sean $x$, $y$, $z$ las coordenadas corrientes de un punto $M$ de la línea $L$. Puesto que al pasar un tiempo el punto se desplaza y sus coordenadas varían, ellas son funciones del tiempo $t$. Por consiguiente, tenemos

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \tag{5}$$

donde $\varphi$, $\psi$, $\chi$ son funciones determinadas. Generalizando las ecuaciones (5), se toma $t$ como una variable auxiliar (*parámetro*) y no obligatoriamente el tiempo; por eso las (5) se llaman *ecuaciones paramétricas de la línea en el espacio.*

Eliminando en las ecuaciones (5) el parámetro $t$ obtendremos dos relaciones entre las coordenadas corrientes $x$, $y$ y $z$, que son las ecuaciones de ciertas superficies que pasan por la línea dada.

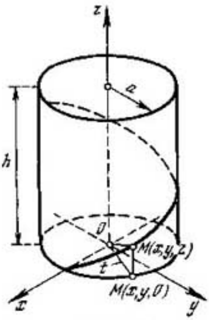


Fig. 195

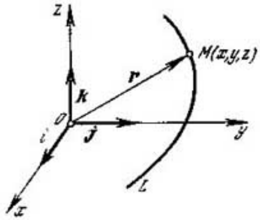


Fig. 196

EJEMPLO 5. Escribir la ecuación de una línea helicoidal de radio $a$ y de paso $h$ (fig. 195).

Sean $M(x, y, z)$ un punto corriente de la línea helicoidal y $M'(x, y, 0)$ su proyección sobre el plano $Oxy$.

Considerando que el parámetro $t = \angle M'Ox$ y teniendo en cuenta que la $z$-coordenada (aplicada) de la línea helicoidal crece proporcionalmente al ángulo de giro $t$, tendremos

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= a \operatorname{sen} t, \\ z &= bt. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Para determinar el coeficiente de proporcionalidad $b$ supongamos que $t = 2\pi$; en este caso $z = h$. Por consiguiente,

$$h = 2\pi b \quad \text{y} \quad b = \frac{h}{2\pi}.$$

Eliminando el parámetro $t$ de la primera y de la segunda, así como de la primera y de la tercera ecuaciones de (6) obtendremos

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2, \\ x &= a\cos\frac{z}{b}. \end{aligned}\right\} \qquad (6')$$

Por consiguiente, una línea helicoidal es una intersección de un cilindro circular con generatrices paralelas al eje $Oz$ con una superficie cilíndrica con generatrices paralelas al eje $Oy$ y cuya directriz es una sinusoide situada en el plano $Oxz$. De las ecuaciones (6′) se deduce también que la proyección de la línea helicoidal (6′) sobre el plano de coordenadas $Oxy$ es una circunferencia y sobre el plano $Oxz$ es una cosinusoide.

El punto corriente $M(x, y, z)$ de la curva $L$ puede ser caracterizado por su radio vector (**«radio vector de seguimiento»**) (fig. 196)

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ son vectores unitarios). En este caso mediante las (5) obtenemos la ecuación vectorial de la línea

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t), \tag{7}$$

donde

$$\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{i}\varphi(t) + \boldsymbol{j}\psi(t) + \boldsymbol{k}\chi(t)$$

es la llamada *función vectorial del argumento escalar* $t$.

En Mecánica se toma generalmente por parámetro $t$ el tiempo. En este caso la línea (7) se llama *trayectoria* del punto $M(x, y, z)$.

El conjunto de todos los puntos $M(x, y, z)$ del espacio, cuyas coordenadas satisfacen una ecuación dada (o un sistema de ecuaciones) se llama *imagen geométrica* (*gráfico*) de esta ecuación (o del sistema de ecuaciónes).

EJEMPLO 6 ¿Cuál es la imagen geométrica que corresponde a la ecuación

$$z^2 - 1 = 0? \tag{8}$$

Mediante la ecuación (8) obtenemos $z = 1$ ó $z = -1$. Por consiguiente el gráfico de la ecuación (8) es un par de planos paralelos al plano de coordenadas $Oxy$ situados respecto a éste a distancias iguales a la unidad (fig. 197).

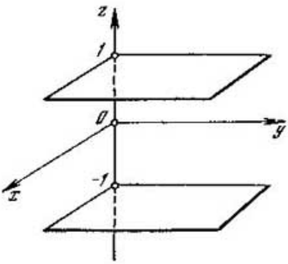


Fig. 197

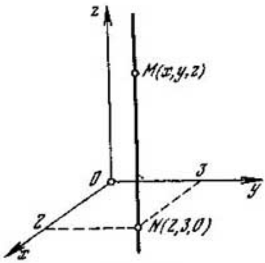


Fig. 198

EJEMPLO 7. ¿Qué imagen geométrica corresponde al sistema de dos ecuaciones

$$x = 2, \quad y = 3?$$

La imagen buscada es la intersección de planos $x = 2$ e $y = 3$ y, por consiguiente, es una línea recta paralela al eje $Oz$ y que tiene la traza $N(2, 3, 0)$ sobre el plano de coordenadas $Oxy$ (fig. 198).

## § 2. Ecuación general de plano

Un plano $P$ puede estar definido en el espacio por uno de sus puntos $M_0(x_0, y_0, z_0)$ y un vector no nulo $N\{A, B, C\}$ $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$ perpendicular a este plano (*vector normal* o *directriz* del plano). Sean $\boldsymbol{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ el radio vector del punto $M_0$ y $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$ el radio vector de un punto arbitrario $M$ del plano (radio vector corriente) (fig. 199). En este caso el vector $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ está situado en este plano y, por consiguiente, es ortogonal al vector $\boldsymbol{N}$, es decir, $\boldsymbol{N} \perp (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$. Utilizando la condición de ortogonalidad de dos vectores (§ 12 del cap. XVIII) tenemos

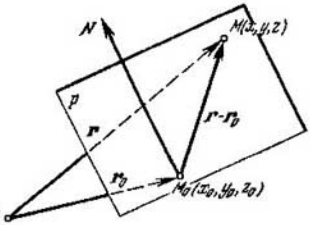

Fig. 199

$$\boldsymbol{N} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0. \tag{1}$$

Esta es justamente *la ecuación del plano en forma vectorial*. En forma de coordenadas la ecuación (1) resulta

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{2}$$

o

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3}$$

donde

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 \equiv -\boldsymbol{N}\boldsymbol{r}_0.$$

La ecuación (3) se llama *ecuación general del plano*. Esta es una ecuación de primer grado respecto a las coordenadas corrientes $x, y, z$. De este modo, **el plano es una superficie de primer grado.**

Y viceversa, sea dada una ecuación no degenerada (3) $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$. Elijamos un punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ perteneciente a la superficie (3) (por ejemplo, si $A \neq 0$, se puede tomar $M_0(-D/A, 0, 0)$ en calidad de tal punto). Tenemos

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \tag{4}$$

Sustrayendo miembro a miembro la ecuación (4) de la (3), tendremos

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{5}$$

De donde, introduciendo los vectores $\boldsymbol{N} = \{A, B, C\}$, $\boldsymbol{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ y $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$, obtendremos

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0.$$

Por consiguiente, la superficie dada por la ecuación (3) es **un plano que pasa por el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ y es perpendicular al vector $\boldsymbol{N}$.**

EJEMPLO 1. Hallar el ángulo formado por el plano $x - 2y + 2z - 10 = 0$ y el eje $Oz$.

Por ángulo $\psi$ formado por una recta y un plano se entiende el ángulo entre esta recta y su proyección sobre este plano, este ángulo es el complemento del ángulo $\varphi$ formado por la recta y la perpendicular (normal) al plano.

El vector normal de nuestro plano es $\boldsymbol{N} = \{1, -2, 2\}$. De aquí

$$\operatorname{sen}\psi = \cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{2}{3}$$

y, por consiguiente

$$\psi = \operatorname{arcsen}\frac{2}{3} \approx 41°50'.$$

Si en la ecuación (1) se toma por vector director del plano el vector unitario

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{N}/N \quad (N = \sqrt{A^2+B^2+C^2} \neq 0),$$

obtendremos una ecuación llamada *ecuación normada del plano*

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0, \tag{6}$$

o, en función de las coordenadas

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0, \tag{7}$$

donde $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. La ecuación (7) es cómoda para hallar la distancia de un punto a un plano.

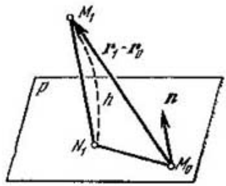


Fig. 200

PROBLEMA. Hallar la distancia $h$ del punto $M_1\ (x_1, y_1, z_1)$ al plano $P$ dado por la ecuación (6) (fig. 200).

Sea $h = M_1N_1$, donde $M_1N_1 \perp P$, $N_1 \in P$. Examinemos el vector $\overrightarrow{M_0M_1} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0$, donde $\boldsymbol{r}_0$ y $\boldsymbol{r}_1$ son los radio vectores de los puntos $M_0 \in P$ y $M_1$. Teniendo en cuenta que $M_1N_1 \parallel \boldsymbol{h}$ del triángulo $M_0M_1N_1$ hallamos

$$h = |\operatorname{pr}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)| = |\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)| = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Por consiguiente, obtenemos la regla: *para calcular la distancia de un punto a un plano hace falta introducir las coordenadas del punto en el primer miembro de la ecuación normada del plano y tomar el valor absoluto del resultado obtenido.*

En particular, tomando $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, obtenemos **la distancia del plano al origen de las coordenadas:**

$$h_0 = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

## § 3. Angulo entre dos planos

Sean dados dos planos

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0 \qquad (1)$$

que tienen por vectores directores $N = \{A, B, C\}$ y $N' = \{A', B', C'\}$. En este caso, el ángulo diedro $\varphi$ formado por estos vectores es igual al ángulo formado por los vectores $N$ y $N'$. De este modo, tenemos (véase el § 12 del cap. XVIII)

$$\cos\varphi = \frac{NN'}{NN'}, \qquad (2)$$

donde $NN' = AA' + BB' + CC'$ y

$$N = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \quad N' = \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}.$$

De donde se deduce: 1) **la condición de paralelismo de los planos** (en sentido amplio)

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} \qquad (3)$$

y 2) **la condición de perpendicularidad de los planos**

$$AA' + BB' + CC' = 0. \qquad (4)$$

Notemos que si los planos (1) no satisfacen la condición (3) ellos no son paralelos ni confluyen, es decir, se cruzan.

EJEMPLO. Determinar el ángulo $\varphi$ formado por las bisectrices de los planos

$$x - z = 0, \quad y - z = 0.$$

Aquí

$$N = \{1, 0, -1\}, \quad N' = \{0, 1, -1\}.$$

Tenemos

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 0 + 0\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

y, por consiguiente, $\varphi = 60°$.

## § 4. Ecuaciones de la recta en el espacio

La recta se define unívocamente en el espacio por un punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ y una dirección (es decir, por un cierto vector).

Sean $\boldsymbol{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ el radio vector del punto $M_0$ y $\boldsymbol{s} = \{l, m, n\}$ el vector director **no nulo** de la recta (su longitud es arbitraria). Designando por $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$ el radio vector de un punto arbitrario $M$ de la recta (radio vector corriente) tenemos, mediante el triángulo vectorial $OM_0M$ (fig. 201)

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \overrightarrow{M_0M}. \qquad (1)$$

Como los vectores $\overrightarrow{M_0M}$ y $\boldsymbol{s}$ son colineales,

$$\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{s}, \qquad (2)$$

donde $t$ es un cierto escalar ($-\infty < t < +\infty$). Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1) obtendremos *la ecuación vectorial de la recta en el espacio*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{s} \tag{3}$$

($t$ es un parámetro).

Proyectando la igualdad (3) sobre los ejes de coordenadas tendre-

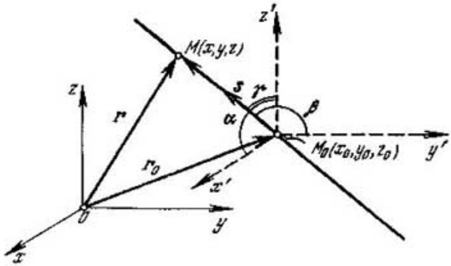


Fig. 201

mos *la ecuación paramétrica de la recta en el espacio*

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + lt, \\ y &= y_0 + mt, \\ z &= z_0 + nt. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Si el parámetro $t$ se elimina en las ecuaciones (4), obtendremos las llamadas *ecuaciones canónicas de la recta en el espacio*

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}\,^{1)}. \tag{5}$$

El sistema (5) contiene dos ecuaciones, por ejemplo, cuando $n \neq 0$, se puede tomar

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{z - z_0}{n}, \quad \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Estas son ecuaciones de dos planos, intersecadas por la recta dada. Notemos que la primera ecuación no contiene la coordenada $y$ y la segunda, la $x$. Por consiguiente (véase el § 1), el primer plano es paralelo al eje $Oy$ y el segundo es paralelo al eje $Ox$, es decir, estos son planos que proyectan nuestra recta sobre el plano de coordenadas $Oxz$ y sobre el plano de coordenadas $Oyz$.

Los números $l$, $m$, $n$ se llaman *coeficientes directores de la recta.* Designando por $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ los ángulos formados por la recta y los ejes de coordenadas (fig. 201) y teniendo en cuenta que $\cos\alpha$, $\cos\beta$,

---

1) Estas ecuaciones tienen el sentido de proporciones, es decir, cualesquiera (no más de dos) números $l$, $m$, $n$ pueden ser ceros.

$\cos\gamma$ son los cosenos directores del vector $s$ tendremos

$$l = s\cos\alpha, \quad m = s\cos\beta, \quad n = s\cos\gamma, \tag{6}$$

donde

$$s = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \neq 0 \tag{7}$$

es la longitud del vector $s$. De donde obtenemos

$$\cos\alpha = \frac{l}{s}, \quad \cos\beta = \frac{m}{s}, \quad \cos\gamma = \frac{n}{s} \quad (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1).$$

De este modo los coeficientes directrices de una recta son proporcionales a los cosenos directores correspondientes de esta recta.

Las ecuaciones de la recta (5) pueden ser escritas bajo forma estándar

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma}, \tag{5'}$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de la recta.

Ejemplo 1. Las ecuaciones de movimiento de un cohete son $x = 2t$, $y = -4t$, $z = 4t$, donde el tiempo está dado en segundos y las coordenadas $(x, y, z)$ del punto en movimiento se dan en kilómetros.

¿Qué trayectoria tendrá el cohete? ¿A qué distancia del punto de partida $O$ (0, 0, 0) estará el cohete $M$ dentro de 10 segundos?

Eliminando el tiempo $t$ de las ecuaciones dadas obtendremos la ecuación de la trayectoria

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{4},$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2}.$$

De este modo, la trayectoria del cohete es una línea recta que pasa por el origen de las coordenadas.

Para $t = 10$ s tenemos $x = 20$, $y = -40$, $z = 40$ y $r = OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{400 + 1600 + 1600}$ km $= \sqrt{3600}$ km $= 60$ km.

PROBLEMA. Escribir la ecuación de la recta que pasa por dos puntos no coincidentes $M_0(x_0, y_0, z_0)$ y $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

Por vector director se puede tomar

$$\boldsymbol{s} = \{x_1 - x_0, \ y_1 - y_0, \ z_1 - z_0\} \neq \boldsymbol{0}.$$

Por consiguiente, en virtud de la (5) tenemos

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \tag{8}$$

EJEMPLO 2. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto $M_0$ (3, −4, 5) y es paralela al eje $Oz$.

Es evidente que tenemos

$$\cos\alpha = 0, \quad \cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = 1.$$

De este modo, en virtud de la (5′) obtenemos las ecuaciones de la recta buscada

$$\frac{x-3}{0}=\frac{y+4}{0}=\frac{z-5}{1} \tag{9}$$

que son equivalentes al par de ecuaciones

$$\frac{x-3}{0}=\frac{z-5}{1}, \quad \frac{y+4}{0}=\frac{z-5}{1}\ ^{1)}$$

o

$$x-3=0, \quad y+4=0.$$

El vector director de la recta (9) es $\{0, 0, 1\}$, es decir, es una recta perpendicular a los ejes $Ox$ y $Oy$.

La recta $L$ en el espacio puede ser también definida como línea de intersección de dos planos $P$ y $P'$ (fig. 202)

$$\left.\begin{aligned} Ax+By+Cz+D&=0, \\ A'x+B'y+C'z+D'&=0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Se supone que los planos no son paralelos y que no confluyen (véase el § 4). Los vectores $\mathbf{N}=\{A, B, C\}$ y $\mathbf{N}'=\{A', B', C'\}$ son los vectores normales de estos planos. El vector director $\mathbf{s}$ de la recta satisface evidentemente las condiciones $\mathbf{s}\perp\mathbf{N}$ y $\mathbf{s}\perp\mathbf{N}'$. Se puede considerar que

$$\mathbf{s}=\mathbf{N}\times\mathbf{N}'$$

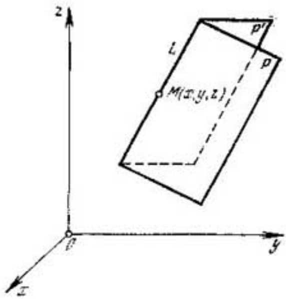


Fig. 202

($\times$ es el signo del producto vectorial (véase el § 15 del cap. XVIII)).

EJEMPLO 3. Determinar los cosenos directores de la recta

$$\left.\begin{aligned} x-2y+3z-4&=0, \\ 3x-2y+z&=0. \end{aligned}\right\}$$

Tenemos

$$\mathbf{N}=\{1, -2, 3\}, \quad \mathbf{N}'=\{3, -2, 1\}.$$

De donde

$$\mathbf{s}=\mathbf{N}\times\mathbf{N}'=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=4\mathbf{i}+8\mathbf{j}+4\mathbf{k}=4(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}).$$

Como vector director de la recta se puede tomar

$$\mathbf{s}_0=\frac{1}{4}\mathbf{s}=\{1, 2, 1\},$$

cuya longitud es $s_0=\sqrt{6}$. De donde

$$\cos\alpha=1/\sqrt{6}, \quad \cos\beta=2/\sqrt{6}, \quad \cos\gamma=1/\sqrt{6}.$$

---

1) Véase la observación en la pág. 341

## § 5. Noción sobre la derivada de una función vectorial

Sea dada una función vectorial

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k} \tag{1}$$

($\alpha < t < \beta$), donde las funciones del parámetro $t$ que representan las proyecciones del vector $\boldsymbol{r}(t)$ sobre los ejes de coordenadas están designadas, para más comodidad, con las letras correspondientes (compare con el § 1). Si $\boldsymbol{r}(t)$ se interpreta como el radio vector de un punto $M(x, y, z)$ del espacio $Oxyz$, el extremo del vector variable $\boldsymbol{r}(t)$ describirá en el espacio $Oxyz$ una cierta curva $K$, cuyas ecuaciones paramétricas están constituidas por la ecuación vectorial (1). En mecánica esta curva se llama *hodógrafa* del vector variable $\boldsymbol{r}(t)$.

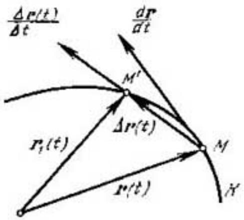


Fig. 203

Es natural definir el *límite de la función vectorial* considerando que

$$\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} \lim_{t\to t_0} x(t) + \boldsymbol{j} \lim_{t\to t_0} y(t) + \boldsymbol{k} \lim_{t\to t_0} z(t), \tag{2}$$

a condición de que los límites en el segundo miembro de la igualdad (2) existan.

Demos al parámetro $t$ un incremento pequeño $\Delta t$; en este caso el punto $M(x, y, z)$ de la curva $K$ se trasladará al punto $M'(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$ de esta curva, cuyo radio vector es

$$\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{r}(t) + \Delta\boldsymbol{r}(t).$$

Del triángulo vectorial $OMM'$ tenemos (fig. 203)

$$\Delta\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{M'M} = \Delta x\,\boldsymbol{i} + \Delta y\,\boldsymbol{j} + \Delta z\,\boldsymbol{k}.$$

De donde, suponiendo, para la determinación que $\Delta t > 0$, obtendremos

$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\,\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\,\boldsymbol{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\,\boldsymbol{k}, \tag{3}$$

es decir, el vector $\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$ está orientado por secante $\overrightarrow{M'M}$.

En el caso general, cuando $\Delta t \neq 0$ el vector $\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$ será colineal al vector $\overrightarrow{M'M}$.

DEFINICIÓN. *Llámase* ***derivada*** *de la función vectorial* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ *el vector*

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}. \tag{4}$$

Si $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, son funciones derivables, de la fórmula (3), cuando $\Delta t \to 0$, hallamos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k. \tag{5}$$

Ya que la posición límite de una secante es, por definición, una tangente, entonces el vector $\frac{dr}{dt}$ está dirigido por la *tangente a la curva* $K$ en su punto $M$ (en el sentido del crecimiento del parámetro $t$).

De la fórmula (5) obtenemos generalmente

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{6}$$

Si el parámetro $t$ es el tiempo, el vector $\frac{dr}{dt} = v$ representa la velocidad del punto $M(x, y, z)$ en movimiento, considerada como vector.

EJEMPLO. Escribir la ecuación de la tangente a la curva

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$$

en su punto $M(1, 1, 1)$ $(t = 1)$.

Aquí

$$r = ti + t^2 j + t^3 k \quad \text{y} \quad \frac{dr}{dt} = i + 2tj + 3t^2 k.$$

Resulta que la dirección de la tangente en el punto $M$ se determina por el vector

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_M = i + 2j + 3k.$$

De este modo, la ecuación de la tangente buscada es

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

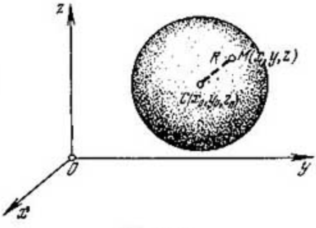


Fig. 204

## § 6. Ecuación de la esfera

DEFINICION. *Llámase* ***esfera*** *de radio* $R$ *al conjunto de todos los puntos en el espacio cuya distancia hasta el punto dado (centro) es igual a* $R$.

Deduzcamos la ecuación de la esfera. Sean: $C(x_0, y_0, z_0)$, el centro de una esfera de radio $R$, y $M(x, y, z)$, un punto arbitrario perteneciente a esta esfera (fig. 204). En este caso, $CM = R$. De acuerdo con la fórmula de la distancia entre dos puntos tenemos

$$CM = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

Igualando esta expresión a $R$ obtendremos la ecuación de la esfera

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R$$

o, definitivamente,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Si el centro de la esfera coincide con el origen de las coordenadas, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, la ecuación de la esfera adopta la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

EJEMPLO 1. Determinar las coordenadas del centro y el radio de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 3z = 0.$$

Reuniendo los términos que contienen las coordenadas corrientes del mismo nombre y completándolos hasta que aparezcan cuadrados perfectos obtendremos

$$x^2 + (y-1)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}.$$

Por consiguiente, el centro de la esfera se encuentra en el punto $C\left(0,\ 1,\ -1\frac{1}{2}\right)$ y su radio es

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{13}.$$

Notemos que el conjunto

$$\left.\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2, \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{aligned}\right\}$$

de las ecuaciones de una esfera y de un plano determina una circunferencia de intersección del plano y la esfera (si este conjunto no es vacío). En particular, si $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, el sistema de estas ecuaciones representa la circunferencia de un círculo grande.

La ecuación de la circunferencia puede ser también escrita en forma paramétrica.

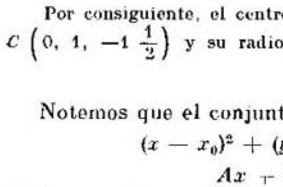


Fig. 205

EJEMPLO 2. Escribir las ecuaciones paramétricas del meridiano de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

que pasa por los polos $N(0, 0, R)$ y $S(0, 0, -R)$, si el plano de meridiano forma un ángulo $\alpha$ con el plano de coordenadas $Oxz$ (fig. 205).

Tomemos por parámetro del punto corriente $M(x, y, z)$ del meridiano el ángulo $\psi = \angle MOM'$, es decir, la altitud de este punto, donde $M'(x, y, 0)$ es la proyección del punto $M$ sobre el plano de coordenadas $Oxy$. Puesto que $M'O = r = R\cos\psi$, deducimos de la fig. 205

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\alpha = R\cos\psi\cos\alpha, \\ y &= r\operatorname{sen}\alpha = R\cos\psi\operatorname{sen}\alpha, \\ z &= R\operatorname{sen}\psi. \end{aligned}\right\}$$

donde $-\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

## § 7. Ecuación del elipsoide

DEFINICION. *Llámase* ***elipsoide de tres ejes*** *la superficie obtenida como resultado de una deformación uniforme (dilatación o contracción) de una esfera según tres direcciones perpendiculares entre sí* (compárese el § 4 del cap. IV).

Examinemos la esfera de radio $R$ y con centro en el origen de las coordenadas:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2, \qquad (1)$$

donde $X$, $Y$, $Z$ son coordenadas corrientes de un punto de la esfera.

Supongamos que esta esfera esté sometida a una deformación uniforme en el sentido de los ejes de coordenadas $Ox$, $Oy$ y $Oz$ y que los coeficientes de deformación respectivos sean iguales a $k_1$, $k_2$ y $k_3$ [1]).

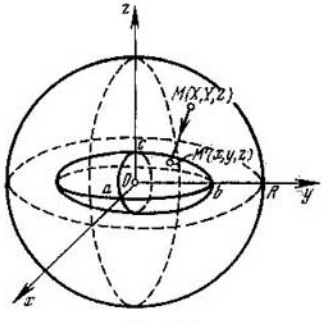


Fig. 206

Como resultado de tal deformación, la esfera se transformará en un elipsoide y el punto de la esfera $M(X, Y, Z)$ de coordenadas corrientes $X$, $Y$, $Z$ pasará a ser el punto del elipsoide $M'(x, y, z)$ de coordenadas corrientes $x$, $y$, $z$, además,

$$x = k_1X, \quad y = k_2Y, \quad z = k_3Z$$

(fig. 206). De aquí,

$$X = \frac{x}{k_1}, \quad Y = \frac{y}{k_2}, \quad Z = \frac{z}{k_3}.$$

Introduciendo estas fórmulas en la ecuación (1), tendremos

$$\frac{x^2}{k_1^2} + \frac{y^2}{k_2^2} + \frac{z^2}{k_3^2} = R^2$$

o

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (2)$$

donde $a = k_1R$, $b = k_2R$, $c = k_3R$. La ecuación (2) reúne las coordenadas corrientes del punto $M'$ del elipsoide y, por consiguiente, es *la ecuación del elipsoide de tres ejes*.

[1]) En otras palabras, las dimensiones lineales de la esfera en el sentido del eje $Ox$ se disminuyen en $\frac{1}{k_1}$ veces, si $0 < k_1 \leqslant 1$ y se aumentan en $k_1$ veces, si $k_1 > 1$, etc.

Las magnitudes $a$, $b$, $c$ se llaman *semiejes del elipsoide*; las magnitudes dobles $2a$, $2b$, $2c$ son los *ejes del elipsoide* y representan evidentemente sus dimensiones lineales en las direcciones de la deformación (en el caso dado, en las direcciones de los ejes de las coordenadas).

Si dos semiejes de un elipsoide son iguales, éste se llama *elipsoide de revolución* porque puede ser obtenido como resultado de la rotación de una elipse alrededor de uno de sus ejes. En geodesía, por ejemplo, la superficie de la esfera terrestre se considera como un elipsoide de revolución con semiejes $a = b = 6377$ km y $c = 6356$ km. Si $a = b = c$ el elipsoide se transforma en una **esfera**.

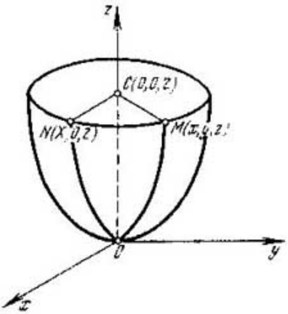

Fig. 207

## § 8. Ecuación del paraboloide de revolución

Sea que una parábola vertical

$$X^2 = 2pZ, \tag{1}$$

situada en el plano $Oxz$, gira alrededor de su eje (eje $Oz$). Con esta rotación se obtiene una superficie llamada *paraboloide de revolución* (fig. 207).

Para deducir la ecuación del paraboloide de revolución examinemos un punto cualquiera $M(x, y, z)$ de esta superficie y supongamos que este punto ha sido obtenido como resultado de la rotación del punto $N(X, 0, Z)$ de la parábola dada alrededor del punto $C(0, 0, Z)$.

Puesto que los puntos $M$ y $N$ están situados en un mismo plano horizontal y $CN = CM$ vienen a ser radios de una misma circunferencia, tenemos

$$X = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad Z = z. \tag{2}$$

Introduciendo las fórmulas (2) en la ecuación (1), obtendremos la *ecuación del paraboloide de revolución*

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

Notemos que la superficie del mercurio puesto en un recipiente cilíndrico vertical toma la forma de paraboloide de revolución, si este recipiente gira rápidamente alrededor de su eje. Esta circunstancia se utiliza para obtener los espejos parabólicos.

## EJERCICIOS

1. ¿Qué figuras geométricas en del espacio corresponden a las ecuaciones siguientes:

a) $xy = 0$; b) $xz = yz$; c) $y^2 + y - 2 = 0$; d) $z^2 = 2x$; e) $y = 1$, $z = -2$; f) $x^2 = 0$; g) $x^2 + y^2 = 0$; h) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$?

2. Determinar la longitud de la perpendicular trazada a partir del origen de coordenadas al plano $x - y + z\sqrt{2} - 8 = 0$ y los ángulos formados por esta perpendicular y los ejes de coordenadas.

3. Escribir la ecuación del plano paralelo al eje $Oz$ que corta sobre los ejes $Ox$ y $Oy$ segmentos de longitud 2 y 3 respectivamente.

4. Escribir la ecuación del plano que pasa por el punto $M$ (1, 2, 3) y que es perpendicular al eje $Oz$.

5. Sea $z = f(x, y)$ una función dada por la tabla con dos entradas

| $y \setminus x$ | 70 | 80 |
|---|---|---|
| 10 | 1,23 | 1,34 |
| 40 | 1,40 | |

Hallar el valor aproximado de $z$ para $x = 72$ e $y = 20$, considerando la función $z$ lineal, es decir, de primer grado respecto a $x$ e $y$.

6. ¿Cuáles son los ángulos formados por la recta

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-\sqrt{2}}$$

y los ejes de las coordenadas?

7. Hallar las «trazas» (es decir, los puntos de intersección) de la recta

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{4}$$

en los planos de coordenadas?

8. Escribir la ecuación de la esfera con centro en el punto $C$ (2, −2, 1) que pasa por el origen de las coordenadas.

9. Escribir las ecuaciones paramétricas de la paralela a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ con distancia angular $\alpha$ $\left(|\alpha| < \frac{\pi}{2}\right)$ al ecuador $z = 0$, tomando como parámetro la longitud $\varphi$ del punto corriente $M$ $(x, y, z)$.

10. Calcular los semiejes del elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$.

11. Determinar los semiejes de la elipse obtenida por la intersección del elipsoide $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ y el plano $x = 3$.

12. Escribir la ecuación de la tangente a la línea helicoidal

$$x = a\cos t, \qquad y = a \operatorname{sen} t, \qquad z = bt \tag{1}$$

en el punto $M_0$ correspondiente al parámetro $t = t_0$.

¿Cuál es el ángulo formado por esta tangente y el eje $Oz$?

Hallar las proyecciones de la línea helicoidal sobre los planos de las coordenadas.

*Capítulo XX*

# Funciones de varias variables

## § 1. Noción de función de varias variables

En numerosos problemas de geometría, ciencias naturales, etc., hace falta tener asuntos con funciones de dos, tres o más variables. Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1. El área de un triángulo $U = \frac{xy}{2}$ de base $x$ y de altura $y$ es una función de dos variables independientes $x$ e $y$, definidas en el dominio de $x > 0$ e $y > 0$.

EJEMPLO 2 Al resolver la ecuación de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ respecto a $z$, obtenemos, para $z \geqslant 0$, $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Aquí la $z$-coordenada de un punto situado sobre la semiesfera superior es una función de dos variables $x$ e $y$, que son la abscisa y la ordenada de este punto. Esta función está definida en el círculo $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

EJEMPLO 3 El volumen de un paralelepípedo rectangular $V = xyz$ de dimensiones $x$, $y$, y $z$ es una función de estas tres variables, definida en el octante positivo del espacio $Oxyz$.

EJEMPLO 4 Según la ley de Newton, la fuerza $F$ con la cual se atraen dos puntos materiales de masas $m$ y $m_1$ y que ocupan las posiciones respectivas ($M$ $x$, $y$, $z$) y $M_1$ ($x_1$, $y_1$, $z_1$), es igual a

$$F = k\frac{mm_1}{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2},$$

donde $k$ es una constante (llamada «constante de la atracción universal»). Por consiguiente, $F$ es una función de seis variables $x$, $y$, $z$, $x_1$, $y_1$, $z_1$.

Hágamos una aclaración importante: *toda función de varias variables se vuelve en función de un número de variables más pequeño, si se fijan algunas de éstas*, es decir, si les dan a ellas valores constantes.

Sea dada, por ejemplo, una función de tres variables $x$, $y$ y $z$

$$u = f(x, y, z)$$

si se considera que $z$ posee un valor constante $z = c$, obtendremos una función de dos variables $x$ e $y$:

$$u = f(x, y, c).$$

Luego, suponiendo que dos variables $y$ y $z$ poseen valores constantes $y = b$, $z = c$, obtendremos una función de una variable $x$

$$u = f(x, b, c).$$

De este modo, en diversas cuestiones se puede, según el deseo, considerar la función $u$ como función de una, dos o tres variables.

Hablando en rigor, casi todas las dependencias físicas nos dan ejemplos de funciones de un gran número de variables. Pero durante el estudio de estas dependencias despreciamos una parte de los factores secundarios y, de este modo, limitamos el número de variables reduciéndolo al mínimo.

Por ejemplo, el camino $s$ recorrido durante un tiempo $t$ por un cuerpo en movimiento de caída libre, depende de las variables siguientes: $t$ (tiempo de caída), $Q$ (área de la sección transversal del cuerpo), $\varphi$ (latitud del lugar), $h$ (altura del lugar sobre el nivel del mar), $P$ (presión del aire), $T$ (temperatura del aire), $\eta$ (coeficiente de viscosidad del aire), etc. Así que debemos escribir

$$s = f(t, Q, \varphi, P, T, \eta, \ldots).$$

En una primera aproximación, todas las variables menos el tiempo $t$ son de poca importancia. Despreciándolas obtendremos $s = f(t)$ y de este modo llegamos a la fórmula conocida

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

donde $g$ es la aceleración de la fuerza de la gravedad, que se considera constante.

Si tenemos en cuenta al menos parcialmente el papel de otras variables tendremos para $s$ fórmulas más y más precisas, a medida que crece el número de variables incluidas.

*La imagen geométrica* (*el gráfico*) de una función de dos variables

$$z = f(x, y) \qquad (1)$$

es, en general, una **superficie** en el espacio $Oxyz$.

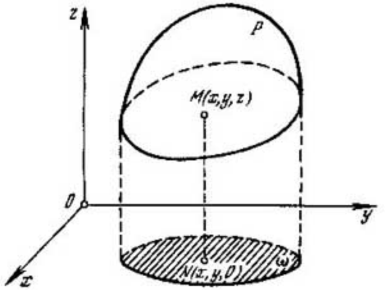

Fig. 208

Efectivamente, supongamos que la función dada sea definida en una región $\omega$ del plano $Oxy$. En este caso, a cada par de valores de $x$ e $y$ de la región $\omega$ le corresponde, según la fórmula (1), un cierto valor de $z$; en otras palabras, a todo punto $N(x, y, 0) \in \omega$ se le hace corresponder un punto $M(x, y, z)$ perteneciente al gráfico de la función y que es el extremo de la perpendicular $NM$ trazado al plano $Oxy$ ($MN \perp Oxy$).

Si el punto $N$ ocupa todas las posiciones posibles que cubren toda la región $\omega$, entonces el punto $M$ vinculado con esta región, describe en el espacio cierta superficie $P$ [1]) que «pende» sobre la región $\omega$. Se puede representar con evidencia que $P$ es un «techo» construido sobre el área de $\omega$. La superficie $P$ es efectivamente la representación gráfica de la función (1) (fig. 208). Las representa-

[1]) Se trata de las funciones elementales más simples.

ciones geométricas de funciones de tres y más variables no tiene sentido geométrico simple.

En ciertos casos se puede interpretar geométricamente el comportamiento de una función examinando sus *líneas de nivel* (o *superficies de nivel*), es decir las líneas (o superficies) donde la función dada posee un valor constante.

DEFINICIÓN 1 *Llámase* ***línea de nivel*** *de una función*

$$z = f(x, y)$$

*al conjunto de todos los puntos del plano Oxy para los cuales la función dada posee un mismo valor* (***isocurva***).

De este modo, la ecuación de la línea de nivel es

$$f(x, y) = C,$$

donde $C$ es una constante dada.

