Capítulo XXIII

Integrales curvilíneas

§ 1. Integral curvilínea de la primera especie

Sea K una curva plana suave (o suave a trozos[1])

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (t \in [\alpha, \beta]),$$

donde t es un parámetro, y sea

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,|dt|$$

su diferencial de arco. Aquí, si $\alpha \leqslant \beta$, entonces $dt > 0$ y $ds = +\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$: si $\alpha \geqslant \beta$, $dt < 0$ y $ds = -\sqrt{x'^2 + y'^2_2}\,dt$. Si $f(x, y)$ es una función continua sobre la curva K, la integral

$$\int\limits_K f(x, y)\,ds = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,|dt| \qquad (1)$$

se denomina *integral curvilínea de primera especie*.

En el caso cuando la curva K está dada por la ecuación

$$y = y(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

considerando x como un parámetro, obtendremos

$$\int\limits_K f(x, y)\,ds = \int\limits_a^b f(x, y))\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx.$$

Supongamos que K es una curva material, es decir, que tiene masa. Sean Δs cierto arco de la curva K que contiene un punto M, y Δm la masa de este arco. Entonces, la relación $\Delta m/\Delta s$ se llama *densidad media* del arco Δs, y

$$\mu(M) = \lim_{\Delta s \to M} \frac{\Delta m}{\Delta s},$$

es decir, el límite hacia el cual tiende la densidad media del arco a condición de que el arco Δs tienda a transformarse en un punto M, se llama *densidad lineal* del arco en el punto M.

---

[1]) Es decir, las derivadas de sus coordenadas presentan, posiblemente, un número finito de puntos de discontinuidad de primera especie.

Si $\mu = f(x, y)$ se considera como la densidad lineal del arco en su punto corriente $M(x, y)$, entonces

$$dm = \mu\, dS$$

es la masa de un arco infinitesimal ds (*masa elemental*) y la integral

$$m = \int\limits_K \mu\, ds \tag{2}$$

representa la masa de la curva **(interpretación física de la integral curvilínea de primera especie).**

La integral curvilínea de primera especie posee las propiedades evidentes siguientes.

1) La integral curvilínea de primera especie no cambia su valor cuando varía el sentido del camino de integración (fig. 238), es decir,

$$\int\limits_{K^+} = \int\limits_{K^-},$$

donde K^+ es la curva K recorrida en el sentido dado (correspondiente, por ejemplo, al incremento del parámetro t) y K^- es la curva K recorrida en el sentido opuesto (correspondiente a un t decreciente).

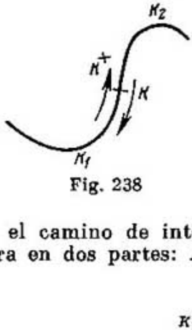

Fig. 238

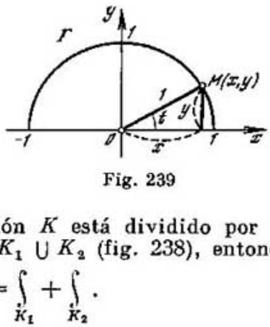

Fig. 239

2) Si el camino de integración K está dividido por un punto cualquiera en dos partes: $K = K_1 \cup K_2$ (fig. 238), entonces

$$\int\limits_{K_1 \cup K_2} = \int\limits_{K_1} + \int\limits_{K_2}.$$

EJEMPLO. Hallar la masa de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1$ $y \geqslant 0$ (Γ) (fig. 239) sabiendo que su densidad lineal en el punto corriente $M(x, y)$ es proporcional a la ordenada y.

Tomando como parámetro t el ángulo polar (fig. 239) obtendremos las ecuaciones paramétricas de la semicircunferencia:

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi). \tag{3}$$

La masa elemental es

$$dm = \mu\, ds = ky\, \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt, \tag{4}$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad.

Puesto que

$$x' = -\operatorname{sen} t, \quad y' = \cos t$$

y

$$dS = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = dt,$$

de la (4) tenemos

$$dm = k \operatorname{sen} t\, dt.$$

De aquí la masa de la línea Γ será igual a

$$m = k \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\, dx = k(-\cos t)\Big|_0^{\pi} = 2k.$$

Se calcula del mismo modo una integral curvilínea de primera especie de una función $f(x, y, z)$ tomada a lo largo de una curva espacial suave a trozos K:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (t \in [\alpha, \beta]):$$

$$\int_K f(x, y, z)\, ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, |dt|,$$

donde

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, |dt|$$

es la diferencial del arco de la curva espacial K.

§ 2. Integral curvilínea de segunda especie

Sea

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (t \in [\alpha, \beta])$$

una curva suave (o suave a trozos) K cuya orientación está elegida (una curva semejante será llamada, para abreviar, *camino*), y sean $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ dos funciones continuas sobre la curva K. Teniendo en cuenta que las diferenciales de las coordenadas corrientes x e y de la curva K son de la forma

$$dx = x'(t)\, dt, \quad dy = y'(t)\, dt, \tag{1}$$

se llama *integral curvilínea de segunda especie* de dos funciones X e Y tomada a lo largo de la curva K a la integral

$$\int_K X(x, y)\, dx + Y(x, y)\, dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} [X(x(t), y(t))\, x'(t) + Y(x(t), y(t))\, y'(t)]\, dt \tag{2}$$

(de una manera tradicional no se ponen paréntesis en la expresión izquierda y se supone que la integral $\int\limits_K$ se refiere a toda la suma)
Si el camino K está dado por la ecuación

$$y = y(x) \quad (x \in [a, b]),$$

la fórmula (2) adquiere la forma

$$\int\limits_K X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy =$$

$$= \int\limits_a^b [X(x, y(x)) + Y(x, y(x))\,y'\,x)]\,dx. \tag{3}$$

De un modo análogo, si K está dado por la ecuación $x = x(y)$ ($y \in [A, B]$), entonces

$$\int\limits_K X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy =$$

$$= \int\limits_A^B [X(x(y), y)\,x'(y) + Y(x(y), y)]\,dy. \tag{4}$$

La integral curvilínea de segunda especie posee las propiedades siguientes:

1) Si varía el sentido del camino de integración, la integral curvilínea de segunda especie cambia de signo, es decir,

$$\int\limits_{K^-} = -\int\limits_{K^+}. \tag{5}$$

Efectivamente, la variación del sentido del camino de integración es equivalente a la permutación de los límites de integración α y β en la integral definida (2), y esto exige el cambio del signo de la integral definida (§ 5 del cap. XIV).

2) Si el camino de integración K está compuesto de dos partes $K = K_1 \cup K_2$, entonces

$$\int\limits_{K \cup K_2} = \int\limits_{K_1} + \int\limits_{K_2}. \tag{6}$$

EJEMPLO 1 Calcular los valores de la integral

$$I = \int\limits_K y\,dx - x\,dy$$

a lo largo de los caminos indicados: 1) la recta OA; 2) la parábola OmA de vértice O y de eje Oy; 3) la línea quebrada OBA; 4) la línea quebrada OCA (fig. 240).

SOLUCIÓN. 1) La ecuación de la recta OA es $y = 2x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. De aquí $dy = 2dx$ y, por consiguiente

$$I_1 = \int_0^1 (2x\,dx - x\cdot 2\,dx) = 0.$$

2) La ecuación de la parábola OmA es de la forma $y = kx^2$. Como esta parábola pasa por el punto A $(1, 2)$, $2 = k\cdot 1^2$ y esto significa que $k = 2$, es decir $y = 2x^2$. De aquí $dy = 4x\,dx$, y entonces,

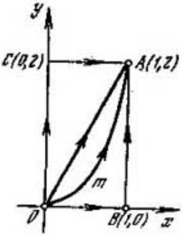

Fig. 240

$$I_2 = \int_0^1 (2x^2\,dx - x\cdot 4x\,dx) =$$

$$= -\int_0^1 2x^2\,dx = -\frac{2}{3}x^3\,\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}.$$

3) De acuerdo con la propiedad 2 tenemos

$$I_3 = \int_{OB} (y\,dx - x\,dy) + \int_{BA} (y\,dx - x\,dy). \qquad (7)$$

Como la ecuación de OB es $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, entonces $dy = 0$.

Luego, la ecuación de BA se escribe de la forma $x = 1$ $(0 \leqslant y \leqslant 2)$; por eso $dx = 0$. De la fórmula (7) obtenemos

$$I_3 = \int_0^1 (0 - x\cdot 0)\,dx + \int_0^2 (y\cdot 0 - 1)\,dy = -2.$$

4) Operando de modo análogo, obtendremos

$$I_4 = \int_{OC} (y\,dx - x\,dy) + \int_{CA} (y\,dx - x\,dy) = \int_0^2 (y\cdot 0 - 0)\,dy + \int_0^1 (2 - x\cdot 0)\,dx = 2.$$

Notemos que la integral I teniendo extremos fijos del camino de integración K depende aquí de la naturaleza del camino de integración.

EJEMPLO 2. Hallar la integral

$$I = \int_K y\,dx + x\,dy$$

a lo largo de las líneas K indicadas en el ejemplo 1.

SOLUCIÓN. Utilizando las ecuaciones de la línea K dadas más arriba, obtendremos sucesivamente

$$I_1 = \int_{OA} (y\,dx + x\,dy) = \int_0^1 (2x\,dx + x\cdot 2\,dx) = 4\int_0^1 x\,dx = 2x^2\,\Big|_0^1 = 2,$$

$$I_2 = \int_{OmA} (y\,dx + x\,dy) = \int_0^1 (2x^2\,dx + x\cdot 4x\,dx) = 6\int_0^1 x^2\,dx = 2x^3\,\Big|_0^1 = 2,$$

$$I_3=\int\limits_{OB}(y\,dx+x\,dy)+\int\limits_{BA}(y\,dx+x\,dy)=\int\limits_0^1(0+x\cdot 0)\,dx+\int\limits_0^2(y\cdot 0+1)\,dy=2,$$

$$I_4=\int\limits_{OC}(y\,dx+x\,dy)+\int\limits_{CA}(y\,dx+x\,dy)=\int\limits_0^2(y\cdot 0+0)\,dy+\int\limits_0^1(2+x\cdot 0)\,dx=2.$$

De este modo, la integral I tiene aquí un solo y mismo valor para diferentes caminos que unen los puntos O y A. La diferencia principal entre los ejemplos 1 y 2 será explicada en el § 4.

Si

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)\quad (t\in[\alpha,\ \beta])$$

es una curva K espacial suave a trozos y $X(x,\ y,\ z)$, $Y(x,\ y,\ z)$, $Z(x,\ y,\ z)$ son tres funciones continuas sobre la curva K, se llama integral curvilínea de segunda especie correspondiente a la siguiente:

$$\int\limits_K X(x,\ y,\ z)\,dx+Y(x,\ y,\ z)\,dy+Z(x,\ y,\ z)\,dz=$$

$$=\int\limits_\alpha^\beta [X(x(t),\ y(t),\ z(t))\,x'(t)+Y(x(t),\ y(t),\ z(t))\,y'(t)+$$
$$+Z(x(t),\ y(t),\ z(t))\,z'(t)]\,dt.$$

§ 3. Interpretación física de la integral curvilínea de segunda especie

Sea $\boldsymbol{F}=\{X(x,\ y),\ Y(x,\ y)\}$ una fuerza continuamente variable y sea

$$x=x(t),\quad y=y(t)\quad (t\in[\alpha,\ \beta])$$

el camino recorrido por el punto de aplicación de esta fuerza (fig. 241); designemos por $\boldsymbol{ds}=\overrightarrow{MM'}$ un vector infinitesimal del desplazamiento del punto corriente $M(x,\ y)$ de la curva K hacia un punto infinitamente cercano $M'\{x+dx,\ y+dy\}$ (despreciamos aquí los infinitésimos de orden superior a $\boldsymbol{ds}$). Tenemos $\boldsymbol{ds}=\{dx,\ dy\}$. Como sobre un camino infinitamente pequeño $\boldsymbol{ds}$, la fuerza continua $\boldsymbol{F}$ puede ser considerada como constante (véanse los §§ 12 y 13 del cap. XVIII), entonces el trabajo elemental de esta fuerza es igual a

$$dA=\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{ds}=X\,dx+Y\,dy. \tag{1}$$

Integrando la expresión (1) a lo largo de la curva K obtendremos el trabajo de la fuerza

$$A=\int\limits_K X\,dx+Y\,dy. \tag{2}$$

La expresión (2) es evidentemente la integral curvilínea de segunda especie correspondiente.

Y bien, *la integral curvilínea de segunda especie expresa el trabajo de una fuerza variable a lo largo del camino de integración, las proyecciones de esta fuerza sobre los ejes de las coordenadas son los coeficientes correspondientes de las diferenciales de las variables.*

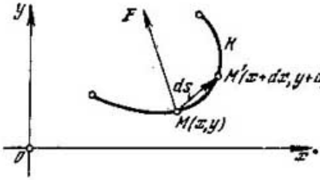

Fig. 241

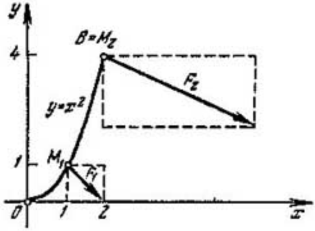

Fig. 242

EJEMPLO. Calcular el trabajo A de la fuerza variable $F = \{y, -x\}$ cuyo punto de aplicación describe la parábola OB (fig. 242):

$$y = x^2 \quad (0 \leqslant x \leqslant 2). \tag{3}$$

De acuerdo con la fórmula (2), tenemos

$$A = \int\limits_{OB} X\,dx + Y\,dy = \int\limits_{OB} y\,dx - x\,dy.$$

Mediante la ecuación (3) obtenemos $dy = 2x\,dx$, por eso,

$$A = \int\limits_0^2 x^2\,dx - x\cdot 2x\,dx = -\int\limits_0^2 x^2\,dx = -\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = -2\frac{2}{3}\ \text{unidades}.$$

De un modo análogo, el trabajo de una fuerza espacial

$$F = \{X(x,\ y,\ z),\ Y(x,\ y,\ z),\ Z(x,\ y,\ z)\}$$

a lo largo del camino K: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ se expresa por la integral curvilínea de segunda especie

$$A = \int\limits_K X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

§ 4. Condición para que una integral curvilínea de segunda especie sea independiente de la naturaleza del camino de integración

Sean $X = X(x, y)$, $Y = Y(x, y)$ dos funciones continuas en un dominio G (fig. 243). Examinemos dos puntos cualesquiera $M_1(x_1, y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$ del dominio y todos los caminos posibles $M_1\alpha M_2$,

$M_1\beta M_2$, $M_1\gamma M_2$, . . ., que unen estos puntos (M_1 es el **comienzo del camino** y M_2 es el **fin del camino**) y sin salir de los límites del dominio G. Puede ocurrir que

$$\int_{M_1\alpha M_2} X\,dx+Y\,dy=\int_{M_1\beta M_2} X\,dx+Y\,dy=\int_{M_1\gamma M_2} X\,dx+Y\,dy=\ldots \tag{1}$$

En este caso se dice que la integral curvilínea de segunda especie

$$I=\int_{\widehat{M_1M_2}} X\,dx+Y\,dy \tag{2}$$

no depende del tipo del camino de integración en el dominio dado G.

Si se cumplen las condiciones (1), no es necesario indicar el camino de integración para la integral (2), es suficiente señalar solamente los puntos inicial $M_1\,(x_1,\ y_1)$ y terminal $M_2\,(x_2,\ y_2)$ de este camino. Por eso se utiliza en este caso la designación

$$I=\int_{(x_1,\ y_1)}^{(x_2,\ y_2)} X\,dx+Y\,dy. \tag{3}$$

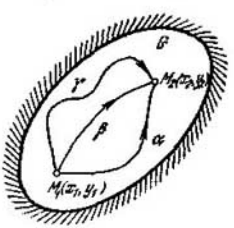

Fig. 243

Es justo el teorema siguiente.

TEOREMA. *Si en un dominio G la expresión a integrar $X\ dx+Y\ dy$ es una diferencial total*[1]) *de cierta función $U=U\,(x,\ y)$, es decir, si*

$$dU=X\,dx+Y\,dy \text{ para } (x,\ y)\in G, \tag{4}$$

la integral curvilínea (2) no depende del camino de integración en el dominio G.

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$x=\varphi\,(t),\quad y=\psi\,(t)\quad (t\in[t_1,\ t_2]) \tag{5}$$

un camino arbitrario K en el dominio G que une los puntos $M_1\,(x_1,\,y_1)$ y $M_2\,(x_2,\ y_2)$ y

$$\left.\begin{aligned}\varphi\,(t_1)=x_1 \quad \psi\,(t_1)=y_1;\\ \varphi\,(t_2)=x_2 \quad \psi\,(t_2)=y_2.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

De la fórmula (4), tenemos

$$Xdx+Ydy=dU[\varphi(t),\ \psi\,(t)]. \tag{7}$$

[1]) Sobre la condición de existencia de una diferencial total, véase el § 9 del cap. XX.

De aquí obtenemos

$$I=\int_{t_1}^{t_2} dU[\varphi(t),\ \psi(t)]=U[\varphi(t),\ \psi(t)]\Big|_{t_1}^{t_2}=U[\varphi(t_2),\ \psi(t_2)]-$$
$$-U[\varphi(t_1),\ \psi(t_1)]. \tag{8}$$

Luego, utilizando las relaciones (6), tendremos

$$I=U(x_2,\ y_2)-U(x_1,\ y_1)=U(M_2)-U(M_1). \tag{9}$$

De este modo, la integral I no cambia su valor, cualquiera que sea la elección de funciones $\varphi(t)$, $\psi(t)$ y, por consiguiente, esta integral no depende de la naturaleza del camino que une los puntos $M_1(x_1, y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$.

COROLARIO 1. *Si la relación* (4) *se cumple, en virtud de la* (9) *tenemos*

$$\int_{(x_1,\ y_1)}^{(x_2,\ y_2)} X\,dx+Y\,dy=U(x_2,\ y_2)-U(x_1,\ y_1) \tag{10}$$

(*fórmula de Newton—Leibniz generalizada*).

COROLARIO 2. *Si la expresión subintegral $X\,dx+Y\,dy$ es una diferencial total y si el camino de integración K es cerrado, entonces*

$$\oint_K X\,dx+Y\,dy=0$$

(el círculo pequeño en la integral significa la integración a lo largo de un camino cerrado).

EJEMPLO. Hallar

$$I=\int_{(1,\ 2)}^{(3,\ 4)} y\,dx+x\,dy.$$

Puesto que $y\,dx+x\,dy=d(xy)$, entonces, independientemente de la naturaleza del camino que une los puntos $M_1(1, 2)$ y $M_2(3, 4)$, tenemos

$$I=\int_{(1,\ 2)}^{(3,\ 4)} d(xy)=xy\Big|_{(1,\ 2)}^{(3,\ 4)}=3\cdot 4-1\cdot 2=10.$$

§ 5. Trabajo de una fuerza potencial

El teorema del párrafo precedente posee una interpretación física. Sea

$$\boldsymbol{F}=\{X(x,\ y),\ Y(x,\ y)\}$$

un campo de fuerzas definido en un dominio G.

Como ejemplo de campo de fuerzas se puede citar el campo de fuerza de gravedad cerca de la superficie de la Tierra, donde todo punto material de masa m está sometido a la acción de una fuerza de gravedad numéricamente igual a mg (g es la aceleración de la fuerza de gravedad). Un ejemplo más general de campo de fuerzas es el campo de gravitación creado por una masa M. Según la ley de Newton un punto material de masa m situado en este campo a la distancia r del centro de atracción está sometido a la acción de una fuerza numéricamente igual a $k\frac{mM}{r^2}$ (k es la constante de la gravitación) y dirigida hacia el centro de atracción. Otro ejemplo de campo de fuerzas es el campo eléctrico de Coulomb.

Si existe una función $U = U(x, y)$ tal, que

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y},$$

se dice que éste es un *campo potencial* (en otras palabras, que F es una fuerza potencial) y la función U se llama *potencial del campo*.

En este caso es evidente que

$$X\,dx + Y\,dy = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy = dU.$$

De donde, para el trabajo A efectuado por la fuerza F a lo largo del camino que une los puntos $M_1(x_1, y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$, tenemos

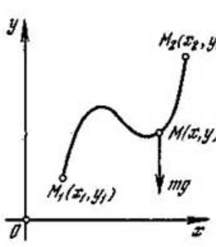

Fig. 244

$$A = \int_{(x_1,\,y_1)}^{(x_2,\,y_2)} X\,dx + Y\,dy = \int_{(x_1,\,y_1)}^{(x_2,\,y_2)} dU = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1),$$

es decir, *el trabajo de la fuerza potencial no depende de la naturaleza del camino y es igual a la diferencia de potenciales de la fuerza para los puntos de partida y de llegada de este camino.*

En particular, si el camino es cerrado, entonces el trabajo $A = 0$.

EJEMPLO. Calcular el trabajo A producido por la fuerza de gravedad para desplazar en el plano vertical Oxy (cerca de la superficie de la Tierra) un punto de masa m de la posición $M_1(x_1, y_1)$ a la posición $M_2(x_2, y_2)$ (fig. 244).

Si el eje Ox es horizontal y el eje Oy es vertical, las proyecciones de la fuerza de la gravedad que actúa sobre el punto material de masa m son iguales a

$$X = 0, \quad Y = -mg.$$

Tenemos

$$X\,dx + Y\,dy = -mg\,dy = d(-mgy).$$

Por eso, como potencial del campo de gravedad se puede tomar

$$U = -mgy.$$

De donde se deduce que el trabajo de la fuerza de la gravedad, independientemente del camino $\widehat{M_1M_2}$, será igual a

$$A = -mgy \Big|_{(x_1,\, y_1)}^{(x_2,\, y_2)} = -mg\,(y_2 - y_1).$$

OBSERVACIÓN. Resultados análogos son también justos para la integral curvilínea tomada a lo largo de una curva de espacio. En particular, si

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU\,(x,\ y,\ z),$$

entonces

$$\int\limits_{(x_1,\, y_1,\, z_1)}^{(x_2,\, y_2,\, z_2)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = U\,(x_2,\ y_2,\ z_2) - U\,(x_1,\ y_1,\ z_1).$$

EJERCICIOS

1. Calcular las integrales curvilíneas de primera especie:

a) $\int\limits_K (x+y)\,ds$, donde K es el segmento de la recta $y = 2x - 1$ $(-1 \leqslant x \leqslant 2)$;

b) $\int\limits_K x\,ds$, donde K es el arco de parábola $y = \frac{x^2}{2}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$;

c) $\int\limits_K x^2y^2\,ds$, donde K es la circunferencia $x = R\cos t$, $y = R\,\mathrm{sen}\,t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$;

d) $\int\limits_K \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}\,ds$, donde K es el arco de la cardioide $r = a\,(1 + \cos\varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$.

2. Hallar el área de la superficie de una «cerca» construida sobre la periferia K de un cuadrado de lados $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, cuya altura en el punto $(x,\ y) \in K$ es igual a $z = x^2 + y^2$.

3. Calcular la masa de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, si su densidad en el punto $(x,\ y)$ es igual a $\rho = \frac{y^2}{R^2}$.

4. Determinar las coordenadas del centro de gravedad $C\,(x_0,\ y_0)$ de la semicircunferencia homogénea K: $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geqslant 0$.

INDICACIÓN. Se demuestra en mecánica que las coordenadas del centro de gravedad de una curva homogénea K se expresan mediante las fórmulas

$$x_0 = \frac{1}{L}\int\limits_K x\,ds, \qquad y_0 = \frac{1}{L}\int\limits_K y\,ds,$$

donde L es la longitud del arco de la curva.

5. Calcular el momento de inercia I_y del arco de la parábola semicúbica $y = x^{3/2}$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}\right)$, respecto al eje Oy.

INDICACIÓN.

$$I_y = \int\limits_K x^2\,ds.$$

6. Calcular el momento de inercia I_x del arco de la cicloide K: $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ respecto al eje Ox.
INDICACIÓN.

$$I_x = \int_K y^2\, ds.$$

7. Calcular las integrales curvilíneas de segunda especie:

a) $\int\limits_K y^2\, dx - x^2\, dy$, donde K es el arco de la parábola $y = 1 - x^2$ situado entre los puntos $M(-1, 0)$ y $N(1, 0)$;

b) $\int\limits_K \dfrac{dx - dy}{\sqrt{xy}}$, donde K es el segmento de la recta $x + y = 1$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$;

c) $\oint\limits_K \dfrac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2}$, donde K es la circunferencia $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

8. Calcular la integral $\oint\limits_K y\,(y\, dx - x\, dy)$, donde K es el contorno del triángulo de vértices $O(0, 0)$, $A(2, 1)$ y $B(1, 2)$ que recorre en sentido contrario al de las agujas del reloj.

9. Calcular las siguientes integrales curvilíneas de segunda especie independientemente del camino de integración

a) $\displaystyle\int_{(1,\,2)}^{(-3,\,4)} x\, dx - y\, dy$; c) $\displaystyle\int_{(1,\,2)}^{(2,\,1)} \frac{y\, dx - x\, dy}{y^2}$ $(y > 0)$;

b) $\displaystyle\int_{(2,\,3)}^{(1,\,6)} y\, dx - x\, dy$; d) $\displaystyle\int_{(0,\,0)}^{(1,\,1)} e^{x+y}\,(dx + dy)$.

10. Calcular el trabajo de la fuerza con proyecciones $X = y$, $Y = -x$ a lo largo de la elipse $x = a\cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$ $(0 \leqslant y \leqslant 2\pi)$.

11. Calcular el trabajo de la fuerza $F = \{-kx, -ky\}$ cuando su punto de aplicación se desplaza de la posición $M_1(a, 0)$ a la posición $M_2(0, b)$.

12. Calcular el trabajo de la fuerza de proyecciones $X = \operatorname{sen}(x + y)$, $Y = 0$ a lo largo del contorno del triángulo de vértices $O(0, 0)$, $M\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$, $N\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ cuando él se recorre en sentido contrario al de las agujas del reloj.

13. Calcular el trabajo de la fuerza de proyecciones

$$X = \frac{x}{r^2}, \quad Y = \frac{y}{r^2},$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ cuando su punto de aplicación se desplaza de la posición $M(a, 0)$ a la posición $M_2(0, b)$ $(a > 0,\ b > 0)$.
INDICACIÓN. Utilizar la fórmula $x\, dx + y\, dy = r\, dr$.

14. Calcular la integral

$$\int_{(1,\,2,\,3)}^{(4,\,5,\,6)} x\, dx + z\, dy + y\, dz.$$

Capítulo XXIV

Integrales dobles y triples

§ 1. Noción de integral doble

En la teoría de la integral definida para calcular el área de un trapecio curvilíneo hemos introducido la noción de suma integral cuyo límite es la integral definida (§ 9 del cap. XIV). Resolviendo el problema referente al cálculo del volumen de un cuerpo nos veremos obligados a introducir la noción de **suma integral bidimensional** cuyo límite se llama *integral doble*.

PROBLEMA. Calcular el volumen de un cuerpo limitado por arriba por una superficie continua $z = f(x, y)$ $(f(x, y) \geqslant 0)$, por debajo por un dominio cerrado finito S del plano Oxy y de los costados por una superficie cilíndrica construida sobre la frontera del dominio S y que tiene generatrices perpendiculares al plano Oxy (fig. 245).

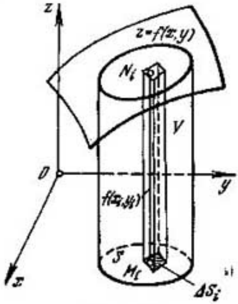

Fig. 245

Un cuerpo semejante se llama, por construcción, *cilindroide*. En el caso particular cuando la base superior del cilindroide es un plano paralelo a su base inferior, el cilindroide se denomina *cilindro*. Como ejemplo de un cilindro se puede citar el cilindro circular que se estudia en la escuela secundaria. Generalizando los razonamientos que se usan por lo común para hallar el volumen de un cilindro, no es difícil mostrar que el volumen V de un cilindro con área de la base S y altura H es igual a $V = SH$.

Para calcular el volumen V de un cilindro dado dividamos su base S en un número finito de regiones elementales $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ (en general curvas). En cada región ΔS_i de éstas elijamos un punto $M_i(x_i, y_i) \in \Delta S_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ y construyamos una columna cilíndrica recta de base ΔS_i y de altura $M_iN_i = f(x_i, y_i)$ igual al lado de la superficie en el punto elegido. Según la fórmula del volumen del cilindro, el volumen de semejante columna es evidentemente igual a

$$f(x_i, y_i)\,\Delta S_i, \tag{1}$$

donde ΔS_i[1]) es el área de superficie de la región elemental correspondiente. La suma de los volúmenes de estas columnas cilíndricas resulta el volumen de un cuerpo escalonado que reemplaza aproximadamente al cuerpo curvilíneo dado. En este caso, cuanto más pequeños son los diámetros de las regiones ΔS_i, tanto mejor es en general la aproximación. Por eso, el volumen de nuestro cilindroide se expresa aproximadamente por la suma

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i. \tag{2}$$

La fórmula (2) permite calcular el volumen V con la precisión deseable a condición de que el número de regiones ΔS_i sea suficiente-

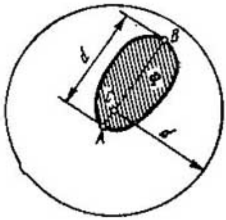

Fig. 246

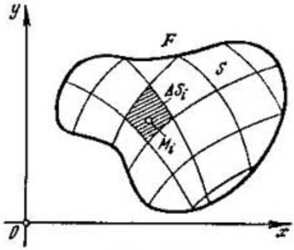

Fig. 247

mente grande y sus dimensiones lineales sean muy pequeñas. Designemos por d_i *el diámetro* de ΔS_i, es decir, su dimensión lineal más grande. Más exactamente por el diámetro d de una figura Φ (longitud del arco, elemento de superficie, etc.) limitada y cerrada (es decir, con su frontera asociada) se entiende la longitud de su cuerda AB más grande, donde $A \in \Phi$ y $B \in \Phi$ (fig. 246)[2]). Se deduce de esta definición que la figura Φ de diámetro d está enteramente encerrada en un círculo de radio d circunscrito a partir de cualquier punto suyo C como del centro. Por eso, si $d \to 0$, la figura Φ «tiende a transformarse en un punto». Se define del mismo modo el diámetro de un cuerpo en el espacio.

Sea $d = \text{máx}\, d_i$ el mayor de los diámetros de regiones $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. Suponiendo que el número n de regiones que intervienen en la fórmula (2) se aumenta indefinidamente ($n \to \infty$) y que el diámetro de la región más grande se vuelve sumamente pequeño ($d \to 0$) obtenemos en el límite una fórmula exacta para el volumen del ci-

[1]) Para la comodidad designamos aquí las regiones elementales y sus áreas con las mismas letras. La diferencia entre ellas se aprecia del contexto.

[2]) Las regiones ΔS_i se pueden suponer cerradas.

lindroide

$$V = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i\,^{1)}. \tag{3}$$

La expresión que se encuentra en el segundo miembro de la fórmula (3) se llama *integral doble de la función $f(x, y)$ extendida al dominio S* y se anota del modo siguiente

$$\lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i = \iint_S p(x, y)\,dS. \tag{4}$$

Por eso para el volumen de cilindroide tenemos finalmente

$$V = \iint_S f(x, y)\,dS. \tag{5}$$

Generalizando la construcción utilizada para el cálculo del volumen de un cilindroide, llegamos a las definiciones siguientes.

DEFINICION 1. *Llámase* ***suma integral bidimensional*** (2) *extendida a un dominio dado S de una función dada $f(x, y)$, a la suma de los productos pares de las áreas de las regiones elementales ΔS_i del dominio S por los valores $f(x_i, y_i)$ que la función $f(x, y)$ toma en los puntos elegidos en estas regiones* (fig. 247).

DEFINICION 2. *Llámase* ***integral doble*** (4), *extendida a un dominio dado S de una función $f(x, y)$, al límite de la suma integral bidimensional correspondiente* (2), *cuando el número n de regiones elementales ΔS_i crece infinitamente y su diámetro máximo d tiende a cero siempre que este límite exista y no dependa del modo de subdivisión del dominio S en las ΔS_i ni de la elección de los puntos en estas regiones.*

En la fórmula (4) $f(x, y)$ se denomina *función a integrar o subintegral*; S se llama *dominio de integración* y dS se llama *elemento del área*.

Es justo el teorema siguiente.

TEOREMA. *Si S es un dominio con la frontera Γ suave a trozos acotada y cerrada*[2]) *y la función $f(x, y)$ es continua sobre este dominio S, entonces la integral doble*

$$\iint_S f(x, y)\,dS = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i, \tag{6}$$

es decir, el límite de la suma integral bidimensional correspondiente existe y no depende ni del modo de subdivisión del dominio S en las regiones elementales ΔS_i, ni de la elección de los puntos en estas regiones.

En adelante supondremos que las condiciones de este teorema se cumplen.

---

[1]) Hablando más exactamente, por **definición**, se llama *volumen* del cilindroide al límite (3), si existe.