EJEMPLO Construir la familia de líneas de nivel de la función

$$z = x^2 + y^2.$$

Dando a $z$ valores no negativos $z = 0, 1, 2, \ldots$ (es evidente que $z$ no puede ser negativo) obtenemos las ecuaciones de líneas de nivel de la función: $x^2 + y^2 = 0$ es el punto $O$ $(0, 0)$; $x^2 + y^2 = 1$ es una circunferencia de $R = 1$ y centro $O$; $x^2 + y^2 = 2$, circunferencia de $R = \sqrt{2}$ y centro $O$ $(0, 0)$, etc.

De este modo, las líneas de nivel de nuestra función constituyen una familia de circunferencias concéntricas de centro $O$. Al construir estas líneas obtendremos para la función dada una «mapa de superficies» con alturas marcadas (fig. 209).

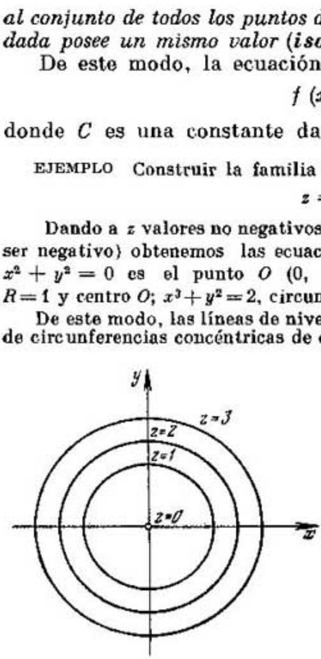

Fig. 209

La fig. 209 nos muestra claramente que la función $z$ crece a lo largo de cada dirección radial. Por eso la imagen geométrica de la función en el espacio $Oxyz$ representa en sí un «hoyo» gigantesco con bordes abruptamente crecientes. Teóricamente, esto es un **paraboloide de revolución** (véase el § 8 del cap. XIX).

DEFINICIÓN 2 *Llámase* ***superficie de nivel*** *de una función*

$$u = f(x, y, z)$$

*al conjunto de puntos del espacio Oxyz, para el cual esta función tiene el mismo valor* (***isosuperficie***).

Las líneas y las superficies de nivel se encuentran constantemente en los problemas de física. Por ejemplo, al unir sobre un mapa de la superficie terrestre los puntos de igual temperatura diaria promedio o presión atmosférica, obtendremos, respectivamente, los mapas de **isotermas** y de **isobaras**, que son datos importantes y básicos para el pronóstico del tiempo.

## § 2. Continuidad

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables $x$ e $y$; al conjunto de valores $(x, y)$ lo llamaremos para abreviar **punto**; de este modo, $z$ es función de un «punto».

Demos a la variable $x$ un incremento $\Delta x$ sin tocar la variable $y$. Entonces, la diferencia

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \tag{1}$$

se llama *incremento parcial de la función $f(x, y)$ respecto a la variable $x$*. Por consiguiente, se puede escribir

$$\Delta_x f(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y). \tag{2}$$

De un modo análogo, si se da un incremento $\Delta y$ solamente a la variable $y$ sin tocar la $x$, la diferencia

$$\Delta_y f(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{2'}$$

se llama *incremento parcial de la función $f(x, y)$ respecto a la variable $y$*.

Por último, puede ocurrir que las dos variables $x$ e $y$ han obtenido respectivamente los incrementos $\Delta x$ y $\Delta y$. En este caso, el incremento correspondiente de la función

$$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{3}$$

se llama *incremento total de la función $f(x, y)$* (o, simplemente, *incremento de la función*).

Es natural que se examinen aquí los puntos

$$(x, y), (x + \Delta x, y) (x, y + \Delta y), (x + \Delta x, y + \Delta y),$$

para los cuales la función $f$ tiene sentido, es decir, está definida.

Notemos que de las fórmulas (2), (2') y (3) se deduce que, *en general, el incremento total de una función no es igual a la suma de los incrementos parciales de la misma*:

$$\Delta f(x, y) \neq \Delta_x f(x, y) + \Delta_y f(x, y).$$

EJEMPLO. Hallar el incremento de la función

$$f(x, y) = x^2 + xy - 2y^2,$$

si $x$ ha variado de 2 a 2,2 e $y$, de 1 a 0,9.

Aquí

$$\Delta x = 0{,}2 \quad \text{y} \quad \Delta y = -0{,}1.$$

Tenemos

$$f(2; 1) = 2^2 + 2\cdot 1 - 2\cdot 1^2 = 4$$

y

$$f(2{,}2; 0{,}9) = 2{,}2^2 + 2{,}2\cdot 0{,}9 - 2\cdot 0{,}9^2 = 5{,}20.$$

Por consiguiente

$$\Delta f(2; 1) = 5{,}20 - 4 = 1.20.$$

De un modo análogo se definen y se escriben los incrementos parciales y totales de una función de más de dos variables.

DEFINICIÓN 1. *Una función $f(x, y)$ se llama* ***continua en un punto*** *$(x_0, y_0)$, si:* 1) *la función está definida en este punto y él es un punto límite para el dominio de existencia de esta función;* 2) *a los incrementos infinitamente pequeños*

$$\Delta x_0 = x - x_0 \quad \text{y} \quad \Delta y_0 = y - y_0$$

*de las variables $x$* e *$y$ les corresponde un incremento infinitamente pequeño $\Delta f(x_0, y_0)$ de la función $f(x, y)$*, es decir, cualquiera que sea el modo mediante el cual los incrementos $\Delta x_0$ y $\Delta y_0$ tienden a cero y para los cuales $f(x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0)$ tiene sentido, se cumple la condición

$$\lim_{\substack{\Delta x_0 \to 0 \\ \Delta y_0 \to 0}} \Delta f(x_0 y_0) = \lim_{\substack{\Delta x_0 \to 0 \\ \Delta y_0 \to 0}} [f(x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0) - f(x_0, y_0)] = 0 \text{ [1]}. \quad (4)$$

Para más claridad se puede admitir que una función $f(x, y)$ continua en el punto $(x_0, y_0)$ está definida en este punto, así como **en cierto entornoy del mismo**, y, siendo los incrementos $\Delta x_0$ y $\Delta y_0$ lo suficientemente pequeños según sus módulos, tiene lugar la igualdad (4).

DEFINICIÓN 2. *Una función $f(x, y)$ se llama* ***continua en un dominio dado***, *si ella es continua en todos los puntos de este dominio, es decir, si para cada punto $(x, y)$ del dominio tenemos*

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)] = 0. \quad (5)$$

Suponemos aquí habitualmente que el punto desplazado $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ pertenece al dominio considerado y que $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ existe (según la definición (1) el conjunto de tales puntos no es vacío en todo entorno del punto $(x, y)$). De este modo se puede decir que *una función es continua, si y sólo si, a incrementos infinitamente pequeños de sus argumentos les corresponde un incremento infinitamente pequeño de la función.*

EJEMPLO. La función $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{1 - x - y}$ está definida y es continua en el triángulo: $\Delta = \{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0;\ x + y \leqslant 1\}$. Notemos que los puntos de frontera del conjunto $\Delta$ no son puntos interiores del mismo.

De la fórmula (5) se deduce que

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \alpha,$$

donde $\alpha$ es un infinitésimo cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. De este modo, *si una función $f(x, y)$ es continua, sus valores en dos puntos infinita-*

---

[1]) Para la definición del límite de una función véase el § 3 del cap. VII, observación.

*mente próximos se diferencian entre sí en una función infinitesimal.*

Supongamos que $x + \Delta x = x_1$, $y + \Delta y = y_1$; es evidente que cuando $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ tenemos $x_1 \to x$, $y_1 \to y$, y viceversa. En este caso mediante la fórmula (5) obtenemos una **definición equivalente de continuidad de una función**

$$\lim_{\substack{x_1 \to x \\ y_1 \to y}} f(x_1, y_1) = f(x, y).$$

## § 3. Derivadas parciales de primer orden

Sea dada una función

$$z = f(x, y).$$

Aquí y en adelante, supondremos que para cada punto examinado $(x, y)$ la función $f(x, y)$ está definida en un cierto entorno total de este punto.

Examinemos la relación del incremento parcial

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$

de la función $z$ respecto de la variable $x$ al incremento $\Delta x$ de esta variable

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

El límite de esta relación, si él existe, cuando $\Delta x$ tiende a cero se llama *derivada parcial primera* (*o de primer orden*) *de la función* $z = f(x, y)$ *respecto a* $x$, y se connota así:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y).$$

En consecuencia, tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Se define análogamente la *derivada parcial* $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ *de la función* $x = f(x, y)$ *respecto a* $y$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

DEFINICION. *Llámase **derivada parcial** de una función de varias variables respecto a una de estas variables, al límite de le relación del incremento parcial correspondiente de la función respecto al incremento de la variable independiente que se examina, a condición de que este incremento tiende a cero.*

Notemos que si se toma la derivada $\frac{\partial z}{\partial x}$ de la función $z = f(x, y)$, $y$ **se considera constante**; si se calcula $\frac{\partial z}{\partial y}$, $x$ **se considera constante.**

Por eso, *la derivada parcial de una función de varias variables es igual a la derivada de la función de una sola variable obtenida cuando*

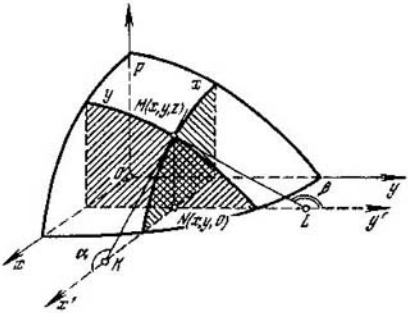


Fig. 210

*todas las variables independientes de la función dada son constantes, excepto una, respecto a la cual se toma la derivada*, es decir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dx}[f(x, y)],$$

donde $y = \text{const}$, etc.

Por consiguiente, el cálculo de derivadas parciales no exige nuevas reglas de derivación y podemos utilizar las fórmulas conocidas (véase el § 13 del cap. X).

EJEMPLO 1. Sea la función $z = x^3 \operatorname{sen} y + y^4$.
Es fácil ver que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \operatorname{sen} y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 \cos y + 4y^3.$$

Se definen y se calculan análogamente las derivadas parciales de una función $u = f(x, y, z)$ de tres variables $x, y, z$, etc.
EJEMPLO 2. Sea la función $u = x^6 - y^4 + 3z^5$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x^5, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -4y^3, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 15z^4.$$

Para una función

$$z = f(x, y)$$

es fácil hacer una **interpretación geométrica** de sus derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$. La imagen geométrica de esta función es una cierta superficie $P$ (fig. 210).

Considerando que $y = \text{const}$, obtenemos una curva plana $\Gamma_x$ que representa la sección de la superficie $P$ por un plano correspondiente paralelo al plano de coordenadas $Oxz$. Sean $MK$ la tangente a la curva $\Gamma_x$ en el punto $M(x, y, z)$ y $\alpha$ el ángulo formado por esta tangente y la dirección positiva del eje $Ox$. Puesto que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left| \frac{dz}{dx} \right|_{y=\text{const}},$$

el sentido geométrico de la derivada ordinaria nos permite escribir

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

De modo análogo, si $\Gamma_y$ es la sección de la superficie $P$ por el plano $x = \text{const}$ y $\beta$ es el ángulo formado por el eje $Oy$ y la tangente $ML$ a la curva $\Gamma_y$ en el punto $M(x, y, z)$, tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg} \beta.$$

## § 4. Diferencial total de una función

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables independientes $x$ e $y$. El incremento total de esta función

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

es la diferencia de los valores que esta función toma en los puntos $M(x, y)$ y $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Designemos por $\rho$ la distancia entre estos puntos:

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Si, cuando $\rho \to 0$, se pueden elegir las magnitudes $A$ y $B$, independientes de $\Delta x$ y de $\Delta y$, tales que la expresión

$$A\,\Delta x + B\Delta y$$

difiera del incremento total $\Delta z$ de la función en un infinitésimo de orden superior en comparación con $\rho$, esta expresión se llama *parte lineal principal* del incremento total de la función. En este caso obtendremos

$$\Delta z = A\,\Delta x + B\Delta y + \gamma\rho, \tag{1}$$

donde $\gamma \to 0$ cuando $\rho \to 0$ (o, lo que es lo mismo, $\gamma \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$).

La expresión (1) puede ser escrita de otra forma. Puesto que $\Delta x = \rho \cos \varphi$, $\Delta y = \rho \operatorname{sen} \varphi$ (fig. 211) tenemos

$$\rho = \Delta x \cos \varphi + \Delta y \operatorname{sen} \varphi;$$

de donde

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \tag{1'}$$

donde

$$\alpha = \gamma \cos \varphi \to 0 \quad \text{y} \quad \beta = \gamma \operatorname{sen} \varphi \to 0$$

cuando $\rho \to 0$, es decir, cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, y viceversa.

Generalizando la definición de la diferencial de la función de una sola variable independiente, en el caso de una función de dos variables independientes se pueden enunciar las definiciones siguientes.

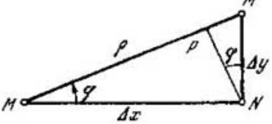

Fig. 211

DEFINICIÓN 1. *Llámase* ***diferencial de una variable independiente*** *al incremento de esta variable,* es decir

$$dx = \Delta x \quad \text{y} \quad dy = \Delta y.$$

DEFINICIÓN 2. *Llámase* ***diferencial total*** *(o sencillamente* ***diferencial de una función****)* $z = f(x, y)$ *de dos variables independientes* $x$ *e* $y$, *a la parte lineal principal del incremento total de esta función.*

Esta definición se extiende de modo natural a funciones de cualquier número de variables.

Designando la diferencial de la función por la letra $d$, se puede escribir

$$dz = A\Delta x + B\Delta y, \tag{2}$$

donde $A$ y $B$ no dependen de $\Delta x$ ni de $\Delta y$ y además de

$$\Delta z - dz = \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

donde $\alpha$ y $\beta$ son infinitésimos, cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$.

La función que posee diferencial en el dominio dado se llama función *diferenciable* (*derivable*) en este dominio. Si una función $z$ es diferenciable, su incremento total $\Delta z$ es dado por las fórmulas (1) ó (1').

Notemos que si una función $z = f(x, y)$ es diferenciable, ella es **continua.** Efectivamente, pasando al límite en la fórmula (1') cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, obtendremos

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0,$$

es decir, la función $z$ es continua (véase el § 2).

EJEMPLO Hallar la diferencial de la función $z = xy$.

La función $z$ puede considerarse como el área de un rectángulo de lados $x$ e $y$ (fig. 212) [1]. Dando a los lados $x$ e $y$ incrementos $\Delta x$ y $\Delta y$ obtendremos el incremento $\Delta z$ del área $z$ que representa el área de «orla»:

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy =$$
$$= y\,\Delta x + x\,\Delta y + \Delta x \cdot \Delta y.$$

Cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$ la parte principal de este incremento, constituida por dos rectángulos de lados $y$, $\Delta x$ y $x$, $\Delta y$, es la diferencial $dz$ del área $z$; por eso

$$dz = y\,\Delta x + x\,\Delta y.$$

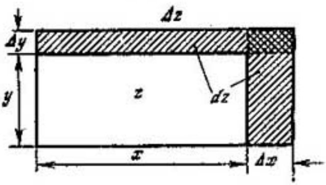


Fig. 212

TEOREMA 1. *La diferencial de una función es igual a la suma de los productos de las derivadas parciales de esta función por las diferenciales de las variables independientes correspondientes.*

DEMOSTRACION Sea $z = f(x, y)$ una función **diferenciable**, es decir, que tiene diferencial

$$dz = A\Delta x + B\Delta y. \tag{3}$$

Para determinar los coeficientes $A$ y $B$ escribimos el incremento total de esta función

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + B\Delta y, \tag{4}$$

donde $\alpha$ y $\beta$ son infinitésimos cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. Considerando que $\Delta y = 0$, en la fórmula (4) obtendremos el incremento parcial

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha\Delta x.$$

De aquí

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha$$

y, por consiguiente, cuando $\Delta x \to 0$ tendremos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = A.$$

De modo análogo, considerando que $\Delta x = 0$, en la fórmula (4) hallamos

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = B.$$

De este modo,

$$A = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

[1] Para mayor evidencia, consideramos que $x$ e $y$ son positivos.

Sustituyendo estos valores en la fórmula (3) y teniendo en cuenta que $\Delta x = dx$ y $\Delta y = dy$, obtendremos definitivamente

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{5}$$

COROLARIO *Una función dada posee una diferencial* ***única.***

Efectivamente, de la demostración del teorema 1 se deduce que la diferencial de la función $z = f(x, y)$, si ella existe, es expresada obligatoriamente por la fórmula (5).

OBSERVACION. De la fórmula (5) se deduce que la diferencial $dz$ de una función $z = f(x, y)$ de dos variables independientes $x$ e $y$, es **una función de cuatro variables independientes** $x$, $y$, $dx$, $dy$ lineal (es decir, del primer grado) respecto al segundo par de variables. El primer par de variables, $x$ e $y$, representa las coordenadas del punto $M(x, y)$ en el cual se calcula la diferencial; el segundo par de variables, $dx$ y $dy$, son **las coordenadas del vector de desplazamiento** del punto $M(x, y)$ cuando éste pasa a un punto infinitamente cercano $M'(x + dx, y + dy)$, donde $dx$ y $dy$ son las proyecciones del segmento $MM'$ sobre los ejes de coordenadas correspondientes $Ox$ y $Oy$.

TEOREMA 2 (condición suficiente de diferenciabilidad de una función). *Si una función $z = f(x, y)$ posee en un dominio dado las derivadas parciales continuas $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$, entonces ella es derivable en ese dominio y su diferencial se expresa por la fórmula* (5).

DEMOSTRACION Examinemos el incremento total de la función

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Restando y sumando el término $f(x, y + \Delta y)$, tendremos

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta x) - f(x, y + \Delta y)] + \\ + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \tag{6}$$

El primer corchete de la fórmula (6) representa el incremento de la función $f(x, y)$ respecto a la variable $x$ para un valor fijo $y + \Delta y$ de la segunda variable $y$, es decir, ella puede ser considerada como el incremento de la función de una sola variable $x$. Fijando el valor de $y + \Delta y$ y aplicando el teorema de Lagrange sobre el incremento finito de una función (el § 1 del cap. XI) hallamos

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x f'_x(\overline{x}, y + \Delta y), \tag{7}$$

donde $\overline{x}$ es un valor intermedio entre $x$ y $x + \Delta x$.

De modo análogo el segundo corchete de la fórmula (6) es el incremento de la función $f(x, y)$ respecto a la variable $y$ para un valor fijo de la variable $x$. Por eso aplicando el teorema de Lagrange obtendremos

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y f'_y(x, \overline{y}), \tag{8}$$

donde $\bar{y}$ es un valor intermedio entre $y$ e $y + \Delta y$. De las fórmulas (6), (7) y (8) se deduce

$$\Delta z = \Delta x f'_x(\bar{x},\ y + \Delta y) + \Delta y f'_y(x,\ \bar{y}). \tag{9}$$

Sean $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. Puesto que las derivadas $f'_x(x,\ y)$ y $f'_y(x,\ y)$ son continuas, sus valores en los puntos infinitamente cercanos $P(\bar{x},\ y + \Delta y)$ y $M(x,\ y)$ y, respectivamente, $Q(x,\ \bar{y})$ y $M(x,\ y)$ (fig. 213) se diferencian entre sí en infinitésimos (§ 2); por eso

$$f'_y(\bar{x},\ y + \Delta y) = f'_x(x,\ y) + \alpha$$

y

$$f'_y(x,\ \bar{y}) = f'_y(x,\ y) + \beta,$$

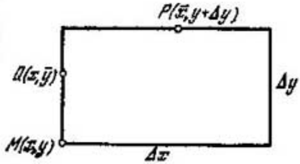

Fig. 213

donde $\alpha$ y $\beta$ son infinitésimos cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. De aquí, por la fórmula (9)

$$\Delta z = [f'_x(x,\ y)\,\Delta x + f'_y(x,\ y)\,\Delta y] + (\alpha\Delta x + \beta\Delta y). \tag{10}$$

La parte lineal principal del incremento total $\Delta z$ de una función es, por definición, la diferencial $dz$ de esta función. Por consiguiente, la fórmula (10) da

$$dz = f'_x(x,\ y)\,\Delta x + f'_y(x,\ y)\,\Delta y \equiv \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy,$$

es lo que hacía falta demostrar.

EJEMPLO 1. Hallar la diferencial de la función $z = x^y$. Aquí

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

De aquí

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x\ dy.$$

OBSERVACIÓN. Análogamente, si una función $u = f(x, y, z)$ posee derivadas parciales continuas $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, la diferencial de esta función se expresa por la fórmula

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz,$$

donde $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ y $dz = \Delta z$.

EJEMPLO 2. Hallar la diferencial de la función $u = \frac{x}{y}\,e^z$. Tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}\,e^z, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\,e^z, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x}{y}\,e^z.$$

Por consiguiente

$$du = e^z\left(\frac{1}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy + \frac{x}{y}\,dz\right).$$

Si los incrementos $\Delta x$ y $\Delta y$ son pequeños, el incremento de una función diferenciable

$$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

puede ser aproximadamente reemplazado por la diferencial $df(x, y)$ de esta función:

$$df(x, y) = f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y.$$

De donde se deduce una igualdad aproximada

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y$$

que será tanto relativamente más exacta cuanto menores sean $|\Delta x|$ y $|\Delta y|$.

EJEMPLO 3. Se examina un rectángulo de lados $x = 6$ m e $y = 8$ m. ¿Cuál será la variación de la diagonal de este rectángulo, si el lado $x$ se aumenta en 5 cm y el lado $y$ se disminuye en 10 cm?

Designando la diagonal del rectángulo por $u$ tenemos $u = \sqrt{x^2 + y^2}$. De donde reemplazando el incremento $\Delta x$ de la diagonal por la diferencial $du$ de esta última hallamos aproximadamente

$$\Delta u \approx du = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\Delta x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\Delta y = \frac{x\,\Delta x + y\,\Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Considerando que en la última fórmula $x = 6$ m, $\Delta x = 0{,}05$ m; $y = 8$ m, $\Delta y = -0{,}10$ m obtendremos

$$\Delta u \approx \frac{6\cdot 0{,}05 + 8\cdot(-0{,}10)}{\sqrt{36+64}}\ \text{m} = -0{,}05\ \text{m}.$$

De este modo, la diagonal del rectángulo disminuirá aproximadamente en 5 cm. El cálculo exacto da $\Delta u = -0{,}045$ m.

## § 5. Aplicación de la diferencial de una función a los cálculos aproximados

Con ayuda de la diferencial total de una función se puede establecer cómo los errores de sus argumentos influyen en el valor de la función.

PROBLEMA. Calcular el error absoluto límite $\Delta_z$ de la función

$$z = f(x, y)$$

conociendo los errores absolutos límites $\Delta_x$ y $\Delta_y$ de los argumentos $x, y$:

$$|\Delta x| \leqslant \Delta_x \quad \text{y} \quad |\Delta y| \leqslant \Delta_y.$$

Tenemos

$$|\Delta z| = |f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)|.$$

Reemplazando el incremento de la función por su diferencial obtendremos

$$|\Delta z| \approx |f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y|.$$

De donde deducimos una apreciación aproximada

$$|\Delta z| \leqslant \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| |\Delta x| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| |\Delta y|.$$

Por consiguiente, el error absoluto límite de la función $z$ es igual a

$$\Delta_z = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \Delta_x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \Delta_y. \tag{1}$$

EJEMPLO. **La hipotenusa de un triángulo rectángulo es $x = 120$ m $\pm$ 2 m y el ángulo agudo es $y = 30° \pm 1°$. ¿Con qué precisión se puede calcular el cateto de este triángulo, opuesto al ángulo dado?**

Tenemos

$$z = x \operatorname{sen} y. \tag{2}$$

De donde

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{sen} y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x \cos y.$$

Suponiendo que $x = 120$, $\Delta_x = 2$ e $y = \frac{\pi}{6}$, $\Delta_y = \frac{\pi}{180}$ hallamos mediante las fórmulas (2) y (1)

$$z = 120 \operatorname{sen} 30° = 60 \text{ (m)}$$

y

$$\Delta_z = \operatorname{sen} 30° \cdot 2 + 120 \cdot \cos 30° \cdot \frac{\pi}{180} = 1 + 1{,}8 = 2{,}8 \text{ (m)}$$

Por consiguiente

$$z = 60 \text{ m} \pm 2{,}8 \text{ m}.$$

Aplicando la fórmula (1) se puede determinar también el error absoluto límite de la función:

$$\delta_z = \frac{\Delta_z}{|z|}.$$

En particular, hacemos

$$z = xy \quad (x \neq 0,\ y \neq 0).$$

En este caso

$$\Delta_z = |y|\,\Delta_x + |x|\,\Delta_y$$

y, por consiguiente,

$$\delta_z = \frac{\Delta_x}{|x|} + \frac{\Delta_y}{|y|} \quad \text{o} \quad \delta_z = \delta_x + \delta_y,$$

es decir, *el error absoluto límite de un producto es igual a la suma de errores absolutos límites de los factores.*

## § 6. Noción sobre derivada de una función según una dirección dada

Sea $u = f(x, y)$ una función definida en un dominio $\omega$. Examinemos cierto punto $M(x, y) \in \omega$ y una dirección $l$ definida por los cosenos directores $\cos\alpha$ y $\cos\beta = \operatorname{sen}\alpha$ (es decir, $\cos\alpha$ y $\cos\beta$ son los cosenos de los ángulos formados por el rayo $l$ y las direcciones positivas de los ejes de coordenadas $Ox$ y $Oy$). Cuando el punto $M(x, y)$ se desplaza en la dirección dada $l$ al punto $M'(x + \Delta x, y + \Delta y) \in \omega$, la función $u = f(x, y)$ obtiene un incremento

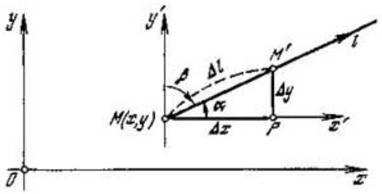


Fig. 214

$$\Delta_l u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (1)$$

que se llama *incremento de la función u en la dirección dada l* (fig. 214). Si $MM' = \Delta l$ es el valor del desplazamiento del punto $M$, del triángulo $MPM'$ se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta x &= \Delta l \cdot \cos\alpha, \\ \Delta y &= \Delta l \cdot \cos\beta. \end{aligned} \quad (2)$$

Por consiguiente

$$\Delta_l u = f(x + \Delta l \cos\alpha, \quad y + \Delta l \cos\beta) - f(x, y).$$

DEFINICIÓN. *Llámase* ***derivada*** $\frac{\partial u}{\partial l}$ ***de una función*** $u$ ***en una dirección dada*** $l$, *al límite de la relación del incremento de la función en esta dirección respecto al valor del desplazamiento, cuando esta última tiende a cero*, es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}. \quad (3)$$

De este punto de vista, las derivadas $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$ pueden considerarse como las derivadas de la función $u$ en las direcciones positivas de los ejes de coordenadas $Ox$ y $Oy$.

La derivada $\frac{\partial u}{\partial l}$ da **la velocidad de variación de la función en la dirección** $l$.

Deduzcamos la fórmula para la derivada $\frac{\partial u}{\partial l}$ suponiendo que la función $u = f(x, y)$ es derivable. En virtud de la definición de la diferencial de una función el incremento de la función difiere de su diferencial en una magnitud infinitamente pequeña de un orden superior respecto a los incrementos de las variables independientes. Por eso, aplicando la fórmula de la diferencial total (la (5) del § 4) tendremos

$$\Delta_l u = \frac{\partial h}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,$$

donde $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. De donde obtenemos, de acuerdo con las relaciones (2),

$$\Delta_l u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta\right)\Delta l + (\varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta)\,\Delta l.$$

Por consiguiente

$$\frac{\Delta_l u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta.$$

Pasando al límite en la última fórmula para $\Delta l \to 0$, es decir, cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$ y, partiendo de la definición (3), obtendremos la fórmula buscada para la derivada de la función en la dirección dada:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta, \tag{4}$$

donde $\cos\beta = \operatorname{sen}\alpha$.

EJEMPLO 1. Hallar el incremento de la función $u = x^2 + 2xy - y^2$ durante el desplazamiento del punto $M$ (1, 2) en una distancia $\Delta l = 0{,}1$ en el sentido $l$ que forma un ángulo $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$ con la dirección positiva del eje $Ox$. ¿Cuál es el valor de la derivada $\frac{\partial u}{\partial l}$ en el punto $M$?

Tenemos $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ y $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. De donde

$$\sec\alpha = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \sqrt{1+\frac{9}{16}} = \frac{5}{4},$$

por consiguiente,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{4}{5} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} = \frac{3}{5}.$$

Utilizando los cosenos directores $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ y $\cos\beta = \frac{3}{5}$ obtenidos para la dirección $l$, se hallan los incrementos de coordenadas del punto $M$

$$\Delta x = \Delta l\cdot\cos\alpha = 0{,}1\cdot\frac{4}{5} = 0{,}08 \qquad \text{y} \qquad \Delta y = \Delta l\cdot\cos\beta = 0{,}1\cdot\frac{3}{5} = 0{,}06.$$

De este modo, el punto despzado $M'$ tiene las coordenadas

$$x_1 = x + \Delta x = 1 + 0{,}08 = 1{,}08$$

e

$$y_1 = y + \Delta y = 2 + 0{,}06 = 2{,}06.$$

De aquí el incremento buscado de la función $u$ es igual a

$$\Delta_l u = (1{,}08^2 \pm 2\cdot 1{,}08\cdot 2{,}06 - 2{,}06^2) - (1^2 + 2\cdot 1\cdot 2 - 2^2) =$$
$$= 1{,}3724 - 1 = 0{,}3724.$$

Notemos que

$$\frac{\Delta_l u}{\Delta l} \approx 3,7.$$

Luego, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2x-2y;$$

por eso

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M=6, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M=-2$$

y, por consiguiente.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_M=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M \cos\alpha+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M \cos\beta=6\cdot\frac{4}{5}+(-2)\cdot\frac{3}{5}=3,6.$$

OBSERVACIÓN. La derivada de la función $u=f(x, y, z)$ en la dirección $l=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ es igual a

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

## § 7. Gradiente

DEFINICIÓN 1. *Se dice que en un dominio dado* $\omega$ [1]) *se ha definido el* ***campo escalar***, *si para todo punto* $M \in \omega$ *se da cierta magnitud escalar* (es decir, un número)

$$u=f(M). \tag{1}$$

De este modo, $u$ es una función numérica de un punto.

Como ejemplos de campos escalares se pueden citar: el campo de temperatura, es decir, la distribución de la temperatura en un cuerpo calentado; la distribución de concentración de una sustancia en la solución, etc.

Si el dominio $\omega$ está situado sobre el plano $Oxy$, cualquier punto suyo $M$ se define por dos coordenadas $(x, y)$ y el campo escalar plano (1) puede ser escrito así

$$u=f(x, y) \quad ((x, y) \in \omega). \tag{2}$$

De modo análogo, para el dominio $\omega$ del espacio $Oxyz$ tendremos

$$u=f(x, y, z) \quad ((x, y, z) \in \omega).$$

De este modo, la noción de campo escalar da una **interpretación física** de la función de varias variables.

DEFINICIÓN 2. *Se dice que un* ***campo vectorial*** *está definido en un dominio dado* $\omega$, *si a cada punto* $M \in \omega$ *se le asocia un cierto vector*

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}(M). \tag{3}$$

---

[1]) Conforme a la tradición, el término «dominio» es aquí sinónimo de vocablo «conjunto». Para la definición de la noción de dominio véase el § 11.

De ejemplos de campos vectoriales pueden servir: el campo de velocidad en un momento de tiempo dado de puntos de una corriente de líquido; el campo de fuerza generado por un centro de atracción, etc.

Para el caso de un campo vectorial plano (3) ($\omega \in Oxy$) tendremos un vector función

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}(x, y) \quad ((x, y) \in \omega). \tag{4}$$

De aquí, pasando a las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$ obtendremos

$$a_x = F_1(x, y), \quad a_y = F_2(x, y). \tag{5}$$

De este modo, la definición de un campo vectorial plano (4) es equivalente a la definición **de dos campos escalares** (5).

De modo análogo, para el caso de un campo vectorial en el espacio ($\omega \in Oxyz$) obtenemos

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}(x, y, z), \tag{6}$$

o, en coordenadas,

$$a_x = F_1(x, y, z), \quad a_y = F_2(x, y, z),$$
$$a_z = F_3(x, y, z). \tag{7}$$

Entonces, el campo vectorial (6) es equivalente a tres campos escalares (7). Esto explica **la comodidad del lenguaje vectorial**: él permite escribir numerosas relaciones escalares mediante una sola fórmula.

El conjunto de todos los puntos $M$ para los cuales el campo escalar (1) conserva un valor constante

$$f(M) = \text{const},$$

se llama *superficie* (o *línea*) *de nivel* del campo escalar (*isosuperficie*) (véase el § 1).

DEFINICION 3. *Sea*

$$u = f(x, y) \tag{8}$$

*un campo escalar plano derivable*[1]. *Entonces, el vector*

$$\operatorname{grad} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \tag{9}$$

*se llama* ***gradiente del campo***; o más detalladamente

$$\operatorname{grad} u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y},$$

donde $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ son vectores unitarios orientados a lo largo de los ejes de coordenadas $Ox$ y $Oy$.

---

[1]) Es decir, $f(x, y)$ es una función derivable de dos variables.

Lo mismo, para un campo escalar en el espacio

$$u = f(x, y, z) \tag{8'}$$

su gradiente es el vector

$$\operatorname{grad} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}. \tag{9'}$$

De este modo, el campo escalar engendra un campo vectorial 1 amado **campo de gradientes.**

Llámase derivada del campo escalar (8′) en una dirección dada $l$, la expresión (véase el § 6)

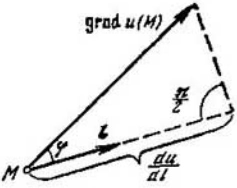


Fig. 215

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \tag{10}$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores del vector $l$. La derivada $\frac{\partial u}{\partial l}$ representa la velocidad de variación del campo en la dirección dada.

TEOREMA 1. *La derivada de un campo escalar en una dirección dada es igual a la proyección del gradiente de este campo sobre esta dirección (en el punto correspondiente).*

DEMOSTRACIÓN Designemos por $\boldsymbol{l}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ *el vector unitario de la dirección* $\boldsymbol{l}$. En este caso, teniendo en cuenta la fórmula (9′) y recordando la definición del producto escalar (el § 12 del cap. XVIII) se puede escribir la expresión (10) en la forma siguiente

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{l}_0 = |\operatorname{grad} u|\,|\boldsymbol{l}_0|\cos\varphi = |\operatorname{grad} u|\cos\varphi, \tag{11}$$

donde $\varphi = \angle(\operatorname{grad} u, \boldsymbol{l})$ (fig. 215).

De aquí,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{proy}_l \operatorname{grad} u. \tag{12}$$

COROLARIO *El gradiente de un campo escalar en un punto dado es igual en magnitud y en dirección a la velocidad máxima de variación del campo en este punto.*

Efectivamente, mediante la fórmula (11) se obtiene que

$$\max_l \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial l^*} = |\operatorname{grad} u|,$$

y además $\cos\varphi = 1$. De aquí hallamos que $\varphi = 0$ y, por consiguiente, la dirección del vector $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}^*$ debe coincidir con la dirección del grad $u$, es decir, $\boldsymbol{l}^* = k \operatorname{grad} u$, donde $k > 0$. Además para esta dirección tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial l^*} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}. \qquad (13)$$

OBSERVACIÓN Del corolario se deduce que el gradiente del campo no depende de la elección de un sistema de coordenadas rectangulares $Oxyz$.

EJEMPLO. Hallar la magnitud y la dirección del gradiente del campo

$$u = \frac{x}{y} + z^2$$

en el punto $M_0$ (2, 1, 0).

Tenemos

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0} = \left(\frac{1}{y}\right)_{M_0} = 1, \ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0} = \left(-\frac{x}{y^2}\right)_{M_0} = -2, \ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0} = (2z)_{M_0} = 0.$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{grad} u\,(M_0) = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}.$$

De aquí

$$|\operatorname{grad} u\,(M_0)| = \sqrt{5} \ \text{ y } \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos\gamma = 0.$$

El punto $M_0$ en el cual grad $u\,(M_0) = 0$ se llama *singular* para el campo escalar; en el caso contrario, el punto $M_0$ se llama *no singular (ordinario)*.

Citamos sin demostración un teorema que define la dirección del gradiente de un campo escalar.

TEOREMA 2. *En todo punto no singular de un campo escalar plano el gradiente del campo está dirigido según la normal a la línea de nivel que pasa por este punto en el sentido del crecimiento del campo.*

## § 8. Derivadas parciales de orden superior

Supongamos que tenemos cierta función $z = f(x, y)$ de dos variables $x$ e $y$. Sus derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$$

son funciones de las variables $x$ e $y$. En algunos casos para estas funciones existen también *las derivadas parciales de segundo orden también* llamadas *derivadas parciales segundas*:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xx}(x, y), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yx}(x, y), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x, y).$$

Continuando de tal modo, podemos determinar *las derivadas parciales de tercer orden* (*derivadas parciales terceras*), etc.

Se determinan y se escriben análogamente las derivadas parciales sucesivas (de órdenes superiores) de funciones de tres o más variables.

Se puede demostrar **el teorema** siguiente: *si todas las derivadas parciales examinadas como funciones de sus variables independientes son continuas, el resultado de la derivación parcial no depende del orden en el cual se efectúan las operaciones.*

En particular, por ejemplo, si las derivadas $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$ son continuas, tiene lugar la igualdad

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}.$$

Sin dar la demostración general verifiquemos la exactitud de esta última afirmación mediante un ejemplo.

EJEMPLO. Sea

$$z = x^y \quad (x > 0).$$

Tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = yx^{y-1} \ln x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = yx^{y-1} \ln x.$$

Se ve que para la función $z$ dada, se cumple la igualdad

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x},$$

como era de esperar.

## § 9. Criterio de la diferencial total

Si una función $u = f(x, y)$ es derivable, su diferencial total es de forma (la fórmula 5 del § 4)

$$du = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy, \tag{1}$$

donde

$$P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{y} \quad Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2}$$

Surge el problema inverso: ¿bajo qué condiciones la expresión diferencial

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy, \tag{3}$$

donde las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son continuas, junto con sus derivadas primeras, es la diferencial total de una función $u$?

La condición necesaria de diferencial total se da por el teorema siguiente.

TEOREMA. *Para que la expresión diferencial* (3) *sea en un dominio G la diferencial total de una función $u = F(x, y)$, es necesario que* *en este dominio se cumpla la identidad*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y} \quad ((x, y) \in G) \tag{$\alpha$}$$

**(condicion de diferencial total).**

DEMOSTRACIÓN. Sea (3) la diferencial total de la función $u = F(x, y)$. Tenemos

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy. \tag{4}$$

En virtud de la unicidad de la diferencial (el corolario del teorema 1 del § 4) obtendremos

$$P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{5}$$

Derivando la primera igualdad (5) respecto a $y$, y la segunda respecto a $x$ tendremos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}. \tag{6}$$

Puesto que para las derivadas mixtas continuas el resultado de la derivación no depende del orden de su realización de las (6) obtendremos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

es decir, la condición ($\alpha$) se cumple.

COROLARIO. *Si la condición ($\alpha$) no se cumple, la expresión $P(x, y) \times dx + Q(x, y)\, dy$ no es en el dominio $G$ la diferencial total de cierta función.*

OBSERVACIÓN. Se puede demostrar que para un dominio rectangular finito o infinito

$$G = \{a < x < b;\ A < y < B\}$$

el cumplimiento de la condición ($\alpha$) es también suficiente para que exista una función $u$ tal, que

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = du.$$

EJEMPLO. ¿Son las expresiones

$$y\, dx - x\, dy \quad \text{e} \quad y\, dx + x\, dy$$

diferenciales totales de ciertas funciones?

Para la primera expresión $P = y$, $Q = -x$. De donde

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$$

y, por consiguiente, la condición de diferencial total no se cumple, es decir, no existe una función cuya diferencial total sea igual a $y\, dx - x\, dy$.

Para la segunda expresión obtenemos $P = y$, $Q = x$ y, por consiguiente,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

La condición de diferencial total se cumple. Debido a que un plano puede ser considerado como un dominio rectangular infinito, entonces $y\,dx + xy$ es la diferencial total de una cierta función. Efectivamente

$$y\,dx + x\,dy = d\,(xy).$$

## § 10. Máximo y mínimo de una función de varias variables

Recordemos (véase el § 3 del cap. VII) que por *entorno de un punto* del plano se entiende el interior de todo rectángulo que rodea este punto, excepto el propio punto (entorno pinchado).

De modo análogo, por entorno de un punto del espacio se entiende el interior de todo paralelepípedo que rodea este punto excepto el propio punto.

DEFINICION. *Llámase* ***máximo*** *(estricto) de una función $f(x, y)$ un valor $f(x_1, y_1)$ tal de esta función, que supera a todos los valores $f(x, y)$ que toma esta función en los puntos de un entorno del punto $(x_1, y_1)$* [1]. (Las dimensiones lineales de este entorno pueden ser muy pequeñas).

*De un modo análogo, se llama* ***mínimo*** *(estricto) de una función $f(x, y)$ un valor $f(x_2, y_2)$ tal, de esta función, que es el menor de todos los valores $f(x, y)$ tomados por esta función en los puntos de un cierto entorno del punto $(x_2, y_2)$.*

El máximo o el mínimo de una función $f(x, y)$ se llama *extremo* de esta función y el punto donde la función pasa por un extremo se llama *punto de extremo* (respectivamente, *punto de máximo* o *punto de mínimo* de la función).

Se define de modo análogo el extremo de una función de tres variables $f(x, y, z)$, etc.

Indiquemos la **condición necesaria** del extremo de una función de varias variables.

TEOREMA. *En el punto de extremo de una función de varias variables, cada una de sus derivadas parciales primeras es igual a cero o no existe.*

DEMOSTRACION. Examinemos para simplificar una función de dos variables $u = f(x, y)$ y sea $f(x_0, y_0)$ su máximo (los razonamientos para el mínimo de la función son análogos).

Fijemos una de sus variables, por ejemplo $y$ suponiendo que $y = y_0$. Entonces obtenemos una función de una variable

$$u_1 = f(x, y_0)$$

---

[1]) Por el sentido de su definición, la función $f(x, y)$ debe tener sentido sobre un cierto conjunto de puntos de este entorno.

que tendrá, evidentemente, un máximo cuando $x = x_0$. De donde según la teoría del extremo de la función de una variable (el § 7 del cap. XI) se deduce que

$$\left(\frac{du_1}{dx}\right)_{x=x_0} = f'_x(x_0, y_0) = 0$$

o que $f'_x(x_0, y_0)$ no existe.

Se demuestra exactamente del mismo modo que $f'_y(x_0, y_0) = 0$ ó que $f'_y(x_0, y_0)$ no existe.

COROLARIO. *En el punto de extremo $M_0(x_0, y_0)$ de una función derivable $f(x, y)$ se cumplen las igualdades*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

De modo análogo, si una función derivable $f(x, y, z)$ tiene un extremo en el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$, entonces

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

OBSERVACIÓN 1. El punto en el cual las derivadas parciales primeras de una función son iguales a cero o no existen, se llama *punto crítico* de esta función.

Entonces, el teorema es equivalente a la afirmación siguiente: *una función de varias variables no puede tener extremos que no sean puntos críticos.*

OBSERVACIÓN 2. Las condiciones de existencia del extremo de una función de varias variables, que acabamos de establecer, no son en general suficientes, es decir, si, por ejemplo, en un cierto punto todas las derivadas parciales primeras de la función son iguales a cero, esto no significa que la función tiene obligatoriamente un extremo en este punto.

EJEMPLO 1. Para la función $f(x, y) = xy$ tenemos

$$f'_x(x, y) = y, \quad f'_y(x, y) = x.$$

Por consiguiente,

$$f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0.$$

Sin embargo, el punto $O$ (0, 0) no es un punto de extremo de la función, puesto que en todo entorno del punto $O$ existen los puntos $A$ $(\varepsilon, \varepsilon)$ y $B$ $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$ arbitrario) tales que

$$f(A) = \varepsilon^2 > 0 = f(0) \quad \text{y} \quad f(B) = -\varepsilon^2 < f(0).$$

EJEMPLO 2. De todos los paralelepípedos rectangulares cuya suma de tres dimensiones es igual a una magnitud positiva dada $a$ se pide hallar el paralelepípedo de volumen máximo.

Designemos las dimensiones del paralelepípedo rectángulo examinado por $x$, $y$, y $z$ ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$). Su volumen $V$ se expresa así: $V = xyz$. Además, según los datos del problema tenemos

$$x + y + z = a.$$

Expresando $z$ en función de $x$ e $y$ a partir de la última ecuación e introduciendo este valor de $z$ en la expresión de $V$, obtendremos

$$V = xy(a - x - y),$$

donde las variables $x$ e $y$ son independientes.

Calculamos las derivadas parciales de $V$ respecto a $x$ e $y$:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = ay - 2xy - y^2, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = ax - x^2 - 2xy.$$

Igualando a cero estas derivadas parciales tendremos

$$\left.\begin{aligned} ay - 2xy - y^2 = 0, \\ ax - x^2 - 2xy = 0. \end{aligned}\right\}$$

Como las dimensiones $x$ e $y$ para el paralelepípedo buscado no son iguales a cero, podemos simplificar nuestras ecuaciones reduciéndolas. Después de algunas transformaciones simples obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x + y = a, \\ x + 2y = a. \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo este sistema por el procedimiento habitual hallamos $x = \frac{a}{3}$ e $y = \frac{a}{3}$. Por consiguiente, $z = \frac{a}{3}$.

Así, el paralelepípedo buscado es un cubo cuya arista es igual a $\frac{a}{3}$ (se puede demostrar con rigurosidad que su volumen en estas condiciones es máximo).

## § 11. Extremo absoluto de una función

Examinemos un conjunto $G$ de puntos del plano (o del espacio). El punto $M$ se llama *interior* para el conjunto $G$, si este conjunto contiene este punto junto con cierto entorno suyo (fig. 216).

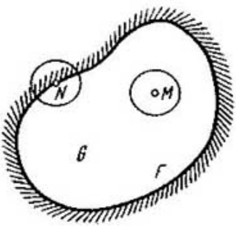


Fig. 216

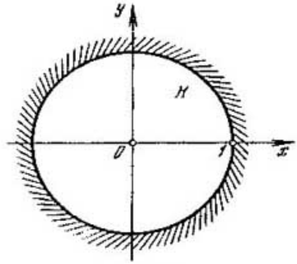


Fig. 217

El punto $N$ se llama *de frontera* para el conjunto $G$, si en cualquier entorno completo suyo, existen puntos tanto pertenecientes como no pertenecientes a $G$ (fig. 216). El propio punto $N$ no debe necesariamente pertenecer al conjunto $G$.

El conjunto de puntos de frontera de $G$ se llama *frontera* $\Gamma$ de $G$.

DEFINICIÓN 1. *Llamaremos al conjunto $G$ **dominio**, si todos sus puntos son interiores* [1]).

El conjunto $\overline{G} = G \cup \Gamma$, que contiene su frontera, se llama *dominio cerrado*.

Un dominio se llama *acotado*, si él se encuentra totalmente en el interior de un círculo (o de una esfera) de radio suficientemente grande.

EJEMPLO 1. El interior $K$ del círculo (fig. 217)

$$x^2 + y^2 < 1$$

es un dominio; su frontera es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$; el círculo con su frontera, es decir, el conjunto de puntos para los cuales $x^2 + y^2 \leqslant 1$ es un dominio cerrado.

DEFINICIÓN 2. *El valor más pequeño o más grande de una función en un dominio dado se llama **extremo absoluto** (respectivamente mínimo absoluto o máximo absoluto) de la función en este dominio.*

Tiene lugar el **teorema de Weierstrass**: *una función continua en un dominio cerrado y acotado, obtiene en este dominio su valor máximo y su valor mínimo.*

TEOREMA 1. *El extremo absoluto de una función en un dominio dado se alcanza bien en el punto crítico de la función perteneciente a este dominio, o bien en el punto de frontera del dominio.*

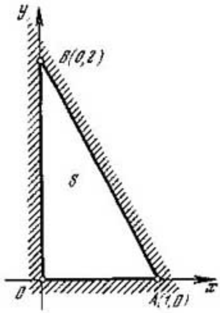

Fig. 218

EJEMPLO 2. Hallar el extremo absoluto de la función $z = xy$ en el dominio triangular $S$ con vértices $O\ (0, 0)$, $A\ (1, 0)$, $B\ (0, 2)$ (fig. 218).

Tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

De aquí hallamos el punto crítico $O\ (0, 0)$ de coordenadas $x = 0$, $y = 0$ pertenecientes al dominio $S$.

Estudiemos el comportamiento de la función $z$ sobre la frontera $\Gamma = OABO$ del dominio $S$.

En el segmento $OA$ tenemos $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Por eso $z = 0$.

De modo análogo, sobre el segmento $OB$: $x = 0$ $(0 \leqslant y \leqslant 2)$ obtenemos $z = 0$.

Por último, el segmento $AB$ tiene la ecuación $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1$ ó $y = 2 - 2x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. De aquí

$$z = xy = 2x - 2x^2.$$

[1]) Semejante conjunto se llama generalmente *abierto*.

Tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2-4x=0$$

para $x=\frac{1}{2}$, de donde $y=1$.
Puesto que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-4<0,$$

en el punto $D\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ la función $z$ alcanza su valor máximo $M=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$ en el segmento $AB$.

Y bien, el menor valor de la función $z$ en el dominio $S$ es $m=0$ y éste se realiza en los puntos de los segmentos $OA$ y $OB$ que constituyen una parte de la frontera $\Gamma$ del dominio $S$; el mayor valor de esta función $M=\frac{1}{2}$ se alcanza en el punto $D\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ perteneciente al segmento $AB$ de la frontera $\Gamma$.

## § 12. Establecimiento de fórmulas empíricas por el método de cuadrados mínimos

En las ciencias naturales y en particular en las biológicas y físicas se utilizan fórmulas empíricas basadas en los datos de la experiencia y observaciones. Uno de los mejores métodos para obtener tales fórmulas es **el método de cuadrados mínimos.** Expondremos la idea del mismo limitándonos al caso de la dependencia lineal de dos magnitudes.

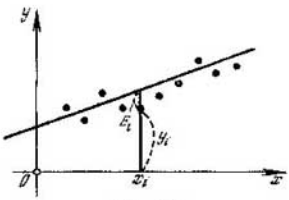

Fig. 219

Supongamos que queremos establecer la relación entre dos magnitudes $x$ e $y$ (por ejemplo, entre la temperatura y el alargamiento de una barra metálica). Efectuamos las mediciones correspondientes (por ejemplo, $n$ mediciones) y comparamos los resultados en la tabla

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_n$ |
| $y$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | ... | $y_n$ |

Consideramos $x$ e $y$ como las coordenadas rectangulares de los puntos del plano. Supongamos que los puntos con las coordenadas correspondientes tomados en nuestra tabla están casi situados sobre una línea recta, por ejemplo, tal como se indica en la fig. 219. Es natural que pueda considerarse en este caso que las magnitudes $x$ e $y$ están ligadas por una **dependencia lineal** aproximada, es decir que $y$ es una función lineal de $x$ expresada por la fórmula

$$y = ax + b, \tag{1}$$

donde $a$ y $b$ son coeficientes constantes a determinar. La fórmula (1) puede ser presentada así:

$$ax + b - y = 0. \tag{2}$$

Como los puntos $(x, y)$ están aproximadamente situados sobre nuestra recta, las fórmulas (1) y (2) son aproximadas. Por consiguiente, introduciendo en la fórmula (2) en vez de $x$ e $y$ sus valores $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_n, y_n$ tomados de la tabla precedente, obtendremos un sistema de igualdades

$$\left.\begin{array}{l} ax_1 + b - y_1 = \varepsilon_1, \\ ax_2 + b - y_2 = \varepsilon_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ ax_n + b - y_n = \varepsilon_n, \end{array}\right\} \tag{3}$$

donde

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \tag{4}$$

son ciertos números, generalmente distintos de cero, a los que llamaremos *errores*.

Hace falta elegir los coeficientes $a$ y $b$ de tal modo que estos errores sean en valor absoluto, lo más pequeños posible [1]). *El método de cuadrados mínimos* consiste en lo siguiente: hace falta elegir los coeficientes $a$ y $b$ de tal modo que **la suma de cuadrados de los errores sea la más pequeña posible** , es decir, es necesario que la suma

$$U = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2 \tag{5}$$

sea la menor, si esta suma mínima de cuadrados resulta pequeña, entonces los propios errores serán pequeños en valor absoluto.

OBSERVACIÓN. Sería posible tratar de tomar en vez de la suma de los cuadrados, la suma de estos errores y de buscar los coeficientes $a$ y $b$ de modo que esta suma sea la más pequeña posible en valor absoluto. Sin embargo es evidente que este procedimiento no asegurará la pequeñez de errores, porque estos últimos pueden tener signos contrarios. Esto no puede ocurrir si el problema se resuelve mediante el método de cuadrados mínimos.

Reemplazando en la expresión (5) los números (4) por sus valores tomados en las igualdades (3) obtendremos la magnitud

---

[1]) Este problema es el caso particular más simple del problema general de la «mejor aproximación de funciones» que fue planteado y resuelto, en condiciones sumamente amplias, por P. L Chébishev, gran matemático ruso.

siguiente:

$$U = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \dots \\ \dots + (ax_n + b - y_n)^2. \tag{6}$$

En la fórmula (6) los números $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$, $\dots$, $x_n$, $y_n$ son obtenidos como resultado de mediciones y ellos se examinan como datos; en lo que se refiere a los coeficientes $a$ y $b$, éstos son magnitudes desconocidas que deben ser determinadas.

Y bien, $U$ puede ser considerada como una función de dos variables $a$ y $b$. Elijamos los coeficientes $a$ y $b$ de tal modo que la función $U$ obtenga el valor más pequeño posible. De acuerdo con el párrafo precedente hace falta que se cumplan las condiciones

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial b} = 0.$$

Calculando estas derivadas parciales y multiplicándolas, para la comodidad de cálculos, por el factor $\frac{1}{2}$ tendremos

$$\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial a} = (ax_1 + b - y_1)\, x_1 + (ax_2 + b - y_2)\, x_2 + \dots + (ax_n + b - y_n)\; x_n,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial b} = (ax_1 + b - y_1) + (ax_2 + b - y_2) + \dots + (ax_n + b - y_n).$$

De donde, anulando estas derivadas parciales obtendremos un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas $a$ y $b$:

$$\left.\begin{aligned} (ax_1 + b - y_1)\, x_1 + (ax_2 + b - y_2)\, x_2 + \dots + (ax_n + b - y_n)\, x_n = 0, \\ (ax_1 + b - y_1) + (ax_2 + b - y_2) + \dots + (ax_n + b - y_n) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Efectuando transformaciones algebraicas habituales simplificamos este sistema:

$$a\,(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + b\,(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \\ = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n,$$

$$a\,(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + b\cdot n = y_1 + y_2 + \dots + y_n,$$

o, introduciendo abreviaciones, tenemos

$$\left.\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Esta es la forma definitiva de un sistema llamado *sistema normal* del método de cuadrados mínimos. A partir del mismo hallamos $a$ y $b$, para luego introducirlos en la fórmula empírica

$$y = ax + b.$$

EJEMPLO. Sea que los resultados de las mediciones de las magnitudes $x$ e $y$ y los resultados del tratamiento de las mismas, se indican en la tabla siguiente:

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $x_i y_i$ | $\varepsilon_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −2 | 0,5 | 4 | −1,0 | −0,175 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0,175 |
| 3 | 1 | 1,5 | 1 | 1,5 | 0,100 |
| 4 | 2 | 2 | 4 | 4 | 0,025 |
| 5 | 4 | 3 | 16 | 12 | −0,125 |
| $\sum$ | 5 | 8,0 | 25 | 16,5 | 0 |

Supongamos que

$$y = ax + b$$

El sistema normal (7) es de la forma

$$\left.\begin{aligned} 25a + 5b &= 16,5 \\ 5a + 5b &= 8. \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo estas ecuaciones obtendremos

$$a = 0,425, \qquad b = 1,175.$$

De donde

$$y = 0,425x + 1,175.$$

En la última columna de la tabla se indican los errores correspondientes.

## EJERCICIOS

1. Determinar los dominios de existencia de las funciones:
a) $u = x\sqrt{1-y^2}$; b) $u = \sqrt{x^2+y^2-1}$; c) $u = \ln(x+y)$.

2. Construir las líneas de nivel de las siguientes funciones:

a) $z = x - y$; b) $z = \dfrac{y}{x}$; c) $z = x^2 - y^2$; d) $z = y - x^2$.

3. Construir las superficies de nivel de las funciones:
a) $u = x + y + z$; b) $u = y^2 + z^2$.

4. Hallar las derivadas parciales primeras y la diferencial total de siguientes funciones:

a) $u = x^2 - 2xy - y^2$; b) $u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; c) $u = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

5. Hallar la derivada $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ de la función

$$u = \frac{2x}{\sqrt{y}}$$

en el punto $M_0$ (1, 1) en la dirección $l$ que forma un ángulo $\alpha$ con el eje $Ox$, si $\alpha = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi$. ¿Cuál es el valor de $|\operatorname{grad} u(M_0)|$?

6. Las isotermas de temperatura $u$ tienen la forma

$$x^2 + y^2 = C.$$

Sabiendo que para la isoterma que pasa por el punto $A$ (3, 4) la función $u = 30\ °C$ y para la isoterma que pasa por el punto $B$ (5, 1) la función $u = 35\ °C$, se pide calcular aproximadamente $|\operatorname{grad} u(A)|$, si las distancias lineales están dadas en km.

7. Hallar las derivadas segundas de las funciones:

a) $u = x \ln y + \sqrt{\operatorname{sen} x}$; b) $u = \frac{xy}{z^2}$; c) $u = \ln(x + y^2)$; d) $u = \sqrt[3]{x} + \operatorname{arctg} y$; e) $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$.

8. Comprobar que $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$, si $u = x \arcsen \sqrt{\frac{x}{y}}$.

9. La masa de un cuerpo en el aire es $m = 0{,}52$ kg $+ 0{,}02$ kg y la masa del cuerpo en el agua es $m_1 = 0{,}31$ kg $+ 0{,}01$ kg. ¿Con qué precisión se puede determinar la densidad del cuerpo?

10. ¿Cuáles de las expresiones dadas son las diferenciales totales

a) $dx + y\,dy$; b) $\frac{dx}{y^2} - \frac{2x\,dy}{y^3}$ $(y > 0)$, c) $\frac{y\,dx - x\,dy}{(x+y)^2}$ $(x > 0,\ y > 0)$?

11. ¿Cuál es la condición para que la suma de tres sumandos positivos $x$, $y$ y $z$ sea mínima, si el producto de estos sumandos es una constante igual a $a$?

12. Inscribir en una semiesfera de radio $a$ un paralelepípedo rectangular de volumen máximo.

13. En un cono circular recto, con radio de la base $r$ y altura $h$, se pide inscribir un paralelepípedo rectangular de volumen máximo.

14. Los resultados de las mediciones de las magnitudes $x$ e $y$ se indican en la siguiente tabla:

| $x$ | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 150 | 100 | 40 | 0 | $-60$ | $-100$ |

Suponiendo que las magnitudes $x$ e $y$ están ligidas por una dependencia lineal

$$y = ax + b,$$

determinar los coeficientes $a$ y $b$ aplicando el método de los cuadrados mínimos.

15. Reemplazar aproximadamente la parábola $y = x^2$ en el intervalo $2 \leqslant x \leqslant 4$ por una recta $Y = kx + b$ de tal modo que el «error cuadrático medio» $\omega = \int_2^4 (y - Y)^2\, dx$ sea mínimo.

16. Hallar el extremo absoluto de la función

$$u = 3x + 4y + 5$$

en el dominio $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

INDICACIÓN. Utilizar las ecuaciones paramétricas de la frontera de este dominio.

## *Capítulo XXI*

# Series

### § 1. Ejemplos de series infinitas

En este capítulo estudiaremos las propiedades de **las series infinitas,** así como **el desarrollo en series de funciones trigonométricas y potenciales.**

Un ejemplo de serie infinita estudiado en el álgebra elemental es la progresión geométrica infinitamente decreciente [1])

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots, \tag{1}$$

donde $|q| < 1$. Aquí cada término se obtiene a partir del precedente de acuerdo con una ley determinada, a saber: cada término es igual al precedente multiplicado por la razón $q$ de la progresión. Por consiguiente el término $n$-ésimo, llamado *término general* de la progresión se expresa por la fórmula

$$u_n = aq^{n-1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Otro ejemplo de serie infinita está dado por *la serie armónica*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots, \tag{2}$$

donde su $n$-ésimo término es $u_n = \frac{1}{n}$.

Existen también series formadas por funciones, por ejemplo

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n} + \ldots, \tag{3}$$

donde $n$-ésimo término es igual a

$$u_n = \frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n} = \frac{x^n}{n!} \text{ [2])}.$$

La ley de formación de los términos de una serie es dada por su $n$-ésimo término, llamado **término general de la serie.** Conociendo la fórmula del término general de una serie se puede determinar cualquier término de la misma.

---

[1]) De un modo más preciso, habría que decir que es una serie compuesta por términos de una progresión geométrica infinitamente decreciente. Para abreviar la serie de forma (1) será llamada simplemente «progresión geométrica».

[2]) El símbolo $n!$ (se lee «factorial de $n$») designa el producto de todos los números naturales no mayores de $n$.

Surge un problema: **estudiar las propiedades de una serie suponiendo que su $n$-ésimo término es conocido**

Observamos que la teoría de las series tiene numerosas aplicaciones prácticas debido al hecho de que una función dada puede ser representada en forma de una serie de funciones más simples, por ejemplo, de una serie de polinomios que permite hallar fácilmente el valor aproximado de la función para un valor dado de su argumento.

## § 2. Convergencia de una serie

Demos la noción general de una **serie infinita**. Supongamos que tenemos una sucesión infinita de números o funciones formada de acuerdo con una ley determinada y vinculada de un modo puramente formal por el signo «+»

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{1}$$

Semejante expresión se denomina *serie infinita* o simplemente *serie*, y los sumandos $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ se llaman *términos* de esta serie. Si los términos de una serie son números, ella se llama *numérica*; si ellos son funciones, se tiene una serie *de funciones*.

Notemos que el estudio de las series de funciones se reduce al de las numéricas. Efectivamente, si

$$u_n = f_n(x) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

obtendremos para cada valor fijo del argumento $x$ una serie numérica correspondiente (1) cuyas propiedades es necesario investigar.

El término $u_n$ de la serie (1), que ocupa el $n$-ésimo lugar contando del inicio, se llama *término general*. La serie (1) se considera **dada**, si es conocido su término general **expresado en función del número $n$**. Tales son, por ejemplo, las series (1), (2) y (3) del § 1, donde respectivamente,

$$u_n = aq^{n-1}, \quad u_n = \frac{1}{n}, \quad u_n = \frac{x^n}{n!}.$$

Considerando que la serie (1) está dada podemos formar las sumas parciales de la misma, es decir,

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1, \\ S_2 &= u_1 + u_2, \\ S_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n. \end{aligned}$$

Supongamos primeramente que la serie (1) es numérica. Examinemos dos casos.

I. La suma de los $n$ primeros términos $S_n$ de la serie (1), cuando el número de términos $n$ aumenta ilimitadamente, tiende hacia un límite finito $S$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

En este caso, se dice que la serie (1) es *convergente* y el número $S$ se llama *suma* de esta serie.

II. La suma de los $n$ primeros términos $S_n$ de la serie (1) crece ilimitadamente o no tiende hacia algún límite cuando el número de términos $n$ aumenta ilimitadamente. En este caso, se dice que la serie (1) es *divergente* y no tiene suma.

DEFINICIÓN. *Una serie numérica se llama* ***convergente***, *si existe un límite finito de la sucesión de sus sumas parciales, este límite se llama* ***suma de la serie***; *en el caso contrario la serie se llama* ***divergente***.

Si la serie (1) es una serie de funciones, es decir, si

$$u_n = f_n(x) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

la serie numérica correspondiente a cada valor fijo $x_0$ del argumento $x$

$$f_1(x_0) + f_2(x_0) + \ldots + f_n(x_0) + \ldots \tag{1'}$$

puede ser convergente o divergente. El punto $x_0$ se llama respectivamente *punto de convergencia* o *punto de divergencia* de la serie de funciones dada y el conjunto de puntos de convergencia se llama *dominio de convergencia* de ella.

Si $u_n = f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ y si la serie de funciones (1) converge en todo punto $x$ de cierto conjunto, esta serie se llama *convergente sobre este conjunto* y la función $S = S(x)$, definida para cada valor considerado de $x$ por la fórmula

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

se llama *suma de esta serie* en el conjunto dado.

Si la serie (1) converge, la diferencia entre la suma $S$ y su suma parcial $S_n$

$$R_n = S - S_n$$

se llama el *resto n-ésimo de la serie*. El resto $R_n$ de la serie representa el *error* que se obtiene, si para un valor aproximado de la suma de serie $S$ se toma la suma $S_n$ de sus $n$ primeros términos.

Como la suma $S$ es el límite de la sucesión $S_n$, es evidente que

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} (S - S_n) = 0.$$

Por eso, *si se toma un número suficientemente grande de términos de una serie convergente, se puede calcular su suma con el grado de precisión deseado.*

De aquí resulta claro que el primer problema fundamental de la teoría de las series consiste en la investigación **de la convergencia de la serie**. El cálculo de la suma de una serie convergente es un problema de orden secundario porque después de establecer la convergencia de una serie, en la mayoría de los casos prácticamente importantes, es fácil hallar el valor aproximado de su suma.

Aclaremos las nociones de convergencia y de divergencia de series por medio de algunos ejemplos.

EJEMPLO 1. Examinemos **la progresión geométrica infinita**

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots, \tag{2}$$

donde $a \neq 0$.

Se sabe que $S_n$ es la suma de los $n$ primeros términos de la progresión geométrica, expresada por la fórmula

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \cdot q^n.$$

Aquí es necesario examinar por separado cuatro casos.

1) Sea $|q| < 1$. En este caso $q^n$ tiende a cero cuando $n$ crece infinitamente y, por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}.$$

En este caso, la serie (2) converge y su suma es igual a $S = \frac{a}{1-q}$.

2) Sea $|q| > 1$. En este caso cuando $n$ aumenta infinitamente la potencia $q^n$ crece también ilimitadamente en valor absoluto y, por consiguiente, crece ilimitadamente la suma de $n$ primeros términos $S_n$. Por eso la serie (2), en este caso, diverge y no tiene suma.

3) Sea $q = 1$. La serie (2), en este caso, toma la forma siguiente

$$a + a + \ldots + a + \ldots \quad (a \neq 0).$$

Es fácil ver que $S_n = na$ y, por consiguiente, cuando $n$ crece ilimitadamente, la suma $S_n$ también crece ilimitadamente. Por eso la serie (2), en este caso, diverge.

4) Sea $q = -1$. En este caso la serie (2) toma la forma siguiente

$$a - a + a - a + \ldots + (-1)^{n-1} a + \ldots$$

La magnitud $S_n$ será igual a cero o a $a$, según sea $n$ par o impar. Está claro que para $a \neq 0$ la suma $S_n$ no tiende a ningún límite cuando $n$ crece indefinidamente. En este caso la serie (2) es divergente.

Por consiguiente, *la progresión geométrica infinita* (2) *es convergente, si y sólo si, su razón en valor absoluto es inferior a la unidad*: $|q| < 1$.

EJEMPLO 2. Sea que tenemos la serie

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots \tag{3}$$

Mostremos que esta serie converge. Tomemos la suma de sus primeros $n$ términos:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Es fácil ver que los sumandos pueden ser representados así:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\quad \frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5},\ \ldots,\ \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Por eso

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

De donde

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} S_n=1$$

De este modo, la serie (3) es convergente y su suma es igual a 1.

Las propiedades ulteriores de las series se refieren a las series numéricas, si no se menciona lo contrario.

Indiquemos ahora algunas propiedades elementales de las series.

TEOREMA 1. *La convergencia de una serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *no se alterará, si todos sus términos se multiplican por un mismo número k distinto de cero; además, para las sumas de estas series se cumple la igualdad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n=k\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

La demostración de este teorema se deduce directamente del paso al límite cuando $N\to\infty$ en la igualdad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n=k\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Se llama *suma* (*diferencia*) de dos series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, respectivamente, la serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n\pm v_n).$$

TEOREMA 2. *La suma* (*diferencia*) *de dos series convergentes es una serie convergente tal, que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n\pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty} v_n. \tag{4}$$

Efectivamente, puesto que $\sum\limits_{n=1}^{N} (u_n\pm v_n)=\sum\limits_{n=1}^{N} u_n\pm\sum\limits_{n=1}^{N} v_n$ para todo $N$ finito, se obtiene, en el límite cuando $N\to\infty$, la igualdad (4).

## § 3. Criterio necesario de convergencia de una serie

TEOREMA *Si la serie*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n + \ldots$$

*es convergente, su n-ésimo término $u_n$ tiende a cero cuando el rango de este término crece ilimitadamente.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

y

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n.$$

De aquí,

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Como la serie dada es convergente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ y $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$.

De aquí,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

lo que era necesario demostrar.

COROLARIO *Si el n-ésimo término de una serie no tiende a cero cuando su rango n crece ilimitadamente, esta serie es divergente.*

El criterio de convergencia demostrado es necesario pero, hablando en general, no es suficiente. Se pueden indicar series donde el término general $u_n$ tiende a cero cuando $n \to \infty$, pero la serie, pese a todo, es divergente.

EJEMPLO Examinemos la serie armónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

El término general de esta serie, $u_n = \frac{1}{n}$, tiende a cero cuando $n$ crece ilimitadamente. Sin embargo, mostremos que la serie (1) es divergente. Para eso tomemos la suma de los $2^m$ primeros términos de la serie (1) y agrupémoslos del modo siguiente:

$$S_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{2 \text{ términos}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{2^2 \text{ términos}} +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right)}_{2^3 \text{ términos}} + \ldots$$

$$\ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right)}_{2^{m-1} \text{ términos}}.$$

Es fácil ver que

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+$$
$$+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{2}{2^{m-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^m}>\underbrace{\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^m}+\ldots+\frac{1}{2^m}}_{2^{m-1}\ \text{términos}}=\frac{2^{m-1}}{2^m}=\frac{1}{2}.$$

De este modo, la suma de los términos entre paréntesis es superior a $\frac{1}{2}$. Como el número total de paréntesis, sin contar los dos primeros términos, es evidentemente igual a $m-1$,

$$S_{2^m}>1+\frac{m}{2}.$$

Si el número de términos $n=2^m$ en la suma $S_{2^m}$ crece ilimitadamente, el exponente $m$ crece también ilimitadamente. Por eso $S_{2^m}$ tiende a infinito y, por consiguiente, la serie armónica es divergente.

De este modo el criterio necesario de convergencia que acabamos de examinar no permite, en general, establecer si una serie dada es convergente o divergente. Pasemos ahora a formular criterios que permiten en una serie de casos dar una respuesta precisa acerca de la convergencia o divergencia de la serie dada.

## § 4. Criterio de comparación de series

Para la demostración de los teoremas que siguen necesitaremos el lema siguiente.

LEMA *Si en una serie*

$$u_1+u_2+\ldots+u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\ldots \tag{1}$$

*se suprime un número finito de primeros términos, por ejemplo, p términos, se obtendrá una serie*

$$u_{p+1}+u_{p+2}+u_{p+3}+\ldots \tag{2}$$

*que converge (o diverge) simultáneamente con la serie* (1).

DEMOSTRACION. Designemos por $Q$ la suma de los términos suprimidos

$$Q=u_1+u_2+\ldots+u_p.$$

Sea $S_n$ la suma de los $n$ primeros términos de la serie (1) y $S'_n$ la suma de los $n$ primeros términos de la serie (2). En este caso, resulta evidentemente que $S_{n+p} = Q + S'_n$. De aquí se tiene $S'_n = S_{n+p} - Q$.

Supongamos que la serie (1) es convergente, y sea $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ y, por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+p} = S.$$

En este caso

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = S - Q$$

y, por consiguiente, la serie (2) es también convergente.

Supongamos ahora que la serie (2) es convergente y sea $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = S'$; entonces

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n+p} = S' + Q.$$

Por eso, la serie (1) es también convergente.

Acabamos de demostrar que de la convergencia de una de nuestras series se deduce la convergencia de la otra, y viceversa.

El lema queda totalmente demostrado.

COROLARIO 1. *Al investigar una serie en cuanto a su convergencia se puede despreciar un número finito de términos suyos.*

COROLARIO 2. *Si la serie* (1) *es convergente y* $S$ *es su suma, el resto n-ésimo de esta serie* $R_n = S - S_n$, *es la suma de la serie* $u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots$, es decir,

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots$$

Demostremos ahora el teorema siguiente.

CRITERIO DE COMPARACIÓN DE SERIES. *Si los términos de una serie*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{3}$$

*son positivos (o más exactamente no negativos) y no superan los términos correspondientes de la serie convergente*

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots, \tag{4}$$

*la serie dada* (3) *es también convergente.*

DEMOSTRACIÓN. Introduzcamos las designaciones

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$
$$S'_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n.$$

Puesto que la serie (4) es convergente, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = S',$$

donde $S'$ es la suma de la serie (4). De acuerdo con los datos del teorema se cumplen las desigualdades $0 \leqslant u_1 \leqslant v_1$, $0 \leqslant u_2 \leqslant v_2$, ... ..., $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, ..

De aquí se deduce que

$$S_n \leqslant S'_n \leqslant S'.$$

Puesto que los términos de la serie (3) son positivos, cuando $n$ aumenta, la suma $S_n$ crece monótonamente, permaneciendo siempre inferior a $S'$. Como se sabe (§ 10 del cap. VII) *toda sucesión acotada creciente monótonamente, tiene límite.* Por eso, $S_n$ tiende a un límite finito, cuando el número $n$ crece ilimitadamente y, por consiguiente, la serie (3) es convergente.