[2]) Es decir, la frontera Γ pertenece al dominio S (véase el § 11 del cap. XX).

En la fórmula (6) no es necesario indicar que $n \to \infty$ porque del hecho de que $d \to 0$ se deduce evidentemente que $n \to \infty$.

Si $f(x, y) \geqslant 0$, la integral doble (6) representa el volumen de un cilindroide recto que tiene como base el dominio S y está limitado por arriba por una superficie $z = f(x, y)$ **(interpretación geométrica de la integral doble).**

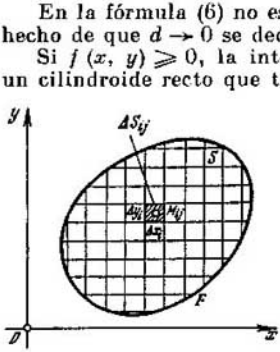

Fig. 248

Como el valor de una integral doble no depende de la naturaleza de las regiones elementales, en adelante, al resolver problemas utilizaremos esta circunstancia eligiendo las redes más convenientes. Resulta que es frecuentemente cómodo utilizar una **red rectangular** formada por la intersección de dos sistemas de rectas paralelas respectivamente a los ejes de las coordenadas Ox y Oy (fig. 248). En este caso las regiones elementales ΔS_{ij}[1]) están representadas por rectángulos de lados Δx_i y Δy_i excepto acaso las regiones adyacentes a la frontera Γ. Para subrayar que se utiliza una red rectangular en la notación de la integral (4) se toma

$$dS = dx\, dy \tag{7}$$

(*elemento bidimensional del área en coordenadas rectangulares*) y se escribe

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\substack{\text{máx}|\Delta x_i| \to 0 \\ \text{máx}|\Delta y_j| \to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\, \Delta x_i \Delta y_j, \tag{8}$$

donde $(x_i, y_j) \in \Delta S_{ij}$ y la suma (8) se extiende a todos los valores de i y j para los cuales $\Delta S_{ij} = \Delta x_i\, \Delta y_j$ (se puede mostrar que las regiones elementales no rectangulares que son continuas a la frontera Γ suave a trozos no influyen sobre el valor del límite (8))

En los párrafos que siguen examinaremos los principales procedimientos del cálculo de una integral doble.

§ 2. Integral doble en coordenadas cartesianas rectangulares

Supongamos, para mayor determinación, que la región de integración S es un trapecio curvilíneo (fig. 249)

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), \tag{1}$$

[1]) Las regiones elementales tienen aquí índices dobles: i indica el número de la franja vertical; j, el número de la franja horizontal que contiene la región dada, al igual que un billete de teatro donde se indica el número de la fila y el del asiento.

donde $y_1 = y_1(x)$ e $y_2 = y_2(x)$ son funciones continuas sobre el segmento $[a, b]$. Este dominio se llama **estándar** respecto al eje Oy. Notemos que la vertical que pasa por el punto x del eje Ox para $a < x < b$ interseca la frontera Γ del dominio S solamente en dos puntos $M_1(x, y_1)$ («punto de entrada») y $M_2(x, y_2)$ («punto de salida»).

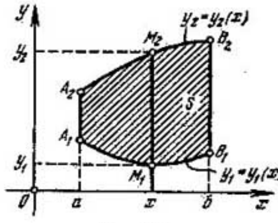

Fig. 249

Sean $f(x, y)$ una función continua sobre un dominio S y

$$I = \iint\limits_S f(x, y)\, dx\, dy \qquad (2)$$

la integral doble de esta función.

1) Supongamos primeramente que $f(x, y) \geqslant 0$ en el dominio S. La integral doble I representa en este caso el volumen del cilindroide (fig. 250) limitado por abajo por el dominio S, por arriba, por una superficie $z = f(x, y)$ y desde los costados por una superficie cilíndrica recta.

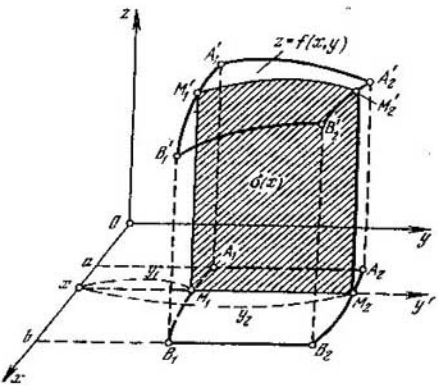

Fig. 250

Apliquemos, para calcular el volumen I, el método de secciones (§ 5 del cap. XV). A saber, sea $\sigma(x)$ el área de la sección del cilindroide por el plano $M_1M_2M_2'M_1'$ perpendicular al eje Ox en su punto $x \in [a, b]$ (fig. 250).

En este caso tenemos

$$I = \int_a^b \sigma(x)\,dx. \tag{3}$$

Pero $\sigma(x)$ es la superficie de un trapecio curvilíneo limitado por abajo por un segmento $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ del eje $O'y' \parallel Oy$ y por arriba, por una curva $z = f(x, y)$, $x = \text{const}$.

Por eso

$$\sigma(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{4}$$

Se puede demostrar que en nuestras condiciones la función $\sigma(x)$ es continua cuando $x \in [a, b]$.

Introduciendo la expresión (4) en la fórmula (3) obtendremos definitivamente

$$\iint_S f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{5}$$

De este modo la integral doble es igual a **la integral reiterada** correspondiente (5), es decir, el cálculo de la integral doble se reduce a dos cuadraturas. Notemos que calculando la integral interior en la fórmula (5) la variable x se considera como una constante.

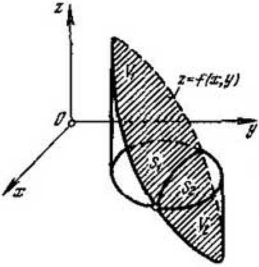

Fig. 251

2) En el caso en que $z = f(x, y)$ es una función de signo variable, por ejemplo, $f(x, y) \geqslant 0$ para $(x, y) \in S_1$ y $f(x, y) < 0$ para $(x, y) \in S_2$ $(S_1 \cup S_2 = S)$, la integral doble (2) es igual a la **suma algebraica** de los volúmenes V_1 y V_2 de los cilindroides construidos respectivamente sobre las bases S_1 y S_2 (fig. 251):

$$\iint_S f(x, y)\,dx\,dy = V_1 - V_2 \tag{6}$$

Se puede demostrar que la fórmula (5) resulta también verídica en este caso.

Apuntemos un caso particular importante: sea S un rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $A \leqslant y \leqslant B$ (fig. 252) y $f(x, y) = X(x)\,Y(y)$, donde $X(x)$ es una función continua en $[a, b]$ que depende solamente de x, y que $Y(y)$ es una función continua en $[A, B]$ dependiente sólo de y. En virtud de la fórmula (5) tenemos

$$\iint_S X(x)\,Y(y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_A^B X(x)\,Y(y)\,dy = \int_a^b X(x)\,dx \int_A^B Y(y)\,dy. \tag{7}$$

Pero la integral interior en la fórmula (7) es un número constante y por eso se puede sacarla de la integral exterior y obtendremos

$$\iint\limits_S X(x)\,Y(y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b X(x)\,dx \cdot \int\limits_A^B Y(y)\,dy, \tag{8}$$

es decir, la integral doble (8) es igual al producto de dos integrales simples.

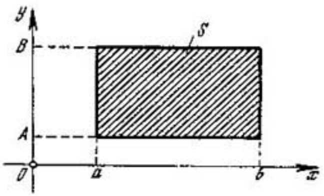

Fig. 252

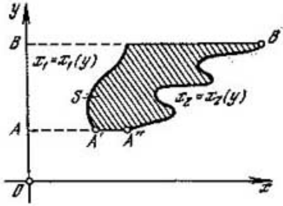

Fig. 253

OBSERVACIÓN 1. Si S es un dominio estándar respecto al eje Ox, es decir, si (fig. 253)

$$A \leqslant y \leqslant B, \quad x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y),$$

obtenemos, por analogía con la fórmula (5),

$$\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_A^B dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx. \tag{9}$$

En particular, si el dominio S es un rectángulo: $a \leqslant x \leqslant b$, $A \leqslant y \leqslant B$, tenemos

$$\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_A^B f(x, y)\,dy$$

y

$$\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_A^B dy \int\limits_a^b f(x, y)\,dx.$$

De aquí obtenemos

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_A^B f(x, y)\,dy = \int\limits_A^B dy \int\limits_a^b f(x, y)\,dx,$$

es decir, *si los límites de integración en la integral reiterada de una función continua son finitos y constantes, el resultado de la integración es independiente del orden de integración.*

OBSERVACIÓN 2. Si el dominio S no es estándar, lo subdividen (si es posible) en un número finito de dominios $S_1, S_2, \ldots, S_p$ estándares respecto a los ejes de coordenadas Ox u Oy y partiendo de las propiedades de límites, se toma

$$\iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \ldots + \iint_{S_p},$$

y luego se utilizan las fórmulas (5) ó (9).

EJEMPLO 1. Calcular

$$I = \iint_S (x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

donde S es un cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Precisando los límites de integración tendremos

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2+y^2)\,dy = \int_0^1 \left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2+\frac{1}{3}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}x\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Geométricamente, la integral I representa el volumen de un cilindroide cuya base es un cuadrado y que está limitado por arriba por la parábola de revolución $z = x^2 + y^2$ (fig. 254).

EJEMPLO 2. Calcular la integral doble

$$I = \iint_S xy^2\,dx\,dy,$$

donde S es un rectángulo $0 \leqslant x \leqslant 1$, $-2 \leqslant y \leqslant 3$.

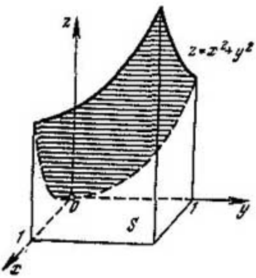

Fig. 254

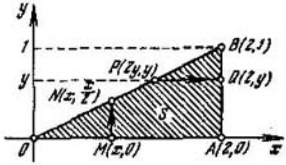

Fig. 255

Introduciendo los límites de integración y separando las variables tendremos

$$I = \int_0^1 x\,dx \cdot \int_{-2}^{3} y^2\,dy = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_{-2}^{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{27+8}{3} = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}.$$

EJEMPLO 3. Calcular

$$I = \iint_S x^2 y \, dx \, dy, \tag{10}$$

donde S es el triángulo de vértices O (0, 0), A (2, 0) y B (2, 1) (fig. 255).

El dominio S está acotado por las rectas $y = 0$, $y = \frac{x}{2}$, $x = 2$ y es estándar tanto respecto al eje Oy como respecto al eje Ox.

Para la vertical MN el «punto de entrada» en el dominio S es M $(x, 0)$ y el «punto de salida» es $N\left(x, \frac{x}{2}\right)$ $(0 < x < 2)$. De este modo, cuando x está fijada, la variable y varía en el dominio S de 0 a $\frac{x}{2}$. Por eso integrando en la integral doble (10) primeramente respecto a y para $x =$ constante y después respecto a x tendremos, según la fórmula (5)

$$I = \int_0^2 x^2 \, dx \int_0^{x/2} y \, dy = \int_0^2 x^2 \, dx \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=\frac{x}{2}} = \frac{1}{8} \int_0^2 x^4 \, dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{4}{5}. \tag{11}$$

De un modo análogo, para la horizontal PQ el punto P $(2y, y)$ es el «punto de entrada» en el dominio, y Q $(2, y)$ $(0 < y < 1)$ es el «punto de salida». Por consiguiente, cuando y está fijada la variable x varía de $2y$ a 2 para los puntos del dominio S. Integrando en la integral doble (10) primeramente respecto a x para $y =$ constante y después respecto a y obtendremos, en virtud de la fórmula (9),

$$I = \int_0^1 y \, dy \int_{2y}^2 x^2 \, dx = \int_0^1 y \, dy \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{x=2y}^{x=2} = \frac{8}{3} \int_0^1 (y - y^4) \, dy =$$

$$= \frac{8}{3} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{8}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{4}{5}. \tag{12}$$

Hemos obtenido, como era de esperar, el mismo resultado, pero el segundo procedimiento de cálculo resultó ser un poco más complicado.

EJEMPLO 4. Invertir el orden de integración en la integral reiterada

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy.$$

El dominio de integración S está limitado por las curvas $y = x^2$, $y = x$ y $x = 0$, $x = 1$ (fig. 256). De donde cambiando los papeles de ejes de coordenadas obtenemos

$$x = \sqrt{y} \geqslant 0, \quad x = y \quad \text{e} \quad y = 0, \quad y = 1.$$

Por consiguiente,

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx.$$

EJEMPLO 5. Colocar los límites de integración en la integral doble

$$I=\iint_S f(x,\ y)\,dx\,dy, \tag{13}$$

sabiendo que el dominio de integración S es un anillo circular limitado por las circunferencias $x^2+y^2=1$ (γ) y $x^2+y^2=4$ (Γ) (fig. 257).

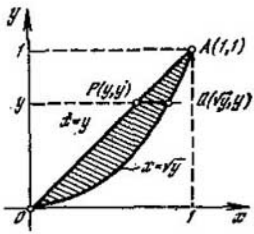

Fig. 256

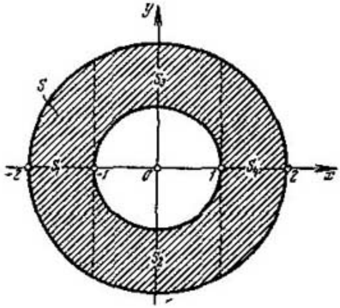

Fig. 257

El dominio S no es estándar. Para definir los límites de integración en la integral (13) partimos el dominio S en cuatro dominios estándares respecto al eje Oy: S_1, S_2, S_3, S_4 como está indicado en la figura. Utilizando las ecuaciones de la circunferencia

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}\ (\gamma) \quad \text{e} \quad y=\pm\sqrt{4-x^2}\ (\Gamma)$$

tenemos

$$I=\iint_{S_1} f(x,\ y)\,dx\,dy+\iint_{S_2} f(x,\ y)\,dx\,dy+\iint_{S_3} f(x,\ y)\,dx\,dy+$$

$$+\iint_{S_4} f(x,\ y)\,dx\,dy=\int_{-2}^{-1} dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,\ y)\,dy+\int_{-1}^{1} dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,\ y)\,dy+$$

$$+\int_{-1}^{1} dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,\ y)\,dy+\int_{1}^{2} dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,\ y)\,dy.$$

Disponiendo los límites de integración en otro orden obtendremos una fórmula análoga.

§ 3. Integral doble en coordenadas polares

Sea

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy = \iint_S f(x, y)\, dS \tag{1}$$

una integral doble en la cual queremos pasar, con los supuestos habituales, a las coordenadas polares r y φ, tomando

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \varphi. \tag{2}$$

Subdividamos el dominio de integración S en regiones elementales ΔS_{ij} con ayuda de líneas de coordenación $r = r_j$ (circunferencias) y $\varphi = \varphi_i$ (rayos) (fig. 258). Introducimos la notación

$$\Delta r_j = r_{j+1} - r_j, \quad \Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i.$$

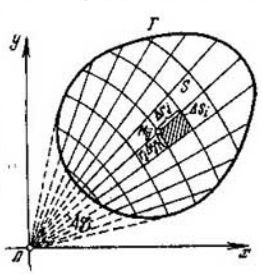

Fig. 258

Como la circunfrencia es perpendicular (ortogonal) a los radios, las regiones interiores ΔS_{ij} pueden ser consideradas con precisión hasta infinitésimos de un orden superior respecto a su superficie como rectángulos de lados $r_j\, \Delta\varphi_i$ y Δr_j; por eso el área de cada región es igual a

$$\Delta S_{ij} \approx r_j\, \Delta\varphi_i\, \Delta r_j. \tag{3}$$

En cuanto a las regiones ΔS_{ij} de forma irregular, contiguas a la frontera Γ del dominio de integración S, estas regiones no afectarán el valor de la integral doble (compárese con la fórmula (9) del § 1) y por eso las despreciamos.

Para simplificar, tomemos como punto $M_{ij} \in \Delta S_{ij}$ el vértice de la región ΔS_{ij} de coordenadas polares r_j y φ_i. En este caso las coordenadas rectangulares del punto M_{ij} son iguales a

$$x_{ij} = r_j \cos \varphi_i, \quad y_{ij} = r_j \operatorname{sen} \varphi_i$$

y, por consiguiente,

$$f(x_{ij}, y_{ij}) = f(r_j \cos \varphi_i,\ r_j \operatorname{sen} \varphi_i). \tag{3'}$$

La integral doble (1) es el límite de la suma integral bidimensional. Se puede demostrar que las adjunciones a los términos de esta suma son infinitamente pequeñas de orden superior y no influyen sobre el valor del límite. Por eso teniendo en cuenta las fórmulas (3) y (3') obtenemos

$$\iint_S f(x, y)\, dS = \lim_{d\to 0} \sum_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij})\, \Delta S_{ij} =$$

$$= \lim_{d\to 0} \sum_{i,j} f(r_j \cos\varphi_i,\ r_j \operatorname{sen}\varphi_i)\, r_j \Delta\varphi_i \Delta r_j, \qquad (4)$$

donde d es el diámetro máximo de las regiones ΔS_{ij} y la suma se extiende a todas las regiones elementales del tipo indicado arriba que pertenecen enteramente al dominio de integración S. Por otra parte, las magnitudes φ_i y r_j son números y pueden ser considerados como coordenadas cartesianas rectangulares de ciertos puntos del plano $O\varphi r$. De este modo, la suma (4) es una suma integral para la función

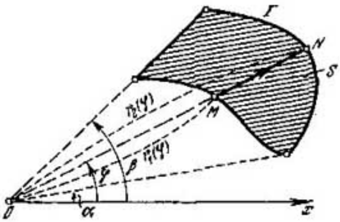

Fig. 259

$$f(r\cos\varphi,\ r\operatorname{sen}\varphi)\, r$$

correspondiente a la red rectangular con elementos lineales $\Delta\varphi_i$ y Δr_j. Por consiguiente,

$$\lim_{d\to 0} \sum f(r_j\cos\varphi_i,\ r_j\operatorname{sen}\varphi_i)\, r_j\Delta\varphi_i\Delta r_j =$$

$$= \iint_S f(r\cos\varphi,\ r\operatorname{sen}\varphi)\, r\, d\varphi\, dr. \qquad (5)$$

Comparando las fórmulas (4) y (5) obtendremos definitivamente

$$\iint_S f(x, y)\, dS = \iint_S f(r\cos\varphi,\ r\operatorname{sen}\varphi)\, r\, d\varphi\, dr. \qquad (6)$$

La expresión

$$dS = r\, d\varphi\, dr \qquad (7)$$

se llama *elemento de área bidimensional en coordenadas polares* (compárese con el § 2 del cap. XV). Entonces, *para pasar a las coordenadas polares, en la integral doble* (1) *es suficiente con reemplazar las coordenadas x e y con ayuda de las fórmulas* (2) *e introducir la expresión* (7) *en lugar del elemento de área dS.*

Para calcular la integral doble (6) hace falta reemplazarla por dos integrales simples sucesivas. Supongamos que el dominio de integración S esté definido por las desigualdades

$$\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, \quad r_1(\varphi) \leqslant r \leqslant r_2(\varphi),$$

donde $r_1(\varphi)$, $r_2(\varphi)$ son funciones continuas unívocas sobre el segmento $[\alpha, \beta]$ (fig. 259). Por analogía con las coordenadas rectangulares (véase el § 2) tenemos

$$\iint_S F(r, \varphi)\,d\varphi\,dr = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r, \varphi)\,dr, \tag{8}$$

donde

$$F(r, \varphi) = rf(r\cos\varphi, r \operatorname{sen}\varphi).$$

EJEMPLO 1. Pasando a las coordenadas polares φ y r calcular la integral doble

$$I = \iint_S \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

donde S es el primer cuadrante del círculo de radio $R = 1$ con centro en el punto O (0, 0) (fig. 260).

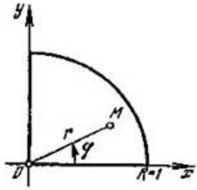

Fig. 260

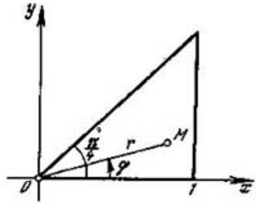

Fig. 261

Puesto que $\sqrt{x^2+y^2} = r$, aplicando la fórmula (6) obtenemos

$$I = \iint_S \frac{r\,d\varphi\,dr}{r} = \iint_S d\varphi\,dr.$$

El dominio S se determina por las desigualdades $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant r \leqslant 1$. Por eso, en virtud de la fórmula (8), tenemos

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 dr = \frac{\pi}{2}\cdot 1 = \frac{\pi}{2}.$$

EJEMPLO 2. Pasar a las coordenadas polares en la integral

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dy. \tag{9}$$

El dominio de integración es aquí un triángulo S limitado por las rectas $y = 0$, $y = x$, $x = 1$ (fig. 261).

Las ecuaciones de estas rectas en coordenadas polares se escriben del modo siguiente: $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $r\cos\varphi = 1$ y, por consiguiente, el dominio S se define por las desigualdades

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{\cos \varphi} = \sec \varphi.$$

De aquí, mediante las fórmulas (6) y (8) teniendo en cuenta que $\sqrt{x^2+y^2}=r$, tenemos

$$I = \iint_S r \cdot r \, d\varphi \, dr = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sec \varphi} r^2 \, dr.$$

§ 4. Integral de Euler — Poisson

Con ayuda de las coordenadas polares es fácil calcular *la integral de Euler—Poisson*

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx, \tag{1}$$

muy importante en la teoría de las probabilidades.

Puesto que la integral definida no depende de la designación de la variable se puede evidentemente escribir también

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \, dy. \tag{2}$$

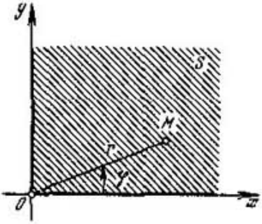

Fig. 262

Multiplicando las fórmulas (1) y (2) y teniendo en cuenta el hecho de que el producto de estas integrales simples puede ser considerado como una integral doble del producto de funciones subintegral (véase la fórmula (8) del § 2) tendremos

$$I^2 = \iint_S e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy, \tag{3}$$

donde el dominio S se define por las desigualdades

$$0 \leqslant x < +\infty, \quad 0 \leqslant y < +\infty$$

y, por consiguiente, representa el primer cuadrante del plano de coordenadas Oxy (fig. 262)[1]).

Pasando la integral (3) a coordenadas polares, obtendremos

$$I^2 = \iint_S e^{-r^2} r \, d\varphi \, dr = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} \, dr =$$

$$= \varphi \Big|_0^{\pi/2} \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

[1]) Hablando rigurosamente la (3) es una integral impropia que exige una definición especial. Sin embargo, la realización de operaciones formales conduce a resultados correctos.

De aquí, teniendo en cuenta que I es positivo, hallamos

$$I=\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Del hecho de que la función $y=e^{-x^2}$ es par, deducimos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$$

que representa el área de una superficie limitado por el eje Ox y la curva de Gauss $y=e^{-x^2}$ (véase la fig. 120 del § 8 del cap. XI).

§ 5. Teorema de la media

Sea $f(x, y)$ una función continua en un dominio cerrado acotado S, y $m=\min\limits_{S} f(x, y)$, $M=\max\limits_{S} f(x, y)$, respectivamente, los valores más pequeño y más grande que la función $f(x, y)$ toma en el dominio S. Para la suma integral bidimensional de esta función extendida al dominio S tenemos las estimaciones

$$mS\leqslant\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i\leqslant MS, \tag{1}$$

donde $S=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta S_i$ es el área del dominio S. De aquí, pasando en las desigualdades (1) al límite cuando $d=\max\limits_{i} d(\Delta S_i)\to 0$ y teniendo en cuenta la existencia de la integral doble, obtendremos

$$mS\leqslant\iint_{S} f(x, y)\,dS\leqslant MS. \tag{2}$$

El número

$$\mu=\frac{1}{S}\iint_{S} f(x, y)\,dS \tag{3}$$

se llama *valor medio* de la función $f(x, y)$ en el dominio S. De las desigualdades (2) se deduce que $m\leqslant\mu\leqslant M$.

La fórmula (3) puede ser escrita de la forma siguiente:

$$\iint_{S} f(x, y)\,dS=\mu S \tag{4}$$

$(m\leqslant\mu\leqslant M)$. De este modo *la integral doble es igual al valor medio de la función subintegral, multiplicado por el área del dominio de integración.*

No es necesario pensar que la fórmula (4) da un procedimiento universal para calcular una integral doble. Sucede que, como regla, el valor medio de una función se define mediante una integral doble. Por eso tiene aquí sentido real la estimación (2).

EJEMPLO. Estimar la integral

$$I=\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

donde S es el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Para la función $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$ tenemos

$$m = \min_S f(x, y) = f(0, 0)=0 \text{ y } M = \max_S f(x, y) = f(1, 1) = \sqrt{2}.$$

Puesto que $S = 1$, tenemos

$$0 \leqslant I \leqslant \sqrt{2} = 1{,}41.$$

Se puede considerar que

$$I \approx \frac{1}{2}(0 + 1{,}41) = 0{,}71.$$

Esta estimación es aproximada, porque el valor exacto de la integral es

$$I=\frac{1}{3}\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right] \approx 0{,}79.$$

La evaluación obtenida de la integral I puede ser más exacta, si el dominio de inegración S se divide en partes suficientemente pequeñas y aplicamos a cada una de ellas el teorema de la media.

§ 6. Aplicaciones geométricas de la integral doble

Como hemos mostrado en el § 1 el volumen de un cilindroide recto de base S en el plano de coordenadas Oxy limitado por arriba por una superficie continua $z = f(x, y)$ es igual a

$$V = \iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy. \tag{1}$$

EJEMPLO 1. Hallar el volumen V de cuerpo limitado por las superficies

$$z = x^2, \quad z = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 1.$$

El cuerpo buscado tiene como base el triángulo S situado en el plano Oxy y formado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$; este cuerpo está limitado desde arriba por el cilindro parabólico $z = x^2$ (fig. 263). De aquí, en virtud de la fórmula (1), obtendremos

$$V = \iint\limits_S x^2\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} x^2\,dy = \int\limits_0^1 dx\cdot x^2 y \,\Big|_{y=0}^{y=1-x} =$$

$$= \int\limits_0^1 x^2(1-x)\,dx = \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

Si en la fórmula (1) tomamos

$$f(x, y) \equiv 1,$$

obtendremos el volumen del cilindro de altura $z = 1$ numéricamente igual al área S de su base. Por eso el área de un dominio plano S es igual a

$$S = \iint_S dx\,dy. \tag{2}$$

La fórmula (2) puede ser escrita también de la forma

$$S = \iint_S dS. \tag{3}$$

EJEMPLO 2. Calcular el área de la superficie limitada por las hipérbolas $y = \frac{a^2}{x}$, $y = \frac{2a^2}{x}$ $(a > 0)$ y las rectas $x = 1$, $x = 2$ (fig. 264).

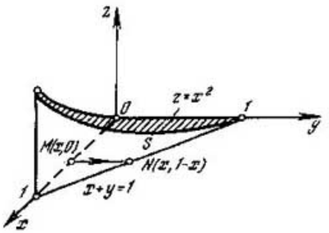

Fig. 263

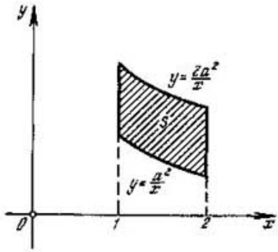

Fig. 264

Aplicando la fórmula (2) obtenemos

$$S = \int_1^2 dx \int_{a^2/x}^{2a^2/x} dy = \int_1^2 \left(\frac{2a^2}{x} - \frac{a^2}{x}\right) dx = a^2 \int_1^2 \frac{dx}{x} = a^2 \ln x \,\Big|_1^2 = a^2 \ln 2 \approx 0{,}7a^2.$$

§ 7. Aplicaciones físicas de la integral doble

Sea S una placa material. Si ΔS es una parte de la placa S de masa Δm que contiene un punto M, entonces la relación

$$\frac{\Delta m}{\Delta S}$$

se llama *densidad superficial media* del trozo de la placa ΔS, y el límite de esta relación, con la condición de que el diámetro $d(\Delta S) \to 0$, se denomina *densidad superficial* $\rho(M)$ de la placa S

en el punto M:

$$\rho(M) = \lim_{d(\Delta S)\to 0} \frac{\Delta m}{\Delta S}.$$

La densidad superficial $\rho(M)$ de la placa S es evidentemente función del punto M. Las nociones de densidad superficial media de la placa en un punto dado son enteramente análogas a las nociones de densidad lineal media del arco y de densidad lineal del arco en un punto, expuestas en el § 1 del cap. XXIII.

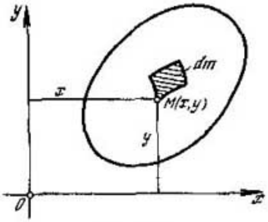

Fig. 265

Supongamos que la densidad superficial de la placa S en el punto corriente $M(x, y)$ es $\rho = \rho(x, y)$, donde $\rho(x, y)$ es una función continua conocida. Examinemos un elemento infinitamente pequeño dS de placa que contiene un punto M (fig. 265). Puesto que en los límites de este elemento la placa puede considerarse como homogénea de densidad ρ, entonces la masa del elemento dS (*masa elemental*) es igual a

$$dm = \rho dS. \tag{1}$$

Integrando la expresión (1) sobre toda la placa S hallamos la *masa de la placa*

$$m = \iint_S \rho\, dS. \tag{2}$$

Examinando dm como un punto material distante de los ejes de coordenadas Ox y Oy, respectivamente, y y x, obtendremos los *momentos estáticos elementales de la placa*

$$dS_x = y\, dm = y\rho(x, y)\, dS$$

y

$$dS_y = x\, dm = x\rho(x, y)\, dS.$$

De aquí, integrando estas expresiones sobre toda la placa S, hallamos los *momentos estáticos de la placa S respecto a los ejes de coordenadas*

$$\left.\begin{aligned} S_x &= \iint_S y\rho(x, y)\, dS, \\ S_y &= \iint_S x\rho(x, y)\, dS. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Se demuestra en mecánica que el momento estático de una placa respecto a un eje cualquiera coincide con el momento estático de una masa puntual igual a la masa de la placa concentrada en su centro de gravedad respecto al mismo eje (*teorema de Varignon*). Designando por (x_0, y_0) las coordenadas del centro de masas de la placa S, tendremos

$$S_y = mx_0, \quad S_x = my_0;$$

y, por consiguiente,

$$x_0 = \frac{S_y}{m} = \frac{1}{m}\iint\limits_S x\rho(x, y)\,dS, \quad y_0 = \frac{S_x}{m} = \frac{1}{m}\iint\limits_S y\rho(x, y)\,dS, \tag{4}$$

donde m es la masa (2) de la placa.

De un modo análogo obtenemos para *los momentos de inercia elementales* de la placa S respecto a los ejes de coordenadas Ox y Oy las expresiones siguientes

$$dI_x = y^2 dm = y^2\rho(x, y)\,dS, \quad dI_y = x^2\,dm = x^2\rho(x, y)\,dS.$$

De aquí, después de la integración sobre la placa S tendremos los *momentos de inercia de la placa S respecto a los ejes de coordenadas*

$$I_x = \iint\limits_S y^2\rho(x, y)\,dS, \quad I_y = \iint\limits_S x^2\rho(x, y)\,dS. \tag{5}$$

El momento de inercia polar elemental se determina por la fórmula

$$dI_0 = r^2\,dm = (x^2 + y^2)\,\rho(x, y)\,dS,$$

donde $r^2 = x^2 + y^2$ es el cuadrado de la distancia de la masa dm al origen de las coordenadas. Integrando la última expresión sobre la placa S obtenemos *el momento de inercia polar de la placa*

$$I_0 = \iint\limits_S (x^2 + y^2)\,\rho(x, y)\,dS. \tag{6}$$

De las fórmulas (5) y (6) se deduce que

$$I_0 = I_x + I_y. \tag{7}$$

Tomando $\rho(x, y) \equiv 1$ en las fórmulas de los momentos obtendremos los momentos de inercia correspondientes de la figura geométrica S. Recordemos que para el cálculo en coordenadas cartesianas rectangulares se supone habitualmente que $dS = dx\,dy$, y en el caso de coordenadas polares tenemos $dS = r\,d\varphi\,dr$.

EJEMPLO 1. Determinar las coordenadas del centro de masas de una placa cuadrada S: $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$ cuya densidad superficial en el punto $M(x, y)$ es igual a $\rho = x + y$.