COROLARIO. *Si los términos de una serie no son menores que los términos correspondientes de otra serie de términos positivos* [1]) *y esta segunda serie es divergente, la primera serie también es divergente.*

En efecto, si la primera serie fuese convergente, la segunda serie sería también convergente en virtud del teorema, lo que contradice nuestro planteamiento.

OBSERVACIÓN. En virtud del lema, el criterio de comparación de series (3) y (4) y su corolario, siguen siendo válidos, si las desigualdades correspondientes entre sus términos se verifican a partir de un cierto número ($n \geqslant N$).

Apliquemos este criterio a la demostración de la convergencia de ciertas series, comparándolas con las series cuya convergencia ya ha sido establecida.

EJEMPLO 1. Examinemos la serie

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots \tag{5}$$

Después de suprimir el primer término, la comparamos con la serie convergente (3) del § 1:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

Es evidente que

$$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot 2},\ \frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot 3},\ \ldots,\ \frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)},\ \ldots$$

Entonces, de acuerdo con el lema y el criterio de comparación, la serie (5) es convergente.

Luego, de la comparación con la serie (5) se deduce que la serie

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots$$

es convergente, si $p > 2$. Se puede demostrar que esta última serie es convergente cuando $p > 1$ y es divergente cuando $p \leqslant 1$.

[1]) Más exactamente, de términos no negativos.

EJEMPLO 2. Examinemos la serie

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots \tag{6}$$

Puesto que $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}$ $(n=2, 3, \ldots)$, la comparación con la serie armónica (§ 3) muestra que la serie (6) es divergente.

## § 5. Criterio de convergencia de d'Alembert

Existen numerosos criterios de convergencia de series, que permiten establecer la convergencia o la divergencia de una serie dada según el comportamiento de sus coeficientes. Examinemos uno de ellos.

CRITERIO DE CONVERGENCIA D'ALEMBERT. *Sean todos los términos de la serie*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

*positivos y supongamos que durante un crecimiento ilimitado del número n existe el límite de la relación del $(n+1)$-ésimo término respecto al n-ésimo término y es igual a un número l, es decir,* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$.

*En este caso*

1°. *Si este límite l es inferior a la unidad, la serie es convergente.*

2°. *Si el límite l es superior a la unidad, la serie es divergente.*

3°. *Si el límite l es igual a la unidad, el criterio no da una respuesta concreta sobre la convergencia o divergencia de la serie, es decir, en este caso la serie puede ser tanto convergente como divergente.*

DEMOSTRACION. Sea dada la serie

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots \tag{1}$$

compuesta de números positivos y sea

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l.$$

En este caso, para un $n$ suficientemente grande, es decir, no inferior a cierto número $N$, tenemos

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-l\right|<\varepsilon,$$

donde $\varepsilon$ es un número positivo tan pequeño como se quiera dado con anticipación. De aquí

$$-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}-l<\varepsilon,$$

ó

$$l-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<l+\varepsilon, \tag{2}$$

si $n\geqslant N$.

Examinemos por separado los tres casos.

1°. Sea $l < 1$. Podemos tomar el número $\varepsilon$ tan pequeño, que $l + \varepsilon$ será también inferior a 1; en este caso, al hacer $l + \varepsilon = q$ obtendremos

$$0 < q < 1.$$

En virtud de la desigualdad (2) tenemos $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$, o

$$u_{n+1} < u_n q,$$

además, esta última desigualdad se cumplirá si $n = N, N+1, N+2, \ldots$ Dando estos valores al número $n$ obtenemos la serie de desigualdades

$$\begin{aligned} &u_{N+1} < u_N q, \\ &u_{N+2} < u_{N+1} q < u_N q^2, \\ &u_{N+3} < u_{N+2} q < u_N q^3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Entonces, los términos de la serie

$$u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \ldots \tag{3}$$

son más pequeños que los términos correspondientes de la serie geométrica

$$u_N q + u_N q^2 + u_N q^3 + \ldots \tag{4}$$

Como la razón $q$ de la progresión (4) es inferior a la unidad, esta serie es convergente (ejemplo 1 del § 2). En este caso, en virtud del criterio de comparación y de la nota que lo acompaña, la serie (3) es convergente, al igual que la serie inicial (1).

2°. Sea ahora $l > 1$. Podemos tomar $\varepsilon > 0$ lo más pequeño posible de modo que el número $l - \varepsilon$ será también superior a la unidad. En este caso, a partir de un $n$ suficientemente grande tendremos, debido a la (2), $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, ó $u_{n+1} > u_n$, para $n = N, N+1, N+2, \ldots$

De aquí

$$u_N < u_{N+1} < u_{N+2} < \ldots$$

De este modo, a partir de un cierto número $N$ los términos de la serie (1) crecen cuando crecen sus números, por ser éstos positivos. Por consiguiente $u_n$ no tiende a cero cuando $n \to \infty$. Por eso en virtud del corolario del criterio necesario de convergencia (§ 3), la serie (1) es divergente y su término general no tiende a cero.

3°. Si $l = 1$, se puede mostrar mediante ejemplos que en algunos casos la serie es convergente y en otros, divergente. En este caso debemos recurrir al teorema de comparación o a otros criterios.

OBSERVACIÓN 1. Si la serie (1) es de funciones, es decir

$$u_n = f_n(x) > 0$$

y $l = l(x)$ es el límite correspondiente, nuestro esquema 1°, 2° y 3° resulta válido para cada $x$.

OBSERVACIÓN 2. De la demostración del criterio de d'Alembert para el caso 2°, resulta que si *para una serie determinada*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

*se cumple la desigualdad*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,$$

*el n-ésimo término $u_n$ de esta serie no tiende a cero cuando su número n crece ilimitadamente.*

EJEMPLO 1. Examinemos la serie

$$\frac{a}{1} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \ldots + \frac{a^n}{n} + \frac{a^{n+1}}{n+1} + \ldots,$$

donde $a$ es un número positivo.

Tenemos $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{n+1} : \frac{a^n}{n} = a \cdot \frac{n}{n+1}$ y por consiguiente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{n_n} = a \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = a \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = a.$$

Según el criterio de d'Alembert, la serie (5) es convergente cuando $0 < a < 1$ y es divergente cuando $a > 1$.

Si $a = 1$, el criterio de d'Alembert no da respuesta. Pero en este caso la serie (5) adquiere la forma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Esta es una serie armónica y, como hemos visto en el § 3, divergente.

EJEMPLO 2. Examinemos la serie

$$\frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \ldots$$

cuyo término general es

$$u_n = \frac{1000^n}{n!}.$$

Tenemos $u_{n+1} = \frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}$. De aquí,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1000^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 1000^n} = \frac{1000}{n+1}$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1000}{n+1} = 0.$$

Por eso esta serie es convergente. Notemos que en el comienzo de esta serie los términos crecen (¡hasta el 1000-ésimo término!) y luego decrecen rápidamente. Semejante serie es poco útil para los cálculos prácticos.

EJEMPLO 3. La serie

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

se caracteriza según el criterio de d'Alembert por el límite $l = 1$. Como se sabe (ejemplo 1 del § 4), esta serie es convergente.

## § 6. Convergencia absoluta

Los criterios suficientes de convergencia de series, analizados en los párrafos precedentes, se referían a series de términos positivos. Las series de términos negativos poseen propiedades análogas.

Examinemos ahora las series con algunos términos positivos y otros negativos o iguales a cero. Ellas se llaman *series de términos de signo variable.*

TEOREMA. *Si para una serie de términos de signo variable*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{A}$$

*converge la serie de los valores absolutos de estos términos*

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|, \tag{B}$$

*entonces la serie* $(A)$ *es convergente.*

DEMOSTRACION. Examinemos una serie auxiliar

$$(u_1+|u_1|)+(u_2+|u_2|)+\ldots+(u_n+|u_n|)+\ldots=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+|u_n|). \tag{C}$$

Puesto que

$$0\leqslant u_n+|u_n|\leqslant 2|u_n|$$

$(n=1, 2, \ldots)$ y la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2|u_n|) \tag{B'}$$

es convergente, en virtud de la convergencia de la serie (B), la serie (C) es también convergente de acuerdo con el criterio de comparación (§ 4). Pero nuestra serie (A) es la diferencia de dos series convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+|u_n|)-\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$$

y, por consiguiente, es una serie convergente.

El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. La afirmación contraria no es justa. Precisamente, *si la serie dada es convergente, la serie de valores absolutos de sus términos no es obligatoriamente convergente; esta última serie puede ser divergente.*

De este modo, todas las series convergentes se pueden dividir en dos clases.

La primera clase comprende las series convergentes para las cuales las series compuestas de valores absolutos de sus términos son también convergentes, ellas se llaman *series absolutamente convergentes.*

En la segunda clase se encuentran las series convergentes para las cuales las series compuestas de valores absolutos de sus términos son divergentes; ellas se llaman *series no absolutamente convergentes* o *series condicionalmente convergentes.*

DEFINICIÓN. *Una serie se llama* ***absolutamente convergente****, si son convergentes la propia serie, así como la serie compuesta de los valores absolutos de sus términos.*

*Una serie se llama* ***condicionalmente convergente****, si la propia serie es convergente, pero la serie compuesta de los valores absolutos de sus términos, es divergente.*

Por ejemplo, la serie convergente

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots$$

es **absolutamente convergente**, porque la serie compuesta de valores absolutos

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots,$$

es también convergente. $\Big($Las dos series son progresiones geométricas cuyas razones son, respectivamente, iguales a $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}\Big)$.

Por el contrario, la serie

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots,$$

es, como veremos después (véase el § 7), una **serie no absolutamente convergente**, porque la serie compuesta de los valores absolutos de sus términos

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots,$$

es divergente (serie armónica).

CRITERIO DE CONVERGENCIA ABSOLUTA DE UNA SERIE. *Sea que una serie*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{A}$$

*cumple la condición*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=l.$$

*En este caso:* 1) *si* $l < 1$, *la serie dada* $(A)$ *es absolutamente convergente*; 2) *si* $l > 1$, *la serie* $(A)$ *es divergente.*

En efecto, nuestra condición es el mismo criterio de d'Alembert aplicado a la serie de valores absolutos

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{B}$$

De donde se deduce que si $l < 1$, las dos series (A) y (B) son convergentes y, por consiguiente, la serie dada (A) es absolutamente convergente.

Al contrario, si $l > 1$, en virtud de la observación al criterio de d'Alembert, $|u_n|$ no tiende a cero cuando $n \to \infty$. En este caso, las dos series (A) y (B) son divergentes.

## § 7. Series alternadas. Criterio de convergencia de Leibniz

Llámase *serie alternada* a la de tipo

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + v_5 - v_6 + \ldots + (-1)^{n-1} v_n + \ldots\,^{1)}, \tag{1}$$

donde $v_n \geqslant 0$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, es decir, una serie de términos alternativamente positivos y negativos.

TEOREMA DE LEIBNIZ *Si los valores absolutos de los términos de una serie alternada* (1) *decrecen monótonamente cuando el número de ellos aumenta, es decir,*

$$v_1 \geqslant v_2 \geqslant v_3 \geqslant v_4 \geqslant \ldots \tag{2}$$

*y el n-ésimo término de la serie tiende a cero cuando su número n aumenta ilimitadamente, es decir,*

$$\lim_{n \to \infty} v_n = 0, \tag{3}$$

*entonces esta serie es convergente* (en general, no absolutamente).

DEMOSTRACIÓN. Tomemos la suma $S_{2m}$ de los $2m$ primeros términos de la serie (1) y escribámosla del modo siguiente

$$S_{2m} = (v_1 - v_2) + (v_3 - v_4) + \ldots + (v_{2m-1} - v_{2m}). \tag{4}$$

Puesto que las diferencias entre paréntesis de la suma (4) son positivas o iguales a cero, debido a la condición (2), entonces

$$S_{2m} \geqslant 0.$$

Si $2m$ crece, $S_{2m}$ no decrece, porque cada vez se añaden sumandos positivos o iguales a cero.

Por otra parte, esta suma puede ser escrita así:

$$S_{2m} = v_1 - (v_2 - v_3) - (v_4 - v_5) - \ldots - (v_{2m-2} - v_{2m-1}) - v_{2m}. \tag{5}$$

De aquí

$$S_{2m} \leqslant v_1.$$

[1]) De un modo más preciso, la serie (1) debe ser escrita así:

$$v_1 + (-v_2) + v_3 + (-v_4) + \ldots$$

Por consiguiente, $S_{2m}$ por ser una sucesión monótonamente creciente (o más exactamente, no decreciente) y limitada, tiende a un cierto límite $S$ cuando $m \to \infty$ (véase el § 10 del cap. VII), es decir,

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S.$$

Pero es evidente que

$$S_{2m+1} = S_{2m} + v_{2m+1}$$

y, de acuerdo con la (3), tenemos

$$\lim_{m\to\infty} v_{2m+1} = 0.$$

Teniendo en cuenta este hecho obtendremos

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} v_{2m+1} = S + 0 = S.$$

De este modo, cuando $n$ crece ilimitadamente, la suma $S_n$ tiende a un único límite $S$, cualquiera que sea $n$, par o impar. Por eso la serie (1) es convergente.

OBSERVACIÓN. *El valor absoluto del error en el cálculo aproximado de la suma de una serie alternada convergente que satisface las condiciones del teorema de Leibniz, no supera el valor absoluto del primer término suprimido.*

Efectivamente, si en una serie alternada convergente se suprimen todos los términos después del término $(-1)^{n-1} v_n$ y se designa por $\rho_n$ el error obtenido, tenemos

$$\rho_n = (-1)^n v_{n+1} + (-1)^{n+1} v_{n+2} + \ldots =$$
$$= (-1)^n [(v_{n+1} - v_{n+2}) + (v_{n+3} - v_{n+4}) + \ldots];$$

de donde

$$|\rho_n| = (v_{n+1} - v_{n+2}) + (v_{n+3} - v_{n+4}) + \ldots$$

o

$$|\rho_n| = v_{n+1} - (v_{n+2} - v_{n+3}) - (v_{n+4} - v_{n+5}) - \ldots$$

Por consiguiente,

$$|\rho_n| \leqslant v_{n+1}.$$

EJEMPLO. La serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots,$$

indicada al final del § 6 es convergente, porque ella satisface todas las condiciones de Leibniz.

## § 8. Series de potencias

Una serie de tipo

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{1}$$

es decir, una serie de potencias enteras no negativas crecientes de la variable $x$, cuyos coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ no dependen de $x$, se llama *serie de potencias*. A veces se examina una serie de potencias de forma más general:

$$a_0 + a_1 (x - a) + a_2 (x - a)^2 + \ldots + a_n (x - a)^n + \ldots, \qquad (2)$$

donde $a$ es un número constante. La serie (2) se reduce fácilmente a la serie (1), si se considera que $x - a = x'$. Por eso, en adelante nos ocuparemos exclusivamente de las series de potencias del tipo (1).

Aclaremos el problema de la convergencia de la serie de potencias (1). Dando a la variable $x$ un valor fijo obtendremos una serie numérica convergente o divergente según el valor de $x$.

Se puede demostrar que para toda serie de potencias (1) existe un número no negativo finito o infinito $R$, llamado *radio de convergencia de la serie* tal, que si $R > 0$, la serie es convergente para $|x| < R$ y divergente para $|x| > R$. Si $|x| = R$, es decir, si $x = R$ o $x = -R$, la serie puede ser convergente o divergente. El intervalo $(-R, R)$ se llama *intervalo de convergencia* de la serie de potencias. Si $R = +\infty$ el intervalo de convergencia representa toda la recta numérica. En el caso cuando $R = 0$, la serie de potencias (1) converge solamente en el punto $x = 0$ y, hablando estrictamente, el intervalo de convergencia no existe.

En los casos más simples el radio de convergencia de la serie de potencias (1) puede ser hallado con ayuda del criterio de d'Alembert. Para eso examinemos la serie compuesta de valores absolutos de términos de la serie (1):

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + \ldots + \\ + |a_n||x|^n + \ldots \qquad (3)$$

Como sabemos de lo explicado, la serie (1) es absolutamente convergente, si la serie (3) es convergente. Para resolver el problema de convergencia de la serie (3) apliquemos el criterio de d'Alembert. Designemos el $(n + 1)$-ésimo término de la serie (3) por $v_n$, es decir, $v_n = |a_n||x|^n$; de donde $v_{n+1} = |a_{n+1}||x|^{n+1}$. Compongamos la relación

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x|.$$

Supongamos que existe el límite de la relación $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ cuando $n \to \infty$. Designemos este límite por $l$:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l. \qquad (4)$$

En este caso

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = l\,|x|. \qquad (5)$$

Es evidente que si $|x| < \frac{1}{l}$, $l|x| < 1$ y la serie (3) es convergente. Por consiguiente, la serie (1) es también convergente y además absolutamente.

Al contrario, si $|x| > l$, entonces $l|x| > 1$. En virtud de la observación 2 del § 5, las dos series (3) y (1) son divergentes.

De este modo $R = \frac{1}{l} \geqslant 0$ es el radio de convergencia de la la serie de potencias (1) y, según la relación (4), tenemos la fórmula

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \tag{6}$$

Queda abierta la cuestión de si la serie (1) es convergente para $R > 0$ en los extremos del intervalo de convergencia $(-R, R)$, es decir, cuando $x = R$ o $x = -R$. Esta cuestión debe resolverse en cada caso particular.

EJEMPLO. Examinemos la serie

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} \ldots \tag{7}$$

Aquí $a_n = \frac{1}{n}$ y $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Según la (6) para el radio de convergencia $R$ de la serie (7) tenemos

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Por consiguiente, la serie (7) es convergente en el intervalo $(-1, 1)$.

Para resolver el problema de convergencia de la serie (7) en los extremos del intervalo supongamos primeramente que $x = 1$. Obtendremos una serie armónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

que es, como hemos visto, divergente.

Supongamos ahora que $x = -1$. En este caso, la serie (7) se escribirá

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n} + \ldots$$

Según el teorema de Leibniz esta serie es condicionalmente convergente.

Y bien el dominio de convergencia de la serie (7) es el intervalo $[-1, 1)$.

## § 9. Derivación e integración de series de potencias

La suma de una serie de potencias

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{1}$$

es una función definida en el intervalo de convergencia $(-R, R)$ de esta serie, donde se supone que $R > 0$.

Se puede demostrar que la función $f(x)$ es diferenciable y que su derivada $f'(x)$ puede ser hallada por la derivación término a término de la serie (1), es decir,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$

para $-R < x < R$. Esto es también justo para derivadas de orden superior.

De un modo análogo la integral indefinida de la función $f(x)$ puede ser obtenida para todos los valores de $x$ pertenecientes al intervalo de convergencia, por la integración término a término de la serie (1), es decir,

$$\int f(x)\,dx = C + a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} + \ldots + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1} + \ldots,$$

si $-R < x < R$.

De este modo, una serie de potencias en su intervalo de convergencia se comporta respecto a las operaciones de derivación e integración como un polinomio con un número finito de términos.

## § 10. Desarrollo de una función dada en series de potencias

Para las aplicaciones prácticas es importante saber **desarrollar una función dada $f(x)$ en series de potencias**, es decir, representar la función $f(x)$ en forma de suma de una serie de potencias, porque esto permite calcular los valores de esta función con cualquier precisión.

Antes de estudiar el problema en forma general examinemos algunos casos particulares.

Examinemos la serie de potencias

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

Esta serie representa una progresión geométrica de razón $x$. Como se ve, ella converge, si $|x| < 1$ y su suma es igual a $\frac{1}{1-x}$. Por eso se puede escribir

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \qquad (1)$$

Esta última igualdad puede considerarse como el desarrollo de la función $\frac{1}{1-x}$ en una serie de potencia ordenada respecto a las potencias crecientes de la variable $x$. A partir del desarrollo (1) es fácil obtener otros desarrollos que representan un gran interés.

DESARROLLO DE LA FUNCIÓN $\ln(1+x)$. Sustituyendo en el desarrollo (1) $x$ por $-z$ tendremos

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\ldots+(-1)^n z^n+\ldots \tag{2}$$

Si

$$0 \leqslant |z| \leqslant |x| < 1,$$

la igualdad (2) puede ser integrada, como se dijo en el § 9, término a término respecto a $z$ en los límites de 0 a $x$. Por eso multiplicando la igualdad (2) por $dz$ e integrando término a término desde 0 hasta $x$ obtendremos

$$\int_0^x \frac{dz}{1+z}=\int_0^x dz-\int_0^x z\,dz+\int_0^x z^2\,dz-\ldots+(-1)^n\int_0^x z^n\,dz+\ldots$$

De aquí

$$\ln(1+z)\Big|_0^x=\frac{z}{1}\Big|_0^x-\frac{z^2}{2}\Big|_0^x+\frac{z^3}{3}\Big|_0^x-\ldots+(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x+\ldots,$$

o bien,

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots,$$

si $|x|<1$. Se puede mostrar que este desarrollo es también justo para $x=1$ y, por consiguiente,

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

DESARROLLO DE LA FUNCIÓN $\operatorname{arctg} x$. Supongamos que en el desarrollo (1) $x=-z^2$:

$$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-\ldots+(-1)^n z^{2n}+\ldots$$

Multiplicando la última igualdad por $dz$ e integrando término a término desde 0 hasta $x$, donde $|x|<1$, obtendremos,

$$\int_0^x \frac{dz}{1+z^2}=\int_0^x dz-\int_0^x z^2\,dz+\int_0^x z^4\,dz-\ldots+(-1)^n\int_0^x z^{2n}\,dz+\ldots,$$

o

$$\operatorname{arctg} z\Big|_0^x=z\Big|_0^x-\frac{z^3}{3}\Big|_0^x+\frac{z^5}{5}\Big|_0^x-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^x+\ldots$$

Puesto que $\operatorname{arctg} 0=0$, tenemos definitivamente

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,$$

si $|x|<1$. Se puede demostrar que este desarrollo se queda también justo para $x=1$, así como para $x=-1$.

En particular, para $x = 1$, se deduce

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

Vemos que numerosas funciones, por ejemplo $\ln(1 + x)$, $\operatorname{arctg} x$, etc., admiten el desarrollo en series de potencias respecto al argumento $x$. Es natural plantear el problema general sobre el desarrollo de una función dada $f(x)$ en una serie de potencias no negativas crecientes de la variable $x$. Este problema será estudiado en el párrafo siguiente.

## § 11. Serie de Maclaurin

Supongamos que la función dada $f(x)$ puede ser desarrollada en serie de potencias

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \ldots, \tag{1}$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots$ son coeficientes indeterminados y los intervalos de convergencia $|x| < R$ de esta serie no se reducen a un punto, es decir, $R > 0$.

Como fue establecido más arriba, la serie de potencias (1) puede, en su intervalo de convergencia, derivarse término a término cualquier número de veces, entendiéndose que todas las series obtenidas serán convergentes y sus sumas serán iguales a las derivadas correspondientes.

Derivando sucesivamente término a término la serie (1) un número infinito de veces obtendremos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \ldots,\\
f''(x) &= 2a_2 + 2\cdot 3a_3x + 3\cdot 4a_4x^2 + 4\cdot 5a_5x^3 + \ldots,\\
f'''(x) &= 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4x + 3\cdot 4\cdot 5a_5x^2 + \ldots,\\
f^{\mathrm{IV}}(x) &= 2\cdot 3\cdot 4a_4 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a_5x + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Suponiendo que en estas igualdades, así como en la (1) $x = 0$ obtendremos

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = 2a_2, \quad f'''(0) = 2\cdot 3a_3,$$
$$f^{\mathrm{IV}}(0) = 2\cdot 3\cdot 4a_4, \ \ldots$$

De donde

$$a_0 = f(0) \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{1\cdot 2}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3},$$
$$a_4 = \frac{f^{\mathrm{IV}}(0)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, \ \ldots$$

Introduciendo luego los valores de coeficientes $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ en la serie (1) obtendremos la serie de Maclaurin [1])

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \tag{2}$$

(compare con la fórmula (6) del § 6 del cap. XI).

## § 12. Aplicación de la serie de Maclaurin al desarrollo de ciertas funciones en series de potencias

1) DESARROLLO DE LA FUNCION $e^x$. Sea

$$f(x)=e^x.$$

Tenemos

$$f'(x)=e^x,\quad f''(x)=e^x,\quad f'''(x)=e^x,\quad f^{\mathrm{IV}}(x)=e^x,\ \ldots$$

Considerando que aquí $x=0$ obtendremos

$$f(0)=e^0=1,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=1,\quad f'''(0)=1,\quad f^{\mathrm{IV}}(0)=1,\ \ldots$$

Sustituyendo estos valores en la serie de Maclaurin (la fórmula (2) del § 11), tendremos definitivamente

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \tag{1}$$

El término general de la serie (1) es $u_n=\frac{x^n}{n!}$. Aplicando el criterio de d'Alembert a la serie de valores absolutos obtendremos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{x^n}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0;$$

por consiguiente, la serie de potencias (1) es convergente para toda $x$, es decir, su intervalo de convergencia es $(-\infty, +\infty)$. Se demuestra en cursos completos que para todo valor de $x$, la suma de esta serie es igual a la función $e^x$.

2) DESARROLLO DE LA FUNCIÓN sen $x$. Sea

$$f(x)=\operatorname{sen} x,$$

de donde

$$f'(x)=\cos x,\quad f''(x)=-\operatorname{sen} x,\quad f'''(x)=-\cos x,\quad f^{\mathrm{IV}}(x)=\operatorname{sen} x,\ \ldots$$

[1]) En el caso general, la serie de Maclaurin compuesta formalmente para una función $f(x)$ no es obligatoriamente convergente hacia esta función.

Considerando que $x = 0$ tenemos

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{\mathrm{IV}}(x) = 0,\ \ldots$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula (2) del § 11 obtendremos

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \qquad (2)$$

donde $x$ se mide en radianes. No es difícil convencerse de que esta serie converge para toda $x$. Se puede demostrar que su suma es igual a sen $x$.

3) DESARROLLO DE LA FUNCIÓN $\cos x$. Si

$$f(x) = \cos x,$$

tenemos

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f'''(x) = \operatorname{sen} x,$$
$$f^{\mathrm{IV}}(x) = \cos x,\ \ldots$$

Considerando que $x = 0$ obtendremos

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -1,\ f'''(0) = 0,\ f^{\mathrm{IV}}(0) = 1,\ \ldots$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula de Maclaurin (2) del § 11 hallamos

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad (3)$$

donde $x$ se mide en radianes. No es difícil convencerse de que esta serie es convergente del mismo modo que la serie (2) para todo valor de $x$. Se demuestra que la suma de esta serie es igual a cos $x$.

El desarrollo (3) puede ser obtenido a partir del desarrollo (2), derivando término a término.

4) DESARROLLO DEL BINOMIO DE NEWTON $(1+x)^m$. Sea

$$f(x) = (1 + x)^m,$$

donde $m$ es un número entero o fraccionario, positivo o negativo. En este caso tenemos

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1},$$
$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2},$$
$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\ \ldots\ (m-n+1)(1+x)^{m-n},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Considerando que $x = 0$ en todas estas fórmulas obtendremos

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = m, \quad f''(0) = m(m-1),$$
$$f'''(0) = m(m-1)(m-2), \ldots,$$
$$f^{(n)}(0) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1), \ldots$$

Sustituyendo las expresiones de $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, ..., $f^{(n)}(0)$, ... en la serie de Maclaurin (2) del § 11, tendremos

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}x^n + \ldots \quad (4)$$

La fórmula del binomio de Newton para un exponente no entero o negativo es formalmente la misma que para un exponente entero positivo. Si $m$ es un número entero positivo, el factor $m - n + 1$ es igual a cero para $n = m + 1$. Por consiguiente, la serie (4) se interrumpirá y en vez del desarrollo infinito se obtendrá una suma finita (compare con el § 5 del cap. XI).

Aplicando la fórmula

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

hallamos el intervalo de convergencia $(-R, R)$ de la serie (4). Tenemos

$$a_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n};$$
$$a_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n(n+1)}.$$

De donde

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{n+1}{m-n}\right|$$

y, por consiguiente,

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{m}{n}-1}\right| = \left|\frac{1}{-1}\right| = 1.$$

De este modo, la serie binomial converge dentro del intervalo

$$-1 < x < +1$$

y diverge fuera de él. La convergencia de esta serie para $x = 1$ y $x = -1$ debe estudiarse separadamente en cada caso particular.

Es más complicado demostrar que para $|x| < 1$ la suma de la serie (4) es igual a $(1 + x)^m$.

## § 13. Aplicación de las series de potencias a los cálculos aproximados

Los desarrollos obtenidos permiten calcular de modo aproximado los valores particulares de funciones, así como ciertas integrales definidas «incalculables», etc. Examinemos algunos ejemplos.

1) CÁLCULO de sen 1. Considerando que $x = 1$ en el desarrollo de sen $x$ tenemos

$$\operatorname{sen} 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \ldots$$

Si se omiten todos los términos a partir del cuarto, el error será menor, en valor absoluto, que $\frac{1}{7!} = \frac{1}{5040}$ (porque el desarrollo del sen 1 es una serie que satisface las condiciones del teorema de Leibniz). De aquí

$$\operatorname{sen} 1 \approx \operatorname{sen} 57°18' \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \approx 0{,}8417$$

con una exactitud de hasta 0,0002.

2) CALCULO DE RAICES Sea necesario calcular $\sqrt[3]{9}$.

Escribiendo esta expresión en forma

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8+1} = 2\left(1 + \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$$

y considerando que en la fórmula del binomio de Newton $m = \frac{1}{3}$ y $x = \frac{1}{8}$, tendremos

$$\sqrt[3]{9} = 2\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^3 + \ldots\right] =$$
$$= 2\left(1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{576} + \frac{5}{41\,472} - \ldots\right) \approx$$
$$\approx 2\,(1 + 0{,}0417 - 0{,}0017 + 0{,}0001) = 2{,}0802\,.$$

Según la tabla, $\sqrt[3]{9} = 2{,}0801$.

3) CALCULO DE LOGARITMOS NATURALES. En el § 10 hemos obtenido el desarrollo siguiente:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \ldots \qquad (1)$$

La serie (1) no puede ser aplicada para calcular logaritmos naturales de números mayores de 2, porque ella diverge cuando $x > 1$. Sin embargo, a partir de esta serie podemos obtener a otra serie que sirve para nuestro fin. Para eso, reemplacemos en la fórmula (1) $x$ por $-x$; en este caso obtendremos

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7} - \ldots \quad (2)$$

Las dos series (1) y (2) tienen un intervalo de convergencia común: $|x| < 1$. Como se sabe (véase el § 1), las series convergentes pueden ser adicionadas o restadas término a término. Por eso, suponiendo que $|x| < 1$ y restando la igualdad (2) de la (1), tendremos

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right). \quad (3)$$

Tomando $\frac{1+x}{1-x} = \frac{N+1}{N}$ $(N > 0)$, hallamos $x = \frac{1}{2N+1}$. Reemplazando estos valores en la serie (3), obtendremos

$$\ln(N+1) - \ln N = 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2N+1)^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2N+1)^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{(2N+1)^7} + \ldots\right]. \quad (4)$$

Aplicando la regla de d'Alembert, es fácil convencerse de que la serie (4) converge para todo número positivo $N$. Por consiguiente, utilizando esta serie se pueden determinar paso a paso los logaritmos naturales de todos los números enteros positivos.

Para valores elevados de $N$ la serie (4) converge muy rápidamente. Evaluemos para $N > 0$ el error $\rho_n$ que obtenemos, si se suprimen en la fórmula (4) todos los términos situados entre paréntesis después del $n$-ésimo término. Tenemos

$$\rho_n = 2\left[\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2N+1)^{2n+1}} + \frac{1}{2n+3}\cdot\frac{1}{(2N+1)^{2n+3}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2n+5}\cdot\frac{1}{(2N+1)^{2n+5}} + \ldots\right].$$

Es evidente que

$$\rho_n < \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2N+1)^{2n+1}}\left[1 + \frac{1}{(2N+1)^2} + \frac{1}{(2N+1)^4} + \ldots\right]$$

o, calculando la suma de la progresión geométrica infinitamente decreciente que figura entre corchetes, obtendremos por último

$$\rho_n < \frac{1}{2(2n+1)}\cdot\frac{1}{(2N+1)^{2n-1}}\cdot\frac{1}{N(N+1)}.$$

Poniendo, por ejemplo, en el desarrollo (4) $N = 1$ y $n = 3$, tenemos

$$\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}\right) = 0{,}6932;$$

en este caso, según la fórmula (5), el error es

$$\rho_3 < \frac{1}{2\cdot 7\cdot 3^5\cdot 1\cdot 2} < \frac{1}{5000},$$

es decir, tenemos tres decimales exactos.

Luego, tomando $N = 2$ y limitándonos a dos términos ($n = 2$), obtendremos

$$\ln 3 \approx \ln 2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}\right) = 1{,}0985$$

con un error

$$\rho_2 < \frac{1}{2\cdot 5\cdot 5^3\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{7500}.$$

Continuando la operación se puede calcular el logaritmo natural de cualquier número positivo con suficiente grado de precisión.

4) EMPLEO DE SERIES PARA EL CALCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS. Supongamos, por ejemplo, que es necesario calcular la integral

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\ [1]).$$

La integral indefinida correspondiente

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

no puede ser expresada por funciones elementales, es decir, ésta es una integral «incalculable» y, por consiguiente, aquí no se puede aplicar la fórmula de Newton — Leibniz. Sin embargo, la integral definida inicial puede ser calculada aproximadamente con ayuda de series.

Al dividir término a término por $x$ la serie del sen $x$ tendremos

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

De donde, integrando término a término, obtendremos

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_0^1 dx - \frac{1}{3!}\int_0^1 x^2\,dx + \frac{1}{5!}\int_0^1 x^4\,dx - \ldots =$$

$$= x\Big|_0^1 - \frac{1}{3!}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{1}{5!}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 - \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{3!\cdot 3} + \frac{1}{5!\cdot 5} - \ldots \approx 0{,}94611.$$

[1]) Aquí la función subintegral $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ está definida para $x \neq 0$. Cuando $x = 0$ consideramos $f(0) = 1$ en razón de su continuidad.

Puesto que la serie es alternada y los módulos de sus términos decrecen monótonamente, al tomar los tres primeros términos el error será menor de $\frac{1}{7!\cdot 7}=\frac{1}{35\,280}<0{,}00003$.

## § 14. Series de Taylor

En algunos casos la función $f(x)$ o sus derivadas pierden sus sentidos para $x=0$, como, por ejemplo, la función $f(x)=\ln x$ o $f(x)=\sqrt{x}$. Estas funciones no pueden ser desarrolladas en series de Maclaurin. Para el desarrollo de funciones de este género se puede a veces utilizar series de potencias más generales ordenadas por potencias crecientes de la diferencia $x-a$, donde $a$ es un número constante adecuadamente elegido.

Supongamos que una función dada $f(x)$ esté desarrollada según las potencias crecientes de la diferencia $x-a$:

$$f(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+A_3(x-a)^3+\\+A_4(x-a)^4+\ldots, \qquad (1)$$

y que este desarrollo sea válido en cierto intervalo $|x-a|<R$.

Supongamos que $x-a=z$. En este caso, el desarrollo (1) se escribirá así

$$F(z)\equiv f(z+a)=A_0+A_1z+A_2z^2+\ldots, \qquad (2)$$

donde $|z|<R$. Por consiguiente, según el § 11, el desarrollo (2) es la serie de Maclaurin de la función $F(z)$. Puesto que $F^{(n)}(z)=$ $=f^{(n)}(z+a)$ $(n=1, 2, \ldots)$, obtenemos

$$A_0=F(0)=f(a), \quad A_1=\frac{F'(0)}{1!}=\frac{f'(a)}{1!},$$

$$A_2=\frac{F''(0)}{2!}=\frac{f''(a)}{2!}, \ \ldots, \quad A_n=\frac{F^{(n)}(0)}{n!}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \ \ldots$$

Sustituyendo con estos valores de los coeficientes los de la serie (1) tendremos

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots\\\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \qquad (3)$$

Esta es *la serie de Taylor.*

En particular, tomando aquí $a=0$, obtendremos la serie de Maclaurin

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Limitándonos en la fórmula (3) a un número finito de términos, en lugar de la serie de Taylor obtendremos *el polinomio de Taylor*

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (4)$$

(véase la fórmula (1) del § 6 del cap. XI). Si la serie (3) converge en un entorno $U_a$ del punto $a$ y si su suma es igual a la función $f(x)$, el polinomio $P_n(x)$ da una representación aproximada de la función $f(x)$ en el entorno $U_a$.

EJEMPLO 1. Desarrollar el polinomio $f(x)=x^3-5x^2+8x+3$ según las potencias crecientes de la diferencia $x-2$.

Derivando la función $f(x)$ tenemos

$$f'(x)=3x^2-10x+8,\quad f''(x)=6x-10,\quad f'''(x)=6,\quad f^{(n)}(x)=0$$

para $n>3$.
Considerando $x=2$ obtenemos

$$f(2)=7,\quad f'(2)=0,\quad f''(2)=2,\quad f'''(2)=6,\quad f^{(n)}(2)=0$$

para $n>3$.
De acuerdo con la serie de Taylor (3), el desarrollo de la función $f(x)$ según las potencias crecientes de la diferencia $x-2$ tenemos la forma

$$f(x)=7+\frac{x-2}{1}\cdot 0+\frac{(x-2)^2}{1\cdot 2}\cdot 2+\frac{(x-2)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 6$$

y, definitivamente,

$$f(x)=7+(x-2)^2+(x-2)^3.$$

EJEMPLO 2. Desarrollar la función $f(x)=\ln x$ según las potencias crecientes de la diferencia $x-1$.