Aplicando la fórmula (2) hallamos la masa de la placa

$$m=\iint_S \rho\,dx\,dy=\int_0^2 dx\int_0^2 (x+y)\,dy=$$

$$=\int_0^2 dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=2}=\int_0^2 (2x+2)\,dx=(x^2+2x)\Big|_{x=0}^{x=2}=8.$$

Mediante la fórmula (3) determinamos los momentos estáticos de la placa S respecto a los ejes de las coordenadas

$$S_x=\iint_S y\rho\,dx\,dy=\int_0^2 dx\int_0^2 (xy+y^2)\,dy=\int_0^2 dx\left(\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{y=2}=$$

$$=\int_0^2\left(2x+\frac{8}{3}\right)dx=\left(x^2+\frac{8}{3}x\right)\Big|_{x=0}^{x=2}=4+\frac{16}{3}=9\frac{1}{3},$$

$$S_y=\iint_S x\rho\,dx\,dy=\int_0^2 dx\int_0^2 (x^2+xy)\,dy=\int_0^2 dx\left(x^2y+\frac{xy^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=2}=$$

$$=\int_0^2 (2x^2+2x)\,dx=\left(\frac{2x^3}{3}+x^2\right)\Big|_{x=0}^{x=2}=\frac{16}{3}+4=9\frac{1}{3}.$$

La igualdad de los momentos S_x y S_y puede ser prevista en razón de la simetría del problema.

Según las fórmulas (4) el centro de masas de la placa S tiene las coordenadas

$$x_0=\frac{S_y}{m}=\frac{28}{3\cdot 8}=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6},$$

$$y_0=\frac{S_x}{m}=1\frac{1}{6}.$$

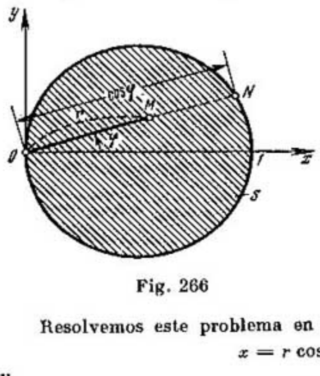

Fig. 266

EJEMPLO 2. Hallar el momento de inercia I_x respecto al eje Ox de la superficie del círculo S: $x^2+y^2\leqslant x$ (fig. 266).

Suponiendo que $\rho=1$ obtenemos en virtud de la primera fórmula (5)

$$I_x=\iint_S y^2\,dS. \qquad (8)$$

Resolvemos este problema en coordenadas polares. Tenemos

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

y

$$dS=r\,d\varphi\,dr.$$

La ecuación de la frontera Γ del dominio S es

$$x^2 + y^2 = x.$$

De donde pasando a las coordenadas polares obtendremos

$$r^2 = r \cos \varphi.$$

Por consiguiente al simplificar por el factor no esencial r tenemos

$$r = \cos \varphi.$$

Como $r \geqslant 0$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. De este modo para cada $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ fijado el radio r varía en los límites de $0 \leqslant r \leqslant \cos \varphi$. Pasando a las coordenadas polares en la fórmula (8) obtendremos

$$I_x = \iint_S r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cdot r\, dr\, d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \varphi\, d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r^3\, dr = \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^4 \varphi\, d\varphi.$$

Como se sabe

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi = \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 2\varphi,$$

por eso

$$I_x = \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 2\varphi \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{32} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2\varphi\, d\varphi + \frac{1}{32} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2\varphi \cos 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{64} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos 4\varphi)\, d\varphi + \frac{1}{64} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2\varphi\, d(\operatorname{sen} 2\varphi) =$$

$$= \frac{1}{64} \left(\varphi - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4\varphi\right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{64} \cdot \frac{\operatorname{sen}^3 2}{3} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{64}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 0\right) + 0 = \frac{\pi}{64}.$$

§ 8. Noción de integral triple

Por analogía con la integral doble se define la llamada *integral triple*. Sea V un dominio cerrado acotado dado en un espacio cartesiano $Oxyz$ y sea $f(x, y, z)$ una función acotada definida en V. Dividamos el volumen V en un número finito de regiones elementales $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$ y en cada una de ellas elijamos un punto

$$M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(fig. 267). La suma

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i, \tag{1}$$

donde ΔV_i es el volumen de la i-ésima región, se llama *suma integral tridimensional*.

Designemos por d el diámetro mayor de las regiones ΔV_i[1]. Por subdivisiones sucesivas del dominio V haremos decrecer indefinidamente los volúmenes de ΔV_i. En este caso, el límite de la suma integral (1) cuando $d \to 0$, si este límite existe y no depende de la forma de las regiones elementales ΔV_i, ni de la elección de los puntos M_i en estas regiones, se llama *integral triple de la función* $f(x, y, z)$ *extendida al dominio* V y se designa del modo siguiente

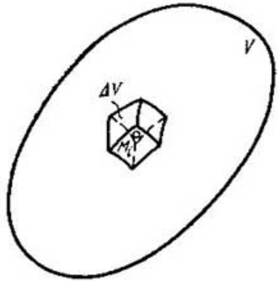

Fig. 267

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dV = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i. \qquad (2)$$

Se demuestra que la integral triple (2) existe, si la función subintegral $f(x, y, z)$ es continua en el dominio de integración V cerrado acotado, cuya frontera es suave a trozos.

Si el dominio V está repleto de masa y si $f(x, y, z)$ representa una densidad volumétrica continuamente repartida en el punto corriente $M(x, y, z)$, entonces $f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i$, donde $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i$ representa con exactitud de un infinitésimo de un orden superior al volumen máximo de ΔV_j $(j = 1, \ldots, n)$, es la masa de la región elemental ΔV_i. Por consiguiente, la suma integral (1) es aproximadamente igual a la masa m que rellena el dominio V. Cuando $d \to 0$ resulta que el límite de la suma S_n será igual a la masa m. De aquí deducimos *la interpretación* **física** *de la integral triple*: si $f(x, y, z)$ es la densidad continua de repartición de la masa en el espacio $Oxyz$, entonces la integral triple

$$m = \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dV \qquad (3)$$

representa la masa que rellena el dominio de integración V. En el caso particular cuando la densidad $f(x, y, z) \equiv 1$, la masa del dominio V es numéricamente igual a su volumen. Por eso, el volumen del dominio V se expresa por una integral triple

$$V = \iiint\limits_V dV. \qquad (4)$$

[1] Sobre la noción de diámetro véase el § 1.

Si la integral triple (2) se calcula en coordenadas rectangulares x, y, z se toman para ΔV_{ijk} paralelepípedos rectangulares de lados Δx_i, Δy_j, Δz_k y de caras paralelas a los planos de las coordenadas, es decir, se considera que

$$\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \, \Delta y_j \, \Delta z_k.$$

En este caso *el elemento de volumen* dV se considera igual a

$$dV = dx \, dy \, dz \tag{5}$$

(*elemento de volumen en coordenadas rectangulares*) y la integral triple (2) se escribe de la forma siguiente

$$\iiint\limits_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz. \tag{6}$$

En particular, para el volumen de un cuerpo obtenemos la fórmula

$$V = \iiint\limits_V dx \, dy \, dz. \tag{6'}$$

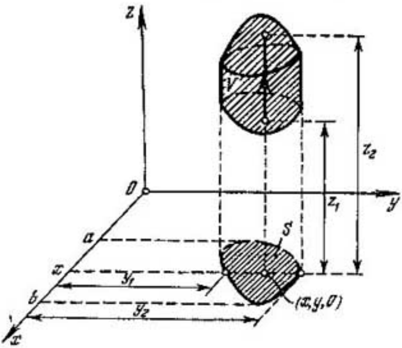

Fig. 268

En el caso más simple, el cálculo de la integral triple (6) se reduce **a tres cuadraturas.** A saber, supongamos que el dominio de integración V es estándar respecto al eje Oz (compárese con el § 2), es decir, está limitado por abajo y por arriba, respectivamente, por las superficies continuas unívocas

$$z_1 = z_1(x, y), \quad z_2 = z_2(x, y),$$

y que la proyección del dominio V sobre el plano de coordenadas Oxy es un dominio plano S (fig. 268).

De aquí resulta que para valores fijos $(x, y) \in S$ los lados correspondientes z de los puntos del dominio V varían dentro de los límites de $z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)$. Por analogía con la integral doble (§ 6), tendremos

$$\iiint\limits_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint\limits_S dx \, dy \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz. \tag{7}$$

Además, si la proyección S es estándar respecto al eje Oy y se define por las desigualdades

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),$$

donde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son funciones continuas unívocas en el segmento $[a, b]$, entonces

$$\iint\limits_S dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz. \quad (8)$$

De las fórmulas (7) y (8) obtenemos definitivamente

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz. \quad (9)$$

De este modo el cálculo de la integral triple se reduce al cálculo de tres cuadraturas.

Notemos que si el dominio de integración V es estándar respecto a todos los ejes de coordenadas Ox, Oy y Oz, los límites de integración para la integral triple (6) pueden ser puestos de $3! = 6$ procedimientos diferentes.

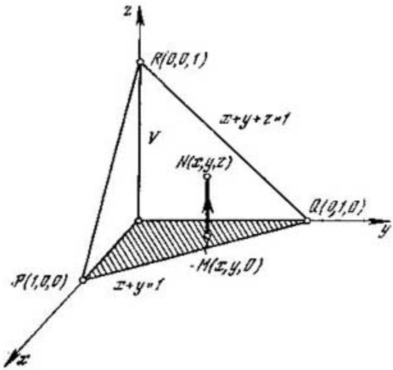

Fig. 269

EJEMPLO Calcular la integral

$$I = \iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz,$$

donde V es la pirámide $OPQR$ limitada por los planos siguientes:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$
$$x + y + z = 1$$

(fig. 269).

La proyección del dominio V sobre el plano de coordenadas $Oxyz$ es el triángulo S limitado por las rectas

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 1.$$

Para $(x, y) \in S$ la z-coordenadas de los puntos $(x, y, z) \in V$ satisfacen la desigualdad $0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y$. Por eso

$$I = \iint\limits_S xy\,dx\,dy \int\limits_0^{1-x-y} z\,dz = \iint\limits_S xy\,dx\,dy \cdot \frac{z^2}{2}\Big|_{z=0}^{z=1-x-y} =$$

$$= \frac{1}{2} \iint\limits_S xy\,(1 - x - y)^2\,dx\,dy.$$

Introduciendo los límites de integración para el triángulo S obtendremos

$$I=\frac{1}{2}\int_{0}^{1} x\,dx \int_{0}^{1-x} y\,[(1-x)^2-2\,(1-x)\,y+y^2]\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{2}^{1} x\left[(1-x)^2\cdot\frac{y^2}{2}-2\,(1-x)\cdot\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4}\right]\Bigg|_{y=0}^{y=1-x} dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{1} x\,(1-x)^4\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)dx=\frac{1}{24}\int_{0}^{1}[1-(1-x)\}\,(1-x)^4\,dx=$$

$$=\frac{1}{24}\left\{\int_{0}^{1}(1-x)^4\,dx-\int_{0}^{1}(1-x)^5\,dx\right\}=$$

$$=\frac{1}{24}\left[-\frac{(1-x)^3}{5}\Bigg|_{x=0}^{x=1}+\frac{(1-x)^6}{6}\Bigg|_{x=0}^{x=1}\right]=\frac{1}{24}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{720}\,.$$

El número I representa la masa de la pirámide V, si su densidad en el punto corriente $M\,(x,\,y,\,z)$ es igual $\rho=xyz$.

EJERCICIOS

1. Calcular las integrales reiteradas siguientes:

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} dx\int_{2}^{5}\frac{x}{y^2}\,dy$; b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} dx\int_{0}^{1} e^{x-y}\,dy$;

c) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} d\varphi\int_{0}^{1} r\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\,dr$.

2. Dibujar el dominio de integración y calcular las integrales reiteradas siguientes:

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} dx\int_{0}^{x}\sqrt{x+y}\,dy$, b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} dy\int_{y}^{y+y^2} xy\,dx$;

c) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} d\varphi\int_{0}^{\varphi} r\cos\varphi\,dr$.

3. Poner los límites de integración en los dos órdenes en la integral doble $\displaystyle\iint_S f\,(x,\,y)\,dx\,dy$ para los dominios de integración siguientes:

a) S es el triángulo de vértices $O\,(0,\,0)$, $A\,(1,\,0)$, $B\,(1,\,2)$;
b) S es el trapecio de vértices $O\,(0,\,0)$, $A\,(2,\,0)$, $B\,(1,\,1)$ y $C\,(0,\,1)$;

c) S es el cuarto del círculo $x^2+y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;
d) S es el segmento parabólico limitado por las líneas $y = x^2$, $y = 4$;
e) S es el círculo $x^2+y^2 \leqslant 2x$.

4. Invertir el orden de integración en las integrales reiteradas siguientes:

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x, y)\, dy$; b) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{e^y}^{e} f(x, y)\, dx$; c) $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\operatorname{sen} x} f(x, y)\, dx$.

5. Pasar a las coordenadas polares y poner los límites de integración en las integrales dobles siguientes:

a) $\iint\limits_S x^2 y\, dx\, dy$, donde S es el sector circular limitado por las líneas $x^2+y^2=1$, $y=x$, $y=-x$ $(y \geqslant 0)$;

b) $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$, donde S es el triángulo de vértices $O(0, 0)$, $A(2, -1)$, $B(2, 1)$;

c) $\iint\limits_S f(x+y)\, dx\, dy$, donde S es el segmento parabólico limitado por las líneas $y=x$ e $y=x^2$.

6. Calcular las integrales dobles siguientes:

a) $\iint\limits_S (x+y)\, dx\, dy$, donde S es el triángulo de vértices $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ y $B(0, 1)$;

b) $\iint\limits_S xy^2\, dx\, dy$, donde S es el segmento parabólico limitado por las líneas $y^2=x$, $x=1$;

c) $\iint\limits_S \frac{dx\, dy}{(y+1)^2}$, donde S es el segmento parabólico limitado por las líneas $y=1-x^2$, $y=0$;

d) $\iint\limits_S \frac{x}{\sqrt{y}}\, dx\, dy$, donde S es el segmento hiperbólico limitado por las líneas $xy=4$, $x+y=5$.

7. Pasando a las coordenadas polares, calcular las integrales dobles:

a) $\iint\limits_S \operatorname{sen} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$, donde S es el círculo $x^2+y^2 \leqslant \pi^2$;

b) $\iint\limits_S \frac{y^2}{x^2+y^2}\, dx\, dy$, donde S es el triángulo limitado por las rectas $y=x$, $y=-x$, $y=1$.

8. Calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies

a) $z=\sqrt{1-y^2}$, $z=0$, $y=x$, $x=0$;
b) $z=2-x-y$, $z=0$, $x^2+y^2=1$, $x=0$, $y=0$;
c) $z=x^2+y^2$, $z=0$, $y^2=x$, $x=1$;
d) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$, $x^2+y^2=2x$;
e) $z=\frac{c}{a}x$, $z=0$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(z \geqslant 0)$.

9. Hallar los momentos de inercia de una placa redonda homogénea $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ respecto a los ejes Ox y Oy.

10. Determinar las coordenadas del centro de masas de una placa homogénea limitada por las curvas $ay = x^2$, $y = a$.

11. Calcular

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y xyz \, dz.$$

12. Hallar el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z = y^2$, $z = 2y^2$, $xy = 1$, $xy = 4$, $x = 1$, $x = 3$.

Capítulo XXV

Fundamentos de la teoría de las probabilidades

A. DEFINICIONES Y TEOREMAS FUNDAMENTALES

§ 1. Sucesos aleatorios

En las ciencias naturales el estudio de la realidad objetiva se realiza por intermedio de pruebas (experimentos) u observaciones, es decir, con ayuda de la experiencia en el sentido amplio de esta palabra. En el caso general se entiende por ensayo (observación) **la existencia de un conjunto determinado de condiciones.** Un resultado posible, es decir, el resultado de un ensayo o de una observación, se llama *suceso*, independiente de su importancia.

Para poder formular la teoría de las probabilidades, se idealizan los sucesos, es decir, no se toman en consideración situaciones que no son esenciales para el fenómeno dado.

EJEMPLO. Cuando se lanza una moneda ésta puede caer de cara o cruz. De este modo, para un solo ensayo son posibles dos sucesos: el A, la moneda cae de cara, y el B, la moneda cae de cruz.

Sin embargo, es posible otro suceso C, cuando la moneda cae de canto. Mas para el juego de cara y cruz esta última situación no es esencial (¡la moneda se lanza otra vez!) y en nuestro ensayo idealizado este suceso no se toma en consideración.

DEFINICION 1. *El resultado de un ensayo que no puede ser previsto de antemano se llama* ***suceso aleatorio.***

En otras palabras, en un ensayo dado un suceso es aleatorio, si no se puede predecir de antemano si tendrá o no lugar en esta prueba.

Por ejemplo, la caída de cara de una moneda es un suceso aleatorio, a condición de que el ensayo está organizado de modo que su resultado no se conozca de antemano.

En numerosos casos un suceso aleatorio es el resultado de una información incompleta sobre el fenómeno dado. Por ejemplo, si en la prueba de lanzar una moneda son conocidos: la fuerza del empuje, la forma de la moneda, la ley de resistencia del aire, así como los restantes factores que determinan la ley de movimiento de la moneda, podríamos calcular exactamente el resultado del ensayo.

DEFINICION 2. *Un suceso se llama* ***cierto (seguro)*** *en un ensayo dado (es decir, cuando se cumple un conjunto bien determinado de condiciones), si él tiene lugar inevitablemente durante este ensayo.*

Por ejemplo, la obtención en el examen por parte de un estudiante de una nota positiva o negativa es un suceso cierto, si el examen está organizado según las reglas habituales.

DEFINICIÓN 3 *Un suceso se llama* ***imposible*** *en un ensayo dado, si él con seguridad no se realiza durante este ensayo.*

Por ejemplo, si una urna contiene solamente bolas de color (no blancas), la extracción de esta urna de una bola blanca es un suceso imposible. Notemos que si la prueba se realiza en otras condiciones la aparición de una bola blanca no se excluye; de este modo este suceso es imposible solamente en las condiciones de nuestro ensayo.

La teoría de las probabilidades es la ciencia que estudia las leyes de los sucesos aleatorios.

Gracias al desarrollo técnico son muy interesantes las leyes estáticas de **sucesos aleatorios homogéneos masivos** (control de la calidad de la producción, servicio de la fabricación en serie, funcionamiento de una central telefónica, etc.). Aquí en diversas variantes se establece el teorema fundamental de la teoría de probabilidades que se conoce bajo el nombre la «ley de grandes números».

Tomemos como axioma el hecho de que para cada suceso A se puede determinar, por lo menos teóricamente, la probabilidad de este suceso, es decir, del número $P(A)$ que representa en un cierto sentido la «medida de autenticidad» de este suceso y que obedece a exigencias naturales. Se supone que la probabilidad de cualquier suceso satisface la desigualdad

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

siendo la probabilidad de un suceso imposible igual a cero, mientras que la probabilidad de un suceso cierto es igual a la unidad.

En la práctica se considera que un suceso es prácticamente imposible, si su probabilidad es pequeña; por el contrario, un suceso se considera como casi cierto, si su probabilidad es próxima a la unidad; sobre esta base se toman decisiones justificadas.

La teoría de las probabilidades fue desarrollada en los trabajos de numerosos grandes matemáticos (Pascal, Fermat, Laplace, Gauss, Poisson y otros). Más tarde, resultados fundamentales fueron obtenidos en esta ciencia por matemáticos rusos (Chebyshev, Markov, Liapunov, Bernstein, Kolmogorov, Jinchin y otros).

La teoría de las probabilidades se utiliza ampliamente en las ciencias puras (teóricas) y aplicadas (física, geodesia, balística, mando automático, etc.). En particular ella sirve de base teórica a la estadística matemática y a la estadística aplicada, sobre las cuales a su vez se basan la planificación y la organización de la producción.

§ 2. Algebra de sucesos

Cada ensayo está relacionado con una serie de sucesos que nos interesan y los cuales pueden en general manifestarse simultáneamente. Por ejemplo, cuando lanzan un dado (es decir, un cubo pequeño cuyas caras están numeradas de 1 a 6) el suceso A es cuando aparece el 1 y el suceso B cuando aparece un número impar. Es evidente que estos dos sucesos no se excluyen mutuamente.

Supongamos que todos los resultados posibles de un ensayo se realizan bajo la forma de una serie de **casos particulares** que se excluyen mutuamente (los llamados *sucesos elementales* o *resultados elementales*). En este caso: 1) cada resultado del ensayo se representa por un solo suceso elemental; 2) todo suceso A relacionado con este ensayo es un conjunto de un número finito o infinito de sucesos elementales; 3) el suceso A se realiza si, y sólo si, se realiza uno de los sucesos elementales pertenecientes a este conjunto.

EJEMPLO 1 Supongamos que el suceso A consiste en que el dado da un número impar en un solo lanzamiento.

Aquí para los sucesos elementales se pueden tomar los resultados siguientes del ensayo: (1), (2), (3), (4), (5), (6). El suceso A es el conjunto de sucesos $\{(1), (3), (5)\}$.

Por analogía con la teoría de conjuntos (véase el § 1) se construye una álgebra de sucesos.

DEFINICIÓN 1 *Se llama **suma** de dos sucesos A y B al suceso*

$$A + B = A \cup B$$

que tiene lugar si, y solo si, se cumple por lo menos uno de los sucesos A o B.

En el general se llama *suma de varios sucesos* a un suceso que consiste en realización por lo menos de uno de estos sucesos.

EJEMPLO 2 Sea que el suceso A es un premio de una lotería I y que el suceso B es un premio de una lotería II. En este caso, el suceso $A + B$ es un premio por lo menos en una de las loterías (es posible que se ganen los dos premios a la vez).

DEFINICION 2 *Se llama **producto** de dos sucesos A y B a un suceso*

$$AB = A \cap B$$

compuesto de la realización simultánea de los sucesos A y B.

En el caso general, se llama *producto de varios sucesos* a un suceso que corresponde a la realización simultánea de todos estos sucesos.

EJEMPLO 3 Sean A y B los sucesos que consisten en la aprobación respectiva de las rondas I y II del examen de ingreso a una escuela superior. En este caso, el suceso AB es la aprobación de ambas rondas.

Los dos sucesos A y B se denominan *incompatibles* en un ensayo dado si el producto de ellos es un suceso imposible, es decir, si

$$AB = O,$$

donde O es un suceso imposible.

En otras palabras, dos sucesos son incompatibles, si la realización de uno de ellos excluye la realización del otro, y viceversa.

§ 3. Definición clásica de la probabilidad

Sea A un suceso que representa un cierto resultado de un ensayo y sea

$$E_1, E_2, \ldots, E_n \tag{1}$$

un sistema finito de sucesos elementales posibles y de los incompatibles sólo posibles de par en par de este ensayo (*sistema completo de sucesos elementales*). De este modo, el suceso A tiene lugar si, y sólo si, se realizan ciertos sucesos pertenecientes al sistema (1) (resultados **favorables o que favorecen** la realización, o como también se lo llama **chance** para el suceso A).

Supongamos que los sucesos del sistema (1) son *equiposibles*, es decir, no hay razón para suponer que uno de los sucesos del sistema (1) tiene mayores posibilidades de producirse que otro. A veces esto se puede establecer utilizando la «propiedad de simetría».

DEFININCIÓN 1. *Se llama* ***probabilidad*** *$P(A)$ de un suceso A, a la relación del número de todos los resultados elementales de posibilidades iguales favorables al suceso A, al número total de todos los resultados elementales equiposibles del ensayo dado.*

De este modo, si m es el número de resultados elementales favorables al suceso A y n es el número total de resultados elementales de un ensayo dado, y todos estos resultados son equiposibles, se puede escribir por definición la fórmula siguiente

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{2}$$

Puesto que es evidente que $0 \leqslant m \leqslant n$, tenemos

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1, \tag{3}$$

es decir, *la probabilidad de cualquier suceso es un número no negativo, no superior a la unidad.*

OBSERVACIÓN. De la definición de probabilidad resulta que los sucesos elementales que tienen la misma posibilidad de producirse son *equiprobables*, es decir, ellos poseen una misma probabilidad.

De la definición de probabilidad se deducen sus propiedades fundamentales siguientes:

1. *La probabilidad de un suceso imposible es igual a cero.*

Efectivamente, si un suceso A es imposible, el número de resultados elementales favorables a este suceso $m = 0$ y tenemos

$$P(A) = \frac{0}{n} = 0.$$

2. *La probabilidad de un suceso cierto es igual a la unidad.*

Evectivamente, si un suceso A es cierto, es evidente que $m = n$ y, por consiguiente,

$$P(A) = \frac{n}{n} = 1.$$

Enunciemos algunos teoremas elementales sobre probabilidades.

DEFINICIÓN 2 *Dos sucesos A y B se llaman* ***equivalentes***:

$$A = B,$$

si cada uno de ellos se realiza cada vez cuando se produce el otro.

Desde el punto de vista de la teoría de las probabilidades, semejantes sucesos se consideran iguales.

Por ejemplo, si una urna contiene solamente bolas blancas y negras, entonces la aparición de una bola negra y de una bola no blanca, son sucesos equivalentes.

TEOREMA 1. *Los sucesos equivalentes tienen una misma probabilidad, es decir, si $A = B$, entonces*

$$P(A) = P(B). \tag{4}$$

Efectivamente, cada resultado elemental para el suceso A es el mismo que para el suceso B, y viceversa. En virtud de la fórmula (2) es justa la igualdad (4).

DEFINICIÓN 3 *Se dice que un suceso A* ***implica*** *otro suceso B ($A \Rightarrow B$), si B se realiza cada vez cuando se realiza A.*

Por ejemplo, para cualesquiera sucesos A y B tenemos $AB \Rightarrow A$ y $AB \Rightarrow B$.

TEOREMA 2. *Si $A \Rightarrow B$, entonces*

$$P(A) \leqslant P(B). \tag{5}$$

Efectivamente, supongamos que los sucesos A y B están incluidos en un sistema común de resultados elementales equiprobables y que m y m' son los números de los resultados elementales favorables respectivamente para el suceso A y para el suceso B y n es el número total de resultados elementales. Como cada resultado elemental para el suceso A es también un resultado elemental para el suceso B, $m \leqslant m'$ y, por consiguiente,

$$P(A) = \frac{m}{n} \leqslant \frac{m'}{n} = P(B)$$

y de este modo la desigualdad (5) está demostrada.

DEFINICIÓN 4. *Un suceso $\bar{A}$ se llama* ***contrario*** *a otro suceso A, si el primero se realiza cuando no se cumple el suceso A.*

Por ejemplo, cuando se lanza una moneda el suceso A es «cara» y el $\bar{A}$ es «no cara» o sea «cruz».

De la definición 4 se deduce que: 1) el suceso $A + \bar{A}$ es cierto; 2) el suceso $A\bar{A}$ es imposible.

TEOREMA 3 *La probabilidad de un suceso contrario $\bar{A}$ es igual a la diferencia entre la unidad y la probabilidad del suceso A dado*, es decir:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \tag{6}$$

Efectivamente, supongamos que el sistema completo de resultados elementales equiprobables contiene n sucesos de los cuales m ($m \leqslant n$) son favorables al suceso A. En este caso $n - m$ resultados elementales son desfavorables al suceso A, es decir, favorecen al suceso $\bar{A}$. De este modo, tenemos

$$P(\bar{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A).$$

Daremos algunos ejemplos sobre el cálculo directo de la probabilidad de los sucesos

EJEMPLO 1. Una moneda se lanza dos veces. ¿Cuál es la probabilidad para que: 1) caiga «cara» por lo menos una sola vez (suceso A); 2) caiga «cara» dos veces (suceso B)?

Aquí los resultados elementales equiprobables son: CC, CCr, CrC, CrCr, su número es $n = 4$.

Los resultados favorables al suceso A son: CC, CCr, CrC; su número es $m = 3$. Por consiguiente

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}.$$

Al suceso B le favorece un solo resultado CrCr ($m' = 1$). Por eso

$$P(B) = \frac{m'}{n} = \frac{1}{4}.$$

EJEMPLO 2. Un dado se lanza dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de puntos obtenidos sea igual a 6 (suceso A)?

Los resultados elementales equiprobables son aquí los pares (x, y), donde x e y toman los valores: 1, 2, 3, 4, 5, 6; el número total de resultados elementales es $n = 36$.

Los pares favorables al suceso A son (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), su número es $m = 5$.

Por consiguiente,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{36}.$$

§ 4. Definición estadística de la probabilidad

La definición clásica de la probabilidad de un suceso supone que: 1) el número de resultados elementales sea finito; 2) estos resultados tengan la misma posibilidad de ser obtenidos.

Pero en la práctica se encuentran pruebas que tienen un número infinito de resultados posibles. Además no hay métodos generales que permitan representar el resultado de un ensayo, incluso si él posee un número finito de resultados, bajo la forma de una suma de resultados elementales equiprobables.

Por eso el uso de la definición clásica es limitado.

Daremos ahora otra definición de probabilidad que es a veces más cómoda para las aplicaciones.

Supongamos que se efectúan n ensayos de un mismo tipo, uno de cuyos resultados es un suceso dado A.

DEFINICIÓN 1 *Se llama **frecuencia relativa** de un suceso A a la relación del número de ensayos m, de casos en que el suceso A se cumple, respecto al número total n de ensayos efectuados.*

De este modo, designando por $W_n(A)$ la frecuencia relativa del suceso A en una serie de n ensayos, tendremos

$$W_n(A) = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Es evidente que $0 \leqslant W_n(A) \leqslant 1$.

De la fórmula (1) obtenemos

$$m = W_n(A)\, n, \tag{2}$$

es decir, *el número de manifestaciones del suceso A es igual a su frecuencia relativa multiplicada por el número de ensayos.*

En numerosos casos cuando el ensayo se repite un gran número de veces se observa una **estabilidad de la frecuencia relativa del suceso**, es decir, cuando el número de ensayos $n \to \infty$, la frecuencia relativa $W_n(A)$ del suceso A oscila alrededor de cierto número finito p y las desviaciones que ella presenta respecto a este número son tanto más pequeñas cuanto mayor es el número de ensayos efectuados, si se descartan ciertos ensayos fallidos. Este número p se llama **probabilidad del suceso A en el sentido estadístico.**

DEFINICIÓN 2. ***Se llama probabilidad de un suceso en el sentido estadístico**, a un límite casi cierto de la frecuencia relativa cuando el número de ensayos aumenta infinitamente.*

De este modo es casi cierto que la frecuencia relativa de un suceso coincide aproximadamente con su probabilidad estadística, si el número de ensayos es suficientemente grande.

De este punto de vista la magnitud

$$\mu = np \tag{3}$$

representa **el valor medio** del número de manifestaciones del suceso A en una serie de n ensayos.

Partiendo de amplios supuestos se demuestra que las dos probabilidades, clásica y estadística, coinciden.

EJEMPLO. Como resultado de una serie de ensayos se constata que disparando 200 tiros el tirador da en el blanco por término medio 190 veces. ¿Cuál es la probabilidad p de que este tirador dé en el blanco de un solo tiro? ¿Qué número de tiros darán en el blanco si el tirador efectúa 1000 disparos?

Utilizando la definición estadística de la probabilidad tenemos

$$p = \frac{190}{200} = 0,95 = 95\%.$$

De donde el valor aproximado del número de tiros acertados en 1000 disparos, será

$$\mu = 1000 \cdot 0,95 = 950.$$

§ 5. Teorema de adición de probabilidades

TEOREMA. *La probabilidad de la suma de dos sucesos incompatibles es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de estos sucesos,* es decir, si $AB = 0$,

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{1}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea n el número total de resultados elementales equiprobables de un ensayo dado, de los cuales m_1 son favorables a un suceso A y m_2, a un suceso B. Los sucesos A y B son incompatibles, la realización de A excluye la de B, y viceversa; por eso el número de resultados favorables al suceso $A + B$ es exactamente igual a $m_1 + m_2$. De aquí, en virtud de la definición clásica de la probabilidad obtenemos

$$P(A+B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B).$$

COROLARIO. *La probabilidad de la suma de un número finito de sucesos incompatibles de par en par, es igual a la suma de las probabilidades de estos sucesos.*

Sean, por ejemplo, A, B y C tres sucesos incompatibles de par en par, es decir, los sucesos AB, AC, BC son imposibles.

Tenemos

$$P(A + B + C) = P[(A + B) + C] = P(A + B) + P(C) = \\ = P(A) + P(B) + P(C).$$

OBSERVACIÓN. Sean ahora A y B dos sucesos compatibles. El número de resultados elementales favorables al suceso $A + B$ será

$$m = m_1 + m_2 - m',$$

donde m' es el número de resultados elementales favorables al suceso AB. Efectivamente, adicionando los números m_1 y m_2 de resultados favorables a los sucesos A y B, contamos dos veces el número de resultados favorables al suceso AB; por consiguiente, contando el número de resultados para el suceso $A + B$ es conveniente rechazar el valor superfluo de m'.

Por eso, en el caso general, tenemos

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2-m'}{n}=$$

$$=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}-\frac{m'}{n}=P(A)+P(B)-P(AB). \quad (2)$$

COROLARIO. *Puesto que $P(AB)\geqslant 0$, de la fórmula (2) tenemos*

$$P(A+B)\leqslant P(A)+P(B), \quad (3)$$

es decir, la probabilidad de la suma de dos sucesos no supera nunca la suma de las probabilidades de estos sucesos.

Es evidente que esta aseveración es también justa en el caso de varios sucesos.