Tenemos

$$f'(x)=\frac{1}{x},\quad f''(x)=-\frac{1}{x^2},\quad f'''(x)=\frac{1\cdot 2}{x^3},\quad f^{\mathrm{IV}}(x)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4},\ \ldots$$

De aquí

$$f'(1)=1,\quad f''(1)=-1,\quad f'''(1)=1\cdot 2,\quad f^{\mathrm{IV}}(1)=-1\cdot 2\cdot 3,\ \ldots$$

Por consiguiente,

$$\ln x=\ln 1+1\cdot(x-1)-\frac{1}{1\cdot 2}\cdot(x-1)^2+$$
$$+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(x-1)^3-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot(x-1)^4+\ldots$$

o sea,

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots$$

Este desarrollo es justo, si $0<x\leqslant 2$.

Notemos que esta serie puede ser obtenida directamente a partir de la serie para $\ln(1+x)$ (véase el § 10), tomando $\ln x=\ln(1+z)$ donde $z=x-1$.

## § 15. Series en el dominio complejo

En ciertos casos hace falta examinar series cuyos términos son **números complejos**, es decir, las series de tipo

$$(u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2) + \ldots + (u_n + iv_n) + \ldots, \tag{1}$$

donde $u_n$ y $v_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ son números reales e $i^2 = -1$.

La serie (1) se llama *convergente*, si convergen por separado la serie compuesta de las partes reales

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{2}$$

y la serie compuesta de las partes imaginarias de sus términos

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{3}$$

Si designamos por $S_n$ la suma de los $n$ primeros términos de la serie (2) y por $T_n$ la suma de los $n$ primeros términos de la serie (3), cuando estas series son convergentes, existen los

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} T_n = T.$$

En este caso, el número complejo $S + iT$ se llama *suma de la serie* (1).

Tiene lugar el teorema siguiente.

TEOREMA. *Si la serie de los módulos de los términos de la serie* (1) *es convergente, la serie* (1) *es también convergente.*

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, si la serie

$$\sqrt{u_1^2+v_1^2}+\sqrt{u_2^2+v_2^2}+\ldots+\sqrt{u_n^2+v_n^2}+\ldots,$$

es convergente, entonces en virtud de las desigualdades evidentes

$$|u_n| \leqslant \sqrt{u_n^2+v_n^2}$$

y

$$|v_n| \leqslant \sqrt{u_n^2+v_n^2}$$

$(n = 1, 2, \ldots)$ y según el criterio de comparación (§ 4) y el teorema del § 6, las dos series (2) y (3) serán también absolutamente convergentes. Entonces, de acuerdo con la definición, la serie (1) es también convergente. El teorema queda demostrado.

Se examinan también en el dominio complejo las series de potencias

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots,$$

donde $c_n = a_n + ib_n$, $z = x + iy$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

En virtud del teorema precedente, semejante serie será a priori convergente, si es convergente la serie de los módulos

$$|c_0| + |c_1|\,|z| + |c_2|\,|z|^2 + \ldots + |c_n|\,|z|^n + \ldots,$$

donde $|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ y $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Para investigar la convergencia de esta última serie, se pueden aplicar todos los criterios conocidos, por ejemplo, el de d'Alembert.

## § 16. Fórmulas de Euler

Apliquemos los desarrollos obtenidos de $e^x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ para deducir fórmulas muy importantes que ligan estas funciones entre sí.

Si $x$ es un número real, como se sabe (véase el § 12) tiene lugar el desarrollo

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

esta serie es convergente para cualquier valor de $x$.

Si $z = x + iy$, donde $x$ e $y$ son números reales e $i^2 = -1$, por definición, tomamos

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \tag{1}$$

Aplicando el criterio de d'Alembert a la serie de módulos

$$1 + \frac{|z|}{1!} + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \ldots,$$

descubrimos que esta serie es convergente para cada valor de $|z|$ y, por consiguiente, es también convergente la serie (1). De este modo, la función exponencial $e^z$ está definida para todos los valores complejos de $z$.

En particular para $z = ix$, donde $x$ es un número real, tenemos

$$e^{ix} = 1 + \frac{(ix)}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \\ + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \frac{(ix)^8}{8!} + \ldots$$

Puesto que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, etc., reemplazando estos valores en el desarrollo de $e^{ix}$, obtendremos

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots$$

o, después de separar las partes reales e imaginarias, tendremos

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots\right) + \\ + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right).$$

Según las fórmulas (2) y (3) del § 12, la expresión encerrada en el primer paréntesis es igual a $\cos x$ y la expresión que está en el segundo paréntesis es igual a sen $x$. Por eso llegamos a la fórmula notable siguiente:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x. \tag{2}$$

Sustituyendo aquí $x$ por $-x$ y teniendo en cuenta que $\cos(-x) = \cos x$ y que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, hallamos

$$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x. \tag{3}$$

Acabamos de obtener las famosas *fórmulas de Euler*.

Resolviendo las fórmulas (2) y (3) respecto a $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$, tendremos

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

En el caso general, si $z = x + iy$, se puede demostrar que

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}. \tag{4}$$

Por consiguiente,

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

EJEMPLO. $e^{1+\frac{\pi}{2} i} = e \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) = ei.$

Si $z = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ es un número complejo dado en forma trigonométrica (§ 2 del cap. XVI), entonces en base a la fórmula (4) obtenemos *la forma exponencial del número complejo*

$$z = re^{i\varphi}, \tag{5}$$

donde $r = |z|$ y $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

## § 17. Series trigonométricas de Fourier

Recordemos (§ 6 del cap. VIII) que la función $f(x)$ se llama *continua a trozos* sobre un intervalo dado $\langle a, b \rangle$, si este intervalo puede ser subdividido en un número finito de intervalos parciales $\langle a_s, b_s \rangle$ $(s = 1, 2, \ldots, N)$ tales, que en cada uno de ellos: 1) la función $f(x)$ está acotada y es continua en los puntos interiores; 2) en los extremos de intervalos existen límites unilaterales

$$f(a_s + 0) = \lim_{x_s \to a_s + 0} f(x), \quad f(b_s - 0) = \lim_{x_s \to b_s - 0} f(x) \quad (s = 1, 2, \ldots, N).$$

Llámase integral de la función $f(x)$ al número

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{s=1}^{N} \int_{a_s}^{b_s} f(x)\, dx.$$

Se puede demostrar que para una función continua a trozos en $\langle a, b \rangle$ existe una primitiva generalizada (véase el § 12 del cap. XIV)

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \quad (x \in [a, b],\ x_0 \in [a, b])$$

y, por consiguiente,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Sean $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ dos funciones reales continuas a trozos en un intervalo acotado $\langle a, b \rangle$. Por analogía con la operación correspondiente del álgebra vectorial (§ 13 del cap. XVIII) se llama *producto escalar* de las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ la integral

$$(\varphi, \psi) \equiv \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx. \tag{1}$$

OBSERVACIÓN. No es difícil comprender que el producto de dos funciones continuas a trozos en $\langle a, b \rangle$ es una función continua a trozos en $\langle a, b \rangle$ y que, por consiguiente, en nuestro caso la integral (1) existe.

El número

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} = \left[\int_a^b \varphi^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

se denomina *norma de la función* $\varphi(x)$.

Las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ se llaman *ortogonales* en un intervalo dado $\langle a, b \rangle$, si

$$(\varphi, \psi) \equiv \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = 0. \tag{3}$$

Examinemos *el sistema fundamental de funciones trigonométricas*

$$\left\{\cos\frac{n\pi x}{l},\ \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

de período común $T = 2l$ ($l$ es el semiperíodo). En física, las funciones

$$u_n = a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

y

$$v_n = b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

se llaman *armónicas fundamentales*; sus gráficas son sinusoides de amplitudes respectivas $a_n$ y $b_n$ (la armónica $v_0$ no se examina porque $v_0 \equiv 0$).

LEMA. *Las funciones trigonométricas fundamentales* (4) *son ortogonales de dos en dos, en todo intervalo con longitud igual al período común* $T = 2l$ *de estas funciones*, es decir, para el intervalo estándar $\langle -l, l\rangle$ las condiciones de ortogonalidad son:

$$\text{I.}\quad \left(\cos\frac{m\pi x}{l},\ \cos\frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$$

para $m \neq n$,

$$\text{II.}\quad \left(\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l},\ \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$$

para $m \neq n$,

$$\text{III.}\quad \left(\cos\frac{m\pi x}{l},\ \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$$

($m$ y $n$ son números enteros arbitrarios).

Las condiciones de ortogonalidad I, II, III se verifican directamente por medio del cálculo de las integrales correspondientes, utilizando las fórmulas trigonométricas siguientes:

1) $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$;

2) $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$;

3) $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)]$.

Por ejemplo, para $m \neq n$ tenemos

$$\text{I.}\quad \left(\cos\frac{m\pi x}{l},\ \cos\frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left[\cos\frac{(m-n)\pi x}{l} + \cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{l}{(m-n)\pi}\operatorname{sen}\frac{(m-n)\pi x}{l} + \frac{l}{(m+n)\pi}\operatorname{sen}\frac{(m+n)\pi l}{l}\right]\Bigg|_{-l}^{l} = 0,$$

porque $\operatorname{sen} k\pi = 0$ para todo $k$.

Dejamos al lector la tarea de verificar por su cuenta las relaciones II y III.

OBSERVACIÓN. Calculemos las normas de las funciones trigonométricas fundamentales.

1) Para $n = 0$ tenemos la armónica de orden 0: $\cos 0x = 1$. En virtud de la fórmula (2), obtenemos

$$\| 1 \|^2 = \int_{-l}^{l} 1^2 \, dx = 2l,$$

es decir,

$$\| 1 \| = \sqrt{2l}. \tag{5}$$

2) Para $n > 1$ tenemos

$$\left\| \cos \frac{n\pi x}{l} \right\|^2 = \int_{-l}^{l} \cos^2 \frac{n\pi x}{l} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-l}^{l} \left( 1 + \cos \frac{2n\pi x}{l} \right) dx = \frac{1}{2} \left( x + \frac{l}{2n\pi} \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{l} \right) \Big|_{-l}^{l} = l,$$

es decir,

$$\left\| \cos \frac{n\pi x}{l} \right\| = \sqrt{l} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{6}$$

3) Análogamente,

$$\left\| \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right\|^2 = \int_{-l}^{l} \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{l} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-l}^{l} \left( 1 - \cos \frac{2n\pi x}{l} \right) dx = \frac{1}{2} \left( x - \frac{l}{2n\pi} \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{l} \right) \Big|_{-l}^{l} = l,$$

es decir,

$$\left\| \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right\| = \sqrt{l} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{7}$$

Sea $f(x)$ una función continua a trozos y periódica de período $T = 2l$. Es natural tratar de representar esta función en forma de suma de un número finito o infinito de armónicas

$$u_n = a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$$

($n = 0, 1, 2, \ldots$) (véase el § 3 del cap. VI) del mismo período $2l$ **(análisis armónico de la función)**. De este modo, llegamos a *la serie trigonométrica de Fourier*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right) \tag{8}$$

(aquí, para comodidad de los cálculos ulteriores, el coeficiente de la armónica de orden 0 está tomado con el factor $\frac{1}{2}$). Históricamente este problema surgió por primera vez durante el tratamiento matemático de los resultados de las observaciones sobre la altura de la ola de marea alta en un lugar dado, esta altura se repite periódicamente en el transcurso del tiempo. El análisis armónico de la altura de la ola de marea alta ha permitido formular previsiones a largo plazo, algo de mucha importancia para la navegación marítima.

Supongamos que la serie (8) es convergente en el intervalo $\langle -l, l\rangle$ y es integrable término a término.
Integrando término a término la serie (8), tendremos

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l_0}^{l} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l}\,dx + b_n \int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx\right]. \quad (9)$$

Puesto que

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$$

para $n = 1, 2, \ldots$ (lo mismo resulta de las condiciones de ortogonalidad), obtenemos

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\cdot 2l = a_0 l,$$

de donde

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx. \quad (10)$$

Observemos que el término independiente de la serie (8)

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx,$$

representa **el valor medio** de la función periódica $f(x)$.

Multiplicando ahora ambos miembros de la igualdad (8) por

$$\cos\frac{m\pi x}{l} \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

e integrndo término a término, tendremos

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l}\cdot\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx + b_n \int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\cdot\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx\right]. \quad (11)$$

De aquí se deduce, en virtud de las condiciones de ortogonalidad I, III y de la fórmula (6), que

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx = a_m\int_{-l}^{l}\cos^2\frac{m\pi x}{l}\,dx = a_m l \tag{12}$$

y, por consiguiente,

$$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx \quad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{13}$$

Análogamente, multiplicando ambos miembros de la igualdad (8) por sen $\frac{m\pi x}{l}$ $(m = 1,\ 2,\ \ldots)$ e integrando término a término, hallamos

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{m\pi x}{l}\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}\mathrm{sen}\,\frac{m\pi x}{l}\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot\mathrm{sen}\,\frac{m\pi x}{l}\,dx + b_n\int_{-l}^{l}\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\cdot\mathrm{sen}\,\frac{m\pi x}{l}\,dx\right]. \tag{14}$$

De aquí, en virtud de las condiciones de ortogonalidad II y III y de la fórmula (7), tenemos

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{m\pi x}{l}\,dx = b_m\int_{-l}^{l}\mathrm{sen}^2\,\frac{m\pi x}{l}\,dx = b_m l$$

y, en consecuencia,

$$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{m\pi x}{l}\,dx \quad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{15}$$

Reemplazando $m$ por $n$ (¡lo que es admisible de acuerdo con el sentido de las fórmulas!), de las fórmulas (13) y (15) obtenemos los siguientes valores para los coeficientes del desarrollo de (8)

$$\left.\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}\right\} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\left\{\begin{matrix}\cos\dfrac{n\pi x}{l} \\ \mathrm{sen}\,\dfrac{n\pi x}{l}\end{matrix}\right. dx \tag{16}$$

$(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Notemos que, en virtud de la (10), el coeficiente $a_0$ se obtiene a partir de la fórmula (16) para $n = 0$; esto explica por qué el término independiente de la serie (8) se toma en forma de

$\frac{1}{2}a_0$. Los números $a_n$, $b_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ se llaman *coeficientes de Fourier* de la función $f(x)$.

DEFINICIÓN *La serie trigonométrica* (8) *cuyos coeficientes son coeficientes de Fourier* (16) *de la función periódica dada* $f(x)$, *se llama* ***serie de Fourier*** *(o, más exactamente*, serie ***trigonométrica de Fourier****)*, *independientemente de que la suma de esta serie sea igual o no a la función* $f(x)$.

En este sentido, se dice que la función $f(x)$ **engendra** una serie de Fourier, y se escribe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right), \tag{17}$$

donde el signo $\sim$ significa «corresponde a».

Indicaremos ahora sin demostración las condiciones suficientes para que una función periódica pueda ser desarrollada en serie de Fourier.

Llamaremos a la función $f(x)$ *suave a trozos* en el intervalo $\langle a, b\rangle$, si ella es continua a trozos en $\langle a, b\rangle$ y tiene en este intervalo una derivada continua a trozos $f'(x)$.

TEOREMA DE CONVERGENCIA *Sea* $f(x)$ *una función periódica de período* $T = 2l > 0$, *definida en* $(-\infty, +\infty)$ *excepto, puede ser, en sus puntos de discontinuidad, y suave a trozos en su dominio principal* [1]).

*Entonces*: 1) *su serie de Fourier* (17) *converge para todo valor de* $x \in (-\infty, +\infty)$, *es decir, existe la suma de la serie de Fourier*

$$S(x) = \lim_{N \to \infty} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right) \right]; \tag{18}$$

2) *la suma* $S(x)$ *de la serie de Fourier es igual al valor de la función* $f(x)$ *en los puntos de su continuidad:* $S(x) = f(x)$, *y es igual a la media aritmética de los límites a la derecha y a la izquierda de la función* $f(x)$ *en los puntos de discontinuidad* $x_0$ [2]), *es decir*,

$$S(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]. \tag{19}$$

Puesto que para un punto de continuidad $x$ de la función $f(x)$ tenemos

$$f(x) = f(x - 0) = f(x + 0),$$

---

[1]) Es decir, en cualquier intervalo de longitud igual al período de esta función.

[2]) En el dominio principal de la función periódica $f(x)$ existe solamente un número finito de estos puntos.

se puede escribir en el caso general

$$S(x)=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]. \tag{20}$$

En adelante, supondremos que para la función $f(x)$ se cumplen las condiciones del teorema de convergencia y en lugar del signo de correspondencia $\sim$ escribiremos el signo de igualdad $=$ (¡ignorando los puntos de discontinuidad de la función!). De este modo, para la serie de Fourier de la función $f(x)$ tenemos

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{21}$$

donde los coeficientes $a_n$ y $b_n$ se determinan por medio de la fórmula (16).

OBSERVACIÓN Las fórmulas (21) y (16) se simplifican, si el período de la función $f(x)$ es igual a $2\pi$. En este caso, $l=\pi$ y tenemos

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\operatorname{sen} nx), \tag{21'}$$

donde

$$\left.\begin{matrix}a_n\\ b_n\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left\{\begin{matrix}\cos nx\\ \operatorname{sen} nx\end{matrix}\right.dx$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{16'}$$

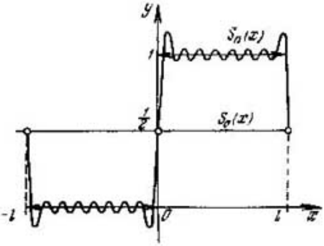

Fig. 220

EJEMPLO. Escribir la serie de Fourier de la función periódica $f(x)$ de período $T=2l$, sabiendo que (fig. 220)

$$f(x)=\begin{cases}0, & -l<x<0,\\ 1, & 0<x<l.\end{cases}$$

Mediante la fórmula (16) obtenemos

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx=\frac{1}{l}\left\{\int_{-l}^{0}0\cdot dx+\int_{0}^{l}1\cdot dx\right\}=1,$$

es decir $\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2}$;

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{l}\left\{\int_{-l}^{0}0\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx+\int_{0}^{l}1\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\}=$$

$$=\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l=0\quad(n=1,\ 2,\ \ldots);$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{l}\left\{\int_{-l}^{0} 0\cdot\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx+\int_{0}^{l} 1\cdot\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\}=$$

$$=\frac{1}{l}\cdot\left(-\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\right)\Big|_0^l=-\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi-1)=-\frac{1}{n\pi}\,[(-1)^n-1],$$

es decir,

$$b_n=\begin{cases}0 & \text{si } n \text{ es par;}\\ 2/n\pi, & \text{si } n \text{ es impar.}\end{cases} \tag{22}$$

De donde, puesto que la función $f(x)$ es suave a trozos en el intervalo $\langle -l, l\rangle$, es justo el desarrollo

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{l}+\frac{1}{5}\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{l}+\dots\right)\ (-l<x<l). \tag{23}$$

La fig. 220 muestra las gráficas de sumas parciales de la serie de Fourier (23) de la función $f(x)$: $S_0(x)=\frac{1}{2}$, $S_1(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}$, etc.

## § 18. Series de Fourier de funciones pares e impares

Examinemos la integral **simétrica**

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=\int_{-l}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{l} f(x)\,dx, \tag{1}$$

donde $f(x)$ es una función continua o continua a trozos en el intervalo cerrado $[-l, l]$.

Efectuando en la primera integral la sustitución $x=-t$, $dx=-dt$ y teniendo en cuenta que una integral definida es independiente de la designación de la variable de integración, obtendremos

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=-\int_{l}^{0} f(-t)\,dt+\int_{0}^{l} f(x)\,dx=$$

$$=\int_{0}^{l} f(-x)\,dx+\int_{0}^{l} f(x)\,dx=\int_{0}^{l}[f(-x)+f(x)]\,dx. \tag{2}$$

1) Sea $f(x)$ una **función par**, es decir $f(-x)=f(x)$. En este caso, de la fórmula (2), tenemos

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=2\int_{0}^{l} f(x)\,dx. \tag{3}$$

De este modo *la integral simétrica de una función par es igual a la integral doble de esta función tomada por la mitad del intervalo de integración.*

2) Sea $f(x)$ una función impar, es decir, $f(-x) = -f(x)$. En este caso, de la fórmula (2), obtenemos

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0. \tag{4}$$

De este modo, *la integral simétrica de una función impar es igual a cero*.

Notemos que las afirmaciones 1) y 2) son evidentes a partir de consideraciones geométricas (fig. 221 *a* y *b*).

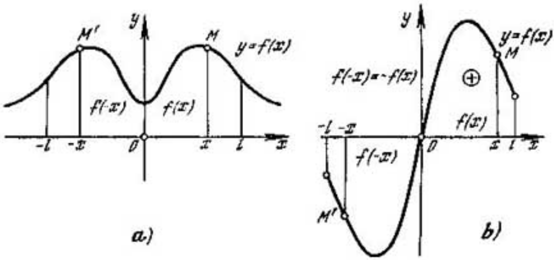


Fig. 221

TEOREMA. 1) *La serie de Fourier de una función periódica par contiene solamente cosenos de arcos múltiples*, es decir, sólo armónicas pares incluyendo el término independiente.

2) *La serie de Fourier de una función periódica impar contiene solamente senos de arcos múltiples*, es decir, contiene solamente armónicas impares.

DEMOSTRACIÓN. 1) Sean $f(x)$, una función periódica par de período $2l$, y $a_n$ y $b_n$, sus coeficientes de Fourier. En virtud de la fórmula (4) y teniendo en cuenta que las armónicas sen $\frac{n\pi x}{l}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ son funciones impares, tenemos

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Por eso,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}\,, \tag{6}$$

donde, en virtud de la fórmula (3) tenemos

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (7)$$

2) Sea ahora $f(x)$ una función periódica impar de período $2l$. Puesto que $f(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ son funciones impares, entonces,

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Por eso,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}, \qquad (8)$$

donde, en virtud de la fórmula (3), tenemos

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

El teorema queda demostrado.

## § 19. Noción sobre las series de Fourier de funciones no periódicas

Una función $f(x)$ suave a trozos **no periódica**, definida sobre el eje infinito $-\infty < x < +\infty$, **no puede ser** representada por una serie de Fourier porque la suma de esta serie, por ser la suma de armónicas de período común $T$, es una función periódica del mismo período $T$ y, por consiguiente, no puede ser igual a la función $f(x)$ para todos los valores de $x$. Sin embargo, es posible construir la representación de esta función en forma de una serie de Fourier correspondiente sobre cualquier **intervalo acotado**.

Supongamos que el intervalo que nos interesa es $\langle -l, l\rangle$, es decir, un intervalo simétrico respecto al origen de las coordenadas (esto se puede lograr siempre mediante una traslación paralela del eje $Ox$).

Construyamos una función $\varphi(x)$ de período $2l$ tal, que (fig. 222)

$$\varphi(x) \equiv f(x) \quad \text{para} \quad -l < x < l. \qquad (1)$$

Suponiendo que la función $\varphi(x)$ satisface las condiciones del teorema de convergencia (§ 17), tenemos

$$\varphi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right)\ (-\infty<x<+\infty), \tag{2}$$

donde

$$\left.\begin{matrix}a_n\\ b_n\end{matrix}\right\}=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\varphi(x)\left\{\begin{matrix}\cos\frac{n\pi x}{l}\\ \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\end{matrix}\right. dx \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{3}$$

De donde, en virtud de la identidad (1), obtenemos

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right)\ (-l<x<l), \tag{2'}$$

donde

$$\left.\begin{matrix}a_n\\ b_n\end{matrix}\right\}=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\left\{\begin{matrix}\cos\frac{n\pi x}{l}\\ \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\end{matrix}\right. dx \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{3'}$$

Calculemos la suma $S(x)$ de la serie (2′) o de la serie correspondiente (2), en los puntos de extremo del intervalo $x=\pm l$.

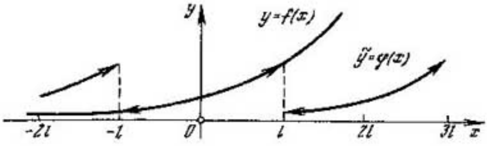


Fig. 222

De acuerdo con la fórmula general (§ 17), tenemos

$$S(l)=\frac{\varphi(l-0)+\varphi(l+0)}{2}. \tag{4}$$

Pero, teniendo en cuenta la identidad (1) y que $\varphi(x)$ es una función periódica de período $2l$, es geométricamente evidente (fig. 222) que

$$\varphi(l-0)=f(l-0),\quad \varphi(l+0)=\varphi(-l+0)=f(-l+0).$$

Por eso, de la fórmula (4) obtenemos,

$$S(l)=\frac{f(l-0)+f(l+0)}{2}. \tag{5}$$

Del hecho de que la suma $S(x)$ tiene la periodicidad de $2l$, se deduce

$$S(-l) = S(l). \tag{6}$$

EJEMPLO 1. La función $f(x) = e^x$ está desarrollada en serie de Fourier en el intervalo $(-1, 1)$. ¿Cuál es el valor de $S(1)$, si $S(x)$ es la suma de la serie de Fourier?

En virtud de la fórmula (5), tenemos

$$S(1) = \frac{e^{1-0}+e^{-1+0}}{2} = \frac{e+e^{-1}}{2} = \operatorname{ch} 1 = 1{,}54.$$

Sea ahora necesario representar una función no periódica $f(x)$ por una serie de Fourier de período $2l$ en un «semiperíodo» $0 < x < l$.

Suponiendo que

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < l, \\ f_1(x), & -l < x < 0, \end{cases} \tag{7}$$

donde $f_1(x)$ es una función arbitraria suave a trozos, obtenemos, a partir de las fórmulas (2) y (3), un conjunto infinito de series de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (0 < x < l), \tag{8}$$

que representan la función $f(x)$ en el intervalo $(0, l)$.

En particular, tomando en la fórmula (7) $f_1(x) = f(-x)$ $(-l < x < 0)$ (**"prolongación par"**), tendremos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \quad (0 < x < l), \tag{9}$$

donde

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{10}$$

Análogamente, suponiendo que en la fórmula (7) $f_1(x) = -f(-x)$ $(-l < x < 0)$ (**"prolongación impar"**), obtendremos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} \quad (0 < x < l), \tag{11}$$

donde

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{12}$$

De este modo, *una función suave a trozos, definida sobre un semiperíodo, puede ser desarrollada en una serie de Fourier correspondiente* *por una infinidad de procedimientos. En particular, se puede representar esta función sobre el semiperíodo dado:* 1) *por una suma de armónicas pares, o* 2), *por una suma de armónicas impares.*

EJEMPLO 2. Desarrollar la función $f(x) = x$ en series de cosenos de arcos múltiples en el intervalo $(0, \pi)$.

Notemos que la función $f(x)$ es aquí impar y hace falta obtener su serie de Fourier que contenga solamente armónicas pares. Esto se puede lograr reduciendo el intervalo de desarrollo.

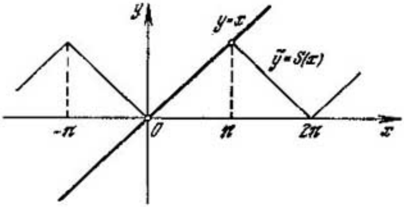


Fig. 223

Tomando $l = \pi$, obtendremos por medio de la fórmula (9)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \tag{13}$$

Aplicando la fórmula (10) hallamos

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi$$

y

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \overset{u}{\widehat{x}}\, d\left(\overbrace{\frac{\operatorname{sen} nx}{n}}^{v}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ x \cdot \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}\, dx \right\} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos nx}{n^2} \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi} (\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2\pi}\, [(-1)^n = 1]$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$. De donde,

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par,} \\ -\dfrac{4}{n^2\pi}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

De este modo, para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, tenemos

$$y = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots \right). \tag{14}$$

La fig. 223 muestra la gráfica de la función $y = x$ y la gráfica de la suma $\tilde{y} = S(x)$ de la serie de Fourier (14). Estas gráficas coinciden cuando $0 \leqslant x \leqslant \pi$, pero son distintas fuera del intervalo $[0, \pi]$.

Tomando $x = 0$ en la fórmula (14), obtenemos una serie numérica notable (serie de Euler)

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}. \qquad (15)$$

## EJERCICIOS

Estudiar la convergencia de las siguientes series aplicando la condición necesaria de convergencia y la regla de comparación directa:

1. $1-1+1-1+\ldots$ 2. $0{,}001+\sqrt{0{,}001}+\sqrt[3]{0{,}001}+\ldots$

3. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{27}\right)+\ldots$

4. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 2^3}+\ldots$ 5. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$

INDICACIÓN. Comparar con la serie armónica multiplicada por $\frac{1}{2}$.

6. $1+\frac{1}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{9\sqrt{3}}+\ldots$

Estudiar la convergencia de las siguientes series aplicando la regla de d'Alembert:

7. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots$ 8. $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$

9. $\frac{2}{1000}+\frac{2^2}{2000}+\frac{2^3}{3000}+\ldots$ 10. $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\frac{(3!)^2}{6!}+\ldots$

11. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 5\cdot 8}+\ldots$ 12. $\frac{1!}{1^1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\ldots$

Estudiar la convergencia de las siguientes series con términos de signo variable:

13. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$ 14. $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots$

15. $1-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+\ldots$ 16. $\frac{1}{2}+\frac{9}{4}-\frac{25}{8}-\frac{49}{16}+\frac{81}{32}+\frac{121}{64}-\ldots$

Determinar los intervalos de convergencia de las siguientes series de potencias y estudiar el comportamiento de ellas en los puntos de frontera:

17. $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$ 18. $1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}+\frac{x^3}{6!}+\ldots$

19. $1!x+2!x^2+3!x^3+\ldots$ 20. $\frac{x-1}{1\cdot 2}+\frac{(x-1)^2}{2\cdot 2^2}+\frac{(x-1)^3}{3\cdot 2^3}+\ldots$

Desarrollar en serie de Maclaurin las funciones:
21. $f(x) = a^x$ $(a > 0)$. 22. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$.

23. Desarrollar la función $f(x) = \sqrt{x}$ según las potencias enteras crecientes de la diferencia $x - 1$.

Utilizando los desarrollos habituales, representar en forma de series de potencias las siguientes funciones:

24. $f(x) = e^{-x^2}$ 25. $f(x) = \cos^2 x$. INDICACIÓN. $\cos^2 x = \frac{(1+\cos 2x)}{2}$.

26. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ 27. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

28. Utilizando el desarrollo en serie, calcular el valor aproximado de a) $\sqrt{e}$; b) sen 18°; c) $\sqrt[5]{1,2}$.

29. Calcular el valor aproximado de la integral

$$\int_0^{1/2} e^{x^2}\, dx.$$

30. Deducir una fórmula aproximada para la función

$$f(x) = \int_0^x \cos \sqrt{x}\, dx,$$

si $|x|$ es una magnitud pequeña.

31. Desarrollar en serie trigonométrica de Fourier en el intervalo $(-\pi, \pi)$ las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{2} x$; b) $f(x) = x^2$.

*Capítulo XXII*

# Ecuaciones diferenciales

## § 1. Nociones fundamentales

En numerosos problemas de geometría, física, mecánica, ciencias naturales, etc., desempeñan un papel importante las *ecuaciones diferenciales*. Se denominan así las ecuaciones que vinculan una variable independiente $x$, una función buscada $y$ y sus derivadas de diversos órdenes respecto a $x$. Se llama *orden* de esta ecuación el correspondiente a la derivada más elevada que figura en ella.

De este modo, una ecuación diferencial de orden $n$ se escribe en forma general

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

esta ecuación puede, en casos particulares, no contener $x$, $y$ y ciertas derivadas de orden inferior a $n$. Por ejemplo, las ecuaciones

$$y' + \frac{2}{x} y = \operatorname{sen} x, \quad y'' + 4y' + 13y = 0, \quad y''' + yy' = 0$$

son, respectivamente, de primer, segundo y tercer órdenes.

Una ecuación diferencial (1) se llama *lineal*, si su primer miembro es un polinomio de primer grado respecto a la función incógnita $y$ y a sus derivadas $y'$, $y''$, $\ldots$, $y^{(n)}$ (y no contiene sus productos), es decir, si esta función tiene la forma

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = f(x). \tag{2}$$

Aquí las funciones $a_0(x)$, $a_1(x)$, $\ldots$, $a_n(x)$, generalmente definidas y continuas sobre un cierto intervalo común, se llaman *coeficientes* de la ecuación lineal, y la función $f(x)$ se denomina *segundo miembro* o *término independiente* de la misma. Si el segundo miembro $f(x)$ de una ecuación lineal (2) es idénticamente igual a cero, esta ecuación se llama *homogénea*; en el caso contrario, denomina *no homogénea*. Las ecuaciones diferenciales lineales tienen numerosas aplicaciones.

Toda función

$$y = \varphi(x)$$

que al ser introducida en la ecuación (1) la transforma en una identidad se llama *solución* de esta ecuación. *Resolver* o *integrar* una ecuación diferencial dada significa hallar todas sus soluciones en un dominio dado. La gráfica de la solución se llama *curva integral*.

Notemos que el problema fundamental del cálculo integral, que consiste en hallar la función $y$, cuya derivada sea igual a la función continua dada $f(x)$, se reduce a la ecuación diferencial simple

$$y' = f(x).$$

La solución general de esta ecuación es

$$y = \int f(x)\,dx + C, \tag{3}$$

donde $C$ es una constante arbitraria y $\int f(x)\,dx$ es una de las primitivas de la función $f(x)$ [1].

Eligiendo de la forma debida la constante $C$, a condición de que la función $f(x)$ sea continua, se puede obtener cualquier solución de esta ecuación diferencial simple.

Al integrar ecuaciones diferenciales de orden superior, surgen varias constantes arbitrarias.

EJEMPLO 1. Examinemos la ecuación de segundo orden $y'' = 0$. Puesto que $y'' = (y')' = 0$, resulta que $y' = C_1$. Integrando la última igualdad, tendremos

$$y = \int C_1\,dx + C_2 = C_1x + C_2. \tag{4}$$

De este modo la solución (4) contiene dos constantes arbitrarias $C_1$ y $C_2$, es decir, el número de constantes arbitrarias en la fórmula (4) es igual exactamente al orden de la ecuación. Semejante solución se llama *solución general de la ecuación*; en este caso ella representa el conjunto infinito de soluciones de la ecuación diferencial.

DEFINICIÓN 1. *Se llama* ***solución general*** *de una ecuación diferencial (1) a la solución*

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)\ [2]$$

*cuyo número de constantes arbitrarias independientes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ es igual al orden de esta ecuación.*

En este caso, las constantes arbitrarias se llaman *independientes*, si el número total de constantes que tiene la función $\varphi$ no puede ser reducido por introducción de otras constantes arbitrarias, continuamente dependientes de las constantes dadas.

---

[1] Más exactamente, la fórmula (3) debería escribirse así:

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C, \tag{3'}$$

donde $x_0$ es un punto inicial del dominio dado. La fórmula de tipo (3') es cómoda para las aplicaciones porque ella permite explicitar la constante arbitraria $C$. En adelante, es necesario tener en cuenta esta nota.

[2] Se supone que la función $\varphi$ es continuamente derivable un número de veces suficiente con respecto a todos sus argumentos.

Si la solución general está dada en forma implícita

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

ésta habitualmente se denomina *integral general.*

DEFINICIÓN 2 *Cualquier solución de una ecuación diferencial que es obtenida a partir de su solución general, dando valores determinados a las constantes arbitrarias, que la componen, se llama* ***solución particular*** *de esta ecuación.*

EJEMPLO 2 Examinemos la ecuación de segundo orden

$$y'' + y = 0.$$

Es fácil comprender que las funciones sen $x$ y cos $x$ serán soluciones de esta ecuación, porque

$$(\operatorname{sen} x)'' = -\operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad (\cos x)'' = -\cos x.$$

No es difícil verificar directamente que la función

$$y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x,$$

donde $C_1$ y $C_2$ son constantes arbitrarias independientes, es la solución de nuestra ecuación y, por consiguiente, representa su solución general. Si ponemos, por ejemplo, que $C_1 = 2$ y $C_2 = -5$, obtendremos la función

$$y_1 = 2 \operatorname{sen} x - 5 \cos x$$

que es una **solución particular** de la ecuación diferencial considerada.

Si al resolver una ecuación diferencial se halla cierta función, se puede verificar la certeza de la solución sustituyendo esta función en la ecuación.

EJEMPLO 3 Mostrar que la función $y = (C_1 + C_2x) e^x$ es solución de la ecuación

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Efectivamente, aquí

$$y' = (C_1 + C_2x) e^x + C_2e^x = (C_1 + C_2 + C_2x) e^x$$

e

$$y'' = (C_1 + C_2 + C_2x) e^x + C_2e^x = (C_1 + 2C_2 + C_2x) e^x.$$

Por consiguiente,

$$y'' - 2y' + y = (C_1 + 2C_2 + C_2x) e^x - 2 (C_1 + C_2 + C_3x) e^x + \\ + (C_1 + C_2x) e^x \equiv 0,$$

lo que demuestra nuestra afirmación.