EJEMPLO. Una urna contiene 10 bolas de igual dimensión pero de colores distintos: 2 blancas, 3 rojas y 5 azules. ¿Cuál es la probabilidad de que una bola sacada al azar sea de color (no blanca)?

Sean el suceso A: «sacar una bola roja» y el suceso B: «sacar una bola azul». En este caso, el suceso $A+B$ es: «sacar una bola de color». Es evidente que

$$P(A)=\frac{3}{10}, \quad P(B)=\frac{5}{10}.$$

Como los sucesos A y B son incompatibles (se saca una sola bola), en virtud del teorema de adición de probabilidades, tenemos

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{10}+\frac{5}{10}=0,8.$$

§ 6. Grupo completo de sucesos

DEFINICIÓN. *Un sistema de sucesos*

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \quad (1)$$

*se llama **grupo completo de sucesos** para el ensayo dado, si todo resultado de este ensayo es la realización de un solo suceso de este grupo.*

En otras palabras para el sistema completo de eventualidades se cumplen las condiciones siguientes:

1) el suceso $A_1+A_2+\ldots+A_n$ es cierto;

2) los sucesos A_i y A_j $(i\neq j)$ son incompatibles de par en par, es decir, $A_iA_j=O$ $(i\neq j)$, donde O es un suceso imposible.

El ejemplo más simple de grupo completo de sucesos es un par de sucesos: A y $\bar{A}$.

TEOREMA. *La suma de las probabilidades de los sucesos de un grupo completo es igual a la unidad.*

DEMOSTRACIÓN. Para el grupo completo (1) el suceso $A_1+A_2+\ldots+A_n=D$ es cierto y los sucesos de este sistema son incompatibles de par en par. Aplicando el teorema de adición de probabilidades tenemos

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \quad (2)$$

Pero,

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(D) = 1,$$

de donde, en virtud de la (2), nos queda

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

§ 7. Teorema de multiplicación de probabilidades

DEFINICIÓN 1. *La probabilidad del suceso A a condición de que ha tenido lugar el suceso B se llama* **probabilidad condicional** *del suceso A y se connota así:*

$$P(A/B) = P_B(A). \quad (1)$$

OBSERVACIÓN. La probabilidad de cada suceso A en un ensayo dado está ligada con un cierto conjunto de condiciones. Al definir la probabilidad condicional, suponemos que este conjunto de condiciones incluye **necesariamente** el suceso B. De este modo, tenemos de hecho otro conjunto de condiciones más complejo que corresponde al ensayo en una nueva situación. La probabilidad de que el suceso A se realice en estas nuevas condiciones se llama **probabilidad condicional** $P_B(A)$ a diferencia de la probabilidad $P(A)$ que puede ser llamada **probabilidad incondicional** del suceso A.

EJEMPLO. Una urna contiene 7 bolas blancas y 3 bolas negras.

¿Cuál es la probabilidad: 1) de sacar de la urna una bola blanca (suceso A); 2) de sacar de la urna una bola blanca después de haber sacado de ella una bola blanca (suceso B) o una bola negra (suceso C)?

Aquí

$$P(A) = \frac{7}{10} = 0{,}7 \quad P_B(A) = \frac{6}{9} = 0{,}666\ldots;$$

$$P_C(A) = \frac{7}{9} = 0{,}777\ldots .$$

De este modo, la probabilidad condicional de un suceso puede ser tanto inferior como superior a la probabilidad de este suceso.

DEFINICIÓN 2. *Dos sucesos A y B se llaman* **independientes**, *si la probabilidad de cada uno de ellos no depende de la realización o no realización del otro*, es decir

$$P(A) = P_B(A) = P_{\overline{B}}(A) \quad (2)$$

y

$$P(B) = P_A(B) = P_{\overline{A}}(B). \quad (2')$$

En caso contrario los sucesos se llaman *dependientes*.

TEOREMA 1. *La probabilidad del producto (compatibilidad) de dos sucesos A y B es igual a la probabilidad de uno de ellos multiplicada por la probabilidad condicional del otro suponiendo que el primer* *suceso se realiza, es decir,*

$$P(AB) = P(A)P_A(B). \tag{3}$$

DEMOSTRACION. Sea n el número total de resultados elementales equiprobables de un ensayo; de los cuales m son favorables al suceso A y k lo son al suceso AB. En este caso

$$P\ (A) = \frac{m}{n}, \quad P\ (AB) = \frac{k}{n}. \tag{4}$$

Pero si el suceso A se ha producido en esta situación son solamente posibles aquellos de m resultados elementales que han sido favorables al suceso A, y k de ellos son evidentemente favorables al suceso B. De este modo

$$P_A\ (B) = \frac{k}{m}.$$

De donde, en virtud de las igualdades (4), tenemos

$$P\,(AB) = \frac{k}{n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{m} = P\,(A)\,P_A\,(B). \tag{5}$$

El teorema ha sido demostrado.

Puesto que $BA = AB$, tenemos también

$$P\ (AB) = P\ (BA) = P\ (B) \cdot P_B\ (A). \tag{6}$$

OBSERVACIÓN. De modo formal, la fórmula (5) sigue siendo justa si el suceso A es imposible.

COROLARIO. *Para dos sucesos cualesquiera A y B es justa la igualdad*

$$P\ (A)\ P_A\ (B) = P\ (B)\ P_B\ (A). \tag{7}$$

TEOREMA 2 *La probabilidad de la realización simultánea de dos sucesos independientes A y B es igual al producto de las probabilidades de estos dos sucesos:*

$$P\ (AB) = P\ (A)\ P\ (B). \tag{8}$$

Efectivamente, considerando que $P_A\ (B) = P\ (B)$, de la fórmula (5) obtenemos la fórmula (8).

EJEMPLO. La probabilidad de que el primer tirador dé en el blanco (suceso A) es igual a 0,9 y que el segundo tirador lo haga (suceso B) es igual a 0,8. ¿Cuál es la probabilidad para que por lo menos uno de los tiradores dé en el blanco?

Sea C el suceso que nos interesa; la probabilidad contraria $\overline{C}$ consiste evidentemente en que ambos tiradores no han dado en el blanco. De este modo, $\overline{C} = \overline{A}\,\overline{B}$. Puesto que las eventualidades $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes (durante el tiro cada uno de los tiradores no molesta al otro), entonces

$$P\ (\overline{C}) = P\ (\overline{A}) \cdot P\ (\overline{B}) = [1 - P\ (A)] \cdot [1 - P\ (B)] =$$
$$= (1 - 0{,}9) \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02.$$

De donde se deduce que la probabilidad de que por lo menos uno de los tiradores dé en el blanco es

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98.$$

El teorema 1 admite una generalización en el caso de varios sucesos. Por ejemplo, para el caso de tres sucesos A, B y C, tenemos

$$P(ABC) = P[A\cdot(BC)] = P(A)\cdot P_A(BC) = \\ = P(A)\, P_A(B)\, P_{AB}(C). \quad (9)$$

DEFINICIÓN 3. *Los sucesos se llaman* ***independientes en conjunto*** *si cada uno de ellos y cualquier producto de los restantes (incluyendo todos los otros sucesos o una parte de ellos) son sucesos independientes.*

Los sucesos independientes en conjunto son independientes de par en par; la afirmación recíproca es falsa.

TEOREMA 3. *La probabilidad del producto de un número finito de sucesos independientes en conjunto es igual al producto de las probabilidades de estos sucesos.*

Efectivamente, por ejemplo, para tres sucesos A B y C independientes en conjunto de la fórmula (9) y teniendo en cuenta que

$$P_A(B) = P(B), \quad P_{AB}(C) = P(C),$$

tenemos

$$P(ABC) = P(A)\, P(B)\, P(C),$$

etc.

§ 8. Fórmula de la probabilidad total

Sea A un suceso que puede ocurrir como resultado de aparición de uno y único suceso H_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de un sistema completo de sucesos incompatibles

$$H_1, H_2, \ldots, H_n.$$

Los sucesos de este sistema se llaman generalmente **hipótesis**.

TEOREMA. *La probabilidad del suceso A es igual a la suma de los productos pares de las probabilidades de todas las hipótesis que forman un sistema completo, por las probabilidades condicionales correspondientes del acontecimiento dado A*, es decir:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P_{H_i}(A) \quad (1)$$

(fórmula de la probabilidad total), además aquí

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1. \quad (2)$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que

$$A = H_1A + H_2A + \ldots + H_nA,$$

y que los sucesos H_1A, H_2A, . . ., H_nA son incompatibles debido a que son incompatibles las eventualidades H_1, H_2, . . ., H_n, la aplicación de los teoremas de adición y de multiplicación de probabilidades nos da

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_iA)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P_{H_i}A,$$

lo que se deseaba demostrar.

EJEMPLO. Una tienda recibe para la venta productos de tres fábricas cuyas partes relativas son: I:50%, II:30%, III:20%. El porcentaje de artículos defectuosos en la producción de estas fábricas es: I:2%, II:3% y III:5%. ¿Cuál es la probabilidad de que un artículo comprado al azar sea de buena calidad (suceso A)?

Aquí son posibles las tres hipótesis siguientes: H_1, H_2, H_3, es decir, el artículo comprado es producto de las fábricas I, II y III respectivamente; es evidente que estas hipótesis forman un sistema completo y que sus probabilidades son

$$P(H_1)=0{,}5,\quad P(H_2)=0{,}3,\quad P(H_3)=0{,}2.$$

Las probabilidades condicionales correspondientes del suceso A son iguales a

$$P_{H_1}(A)=1-0{,}02=0{,}98,\quad P_{H_2}(A)=1-0{,}03=0{,}97,$$
$$P_{H_3}(A)=1-0{,}05=0{,}95.$$

Aplicando la fórmula de probabilidades totales tenemos

$$P(A)=0{,}5\cdot 0{,}98+0{,}3\cdot 0{,}97+0{,}2\cdot 0{,}95=0{,}971.$$

§ 9. Fórmula de Bayes

Examinemos el siguiente problema: sea dado un sistema completo de hipótesis incompatibles

$$H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_n,$$

cuyas probabilidades $P(H_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ son conocidas antes del experimento **(probabilidades a priori)**. Se efectúa el experimento (prueba) de cuyos resultados se registra la realización de un suceso A, se sabe que nuestras hipótesis atribuyen a esta eventualidad probabilidades bien determinadas $P_{H_i}(A)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Se pide determinar las probabilidades de estas hipótesis después del experimento **(probabilidad a posteriori)**.

Por ejemplo, es evidentemente conveniente rechazar las hipótesis que no admiten la realización del suceso A. El problema consiste generalmente en modificar la estimación de las probabilidades de nuestras hipótesis en función de una nueva información.

En otras palabras tenemos que determinar las probabilidades condicionales

$$P_A(H_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En virtud del teorema de multiplicación de probabilidades tenemos

$$P(AH_i) = P(A) \cdot P_A(H_i) = P(H_i) \cdot P_{H_i}(A);$$

de donde

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)\, P_{H_i}(A)}{P(A)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Para hallar la probabilidad $P(A)$ se puede utilizar la fórmula de probabilidades totales

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j)\, P_{H_j}(A). \tag{2}$$

De donde se deduce la fórmula de probabilidades de la hipótesis después del experimento (*fórmula de Bayes*)

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)\, P_{H_i}(A)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j)\, P_{H_j}(A)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

EJEMPLO. Dos piezas antiaéreas disparan independientemente una de la otra a un avión. Cada pieza efectúa un solo disparo. La probabilidad de dar en el avión es de 0,2 para la primera pieza (suceso A) y es de 0,1 para la segunda pieza (suceso B). El avión ha sido alcanzado por un solo tiro (suceso C). ¿Cuál es la probabilidad de que este tiro haya sido efectuado por la primera pieza?

Antes del experimento son posibles cuatro hipótesis: $H_1 = AB$, $H_2 = A\bar{B}$, $H_3 = \bar{A}B$, $H_4 = \bar{A}\bar{B}$; estas hipótesis forman un sistema completo de sucesos. Sus probabilidades cuando las piezas tiran independientemente son respectivamente iguales a

$$P(H_1) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02, \qquad P(H_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}18,$$
$$P(H_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}08, \qquad P(H_4) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72,$$

Además, $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) + P(H_4) = 1$.

Las probabilidades condicionales del suceso observado C con estas hipótesis serán

$$P_{H_1}(C) = 0, \quad P_{H_2}(C) = 1, \quad P_{H_3}(C) = 1, \quad P_{H_4}(C) = 0.$$

Por consiguiente, las hipótesis H_1 y H_4 se rechazan; las probabilidades de las hipótesis H_2 y H_4 se calculan mediante la fórmula de Bayes

$$P_C(H_2) = \frac{0{,}18 \cdot 1}{0{,}18 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1} \approx 0{,}7, \quad P_C(H_3) = \frac{0{,}08 \cdot 1}{0{,}18 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1} \approx 0{,}03.$$

De este modo, se puede afirmar con una probabilidad igual aproximadamente a 0,7 que el tipo acertado ha sido efectuado por la primera pieza.

B. PRUEBAS INDEPENDIENTES REPETIDAS

§ 10. Elementos de análisis combinatorio

Examinemos un conjunto de n elementos diferentes $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Una **muestra** aleatoria ordenada (puede ser con repetición) de estos elementos

$$a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_m} \; (1 \leqslant \alpha_k \leqslant n;\; k = 1, \ldots, m)$$

se llama *agrupación*.

Por ejemplo, al arrojar una moneda 10 veces, para su caída de lado cara (C) y de lado cruz (Cr) se puede dar la siguiente agrupación

CCCCCrCrCCrCrCr.

DEFINICIÓN 1. *Llámanse* ***variaciones (arreglos)*** *de n elementos respecto a (tomados de) m ($m \leqslant n$) a sus agrupaciones, cada una de las cuales contiene exactamente m elementos diferentes (elegidos entre los elementos dados) y que difieren por la naturaleza de los propios elementos, o por el orden de éstos.*

Calculemos el número A_n^m de variaciones (arreglos) de n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ respecto a m.

Sean $a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_m}$ variaciones de todo tipo que contienen m elementos. Construiremos estas variaciones paso a paso. Determinemos primeramente el primer elemento a_{α_1}. Es evidente que en el conjunto de n elementos puede ser elegido por n procedimientos diferentes. Después de elegir el primer elemento a_{α_1} el segundo elemento a_{α_2} puede ser elegido mediante $n-1$ procedimentos, etc. Como cada elección semejante da una nueva variación, todas estas elecciones pueden ser libremente combinadas. Por eso tenemos

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \ldots [n-(m-1)]. \tag{1}$$

Introduciendo la notación de *factorial* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$, se puede escribir la fórmula (1) de la forma siguiente

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{2}$$

DEFINICIÓN 2. *Llámanse* ***permutaciones*** *a las agrupaciones de n elementos cada una de las cuales contiene todos los n elementos y que difieren solamente en el orden de éstos.*

Es evidente que el número de permutaciones de n elementos es igual a

$$A_n^n - n(n-1)(n-2) \ldots [n-(n-1)] = n!. \tag{3}$$

Se considera condicionalmente (por definición) que $0! = 1$.

DEFINICIÓN 3. *Llámanse* **combinaciones** *de n elementos respecto a* (tomados de) *m a aquellas agrupaciones que contiene exactamente m elementos y que difieren por lo menos en un elemento.*

Designemos por C_n^m el número de combinaciones de n elementos respecto a m.

Examinemos todas las combinaciones posibles de nuestros elementos

$$a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_m}.$$

Efectuando en cada una de ellas $m!$ permutaciones posibles de sus elementos obtendremos evidentemente todas las variaciones de n elementos respecto a m. De este modo la fórmula

$$C_n^m \cdot m! = A_n^m;$$

de donde

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1) \ldots [n-(m-1)]}{m!}. \tag{4}$$

La fórmula (4) puede ser escrita así:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \tag{5}$$

El símbolo C_n^m posee una propiedad evidente

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \tag{6}$$

que es también justa para $m = 0$, si consideramos que $C_n^0 = 1$.

Los números C_n^m son coeficientes en la fórmula *del binomio de Newton*

$$(p+q)^n = p^n + C_n^1 p^{n-1} q + C_n^2 p^{n-2} q^2 + \ldots + q^n$$

y por eso se llaman frecuentemente *coeficientes binomiales* (compárese con el § 5 del cap. XI).

EJEMPLO. Un lote de 10 piezas contiene una pieza no estándar. ¿Cuál es la probabilidad de que la elección al azar de 5 piezas tomadas de este lote sean estándares (suceso A)?

Aquí el número de todas las elecciones aleatorias $n = C_{10}^5$, mientras que el número de elecciones favorables al suceso A es $m = C_9^5$. De este modo, la probabilidad buscada es igual a

$$P(A) = \frac{C_9^5}{C_{10}^5} = \frac{9!}{5!4!} \cdot \frac{5!5!}{10!} = \frac{1}{2}.$$

§ 11. Ley binomial de distribución de las probabilidades

Un suceso A se llama **independiente** en un sistema dado de ensayos, si la probabilidad de este suceso en cada uno de los ensayos no depende de los resultados de otros ensayos.

Una sucesión de repeticiones independientes de ensayos, en cada uno de los cuales el suceso A tiene igual probabilidad $P(A) = p$ que no depende del número del ensayo, se llama *esquema de Bernoulli*.

De este modo en el esquema de Bernoulli cada ensayo tiene solamente dos resultados: 1) el suceso A («éxito») y 2) el suceso $\overline{A}$ («fracaso») que se producen con probabilidades constantes $P(A) = p$ y $P(\overline{A}) = q$; es evidente que $p + q = 1$.

Examinemos un problema: calcular en las condiciones del esquema de Bernoulli la probabilidad $P_n(m)$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$ de que en n ensayos el suceso A, que tiene una misma probabilidad $P(A) = p$ para cada ensayo por separado, se produzca exactamente m veces.

Las series de ensayos favorables son aquí de la forma

$$A_{\alpha_1}A_{\alpha_2} \ldots A_{\alpha_n},$$

donde $A_{\alpha_i} = A$ o $\overline{A}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, además, el suceso A se repite exactamente m veces y el suceso $\overline{A}$ exactamente $(n - m)$ veces. Como los ensayos son independientes, la probabilidad de la realización de una serie favorable es igual a

$$p^m q^{n-m},$$

donde $p = P(A)$, $q = P(\overline{A}) = 1 - p$. Todas las series favorables se obtienen como resultado de la elección de m números diferentes de ensayos del número total de n números y, por consiguiente, su número es igual a C_n^m. De aquí, aplicando el teorema de adición de probabilidades para el caso de sucesos incompatibles obtenemos *la fórmula de Bernoulli*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, p^m q^{n-m} \tag{1}$$

para la probabilidad de la realización de la eventualidad A exactamente m veces en el curso de n ensayos.

Esta fórmula se llama también *binomial*, porque su segundo miembro representa el $(m + 1)$-ésimo término del binomio de Newton

$$(q + p)^n = C_n^0 q^n + C_n^1 p q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + C_n^n p^n.$$

De aquí deducimos la **distribución binomial de las probabilidades** (véase el § 15) del número de repeticiones del suceso A durante n ensayos independientes:

$$1 = (q + p)^n = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \ldots + P_n(n). \tag{2}$$

EJEMPLO. Hallar la probabilidad de que en 10 lanzamientos de una moneda caiga cara exactamente 5 veces.

Aquí la probabilidad de que la moneda caiga cara en un solo ensayo es

$$p=\frac{1}{2}, \quad \text{de donde} \quad q=1-p=\frac{1}{2}.$$

Aplicando la fórmula de Bernoulli tenemos

$$P_{10}(5)=C_{10}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{10!}{5!\cdot 5!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{252}{1024}\approx 0{,}25.$$

§ 12. Teorema local de Laplace

Si el número de ensayos n es grande, los cálculos por medio de la fórmula de Bernoulli resultan difíciles de realizar. Laplace propuso una fórmula aproximada importante que permite calcular la probabilidad $P_n(m)$ para que un suceso A se realice exactamente m veces, si n es un número suficientemente grande.

TEOREMA DE LAPLACE *Sea $p=P(A)$ la probabilidad de un suceso A tal que $0<p<1$. En este caso, la probabilidad para que en las condiciones del esquema de Bernoulli el suceso A se produzca en el transcurso de n ensayos exactamente m veces, se expresa por la fórmula aproximada de Laplace*

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-t^2/2}, \tag{1}$$

donde

$$q=1-p \quad \text{y} \quad t=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}. \tag{2}$$

Está demostrado que el error relativo del valor obtenido con ayuda de la fórmula (1) tiende a cero cuando $n\to\infty$. La demostración de este teorema se da en cursos completos de la teoría de probabilidades.

En el sentido estadístico $\mu=np$ representa el valor medio del número de repeticiones m del suceso A en el transcurso de n ensayos; de este modo $m-np$ es la desviación del número de repeticiones de la eventualidad A respecto a su valor medio. En lo que se refiere a la expresión $\sigma=\sqrt{npq}$, su sentido que se da en la teoría de probabilidades será explicado más tarde (véase el § 18). Examinando σ como una cierta escala de desviaciones en n ensayos, el número t puede ser interpretado como la desviación entre el número de repeticiones de la eventualidad A y su valor medio medido en esta escala.

Introduciendo la función

$$\varphi_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2} \tag{3}$$

(sus valores pueden ser hallados en las tablas) se puede escribir la fórmula (1) en la forma

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi_0(t)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi_0\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right). \tag{4}$$

Puesto que la función $\varphi_0(t)$ decrece monótonamente cuando $|t| \to \infty$, para una misma serie de ensayos (n está fijado) las desviaciones $m - np$ grandes en valor absoluto son menos probables que las pequeñas. Esta afirmación es claramente justa para un número suficiente grande de ensayos n, porque la fórmula aproximada de Laplace ha sido obtenida teniendo en cuenta esta hipótesis.

EJEMPLO. La probabilidad de dar en el blanco por un tirador, con un solo disparo, es igual a $p = 0,2$. ¿Cuál es la probabilidad para que el blanco sea batido exactamente 20 veces en 100 disparos?

Aquí $p = 0,2$, $q = 0,8$, $n = 100$ y $m = 20$, de donde

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0,2 \cdot 0,8} = 4,$$

y, por consiguiente,

$$t = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 100 \cdot 0,2}{4} = 0.$$

Teniendo en cuenta que $\varphi_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,40$ la fórmula (1) nos da

$$P_{100}(20) \approx 0,40 \cdot \frac{1}{4} = 0,10.$$

No hay que asombrarse de que el valor de la probabilidad sea pequeño: 20 impactos exactamente en 100 disparos es un suceso relativamente raro. Un suceso casi cierto es aquí dar en el blanco **aproximadamente** 20 veces. Por ejemplo, la probabilidad P de la desigualdad $15 \leqslant m \leqslant 25$ que incluye 11 valores de $m = 15, 16, \ldots, 24, 25$ es próxima a la unidad. Se puede verificarlo calculando esta probabilidad por la fórmula

$$P = \sum_{k=15}^{25} P_{100}(k).$$

§ 13. Teorema integral de Laplace

Tratemos de calcular la probabilidad $P_n(m_1, m_2)$ de que en n ensayos de Bernoulli el número de repeticiones de un suceso A de probabilidad $P(A) = p$ $(0 < p < 1)$ no sea inferior a m_1 ni superior a m_2 veces.

En virtud del teorema de adición de probabilidades en el caso de sucesos incompatibles, obtendremos

$$P_n(m_1, m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m). \tag{1}$$

De aquí, utilizando el teorema local de Laplace tendremos aproximadamente

$$P_n(m_1, m_2) \approx \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi_0(t_m), \tag{2}$$

donde

$$t_m = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \quad (m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \tag{3}$$

y

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{4}$$

Tenemos

$$\Delta t_m = t_{m+1} - t_m = \frac{(m+1)-np}{\sqrt{npq}} - \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}$$

y, por consiguiente,

$$P_n(m_1, m_2) \approx \sum_{m=m_1}^{m_2} \varphi_0(t_m)\,\Delta t_m. \tag{5}$$

La suma (5) es integral para la función $\varphi_0(t)$ sobre el intervalo $t_{m_1} \leqslant t \leqslant t_{m_2}$. Cuando $n \to \infty$, es decir, cuando $\Delta t_m \to 0$ su límite es, la integral definida correspondiente. Por eso, suponiendo que n es suficientemente grande obtenemos la fórmula aproximada

$$P_n(m_1, m_2) \approx \int_{t_{m_1}}^{t_{m_2}} \varphi_0(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_{m_1}}^{t_{m_2}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \tag{6}$$

donde

$$t_{m_1} = \frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}, \quad t_{m_2} = \frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Esto es el contenido del *teorema integral de Laplace*. Introducimos *la integral estándar de probabilidades* (*función de Laplace*)

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi_0(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \tag{7}$$

que es evidentemente la primitiva de la función $\varphi_0(x)$.

En este caso, en virtud de la fórmula de Newton—Leibniz tendremos de la (6)

$$P_n\ (m_1, m_2) \approx \Phi_0(t_{m_2}) - \Phi_0(t_{m_1}). \tag{8}$$

La fórmula (8) da el valor aproximado de la probabilidad para que el número m de repeticiones del suceso A en el transcurso de n ensayos satisfaga la desigualdad $m_1 \leqslant m \leqslant m_2$ y, por consiguiente, la variable aleatoria t satisface la desigualdad $t_{m_1} \leqslant t \leqslant t_{m_2}$. Esta fórmula se escribe frecuentemente así:

$$P\ (m_1 \leqslant m \leqslant m_2) = P\ (t_{m_1} \leqslant t \leqslant t_{m_2}) \approx \Phi_0(t_{m_2}) - \Phi_0(t_{m_1}) \tag{8'}$$

(*fórmula integral de Laplace*).

La integral $\Phi_0(x)$ no se expresa por medio de funciones elementales; para su cálculo se utilizan tablas especiales que se hallan generalmente en cursos completos de la teoría de probabilidades.

Citamos una parte de esa tabla.

Tabla de valores de la función $\Phi_0(x)$

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\Phi(x)$	0	0,192	0,341	0,433	0,477	0,494	0,499

La función $\Phi_0(x)$ (fig. 270) posee las propiedades siguientes 1) $\Phi_0(0) = 0$; 2) $\Phi_0(+\infty) = \frac{1}{2}$ (véase el § 4 del cap. XXIV); 3) la función $\Phi_0(x)$ es impar, es decir, $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$ (por eso

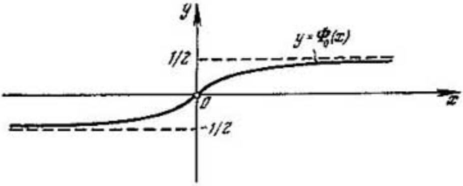

Fig. 270

no es necesario indicar en la tabla los valores de la función $\Phi_0(x)$ para valores negativos del argumento), en particular, $\Phi_0(-\infty) = -\frac{1}{2}$; 4) $\Phi_0(x)$ es una función monótonamente creciente (esto resulta del hecho de que $\Phi_0'(x) = \varphi_0(x) > 0$). Para $x > 3$ se puede admitir que $\Phi_0(x) = 0{,}500$ con exactitud de hasta milésimos.

EJEMPLO. La probabilidad de batir el blanco disparando un solo tiro de cañón es igual a $p = 0{,}2$. ¿Cuál es la probabilidad de que el blanco sea batido no menos de 20 veces con una descarga de 100 cañones?

Aquí $n = 100$, $20 \leqslant m \leqslant 100$. Tenemos

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 4.$$

De donde

$$t_{20} = \frac{20 - 100 \cdot 0{,}2}{4} = 0$$

y

$$t_{100} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}2}{4} = 20.$$

Aplicando la fórmula (8) obtenemos

$$P(20 \leqslant m \leqslant 100) = \Phi_0(20) - \Phi_0(0) = 0{,}500 - 0 = 0{,}500.$$

PROBLEMA. Hallar en las condiciones del esquema de Bernoulli la probabilidad de que la desviación entre la frecuencia $\frac{m}{n}$ de un suceso A y su probabilidad $P(A) = p$ $(0 < p < 1)$ no sea en valor absoluto superior a un número dado $\varepsilon > 0$.

Designaremos esta probabilidad por la notación

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right).$$

De la desigualdad

$$\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon \tag{9}$$

obtenemos una desigualdad equivalente

$$|m-np|\leqslant n\varepsilon, \quad \text{o bien} \quad -n\varepsilon\leqslant m-np\leqslant n\varepsilon.$$

De aquí, considerando que

$$t=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

tendremos

$$-t_1=-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\leqslant t\leqslant\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}=t_1.$$

Mediante la fórmula (8′), teniendo en cuenta el hecho de que la función $\Phi_0(x)$ es impar, hallamos

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right)=P(-t_1\leqslant t\leqslant t_1)=\Phi_0(t_1)-\Phi_0(-t_1)=$$
$$=2\Phi_0(t_1)=2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Como $\Phi_0(+\infty)=\frac{1}{2}$, $2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\to 1$ cuando $n\to\infty$.

De este modo, *en las condiciones del esquema de Bernoulli por más pequeña que sea $\varepsilon > 0$ se puede esperar con una probabilidad tan próxima como se quiera a la unidad que para un número n de ensayos suficientemente grande la desviación* (9) *entre la frecuencia de repeticiones del suceso A y su probabilidad será inferior, en valor absoluto, al número ε* (***ley de «grandes números»*** en la forma de Bernoulli).

§ 14. Teorema de Poisson

Supongamos que se efectúan n ensayos sucesivos independientes $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ y que la probabilidad de la realización de un suceso dado A en esta serie $P(A) = p_n > 0$ depende de su número n y tiende a cero cuando $n \to \infty$ (sucesión de **«sucesos raros»**). Supongamos también que en cada serie de ensayos el valor medio del número de repeticiones del suceso A es constante:

$$np_n = \mu = \text{const}; \tag{1}$$

de donde

$$p_n = \frac{\mu}{n}. \tag{2}$$

En virtud de la fórmula binomial (§ 11) para la probabilidad de una manifestación del suceso A en la n-ésima serie, exactamente m veces, tenemos la expresión

$$P_n(m) = C_n^m p_n^m (1-p_n)^{n-m} = C_n^m \left(\frac{\mu}{n}\right)^m \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-m}. \tag{3}$$

Sea m dado y $n \to \infty$. En este caso,

$$C_n^m \left(\frac{\mu}{n}\right)^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)]}{m!\,n^m}\mu^m =$$
$$= \frac{\mu^m}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right) \to \frac{\mu^m}{m!}.$$

Además (véase el § 12 del cap. VII), teniendo en cuenta que

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{\alpha\to 0}(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e^{-1},$$

tenemos

$$\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-m} = \left[\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}}\right]^{\mu}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-m} \to e^{-\mu}\cdot 1 = e^{-\mu},$$

si $n \to \infty$.

De este modo, pasando al límite en la fórmula (3) cuando $n \to \infty$, obtendremos

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \lim_{n\to\infty} C_n^m\cdot\left(\frac{\mu}{n}\right)^m\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-m} = \frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}. \tag{4}$$

Si n es grande, la probabilidad $P_n(m)$ difiere tan poco como se quiera de su límite (4). De aquí, para la probabilidad buscada $P_n(m)$ tenemos la *fórmula* aproximada *de Poisson* cuando los valores de n son grandes

$$P_n(m) \approx \frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}, \tag{5}$$

donde $\mu = np_n$ (*teorema de Poisson*).

En general, la fórmula de Poisson puede ser aplicada en los casos cuando el número de ensayos n es «grande», la probabilidad de la eventualidad $p_n = p$ es «pequeña» y $\mu = np$ es «ni pequeño, ni grande».

La fórmula de Poisson halla aplicaciones en **la teoría de las colas.**

EJEMPLO. En la producción en masa de un cierto producto la probabilidad de obtener un artículo no estándar es de 0,01. ¿Cuál es la probabilidad para que en un lote de 100 artículos se hallen 2 unidades no estándares?

Aquí la probabilidad $p = 0{,}01$ es pequeña y el número $n = 100$ es grande, entonces

$$\mu = np = 100 \cdot 0{,}01 = 1.$$

Aplicando la ley de Poisson a la probabilidad buscada obtendremos el valor siguiente

$$P_{100}(2) \approx \frac{\mu^2}{2!} e^{-\mu} = \frac{1}{2} e^{-1} = 0{,}184.$$

C. VARIABLE ALEATORIA Y SUS CARACTERÍSTICAS NUMÉRICAS

§ 15. Variable aleatoria discreta y su ley de distribución

Una variable se llama *aleatoria*, si ella adquiere sus valores según los resultados de un ensayo (de un experimento), además, para cada resultado elemental su valor es único. Una variable aleatoria se llama *discreta* (en sentido estricto), si el conjunto de sus valores posibles es **finito.**

Geométricamente el conjunto de todos los valores posibles que puede tomar una variable *aleatoria* discreta representa un sistema finito de puntos del eje numérico.

Sea X una variable aleatoria discreta cuyos únicos valores posibles son los números

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Designemos por

$$p_i = P(X = x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

las probabilidades de estos valores (es decir, p_i es la probabilidad para que X tome el valor x_i).