## § 2. Ecuaciones diferenciales de primer orden

El aspecto general de una ecuación diferencial de primer orden es el siguiente:

$$F(x, y, y') = 0.$$

En los casos más simples esta ecuación puede ser resuelta respecto a la derivada $y'$:

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

La solución general de la ecuación (1) tiene la forma

$$y = \varphi(x, C), \tag{2}$$

donde $C$ es una constante arbitraria. Geométricamente, la solución general (2) es una *familia de curvas integrales*, es decir, un conjunto de líneas que corresponden a distintos valores de la constante $C$ (fig. 224). Las curvas integrales poseen la siguiente propiedad: en cada uno de sus puntos $M(x, y)$ la inclinación de la tangente satisface la condición

$$\operatorname{tg} \alpha = f(x, y).$$

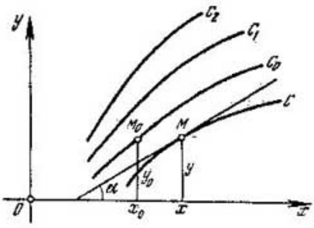

Fig. 224

Si se da un punto $M_0(x_0, y_0)$ por el cual debe pasar una curva integral, se elige por lo tanto en el caso más simple, entre una infinidad de curvas integrales, la curva que corresponde a una solución particular de nuestra ecuación diferencial.

Analíticamente, esta exigencia se reduce a una condición llamada *condición inicial*: $y = y_0$ para $x = x_0$. Si la solución general (2) es conocida, tenemos

$$y_0 = \varphi(x_0, C),$$

Partiendo de esta condición se puede en general determinar la constante arbitraria $C$ y, por consiguiente, hallar la solución particular correspondiente. En esto consiste *el problema de Cauchy* (*problema inicial*).

PROBLEMA DE CAUCHY. Hallar una solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación diferencial (1) que satisfaga la condición inicial dada: $y_0 = \varphi(x_0)$, es decir, que adquiera en $x = x_0$ el valor dado $y = y_0$.

Geométricamente, los problemas de Cauchy se formulan así: *hallar una curva integral de la ecuación diferencial* (1) *que pase por un punto dado* $M_0(x_0, y_0)$.

Acotemos lo siguiente: las ecuaciones diferenciales constituyen un aparato matemático con ayuda del cual podemos estudiar los fenómenos que se desarrollan en la naturaleza. Si los datos del problema definen enteramente un fenómeno, éste debe desarrollarse de modo unívoco, es decir, la solución de la ecuación diferencial, que determina la ley de desarrollo del fenómeno, debe ser única. La solución general de la ecuación diferencial contiene constantes arbitrarias y, por consiguiente, no da respuesta determinada a la cuestión planteada. Por eso, para resolver problemas concretos las ecuaciones diferenciales deben ser completadas por condiciones suplementarias. En el caso más simple, éstas son las condiciones iniciales que nos conducen al problema de Cauchy.

En ciertos casos es provechoso escribir la ecuación diferencial de primer orden (1) en forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1'}$$

o así:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{3}$$

donde $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones conocidas. La comodidad de la forma (3) consiste en que aquí las variables $x$ e $y$ son **equivalentes**, es decir, cada una de ellas puede ser considerada como función de la otra. Por **solución** de la ecuación (3) se entienden, en el caso general, las funciones $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ dadas paramétricamente ($t$ es un parámetro) y que satisfacen la ecuación (3).

No existe un método general de integración de las ecuaciones diferenciales de primer orden. Se examinan generalmente sólo algunos tipos de estas ecuaciones, para cada una de las cuales se brinda un procedimiento de solución especial.

## § 3. Ecuaciones de primer grado con variables separables

DEFINICION. *Llámase ecuación diferencial de primer orden a la ecuación* ***con variables separables****, si ella es de forma*

$$X(x)\,Y(y)\,dx + X_1(x)\,Y_1(y)\,dy = 0, \tag{1}$$

*donde $X(x)$, $X_1(x)$, son funciones sólo de la variable $x$, e $Y(y)$, $Y_1(y)$, son sólo funciones de la variable $y$.*

Para resolver la ecuación (1) dividamos sus dos miembros por el producto $Y(y)$, $X_1(x)$ suponiendo que ésto es distinto de cero. En este caso, después de simplificaciones evidentes, obtendremos

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}\,dx + \frac{Y_1(y)}{Y(y)}\,dy = 0. \tag{2}$$

En la ecuación (2) la expresión que precede a $dx$ es solamente función de $x$, y la expresión que precede a $dy$, es sólo función de $y$. En este caso, se dice que *las variables están separadas*. Integrando ambos miembros de la igualdad (2), tendremos

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)}\,dx + \int \frac{Y_1(y)}{Y(y)}\,dy = \mathrm{C}. \tag{3}$$

Aquí se entiende por integrales ciertas primitivas correspondientes.

La relación (3) es la integral general expresada bajo una forma implícita de la ecuación (1).

En el caso general, al dividir por el producto $X_1(x)\,Y(y)$, arriesgamos perder aquellas soluciones de la ecuación (1) que anulan este producto.

Efectuando una sustitución directa es fácil convencerse de que la función

$$x = a, \tag{4}$$

donde $a$ es la raíz de la ecuación $X_1(x) = 0$, es decir, $X_1(a) = 0$, es solución de la ecuación (1). También la función

$$y = b, \tag{5}$$

donde $b$ es la raíz de la ecuación $Y(y) = 0$, es decir, $Y(b) = 0$ es también la solución de la ecuación (1).

Geométricamente, las soluciones (4) y (5), si ellas existen, son líneas rectas paralelas respectivamente a los ejes $Oy$ y $Ox$.

EJEMPLO 1. Sea dada la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}. \tag{6}$$

De aquí tenemos

$$x\,dy = y\,dx.$$

Supongamos que $y \neq 0$. Si dividimos ambos miembros de esta ecuación por $xy$, las variables serán separadas y obtendremos

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Integrando esta ecuación tendremos

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln y = \ln x + \ln C.\text{[1]} \tag{7}$$

Aquí la constante arbitraria está tomada en forma logarítmica, lo que es legítimo porque todo número $C_1$ positivo o negativo puede ser representado como un logaritmo de otro número:

$$C_1 = \ln C,$$

donde

$$C = e^{C_1}.$$

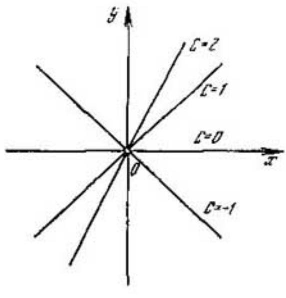


Fig. 225

Expresando $y$ a partir de la igualdad (7) es decir, potenciándola, obtendremos definitivamente

$$y = Cx \quad (x \neq 0, \quad C \neq 0). \tag{8}$$

Tomando ahora $xy = 0$ y teniendo en cuenta que $x \neq 0$, obtendremos la solución $y = 0$ de la ecuación (6). Formalmente esta solución se obtiene de la fórmula (8) para $C = 0$.

Geométricamente, la solución general (8) representa la familia de semirrectas $(0 \leqslant |C| < +\infty)$ que parte desde el origen de las coordenadas (fig. 225).

---

[1]) Hablando en rigor deberíamos escribir

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln \overline{C},$$

donde $\overline{C} > 0$. Pero nuestra «libertad» no se reflejará en el resultado final, si después de tomar la exponencial se admite considerar la constante arbitraria $C$ como un número real. Esto se debe tener en cuenta en adelante.

EJEMPLO 2. Hallar la curva que pasa por el punto $Q$ $(-1, 4)$ y posee la siguiente propiedad: en cada punto su subnormal tiene un mismo valor igual a 4.

Sean: $y = f(x)$, la curva buscada; $MT$, la tangente a esta curva en el punto $M$ $(x, y)$; $MN$, la normal (perpendicular a la tangente en el punto de tangencia (fig. 226). Llámase *subnormal* $PN$ a la proyección del segmento de la normal $MN$ sobre el eje $Ox$.

Puesto que $PM = y$ y $\angle NMP = \angle MT_x = \alpha$, entonces $PN = y \operatorname{tg} \alpha$. Pero, según la significación geométrica de la derivada, $\operatorname{tg} \alpha = y'$; por eso la expresión definitiva de la subnormal es

$$PN = yy'.$$

En virtud de las condiciones del problema

$$yy' = 4 \quad \text{ó} \quad y\frac{dy}{dx} = 4.$$

Separando las variables, obtendremos

$$y\,dy = 4\,dx.$$

Integrando los dos miembros tendremos

$$\int y\,dy = 4\int dx + C \quad \text{o sea} \quad \frac{y^2}{2} = 4x + C.$$

De aquí

$$y^2 = 8x + C_1. \tag{9}$$

Acabamos de obtener una familia de parábolas cuyos vértices se encuentran en el eje $Ox$.

Determinemos la constante arbitraria $C_1$ aprovechando el hecho de que nuestra parábola pasa por el punto dado $Q$ $(-1, 4)$. Sustituyendo en la ecuación

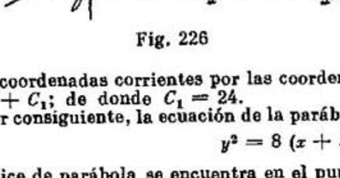


Fig. 226

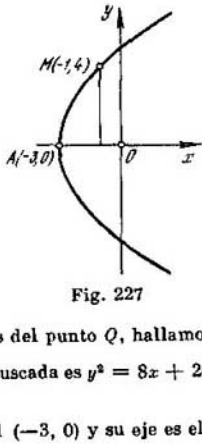


Fig. 227

(8) las coordenadas corrientes por las coordenadas del punto $Q$, hallamos $16 = -8 + C_1$; de donde $C_1 = 24$.

Por consiguiente, la ecuación de la parábola buscada es $y^2 = 8x + 24$, o sea

$$y^2 = 8(x + 3).$$

El vértice de parábola se encuentra en el punto $A$ $(-3, 0)$ y su eje es el eje $Ox$ (fig. 227).

EJEMPLO 3. La velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia de temperatura del cuerpo y del aire. La temperatura del aire es igual a 20 °C. Se sabe que durante 20 minutos el cuerpo se enfría de 100° a 60°. Determinar la ley de variación de la temperatura del cuerpo en función del tiempo.

Si se designa el tiempo por $t$ y la temperatura del cuerpo por $U$ la velocidad de enfriamiento del cuerpo o, en otras palabras, la velocidad de variación de su temperatura será igual a la derivada $\frac{dU}{dt}$. De acuerdo con los datos del problema tenemos

$$\frac{dU}{dt}=k\,(U-20),$$

donde $k$ es un coeficiente de proporcionalidad. Separando las variables obtendremos

$$\frac{dU}{U-20}=k\,dt.$$

Integrando los dos miembros, tendremos

$$\int\frac{dU}{U-20}=k\int dt+\ln C\ ^{1)},$$

o sea,

$$\ln\,(U-20)=kt+\ln C.$$

De aquí, $U-20=Ce^{kt}$ y, por consiguiente,

$$U=20+Ce^{kt}. \tag{10}$$

Para determinar las constantes $C$ y $k$ utilizamos los datos del problema:

$$U=100° \quad \text{para} \quad t=0$$

y

$$U=60° \quad \text{para} \quad t=20.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (10), tendremos

$$\left.\begin{aligned}100&=20+C,\\ 60&=20+Ce^{20k}.\end{aligned}\right\}$$

De aquí, $C=80$, $e^{20k}=\frac{1}{2}$ y, por consiguiente,

$$e^{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (10) obtendremos definitivamente

$$U=20+80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}.$$

Esta es la ley de variación de la temperatura $U$ en función del tiempo en las condiciones indicadas.

En los ejemplos examinados 2 y 3 sobre la formulación de ecuaciones diferenciales tenemos un asunto directo con la derivada de la función buscada. Indi-

---

1) Puesto que en adelante elevaremos a una potencia, aquí es conveniente escribir $\ln C$ en lugar de $C$.

caremos un ejemplo donde es más cómodo razonar operando con las diferenciales de las magnitudes buscadas.

EJEMPLO 4. En un depósito que contiene 10 kg de sal por 100 l de mezcla se introducen cada minuto 30 litros de agua y se extraen 20 litros de mezcla (fig. 228, *a*). Determinar la cantidad de sal que queda en el depósito dentro de $t$ minutos, suponiendo que el mezclado es instantáneo.

Sean: $x$, la cantidad de sal en el depósito al instante $t$, y $x + dx$, la cantidad de sal en el instante $t + dt$. Puesto que la mezcla se derrama del depósito, la

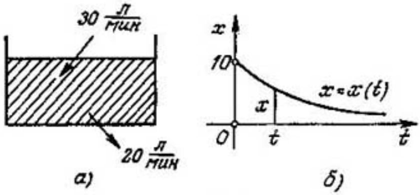


Fig. 228

cantidad $x$ de sal disminuye con el tiempo y, por consiguiente, $dx < 0$ cuando $dt > 0$. El volumen de la mezcla que se encuentra en el depósito en el instante $t$ será evidentemente igual a

$$v = 100 + 30t - 20t = 100 + 10t.$$

Por eso, *la concentración de sal* (es decir, la cantidad de sal por unidad de volumen de mezcla) en el instante $t$, será igual a

$$\frac{x}{100+10t}. \tag{11}$$

La variación de la cantidad de sal $-dx$ durante un intervalo de tiempo infinitamente pequeño $[t, t + dt]$ se obtiene multiplicando por la concentración de sal (11) el volumen de mezcla $20\,dt$ que se derrama en el transcurso de este intervalo. De aquí obtenemos la ecuación diferencial

$$-dx = \frac{x}{100+10t}\cdot 20\,dt,$$

o sea,

$$dx = -\frac{2x}{10+t}\,dt. \tag{12}$$

Además, de los datos del problema se deduce la condición inicial

$$x\,|_{t=0} = 10. \tag{13}$$

Separando las variables en la ecuación (12) e integrando, obtenemos sucesivamente

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2}{10+t}\,dt$$

y

$$\int \frac{dx}{x} = -2\int \frac{dt}{10+t},$$

es decir,

$$\ln x = -2 \ln (10 + t) + \ln C$$

y, por consiguiente,

$$x = \frac{C}{(10+t)^2}.$$

Tomando $t = 0$ a partir de las condiciones iniciales (13), hallamos $10 = \frac{C}{100}$, es decir, $C = 1000$. Por eso, **la ley de variación** de la cantidad de sal $x$ en kilogramos en el depósito, en función del tiempo $t$ en minutos (fig. 228, *b*), se da por la fórmula

$$x = \frac{1000}{(10+t)^2}. \tag{14}$$

Notemos que conociendo la cantidad de sal restante en el depósito (ésta se calcula fácilmente midiendo el volumen del depósito y la concentración de sal de la mezcla en él) se puede determinar con ayuda de la fórmula (14) el tiempo que ha transcurrido después del inicio del proceso. Sobre este principio se basa el cálculo de la edad de los mares y océanos.

## § 4. Ecuaciones diferenciales homogéneas de primer orden

La noción de ecuación diferencial homogénea de primer orden está relacionada con las *funciones homogéneas*.

Un polinomio

$$P(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$$

se llama *homogéneo* de grado $n$, si todos sus términos son del mismo grado $n$, es decir, para cada término $a_{ij}x^iy^j$ tenemos

$$i + j = n.$$

Por ejemplo,

$$P(x, y) = 2x^2 - 3xy - 5y^2 \tag{1}$$

es un polinomio homogéneo de grado 2. Notemos que si los argumentos $x$ e $y$ de un polinomio homogéneo de grado $n$ se reemplazan por las magnitudes $kx$ y $ky$, proporcionales, como resultado se obtendrá la multiplicación de este polinomio por la potencia $n$-ésima del coeficiente de proporcionalidad $k$. Por ejemplo, para el polinomio (1) tenemos

$$P(kx, ky) = 2(kx)^2 - 3(kx)(ky) - 5(ky)^2 = \\ = k^2(2x^2 - 3xy - 5y^2) = k^2 P(x, y).$$

Esta última propiedad es la base de la definición general de una función homogénea.

DEFINICIÓN 1. *Una función $P(x, y)$ se llama* ***homogénea de grado*** $n$, *si para todo número $k$ tiene lugar la identidad*

$$P(kx, ky) \equiv k^n P(x, y).$$

Examinemos ahora la ecuación diferencial

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0. \tag{2}$$

DEFINICIÓN 2. *Una ecuación diferencial de primer orden (2) se llama homogénea, si los coeficientes $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ de las diferenciales de las variables $x$ e $y$, son funciones homogéneas del mismo grado.*

Se puede demostrar que con ayuda de la sustitución

$$u = \frac{y}{x} \qquad \text{o} \quad v = \left(\frac{x}{y}\right), \tag{3}$$

donde $u$ es una función incógnita, la ecuación diferencial homogénea (2) se reduce a una ecuación con variables separables.

EJEMPLO. Resolver la ecuación diferencial

$$(x + y)\,dx + x\,dy = 0. \tag{4}$$

Aquí $P = x + y$ y $Q = x$, son funciones homogéneas de primer grado, por eso, la ecuación (4) es homogénea. Según la indicación, tomamos

$$\frac{y}{x} = u \tag{5}$$

e

$$y = xu,$$

donde $u$ es una función incógnita. De aquí

$$dy = x\,du + u\,dx.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (4) tendremos

$$(x + xu)\,dx + x\,(x\,du + u\,dx) = 0$$

o

$$x\,du + (2u + 1)\,dx = 0.$$

Separando las variables obtenemos

$$\frac{du}{2u+1} = -\frac{dx}{x}.$$

Para comodidad de los cálculos multiplicamos los dos miembros de la última igualdad por 2, e integrándolos término a término tendremos

$$\int \frac{2du}{2u+1} = -2\int \frac{dx}{x};$$

de dondo hallamos

$$\ln(2u + 1) = -2\ln x + \ln C \quad \text{y} \quad 2u + 1 = \frac{C}{x^2}.$$

En virtud de la fórmula (5) tenemos $\frac{2y}{x}+1=\frac{C}{x^2}$ y, por consiguiente,

$$y=-\frac{x}{2}+\frac{C_1}{x}, \tag{6}$$

donde $C_1=C/2$ es una constante arbitraria.

En el transcurso de la resolución de esta ecuación nos hemos visto obligados a efectuar la división por las funciones $x$ y $2u+1$. Anulándolas obtenemos las soluciones posibles

1) $x=0$ y 2) $2u+1=0$; de donde $y=-\frac{x}{2}$.

Es fácil de verificar que las dos funciones 1) y 2) satisfacen la ecuación dada (4); la última de ellas se obtiene a partir de la solución general (6) para $C_1=0$.

Sea ahora una ecuación diferencial homogénea de forma

$$y'=f(x, y) \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx}=f(x, y). \tag{7}$$

Escribiendo la última ecuación en forma de diferenciales, obtendremos

$$dy=f(x, y)\,dx.$$

El coeficiente de $dy$ es igual a 1, es decir, una función homogénea de grado cero; esto significa que $f(x, y)$ debe ser también una función homogénea de grado cero.

De este modo *la ecuación diferencial* (7) *es homogénea si, y sólo si, su segundo miembro* $f(x, y)$ *es una función homogénea de grado cero* [1]).

## § 5. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es de la forma (véase el § 1)

$$a(x)\,y'+b(x)\,y+c(x)=0, \tag{1}$$

donde $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ son funciones dadas. Si $a(x)\neq 0$, la ecuación (1) puede ser escrita en la **forma reducida**

$$y'+p(x)\,y=f(x), \tag{2}$$

donde $p(x)=b(x)/a(x)$ y $f(x)=-c(x)/a(x)$ ($f(x)$ es *el segundo miembro de la ecuación*). Supondremos que el coeficiente $p(x)$ y el segundo miembro $f(x)$ de la ecuación (2) son continuos en un cierto intervalo $(a, b)$.

Para resolver la ecuación (2) representamos la función buscada $y$ como el producto de dos factores:

$$y=uv, \tag{3}$$

[1]) Es decir, el segundo miembro de esta ecuación no cambia cuando se sustituyen $x$ por $kx$ e $y$ por $ky$, donde $k$ es un coeficiente de proporcionalidad arbitrario.

donde $u$ es una solución no nula de la ecuación homogénea correspondiente

$$u' + p(x)\, u = 0 \tag{4}$$

y $v$ es una nueva función incógnita. Como

$$y' = vu' + uv', \tag{5}$$

introduciendo las expresiones (3) y (5) en la ecuación diferencial (2), obtendremos

$$v\,[u' + p(x)\, u] + uv' = f(x) \tag{6}$$

o, en virtud de la (4), tenemos

$$uv' = f(x). \tag{7}$$

Notemos que de hecho la función $u$ se elige de tal modo que el **coeficiente de $v$ en la ecuación** (6) **sea nulo.**

A partir de las ecuaciones (4) y (7) se hallan sucesivamente las funciones $u$ y $v$ eligiendo para $u$ un valor concreto cualquiera, distinto de cero. Introduciendo las expresiones obtenidas para $u$ y $v$ en la fórmula (3), hallamos la función buscada $y$.

OBSERVACIÓN. En práctica no hay necesidad de reducir la ecuación lineal (1) a la forma (2); se puede aplicar directamente la sustitución (3).

EJEMPLO 1. Resolver la ecuación

$$xy' + 2y = x^2. \tag{8}$$

La ecuación (8) es evidentemente lineal. Tomamos

$$y = uv, \quad y' = vu' + uv'. \tag{9}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (8), obtenemos

$$v\,(xu' + 2u) + xuv' = x^2.$$

Elijamos la función $u$ de modo que

$$xu' + 2u = 0; \tag{10}$$

en este caso

$$xuv' = x^2. \tag{11}$$

De la (10) obtenemos sucesivamente

$$x\frac{du}{dx} = -2u, \quad \frac{du}{u} = -2\frac{dx}{x}.$$

Integrando hallamos

$$\int \frac{du}{u} = -2\int \frac{dx}{x}, \text{ es decir, } \ln u = -2\ln x + \ln C_0,$$

y, por consiguiente, eligiendo $C_0 = 1$, obtendremos

$$u = \frac{1}{x^2}. \tag{12}$$

De donde mediante la (11) tenemos $x\cdot\frac{1}{x^2}\frac{dv}{dx}=x^2$, $\frac{dv}{dx}=x^3$ y, de este modo,

$$v=\int x^3\,dx=\frac{x^4}{4}+C, \tag{13}$$

donde $C$ es una constante arbitraria.

Así, en virtud de las (12) y (13), hallamos definitivamente

$$y=uv=\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^4}{4}+C\right), \quad \text{es decir,} \quad y=\frac{x^2}{4}+\frac{C}{x^2}.$$

EJEMPLO 2. Hallar la solución de la ecuación

$$(x+y)\,y'=1, \tag{14}$$

que satisface la condición inicial: $y=0$ para $x=-1$.

Por su aspecto, la ecuación (14) no es lineal. Sin embargo, si $x$ se considera función de $y$, entonces teniendo en cuenta que $y'=\frac{1}{x'}$ obtendremos la ecuación lineal

$$x'=x+y. \tag{15}$$

Tomamos, como siempre,

$$x=uv, \quad x'=\frac{dx}{dy}=v\frac{du}{dy}+u\frac{dv}{dy}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (15) tendremos

$$v\frac{du}{dy}+u\frac{dv}{dy}=uv+y. \tag{16}$$

De aquí, teniendo en cuenta que según la elección de $u$

$$\frac{du}{dy}=u, \tag{17}$$

obtenemos

$$u\frac{dv}{dy}=y. \tag{18}$$

De la (17) hallamos la solución particular

$$u=e^y. \tag{19}$$

Por eso, de la (18) se obtiene

$$e^y\frac{dv}{dy}=y, \quad dv=ye^{-y}\,dy$$

y, en consecuencia,

$$v=\int ye^{-y}\,dy=-ye^{-y}-e^{-y}+C \tag{20}$$

(hemos utilizando aquí la integración por partes). A partir de las (19) y (20) hallamos **la solución general**

$$x=uv=-y-1+Ce^y. \tag{21}$$

Tomando aquí $y=0$ para $x=-1$, obtendremos $-1=-1+C$, es decir, $C=0$. De este modo,

$$x=-y-1, \quad \text{es decir,} \quad y=-(x+1)$$

es la **solución particular buscada**.

EJEMPLO 3. La intensidad de la corriente $i$ en el circuito eléctrico de resistencia óhmica $R$ y de coeficiente de autoinducción $L$, satisface la ecuación diferencial

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E, \tag{22}$$

donde $E$ es la fuerza electromotriz (fig. 229, $a$). Se pide hallar la intensidad de la corriente $i$ al cabo de $t$ s después de la conexión, si $E$ varía según la ley sinusoidal

$$E=E_0\cos\omega t \tag{23}$$

e $i=0$ cuando $t=0$.

De la (22) tenemos

$$\frac{di}{dt}+\alpha i=\frac{E_0}{L}\cos\omega t, \tag{24}$$

donde, para abreviar, se considera que $\alpha=R/L$.

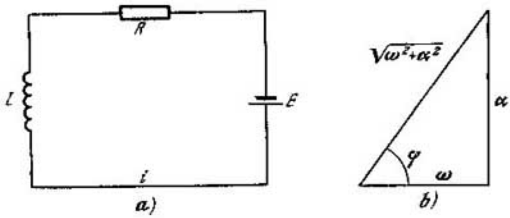


Fig. 229

Tomando $i=uv$, aplicando el procedimiento habitual obtendremos

$$\frac{du}{dt}+\alpha u=0,\quad u\frac{dv}{dt}=\frac{E_0}{L}\cos\omega t. \tag{25}$$

De aquí,

$$\frac{du}{u}=-\alpha\,dt,\qquad \ln u=-\alpha t$$

(¡omitimos la constante de integración!) y

$$u=e^{-\alpha t}. \tag{26}$$

De la (25) se deduce

$$e^{-\alpha t}\frac{dv}{\partial t}=\frac{E_0}{L}\cos\omega t,\qquad dv=\frac{E_0}{L}e^{\alpha t}\cos\omega t\,dt$$

y

$$v=\frac{E_0}{L}(I+C), \tag{27}$$

donde

$$I=\int e^{\alpha t}\cos\omega t\,dt \tag{28}$$

(una de las primitivas).

Integrando por partes dos veces, hallamos

$$I=\int e^{\alpha t}\,d\left(\frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega}\right)=e^{\alpha t}\,\frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega}-\int\frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega}\cdot\alpha e^{\alpha t}\,dt=$$

$$=e^{\alpha t}\,\frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega}+\frac{\alpha}{\omega}\int e^{\alpha t}\cdot d\left(\frac{\cos\omega t}{\omega}\right)=$$

$$=e^{\alpha t}\,\frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega}+\frac{\alpha}{\omega}\left[e^{\alpha t}\frac{\cos\omega t}{\omega}-\int\frac{\cos\omega t}{\omega}\cdot\alpha e^{\alpha t}\,dt\right]=$$

$$=\frac{1}{\omega}\,e^{\alpha t}\operatorname{sen}\omega t+\frac{\alpha}{\omega^2}\,e^{\alpha t}\cos\omega t-\frac{\alpha^2}{\omega^2}\,I;$$

de donde obtenemos

$$I=\frac{\frac{1}{\omega^2}\,e^{\alpha t}(\omega\operatorname{sen}\omega t+\alpha\cos\omega t)}{1+\frac{\alpha^2}{\omega^2}}=\frac{e^{\alpha t}(\omega\operatorname{sen}\omega t+\alpha\cos\omega t)}{\omega^2+\alpha^2}. \tag{29}$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula (27), hallamos

$$v=\frac{E_0}{L}\left(e^{\alpha t}\cdot\frac{\omega\operatorname{sen}\omega t+\alpha\cos\omega t}{\omega^2+\alpha^2}+C\right), \tag{30}$$

donde $C$ es una constante arbitraria.

Multiplicando las funciones $u$ y $v$ ((26) y (30)), obtendremos la ley de variación de la intensidad de la corriente

$$i=\frac{E_0}{L}\left(\frac{\omega\operatorname{sen}\omega t+\alpha\cos\omega t}{\omega^2+\alpha^2}+Ce^{-\alpha t}\right). \tag{31}$$

Para $t=0$ hallamos, a partir de la condición inicial,

$$0=\frac{E_0}{L}\left(\frac{\alpha}{\omega^2+\alpha^2}+C\right),\quad \text{es decir,}\quad C=-\frac{\alpha}{\omega^2+\alpha^2}.$$

Por consiguiente,

$$i=\frac{E_0}{L(\omega^2+\alpha^2)}(\omega\operatorname{sen}\omega t+\alpha\cos\omega t-\alpha e^{-\alpha t}). \tag{32}$$

Si $t$ es suficientemente grande, la magnitud $e^{-\alpha t}$ es pequeña ($\alpha>0$) y en la fórmula (32) se puede menospreciarla. En este caso, tendremos,

$$i\approx\frac{E_0}{L(\omega^2+\alpha^2)}(\omega\operatorname{sen}\omega t+\alpha\cos\omega t). \tag{33}$$

Tomando (fig. 229, *b*) $\omega=\sqrt{\omega^2+\alpha^2}\cos\varphi$, $\alpha=\sqrt{\omega^2+\alpha^2}\operatorname{sen}\varphi$, mediante la fórmula (33) obtendremos definitivamente

$$i\approx\frac{E_0}{L\sqrt{\omega^2+\alpha^2}}\operatorname{sen}(\omega t+\varphi)=\frac{E_0}{\sqrt{(L\omega)^2+R^2}}\operatorname{sen}(\omega t+\varphi)$$

donde $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{\omega}$ es la fase inicial de la corriente.

## § 6. Noción sobre el método de Euler

En los párrafos precedentes examinamos los tipos más simples de ecuaciones diferenciales de primer orden que admiten soluciones en cuadraturas [1]) (o como dicen a veces: que se integran en formas finales). Sin embargo, no hay un método general para hallar la solución exacta de una ecuación diferencial del primer orden arbitraria. Por eso adquieren gran importancia los **métodos aproximados de resolución** de ecuaciones diferenciales. Examinaremos el más simple de ellos, llamado *método de Euler*.

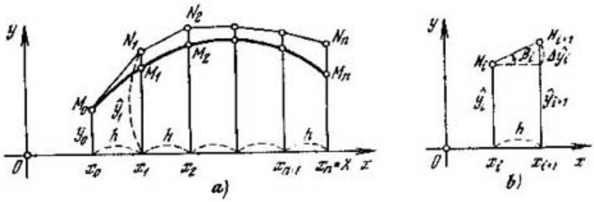


Fig. 230

Supongamos que en un segmento dado $x_0 \leqslant x \leqslant X$ hace falta hallar la solución de una ecuación diferencial del primer orden

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

con el segundo miembro continuo $f(x, y)$ que satisface la condición inicial

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Geométricamente, esto significa que para la ecuación diferencial (1) hace falta construir una curva integral $y = y(x)$ que pase por el punto $M_0(x_0, y_0)$ (fig. 230, *a*). Debido al sentido geométrico de la derivada obtenemos que en cada punto $M(x, y)$ de la curva integral, **su pendiente** (es decir, el coeficiente angular de la tangente) satisface la condición

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f(x, y) \tag{3}$$

Puesto que el segundo miembro de la ecuación diferencial (1) es supuestamente continuo, se puede considerar que en un pequeño trozo de la curva integral su pendiente **es constante**, es decir, que esta curva puede ser reemplazada aproximadamente por una línea quebrada.

[1]) Es decir, las soluciones expresadas por medio de integrales indefinidas.

En práctica este procedimiento se efectúa así: el segmento $[x_0, X]$ se divide en partes suficientemente pequeñas: $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, . . . . . ., $[x_{n-1}, X]$ cuyo número es igual a $n$, y sean

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

las longitudes de los segmentos de la subdivisión correspondientes. Para simplificar supongamos que estos segmentos son iguales entre sí (aunque esto no es obligatorio). En este caso

$$h_i = \frac{X - x_0}{n} = h = \text{const.} \tag{4}$$

La magnitud $h$ se llama *paso de subdivisión*.

Reemplacemos la curva $M_0M_1M_2 \ldots M_n$ con vértices $M_i\,(x_i, y_i)$, por la línea quebrada $N_0N_1N_2 \ldots N_n$ con vértices $N_i\,(x_i, \hat{y}_i)$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $\hat{y}_0 = y_0$), donde $N_0 = M_0$, y de pendientes sucesivas

$$\operatorname{tg}\beta_i = f(x_i, \hat{y}_i) = \hat{y}_i' \tag{5}$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \; \hat{y}_0' = y_0' = f(x_0, y_0))$$

(*polígono de Euler*) (fig. 230, $a$). La fig. 230, $b$ nos permite escribir las fórmulas de cálculo

$$\left.\begin{aligned} &x_i = x_0 + ih, \\ &\Delta\hat{y}_i = h\operatorname{tg}\beta_i = hf(x_i, \hat{y}_i), \\ &\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \Delta\hat{y}_i \end{aligned}\right\} \; (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \; \hat{y}_0 = y_0). \tag{6}$$

Notemos que, según el punto de vista mecánico, reemplazamos un proceso continuo descrito por la ecuación diferencial (1), por un **proceso de impulsos** que se desarrolla a velocidad constante en intervalos elementales $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) y cuya velocidad varía a saltos al pasar de un intervalo a otro.

Las desventajas de este método son: 1) poca precisión cuando el paso $h$ es grande, muchos cálculos cuando el paso es pequeño; 2) acumulación sistemática de errores.

El método de Euler sirve de base para otros métodos más perfectos de solución aproximada de ecuaciones diferenciales.

EJEMPLO. Aplicando el método de Euler se pide hallar sobre el segmento $[0; 0{,}5]$ la solución de la ecuación diferencial

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1. \tag{7}$$

Elijamos el paso $h = 0{,}1$. Los resultados del cálculo (con una exactitud de hasta $10^{-3}$) se muestran en la tabla:

| $x$ | $\hat{y}$ | $\hat{y}' = x + \hat{y}$ | $\Delta\hat{y} = \hat{y}'h$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,000 | 1,000 | 0,100 |
| 0,1 | 1,100 | 1,200 | 0,120 |
| 0,2 | 1,220 | 1,420 | 0,142 |
| 0,3 | 1,362 | 1,662 | 0,166 |
| 0,4 | 1,528 | 1,928 | 0,193 |
| 0,5 | 1,721 | | |

De este modo, $\hat{y}\,(0{,}5) = 1{,}721$. No es difícil hallar la solución exacta (¡la ecuación (7) es lineal!): $y = 2e^x - (x+1)$; de donde $y\,(0{,}5) = 2\sqrt{e} - 1{,}5 \approx \approx 2 \cdot 1{,}645 - 1{,}500 = 1{,}790$.

## § 7. Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Una ecuación diferencial de segundo orden resuelta respecto a la derivada de orden superior se presenta en la forma general siguiente:

$$y'' = f\,(x,\ y,\ y'). \tag{1}$$

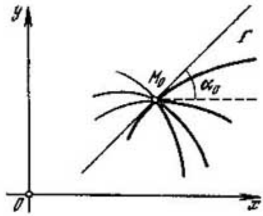


Fig. 231

La solución general

$$y = \varphi\,(x,\ C_1,\ C_2) \tag{2}$$

de esta ecuación contiene dos constantes arbitrarias independientes $C_1$ y $C_2$. Geométricamente, la solución general (2) es una infinidad de curvas integrales que dependen de dos parámetros independientes $C_1$ y $C_2$. Por cada punto $M_0\,(x_0,\,y_0)$ del plano $Oxy$ pasa en general **un haz de curvas integrales** (fig. 231). Por eso, para extraer de nuestra familia de curvas integrales una curva integral determinada $\Gamma$ no es suficiente con indicar el punto $M_0\,(x_0,\,y_0)$ por el cual debe pasar esta última curva, sino que es necesario indicar también la dirección en la cual la curva $\Gamma$ pasa por el punto $M_0$, es decir, dar la tangente del ángulo $\alpha_0$ formado por la tangente a esta curva en el punto $M_0$ y la dirección positiva del eje $Ox$. Analíticamente, escribiendo

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = y_0'$$

llegamos a *las condiciones iniciales*: $y = y_0,\ y' = y_0'$ para $x$

De acuerdo con la (2) tenemos

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \varphi\,(x_0,\ C_1,\ C_2), \\ y_0' &= \varphi_x'\,(x_0,\ C_1,\ C_2). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

El sistema (3) permite, en general, determinar las constantes $C_1$ y $C_2$ y, de este modo, hallar una **solución particular**

$$y = \varphi(x)$$

que satisfaga nuestra ecuación (1) y las condiciones iniciales dadas

$$y\,|_{x=x_0} = y_0 \quad \text{e} \quad y'\,|_{x=x_0} = y'_0 \tag{4}$$

(*problema de Cauchy*). Notemos que habitualmente al resolver problemas de física concretos, además de las ecuaciones diferenciales existen unas u otras condiciones iniciales (4) porque, por razones bien comprensibles, la solución de semejante problema debe ser **unívoca.**

Con ayuda de una ecuación diferencial de segundo orden se escribe *la ecuación fundamental de la dinámica.*

Sea un punto material de masa $m$ que se desplaza a lo largo del eje $Ox$ bajo la acción de una fuerza variable $F$. Si $j$ es la aceleración de este punto, entonces según la ley de Newton

$$mj = F. \tag{5}$$

En el caso más general la fuerza $F$ depende del tiempo $t$, de la coordenada $x$ (que caracteriza la posición del punto material sobre el eje $Ox$) y de la velocidad $\frac{dx}{dt}$ de este punto. Por consiguiente,

$$F = F\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right).$$

Por otra parte, como se sabe (§ 14 del cap. X), en el caso de un movimiento rectilíneo la aceleración $j$ es igual a la derivada segunda del camino respecto al tiempo, es decir, $j = \frac{d^2x}{dt^2}$.