Los sucesos $X = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ forman evidentemente un sistema completo de eventualidades por eso

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1. \tag{1}$$

DEFINICION. *Llámase* ***ley de distribución*** *de una variable aleatoria discreta a toda relación que establece una correspondencia entre todos los valores posibles de esta variable y sus probabilidades.*

En los casos más simples la ley de distribución de una variable aleatoria discreta X puede ser cómodamente dada por una tabla:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Aquí la primera fila contiene todos los valores posibles que puede tomar la variable aleatoria y la segunda fila, sus probabilidades.

Notemos que, si fuese necesario, la tabla de valores de una variable aleatoria discreta X puede siempre ser completada, de un modo formal, por un conjunto finito de números cualesquiera considerando que sus valores X tengan probabilidades nulas.

EJEMPLO 1. En una lotería de 10 000 billetes hay 1 premio de 1000 rublos, 10 premios de 100 rublos y 100 premios de 1 rublo. Hallar la ley de repartición del premio aleatorio X para el poseedor de un solo billete de lotería.

Aquí los valores posibles de X son:

$$x_1 = 1000, \quad x_2 = 100, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 0.$$

Sus probabilidades respectivas son:

$$p_1 = 0{,}0001, \quad p_2 = 0{,}001, \quad p_3 = 0{,}01, \quad p_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3) \approx 0{,}9889$$

La ley de distribución del premio X puede ser dada por la tabla:

X	1000	100	1	0
p	0,0001	0,001	0,01	0,9889

EJEMPLO 2. El número m de repeticiones de un suceso A en el transcurso de n ensayos independientes puede ser considerado como una variable aleatoria X que puede tomar los valores $m = 0, 1, 2, \ldots, n$. La ley de distribución de esta variable está dada por la fórmula binomial

$$p_m = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

donde $p = P(A)$, $q = P(\overline{A}) = 1 - p$ (distribución binomial)

En particular, si p es pequeño y n es grande y que $pn = \mu$ es una magnitud limitada colocada entre dos números positivos fijos, es justa la **repartición de Poisson** aproximada

$$p_m = P(X = m) \approx \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

§ 16. Esperanza matemática

DEFINICIÓN. *Llámase* ***esperanza matemática*** *de una variable aleatoria discreta a la suma de los productos pares de todos sus valores por sus probabilidades.*

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es un juego (completo) de todos los valores de una variable aleatoria discreta X y $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son las probabilidades que les corresponden, entonces designando por la letra

M la esperanza matemática tendremos

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \tag{1}$$

donde

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{2}$$

Es evidente que la esperanza matemática de una variable aleatoria X no será modificada, si la tabla de valores de esta variable se completa de un conjunto finito de cualquier número, considerando que las probabilidades de estos números son iguales a cero.

La esperanza matemática $M(X)$ de una variable aleatoria X es una magnitud constante y por eso ella representa la **característica numérica de esta variable** X.

EJEMPLO. Hallar la esperanza matemática del premio X en el ejemplo 1 del § 15.

Utilizando la tabla que allá figura tenemos

$$M(X) = 1000 \cdot 0{,}0001 + 100 \cdot 0{,}001 + 1 \cdot 0{,}01 + 0 \cdot 0{,}9889 = 0{,}21 \text{ rublo} = 21 \text{ kopeks}.$$

Es fácil comprender que $M(X) = 21$ kopeks es el precio «equitativo» del billete.

OBSERVACIÓN 1. Algunos términos $x_i p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de la suma (1) son las **esperanzas matemáticas** de las variables aleatorias X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ cuyos valores posibles son x_i y 0 con las probabilidades respectivas p_i y $1 - p_i$.

OBSERVACIÓN 2. Sean $\underline{x} = \min\limits_i x_i$ y $\overline{x} = \max\limits_i x_i$ el menor y mayor de los valores posibles de la variable aleatoria X. Tenemos

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} \underline{x} p_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \overline{x} p_i = \overline{x}.$$

De este modo

$$\underline{x} \leqslant M(X) \leqslant \overline{x}. \tag{3}$$

Entonces, la esperanza matemática de una variable aleatoria es un cierto **valor medio** de esta variable.

OBSERVACIÓN 3. La esperanza matemática del número de repeticiones de un suceso A en un solo ensayo coincide con la probabilidad de este suceso $P(A) = p$.

Efectivamente, sea X el número de repeticiones del suceso A en un ensayo dado. La variable aleatoria X puede tomar dos valores: $x_1 = 1$ (el suceso A ha tenido lugar) con la probabilidad $p_1 = p$ y $x_2 = 0$ (el suceso A no se ha producido) con la probabilidad $p_2 = 1 - p = q$.

Por eso

$$M(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p.$$

§ 17. Propiedades principales de la esperanza matemática

Las propiedades más importantes de la esperanza matemática serán demostradas en este párrafo para las variables aleatorias discretas. Sin embargo, los teoremas correspondientes son válidos para las variables aleatorias continuas, por eso al enunciar estos teoremas no mencionaremos que las variables aleatorias examinadas son discretas.

Tenemos que poner en claro el sentido de las operaciones aritméticas $X + Y$, $X - Y$, XY, etc., donde X e Y son variables aleatorias discretas. No es difícil dar las definiciones correspondientes.

Por ejemplo, se llama **suma** $X + Y$ a una variable aleatoria Z cuyos valores son sumas admisibles $z_{ij} = x_i + y_j$, donde x_i e y_j son todos los valores posibles que pueden tomar respectivamente las variables aleatorias X e Y; además, las probabilidades correspondientes son iguales

$$\pi_{ij} = P(Z = z_{ij}) = P(X = x_i)\, P(Y = y_j/X = x_i).$$

Si una combinación cualquiera $x_k + y_l$ es imposible, se considera condicionalmente que $\pi_{kl} = 0$; esto no ejercerá influencia en la esperanza matemática de la suma.

Se definen de modo análogo las otras expresiones.

Se distinguen también variables aleatorias **independientes y dependientes**. Dos variables aleatorias se consideran *independientes*, si los valores posibles y la ley de distribución de cada una de ellas permanecen invariables, al elegir cualesquiera valores admisibles de la otra variable. En el caso contrario, las variables son *dependientes*. Algunas variables aleatorias se llaman *mutuamente independientes*, si los valores posibles y las leyes de distribución de cada una de ellas no dependen de los valores posibles tomados por las otras variables.

TEOREMA 1. *La esperanza matemática de una magnitud constante es igual a esta constante*, es decir, si C es una magnitud constante,

$$M(C) = C.$$

DEMOSTRACIÓN. La constante C puede ser considerada como una variable aleatoria discreta que toma un solo valor posible C con probabilidad $p = 1$. Por eso

$$M(C) = C \cdot 1 = C.$$

TEOREMA 2. *La esperanza matemática de la suma de dos (o varias) variables aleatorias es igual a la suma de las esperanzas matemáticas de cada una de ellas*, es decir, si X e Y son variables aleatorias, entonces

$$M\,(X+Y)=M\,(X)+M\,(Y),$$

DEMOSTRACIÓN. 1) Supongamos que la variable aleatoria X toma los valores x_i con las probabilidades p_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ y la variable Y, toma los valores y_j con las probabilidades p'_j $(j=1, 2, \ldots, m)$. Los valores posibles de la variable aleatoria $X+Y$ serán en este caso las sumas x_i+y_j cuyas probabilidades son iguales a

$$\pi_{ij}=P\,(X=x_i)\,P\,(Y=y_j/X=x_i)=$$
$$=P\,(Y=y_j)\,P\,(X=x_i/Y=y_j). \quad (3)$$

Como hemos dicho más arriba, todas las combinaciones (i, j) $(i=1, 2, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, m)$ pueden ser consideradas como admisibles. Con todo, si la suma x_i+y_j es imposible, se supone que $\pi_{ij}=0$.

Tenemos

$$M\,(X+Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i+y_j)\,\pi_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i\pi_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j\pi_{ij}. \quad (4)$$

Utilizando las propiedades evidentes de la suma: 1) la suma no depende del orden de términos y 2) se puede sacar del signo de la suma un factor que no depende del índice de adición; se deduce de la (4) que

$$M\,(X+Y)=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{m}\pi_{ij}+\sum_{j=1}^{m}y_j\sum_{i=1}^{n}\pi_{ij}. \quad (5)$$

La suma $\sum_{j=1}^{m}\pi_{ij}$ representa la probabilidad de un suceso que consiste en que la variable aleatoria X toma el valor x_i a condición de que la otra variable aleatoria Y tome uno de sus valores posibles (que es cierto); es evidente que este suceso complejo es equivalente a que X toma el valor x_i y por eso

$$\sum_{j=1}^{m}\pi_{ij}=P\,(X=x_i)=p_i.$$

De modo análogo

$$\sum_{i=1}^{n}\pi_{ij}=P\,(Y=y_j)=p'_j.$$

En este caso, mediante la fórmula (5) obtenemos

$$M\,(X+Y)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+\sum_{j=1}^{m}y_jp'_j=M\,(X)+M\,(Y),$$

que es lo que se debía demostrar.

2) En el caso de varias variables aleatorias, por ejemplo, de tres X, Y y Z tenemos

$$M(X+Y+Z) = M[(X+Y)+Z] = M(X+Y) + M(Z) = \\ = M(X) + M(Y) + M(Z),$$

etc.

COROLARIO *Si C es una magnitud constante,*

$$M(X+C) = M(X) + C.$$

TEOREMA 3. *La esperanza matemática del producto de dos variables aleatorias independientes es igual al producto de sus esperanzas matemáticas, es decir,*

$$M(XY) = M(X)\,M(Y), \tag{6}$$

donde X e Y son variables aleatorias independientes.

DEMOSTRACIÓN. Sean (x_i, p_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ e (y_j, p'_j) $(j = 1, 2, \ldots, m)$ las respectivas leyes de distribución de las variables aleatorias X e Y. Las variables X e Y son **independientes**, por eso todos los valores posibles que puede tomar la variable aleatoria XY son los productos de la forma x_iy_j $(i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m)$. Con todo eso, las probabilidades de estos valores, según el teorema de la multiplicación, para sucesos independientes son iguales a $p_ip'_j$.

Tenemos

$$M(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_iy_jp_ip'_j = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i \sum_{j=1}^{m} y_jp'_j = \\ = \sum_{i=1}^{n} x_ip_iM(Y) = M(X)\,M(Y), \tag{7}$$

que es lo que se debía demostrar.

COROLARIO 1. *La esperanza matemática del producto de varias variables aleatorias mutuamente independientes es igual al producto de las esperanzas matemáticas de estas magnitudes.*

En efecto para tres variables aleatorias mutuamente independientes X, Y, Z, por ejemplo, tenemos

$$M(XYZ) = M[(XY)Z] = M(XY)\,M(Z) = M(X)\,M(Y)\,M(Z),$$

etc.

COROLARIO 2. *Se puede sacar un factor constante del signo de la esperanza maemática.*

Si C es una constante y X una variable aleatoria cualquiera, aplicando el teorema 1 y teniendo en cuenta el hecho de que C y X son independientes, obtendremos

$$M(CX) = M(C)\,M(X) = CM(X).$$

COROLARIO 3 *La esperanza matemática de la diferencia de dos variables aleatorias cualesquiera X e Y es igual a la diferencia de las esperanzas matemáticas de estas variables, es decir,*

$$M(X-Y)=M(X)-M(Y).$$

Efectivamente, aplicando el teorema sobre la suma de las esperanzas matemáticas y el corolario 2 obtendremos

$$M(X-Y)=M[X+(-Y)]=M(X)+M(-Y)=$$
$$=M(X)+(-1)\,M(Y)=M(X)-M(Y).$$

§ 18. Dispersión

Sea X una variable aleatoria y $M(X)$ la esperanza matemática de esta variable (**valor medio**). La variable aleatoria $X-M(X)$ se llama *desviación*.

TEOREMA 1 *La esperanza matemática de la desviación de toda variable aleatoria X es igual a cero*, es decir,

$$M[X-M(X)]=0.$$

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, teniendo en cuenta que $M(X)$ es una magnitud constante tenemos

$$M[X-M(X)]=M(X)-M[M(X)]=M(X)-M(X)=0.$$

DEFINICIÓN *Se llama* ***dispersión*** ***(varianza)*** *de una variable aleatoria a la esperanza matemática del cuadrado de la desviación entre esta variable y su esperanza matemática.*

De aquí, designando la varianza por la letra D tendremos para una variable aleatoria X

$$D(X)=M\{[X-M(X)]^2\}. \tag{1}$$

Es evidente que la varianza de una variable aleatoria es constante, es decir, es una característica numérica de esta variable.

Si la ley de distribución de una variable aleatoria X es $(x_i,\ p_i)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, notando, para abreviar, $M(X)=\mu$ tendremos por medio de la fórmula (1)

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\,p_i. \tag{2}$$

La raíz cuadrada de la dispersión $D(X)$ de una variable aleatoria se llama *desviación cuadrática media* σ (de otro modo, **desviación estándar**) de esta variable:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \tag{3}$$

EJEMPLO. Sea una variable aleatoria cuya ley de distribución está dada por la tabla siguiente

X	4	10	20
p	1/4	1/2	1/4

Determinar la esperanza matemática $M(X)$, la varianza $D(X)$ y la desviación cuadrática media $\sigma(X)$ de esta variable

Tenemos

$$M(X) = 4\cdot\frac{1}{4} + 10\cdot\frac{1}{2} + 20\cdot\frac{1}{4} = 11;$$

de donde

$$D(X) = (4-11)^2\cdot\frac{1}{4} + (10-11)^2\cdot\frac{1}{2} + (20-11)^2\cdot\frac{1}{4} = 33$$

y

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{33} \approx 5{,}75.$$

La varianza $D(X)$ sirve de medida de la dispersión de una variable aleatoria discreta X. Efectivamente supongamos que $D(X)$ sea pequeña. En este caso, de la fórmula (2) resulta que todos los términos $(x_i-\mu)^2\cdot p_i (i=1, 2, \ldots, n)$ son igualmente pequeños. De aquí se deduce que al omitir valores que tienen probabilidad pequeña (tales valores son prácticamente imposibles), todos los otros x_i difieren poco de μ. De este modo, cuando la varianza $D(X)$ es pequeña resulta casi cierto que los valores que toma la variable aleatoria se concentran cerca de su esperanza matemática (la excepción puede ser de un número relativamente pequeño de algunos valores). En particular, si $D(X) = 0$, es evidente que $X = \mu$ y la variable aleatoria representa un punto del eje numérico. Al contrario, si $D(X)$ es grande, la concentración de valores de la variable aleatoria X alrededor de un centro cualquiera se excluye.

TEOREMA 2. *La varianza de una variable aleatoria es igual a la diferencia entre la esperanza matemática del cuadrado de esta variable y el cuadrado de su esperanza matemática*, es decir

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \tag{4}$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando los teoremas fundamentales sobre las esperanzas matemáticas de variables aleatorias tenemos

$$\begin{aligned} D(X) &= M\{[X - M(X)]^2\} = M\{X^2 - 2XM(X) + [M(X)]^2\} = \\ &= M(X^2) - 2M(X)\cdot M(X) + [M(X)]^2 = \\ &= M(X^2) - [M(X)]^2. \end{aligned}$$

TEOREMA 3. *La varianza de una magnitud constante es igual a cero.*

Efectivamente, si C es una magnitud constante, $M(C) = C$ y por consiguiente

$$D(C) = M[(C-C)^2] = M(0) = 0.$$

Este resultado es evidente porque una magnitud constante se representa por un solo punto sobre el eje numérico Ox y no tiene dispersión.

TEOREMA 4. *La varianza de una suma de dos variables aleatorias independientes X e Y es igual a la suma de las varianzas de estas variables*, es decir,

$$D\ (X+Y)=D\ (X)+D\ (Y). \tag{5}$$

DEMOSTRACIÓN Puesto que

$$M\ (X+Y)=M\ (X)+M\ (Y), \tag{6}$$

tenemos

$$\begin{aligned}D(X+Y)&=M\{[(X+Y)-M\ (X+Y)]^2\}=\\&=M\{[(X-M\ (X))+(Y-M\ (Y))]^2\}=\\&=M\{[X-M\ (X)]^2\}+M\{[Y-M\ (Y)]^2\}+\\+2M\{[X-M\ (X)]\cdot[Y-M\ (Y)]\}&=D\ (X)+D\ (Y)+2K\ (X,\ Y),\end{aligned}$$

donde

$$K\ (X,\ Y)=M\{[X-M\ (X)]\cdot[Y-M\ (Y)]\}$$

es un momento llamado *momento de correlación* de las variables X e Y. Si las variables aleatorias X e Y son independientes, las variables aleatorias $X-M\ (X)$ e $Y-M\ (Y)$ que difieren de X e Y en magnitudes constantes, son evidentemente también independientes. Por eso, en virtud del teorema 3 del § 17 y del teorema 1 tenemos

$$K\ (X,\ Y)=M\ [X-M\ (X)]\cdot M\ [Y-M\ (Y)]=0$$

y entonces la fórmulas (6) es verídica.

COROLARIO 1. *La varianza de una suma de varias variables aleatorias mutuamente independientes es igual a la suma de las varianzas de estas variables.*

COROLARIO 2. *Si C es una magnitud constante,*

$$D]\ (X+C)=D\ (X).$$

De este modo, las variables aleatorias X y $X+C$ tienen una misma medida de la dispersión.

TEOREMA 5. *Se puede sacar un factor constante del signo de la varianza elevándolo al cuadrado*, es decir,

$$D\ (CX)=C^2D\ (X).$$

DEMOSTRACIÓN Si C es un factor constante, aplicando el teorema 2 obtendremos

$$D\ (CX)=M\ (C^2X^2)-[M\ (CX)]=C^2M\ (X^2)-$$
$$-C^2\ [M\ (X)]^2=C^2D\ (X).$$

De este modo, la varianza de la variable CX es C^2 veces mayor que la varianza de la variable X.

COROLARIO. *La varianza de la diferencia de dos variables aleatorias independientes es igual a la suma de las varianzas de estas variables,* es decir, si las variables aleatorias X e Y son independientes,

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

Efectivamente, en virtud de los teoremas 4 y 5 tenemos

$$D(X-Y)=D[X+(-Y)]=D(X)+D(-Y)=$$
$$=D(X)+(-1)^2D(Y)=D(X)+D(Y).$$

La esperanza matemática y la varianza de la variable aleatoria son sus características numéricas esenciales.

PROBLEMA. Determinar la esperanza matemática y la varianza del número X de repeticiones de un suceso A en n ensayos independientes sabiendo que en cada uno de ellos la probabilidad del suceso A es constante: $P(A)=p$.

La variable aleatoria X toma los valores $0, 1, 2, \ldots, n$ y se repite según una ley binomial

$$p_m=P(X=m)=C_n^m\,p^mq^{n-m}\quad(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n),\tag{7}$$

donde $q=P(\bar{A})=1-p$.

La variable X puede ser considerada como una suma de variables aleatorias independientes:

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n,$$

donde X_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ es el número de realizaciones del suceso A en el i-ésimo ensayo. La variable aleatoria X_i toma solamente dos valores: 1, si el suceso A ha aparecido en el i-ésimo ensayo y 0, si el suceso A no se ha producido en el i-ésimo ensayo. Las probabilidades de estos valores son $P(A)=p$ y $P(\bar{A})=q$. De aquí

$$M(X_i)=1\cdot p+0\cdot q=p\quad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

(véase también el § 16). Aplicando el teorema sobre la esperanza matemática de una suma de unas variables tendremos

$$M(X)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)=np.\tag{8}$$

De este modo, la esperanza matemática del número de repeticiones del A coincide en las condiciones del esquema de Bernoulli, con el **«numero medio»** de realizaciones de este suceso en la serie de ensayos dada.

Para la dispersión de la variable aleatoria X_i obtendremos

$$D(X_i)=(1-p)^2p+(0-p)^2=q^2p+p^2q=$$
$$=pq(q+p)=pq.$$

De donde, utilizando la propiedad de la varianza de la suma de variables aleatorias independientes (teorema 4) tendremos

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n) = npq. \quad (9)$$

Por eso la desviación cuadrática media (estándar) es

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{npq}. \quad (10)$$

Las fórmulas (8) y (9) dan la esperanza matemática y la varianza para la ley de distribución binomial.

OBSERVACIÓN. Se hace comprensible ahora el sentido de la variable aleatoria

$$t = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

que figura en las fórmulas aproximadas de Laplace (§§ 12 y 13), a saber, t representa la desviación entre el número de repeticiones del suceso A y su esperanza matemática medida en estándares (llamadas **desviación normal**).

Examinemos n variables aleatorias discretas, independientes de par en par $X_1, X_2, \ldots, X_n$ cuyas varianzas $D(X_i)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) están **uniformemente acotadas**

$$0 \leqslant D(X_i) \leqslant K \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Estas variables pueden presentar una dispersión considerable, pero su media aritmética

$$\hat{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

es suficientemente «centrada».

En estas condiciones tiene lugar el **notable teorema de Chébyshev**: *para cualquier* $\varepsilon > 0$ *la probabilidad de la desigualdad* $|\hat{X}_n - M(\hat{X}_n)| < \varepsilon$ donde

$$M(\hat{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i),$$

es tan próxima como se quiera a 1, *si el número n de variables aleatorias es suficientemente grande*, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{X}_n - M(\hat{X}_n)| < \varepsilon) = 1$$

(**ley de grandes números** en la forma de Chébyshev).

El teorema de Chébyshev se aplica en la teoría de errores, en estadística, etc.

§ 19. Variables aleatorias continuas. Funciones de distribución

Una variable aleatoria X se llama *continua*, si ella puede tomar todos los valores reales que contiene cierto intervalo finito o infinito $\langle a, b\rangle$ del eje numérico. Se supone que en cada ensayo la variable aleatoria X toma un valor y solamente uno $x \in \langle a, b\rangle$. Hace falta remarcar que las variables discretas y continuas no abarcan a todos los tipos de variables aleatorias.

Para caracterizar una variable aleatoria continua X se introduce su *función de distribución*

$$\Phi(x) = P(-\infty < X < x) \tag{1}$$

que se llama ley de distribución integral[1]).

Si los valores tomados por la variable aleatoria X se consideran como puntos del eje numérico Ox, entonces $\Phi(x)$ representa la probabilidad del suceso que consiste en que el valor observado de la variable aleatoria X pertenece al intervalo $(-\infty, x)$, es decir, está situado **a la izquierda** del punto x. Este intervalo depende del extremo derecho x y por eso la probabilidad es naturalmente una función de x definida sobre todo el eje $-\infty < x < +\infty$.

Notemos que la función de distribución tiene también sentido para las variables aleatorias discretas.

La función de distribución $\Phi(x)$ posee las propiedades siguientes.

I. $\Phi(x)$ es una función no decreciente del argumento x, es decir, si $x < x'$, $\Phi(x) \leqslant \Phi(x')$.

En efecto, si $x' > x$, el suceso $X \in (-\infty, x)$ implica evidentemente $X \in (-\infty, x')$. Pero en este caso la probabilidad $\Phi(x')$ del segundo suceso no es inferior a la probabilidad $\Phi(x)$ del primero (teorema 2 del § 3).

II. Puesto que $\Phi(x)$ es una probabilidad, es válida la desigualdad

$$0 \leqslant \Phi(x) \leqslant 1.$$

III. $\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(+\infty) = 1$.

En efecto, el suceso $X \in (-\infty, -\infty)$ es evidentemente imposible y el suceso $X \in (-\infty, +\infty)$ es cierto.

Conociendo la función de distribución $\Phi(x)$ se puede determinar para cada intervalo $[a, b)$ la probabilidad $P(a \leqslant X < b)$ para que la variable aleatoria X se encuentre en este intervalo (se ha convenido aquí incluir en este intervalo el extremo izquierdo a y no incluir el extremo derecho b).

En efecto, sean A el suceso $X \in (-\infty, a)$, B el suceso $X \in (-\infty, b)$ y C el suceso $X \in [a, b)$.

---

[1]) El término probabilidad lo entendemos aquí en sentido axiomático.

En este caso es evidentemente

$$B = A + C.$$

Como los sucesos A y C son incompatibles, aplicando el teorema de probabilidades obtenemos $P(B) = P(A) + P(C)$, de donde

$$P(C) = P(B) - P(A),$$

es decir,

$$P(a \leqslant X < b) = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{2}$$

En virtud de la propiedad I: $\Phi(b) - \Phi(a) \geqslant 0$.

De este modo, *la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor perteneciente al intervalo $[a, b)$ es igual al incremento de la función de distribución de esta variable sobre este intervalo.*

En el texto que sigue una variable aleatoria X será llamada **continua** solamente en el caso cuando su función de distribución $\Phi(x)$ es continua sobre el eje $(-\infty, +\infty)$.

TEOREMA. *La probabilidad (a priori) de que una variable aleatoria X tome un valor a estrictamente determinado de antemano es igual a cero.*

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, en virtud de la fórmula (2) tenemos

$$P(a \leqslant X < x) = \Phi(x) - \Phi(a). \tag{3}$$

Supongamos que $x \to a$; en este caso el intervalo $[a, x)$ contendrá dentro del límite un solo punto a. Además, en virtud de la continuidad de la función $\Phi(x)$ en el punto a tenemos

$$\lim_{x \to a} \Phi(x) = \Phi(a).$$

Pasando al límite en la igualdad (3) cuando $x \to a$ obtendremos

$$P(a) = \lim_{x \to a} \Phi(x) - \Phi(a) = \Phi(a) - \Phi(a) = 0.$$

De este modo, cuando la función de distribución es continua la probabilidad de «caer en el punto» es nula.

COROLARIO. *Para una variable aleatoria continua X se verifican las igualdades*

$$P(a \leqslant Y \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a) \tag{2'}$$

y

$$P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a), \tag{2''}$$

donde $\Phi(x) = P(a \leqslant X < x)$ es su función de distribución. En efecto, tenemos

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) + P(X = b) =$$
$$= [\Phi(b) - \Phi(a)] + 0 = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Se demuestra análogamente la segunda igualdad.

OBSERVACIÓN. En el caso general puede ser que los sucesos imposibles y las eventualidades de probabilidad nula no sean equivalentes.

Supongamos ahora que la función de distribución $\Phi(x)$ de una variable aleatoria continua X admite una derivada continua

$$\Phi'(x) = \varphi(x). \tag{4}$$

La función $\varphi(x)$ se llama *densidad de la probabilidad* (para una distribución dada) o *ley de distribución diferencial de la variable aleatoria* X.

El término «densidad de probabilidad» tiene el sentido siguiente: sea $[x, x + dx]$ un intervalo infinitamente pequeño. En este caso, en virtud de la fórmula (2′) tenemos

$$P(x \leqslant X \leqslant x + dx) = \Phi(x + dx) - \Phi(x).$$

Reemplazando el incremento infinitesimal de la función $\Phi(x + dx) - \Phi(x)$ por su diferencial $\Phi'(x)\,dx = \varphi(x)\,dx$ obtendremos una igualdad aproximada

$$P(x \leqslant X \leqslant x + dx) \approx \varphi(x)\,dx. \tag{5}$$

De este modo, la densidad de la probabilidad es la relación de la probabilidad de que un punto se encuentre en un intervalo infinitesimal respecto a la longitud de ese intervalo.

Como la densidad de probabilidad $\varphi(x)$ es la derivada de la función no decreciente $\Phi(x)$ ella no es negativa: $\varphi(x) \geqslant 0$. A dife-

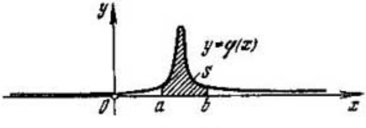

Fig. 271

rencia de la probabilidad, su densidad puede tomar valores tan grandes como se quiera.

Como $\Phi(x)$ es una primitiva de la función $\varphi(x)$, la fórmula de Newton—Leibniz nos da

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

De aquí, en virtud de la (3′) obtenemos

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{6}$$

Geométricamente (fig. 271), esta probabilidad representa el área S del trapecio curvilíneo limitado por la gráfica de la densidad de probabilidad $y = \varphi(x)$, el eje Ox y por dos ordenadas $x = a$ y $x = b$.

Suponiendo que $a = -\infty$ y $b = +\infty$, obtenemos un suceso cierto $X \in (-\infty, +\infty)$ cuya probabilidad es igual a la unidad. Por consiguiente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 1. \tag{7}$$

Considerando que en la fórmula (6) $a = -\infty$, $b = x$ y designando, para que sea más claro, la variable de integración x por otra letra, t por ejemplo (esto es legítimo para una integral definida) obtenemos la función de distribución

$$\Phi(x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt. \tag{8}$$

§ 20. Características numéricas de una variable aleatoria continua

Examinemos un intervalo infinitamente pequeño $[x, x + dx]$ como un «punto grueso» x del eje Ox. En este caso, la probabilidad de que una variable aleatoria X tome un valor que coincida con este «punto grueso» x es igual a $\varphi(x)\, dx$ y la esperanza matemática de este suceso es

$$dM = x\varphi(x)\, dx.$$

Representado la recta $-\infty < x < +\infty$ como un conjunto infinito de tales «puntos gruesos» obtenemos, por analogía con la definición de la esperanza matemática de una variable aleatoria discreta, una definición de una variable aleatoria continua (sólo que aquí la adición se reemplaza por la integración).

DEFINICIÓN. *Llámase* ***esperanza matemática*** *de una variable aleatoria continua X, a un número*

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x) dx \tag{1}$$

(por supuesto, esta definición tiene sentido solamente para tales variables aleatorias X para las cuales la integral (1) *es convergente).*

Para la varianza de una variable aleatoria X conservamos la definición precedente

$$D(X) = M\{[X - M(X)]^2\}.$$

De la fórmula (1) se deduce

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-M(X)]^2\varphi(x)\,dx \tag{2}$$

(en la hipótesis, claro está, la integral (2) es convergente). Se puede utilizar también la fórmula

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)\,dx-\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\,dx\right]^2. \tag{3}$$

Se puede demostrar que las propiedades principales de la esperanza matemática y de la varianza de variables aleatorias discretas también se conservan para las variables aleatorias continuas.

Supongamos ahora que la variable aleatoria continua X toma todos los valores posibles que completan el intervalo cerrado $[a, b]$. En este caso $\varphi(x)=0$ para $-\infty<x<a$ y para $b<x<+\infty$ y, por consiguiente,

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{a}x\varphi(x)\,dx+\int_{a}^{b}x\varphi(x)\,dx+$$
$$+\int_{b}^{+\infty}x\varphi(x)\,dx=0+\int_{a}^{b}x\varphi(x)\,dx+0=\int_{a}^{b}\varphi(x)\,dx.$$

Del modo análogo

$$D(X)=\int_{a}^{b}[x-M(X)]^2\varphi(x)\,dx,\ \text{donde}\ \int_{a}^{b}\varphi(x)\,dx=1.$$

§ 21. Distribución uniforme

Una variable aleatoria continua X, todos los valores posibles de la cual llenan un intervalo cerrado $\langle a, b\rangle$, se llama *uniformemente distribuida* si su densidad de probabilidad $\varphi(x)$ es constante sobre este intervalo.

En otras palabras, todos los valores posibles de una variable uniformemente distribuida son **equiprobables**.

Sea, por ejemplo, $X\in[a, b]$. Puesto que en este caso $\varphi(x)=$ $=\text{const}$ para $x\in[a, b]$ y $\varphi(x)=0$ para $x\notin[a, b]$, entonces

$$\int_{a}^{b}\varphi(x)\,dx=\varphi(x)\int_{a}^{b}dx=(b-a)\,\varphi(x)=1;$$

de donde

$$\varphi(x)=\frac{1}{b-a} \text{ para } a\leqslant x\leqslant b.$$

Sea $[\alpha, \beta]\in[a, b]$ (fig. 272). En este caso

$$p=P(\alpha\leqslant X\leqslant\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\,dx=\frac{\beta-\alpha}{b-a},$$

es decir,

$$p=\frac{l}{L}, \tag{1}$$

donde L es la longitud (medida lineal) de todo el intervalo $[a, b]$ y l es la longitud del intervalo parcial $[\alpha, \beta]$.

Los valores de una variable aleatoria X, es decir, los puntos x del intervalo cerrado $[a, b]$ pueden ser considerados como todos

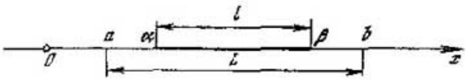

Fig. 272

los resultados elementales posibles de un cierto ensayo. Sea que un suceso A consiste en que el resultado del ensayo pertenezca al intervalo $[\alpha, \beta]\subset[a, b]$. En este caso los puntos del intervalo $[\alpha\ \ \beta]$ son resultados elementales *favorables* del suceso A.

Según la fórmula (1) tenemos una **definición geométrica de la probabilidad**: *la probabilidad de un suceso A es la relación entre la medida l del conjunto de resultados elementales favorables del suceso A, respecto a la medida L del conjunto de todos los resultados elementales posibles con la hipótesis de que todos estos resultados tienen la misma posibilidad de ocurrir*

$$P(A)=\frac{l}{L}\leqslant 1.$$

Esta definición pasa naturalmente la definición clásica de la probabilidad al caso de un número infinito de resultados elementales.

Una definición análoga puede ser también introducida cuando los resultados elementales de un ensayo representan puntos en el plano o en el espacio.

EJEMPLO. 1. Durante una hora $0\leqslant t\leqslant 1$ (t es medida de tiempo en horas) un solo autobús llega a la parada. ¿Cuál es la probabilidad de que un pasajero que ha llegado a esta parada en el instante de tiempo $t=0$ deba esperar el autobús no más de 10 minutos?

Aquí el conjunto de todos los resultados elementales forma un intervalo cerrado $[0, 1]$ cuya longitud temporal $L = 1$ y el conjunto de resultados favorables forma un intervalo cerrado $[0, 1/6]$ cuya longitud temporal $l = \frac{1}{6}$.

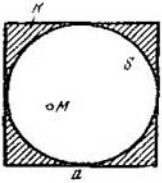

Fig. 273

Por eso la probabilidad buscada es

$$p = \frac{l}{L} = \frac{1}{6}.$$

Ejemplo 2. Sea un cuadrado K de lado a que tiene inscripto un círculo S (fig. 273). Un punto material M se lanza por casualidad en este cuadrado. ¿Cuál es la probabilidad de que este punto dé en este círculo S? Aquí el área del cuadrado es $K = a^2$ y el área del círculo $S = \pi (a/2)^2 = \frac{\pi}{4} a^2$.

Es natural tomar por la probabilidad buscada la relación

$$p = \frac{S}{K} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$$

Es evidente que esta probabilidad y, por consiguiente, el número π pueden ser determinados experimentalmente.

§ 22. La distribución normal

La distribución de probabilidades de una variable aleatoria X se llama *normal*, si su densidad de la probabilidad se subordina a la **ley de Gauss**

$$\varphi(x) = ae^{-b(x-x_0)^2}, \qquad (1)$$

donde a, b y x_0 son constantes tales que $a > 0$ y $b > 0$. En este caso la gráfica de la densidad de la probabilidad es la curva de Gauss descentrada (fig. 274) simétrica respecto a la recta $x = x_0$, con ordenada máxima $y_{\text{máx}} = a$.

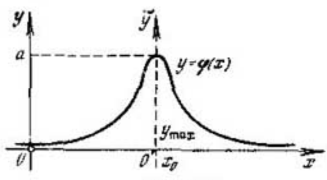

Fig. 274

Para comodidad de los cálculos, centremos esta curva introduciendo nuevas coordenadas $\xi = x - x_0$ y $\eta = y$. En este caso, la ley de Gauss toma la forma

$$\tilde{\varphi}(\xi) = ae^{-b\xi^2} \qquad (2)$$

y representará la ley de distribución diferencial de la variable aleatoria $\tilde{X} = X - x_0$.

Las constantes a y b de la fórmula (2) no son arbitrarias porque la densidad de probabilidad $\tilde{\varphi}(\xi)$ debe satisfacer la condición

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\varphi}(\xi)\, d\xi = a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b\xi^2}\, d\xi = 1. \tag{3}$$

Efectuando ahora un cambio de variable

$$b\xi^2 = t^2, \quad \xi = \frac{t}{\sqrt{b}}, \quad d\xi = \frac{dt}{\sqrt{b}},$$

tendremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b\xi^2}\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \frac{dt}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \tag{4}$$

(véase el § 4 del cap. XXIV). De aquí en virtud de la fórmula (3) hallamos

$$a\sqrt{\frac{\pi}{b}} = 1, \tag{5}$$

es decir,

$$a = \sqrt{\frac{b}{\pi}}. \tag{6}$$

De este modo

$$\widetilde{\varphi}(\xi) = \sqrt{\frac{b}{\pi}}\, e^{-b\xi^2}. \tag{7}$$

Para la esperanza matemática de la variable aleatoria tendremos

$$M(\widetilde{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi\widetilde{\varphi}(\xi)\, d\xi = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{-b\xi^2}\, d\xi = 0$$

(debido a que la función a integrar es impar). De aquí,

$$M(X) = M(\widetilde{X} + x_0) = M(\widetilde{X}) + M(x_0) = 0 + x_0 = x_0. \tag{8}$$

De este modo, en el caso de la distribución normal de una variable aleatoria X, su esperanza matemática x_0 coincide con el punto de intersección del eje de simetría de la gráfica de la curva de Gauss correspondiente y del eje Ox **(centro de dispersión)**.

Para la dispersión de la variable aleatoria X obtenemos

$$D(\widetilde{X}) = M(\widetilde{X}^2) - [M(\widetilde{X})]^2 = M(\widetilde{X}^2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2\widetilde{\varphi}(\xi)\, d\xi = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{-b\xi^2}\, d\xi. \tag{9}$$

Suponiendo que $u=\xi$ y $dv=\xi e^{-b\xi^2}\,d\xi=d\left(-\frac{e^{-b\xi^2}}{2b}\right)$ e integrando por partes obtenemos teniendo en cuenta la fórmula (4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2 e^{-b\xi^2}\,d\xi=-\xi\cdot\frac{e^{-b\xi^2}}{2b}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-b\xi^2}}{2b}\,d\xi=\frac{1}{2b}\sqrt{\frac{\pi}{b}}.$$

De este modo de la fórmula (9) deducimos

$$D(\widetilde{X})=\sqrt{\frac{b}{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2b\sqrt{b}}=\frac{1}{2b};$$

y por consiguiente

$$D(X)=D(\widetilde{X}+x_0)=D(\widetilde{X})+D(x_0)=\frac{1}{2b}+0=\frac{1}{2b}. \qquad (10)$$

De aquí, para la desviación cuadrática media de la variable X obtendremos

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{1}{\sqrt{2b}}.$$

Al introducir la designación $\sigma=\sigma(X)$, tendremos

$$b=\frac{1}{2\sigma^2},\quad a=\sqrt{\frac{b}{\pi}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Introduciendo estos valores en la fórmula (1) obtendremos **la forma estándar de la ley de distribución normal de la variable aleatoria X en la forma diferencial:**

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (11)$$

donde $x_0=M(X)$ y $\sigma=\sqrt{D(X)}$.

De este modo, la ley de distribución normal depende solamente de dos parámetros: **de la esperanza matemática y de la desviación cuadrática media.**

La ley de distribución normal de una variable aleatoria en la forma integral es siguiente

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(z-x_0)^2}{2\sigma^2}}\,dz. \qquad (12)$$

Las fórmulas (11) y (12) pueden ser simplificadas, si se introduce **la desviación normalizada**

$$t=\frac{x-x_0}{\sigma}; \qquad (13)$$

en este caso

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}=\frac{1}{\sigma}\varphi_0(t)$$

(véase el § 12). Suponiendo que en la integral (12) $\tau=\frac{z-x_0}{\sigma}$, $d\tau=\frac{dz}{\sigma}$, obtendremos

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-x_0}{\sigma}}e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{t}e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau=\frac{1}{2}+\Phi_0(t),$$

donde t se determina mediante la fórmula (13) y $\Phi_0(t)$ es la integral de la probabilidad estándar (véase el § 13).

De aquí obtenemos que para una variable aleatoria X que se somete a la ley de distribución normal, la probabilidad de que ella se encuentre en el intervalo $[a, b]$ es

$$P(a\leqslant x\leqslant b)=\Phi(b)-\Phi(a)=\left[\frac{1}{2}+\Phi_0\left(\frac{b-x_0}{\sigma}\right)\right]-$$

$$-\left[\frac{1}{2}+\Phi_0\left(\frac{a-x_0}{\sigma}\right)\right]=\Phi_0\left(\frac{b-x_0}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{a-x_0}{\sigma}\right). \quad (14)$$

En particular, la probabilidad de que la desviación de la variable X de su esperanza matemática x_0 sea, en valor absoluto, inferior a α es igual a

$$P(|X-x_0|<\alpha)=P(x_0-\alpha<X<x_0+\alpha)=2\Phi_0\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right).$$

Tomando $\alpha=3\sigma$ obtendremos

$$P(|x-x_0|<3\sigma)=2\Phi_0(3)=0{,}9973,$$

es decir, semejante desviación es **casi cierta** *(regla de las tres sigmas)*.

La ley de distribución normal encuentra numerosas aplicaciones en teoría de errores, teoría del tiro, en física, etc.

EJERCICIOS

1. Sean A un suceso aleatorio y C un suceso cierto. ¿Qué se debe entender por los sucesos: $A+A$, AA, $A+C$, AC?

2. Un dado se lanza una sola vez. ¿Cuáles son las probabilidades de los sucesos siguientes: A, el dado da el 1; B, el dado da un número impar; C, el dado da no menos de 3?

3. Una urna contiene 2 bolas blancas y 8 bolas negras. ¿Cuántas bolas blancas hace falta agregar a la urna para que la probabilidad de sacar de ella una bola blanca sea no menor de 0,99?

4. Se sacan al azar 4 bolas de una urna que contiene 5 bolas blancas y 3 bolas negras. ¿Cuáles son las probabilidades de que: a) el numero de bolas blancas sacadas sea igual al de bolas negras; b) el número de bolas blancas sea más grande que el de bolas negras?

5. Un estudiante ha estudiado 24 billetes de examen sobre un total de 30. ¿Cuál es la probabilidad (en %) que él responda con éxito en el examen: a) sacando un solo billete; b) sacando dos billetes, sucesivamente (el billete sacado no se devuelve)?

6. Tres tiradores disparan simultáneamente contra un blanco. La probabilidad de dar en el blanco es de 0,9 para el primer tirador, de 0,8 para el segundo y 0,6 para el tercero. ¿Cuál es la probabilidad de que: a) el blanco sea batido al menos por un tirador; b) el blanco sea batido al menos por dos tiradores; c) ninguno de los tres tiradores dé en el blanco?

7. Demostrar que si los sucesos A y B son independientes, las eventualidades $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son también independientes.

8. La probabilidad de dar en el blanco con un solo tiro es $p = \frac{1}{3}$. Hallar la distribución de las probabilidades del número de impactos m para el número total de tiros $n = 5$.

9. La probabilidad de dar en el blanco con un solo tiro es $p = 0,2$. ¿Con qué número de tiros el blanco será batido por lo menos una vez con la probabilidad de 0,999?

10. Efectuando numerosas medidas del valor de una cierta magnitud se han obtenido los resultados siguientes (que contenían errores aleatorios): $x_1 = 1,2$ (dos veces), $x_2 = 1,3$ (cinco veces); $x_3 = 1,4$ (tres veces). Suponiendo que estas medidas han sido efectuadas con la misma precisión, calcular la esperanza matemática (valor medio) y la varianza del resultado de la medida. ¿Cuál es el error cuadrático medio del resultado de la medida?

11. Las variables aleatorias discretas X e Y son independientes. Demostrar que las variables $\widetilde{X} = X + C$ e Y (C es una constante) son también independientes.

12. Todos los valores de la variable aleatoria X pertenecen al intervalo $(0, 2)$, la densidad de la probabilidad es $\varphi(x) = \frac{1}{4}$ para $0 < x \leqslant 1$ y $\varphi(x) = \frac{3}{4}$ para $1 < x < 2$. Hallar la función de distribución $\Phi(x)$, la esperanza matemática $M(X)$ y la varianza $D(X)$.

13. Una variable aleatoria X está uniformemente distribuida en un intervalo centrado $[-l, l]$. Hallar la densidad de probabilidad $\varphi(x)$, la esperanza matemática $M(X)$, la varianza $D(X)$ y el estandar $\sigma(X)$.

14. Mostrar que la curva de Gauss

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

tiene puntos de inflexión en $x = \pm\sigma$.

15. Durante un tiro experimental se descubrió que la desviación Δ del punto de impacto respecto al blanco ha resultado de acuerdo con la ley normal con una esperanza matemática $M = 0$ y varianza $D = 4$ m. ¿Cuál es la probabilidad de que $|\Delta| < 1$ m?

16. Durante el empaquetamiento de ciertos productos se considera que un paquete es estandar, si la desivación entre su masa y la masa dada de 1 kg no supera los 20 g (en ambos sentidos). Se ha probado que con un trabajo cuidadoso, el error de la masa obedece a la ley normal con esperanza matemática $M = 0$ y desviación cuadrática media $\sigma = 10$ g. Un lote de 10 000 paquetes de este producto contiene 9000 paquetes estándares. ¿Corresponde esta proporción a la ley normal dada?

Capítulo XXVI

Noción sobre la programación lineal

§ 1. Espacio vectorial de n dimensiones

Como hemos visto en el capítulo XVIII, en el espacio tridimensional cada vector $\boldsymbol{x}$ puede ser dado por tres coordenadas: $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$. Generalizando esta propiedad llegamos a la noción de vector de n dimensiones.

DEFINICIÓN. *Un sistema ordenado de n números $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se llama* ***punto de n dimensiones*** *o* ***vector de n dimensiones.***

Los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se llaman *coordenadas* del punto (del vector) $\boldsymbol{x}$; supondremos que ellos son reales. Un vector de coordenadas nulas $0 = \{0, 0, \ldots, 0\}$ se llama *vector nulo*. En la representación geométrica el vector $\boldsymbol{x}$ puede considerarse como un radio vector del punto correspondiente.

Por analogía con los vectores tridimensionales se definen las operaciones fundamentales para los vectores de n dimensiones $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $\boldsymbol{y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.

I. *Igualdad de vectores.* Dos vectores son **iguales** si, y sólo si, sus coordenadas correspondientes son las mismas, es decir, si

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \Longleftrightarrow x_i = y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

II. *Suma de vectores.* Por definición, se suponen que

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n\}.$$

En particular, para un vector $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y su opuesto $-x = \{-x_1, -x_2, \ldots, -x_n\}$ tenemos

$$x + (-\boldsymbol{x}) = 0,$$

donde 0 es el vector nulo.

III. *Diferencia de vectores:*

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \{x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n\}.$$

Es justa la relación

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{y}).$$

IV. *Multiplicación por un escalar.* Si k es un escalar,

$$k\boldsymbol{x} = \{kx_1 + kx_2, \ldots, kx_n\}.$$

V *Producto escalar:*

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

El valor absoluto (*norma*) de un vector $\boldsymbol{x}$ es el número

$$x = |\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})} = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{\frac{1}{2}} \geqslant 0.$$

La distancia entre los puntos x e y se determina por la fórmula

$$\rho(x, y) = |x - y| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

En particular $|x|$ es la distancia del punto x al origen de coordenadas 0. Suponiendo que

$$(x, y) = xy \cos \varphi$$

obtenemos el ángulo formado por dos vectores

$$\varphi = \arccos \frac{(x, y)}{xy}.$$

En particular, si $x \cdot y = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (vectores ortogonales).

Las operaciones I — V presentan las propiedades habituales (véase el cap. XVIII).

En particular, si

$$x = \sum_{k=1}^{m} c_k x^k$$

es una **combinación lineal** de los vectores $x^1, \ldots, x^m$ (los índices de vectores se ponen por arriba) y $c_1, c_2, \ldots, c_m$ son escalares, entonces

$$\left(\sum_{k=1}^{m} c_k x^k, y \right) = \sum_{k=1}^{m} c_k (x^k, y).$$

El conjunto de todos los vectores (puntos) de n dimensiones para los cuales están definidas las operaciones I — V se llama *espacio euclidiano de n dimensiones* E^n.

DEFINICIÓN. *Los vectores* $x^1, x^2, \ldots, x^m$ *del espacio* E^n *se llaman* ***linealmente dependientes***, *si existen los escalares* $c_1, c_2, \ldots, c_m$, *no todos iguales a cero* ($|c_1| + |c_2| + \ldots + |c_m| \neq 0$) *y tales que*

$$\sum_{k=1}^{m} c_k x^k = 0.$$

En el caso particular en que $m = 2$, estos vectores se llaman **colineales** y cuando $m = 3$ se denominan **coplanares** (compare con los §§ 5 y 6 del cap. XVIII). En el caso contrario estos vectores se llaman **linealmente independientes**.

Se puede demostrar que en el espacio E^n no pueden haber más de n de vectores linealmente independientes. De este modo, la dimensión dim E^n del espacio vectorial E^n puede ser definida como el número máximo de vectores linealmente independientes que contiene este espacio.

Sean $x \in E^n$ y $x^1, x^2, \ldots, x^n$ vectores linealmente independientes de E^n. Como los vectores $x, x^1, x^2, \ldots, x^n$ son linealmente dependientes, entonces

$$cx = \sum_{k=1}^{n} c_k x^k = 0,$$

donde, evidentemente, $c \neq 0$.

Entonces resulta que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k x^k \left(\xi_k = -\frac{c_k}{c}\right).$$

De este modo cada vector $x \in E^n$ puede ser descompuesto (de un solo modo) en los vectores $x^1, x^2, \ldots, x^n$. En otras palabras, estos vectores forman la *base* del espacio E^n. Los números ξ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) se llaman *coordenadas* del vector x en la base dada $x^1, x^2, \ldots, x^n$. En particular, las coordenadas de un vector dado $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ son sus coordenadas en la base de vectores unitarios

$$e^1 = \{1, 0, 0, \ldots, 0\}, \quad e^2 = \{0, 1, 0, \ldots, 0\}, \ldots,$$
$$\ldots, e^n = \{0, 0, 0, \ldots, 1\}.$$

§ 2. Conjuntos en un espacio de n dimensiones

Un conjunto de puntos $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de un espacio de n dimensiones E^n se llama *conjunto* de este espacio.

El conjunto de puntos x tales que

$$0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon,$$

lo llamaremos entorno U_{x_0} del punto x_0 (o más exactamente, *ε-entorno*). El punto x_0 no pertenece a su entorno, es decir, el entorno está punteado.

Un conjunto G se llama conjunto *abierto*, si cada punto $x \in G$ de este conjunto le pertenece junto con una cierta parte de su entorno.

Un conjunto F se llama conjunto *cerrado*, si éste es un complemento de un conjunto abierto G, es decir, $F = E^n \setminus G$.

Sea $E \subset E^n$. Un punto ξ no necesariamente perteneciente a E se llama punto *de frontera* para el conjunto E, si ξ no es interior ni para el conjunto E, ni para su complemento $E^C = E^n \setminus E$. El conjunto de todos los puntos de frontera del conjunto E se llama *frontera* de E y se connota $\Gamma(E) = \Gamma$. Es evidente que $\Gamma(E^C) = \Gamma(E)$.

DEFINICIÓN 1. *El conjunto de puntos $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in E^n$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación lineal*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{1}$$

*($a_1, a_2, \ldots, a_n$, b son constantes), donde los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no son todos iguales a cero, se llama **hiperplano** del espacio E^n.*

En el caso de un espacio tridimensional este conjunto representa un plano habitual.

Introduciendo el *vector normal (director)* del hiperplano (1)

$$a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

se puede escribir la ecuación de éste en la forma

$$a \cdot x = b. \tag{2}$$

El hiperplano (2) divide el espacio E^n en dos semiespacios cerrados:

$$a \cdot x \leqslant b \ (E^-), \quad a \cdot x \geqslant b \ (E^+)^{1)}.$$

---

1) De una manera tradicional admitimos aquí que los puntos del hiperplano $a \cdot x = b$ pertenecen a los dos semiespacios E^- y E^+. Este hiperplano constituye la frontera común de los mismos.

Si el término independiente $b \neq 0$, los semiespacios E^- y E^+ pueden ser distinguidos del modo siguiente: 1) si $b > 0$, E^- contiene el origen de las coordenadas 0, mientras que E^+ no lo contiene; 2) si $b < 0$, viceversa.

EJEMPLO. La recta $x_1 + x_2 = 1$ divide el plano Ox_1x_2 en dos semiplanos $x_1 + x_2 \leqslant 1$ y $x_1 + x_2 \geqslant 1$ (fig. 275).

DEFINICIÓN 2. *El conjunto de puntos*

$$z = x + \beta (y - x), \tag{3}$$

donde $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ (fig. 276) *se llama* ***segmento*** $[x, y]$ *con extremos* x *e* y.

La fórmula (3) puede ser escrita en forma simétrica

$$z = \alpha x + \beta y, \tag{3'}$$

donde $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$. Para $\alpha = 0$, $\beta = 1$ y $\alpha = 1$, $\beta = 0$ se obtienen los extremos del segmento; para $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ se obtienen los puntos interiores de éste. Notemos que el punto x puede ser considerado como un segmento $[x, x]$ cuyos extremos coinciden.

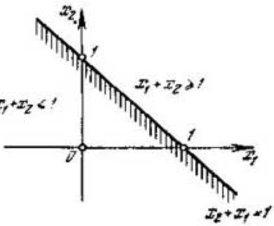

Fig. 275

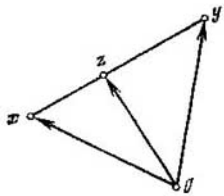

Fig. 276

Esta definición generaliza la noción de segmento para espacios bidimensional y tridimensional.

DEFINICIÓN 3. *Un conjunto* $A \subset E^n$ *se llama* ***convexo***, *si para cualquier par de puntos* $x \in A$ *e* $y \in A$, el segmento $[x, y]$ *que los une pertenece también al conjunto* A: $[x, y] \subset A$.

Como ejemplos de conjuntos convexos se pueden citar el punto, el segmento, el círculo, la esfera, todo el espacio E^n, etc. Se consideran condicionalmente que el conjunto vacío $\varnothing$ es convexo.

LEMA. *Todo semiespacio de* E^n *es un conjunto convexo.*

Efectivamente, supongamos que la frontera del semiespacio E es el hiperplano

$$a \cdot x = b, \tag{4}$$

y el mismo semiespacio se define por la desigualdad

$$a \cdot x \leqslant b. \tag{5}$$

Examinemos dos puntos arbitrarios y e z pertenecientes al conjunto E, es decir,

$$a \cdot y \leqslant b, \quad a \cdot z \leqslant b \tag{6}$$

y sea $t = \alpha y + \beta z$ $(\alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta = 1)$ un punto cualquiera del segmento $[y, z]$.

Utilizando las propiedades del producto escalar en virtud de las desigualdades (6) tenemos

$$a\cdot t = a\,(\alpha y + \beta z) = \alpha\,(a\cdot y) + \beta\,(a\cdot z) \leqslant \alpha\cdot b + \beta\cdot b = (\alpha + \beta)\, b = b,$$

es decir,

$$a\cdot t \leqslant b. \tag{7}$$

De este modo, $t \in E$ y, por consiguiente, el semiespacio E es convexo.

TEOREMA. *La intersección de cualquier número de conjuntos convexos es un conjunto convexo.*

Demostraremos este teorema para el caso de dos conjuntos convexos: para un número cualquiera finito o infinito de conjuntos convexos los razonamientos son análogos.

Sean A y B dos conjuntos convexos y $C = A \cap B$ la intersección de los mismos.

Si C es vacío, por definición es convexo. Supongamos que C no es vacío. Sean x e y dos puntos cualesquiera pertenecientes a C (es posible que ellos coincidan). De la definición de intersección resulta que $x, y \in A$, así como $x, y \in B$. Examinemos el segmento $[x, y]$. Puesto que los conjuntos A y B son convexos, $[x, y] \subset A$ y $[x, y] \subset B$ y, por consiguiente, $[x, y] \subset C$. De este modo, el conjunto C también es convexo.

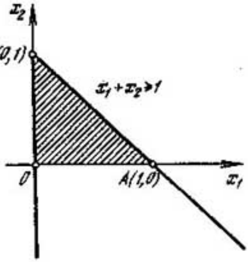

Fig. 277

COROLARIO. *La intersección de cualquier número de semiespacios es un conjunto convexo (puede ser vacío).*

OBSERVACIÓN. Examinemos un sistema de desigualdades lineales

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i \ (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Cualquier colección de números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisface todas las desigualdades (8) se llama *solución* de este sistema de desigualdades. Los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfacen una de las desigualdades del sistema (8) llenan un semiespacio del espacio E^n. Las soluciones pertenecen a la intersección de todos estos semiespacios. Del teorema se deduce que el conjunto de soluciones del sistema (8) representa un **poliedro convexo**. A título de ejemplos de poliedros convexos en el espacio tridimensional se pueden citar: la pirámide, el paralelepípedo, el prisma, la capa limitada por dos planos paralelos, etc.

EJEMPLO. a) Las soluciones del sistema de desigualdades

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_1 + x_2 \leqslant 1$$

llenan en el espacio E^2 un triángulo de vértices O (0, 0), A (1, 0), B (0, 1) (fig. 277);

b) el conjunto de soluciones del sistema

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_1 + x_2 \geqslant 1$$

en el espacio E^2 es un ángulo cuyo vértice es el punto B (0, 1) y los lados son la semirrecta BA y el semieje Bx_2 (fig. 277).

DEFINICIÓN. *Un punto de un conjunto convexo que no es interior a algún segmento no nulo perteneciente enteramente a este conjunto se llama* ***punto extremo*** *del conjunto.*

Por ejemplo, los puntos extremos de un segmento son sus extremos; de un triángulo, sus vértices, etc.

Intuitivamente está claro que un poliedro convexo, es decir, la intersección de un número finito de semiespacios, posee un número finito de puntos límites que son sus vértices.

§ 3. El problema de la programación lineal

En los últimos tiempos los métodos matemáticos son ampliamente utilizados para la solución de problemas tales, como la planificación de la economía nacional, la organización de la gestión industrial, la planificación de operaciones militares, etc. Desde el punto de vista general los problemas de gestión y de planificación se reducen habitualmente a la elección de un cierto sistema de parámetros numéricos o de una función (**característica del plan**) que permiten atender más eficazmente el objetivo propuesto (**plan óptimo**) teniendo en cuenta los recursos disponibles. Para poder evaluar la eficacia de un plan se introduce la así llamada **funcional o función de utilidad** (es decir, **el índice de calidad del plan**) expresada por las características del plan y que toma un valor mínimo o máximo (valor extremo) para el plano óptimo.

Para un gran número de problemas que presentan un interés práctico la función de utilidad es expresada **linealmente** por las características del plan, los valores admisibles de los parámetros cumplen también igualdades o desigualdades lineales. En estas condiciones, el hallazgo del extremo absoluto de la función de utilidad se llama *programación lineal* (un término más apropiado sería **«planificación lineal»**).

Matemáticamente el problema de la programación lineal se enuncia del modo siguiente: es necesario hallar el extremo absoluto (el valor mínimo o máximo según el sentido del problema) de una función lineal

$$S = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad (c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2 \neq 0) \tag{1}$$

(**funcional**) a condición de que las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ están sometidas a restricciones en forma de igualdades o desigualdades lineales:

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \leqslant 0, \quad \ldots, \quad x_k \geqslant 0^{1)} \quad (k \geqslant n) \tag{2}$$

y

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \quad (i=1, 2, \ldots, m) \tag{3}$$

DEFINICIÓN 1. *Llámase* **dominio de valores admisibles** *del problema de programación lineal (o más brevemente,* **dominio admisible***) al conjunto Ω de todos los valores posibles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfacen todas las desigualdades* (2) *y* (3).

El dominio admisible Ω es el dominio de definición de la función S.

En virtud del teorema del párrafo precedente se deduce que *el dominio admisible del problema de programación lineal es un poliedro convexo* (que puede representar un conjunto vacío, si el sistema de desigualdades (1), (3) es incompatible).

DEFINICIÓN 2. *El conjunto de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ contenidos en el dominio Ω para los cuales la función de utilidad* (1) *toma su valor mínimo o máximo según el sentido del problema se llama* **solución** *del problema de programación lineal (o* **plan óptimo***). El problema de programación lineal se llama* **resoluble***, si existe por lo menos una solución del mismo.*

Teóricamente tres casos son posibles: A) Las condiciones (2), (3) son contradictorias y, por consiguiente, el dominio admisible Ω es vacío. El proble-

---

1) La desigualdad de sentido opuesto $x_p \leqslant 0$ se reduce a desigualdades del tipo (2), si se introduce una nueva coordenada $x_p' = -x_p$ $(1 \leqslant p \leqslant k)$.

ma (1), (2), (3) no admite solución alguna. B) El dominio Ω es ilimitado; el problema (1), (2), (3) puede tener solución o puede no tenerla. C) El sistema de condiciones (2), (3) es compatible y el dominio admisible Ω está acotado. En virtud del teorema de Weierstrass (§ 11 del cap. XX) el problema de programación lineal (1), (2), (3) es resoluble. En adelante nos limitamos a estudiar solamente el caso C).

Según la teoría general (véanse los §§ 10, 11 del cap. XX), la función de utilidad (1) alcanza su extremo absoluto en un punto crítico o en la frontera Γ del dominio admisible Ω. Como sus derivadas parciales

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = c_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

no se anulan simultáneamente en ninguna parte del dominio Ω, la función de utilidad S alcanza su extremo absoluto en la frontera Γ del dominio admisible Ω. Este resultado puede ser precisado.

TEOREMA. *Una función de utilidad lineal puede adquirir su extremo absoluto estricto en los puntos extremos del dominio admisible.*

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente sea

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \equiv \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x}$$

una función de utilidad, $\boldsymbol{c} = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y Ω sea su dominio admisible. Supongamos, por ejemplo, que $S(\xi) = M$, donde $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \in \Omega$, es un **máximo estricto** de la función de utilidad $S(x)$ y ξ es un punto no final del dominio convexo Ω. En este caso existe un segmento no nulo $[y, z] \subset \Omega$ para el cual el punto ξ es interior, es decir,

$$\xi = \alpha y + \beta z, \tag{4}$$

donde $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta = 1$, y es evidente que $\xi \neq y$ y $\xi \neq z$. Puesto que $S(\xi) = M$ es un máximo estricto de la función $S(x)$, eligiendo un segmento $[y, z]$ suficientemente pequeño lo que se puede evidentemente, lograr, tendremos

$$S(y) < M, \quad S(z) < M. \tag{5}$$

De la igualdad (4) teniendo en cuenta que $S(x)$ es una función lineal homogénea obtenemos

$$S(\xi) = \boldsymbol{c} \cdot (\alpha y + \beta z) = \alpha (\boldsymbol{c} \cdot y) + \beta (\boldsymbol{c} \cdot z) =$$
$$= \alpha S(y) + \beta S(z) < \alpha M + \beta (M) = M.$$

Esto nos conduce a una contradicción. El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN. En el caso general se puede demostrar que el extremo absoluto de la función lineal de utilidad $S(x)$, si él existe, se realiza siempre en los puntos extremos del dominio admisible convexo Ω, es decir, en los vértices del poliedro Ω (es posible, claro está, que el extremo absoluto de la función de utilidad se alcance también en otros puntos; por ejemplo, la función $S(x)$ puede tener su mayor valor en todos los puntos de una cara del poliedro Ω, etc.).

De este modo, la resolución del problema de la programación lineal se reduce a la búsqueda de un número finito de valores de la función de utilidad y la comparación entre ellos.

EJEMPLO. Hallar los valores menor y mayor de la función

$$S = x_1 + 2x_2$$

en el dominio Ω: $0 \leqslant x_1 \leqslant 20$, $x_1 + 2x_2 \geqslant 20$, $x_1 - x_2 \leqslant -30$.

El dominio Ω es un cuadrilátero de vértices A (20, 0), B (20, 50), C (0, 30), D (0, 10) (fig. 278). Tenemos

$$S(A) = 20, \quad S(B) = 120,$$
$$S(C) = 60, \quad S(D) = 20.$$

Por consiguiente, el menor valor de la función S en el dominio Ω es igual a $m = 20$ (en los vértices A y D) y el mayor valor es $M = 120$ (en el vértice B).

Este resultado se vuelve geométricamente claro, si se trazan las líneas de nivel de la función S, es decir, las rectas $x_1 + 2x_2 = \text{const}$.

Sin embargo, esta solución tan sencilla del problema es posible solamente en los casos más simples. El «método de selección» utilizado aquí incluso en el caso cuando el número n de variables y el número m de desigualdades son relativamente pequeños conduce a cálculos considerables y exige recurrir a computadoras rápidas. Por eso fueron creados métodos que permiten simplificar el examen de vértices del dominio admisible (método simplex, método del potencial, etc.); estos métodos se describen en las obras especiales.

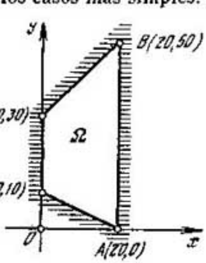

Fig. 278

Indicaremos para concluir este párrafo dos problemas concretos que se resuelven por el método de la programación lineal.

1. **Organización del abastecimiento.** Sea un centro consumidor que efectúa su abastecimiento de un cierto producto homogéneo (por ejemplo, de patatas) a partir de n puntos.

Designemos por x_i la cantidad de producto (en toneladas, por ejemplo) que compra el centro en el i-ésimo punto y por c_i el precio de la unidad de producto (incluyendo el pago del transporte) en este punto, $i = 1, 2, \ldots, n$. Las constantes c_i son diferentes porque el producto es más barato en un punto y más caro en otro. Además, los puntos se sitúan a diferentes distancias del centro y, por consiguiente, los gastos de transporte son también distintos. En este caso, para un plan dado de compras los gastos del centro se expresan por

$$S = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i. \tag{6}$$

Si a designa la necesidad del centro en el producto dado, debe ser realizada la condición

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = a. \tag{7}$$

Además la cantidad del producto que se elabora en el i-ésimo punto está limitada por un cierto valor b_i. Es posible también que la capacidad de transporte que puede ser utilizada para llevar el producto al centro está limitada por el valor b'_i. En este caso es natural imponerle a x_i las restricciones:

$$0 \leqslant x_i \leqslant \beta_i, \tag{8}$$

donde $\beta_i = \min(b_i, b'_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Con un plan racional de compras del producto, los gastos del centro deben ser mínimos. De este modo, llegamos al problema de la programación lineal: hallar el valor mínimo de la función de gastos (6) con las condiciones de (7) y (8). En este caso, el problema se resuelve fácilmente.