Sustituyendo las magnitudes $F$ y $j$ en la ecuación (5) obtendremos la *ecuación diferencial de movimiento del punto*

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right).$$

Para describir enteramente el movimiento de un punto hace falta dar adicionalmente la posición inicial del mismo $x\,|_{t=t_0} = x_0$ y su velocidad inicial $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = v_0$ (*condiciones iniciales*).

## § 8. Tipos de ecuaciones diferenciales integrables de segundo orden

En el caso general, una ecuación diferencial de segundo orden no puede ser resuelta en forma finita. Examinaremos aquí algunos casos simples cuando la ecuación de segundo orden se resuelve con ayuda de **cuadraturas**, es decir, utilizando operaciones de integración indefinida.

TIPO I. Sea

$$y'' = f(x) \tag{1}$$

Integrando tendremos

$$y' = \int f(x)\,dx + C_1.$$

Integrando una vez más obtendremos definitivamente

$$y = \int dx \int f(x)\,dx + C_1 x + C_2,$$

donde $C_1$ y $C_2$ son constantes arbitrarias y las integrales indefinidas se interpretan como las primitivas de las funciones correspondientes.

TIPO II. Sea

$$y'' = f(y). \tag{2}$$

Supongamos que

$$y' = p.$$

Considerando $p$ como función de $y$, tendremos

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\,\frac{dp}{dy}.$$

Por consiguiente, la ecuación (2) tomará la forma

$$p\,\frac{dp}{dy} = f(y).$$

Separando las variables obtendremos

$$p\,dp = f(y)\,dy.$$

Integrando la última ecuación hallamos

$$\frac{p^2}{2} = \int f(y)\,dy + \frac{C_1}{2}$$

o sea,

$$p = \pm \sqrt{2 \int f(y)\,dy + C_1}.$$

Puesto que $p = \frac{dy}{dx}$, la ecuación precedente puede ser escrita así

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{2 \int f(y)\,dy + C_1}.$$

De aquí, separando una vez más las variables e integrando tendremos definitivamente

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y)\,dy + C_1}} = \pm (x + C_2).$$

No hace falta recordar esta fórmula complicada de la solución general de la ecuación del tipo II, sino que es necesario asimilar el procedimiento de integración.

TIPO III. Sea

$$y'' = f(y'). \tag{3}$$

Supongamos que

$$y' = p.$$

Entonces

$$y'' = \frac{dp}{dx}.$$

La ecuación (3) se escribirá así

$$\frac{dp}{dx} = f(p).$$

Separando las variables e integrando tendremos, sucesivamente,

$$\frac{dp}{f(p)} = dx \quad \text{y} \quad \int \frac{dp}{f(p)} = x + C_1.$$

Después de determinar a partir de esta última ecuación la magnitud $p = \frac{dy}{dx}$ se puede, integrando una vez más, hallar $y$.

EJEMPLO 1. Determinar la ley del movimiento de un punto material de masa $m$ lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial $v_0$.

Tomemos por eje $Ox$ la recta vertical que es la trayectoria del punto en movimiento y su dirección positiva la establecemos hacia arriba. Como origen de las coordenadas $O$ tomemos la posición inicial de nuestro punto material.

Si se desprecia la resistencia del aire, la única fuerza que se aplica a nuestro punto es la fuerza de la gravedad numéricamente igual a $mg$ y dirigida verticalmente hacia abajo. Según la ley de Newton, tenemos la siguiente ecuación diferencial de movimiento:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg,$$

o sea,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g. \tag{4}$$

Además, se deben satisfacer las condiciones iniciales:

$$x\,|_{t=0} = 0 \quad \text{y} \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0. \tag{5}$$

Efectuando la sustitución

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \text{y} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt},$$

obtendremos, mediante la ecuación (4),

$$\frac{dv}{dt} = -g, \quad \text{o} \quad dv = -g\,dt.$$

Integrando, tendremos

$$v = C_1 - gt.$$

Tomando ahora $t = 0$ y utilizando la segunda condición (5), hallamos $C_1 = v_0$. De aquí,

$$v = v_0 - gt \tag{6}$$

o sea,

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - gt.$$

Integrando una vez más, tendremos

$$x = C_2 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Para determinar la constante $C_2$ notemos que, en virtud de la primera condición (5), $x = 0$ para $t = 0$. Sustituyendo este valor en nuestra última ecuación obtendremos $C_2 = 0$. Por consiguiente

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \tag{7}$$

Esta es la ley de movimiento de un punto material lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial $v_0$ (sin tener en cuenta la resistencia del aire).

En particular, en el punto más elevado debe ser $v = 0$. De donde, a partir de la ecuación (6), determinamos el tiempo de elevación $T = \frac{v_0}{g}$ y de la ecuación (7), la altura de elevación correspondiente $H = \frac{v_0^2}{2g}$.

EJEMPLO 2. Resolver la ecuación

$$y'' = y^{-3}.$$

Tomamos aquí $y' = p$, de donde

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial obtendremos

$$p\,\frac{dp}{dy} = y^{-3}.$$

Separando las variables e integrando, tendremos, sucesivamente

$$p\,dp = y^{-3}\,dy \quad \text{y} \quad \frac{p^2}{2} = \frac{y^{-2}}{-2} + \frac{C_1}{2}.$$

De aquí,

$$p = \pm\sqrt{C_1 - y^{-2}} \qquad (C_1 > 0)$$

y, por consiguiente,

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{C_1 y^2 - 1}}{y}.$$

Esta es una ecuación de primer orden. Separando las variables, tenemos

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm\,dx.$$

Multiplicando ambos miembros por $C_1$, obtendremos

$$\frac{C_1 y\,dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm\,C_1\,dx.$$

Después de integrar, tendremos

$$\int \frac{C_1 y\, dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm (C_1 x + C_2).$$

Calculemos la integral del primer miembro de la ecuación. Notando que

$$C_1 y\, dy = \frac{1}{2}\, d\, (C_1 y^2 - 1)$$

tendremos, sucesivamente,

$$\int \frac{C_1 y\, dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \frac{1}{2} \int \frac{d\,(C_1 y^2 - 1)}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int (C_1 y^2 - 1)^{-1/2}\, d\,(C_1 y^2 - 1) = \frac{\frac{1}{2}(C_1 y^2 - 1)^{1/2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{C_1 y^2 - 1}.$$

De este modo, hallamos $\sqrt{C_1 y^2 - 1} = \pm (C_1 x + C_2)$ o, finalmente,

$$C_1 y^2 - 1 = (C_1 x + C_2)^2.$$

EJEMPLO 3. Hallar la solución de la ecuación $2y'y'' = 1$, que satisface las condiciones iniciales: $y = 0$, $y' = 1$ para $x = 1$.

Tomando

$$y' = p \qquad \text{e} \qquad y'' = \frac{dp}{dx}, \text{ tenemos, } 2p\, \frac{dp}{dx} = 1.$$

Separando aquí las variables obtendremos

$$2p\, dp = dx,$$

o, después de la integración,

$$p^2 = x + C_1.$$

Para determinar la constante $C_1$ utilizamos las condiciones iniciales $p = y' = 1$ para $x = 1$. Tenemos

$$1 = 1 + C_1;$$

de donde $C_1 = 0$ y, por consiguiente,

$$p^2 = x.$$

Extrayendo la raíz obtendremos

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{x},$$

delante de la raíz está escrito el signo «+», porque para $x = 1$ se debe tener $p = 1$.

Separando las variables e integrando, hallamos

$$y = \int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C_2.$$

Para determinar la constante $C_2$ tomamos $x = 1$ e $y = 0$; en este caso, $0 = \frac{2}{3} + C_2$, es decir, $C_2 = -\frac{2}{3}$. De este modo, la solución buscada es

$$y = \frac{2}{3}(x^{3/2} - 1).$$

## § 9. Casos de reducción del orden

Indicaremos dos casos cuando una ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' = f(x, y, y') \tag{1}$$

se reduce a una ecuación diferencial de primer orden.

CASO 1. Sea una ecuación diferencial (1) cuyo segundo miembro **no contiene** $x$, es decir, la ecuación de forma

$$y'' = f(y, y'). \tag{2}$$

Tomando aquí

$$y' = p \quad \text{e} \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p,$$

obtendremos una ecuación diferencial de primer orden

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p),$$

donde $y$ desempeña el papel de la variable independiente.

CASO 2. Sea una ecuación diferencial (1) cuyo segundo miembro **no contiene** $y$, es decir, la ecuación es de forma

$$y'' = f(x, y'). \tag{3}$$

Tomando

$$y' = p \quad \text{e} \quad y'' = \frac{dp}{dx}$$

obtendremos la ecuación de primer orden

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p),$$

donde $p$ es la función incógnita.

Notemos que los tipos I y III examinados más arriba (§ 8) son respectivamente casos particulares de las ecuaciones (2) y (3).

EJEMPLO 1. Resolver la ecuación

$$y'' = \frac{y'^2}{y} \tag{4}$$

Según el caso 1, tomamos $y' = p$ e $y'' = p\,\frac{dp}{dy}$. Entonces, la ecuación (4) adopta la forma

$$p\frac{dp}{dy} = \frac{p^2}{y}.$$

De aquí 1) $p = 0$, es decir, $y = C$; o 2) $\frac{dp}{dy} = \frac{p}{y}$ es decir, $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$ y

$$\ln p = \ln y + \ln C_1.$$

Elevando a potencia, tendremos

$$p = \frac{dy}{dx} = C_1$$

y, por consiguiente,

$$\frac{dy}{y} = C_1\,dx.$$

Después de la integración, obtenemos

$$\ln y = C_1 x + \ln C_2$$

y, en consecuencia,

$$y = C_2 e^{C_1 x},$$

donde $C_1$ y $C_2$ son constantes arbitrarias.

EJEMPLO 2. Hallar la solución de la ecuación

$$xy'' = 2x - y' \tag{5}$$

que satisface las condiciones iniciales: $y = \frac{1}{2}$ e $y' = 1$ para $x = 1$.

En la ecuación (5) tomamos $y' = p$ e $y'' = \frac{dp}{dx}$. En este caso,

$$x\frac{dp}{dx} = 2x - p,$$

o sea,

$$\frac{dp}{dx} = 2 - \frac{p}{x}. \tag{6}$$

La ecuación obtenida es homogénea [1]), por eso tomamos $\frac{p}{x} = u$ y, por consiguiente,

$$p = xu \quad \text{y} \quad \frac{dp}{dx} = x\frac{du}{dx} + u.$$

Sustituyendo en la ecuación (6), tendremos

$$x\frac{du}{dx} + u = 2 - u;$$

de donde

$$\frac{du}{dx} = \frac{2 - 2u}{x} \quad \text{ó} \quad \frac{du}{u-1} = -\frac{2dx}{x}.$$

Integrando, obtendremos,

$$\ln(u - 1) = -2\ln x + \ln C_1$$

y, por consiguiente,

$$u - 1 = \frac{C_1}{x^2}, \quad \text{es decir,} \quad \frac{p}{x} = 1 + \frac{C_1}{x^2} \quad \text{y} \quad p = x + \frac{C_1}{x}.$$

Para determinar la constante $C_1$ utilizamos las condiciones iniciales: $p = y' = 1$ para $x = 1$. Obtenemos $1 = 1 + C_1$, es decir, $C_1 = 0$, de este modo

$$p = \frac{dy}{dx} = x.$$

De aquí obtenemos

$$dy = x\,dx$$

y

$$y = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C_2. \tag{7}$$

[1]) La ecuación (6) puede ser considerada también como una ecuación lineal.

Determinamos la constante $C_2$ a partir de las condiciones iniciales. Considerando que $x = 1$ e $y = \frac{1}{2}$ en la fórmula (7), obtenemos $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C_2$, es decir, $C_2 = 0$. Por consiguiente, la solución particular buscada es

$$y = \frac{x^2}{2}.$$

## § 10. Noción sobre la integración de ecuaciones diferenciales con ayuda de series de potencias

Para simplificar, expondremos este método en el ejemplo de una ecuación diferencial de primer orden

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{1}$$

donde la función $f(x, y)$ es una función **infinitamente derivable**, es decir, tiene derivadas de todos los órdenes.

Buscaremos la solución del problema (1) en forma de una serie de Taylor (§ 14 del cap. XXI)

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots, \tag{2}$$

donde, para abreviar, se toma

$$y_0^{(n)} = y^{(n)}(x_0) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

El término independiente $y_0$ de la serie (2) se determina a partir de las condiciones iniciales (1). El coeficiente $y_0'$ se halla mediante la ecuación diferencial (1)

$$y_0' = f(x_0, y_0).$$

Para hallar el coeficiente $y_0''$ hace falta derivar la ecuación (1) respecto a $x$, suponiendo que $y$ es función de $x$. Tenemos

$$y'' = \frac{d}{dx}[f(x, y)],$$

de donde,

$$y_0'' = \left\{\frac{d}{dx}[f(x, y)]\right\}\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}},$$

etc. El problema de la convergencia de la serie (2) lo dejamos sin examinar.

Este método es también aplicable con cambios evidentes a las ecuaciones de segundo orden

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'. \tag{3}$$

EJEMPLO. Hallar con ayuda de series de potencias la solución de la ecuación diferencial.

$$y' = xy + y^2, \quad y(0) = 1 \tag{4}$$

Tomamos

$$y = y_0 + y_0' x + \frac{y_0''}{2!} x^2 + \frac{y_0'''}{3!} x^3 + \ldots \tag{5}$$

De las condiciones (4), tenemos

$$y_0 = 1, \quad y_0' = 0 \cdot 1 + 1^2 = 1.$$

Derivando el segundo miembro de la ecuación (4) como una función compuesta obtendremos

$$y'' = (y + xy') + 2yy'; \tag{6}$$

de donde $y_0'' = (1 + 0) + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 3$.

Luego, derivando la ecuación (6), tendremos

$$y''' = (2y' + xy'') + 2(y'^2 + yy'')$$

y, por consiguiente,

$$y_0''' = (2 + 0) + 2 \cdot (1 + 1 \cdot 3) = 10, \quad \text{etc.}$$

De este modo, a partir de la (5), nos queda

$$y = 1 + x + \frac{3}{2} x^2 + \frac{5}{3} x^3 + \ldots \tag{7}$$

Los resultados de estos cálculos pueden ser agrupados en la tabla siguiente:

| $x$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 1,117 | 1,273 | 1,480 | ... |

## § 11. Propiedades generales de las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden

Examinemos una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0, \tag{1}$$

cuyos coeficientes $p(x)$ y $q(x)$ son continuos.

Sean

$$y_1 = y_1(x) \quad \text{e} \quad y_2 = y_2(x)$$

soluciones particulares de la ecuación (1) [1].

DEFINICIÓN. *Dos soluciones $y_1$ e $y_2$ se llaman* ***linealmente dependientes*** *si se pueden elegir números constantes $a_1$ y $a_2$ simultáneamente distintos de cero, tales que una combinación lineal de estas funciones sea*

---

[1] La palabra «particulares» se entiende aquí en el sentido de que estas soluciones no contienen constantes arbitrarias.

*idénticamente igual a cero, es decir, si*

$$a_1y_1 + a_2y_2 \equiv 0. \tag{2}$$

En caso contrario, cuando es imposible elegir tales números, se dice que las soluciones $y_1$ e $y_2$ son *linealmente independientes.* En otras palabras, si las funciones $y_1$ e $y_2$ son linealmente independientes y tiene lugar la identidad (2), entonces $a_1 = a_2 = 0$.

Es evidente que *las soluciones $y_1$ e $y_2$ serán linealmente dependientes si y sólo si, son mutuamente proporcionales*, es decir, si

$$y_2 = ay_1 \tag{3}$$

(o viceversa), donde $a$ es un coeficiente de proporcionalidad constante.

Efectivamente, si la condición (3) se cumple, se puede escribir

$$a_1y_1 + a_2y_2 \equiv 0,$$

donde $a_1 = a$ y $a_2 = -1 \neq 0$ y, por consiguiente, estas soluciones son linealmente dependientes.

Por el contrario, si las soluciones $y_1$ e $y_2$ son linealmente dependientes tiene lugar la identidad

$$a_1y_1 + a_2y_2 \equiv 0,$$

donde por lo menos una de las constantes $a_1$ ó $a_2$ es distinta de cero. Suponiendo, por ejemplo, que $a_2 \neq 0$ y $a = -a_1/a_2$ obtendremos $y_2 = ay_1$.

La noción de dependencia lineal es también aplicable a todo par de funciones. Se definen análogamente la dependencia y la independencia lineal de varias funciones.

EJEMPLO. Las funciones $e^{k_1x}$ y $e^{k_2x}$ son **linealmente independientes** para $k_2 \neq k_1$.

En efecto admitamos que existe la relación

$$a_1e^{k_1x} + a_2e^{k_2x} \equiv 0,$$

donde por lo menos uno de los coeficientes $a_1$ ó $a_2$, por ejemplo $a_2$, es distinto de cero. En este caso obtendremos la identidad

$$e^{(k_2-k_1)x} \equiv -\frac{a_1}{a_2},$$

lo que es imposible porque el primer miembro de esta igualdad varía con la variación de $x$, mientras que su segundo miembro es constante.

Conociendo dos soluciones particulares linealmente independientes $y_1$ e $y_2$ de la ecuación (1) es fácil obtener la solución general de esta ecuación. Se puede enunciar el teorema siguiente.

TEOREMA. *Si $y_1$ e $y_2$ son soluciones particulares linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo* *orden,* (1), *entonces la solución general de esta ecuación será una combinación lineal de estas soluciones particulares, es decir, la solución general de la ecuación* (1) *es de la forma*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2, \tag{4}$$

*donde* $C_1$ *y* $C_2$ *son constantes arbitrarias* $(-\infty < C_1 < +\infty, -\infty < C_2 < +\infty)$.

DEMOSTRACION En efecto, puesto que $y_1$ e $y_2$ son soluciones de la ecuación (1), tenemos

$$y_1'' + p(x)\, y_1' + q(x)\, y_1 \equiv 0 \tag{5}$$

y

$$y_2'' + p(x)\, y_2' + q(x)\, y_2 \equiv 0. \tag{6}$$

Sustituyendo la expresión (4) en el primer miembro de la ecuación (1) obtenemos, en virtud de las identidades (5) y (6)

$$\begin{aligned}(C_1y_1 + C_2y_2)'' &+ p(x)(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(x)(C_1y_1 + C_2y_2) = \\ &= C_1y_1'' + C_2y_2'' + p(x)\, C_1y_1' + p(x)\, C_2y_2' + q(x)\, C_1y_1 + \\ &\quad + q(x)\, C_2y_2 = C_1[y_1'' + p(x)\, y_1' + q(x)\, y_1] + \\ &\quad + C_2[y_2'' + p(x)\, y_2' + q(x)\, y_2] = \\ &\quad = C_1\cdot 0 + C_2\cdot 0 \equiv 0.\end{aligned}$$

De donde se deduce que la función

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \tag{7}$$

será solución de la ecuación (1), **cualquiera que sea** la elección de las constantes $C_1$ y $C_2$.

Si las soluciones $y_1$ e $y_2$ son linealmente independientes, la igualdad-(7) será la **solución general** de la ecuación diferencial (1) porque ella contiene dos constantes arbitrarias $C_1$ y $C_2$ las cuales no pueden, en este caso, ser reducidas a una sola, es decir, éstas son independientes.

Se puede demostrar que la fórmula (7) da **todas las soluciones** de la ecuación diferencial lineal correspondiente (1).

OBSERVACIÓN Si las soluciones particulares $y_1$ e $y_2$ son linealmente dependientes, la solución (4) no será general. En efecto, supongamos que $y_1$ e $y_2$ son linealmente dependientes, es decir, que existe la relación $y_2 = ay_1$, donde $a$ es una constante. Sustituyendo $y_2$ en la expresión (4) tendremos

$$y = C_1y_1 + C_2ay_1$$

o

$$y = Cy_1, \tag{8}$$

donde $C = C_1 + aC_2$. Esta solución contiene sólo una constante arbitraria $C$ y por eso no puede ser general.

Entonces, para hallar la solución general de la ecuación (1) es suficiente conocer dos soluciones particulares linealmente independientes $y_1$ e $y_2$ de esta ecuación.

## § 12. Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes

Sea dada una ecuación diferencial lineal homogénea

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{1}$$

cuyos coeficientes $p$ y $q$ son constantes.

Buscaremos una solución particular de la ecuación (1) de la forma

$$y = e^{kx}, \tag{2}$$

donde $k$ es un número constante a determinar. De la (2) deducimos

$$y' = ke^{kx} \quad \text{e} \quad y'' = k^2e^{kx}.$$

Sustituyendo $y$, $y'$, $y''$ en la ecuación (1) obtendremos

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$$

o, simplificando por el factor no nulo $e^{kx}$, hallamos

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{3}$$

La ecuación cuadrática (3) a partir de la cual se determina el número $k$ se llama *ecuación característica* de la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes (1) dada. Notemos que para escribir la ecuación característica (3) es suficiente reemplazar en la ecuación diferencial (1) las derivadas $y''$, $y'$ y la función $y$ por las potencias correspondientes de $k$ considerando en este caso la función $y$ como una derivada de orden cero.

Resolviendo la ecuación característica (3) obtendremos

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \tag{4}$$

Aquí pueden presentarse tres casos distintos.

CASO I. Si

$$\frac{p^2}{4} - q > 0, \tag{5}$$

en virtud de la fórmula (4), la ecuación característica (3) tiene dos raíces reales y distintas $k_1$ y $k_2$. Por consiguiente, la ecuación lineal (1) admite dos soluciones particulares distintas

$$y_1 = e^{k_1x} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{k_2x}.$$

Puesto que $k_1 \neq k_2$, estas soluciones, como hemos visto, (ejemplo 1 del § 11) son linealmente independientes. Por consiguiente, la solución general para el caso I es la siguiente

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{6}$$

EJEMPLO 1. Sea

$$y'' - 2y' - 8y = 0. \tag{7}$$

Resolviendo la ecuación característica

$$k^2 - 2k - 8 = 0$$

hallamos sus raíces

$$k_1 = 4, \quad k_2 = -2.$$

La solución general de la ecuación (7) es de la forma

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}.$$

CASO II Si

$$\frac{p^2}{4} - q = 0, \tag{8}$$

en virtud de la fórmula (4), la ecuación característica (3) tiene una sola raíz

$$k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}.$$

Esta raíz se denomina *múltiple.* Por eso una solución particular de la ecuación (1) será

$$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}.$$

Toda otra solución particular $y_2$, linealmente independiente de $y_1$, será necesariamente de la forma

$$y_2 = y_1 \cdot z(x), \tag{9}$$

donde $z = z(x)$ es una función de $x$ no idénticamente constante. De aquí,

$$y_2 = e^{-\frac{p}{2}x} z.$$

Derivando, hallamos

$$y_2' = e^{-\frac{p}{2}x} z' + e^{-\frac{p}{2}x} \cdot \left(-\frac{p}{2}\right) z = e^{-\frac{p}{2}x}\left(z' - \frac{p}{2} z\right)$$

e

$$y_2'' = e^{-\frac{p}{2}x}\left(z'' - \frac{p}{2} z'\right) - \frac{p}{2} e^{-\frac{p}{2}x} \left(z' - \frac{p}{2} z\right) =$$

$$= e^{-\frac{p}{2}x} \left(z'' - pz' + \frac{p^2}{4} z\right).$$

Sustituyendo $y_2$, $y_2'$, $y_2''$ en la ecuación (1) obtendremos después de la simplificación por el factor común $e^{-\frac{p}{2}x}$

$$z'' - pz' + \frac{p^2}{4} z + pz' - \frac{p^2}{2} z + qz = 0,$$

o

$$z'' + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) z = 0.$$

Por fin según la condición (8) tendremos

$$z'' = 0.$$

De donde

$$z' = a \quad \text{y} \quad z = ax + b,$$

donde $a$ y $b$ son constantes arbitrarias.

Por consiguiente

$$y_2 = (ax + b)\, e^{-\frac{px}{2}}. \tag{10}$$

Puesto que nos interesa solamente la solución particular, se puede tomar $a = 1$ y $b = 0$. Entonces,

$$y_2 = xe^{-\frac{px}{2}}.$$

De este modo, la solución general de la ecuación (1) en el caso II será

$$y = e^{-\frac{p}{2}x} (C_1 + C_2x). \tag{11}$$

Notemos que en realidad la fórmula (10) ha dado ya esta solución general, porque toda solución de la ecuación (1) puede ser presentada en la forma (10).

EJEMPLO 2. Sea $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Resolviendo la ecuación característica $k^2 - 6k + 9 = 0$, hallamos la raíz múltiple $k_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 9} = 3$. Por consiguiente, la solución general se escribirá así

$$y = e^{3x} (C_1 + C_2x).$$

CASO III Si

$$\frac{p^2}{4} - q < 0,$$

según la fórmula (4), la ecuación característica (3) tiene dos raíces complejas conjugadas

$$k_1 = \alpha + \beta i \quad \text{y} \quad k_2 = \alpha - \beta i,$$

donde $\alpha = -\frac{p}{2}$ y $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

En este caso, las soluciones particulares $y_1$ e $y_2$ de la ecuación (1) serán las siguientes:

$$y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}\,[1]. \tag{12}$$

De aquí, la solución general de la ecuación (1) puede ser escrita formalmente así:

$$y = \overline{C}_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + \overline{C}_2 e^{(\alpha-\beta i)x},$$

o bien,

$$y = e^{\alpha x}(\overline{C}_1 e^{i\beta x} + \overline{C}_2 e^{-i\beta x}), \tag{13}$$

donde $\overline{C}_1$ y $\overline{C}_2$ son constantes complejas elegidas de tal modo que la expresión (13) sea real.

En la expresión (13) se pueden eliminar las magnitudes imaginarias. De acuerdo con las fórmulas de Euler (§ 16 del cap. XXI) tenemos

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x \quad \text{y} \quad e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x$$

De aquí,

$$y = e^{\alpha x}\,[(\overline{C}_1 + \overline{C}_2)\cos\beta x + i\,(\overline{C}_1 - \overline{C}_2)\operatorname{sen}\beta x].$$

Tomando

$$\overline{C}_1 + \overline{C}_2 = C_1 \quad \text{e} \quad i\,(\overline{C}_1 - \overline{C}_2) = C_2,$$

obtendremos definitivamente

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2 \operatorname{sen}\beta x), \tag{14}$$

donde $C_1$ y $C_2$ son números reales constantes arbitrarios (debido a que las constantes $\overline{C_1}$ y $\overline{C_2}$ son arbitrarias). Esto es efectivamente la solución general bajo forma real de la ecuación (1) para el caso III.

En particular, si en la ecuación característica (3) tenemos $p = 0$ y $q = \beta^2$, las raíces $k_{1,2} = \pm\beta i$ son números imaginarios puros ($\alpha = 0$) y la solución general de la ecuación diferencial correspondiente

$$y'' + \beta^2 y = 0$$

---

[1] Por *derivada de una función compleja*

$$f_1(x) + i f_2(x)$$

de una variable real $x$, donde $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son funciones reales de $x$ e $i$ es la unidad imaginaria, se entiende, por definición, la expresión

$$[f_1(x) + i f_2(x)]' = f_1'(x) + i f_2'(x).$$

Utilizando la fórmula (4) del § 16 del cap. XXI es fácil verificar que si $k = \alpha + i\beta$, entonces $(e^{kx})' = ke^{kx}$. Por consiguiente, las funciones $y_1$ e $y_2$ así como toda combinación lineal de ellas satisfacen nuestra ecuación diferencial.

será obtenida de la forma

$$y = C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x. \tag{15}$$

OBSERVACIÓN. Para las aplicaciones se utiliza a veces otro tipo de la fórmula (14). Precisamente, tomando

$$C_1 = A \operatorname{sen} \varphi \quad \text{y} \quad C_2 = A \cos \varphi, \tag{16}$$

donde $A$ y $\varphi$ son nuevas constantes arbitrarias ($A \geqslant 0$), tendremos

$$y = Ae^{\alpha x} \operatorname{sen} (\beta x + \varphi). \tag{17}$$

De la (16) obtenemos

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{C_1}{C_2}.$$

Si la variable $x$ se interpreta como el tiempo, entonces desde el punto de vista físico la función (17) describe un proceso oscilatorio cuya amplitud decrece cuando $\alpha < 0$ y crece indefinidamente cuando $\alpha > 0$.

EJEMPLO 3. Sea dada la ecuación

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

Resolviendo la ecuación característica $k^2 - 6k + 13 = 0$, obtenemos las raíces complejas $k_{1,2} = 3 \pm 2i$. Aquí $\alpha = 3$, $\beta = 2$. Por consiguiente, en

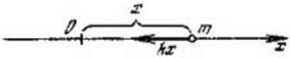


Fig. 232

virtud de la fórmula (14) la solución general se escribirá así

$$y = e^{3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x).$$

EJEMPLO 4. Un punto material de masa $m$ es atraído por un centro fijo $O$ con una fuerza proporcional a la distancia $x$ del punto al centro de atracción (fuerza elástica) (fig. 232). Hallar la ley de movimiento de este punto (despreciando la resistencia del medio).

Según la ley de Newton, tenemos

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

donde $k$ es el coeficiente de proporcionalidad y el «—» indica que el signo de la fuerza aplicada al punto es opuesto al de su desplazamiento $x$. De aquí,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \text{donde} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Acabamos de obtener una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Las raíces de la ecuación característica correspondiente

$$k^2 + \omega^2 = 0$$

son imaginarias puras: $k_{1,2} = \pm \omega i$. Por eso, en virtud de la fórmula (14) ($\alpha = 0$, $\beta = \omega$) tenemos

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t.$$

Se puede tomar $C_1 = A \operatorname{sen} \varphi$, $C_2 = A \cos \varphi$, donde $A$ y $\varphi$ son otras constantes arbitrarias. De aquí

$$x = A \operatorname{sen} (\omega t + \varphi),$$

es decir, el punto material efectúa en nuestras condiciones oscilaciones armónicas periódicas alrededor del centro de atracción con una *amplitud* $A$ y *fase inicial* $\varphi$.

## § 13. Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes

Examinemos una ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden

$$y'' + yp' + qy = f(x), \tag{1}$$

donde $p$ y $q$ son números constantes dados y $f(x)$ (el segundo miembro de la ecuación) es una función conocida de $x$. Tiene lugar el teorema siguiente.

TEOREMA. *La solución general de la ecuación no homogénea* (1) *es igual a la suma de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente*

$$\bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y} = 0 \tag{2}$$

*más una solución particular de la ecuación no homogénea* (1).

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{3}$$

la solución general de la ecuación sin segundo miembro (2) y sea $z$ una solución particular de la ecuación correspondiente con el segundo miembro (1). Es evidente que tenemos

$$\bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y} = 0 \quad \text{y} \quad z'' + pz' + qz = f(x).$$

Sumando miembro a miembro estas ecuaciones y teniendo en cuenta que la derivada de una suma es igual a la suma de derivadas, obtendremos

$$(\bar{y} + z)'' + p(\bar{y} + z)' + q(\bar{y} + z) = f(x).$$

Está claro aquí que la función

$$y = \bar{y} + z \tag{4}$$

será solución de la ecuación (1) y que esta solución será general porque, según la fórmula (3), ella contiene dos constantes arbitrarias independientes $C_1$ y $C_2$.

Como sabemos hallar la solución general $\bar{y}$ de la ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes, nos queda solamente indicar un procedimiento para hallar una solución particular $z$ de la ecuación no homogénea correspondiente (1), donde $p$ y $q$ son constantes.

Durante el examen de este último problema nos limitamos a estudiar los segundos miembros $f(x)$ más simples. En este caso, para hallar una solución particular de la ecuación (1) se aplica generalmente **el método de coeficientes indeterminados.**

CASO I. El segundo miembro de la ecuación (1) es una **función exponencial**

$$f(x) = ae^{mx} \qquad (a \neq 0).$$

Buscamos la solución particular $z$ también bajo la forma de una función exponencial

$$z = Ae^{mx}, \tag{5}$$

donde $A$ es un coeficiente indeterminado. De aquí,

$$z' = Ame^{mx} \quad \text{y} \quad z'' = Am^2e^{mx}.$$

Sustituyendo con $f(x)$ y las expresiones de $z$ y de sus derivadas en la ecuación (1), tendremos, después de simplificar por $e^{mx}$,

$$A(m^2 + pm + q) = a. \tag{6}$$

Son posibles dos casos: 1) $m$ no es una raíz de la ecuación característica, es decir,

$$m^2 + pm + q \neq 0.$$

Entonces, $A = \dfrac{a}{m^2+pm+q}$ y, por consiguiente,

$$z = \frac{ae^{mx}}{m^2+pm+q};$$

2) el número $m$ es raíz de la ecuación característica, es decir,

$$m^2 + pm + q = 0. \tag{7}$$

En este caso la ecuación (6) es contradictoria y, por consiguiente, la ecuación diferencial (1) no tiene solución particular de la forma (5).

En este caso: a) si $m$ es una raíz simple de la ecuación característica (es decir, la otra raíz de esta ecuación es distinta de $m$), la solución particular (1) debe ser tomada de forma

$$z = Axe^{mx}$$

y, b) si $m$ es una raíz múltiple de la ecuación característica, la solución particular de la ecuación (1) debe buscarse de la forma

$$z = Ax^2e^{mx}.$$

Esta recomendación puede ser verificada directamente.

EJEMPLO 1. Sea dada la ecuación $y'' - 5y' + 6y = e^x$.
Resolvamos primero la ecuación sin segundo miembro

$$\bar{y}'' - 5\bar{y}' + 6\bar{y} = 0.$$

La ecuación característica es aquí de la forma $k^2 - 5k + 6 = 0$. Sus raíces son $k_1 = 3$, $k_2 = 2$. Por consiguiente, la solución general de la ecuación sin segundo miembro será

$$\bar{y} = C_1e^{3x} + C_2e^{2x}.$$

Puesto que $m = 1$ no es raíz de la ecuación característica, buscamos una solución particular de la ecuación con el segundo miembro bajo la forma siguiente

$$z = Ae^x,$$

donde $A$ es un coeficiente indeterminado. Derivando tendremos

$$z' = Ae^x, \quad z'' = Ae^x.$$

Introduciendo estas expresiones en nuestra ecuación no homogénea obtendremos

$$Ae^x - 5Ae^x + 6Ae^x = e^x \quad \text{o sea,} \quad 2A = 1.$$

De aquí, $A = \frac{1}{2}$. Entonces, una solución particular de la ecuación con el segundo miembro es

$$z = \frac{1}{2}e^x.$$

En virtud del teorema precedente, la solución general de esta ecuación tiene la forma siguiente

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^x.$$

CASO II. El segundo miembro de la ecuación no homogénea (1) es un **polinomio trigonométrico**

$$f(x) = M \cos \omega x + N \operatorname{sen} \omega x. \tag{8}$$

Buscamos una solución particular $z$ de esta ecuación bajo forma de un polinomio trigonométrico

$$z = A \cos \omega x + B \operatorname{sen} \omega x,$$

donde $A$ y $B$ son coeficientes indeterminados.
Derivando obtendremos

$$z' = -A\omega \operatorname{sen} \omega x + B\omega \cos \omega x \quad \text{y}$$

$$z'' = -A\omega^2 \cos \omega x - B\omega^2 \operatorname{sen} \omega x.$$

De aquí, sustituyendo estas expresiones en la ecuación (1) y agrupando los términos que tienen $\cos \omega x$ y $\operatorname{sen} \omega x$, tendremos

$$(-A\omega^2 + Bp\omega + Aq) \cos \omega x + (-B\omega^2 - Ap\omega + Bq) \operatorname{sen} \omega x \equiv$$
$$\equiv M \cos \omega x + N \operatorname{sen} \omega x.$$

Puesto que la última igualdad es una identidad, los coeficientes de $\cos \omega x$ y $\operatorname{sen} \omega x$, que figuran en los primero y segundo miembros de esta igualdad, deben ser iguales entre sí y obtendremos

$$A(q-\omega^2)+Bp\omega=M, \quad -Ap\omega+B(q-\omega^2)=N. \tag{9}$$

A partir de este sistema podemos en general calcular los coeficientes $A$ y $B$. El único caso en que el sistema (9) resulta incompatible, es cuando

$$p=0 \quad q=\omega^2$$

(es decir, cuando $\pm i\omega$ son raíces de la ecuación característica). Entonces, la solución particular $z$ debe ser buscada en la siguiente forma

$$z=x(A\cos\omega x+B\operatorname{sen}\omega x).$$

EJEMPLO 2. Sea la ecuación

$$y''-4y'+4y=\cos x. \tag{10}$$

La ecuación homogénea correspondiente será

$$\overline{y}''-4\overline{y}'+4\overline{y}=0. \tag{11}$$

Resolviendo la ecuación característica $k^2-4k+4=0$, hallamos la raíz múltiple $k_{1,2}=2\pm\sqrt{4-4}=2$. Por consiguiente, la solución general de la ecuación homogénea (11) es

$$\overline{y}=e^{2x}(C_1+C_2x).$$

Buscaremos una solución particular de la ecuación (10) de la forma:

$$z=A\cos x+B\operatorname{sen} x,$$

donde $A$ y $B$ son coeficientes indeterminados.