II. **El problema del transporte.** Sean $A_1, A_2, \ldots, A_m$ puntos de fabricación de un cierto producto homogéneo, y que los centros consumidores del mismo estén situados en puntos $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Supongamos que los gastos de transporte de una unidad de producto del punto A_i al punto B_j son iguales a c_{ij} unidades monetarias y la cantidad de productos (en toneladas, por ejemplo) transportados de A_i a B_j es x_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$). En un tal caso los gastos totales de transporte serán

$$S = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}. \tag{9}$$

El volumen de producción en el punto A_i está limitado por un cierto valor a_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) que depende de la capacidad de producción de la empresa. Suponiendo que toda la producción se envía a los puntos de consumo, tenemos las condiciones

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{10}$$

Además, la necesidad del producto para el punto B_j es dictada por los intereses de la producción y constituye un valor determinado b_j ($j = 1, 2, \ldots, n$). Por eso,

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

Es necesario organizar un plan de transporte tal, que los gastos de transporte totales S sean mínimos, asegurándose de que el producto fabricado en los puntos A_i se consume enteramente (condición (10)) y de que las necesidades de los puntos consumidores (condición (11)) será completamente satisfecha. Esto es un problema típico de la programación lineal.

Se puede demostrar que para que el problema del transporte tenga solución es necesario y suficiente el cumplimiento de las condiciones

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{12}$$

es decir, que el volumen total de producción sea igual al volumen total del consumo.

Anexos

A. CONSTANTES IMPORTANTES

$\pi = 3{,}14159,$	$\pi^{-1} = 0{,}31831$
$\pi^2 = 9{,}86960,$	$\pi^{-2} = 0{,}10132,$
$e = 2{,}71828,$	$e^{-1} = 0{,}36788,$
$e^2 = 7{,}38906,$	$e^{-2} = 0{,}13534,$
$M = \log e = 0{,}43429,$	$M^{-1} = \ln 10 = 2{,}30259.$

B. LISTA DE FÓRMULAS

I. Geometría analítica en el plano

1. *Traslación paralela* del sistema de coordenadas

$$x' = x - a, \quad y' = y - b,$$

donde $O'(a, b)$ es el nuevo origen de las coordenadas, (x, y), son las coordenadas viejas de un punto, $[x', y']$ son sus nuevas coordenadas.

2. *Rotación de un sistema de coordenadas* (el origen de coordenadas queda fijo)

$$x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha, \quad y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha,$$

donde (x, y) son las coordenadas viejas de un punto, $[x', y']$ son sus nuevas coordenadas, α es el ángulo de giro.

3. *Distancia entre dos puntos* (x_1, y_1) y (x_2, y_2):

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

4. Coordenadas del punto que divide un segmento de extremos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) *en una relación dada* l:

$$x = \frac{x_1 + lx_2}{1 + l}, \quad y = \frac{y_1 + ly_2}{1 + l}.$$

Para $l = 1$ tenemos las coordenadas *del centro del segmento.*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{1}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

5. *Área de un triángulo* de vértices $(x_1, y_1,)$ (x_2, y_2), (x_3, y_3):

$$S = \pm\frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)].$$

6. Ecuación de una recta *con coeficiente angular*

$$y = kx + b,$$

donde $k = \operatorname{tg} \varphi$ (coeficiente angular) es la pendiente de la recta respecto al eje Ox, y b es la magnitud del segmento cortado por la recta sobre el eje Oy.

7. $\operatorname{tg} \theta = \dfrac{k'-k}{1+k'k}$ es *la tangente* del ángulo de dos rectas con coeficientes angulares k y k'. *Condición de paralelismo de dos rectas*: $k' = k$; *condición de perpendicularidad de dos rectas*: $k' = -\dfrac{1}{k}$.

8. Ecuación de una recta *que pasa por un punto dado* (x_1, y_1):

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

donde k es el coeficiente angular de la recta.

9. Ecuación de una recta *que pasa por dos puntos* (x_1, y_1) y (x_2, y_2):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

10. Ecuación de una recta *que corta los segmentos* a y b *sobre los ejes de las coordenadas*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

11. *Ecuación general* de la recta

$$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0).$$

12. *Distancia de un punto* (x_1, y_1) *a la recta* $Ax + By + C = 0$:

$$\delta = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

13. *Ecuación de la circunferencia* con centro (x_0, y_0) y radio R:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

14. *Ecuación canónica de la elipse* de semiejes a y b:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Los focos de la elipse son $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$.

15. *Radios focales* del punto (x, y) de la elipse (1):

$$r = a - \varepsilon x; \quad r' = a + \varepsilon x,$$

donde $\varepsilon = \dfrac{c}{a} < 1$ es *la excentricidad de la elipse*.

16. *Ecuaciones canónicas de la hipérbola* de semiejes a y b:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Los focos de la hipérbola son $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$.

17. *Radios focales del punto* (x, y) de la hipérbola (2):

$$r = \pm(\varepsilon x - a), \quad r' = \pm(\varepsilon x + a),$$

donde $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$ es *la excentricidad de la hipérbola*.

18. *Asíntotas de la hipérbola* (2):

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

19. *Gráfica de una proporcionalidad inversa*

$$xy = c \quad (c \neq 0)$$

es una hipérbola equilátera con asíntotas $x = 0$ e $y = 0$.

20. *Ecuación canónica de una parábola* de parámetro p:

$$y^2 = 2px.$$

El foco de la parábola es $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$; *la ecuación de la directriz* es $x = -\frac{p}{2}$; *el radio focal de un punto* (x, y) de la parábola es $r = x + \frac{p}{2}$.

21. *Gráfica de un trinomio de segundo grado*

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

es una parábola vertical de vértice O' $\left(-\frac{B}{2A},\ -\frac{B^2 - 4AC}{4A}\right)$.

22. *Coordenadas polares* de un punto de coordenadas rectangulares x e y:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Coordenadas rectangulares de un punto de coordenadas polares ρ y φ:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi.$$

23. *Ecuaciones paramétricas de una circunferencia* de radio R y de centro en el origen de las coordenadas:

$$x = R \cos t, \quad y = R \operatorname{sen} t$$

(t es el parámetro).

24. *Ecuaciones paramétricas de una elipse de semiejes a y b*:

$$x = a \cos t, \quad y = b \operatorname{sen} t.$$

25. *Ecuaciones paramétricas de una cicloide*

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

II. Cálculo diferencial de una función de una variable

1. *Teoremas fundamentales sobre los límites:*

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x) - h(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) - \lim_{x\to a} h(x).$$

b) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\, g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

en particular,

$$\lim_{x\to a} [cf(x)] = c \lim_{x\to a} f(x).$$

c) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)/g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) : \lim\limits_{x\to a} g(x)$ $\left(\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0\right)$.

2. *Límites destacados*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{\alpha\to 0} (1+\alpha)^{1/\alpha} = e = 2{,}71828\ \ldots$

3. *Relación entre los logaritmos decimales y los logaritmos naturales*:

$$\log x = M \ln x,$$

donde $M = \log e = 0{,}43429\ldots$

4. *Incremento de la función* $y = f(x)$ correspondiente al incremento Δx del argumento x:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

5. *Condición de continuidad* de una función $y = f(x)$:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Propiedad principal de una función continua:

$$\lim_{x\to x_1} f(x) = f(\lim_{x\to x_1} x).$$

6. *Derivada*

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\ .$$

Geométricamente $y' = f'(x)$ es el coeficiente angular de la tangente a la curva de la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto de abscisa x.

Para las reglas de derivación y la tabla de fórmulas de derivadas fundamentales véase el § 13 del cap. X.

7. *Teorema de Lagrange* sobre el incremento finito de una función derivable:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi),$$

donde $\xi \in (x_1, x_2)$.

8. Una función $y = f(x)$ *crece*, si $f'(x) > 0$ y *decrece*, si $f'(x) < 0$.

9. Regla de L'Hospital para las indeterminaciones de tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\,,$$

si el límite a la derecha existe.

10. *Fórmula de Taylor local*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\,[(x - x_0)^n],$$

donde $f^{(n)}(x)$ existe en un cierto entorno completo del punto x_0.

11. a) *Condición necesaria de existencia del extremo de una función* $f(x)$ en un punto x_0: $f'(x_0) = 0$ ó $f'(x_0)$ no existe.

b) *Condiciones suficientes de existencia del extremo de una función* $f(x)$ *en un punto* x_0:

1) $f'(x_0) = 0$, $f'(x_0 - h_1) f'(x_0 + h_2) < 0$ para todos los $h_1 > 0$ y $h_2 > 0$ suficientemente pequeños, o

2) $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$.

12. a) La gráfica de una función $y = f(x)$ es *cóncava hacia arriba*, si $f''(x) > 0$ y *cóncava hacia abajo*, si $f''(x) < 0$.

b) *La condición necesaria de existencia de un punto de inflexión* de la gráfica de la función $y = f(x)$ en $x = x_0$: $f''(x_0) = 0$ ó $f''(x_0)$ no existe.

Condición suficiente para que exista un punto de inflexión en $x = x_0$:

$$f''(x_0) = 0, \quad f''(x_0 - h_1)\, f''(x_0 + h_2) < 0$$

para todos los $h_1 > 0$ y $h_2 > 0$ suficientemente pequeños.

13. Si una función $f(x)$ es continua en un segmento $[\alpha, \beta]$ y $f(\alpha)\, f(\beta) < 0$, entonces la raíz ξ de la ecuación $f(x) = 0$ puede ser aproximadamente calculada por las fórmulas:

a) $\xi_1 = \alpha - \dfrac{f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}(\beta - \alpha)$

(*método de las cuerdas*);

b) $\hat{\xi}_1 = \alpha - \dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$, donde $f'(\alpha) \neq 0$, $f(\alpha)\, f''(\alpha) > 0$

(*método de las tangentes*).

14. *Diferencial de una variable independiente* x: $dx = \Delta x$. *Diferencial de una función* $y = f(x)$: $dy = y'\, dx$. Relación entre el incremento Δy de una función y la diferencial dy de la función:

$$\Delta y = dy + \alpha \Delta x,$$

donde $\alpha \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

Para las propiedades fundamentales y las fórmulas de las diferenciales, véase el § 7 del cap. XII.

15. *Incremento pequeño* de una función derivable:

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\, \Delta x.$$

16. *Diferencial segunda* de una función $y = f(x)$, donde x es una variable independiente ($d^2x = 0$):

$$d^2y = y''\, dx^2.$$

III. Cálculo integral

1. Si $dy = f(x)\, dx$, entonces

$$y = \int f(x)\, dx$$

(*integral indefinida*).

2. *Propiedades principales de la integral indefinida*:

a) $d \int f(x)\, dx = f(x)\, dx$, $\left[\int f(x)\, dx\right]' = f(x)$;

b) $\int dF(x) = F(x) + C$, c) $\int Af(x)\, dx = A \int f(x)\, dx$ $(A \neq 0)$;

d) $\int [f(x) + g(x) - h(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx - \int h(x)\, dx$.

Para la tabla de integrales indefinidas véase el § 3 del cap. XIII.

3. *Métodos principales de integración:*

a) *Integración por descomposición*:

$$\int f(x)\, dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx,$$

donde $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

b) *Integración por sustitución*: si $x = \varphi(t)$, entonces

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

c) *Integración por partes*:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

4. *Fórmula de Newton-Leibniz*: si $f(x)$ es continua y si $F'(x) = f(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

5. *La integral definida como el límite de la suma integral*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i,$$

donde $\overline{x}_i \in [x_i, x_{i+1}]$ y $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

6. *Propiedades principales de la integral definida* (las funciones examinadas son continuas):

a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$; b) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$; c) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$;

d) $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$; e) $\displaystyle\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx$;

f) $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x) - h(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx$;

g) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$, $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt = -f(x)$.

7. *Teorema del valor medio*: si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c),$$

donde $a < c < b$.

8. *Fórmula de integración por partes en una integral definida*:

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx.$$

9. *Fórmula del cambio de variable en una integral definida:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

donde $a=\varphi(\alpha)$ y $b=\varphi(\beta)$.

10. *Fórmula de los trapecios:*

$$\int_a^b y\,dx = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right),$$

donde $h=\frac{b-a}{n}$, $x_0=a$ y $x_n=b$, $y=f(x)$, $y_i=f(x_0+ih)$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$.

11. *Fórmula de Simpson*

$$\int_a^b y\,dx = \frac{h}{3}\left[y(a)+4y\left(\frac{a+b}{2}\right)+y(b)\right],$$

donde $h=\frac{1}{2}(b-a)$.

12. *Integral impropia:*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

13. *Area de un trapecio curvilíneo* limitado por una línea continua $y=f(x)$ $(f(x)\geqslant 0)$, el eje Ox y dos verticales $x=a$ y $x=b$ $(a<b)$:

$$S=\int_a^b y\,dx.$$

14. *Area de un sector* limidato por una línea continua $\rho=f(\varphi)$ (ρ y φ son coordenadas polares) y dos rayos $\varphi=\alpha$ y $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$:

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2\,d\varphi.$$

15. *Longitud del arco* de una curva suave $y=f(x)$ *en coordenadas rectangulares* x e y; entre el punto $x=a$ y el punto $x=b$ $(a<b)$:

$$l=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

16. *Longitud del arco de una curva suave* $\rho=f(\varphi)$ *en coordenadas polares* ρ y φ, desde el punto $\varphi=\alpha$ hasta el punto $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$:

$$l=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi.$$

17. *Longitud del arco de una curva suave $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ dada en forma paramétrica* ($t_0 < T$):

$$l = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

18. *Volumen de un cuerpo* con la sección transversal conocida $S(x)$:

$$V = \int_a^b S(x)\, dx$$

19. *Volumen de un cuerpo de revolución*:
a) alrededor del eje Ox:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2\, dx \quad (a < b);$$

b) alrededor eje Oy:

$$V_y = \pi \int_c^d x^2\, dy \quad (c < d).$$

20. *Trabajo de una fuerza variable* $F = F(x)$ en un intervalo $[a, b]$:

$$A = \int_a^b F(x)\, dx.$$

IV. Números complejos, determinantes y sistemas de ecuaciones

1. *Número complejo* $z = x + iy$, donde $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$ son números reales e $i^2 = -1$. *Módulo de un número complejo*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0.$$

Igualdad de números complejos

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2 \text{ e } \mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2.$$

2. *Número conjugado para el número complejo* $z = x + iy$:

$$\bar{z} = x - iy.$$

3. *Operaciones aritméticas sobre los números complejos* $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$:

a) $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$;

b) $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$;

c) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \dfrac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$

($z_2 \neq 0$).

En particular

$$\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\ \operatorname{Im} z=\frac{1}{2i}(z-\bar{z}),\ |z|^2=z\bar{z}.$$

4. *Forma trigonométrica del número complejo*

$$z=r(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi),$$

donde $r=|z|$ y $\varphi=\operatorname{Arg} z$.

5. *Teoremas sobre el módulo y el argumento:*

a) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$;

b) $|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|$, $\operatorname{Arg} z_1z_2=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2$;

c) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$, $\operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2\ (z_2\neq 0)$;

d) $|z^n|=|z|^n$, $\operatorname{Arg} z^n=n\operatorname{Arg} z$ (n es entero).

6. *Raíz de un número complejo:*

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right)$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

7. *Forma exponencial del número complejo:*

$$z=re^{i\varphi},$$

donde $r=|z|$ y $\varphi=\operatorname{Arg} z$.

8. *Determinante de segundo orden:*

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1.$$

9. *La solución del sistema*

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y&=c_1,\\ a_2x+b_2y&=c_2\end{aligned}\right\}$$

se da por las fórmulas

$$x=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{D_y}{D}\ \text{(regla de Cramer)},$$

donde

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0,\ D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix},\ D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}$$

10. *Las soluciones de un sistema homogéneo*

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z&=0\end{aligned}\right\}$$

se dan por las fórmulas

$$x=D_1t,\quad y=-D_2t,\quad z=D_3t\quad(-\infty<t<+\infty),$$

donde

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix},$$

son los menores de la matriz

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}\right\|.$$

11. *Determinante de tercer orden*

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1,$$

donde

$$A_1=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad B_1=-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad C_1=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

son los cofactores (complementos algebraicos) de los elementos correspondientes del determinante.

12. *La solución del sistema*

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3, \end{aligned}\right\}$$

se da por *las fórmulas de Cramer*

$$x=\frac{D_x}{D}, \quad y=\frac{D_y}{D}, \quad z=\frac{D_z}{D},$$

donde

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0, \quad D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

13. Las soluciones del sistema homogéneo

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z=0, \end{aligned}\right\}$$

si

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0, \quad \delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

se define a partir del subsistema (véase 10)

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0. \end{aligned}\right\}$$

V. Elementos del álgebra vectorial

1. La suma de los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ es el vector $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ que es la resultante de la línea vectorial constituida por $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

2. La diferencia entre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es el vector $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$, donde $-\boldsymbol{b}$ es el vector opuesto al vector $\boldsymbol{b}$.

3. *El producto de un vector* $\boldsymbol{a}$ *por un escalar* k es un vector $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ tal, que $b = |k|\, a$, donde $a = |\boldsymbol{a}|$ y $b = |\boldsymbol{b}|$, además, el sentido del vector $\boldsymbol{b}$ coincide con el del vector $\boldsymbol{a}$, si $k > 0$ y tiene el sentido opuesto, si $k < 0$.

4. Dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son *colineales*, si $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ (k es un escalar).

Los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ son *coplanares*, si $\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b}$ (k, l son escalares).

5. *El producto escalar de dos vectores* $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es un escalar

$$\boldsymbol{ab} = ab \cos \varphi,$$

donde $\varphi = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son *ortogonales*, si $\boldsymbol{ab} = 0$.

Si $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ y $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, entonces

$$\boldsymbol{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

6. *El producto vectorial de dos vectores* $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es el vector

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b},$$

donde $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$ y $c = ab \operatorname{sen} \varphi$ ($\varphi = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$) y $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ es un triedro derecho.

Si $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ y $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, entonces

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

donde $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ son vectores unitarios orientados según los ejes de las coordenadas correspondientes.

7. *El producto mixto de vectores*

$$\boldsymbol{abc} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$

es un volumen (con el signo) del paralelepípedo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

Si $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, $\boldsymbol{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$, entonces

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

VI. Geometría analítica en el espacio

1. *Las coordenadas cartesianas rectangulares de un punto* M (x, y, z) del espacio $Oxyz$ son

$$x = r_x, \quad y = r_y, \quad z = r_z,$$

donde $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$ es el radio vector del punto M.

2. *La longitud y el sentido de un vector* $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ se determinan por las fórmulas

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$\cos\alpha = \dfrac{a_x}{a}$, $\cos\beta = \dfrac{a_y}{a}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{a}$ $(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1)$ donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son *los cosenos directores* del vector $\boldsymbol{a}$.

3. *Distancia entre dos puntos* M_1 (x_1, y_1, z_1) y M_2 (x_2, y_2, z_2):

$$d = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

4. *La ecuación de un plano* con vector normal $N = \{A, B, C\} \neq 0$ que pasa por el punto $M_0 (x_0, y_0, z_0)$ es

$$N \cdot (r - r_0) = 0, \tag{1}$$

donde r es el radio vector del punto corriente $M (x, y, z)$ y r_0 es el radio vector del punto M_0.

La ecuación (1) en coordenadas, es de la forma

$$A (x - x_0) + B (y - y_0) + C (z - z_0) = 0,$$

o bien

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{2}$$

donde $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ *(ecuación general del plano)*.

5. *La distancia de un punto* $M_1 (x_1, y_1, z_1)$ *a un plano* (2) es igual a

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

6. *Ecuación vectorial de la recta en el espacio*:

$$r = r_0 + st, \tag{3}$$

donde $r = \{x, y, z\}$ es el radio vector corriente de la recta, $r_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ es el radio vector de un punto fijo de la recta, $s = \{m, n, p\} \neq 0$ es el vector director de la recta y t es un parámetro $(-\infty < t < +\infty)$.

La ecuación de la recta (3) en coordenadas es de la forma

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

7. *La línea recta formada por la intersección de dos planos*, está dada por la ecuación

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

El vector director de la recta (4) es $s = N \times N'$, donde $N = \{A, B, C\}$, $N' = \{A', B', C'\}$.

8. *Ecuación de una esfera* de radio R, con centro (x_0, y_0, z_0):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

9. *Ecuación de un elipsoide triaxial* con semiejes a, b y c:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

10. *Ecuación de un paraboloide de rotación* alrededor del eje Oz:

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

VII. Cálculo diferencial de funciones de varias variables

1. *Condición de continuidad de una función* $z = f (x, y)$:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f (x + \Delta x, y + \Delta y) - f (x, y)] = 0,$$

o bien

$$\lim_{\substack{x_1 \to x \\ y_1 \to y}} f (x_1, y_1) = f (x, y).$$

Se define análogamente la continuidad de una función $u = f (x, y, z)$.

2. *Derivadas parciales de una función $z = f(x, y)$* respecto a las variables x e y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,\ y) - f(x,\ y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y}.$$

3. *Diferencial total de una función $z = f(x, y)$* respecto a las variables independientes x e y:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy,$$

donde $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$.

Si $u = f(x, y, z)$, entonces

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz.$$

4. *Incremento pequeño de una función diferenciable*

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\Delta y.$$

5. *Derviada de una función $u = f(x, y)$ según la dirección $l = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$* es igual a

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta.$$

De un modo análogo, si $u = f(x, y, z)$ y $l = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

6. *Los puntos de extremo* (más exactamente los puntos de extremo posible) de una función derivable $u = f(x, y, z)$ se definen mediante las ecuaciones:

$$f'_x(x,\ y,\ z) = 0,\ f'_y(x,\ y,\ z) = 0,\ f'_z(x,\ y,\ z) = 0.$$

7. *El gradiente de un campo escalar $u = f(x, y, z)$* es un vector

$$\operatorname{grad} u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}\right\}.$$

De aquí,

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

8. Si $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ es una diferencial total en un dominio G, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad ((x,\ y) \in G)$$

(*criterio de existencia de la diferenical total*).

VIII. Series

1. *Definición principal:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n.$$

2. *Criterio necesario de convergencia de una serie:* si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es convergente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

3. *Serie geométrica:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}, \text{ si } |q| < 1.$$

4. *Serie armónica*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

(es divergente).

5. *Regla de d'Alembert.* Sea $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n > 0)$ una serie que admite el

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

En este caso: a) si $l < 1$, esta serie es convergente; b) si $l > 1$, la serie es divergente y $u_n \not\to 0$.

6. *Convergencia absoluta.* Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ es convergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es también convergente (*absolutamente*).

7. *Criterio de Leibniz.* Si $v_1 \geqslant v_2 \geqslant v_3 \geqslant \ldots \geqslant 0$ y $v_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, la serie alternada

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \ldots$$

es convergente.

8. *El radio de convergencia* de una serie de potencias

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$$

se determina por la fórmula

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

si esta última tiene sentido.

9. *Serie de Maclaurin:*

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \ldots$$

10. *Desarrollo de funciones fundamentales en serie de potencias:*

a) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ $(|x|<1)$;

b) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$ $(-1<x\leqslant 1)$;

c) $\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}+\ldots$ $(|x|\leqslant 1)$;

d) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$ $(|x|<+\infty)$;

e) $\operatorname{sen} x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$
$(|x|<+\infty)$;

f) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$ $(|x|<+\infty)$;

g) $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\ldots n}\times$
$\times x^n+\ldots$ $(|x|<1)$.

11. *Serie de Taylor:*

$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$

12. *Series en un dominio complejo:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+iv_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n+i\sum_{n=1}^{\infty}v_n.$$

13. *Convergencia absoluta de series con términos complejos.* Si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n+iv_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n^2+v_n^2}$$

es convergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+iv_n)$ es también convergente (absolutamente).

14. *Fórmulas de Euler*

$$e^{ix}=\cos x+i\operatorname{sen} x,\quad e^{-ix}=\cos x-i\operatorname{sen} x.$$

15. *La serie trigonométrica de Fourier* de una serie suave a trozos $f(x)$ de período $2l$ es de la forma

$$f(x)=\frac{a_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{1}$$

donde

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

coeficientes de Fourier de la función $f(x)$.

Para una función $f(x)$ de período 2π obtenemos

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\operatorname{sen} nx),$$

donde

$$\left.\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}\right\}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left\{\begin{matrix}\cos nx \\ \operatorname{sen} nx\end{matrix}\right. dx \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

En los puntos de discontinuidad de la función $f(x)$ la suma de la serie (1) es igual a

$$S(x)=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)].$$

16. Si una función $f(x)$ de período $2l$ *es par*, entonces

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

donde

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Si una función $f(x)$ de período $2l$ *es impar*,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l},$$

donde

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

IX. Ecuaciones diferenciales

1. *Una ecuación diferencial con variables separables*

$$X(x)\,Y(y)\,dx+X_1(x)\,Y_1(y)\,dy=0$$

tiene la *integral general*

$$\int\frac{X(x)}{X_1(x)}\,dx+\int\frac{Y_1(y)}{Y(y)}\,dy=C. \qquad (1)$$

Las soluciones singulares que no forman parte de la integral (1) se determinan a partir de las ecuaciones

$$X_1(x)=0 \quad \text{y} \quad Y(y)=0.$$

2. *Una ecuación diferencial homogénea* de primer orden

$$P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy=0,$$

donde $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones homogéneas continuas del mismo grado, se resuelve con ayuda de la sustitución

$$y = ux$$

(u es una función nueva).

3. *La ecuación diferencial lineal* de primer orden

$$a(x)\, y' + b(x)\, y + c(x) = 0$$

puede resolverse con ayuda de la sustitución

$$y = uv.$$

4. *Casos integrables* de ecuaciones diferenciales de segundo orden:

a) si

$$y'' = f(x),$$

la solución general es

$$y = \int dx \int f(x)\, dx + C_1 x + C_2;$$

b) si

$$y'' = f(y)$$

la solución general es

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y)\, dy + C_1}} = \pm (x + C_2);$$

c) si

$$y'' = f(y'),$$

entonces *la integral general* de la ecuación puede ser hallada a partir de la relación

$$\int \frac{dp}{f(p)} = x + C_1,$$

donde $y' = p$.

5. *Casos de reducción del orden* de ecuaciones diferenciales de segundo orden:

a) si

$$y'' = f(x, y'),$$

entonces, tomando $y' = p$ obtenemos

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p);$$

b) si

$$y'' = f(y, y'),$$

entonces, tomando $y' = p$, obtenemos

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

6. *La solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea* de segundo orden

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

es de la forma

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

donde y_1 e y_2 son soluciones particulares linealmente independientes.

7. *La solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea* de segundo orden

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = f(x)$$

es de la forma

$$y = \bar{y} + z,$$

donde $\bar{y}$ es la solución general de la ecuación homogénea correspondiente y z es una solución particular de la ecuación no homogénea dada.

8. **Tabla 1.**

Forma general de soluciones de la ecuación homogénea $y'' + py' + qy = 0$ (p y q son constantes) según las raíces de la ecuación característica $k^2 + pk + q = 0$

Nº de orden	Naturaleza de las raíces k_1 y k_2 de la ecuación característica	Forma de la solución general
I	Las raíces k_1 y k_2 son reales y distintas	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
II	Las raíces son iguales: $k_1 = k_2$	$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{k_1 x}$
III	Las raíces son complejas: $k_1 = \alpha + i\beta$ y $k_2 = \alpha - i\beta$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x)$

9. **Tabla 2**

Naturaleza de la solución particular z de una ecuación no homogénea $y'' + py' + qy = f(x)$ (p y q son constantes), en función del segundo miembro $f(x)$

Nº de orden	Segundo miembro	Casos	Solución particular
I	$f(x) = ae^{mx}$ (a, m son constantes)	1) $m^2 + pm + q \neq 0$ 2) $m^2 + pm + q = 0$	$z = Ae^{mx}$ $z = Axe^{mx}$ o $z = Ax^2 e^{mx}$
II	$f(x) = M \cos \omega x + N \operatorname{sen} \omega x$ (M, N, ω son constantes; $\omega \neq 0$)	1) $p^2 + (q - \omega^2)^2 \neq 0$, 2) $p = 0$, $q = \omega^2$	$z = A \cos \omega x + B \operatorname{sen} \omega x$, $z = x (A \cos \omega x + B \operatorname{sen} \omega x)$
III	$f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c son constantes)	1) $q \neq 0$, 2) $q = 0$, $p \neq 0$	$z = Ax^2 + Bx + C$, $z = x (Ax^2 + Bx + C)$

A, B, C son coeficientes constantes indeterminados.

X. Integrales curvilíneas

1. *La integral curvilínea de primera especie* de una función continua $f(x, y)$ tomada sobre una curva suave a trozos K: $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ es

$$\int_K f(x, y)\, ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, |dt|. \tag{1}$$

Si la curva K está dada por la ecuación $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ tenemos

$$\int_K f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2x}\, dx.$$

Se define análogamente una integral curvilínea de primera especie en el caso de una curva K espacial.

Si $f(x, y)$ es la densidad lineal de la curva K, la integral (1) representa la masa de la línea K.

2. *La integral curvilínea de segunda especie* de un par de funciones continuas $X(x, y)$, $Y(x, y)$ tomada a lo largo de un camino suave a trozos K: $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ se define mediante la fórmula

$$\int_K X(x, y)\, dx + Y(x, y)\, dy = \int_\alpha^\beta [X(x(t), y(t))\, x'(t) + Y(x(t), y(t))\, y'(t)]\, dt \tag{2}$$

Si el camino K está dado por la ecuación $y = y(x)$ $(x \in [a, b])$, entonces

$$\int_K X(x, y)\, dx + Y(x, y)\, dy = \int_a^b [X(x, y(x)) + Y(x, y(x))\, y'(x)]\, dx.$$

Se define análogamente la integral curvilínea de segunda especie para una curva K espacial.

Físicamente la integral (2) representa el trabajo de una fuerza variable $F = \{X(x, y)\, Y(x, y)\}$ a lo largo del camino K.

3. Si se cumple la condición $X(x, y)\, dx + Y(x, y)\, dy = dU(x, y)$,

la integral (2) no depende del camino de integración K y

$$\int_K X(x, y)\, dx + Y(x, y)\, dy = U(x, y) \Big|_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1), \tag{3}$$

donde (x_1, y_1) es el punto inicial y (x_2, y_2) es el punto final de K.

Físicamente, la integral (3) representa el trabajo de una fuerza cuyo potencial es $U(x, y)$.

XI. Integrales dobles y triples

1. Se llama *integral doble* de una función $f(x, y)$ extendida a un dominio S al número

$$\iint_S f(x, y)\, dS = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta S_i, \tag{1}$$

donde $(x_i, y_i) \in \Delta S_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ y d es el diámetro mayor de las regiones elementales ΔS_i.

Si $f(x, y) \geqslant 0$, la integral (1) representa geométricamente el volumen de un cilindroide recto construido sobre la base S y limitado en su parte superior por una superficie $z = f(x, y)$.

2. Si el dominio de integración S es estándar respecto al eje Oy y está definido por las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, donde $y_1(x)$, $y_2(x)$ son funciones continuas, *la integral doble en coordenadas cartesianas rectangulares* de una función continua $f(x, y)$, se expresa por la fórmula

$$\iint_S f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

3. *La integral doble en coordenadas polares* φ y r, donde

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\operatorname{sen}\varphi$$

es de la forma

$$\iint_S f(x, y)\,dS = \iint_S f(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi)\,r\,d\varphi\,dr.$$

Si el dominio de integración S está definido por las desigualdades $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, $r_1(\varphi) \leqslant r \leqslant r_2(\varphi)$, entonces

$$\iint_S f(x, y)\,dS = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} rf(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi)\,dr.$$

4. Si $\rho = f(x, y)$ es la densidad superficial de una placa S, su masa es

$$m = \iint_S \rho(x, y)\,dS = \iint_S \rho\,dx\,dy \tag{2}$$

(*significación física de la integral doble*).

5. *Los momentos estáticos de la placa* S respecto a los ejes de coordenadas Ox y Oy, se expresan por las integrales

$$S_x = \iint_S \rho y\,dS, \quad S_y = \iint_S \rho x\,dS,$$

donde $\rho = f(x, y)$ es la densidad superficial de la placa.

6. *Las coordenadas del centro de masas de una placa* S se expresan por las fórmulas

$$x_0 = \frac{S_y}{m}, \quad y_0 = \frac{S_x}{m}, \tag{3}$$

donde m es la masa de la placa (véase (2)).

Para una placa homogénea en las fórmulas (2) y (3) se puede tomar $\rho = 1$.