Derivando, obtendremos

$$z'=-A\operatorname{sen} x+B\cos x, \quad z''=-A\cos x-B\operatorname{sen} x.$$

Sustituyendo $z$, $z'$ y $z''$ en la ecuación (10), tendremos

$$-A\cos x-B\operatorname{sen} x+4A\operatorname{sen} x-4B\cos x+4A\cos x+4B\operatorname{sen} x=\cos x.$$

Igualando los coeficientes de $\cos x$ y de $\operatorname{sen} x$ en el primer miembro y en el segundo, obtendremos el sistema

$$3A-4B=1, \quad 4A+3B=0.$$

Resolviendo estas ecuaciones conjuntamente hallamos $A=\frac{3}{25}$ y $B=-\frac{4}{25}$ y, por consiguiente,

$$z=\frac{3}{25}\cos x-\frac{4}{25}\operatorname{sen} x.$$

De aquí, la solución general de la ecuación (10) resulta

$$y=e^{2x}(C_1+C_2x)+\frac{3}{25}\cos x-\frac{4}{25}\operatorname{sen} x.$$

EJEMPLO 3. Estudiar las oscilaciones de un punto material de masa $m$ sometido a la acción de una fuerza elástica cuya magnitud es proporcional a la desviación $x$ del punto respecto a la posición de equilibrio, en presencia de una fuerza perturbadora periódica igual a

$$F = F_0 \operatorname{sen} pt$$

($F_0$, $p$, son constantes). La resistencia del medio se desprecia.

Según la ley de Newton la ecuación diferencial de movimiento del punto es la siguiente (fig. 233)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_0 \operatorname{sen} pt$$

($k$ es el coeficiente de proporcionalidad), o

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = a \operatorname{sen} pt, \tag{12}$$

donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $a = \frac{F_0}{m}$. La solución general de la ecuación homogénea

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

como se sabe (véase el ejemplo 5 del § 10) tiene la forma (*oscilaciones libres de un punto*)

$$\bar{x} = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t, \tag{13}$$

donde $C_1$ y $C_2$ son constantes arbitrarias.

Al buscar la solución particular $z$ de la ecuación homogénea (12) se deben distinguir dos casos.


Fig. 233

CASO 1. Sea $p \neq \omega$, es decir, la frecuencia de la fuerza exterior no coincide con la de las oscilaciones libres (13).

Tomamos

$$z = A \cos pt + B \operatorname{sen} pt, \tag{14}$$

donde $A$ y $B$ son coeficientes indeterminados.

Sustituyendo la expresión (14) en la ecuación (12) tendremos

$$-Ap^2 \cos pt - Bp^2 \operatorname{sen} pt + \omega^2 (A \cos pt + B \operatorname{sen} pt) = a \operatorname{sen} pt,$$

o

$$A (\omega^2 - p^2) \cos pt + B (\omega^2 - p^2) \operatorname{sen} pt = a \operatorname{sen} pt.$$

De aquí,

$$A (\omega^2 - p^2) = 0, \quad B (\omega^2 - p^2) = a$$

y, por consiguiente,

$$A = 0, \quad B = \frac{a}{\omega^2 - p^2}.$$

De este modo,

$$z = \frac{a}{\omega^2 - p^2} \operatorname{sen} pt.$$

La solución general de la ecuación no homogénea (12) (*oscilaciones forzadas del punto*) se da por la fórmula

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{a}{\omega^2 - p^2} \operatorname{sen} pt \tag{15}$$

y representa una superposición de dos oscilaciones con frecuencias $\omega$ y $p$, siendo las amplitudes de estas oscilaciones limitadas.

CASO 2. Sea $p = \omega$, es decir, la frecuencia de la fuerza exterior coincide con la de oscilaciones libres (13).

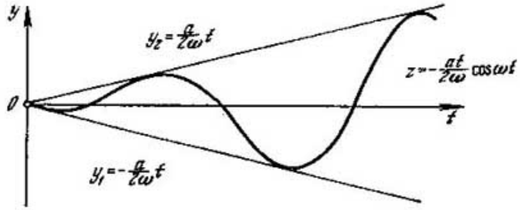


Fig. 234

Es evidente que en este caso la fórmula (15) pierde su sentido. Tomamos $z = t\,(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t)$; de donde

$$z' = (A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t) + t\,(-A\omega \operatorname{sen} \omega t + B\omega \cos \omega t)$$

y

$$z'' = 2\,(-A\omega \operatorname{sen} \omega t + B\omega \cos \omega t) + t\,(-A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \operatorname{sen} \omega t).$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (12) tendremos

$$2\,(-A\omega \operatorname{sen} \omega t + B\omega \cos \omega t) - \omega^2 t\,(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t) +$$
$$+ \omega^2 t\,(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t) = a \operatorname{sen} \omega t,$$

o sea,

$$2\,(-A\omega \operatorname{sen} \omega t + B\omega \cos \omega t) = a \operatorname{sen} \omega t.$$

De aquí, para determinar los coeficientes indeterminados $A$ y $B$ tenemos el sistema

$$-2A\omega = a, \quad 2B\omega = 0.$$

Por consiguiente

$$A = -\frac{a}{2\omega}, \quad B = 0, \quad \text{esto significa que} \quad z = -\frac{at}{2\omega} \cos \omega t$$

(fig. 234). En este caso las oscilaciones forzadas del punto serán

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t - \frac{at}{2\omega} \cos \omega t. \tag{16}$$

La fórmula (16) muestra que la amplitud $x$ de las oscilaciones crece indefinidamente con el tiempo $t$. De este modo, en el caso 2 una fuerza exterior de valor insignificante provoca oscilaciones ilimitadas del sistema. Este fenómeno se llama *resonancia*. La resonancia puede tener, como consecuencia física, una perturbación en el funcionamiento normal y hasta una destrucción de un sistema elástico. Son conocidos, por ejemplo, casos en que los golpeteos rítmicos de un tren cuando éste pasaba por un puente ferroviario provocaron la destrucción de este puente.

CASO 3. El segundo miembro de la ecuación lineal (1) es un polinomio del segundo grado, por ejemplo,

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0). \tag{17}$$

Buscamos una solución particular $z$ de esta ecuación también bajo la forma de un polinomio de segundo grado

$$z = Ax^2 + Bx + C,$$

donde $A$, $B$ y $C$ son coeficientes indeterminados.

Derivando, tendremos

$$z' = 2Ax + B \quad \text{y} \quad z'' = 2A.$$

De aquí, sustituyendo $z$, $z'$ y $z''$ en la ecuación (1), obtendremos

$$2A + p\,(2Ax + B) + q\,(Ax^2 + Bx + C) \equiv ax^2 + bx + c,$$

o sea

$$Aqx^2 + (2Ap + Bq)\,x + (2A + Bp + Cq) \equiv ax^2 + bx + c.$$

Puesto que dos polinomios son idénticamente iguales cuando los coeficientes de iguales potencias de la variable $x$ son iguales, tenemos el sistema

$$Aq = a, \quad 2Ap + Bq = b, \quad 2A + Bp + Cq = c, \tag{18}$$

para determinar los coeficientes $A$, $B$ y $C$.

Si $q \neq 0$, este sistema permite obtener para los coeficientes $A$, $B$ y $C$ valores numéricamente determinados. De este modo, una solución particular $z$ será perfectamente determinada.

Pero si $q = 0$ (la ecuación característica tiene una raíz simple nula), el sistema (18) es incompatible. En este caso, tomando $p \neq 0$, se debe buscar una solución particular $z$ de forma

$$z = x\,(Ax^2 + Bx + C).$$

Es necesario operar análogamente si $f(x)$ es un polinomio de otro grado cualquiera.

EJEMPLO 4. Sea la ecuación $y'' - 4y' + 13y = 2x + 1$.
La ecuación sin segundo miembro será

$$\bar{y}'' - 4\bar{y}' + 13\bar{y} = 0.$$

La ecuación característica es la siguiente: $k^2 - 4k + 13 = 0$, sus raíces son $k_{1,2} = 2 \pm 3i$. La solución general de la ecuación homogénea se escribe así:

$$\bar{y} = e^{2x}\,(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x).$$

La solución particular de la ecuación no homogénea se busca en la siguiente forma:

$$z = Ax + B.$$

De aquí, $z' = A$ y $z'' = 0$. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación no homogénea, obtendremos

$$-4A + 13(Ax + B) \equiv 2x + 1.$$

Igualando los coeficientes de iguales potencias de $x$ en el primer miembro y en el segundo de la última identidad, tendremos

$$13A = 2; \quad -4A + 13B = 1.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtendremos $A = \frac{2}{13}$, $B = \frac{21}{169}$. Por consiguiente, una solución particular de la ecuación no homogénea es

$$z = \frac{2}{13}x + \frac{21}{169}.$$

Por eso su solución general posee la forma

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x) + \frac{2}{13}x + \frac{21}{169}.$$

Las constantes arbitrarias de la solución general pueden ser determinadas a partir de las condiciones iniciales.

EJEMPLO 5. Hallar la solución $y = y(x)$ de la ecuación

$$y'' = x^2 + y \tag{19}$$

tal, que

$$y(0) = -2, \quad y'(0) = 1. \tag{20}$$

Escribamos la ecuación (19) en la forma estándar

$$y'' - y = x^2. \tag{21}$$

La ecuación homogénea es aquí la siguiente:

$$\overline{y}'' - \overline{y} = 0.$$

La ecuación característica $k^2 - 1 = 0$ tiene las raíces $k_1 = 1$ y $k_2 = -1$. Por consiguiente, la solución general de la ecuación homogénea es

$$\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{-x},$$

do de $C_1$ y $C_2$ son constantes.

Para hallar una solución particular $z$ de la ecuación no homogénea (21) tomamos

$$z = Ax^2 + Bx + C.$$

Sustituyendo esta función en la ecuación (21), tendremos

$$2A - (Ax^2 + Bx + C) \equiv x^2.$$

De aquí,

$$-A = 1, \quad -B = 0, \quad 2A - C = 0;$$

por consiguiente, $A = -1$, $B = 0$, $C = -2$ y $z = -x^2 - 2$.

La solución general de la ecuación no homogénea (19) es de la forma

$$y = \overline{y} + z$$

o

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - (x^2 + 2). \tag{22}$$

Derivando, hallamos

$$y' = C_1e^x - C_2e^{-x} - 2x. \tag{23}$$

Considerando que $x = 0$ en las fórmulas (22) y (23) y utilizando las condiciones iniciales (20) obtenemos, para determinar las constantes $C_1$ y $C_2$, el sistema

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 - C_2 = 1.$$

De aquí, $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = -\frac{1}{2}$.

Sustituyendo estos valores en la fórmula (22) obtenemos la solución buscada

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - (x^2 + 2), \quad \text{es decir} \quad y = \operatorname{sh} x - (x^2 + 2).$$

## § 14. Noción sobre las ecuaciones diferenciales que contienen derivadas parciales

Supongamos que $u$ es una función que describe cierto proceso físico. Todo proceso se desarrolla en un tiempo $t$ y en un espacio cuyos puntos pueden ser caracterizados por las coordenadas cartesianas rectangulares $(x, y, z)$. Por eso, en el caso general $u$ es una función de cuatro variables: $u = u(x, y, z, t)$ [1]. Derivando la función $u$ obtendremos las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, etc. Para un fenómeno dado estas derivadas están ligadas por relaciones conocidas y de este modo llegamos a **una ecuación diferencial que contiene derivadas parciales.**

Los matemáticos soviéticos han efectuado una contribución fundamental a la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales. Es necesario señalar en particular los trabajos de M. Kéldych, M. Lavréntiev, I. Petrovski, S. Sóbolev, A. Tíjonov y otros.

Para las aplicaciones físicas son de especial interés las ecuaciones diferenciales en las cuales las mayores derivadas parciales sucesivas son de segundo orden (*ecuaciones diferenciales de segundo orden*). A esta categoría pertenecen las ecuaciones: de la dinámica de los gases, las hidrodinámicas, electromagnéticas (ecuaciones de Maxwell) y muchas otras. Por eso, las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden se llaman *ecuaciones de la física matemática*.

Indicaremos los tipos más importantes de estas ecuaciones para el caso de dos variables independientes.

I. *La ecuación ondulatoria unidimensional*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Esta ecuación se encuentra durante el estudio de una serie de procesos oscilatorios (vibraciones transversales de una cuerda elástica, vibraciones longitudinales de una barra, vibraciones de gas en un tubo, etc.).

---

[1]) En ciertos casos puede uno limitarse al análisis de un plano o de una recta; el número de variables independientes de la función $u$ disminuye concomitantemente.

II. *Ecuación de conductibilidad térmica* (ecuación de Fourier):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

que describe el régimen térmico transitorio (*no estacionario*) de una barra (véase el § 14).

La propagación de oscilaciones eléctricas a lo largo de una línea está también ligada con esta ecuación.

III. *Ecuación de Laplace*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Esta ecuación describe la distribución estacionaria de la temperatura en una placa homogénea, etc.

Para resolver estas ecuaciones en distintas condiciones fueron creados procedimientos especiales (llamados «métodos de la física matemática»).

Para simplificar nos limitamos a examinar el caso de dos variables independientes $x$, $y$:

$$u=u(x, y)$$

e introducimos las notaciones breves $\frac{\partial u}{\partial x}=u_x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=u_y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=u_{xy}$, etc. En este caso, la forma general de la ecuación diferencial de segundo orden para una función incógnita $u$ es la siguiente:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})=0, \tag{1}$$

donde $F$ es una función conocida.

Toda función $u=\varphi(x, y)$ que transforma la ecuación (1) en una identidad, se llama *solución* de esta ecuación; la representación gráfica de la solución se denomina *superficie integral*.

EJEMPLO 1. Hallar $u=u(x, y)$, si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{2}$$

La ecuación (2) puede ser escrita bajo la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0. \tag{3}$$

De donde se deduce que $\frac{\partial u}{\partial y}$ no depende de $y$, es decir, es una función de la sola variable $x$. De este modo, de la (3) resulta

$$\frac{\partial u}{\partial y}=C_1(x), \tag{4}$$

donde $C_1(x)$ es una función arbitraria.

Integrando la ecuación (4) respecto a la variable $y$, obtendremos

$$u=\int C_1(x)\,dy\text{ [1]}. \tag{5}$$

o sea

$$u=C_1(x)\,y+C_2(x), \tag{6}$$

donde $C_1(x)$ y $C_2(x)$ son funciones arbitrarias. Con ayuda de la diferenciación es fácil convencerse de que la solución general (6), que contiene las funciones arbitrarias $C_1(x)$ y $C_2(x)$, da aquí el conjunto de todas las soluciones de la ecuación diferencial (2). De este modo la solución de la ecuación diferencial (2) es una función arbitraria lineal respecto a la variable $y$.

Notemos que las soluciones generales de ecuaciones diferenciales ordinarias contienen constantes arbitrarias; para las ecuaciónes diferenciales con derivadas parciales sus soluciones de forma general incluyen **funciones arbitrarias**.

Concretizando las funciones $C_1(x)$ y $C_2(x)$ en la fórmula (6) obtendremos soluciones particulares de la ecuación (2). Considerando, por ejemplo, $C_1(x)=\operatorname{sen} x$, $C_2(x)=\cos x$, tendremos una solución particular $u=y\operatorname{sen} x+\cos x$, etc.

Como regla general, las ecuaciones con derivadas parciales admiten una infinidad de soluciones (véase, el ejemplo 1). Pero la solución de un problema físico descrito por una ecuación diferencial dada debe ser **unívoca**, según el sentido, de lo contrario no permite pronosticar el fenómeno físico correspondiente y, por consiguiente, posee poco interés práctico. Por eso para la solución de problemas de física deben ser empleadas, además de una ecuación diferencial, condiciones suplementarias que permitan extraer de la infinidad de soluciones de la ecuación diferencial dada la solución única que pueda formular la ley de funcionamiento del proceso físico examinado. En el caso más simple éstas son las condiciones llamadas **iniciales o de borde**. Hablando en términos generales las primeras caracterizan el proceso dado en el instante inicial, mientras que las segundas describen el comportamiento del fenómeno en la frontera del dominio examinado. Las condiciones iniciales y de borde de un problema, se llaman **condiciones de frontera**.

Si en la ecuación (1) la variable $y$ se interpreta como el tiempo, las condiciones iniciales más simples para la función incógnita $u$ son las siguientes

$$u(x,\,y_0)=f(x),\qquad u_y(x,\,y_0)=f_1(x), \tag{7}$$

donde $f(x)$ y $f_1(x)$ son funciones dadas. El problema de hallar la función $u$ que satisfaga la ecuación diferencial (1) y las condiciones iniciales (7), se llama *problema de Cauchy*.

EJEMPLO 2. Hallar la solución $u=u(x,\,y)$ de la ecuación $u_{yy}=0$ que satisface las condiciones iniciales siguientes:

$$u(x,\,1)=x^2,\qquad u_y(x,\,1)=x.$$

De la fórmula (6), tendremos

$$u=C_1(x)\,y+C_2(x),\qquad u_y=C_1(x). \tag{8}$$

[1]) En la integral (5) la variable $x$ se supone constante; para cada $x$ fija se puede tomar su constante arbitraria $C_2$. Por eso $C_2=C_2(x)$.

Tomando $y = 1$ en la fórmula (8), obtendremos

$$x^2 = C_1(x) + C_2(x), \qquad x = C_1(x); \tag{9}$$

de donde $C_1(x) = x$, $C_2(x) = x^2 - x$ y, por consiguiente,

$$u = xy + (x^2 - x). \tag{10}$$

La solución $u$ es única.

Se dice, que un problema físico descrito por una ecuación diferencial en derivadas parciales, y con condiciones de frontera *está planteado correctamente* si: 1) tiene solución; 2) la solución es única; 3) la solución depende continuamente de las condiciones de frontera.

En efecto, antes de resolver el problema hace falta asegurarse de que él es, en general, resoluble. La historia de las ciencias conoce numerosos ejemplos en que los hombres gastaron mucha energía y mucho tiempo en búsqueda de soluciones de problemas irresolubles. Así, por ejemplo, durante más de 2000 años numerosos matemáticos trataron de resolver el problema de la «cuadratura del círculo», es decir, construir con ayuda de una regla y un compás un cuadrado de misma área que un círculo dado. Solamente a fines del siglo XIX fue demostrado que este problema era irresoluble. Análogamente, en la química resultaron infructuosas las tentativas de hallar la «piedra filosofal» capaz de transformar a cualquier metal en oro. La resolubilidad de un problema dado la garantiza el «teorema de existencia de la solución».

En cuanto a la segunda condición, las soluciones no unívocas de un problema son, como hemos dicho más arriba, de poca utilidad en la práctica. La univocidad de la solución está asegurada por el «teorema de la unicidad».

Por último, si se altera la tercera condición esto conduce a consecuencias indeseables. Desde el punto de vista práctico es malo, si variaciones infinitesimales de las condiciones iniciales o de borde (en la práctica ellas se conocen de un modo aproximado) provocan una variación considerable de la solución del problema en un dominio dado. En este caso hace falta recurrir al «teorema de la suavidad de las soluciones».

En los últimos tiempos surgió el interés por los problemas planteados incorrectamente. Resultados fundamentales en este campo han sido obtenidos por A. T

## § 15. Ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales

DEFINICIÓN. *Una ecuación diferencial se llama* **lineal** *(o con mayor precisión completamente lineal), si ella es un polinomio entero de primer grado respecto a una función incógnita y a sus derivadas y, en particular, no contiene sus productos.*

De este modo, la forma general de una ecuación diferencial de segundo grado es la siguiente:

$$A(x, y)\,u_{xx} + B(x, y)\,u_{xy} + C(x, y)\,u_{yy} + a(x, y)\,u_x + \\ + b(x, y)\,u_y + c(x, y)\,u = f(x, y), \tag{1}$$

donde $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ son **coeficientes** conocidos y $f(x, y)$ es el **término independiente** dado. Si $f(x, y) \equiv 0$, entonces la ecuación lineal (1) se llama *homogénea* (sin **término** independiente); en caso contrario, la ecuación (1) se llama *no homogénea*.

Introduciendo las notaciones abreviadas

$$L[u] = A(x, y)\, u_{xx} + B(x, y)\, u_{xy} + C(x, y)\, u_{yy} + \\ + a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u$$

(aquí $L$ es el llamado *operador diferencial lineal*) se puede escribir la ecuación (1) en forma compacta

$$L[u] = f(x, y). \tag{1'}$$

La ecuación diferencial lineal homogénea

$$L[u] = 0 \tag{2}$$

posee la propiedad importante siguiente: *cualquier combinación lineal con coeficientes constantes de las soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea, es también una solución de esta ecuación* (compárese con el § 11). En particular, *la suma de cualquier número de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea, es también solución de esta ecuación* **(principio de la superposición de soluciones).**

Sin demostración, en forma general, nos limitamos a examinar un ejemplo que pone en evidencia la idea de la demostración. Sea dada una ecuación homogénea:

$$L[u] \equiv u_{xx} - xu_{yy} = 0 \tag{3}$$

y $u_1$, $u_2$ sus soluciones, es decir,

$$L[u_1] = 0, \quad L[u_2] = 0.$$

Examinemos, por ejemplo, la función

$$\hat{u} = 2u_1 - 3u_2. \tag{4}$$

De la (3) deducimos:

$$L[\hat{u}] = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(2u_1 - 3u_2) - x\frac{\partial^2}{\partial y^2}(2u_1 - 3u_2) = \\ = 2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\right) - 3\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}\right) = 2L[u_1] - 3L[u_2] = 0.$$

De este modo, $\hat{u}$ es una solución de la ecuación (3).

## § 16. Deducción de la ecuación de la conductibilidad térmica

Examinemos una barra [1]) homogénea de sección transversal constante $S$ y longitud $l$, térmicamente aislada desde los costados, y tomemos su eje por el eje $Ox$ (fig. 235). Designemos por $u = u(x, t)$

---

[1]) En mecánica se entiende por barra todo cuerpo de una sola dimensión lineal predominante. Por ejemplo, un cohete puede ser considerado como una barra de sección variable.

($0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant +\infty$) la temperatura de la barra en la sección de abscisa $x$ en el instante de tiempo $t$ [1]).

Sean $\rho = \text{const}$, la densidad de la barra, $c = \text{const}$, su calor específico, $k = \text{const}$, el coeficiente de conductibilidad térmica, $\Phi(x, t)$ la intensidad de una fuente de calor que se encuentra en la sección $x$ en el instante $t$ respecto a la unidad de masa y a la unidad de tiempo[2]), (por ejemplo, los aparatos que funcionan en una nave


Fig. 235

cósmica pueden ser considerados como fuente de calor). Según **la ley de Fourier** la cantidad de calor que pasa por la sección $S$ de abscisa $x$ en el sentido del eje $Ox$ durante un intervalo de tiempo infinitamente pequeño $dt$, es igual a

$$dQ_x = -k \frac{\partial u}{\partial x} S\, dt, \tag{1}$$

donde $k$ es el coeficiente de conductibilidad térmica $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right.$ es aquí el gradiente de temperatura $\left.u\right)$. El signo "$-$" en la fórmula (1) se explica por el hecho de que para $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$, es decir, cuando la temperatura $u$ aumenta junto con $x$, el flujo de calor está dirigido en el sentido opuesto, y viceversa.

Compongamos el balance térmico para un elemento $\Delta V$ de la barra, encerrado entre dos secciones I y II infinitamente cercanas de abscisas respectivas $x$ y $x + dx$. Supongamos, para mayor determinación, que la temperatura $u$ de la barra se eleva en el sentido del eje $Ox$. En este caso, el calor sale ($-$) por la sección I y entra ($+$) en la sección II. Sea $dQ$ la cantidad de calor acumulada por el elemento $\Delta V$ durante el intervalo de tiempo $dt$.

Teniendo en cuenta el hecho de que la cantidad de calor producida durante el tiempo $dt$ por fuentes térmicas que se encuentran en el elemento $\Delta V$ es igual a

$$\Phi(x, t) \cdot \rho S\, dx \cdot dt \tag{2}$$

[1]) Se supone que la temperatura es la misma en todos los puntos de la sección transversal de la barra.

[2]) Es decir, la cantidad de calor producido por esta fuente de calor en la unidad de tiempo por unidad de masa.

y, utilizando la fórmula (1), tendremos

$$dQ = -k \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x \cdot S\,dt + k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+dx} \cdot S\,dt + \rho S\Phi(x,\ t)\,dx\,dt. \tag{3}$$

Aplicando la fórmula (§ 5 del cap. XII)

$$f(x + dx) \approx f(x) + f'(x)\,dx, \tag{4}$$

obtendremos con exactitud de hasta infinitésimos de orden superior

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+dx} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_x dx. \tag{5}$$

Por eso, la fórmula (3) adquiere la forma

$$dQ = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} S\,dx\,dt + \rho S\Phi(x,\ t)\,dx\,dt. \tag{6}$$

Por otra parte, $\frac{\partial u}{\partial t}$ es la velocidad de variación de la temperatura del elemento $\Delta V$, y por eso $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}\ dt$ es la variación de su temperatura. Puesto que la masa del elemento $\Delta V$ es igual a $\rho S\,dx$, la cantidad de calor acumulada en este caso es igual a

$$dQ = c\rho S\,dx\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dt. \tag{7}$$

Igualando entre sí las expresiones (7) y (6) y después de simplificar por el factor común $S\,dx\,dt$, obtendremos

$$c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho\Phi(x,\ t) \tag{8}$$

o, introduciendo la designación tradicional

$$\frac{k}{c\rho} = a^2, \tag{9}$$

tendremos finalmente

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{c}\,\Phi\,x(x,\ t). \tag{10}$$

La ecuación diferencial (10) que describe la distribución de temperatura $u$ en la barra, se llama *ecuación de la conductibilidad térmica* (*ecuación de Fourier*).

Si no hay fuentes de calor, la ecuación (10) toma la forma

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{11}$$

Una ecuación análoga es también correcta para la temperatura de un cuerpo.

La ecuación de la conductibilidad térmica se aplica en física, química, astronomía, construcción, etc.

## § 17. Problema sobre la distribución de la temperatura en una barra limitada

Según el § 16, la temperatura $u = u(x, t)$ en la sección $x$ de una barra homogénea (fig. 236) al instante de tiempo $t$, en ausencia de fuentes de calor, satisface la ecuación de la conductibilidad térmica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l). \tag{1}$$

Supondremos que está dada la condición inicial

$$u(x, 0) = f(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l). \tag{2}$$

Supondremos también que los extremos de la barra $x = 0$ y $x = l$ tienen constantemente la temperatura igual a la del medio ambiente que consideraremos condicionalmente igual a cero. De este modo, tenemos **condiciones de frontera** simples

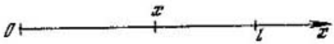


Fig. 236

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \tag{3}$$

para un $t \geqslant 0$ cualquiera.

En estas condiciones, hace falta determinar la distribución de la temperatura $u = u(x, t)$ en la barra, para instantes de tiempo $t \geqslant 0$.

Busquemos primeramente para la ecuación (1) soluciones no nulas del tipo especial

$$u = X(x)\, T(t), \tag{4}$$

donde $X(x)$ es una función de una sola variable $x$, y $T(t)$ es una función de una sola variable $t$. Puesto que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = XT', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T,$$

sustituyendo estas expresiones en la ecuación (1) obtendremos

$$XT' \equiv a^2 X'' T.$$

De aquí, separando las variables, nos queda

$$\frac{X''}{X} \equiv \frac{T'}{a^2 T}. \tag{5}$$

El primer miembro de la identidad (5) depende sólo de $x$, y el segundo miembro, solamente de $t$. Como $x$ y $t$ son variables independientes, esto es sólo posible cuando los dos miembros de la identidad (5) son iguales a una cierta constante. Para la comodidad de cálculos ulteriores designamos esta constante por $-\lambda^2$ [1]. Obtendremos

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2, \quad \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda^2. \tag{6}$$

[1]) Puede uno convencerse directamente de que si se elige otro signo de esta constante, no obtendremos las soluciones necesarias.

De donde tendremos dos ecuaciones

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \qquad T' + a^2\lambda^2 T = 0. \tag{7}$$

La primera de las ecuaciones (7) es una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes, las raíces de su ecuación característica $k^2 + \lambda^2 = 0$ son $k_{1,2} = \pm\lambda i$. Según las fórmulas conocidas (véase el § 12) su solución general tiene la forma

$$X(x) = A \operatorname{sen} \lambda x + B \cos \lambda x, \tag{8}$$

donde $A$ y $B$ son constantes arbitrarias.

La segunda ecuación (3) se resuelve fácilmente mediante el método de separación de variables:

$$T(t) = Ce^{-a^2\lambda^2 t}, \tag{9}$$

donde $C$ es una constante arbitraria.

Multiplicando las funciones (8) y (9) tendremos

$$u = e^{-a^2\lambda^2 t}(A \operatorname{sen} \lambda x + B \cos \lambda x), \tag{10}$$

aquí se considera que $C = 1$, lo que es equivalente a la sustitución de $AC$ por $A$ y de $BC$ por $B$.

Cualquiera que sea la elección de las constantes $A$, $B$ y $\lambda$, las funciones (10) satisfacen la ecuación de la conductibilidad térmica. Hagamos que estas funciones satisfagan también las condiciones de frontera (3). Tomando $x = 0$ obtendremos

$$0 = e^{-a^2\lambda^2 t}B;$$

de donde $B = 0$ y, por consiguiente,

$$u = Ae^{-a^2\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda x. \tag{10'}$$

Tomando ahora $x = l$, en virtud de la condición (3) tendremos

$$0 = Ae^{-a^2\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda l. \tag{11}$$

Pero $A \neq 0$, porque en caso contrario tendríamos una solución nula $u = 0$. Por eso

$$\operatorname{sen} \lambda l = 0 \tag{12}$$

y

$$\lambda l = n\pi \quad (n = 0, +1, +2, \ldots). \tag{13}$$

De aquí,

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{14}$$

Los números $\lambda_n$ se denominan *números característicos* del problema y su conjunto se llama *espectro del problema*. A cada número característico $\lambda_n$ le corresponde una solución particular de la ecuación de la conductibilidad térmica:

$$u_n = A_n e^{-b^2 n^2 t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \tag{15}$$

donde, para abreviar, se toma $b = \dfrac{a\pi}{l}$.

Notemos que es suficiente tomar solamente $n$ números enteros positivos $(n = 1, 2, \ldots)$ porque cuando $n = 0$ tenemos $u \equiv 0$, lo que no se recomienda, y cuando $n < 0$ obtendremos soluciones de la misma naturaleza que para $n' = -n > 0$ correspondiente.

Entonces, la fórmula (15) nos da todas las soluciones particulares linealmente independientes de la forma (4) de la ecuación de la conductividad térmica (1), que satisfacen las condiciones de frontera (3). Físicamente las funciones $u_n$ son ondas de temperatura cuyas gráficas son sinusoides que se amortiguan para $t \to \infty$ (fig. 237, $a$, $b$).

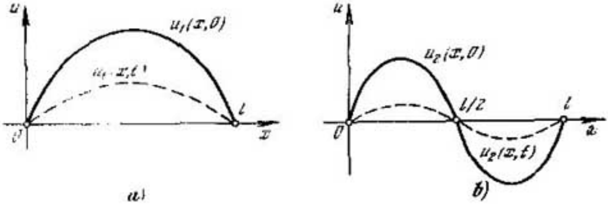


Fig. 237

Nos queda por asegurar la realización de la condición inicial (2). Como la ecuación (1) es lineal y homogénea se puede aplicar el principio de superposición de soluciones (§ 15). De aquí tendremos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-b^2 n^2 t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \tag{16}$$

y si la serie (16) es convergente, la función (16) es, con las condiciones conocidas, una solución de la ecuación (1). Considerando que $t = 0$ en la fórmula (16) en virtud de la condición inicial (2) tendremos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}. \tag{17}$$

La serie (17) representa en el segmento $[0, l]$ el desarrollo de la función $f(x)$ en serie de Fourier, según los senos de arcos múltiples. Para los coeficientes del desarrollo son justas las fórmulas (véase el § 19 del cap. XXI)

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{18}$$

De este modo, la solución del problema es dada por la serie (16), cuyos coeficientes se determinan por la fórmula (18). Para los cálculos de ingeniería habitual es suficiente con tomar algunos términos de esta serie.

Notemos que la solución obtenida tiene un carácter formal, porque no fue estudiada la convergencia de la serie (16). Sin embargo, se puede mostrar que si la función $f(x)$ es suficientemente suave sobre el segmento $[0, l]$, la serie (16) es convergente y su suma $u(x, t)$ satisface tanto la ecuación diferencial (1), como la condición inicial (2) y las condiciones de frontera (3), es decir, $u(x, t)$ es la solución de nuestro problema en el sentido habitual.

El método utilizado para la resolución de este problema se llama generalmente *método de Fourier* (o método de separación de variables).

## EJERCICIOS

**1.** Mostrar que la función $y = Ce^{-x^2}$, donde $C$ es una constante arbitraria, es la solución de la ecuación $y' + 2xy = 0$.

**2.** Mostrar que la función

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x),$$

donde $C_1$ y $C_2$ son constantes arbitrarias, es la solución de la ecuación $y'' - 2y' + 2y = 0$.

**3.** Hallar la curva integral de la ecuación $xy' = 2y$, que pasa por el punto $M_0$ (2, 3).

**4.** Integrar las ecuaciones con variables separadas:

a) $x\,dx + y\,dy = 0$; b) $y\,dx + x\,dy = 0$; c) $dx - x\,dy = 0$; d) $y' = 2 + y$; e) $y' = e^{x+y}$.

**5.** Resolver las ecuaciones diferenciales homogéneas:

a) $(x^2 + y^2)\,dx - xy\,dy = 0$; b) $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$.

**6.** Hallar la curva integral de la ecuación $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ que pasa por el punto (1, 0).

**7.** Resolver las ecuaciones diferenciales lineales:

a) $xy' = x^3 + y$; b) $(x + y^2)\,y' = 1$.

**8.** Hallar la solución de la ecuación $y' \cos x + y \operatorname{sen} x = 1$, que satisfaga la condición inicial $y = 0$ para $x = 0$.

**9.** Hallar la curva cuya tangente en todos los puntos es perpendicular al radio polar del punto de tangencia.

**10.** Hallar la curva que pasa por el punto $A$ (2, 1) y que tiene una subtangente constante (es decir, la proyección sobre el eje $Ox$ del segmento de tangente desde el punto de tangencia al punto de intersección con el eje $Ox$) igual a 4.

**11.** La velocidad de desintegración del radio es en todo instante de tiempo proporcional a su cantidad disponible. Establecer la ley de desintegración del radio, si su cantidad inicial es $Q_0$ y si se sabe que dentro de 1600 años (período de semidesintegración) quedará sólo la mitad de esta cantidad.

**12.** Una reacción química que transforma una sustancia $A$ en otra $B$ se desarrolla de tal modo que a cada instante de tiempo la velocidad de disminución de la cantidad de la sustancia $A$ es proporcional al producto de las cantidades disponibles de las sustancias $A$ y $B$.

En el momento inicial la retorta contenía 800 g de sustancia $A$ y 200 g de sustancia $B$; al pasar 2 horas quedaron 400 g de sustancia $A$. ¿Qué cantidad de sustancia $A$ quedará en la retorta al cabo de 4 horas?

**13.** Calcular mediante el método de Euler $y(2)$, si $y' = x - y$, $y(1) = 0{,}370$ ($h = 0{,}2$).

Integrar la ecuación de segundo orden.

**14.** $y'' = \operatorname{sen} x$. **15.** $y'' = -y$. **16.** $2yy'' = 1 + y'^2$.

**17.** Hallar la curva integral de la ecuación $y'' = x$, que pasa por el punto $M_0$ (0, 1) y la tangente en este punto a la recta $y = \frac{x}{2} + 1$.

**18.** Con ayuda de series de potencia, integrar las ecuaciones:

a) $y' = y + \frac{x^2}{4}$, $y(0) = 1$; b) $y'' = xy$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Integrar las ecuaciones diferenciales lineales de los coeficientes constantes siguientes:

19. $y'' + y' - 2y = 0$. 20. $y'' + 2y' + 2y = 0$. 21. $y'' + y' + y = 0$. 22. $y'' = y' - 0{,}25y$. 23. $y'' + y = 0$, si $y = 2$ e $y' = -1$ cuando $x = 0$.

24. $y'' - y = e^{2x}$. 25. $y'' + 4y = \operatorname{sen} x$. 26. $y'' - 5y' + 6y = x^2$. 27. $y'' - 2y' + 2y = 2x$, si $y = 0$ e $y' = 0$ para $x = 0$.

28. Un punto material de masa $m$ es atraído por una fuerza elástica, proporcional al alejamiento del punto con respecto a su posición de equilibrio, la fuerza de resistencia del medio ambiente es proporcional a la velocidad del punto. Hallar la ecuación de movimiento del punto suponiendo que la resistencia del medio ambiente es pequeña con respecto a la fuerza elástica.