7. *Los momentos de inercia de la placa* S respecto a los ejes de coordenadas Ox y Oy son expresados por las integrales

$$I_x = \iint_S \rho y^2\,dS, \quad I_y = \iint_S \rho x^2\,dS,$$

donde $\rho = \rho(x, y)$ es la densidad superficial de la placa.

8. Se llama *integral triple* de una función $f(x, y, z)$ extendida a un dominio V, al número

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dV = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i, \qquad (4)$$

donde $(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ y d es el diámetro mayor de las regiones ΔV_i.

Si $f(x, y, z)$ es la densidad en el punto (x, y, z), la integral triple (4) representa la masa que rellena el volumen V.

9. *El volumen* V de un cuerpo es igual a

$$V = \iiint_V dV = \iiint_V dx\, dy\, dz.$$

10. Si el dominio de integración V se define por las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, $z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)$, donde $y_i(x)$, $z_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ son funciones continuas, entonces *la integral triple de una función continua* $f(x, y, z)$ *en coordenadas rectangulares* puede ser calculada por la fórmula

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz.$$

XII. Teoría de las probabilidades

1. Se entiende por *suma* de dos sucesos A y B: $A + B = A \cup B$,

el suceso que tiene lugar solamente cuando se realiza por lo menos uno de los sucesos A o B.

2. Se entiende por *producto* de dos sucesos A y B: $AB = A \cap B$,

el suceso que tiene lugar solamente cuando se realizan a la vez los sucesos A y B.

3. *La probabilidad* (en el sentido clásico) *de un suceso* A

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (0 \leqslant P(A) \leqslant 1)$$

es la relación del número m de todos los casos elementales favorables al suceso A respecto al número n de todos los resultados elementales posibles con iguales posibilidades de producirse.

4. *Probabilidad de un suceso contrario*: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

5. *Teorema de la adición* para dos sucesos incompatibles A y B:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

En el caso general $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

6. *Teorema de la multiplicación de* las probabilidades:

$$P(AB) = P(A)\, P_A(B),$$

donde $P_A(B)$ es la probabilidad condicional correspondiente del suceso B.

Si los sucesos A y B son independientes, entonces

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

7. *Fórmula de la probabilidad total* $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P_{H_i}(A)$,

donde $H_1, H_2, \ldots, H_n$ forman un grupo completo de hipótesis:

$$A=\sum_{i=1}^{n} H_i A, \quad H_i H_j = 0 \text{ para } i \neq j, \quad \sum_{i=1}^{n} P(H_i)=1.$$

8. *Fórmula de Bayes:*

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\,P_{H_i}(A)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)\,P_{H_j}(A)}$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$, donde $H_1, H_2, \ldots, H_n$ forman un grupo completo de hipótesis.

9. *Fórmulas fundamentales del análisis combinatorio:*

a) *número de arreglos* de n elementos tomados de a m:

$$A_n^m = n(n-1)\ \ldots\ [n-(m-1)] = \frac{n!}{(n-m)!}\ ;$$

b) *número de permutaciones* de n elementos: $A_n^n = n!$;

c) *número de combinaciones* de n elementos tomados de a m:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ \ldots\ [n-(m-1)]}{m!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\,.$$

10. *Fórmula del binomio de Newton:*

$$(q+p)^n = q^n + C_n^1 q^{n-1} p + C_n^2 q^{n-2} p^2 + \ldots + p^n.$$

11. *Ley de distribución binominal:* en las condiciones del esquema de Bernoulli la probabilidad de realización de un suceso A exactamente m veces en n ensayos $(0 \leqslant m \leqslant n)$ es

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, p^m q^{n-m},$$

donde $P(A)=p$, $P(\overline{A}) = q = 1-p$ es la probabilidad A en un solo ensayo.

12. *Fórmula local de Laplace:* $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-t^2/2}$

(véase el § 11), donde $0 < p < 1$, $q = 1-p$, $t = (npq)^{-1/2}(m-np)$.

13. *Fórmula integral de Laplace:*

$$P(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi_0(t_{m_2}) - \Phi_0(T_{m_1}),$$

donde $t_m = (npq)^{-1/2}(m-np)$, $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt.$

14. *Fórmula de Poisson* $P_n(m) \approx \frac{\mu^m}{m!}\, e^{-\mu}$,

donde $\mu = np$, y la probabilidad p es pequeña.

15. *Esperanza matemática* de una variable aleatoria discreta

$$X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \text{ donde } p_i = P(X=x_i)\ (i=1, 2, \ldots, n), \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

es

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Propiedades esenciales:
1) $M(C) = C$;
2) $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$;
3) $M(X-Y) = M(X) - M(Y)$;
4) $M(CX) = CM(X)$;
5) $M(XY) = M(X)M(Y)$
(X e Y son independientes).

16. *Dispersión* de una variable aleatoria discreta X;

$$D = M\{[X - M(X)]^2\} = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Propiedades esenciales:
1) $D(C) = 0$;
2) $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$ (X e Y son independientes);
3) $D(CX) = C^2 D(X)$.

17. Para la ley binomial de distribución del número de manifestaciones X de un suceso A en n ensayos tenemos
1) $P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ ($m = 0, 1, 2, \ldots, n$), donde $p = P(A)$, $q = P(\overline{A})$;
2) $M(X) = np$;
3) $D(X) = npq$.

18. Para una variable aleatoria continua X tenemos
a) *función de distribución*

$$\Phi(x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$$

($-\infty < x < +\infty$), donde $\varphi(x)$ es la densidad de probabilidad;
b) *esperanza matemática*

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx;$$

c) *dispersión*

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 \varphi(x)\,dx.$$

19. *Para la ley normal de distribución* de una variable aleatoria X la densidad de la probabilidad es de la forma

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2},$$

donde $x_0 = M(X)$, $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

En este caso

$$P(a \leqslant x \leqslant b) = \Phi_0\left(\frac{b-x_0}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-x_0}{\sigma}\right),$$

donde $\Phi_0(x)$ (véase el § 13) es la integral de probabilidad estándar.

Respuestas

Capítulo I

2. $(0, 0)$, $(10, 0)$, $(5, 5\sqrt{3})$. **3.** a) $M(1, -2)$; b) $M(-1, 2)$; c) $M(2, 1)$ d) $M(-2, -1)$. **4.** $A_1(8, 4)$; $B_1(11, 3)$. **5.** $x_1 = 6$, $y_1 = 0$; $x_2 = 0$, $y_2 = 0$; **6.** $C\left(2\frac{4}{5}, 6\frac{1}{5}\right)$. **7.** $B(4, 5)$. **8.** $\frac{10}{3}\sqrt{2}$. **9.** $(4, 3)$. **10.** $N\left(1\frac{1}{3}, 1\right)$. **11.** $x_i = x_0 + ih$, $y_i = y_0 + ik$ $\quad = 1, 2, \ldots, n - 1)$, donde $h = \frac{x - x_0}{n}$ y $k = \frac{y - y_0}{n}$. **12.** 12. **14.** $y_1 = 10$; $y_2 = -5$. **15.** $15\frac{1}{2}$ ha.

Capítulo II

1. $y = 2x$ e $y = -2x$. **2.** $5x + y + 2 = 0$. **3.** La circunferencia: $x^2 + y^2 = 4$. **4.** a) El conjunto de los ejes de las coordenadas; b) el origen de las coordenadas $(0, 0)$; c) dos rectas paralelas al eje Oy situadas a ambos lados de éste a una distancia igual a la unidad; d) dos rectas paralelas al eje Ox y situadas a distancias iguales a 1 y 2 de este eje; e) conjunto de la bisectriz de los I y III cuadrantes y del eje Oy. **6.** Los puntos A y B están situados en la curva; los puntos C, D y E no yacen sobre la curva. **7.** $(0, 2)$; $(-1, 0)$; $(2, 0)$. **8.** $(2, 2)$ y $(-2, -2)$.

Capítulo III

2. $y = 0$; $y = 2\sqrt{3}$; $y = \sqrt{3}(x + 5)$; $y = -\sqrt{3}(x - 5)$. **3.** $x - 3y + 9 = 0$, $3x + y - 13 = 0$. **4.** $12x + 8y - 15 = 0$. **5.** $x + 2y = 0$. **6.** $7x - 2y - 1 = 0$; $\sqrt{53}$. **7.** $7x + 8y - 11 = 0$; $\frac{71}{\sqrt{113}}$. **8.** $6x + 5y - 56 = 0$. **9.** $x + y - 7 = 0$. **10.** $y = 0{,}1x - 5$; 25 m; 150 m. **11.** a) $x = 305$, $y = 215$; b) no hay punto de intersección; las rectas son paralelas; c) $x = t$, $y = 2t$, donde t es arbitrario, las rectas coinciden. **12.** $y = x$. **13.** $(-4, 0)$. **14.** $x = \frac{ak_2}{k_2 - k_1}$, $y = \frac{ak_1k_2}{k_2 - k_1}$, donde $k_1 = \operatorname{tg}\alpha$ y $k_2 = \operatorname{tg}\beta$. **15.** $\left(1\frac{1}{3}, 1\right)$. **16.** 13. **17.** 2; 1; 0. **18.** 6,4. **19.** 7. **20.** $8x - 6y - 15 = 0$, $8x - 6y + 25 = 0$. **21.** $y = \frac{3}{4}x$ e $y = \frac{7}{24}x$.

Capítulo IV

1. a) $C(-4, 0)$; $R = 5$; b) $x^2 + y^2 = 2x$; c) $x^2 + y^2 - x - y + \frac{1}{4} = 0$; d) $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 7 = 0$. **2.** $5x - 7y + 13 = 0$; $\frac{1}{2}\sqrt{74}$. **3.** $x - y - 1 = 0$. **4.** $a = 2\sqrt{2}$, $b = 2$, $c = 2$, $F(2, 0)$, $F'(-2, 0)$, $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$. **5.** a)

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; c) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$. **6.** 4. **7.** a) $a=2$, $b=3/2$, $c=5/2$, $F\left(2\frac{1}{2}, 0\right)$, $F'\left(-2\frac{1}{2}, 0\right)$, $\varepsilon=1{,}25$; b) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **8.** $150/\sqrt{481}$. **9.** 5/3; 5/4. **10.** $F_1F_2=5\sqrt{2}$. **11.** $\pm x\pm y=10$. **12.** 5/3. **13.** $y^2=20x$. **14.** (0, 1); $y=-1$. **15.** 7,5 cm del vértice. **16.** 24. **17.** $y=1+\frac{x^2}{4}$. **18.** $y_1=2x_1^2$, $x_1=x-2$, $y_1=y+3$; O_1 (2, —3). **19.** $y_1=-x_1^2$, $x_1=x-2$, $y_1=y-1$; O_1 (2, 1). **20.** $y_1^2=x_1$, $x_1=x-\frac{7}{4}$, $y_1=y-\frac{1}{2}$; $O_1\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$. **21.** $h_1=9$ m.

Capítulo V

2. $A(5, 0)$; $B(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$; $C(0, 2)$; $D(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$. **4.** a) $\rho=\sec\varphi$; b) $\rho=-2\operatorname{cosec}\varphi$; c) $\varphi=\pi/4$ y $\varphi=5\pi/4$; d) $\varphi=\operatorname{arctg} 2$ y $\varphi=\pi+\operatorname{arctg} 2$; e) $\rho=\sec\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$; f) $\rho=5$. **5.** $\rho=\frac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}$. **6.** $x^2+y^2=ax$; circunferencia de centro en el punto $C\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ y de radio $R=\frac{|a|}{2}$. **7.** $y^2=2x+1$ (parábola). **8.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (elipse). **9.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (hipérbola). **10.** $y^2=16x$ (parábola). **11.** 505; (—305; —405).

Capítulo VI

1. $y=bx\left(1-\frac{x}{2h}\right)(0\leqslant x\leqslant h)$. **2.** a) $x\geqslant 2$; b) $|x|\geqslant 1$; c) $0<x<1$; d) $x>-1$. **3.** $f(0)=2$, $f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=2$, $f(-x)=x^2+3x+2$, $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-3x+2x^2}{x^2}$, $f(x+1)=x^2-x$. **4.** —1,25. **5.** $y=2x-10$. **6.** $f(x)=x^2+2x-3$. **7.** $\varphi[\psi(x)]=2^{2x}$; $\psi[\varphi(x)]=2^{x^2}$. **8.** $f[f(x)]=1-\frac{1}{x}$; $f\{f[f(x)]\}=x$. **9.** a) $x=\frac{y-3}{2}$; b) $x=\sqrt[3]{1-y^3}$, $x=2\operatorname{Arcsen} y$. **11.** $x_1=-1{,}88$; $x_2=0{,}35$; $x_3=1{,}53$. **12.** 4,49. **13.** 1,8796; 0,6928.

Capítulo VII

1. a) $-3<x<-1$; b) $-\infty<x\leqslant 0$, $6\leqslant x<+\infty$; c) $1/2<x<1$, $1<x<1\frac{1}{2}$; d) $-2\leqslant x\leqslant -1$, $1\leqslant x\leqslant 2$. **2.** $\approx 0{,}4\%$. **3.** Dos. **4.** a) 0; b) 1; c) —1/2. **5.** a) 1/6; b) 1/12. **6.** 0. **7.** 5. **8.** 1/2. **9.** $\cos a$. **10.** 2. **11.** $\lim\limits_{a\to 0} x_1=-c/b$; $\lim\limits_{a\to 0} x_2=\infty$. **13.** 1. **14.** 0. **15.** e^{-1}. **16.** e^3. **17.** e^{-2}. **18.** e^{-1}.

Capítulo VIII

1. $\Delta x=90$; $\Delta y=1$. **5.** —1, —2, —3. **6.** $\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **7.** 0; ± 1, ± 2, . . . **8.** 3. **9.** 1/4. **10.** 2. **11.** a) $x=0$; punto de discontinuidad de primera especie; b) $x=1$; punto de discontinuidad de primera especie; c) $x=0$; punto de discontinuidad de segunda especie.

Capítulo X

1. a) $y'=6x-1$; b) $f'(x)=-2/x^3$, $f'(1)=-2$, $f'(-10)=0{,}002$. **2.** $y'=$ $=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$, $y'=x-\frac{4}{x^3}$. **4.** $y'=\frac{a}{a+b}$. **5.** $y'=6x^2-2x$. **6.** $y'=(3x+1)/2\sqrt{x}$. **7.** $y'=x^2\cos x+2x\operatorname{sen}x$. **8.** $y'=-2x/(1+x^2)^2$. **9.** $y'=$ $=\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$. **10.** $y'=\frac{2}{(\operatorname{sen}x+\cos x)^2}$. **11.** $y'=\operatorname{sen}2x$. **12.** $y'=2x\cos x^2$. **13.** $y'=-\frac{3}{4}\operatorname{sen}x\cos x/2$. **14.** $y'=-\frac{3}{2}x^2\operatorname{sen}\frac{x^3}{2}$. **15.** $y'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. **16.** $y'=\frac{1}{x\ln x}$. **17.** $y'=\frac{2\ln x}{x}$. **18.** $y'=\frac{2}{x}$. **19.** $y'=\frac{1}{\operatorname{sen}x}$. **20.** $y'=nx^{n-1}+n^x\ln n$. **21.** $y'=-2xe^{-x^2}$. **22.** $y'=\frac{x^2}{2}e^{x/2}$. **23.** $y'=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. **24.** $y'=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, para $|x|>1$. **25.** $y'=-\frac{1}{x^2+1}$. **26.** $y'=-\frac{16\cos 2x}{\operatorname{sen}^3 2x}$. **27.** $y'=\frac{x^2}{1+x^2}$. **28.** $y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. **29.** $y'=\sqrt{1-x^2}$. **30.** $y'=\frac{1}{1-x^4}$. **31.** $y'=\frac{2x-y}{x-2y}$. **32.** $y'=\frac{x^2-y}{x-y^2}$. **33.** a) $y'=\frac{y}{y-1}$; b) $y'=-3$. **34.** a) $y'_x=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}t$; b) $y'_x=\frac{1+\alpha t}{\omega}e^{\alpha t}$; c) $y'_x=-1$. **35.** a) $y''=$ $=(4x^2-2)e^{-x^2}$; b) $y''=-4\operatorname{sen}2x$. **36.** $y''=-1/x^2$. **37.** $y''=(x^2-4x+2)e^{-x}$. **38.** $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=-9$. **39.** a) $y=12x-16$; b) $y=\pi-x$; c) $x-4y+8=0$. **40.** $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$. **41.** $y=\frac{\sqrt{3}}{5}(20-x)$. **42.** a) $y=-x$. b) $4x+y-36=0$; c) $4x+3y=0$. **43.** 40π m²/s. **44.** $\approx 0{,}8$ m/s. **45.** $v=\alpha+\beta t$, $j=\beta$. **46.** $v=1-\cos t$; $j=\operatorname{sen}t$.

Capítulo XI

3. $(-\infty, 2)$, $(2, +\infty)$. **4.** $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$ **5.** $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$. **6.** $\frac{1}{6}$. **7.** $\ln\frac{3}{2}$. **8.** $\frac{1}{3}$. **9.** $\frac{2}{\pi}$. **10.** 0. **11.** 0. **12.** $\frac{2}{\pi}$. **13.** 2. **14.** $\frac{1}{2}$. **15.** 1. **16.** $\frac{1}{e}$. **17.** 1. **18.** $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{a^2}{4}$ (máx). **19.** $x=1$, $y=\frac{1}{3}$ (máx); $x=3$, $y=-1$ (mín). **20.** $x=1$, $y=1$ (máx); $x=-1$, $y=-1$ (mín). **21.** $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{3}{2}$ (máx). **22.** $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2e}$ (máx). **23.** Lados del rectángulo: $a\sqrt{2}$ y $a\frac{\sqrt{2}}{2}$. **24.** $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$. **25.** Altura del cono $=4a/3$. **26.** $a/6$, $2a/3$, $2a/3$. **27.** $x=1/3$, $y=$ $=2/27$. **28.** Dominio de definición: $-\infty<x<+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$. La función es impar. No hay puntos de discontinuidad. Puntos de intersección con los ejes de coordenadas: $(-\sqrt{3}, 0)$ $(0, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$. Puntos de extremo: $y_{\text{mín}}=-2$ para $x=-1$ e $y_{\text{máx}}=2$ para $x=1$. Punto de inflexión: (0, 0). 29. Dominio de definición: $-\infty < x < +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$. La función es no negativa. No hay puntos de discontinuidad. Ceros de la función: $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$. Puntos de extremo: $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = 0$ y $x = 2$; $y_{\text{máx}} = 1$ para $x = 1$. Puntos de inflexión: $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{9}\right)$ y $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{9}\right)$. 30. Dominio de definición: $-\infty < x < +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = 1$. La función es par. No hay puntos de discontinuidad. Cero de la función: $x = 0$. Punto de extremo: $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = 0$. Punto de inflexión $(\pm 1/\sqrt{3}, 1/4)$.

31. Dominio de definición: $-\infty < x < 0$ y $0 < x < +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-0} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+0} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$. La función es impar. Punto de discontinuidad: $x = 0$. No hay ceros; la función es negativa para $x < 0$ y positiva para $x > 0$. Puntos de extremo: $y_{\text{máx}} = -2$ para $x = -1$ e $y_{\text{mín}} = 2$ para $x = 1$. No hay puntos de inflexión; la concavidad es hacia abajo para $x < 0$ y hacia arriba para $x > 0$.

32. Dominio de definición: $-\infty < x < -1$ y $-1 < x < +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 1$, $\lim\limits_{x\to-1-0} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-1+0} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 1$. Punto de discontinuidad: $x = -1$. Cero de la función: $x = 0$. No hay puntos de extremo; la función es creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(-1, +\infty)$. No hay puntos de inflexión; la concavidad es hacia arriba para $x < -1$ y hacia abajo para $x > -1$.

33. Dominio de definición: $-\infty < x < -2$, $-2 < x < 2$ y $2 < x < +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 0$, $\lim\limits_{x\to-2-0} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-2+0} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to2-0} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to2+0} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$. La función es par. Puntos de discontinuidad: $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$. Punto de extremo: $y_{\text{mín}} = 2$ para $x = 0$. No hay puntos de inflexión; concavidad hacia abajo para $x < -2$ y $x > 2$, y hacia arriba para $-2 < x < 2$.

34. Dominio de definición: $-\infty < x \leqslant 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$, $y(1) = 0$. No hay puntos de discontinuidad. Ceros de la función: $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$; la función es negativa para $x < 0$ y positiva para $x > 0$. No hay puntos de discontinuidad. Puntos de extremo: $y_{\text{máx}} = 2\sqrt{3}/9 \approx 0{,}38$ para $x = \frac{2}{3}$ e $y_{\text{mín}} = 0$ (extremo de borde) para $x = 1$. No hay puntos de inflexión; concavidad hacia abajo.

35. Dominio de definición: $0 < x \leqslant 1$; $\lim\limits_{x\to+0} y = +\infty$, $y(1) = 0$. Punto de discontinuidad: $x = 0$. Cero de la función: $x = 1$; la función es no negativa. La función es descreciente; el límite mínimo: $y = 0$ para $x = 1$. Punto de inflexión $(3/4, 1/\sqrt{3})$.

36. La función es periódica de período 2π; $y(0) = y(2\pi) = 1$. No hay puntos de discontinuidad. Ceros de función: $x_1 = \frac{3\pi}{4}$ y $x_2 = \frac{7\pi}{4}$. Puntos de extremo: $y_{\text{máx}} = \sqrt{2}$ para $x = \frac{\pi}{4}$ e $y_{\text{mín}} - \sqrt{2}$ para $x = \frac{5\pi}{4}$. Puntos de inflexión: $(3\pi/4, 0)$ y $(7\pi/4, 0)$.

37. Dominio de definición: $0 < x < +\infty$, $\lim\limits_{x\to+0} y = 0$ y $\lim\limits_{x\to+0} y = +\infty$. Punto de discontinuidad no esencial: $x = 0$. Cero de la función: $x = 1$; la función es negativa para $0 < x < 1$ y positiva para $1 < x < +\infty$. Punto de extremo: $y_{\text{mín}} = -\frac{1}{e} \approx -0{,}37$ para $x = \frac{1}{e}$. No hay puntos de inflexión; concavidad hacia arriba.

INDICACIÓN. Con ayuda de la regla de L'Hospital se demuestra que cuando $N \to +\infty$ el número N crece más lentamente que su logaritmo natural, es decir, $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{\ln N}{N} = 0$.

Por eso $\lim\limits_{x\to+0} y = \lim\limits_{x\to+0} x \ln x = \lim\limits_{x\to+0} \frac{-\ln 1/x}{1/x} = 0$.

38. Dominio de definición: $-\infty < x < +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$. No hay puntos de discontinuidad. Cero de la función: $x = 0$ la función es negativa para $x < 0$ y positiva para $x > 0$. Punto de extremo: $y_{\text{máx}} = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$ para $x = 1$. Punto de inflexión $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$, donde $\frac{2}{e^2} \approx 0{,}27$.

INDICACIÓN. Para hallar $\lim\limits_{x\to+\infty} y$, se puede utilizar la indicación:

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x)}{e^x} = 0.$$

39. Dominio de definición: $-\infty < x < +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$. La función es impar. No hay puntos de discontinuidad. Cero de la función: $x = 0$; la función es negativa para $x < 0$ y positiva para $x > 0$. No hay puntos de extremo; la función es creciente. Punto de inflexión: $(0, 0)$, concavidad hacia arriba para $x < 0$ y hacia abajo para $x > 0$.

Capítulo XII

1. $dy = 6x\,dx$. 2. $dy = x\cos x\,dx$. 3. $dy = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\,dx$. 4. $dy = -\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 5. $dy = \frac{dx}{x}$. 6. $dy = 2x\,dx = 2(2-t+t^2)(-1+2t)\,dt$. 7. a) $\Delta y = 4$, $dy = 2$; b) $\Delta y = 0{,}211$, $dy = 0{,}2$. 8. $30{,}301$ m^3. 9. a) $0{,}983$; b) $0{,}495$; c) $0{,}795$. 10. $\Delta y = 0{,}07$. 11. $dy = -2xe^{-x^2}\,dx$; $d^2y = (4x^2-2)\,e^{-x^2}\,dx^2$.

Capítulo XIII

1. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x + C$. 2. $x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C$. 3. $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{5\sqrt[6]{x^5}} - \frac{3}{2x\sqrt[3]{x}} + C$. 4. $\frac{a^{2x}}{\ln a^2} + \frac{b^{2x}}{\ln b^2} + \frac{2(ab)^x}{\ln ab} + C$. 5. $-\frac{\cos 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} + C$.

6. $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$. 7. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}+C$. 8. $\frac{1}{2\sqrt{6}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right|+C$. 9. $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arcsen}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+C$. 10. $\operatorname{arcsen} x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$. 11. $-x+\operatorname{tg} x+C$. 12. $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. 13. $-\frac{2}{3}\sqrt{2-3x}+C$. 14. $-\left(x+\frac{x^2}{2}\right)-\ln|1-x|+C$. 15. $x-\operatorname{arctg} x+C$. 16. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-x+C$. 17. $x+\ln(1+x^2)+C$. 18. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+C$. 19. $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$. 20. $\frac{x}{2}+\frac{1}{20}\operatorname{sen} 10x+C$. 21. $-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{12}\cos 6x+C$. 22. $\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{16}\operatorname{sen} 8x+C$. 23. $\frac{2}{5}(x-1)^{5/2}+\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}+C$. 24. $2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C$. 25. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$. 26. $x-\ln(1+2e^x)+C$. 27. $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. 28. $\frac{x^2}{4}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$. 29. $-x\cos x+\operatorname{sen} x+C$. 30. $(x-1)e^x+C$. 31. $-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$. 32. $(x^2-2x+2)e^x+C$. 33. $\frac{1}{\sqrt{21}}\times\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{7}}\right)+C$. 34. $\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x\sqrt{5}-\sqrt{2}}{x\sqrt{5}+\sqrt{2}}\right|+C$. 35. $\frac{1}{2}\times\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$. 36. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. 37. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-3-\sqrt{5}}{2x-3+\sqrt{5}}\right|+C$. 38. $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-1}{x+9}\right|+C$. 39. $\ln\frac{|x+5|^5}{(x+3)^2}+C$. 40. $x-2\ln|x^2+4x+5|+3\operatorname{arctg}(x+2)+C$. 41. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^4}+C$. 42. $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-4\sqrt{x+1}+C$. 43. $\operatorname{arcsen}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. 44. $\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+C$. 45. $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|+C$. 46. $\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C$. 47. $\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}|+C$. 48. $-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$. 49. $\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x+C$. 50. $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$. 51. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x+C$. 52. $\frac{x}{2}\cos\alpha-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x+\alpha)+C$. 53. $\operatorname{tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$. 54. $-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$. 55. $(x^2+3)e^x+C$. 56. $-\frac{x-1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+C$. 57. $\frac{1}{13}e^{-2x}(3\operatorname{sen} 3x-2\cos 3x)+C$. 58. $\frac{x}{2}+\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x+C$. 59. $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C$. 60. $x\operatorname{arcsen} x+\sqrt{1-x^2}+C$.

Capítulo XIV

1. 2. 2. 0,2. 3. 1. 4. 4,5. 5. a) e^{y^2}; b) $-e^{x^2}$.
6. 13/6. 7. a) $-\pi$; b) $-e^{-1}$. 8. a) π; b) $\frac{\pi}{2}$; 10. a) 1; b) $\frac{2\pi}{3}$; c) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Capítulo XV

1. $\frac{1}{3}$. 2. $a^2 \ln 2$. 3. $\frac{4}{3}$. 4. πa^2. 5. 1. 6. $2\frac{2}{3}$. 7. $5\frac{1}{3}$. 8. $2-\frac{1}{\ln 2} \approx$ $\approx 0{,}56$. 9. $21\frac{1}{3}$. 9.1. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 10. $17\frac{1}{3}$. 11. $\frac{1}{4}(e^2+1) \approx 2{,}10$. 11.1. $8a$. 12. a^2. 13. $\frac{\pi a^2}{4}$. 14. $\frac{a}{m}\sqrt{1+m^2}$. 15. $8a$. 16. $\frac{h}{6}[AB+ab+(A+a)(B+b)]$. 17. $4\pi R^3/3$. 18. $16\pi/15$. 19. $\pi^2/2$. 20. 2π. 21. $64\pi/15$. 22. $\pi a^2 h/2$. 23. 2π. 24. 25 m; 2,5 m/s. 25. 25 J. 26. $2q_0 l/\pi$. 27. $\approx 17\,400$ J. 28. $2a^3/3$.

Capítulo XVI

1. $z = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$. 2. a) Banda vertical; b) semiplano; c) ángulo; d) interior de un círculo unitario. 3. La imagen del dominio es un triángulo curvilíneo limitado por las curvas: $v^2 = 4(1-u)$, $v^2 = 4(1+u)$, $v = 0$ ($w = u + iv$).

Capítulo XVII

1. a) 1; b) 1. 2. $x = 280$; $y = -310$. 3. 1) $x = t$, $y = 1 - t$ ($-\infty < t < +\infty$) para $\alpha = 2$; 2) no tiene resoluciones para $\alpha \neq 2$. 4. $x = (5-3\alpha)/(25+\alpha)$, $y = 16/(25+\alpha)$, si $\alpha \neq -25$; para $\alpha = -25$ las rectas son paralelas. 5. $x = 39t$, $y = 23t$, $z = 6t$ ($-\infty < t < +\infty$); $x = 39$, $y = 23$, $z = 6$ para $t = 1$. 6. a) 0; b) 12; c) $2x^3$. 7. $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. 8. $D = 84$, $D_x = 14$, $D_y = -84$, $D_z = 70$; $x = \frac{1}{6}$, $y = -1$, $z = \frac{5}{6}$. 9. $x = 17t$, $y = 2t$, $z = -7t$ ($-\infty < t < +\infty$). 10. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ para $\alpha \neq 0$; $x = t$, $y = -t$, $z = -t$ ($-\infty < t < +\infty$) para $\alpha = 0$. 11. $x_1 = 55/127 \approx 0{,}4331$, $x_2 = -248/127 \approx -1{,}9528$, $x_3 = -183/127 \approx -1{,}4403$, $x_4 = -70/127 \approx -0{,}5512$.

Capítulo XVIII

1. $a = 2$; $\alpha = \pi/3$, $\beta = 2\pi/3$, $\gamma = \pi/4$. 2. $F = 10$; $\alpha = \pi/2$, $\beta = 0$, $\gamma = \pi/2$. 3. $\frac{3}{\sqrt{2}}$. 4. 20. 5. $S = 8\sqrt{3}$; $\cos\varphi = 1/7$, $\operatorname{sen}\varphi = \frac{4}{7}\sqrt{3}$. 6. No coplanares.

Capítulo XIX

1. a) Conjunto de planos de coordenadas Oyz y Oxz; b) conjunto del plano de coordenadas Oxy y del plano bisector del diedro que forman los planos de coordenadas Oxz y Oyz; c) dos planos paralelos $y = -2$ e $y = 1$; d) cilindro parabólico; e) recta paralela al eje Ox; f) plano de coordenadas Oyz; g) eje Oz; h) punto O (0, 0, 0). 2. $p = 4$; $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 45°$. 3. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$.

4. $z=3$. 5. $\approx 1{,}31$.

6. 60°, 120°, 135°. 7. $\left(0, -\frac{1}{2}, 0\right)$; $\left(-\frac{1}{3}, 0, -\frac{2}{3}\right)$; $\left(0, -\frac{1}{2}, 0\right)$. 8. $x^2+y^2+z^2-4x+4y-2z=0$. 9. $x=R\cos\alpha\cos\varphi$, $y=R\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $z=R\,\mathrm{sen}\,\alpha$. 10. $a=2$, $b=\sqrt{2}$, $c=\frac{2}{\sqrt{3}}$. 11. $3\sqrt{3/2}$, $\sqrt{3}$. 12. $\frac{x-a\cos t_0}{-a\,\mathrm{sen}\,t_0}=\frac{y-a\,\mathrm{sen}\,t_0}{a\cos t_0}=\frac{z-bt_0}{b}$; $\arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $x^2+y^2=a^2$, $x=a\cos\frac{z}{b}$; $y=a\,\mathrm{sen}\,\frac{z}{b}$.

Capítulo XX

1. a) Banda $|y| \leqslant 1$; b) exterior del círculo $x^2+y^2 \geqslant 1$; c) semiplano $x+y>0$. 2. a) Rectas paralelas; b) rectas que pasan por el origen de las coordenadas, excluyendo este origen; c) hipérbolas cuyos ejes coinciden con los ejes de coordenadas Ox y Oy; d) parábolas de eje común Oy. 3. a) Planos paralelos; b) cilindros circulares de eje común Ox. 4. a) $du=2[(x-y)\,dx-(x+y)\,dy]$; b) $du=\frac{y(y\,dx-x\,dy)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. c) $du=\frac{y\,dx-x\,dy}{2|y|\sqrt{xy}}$. 5. $\frac{\partial u}{\partial l}=2\cos\alpha-\mathrm{sen}\,\alpha$; 2; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; -1; $\frac{-3}{\sqrt{2}}$; -2; $\frac{-1}{\sqrt{2}}$; 1; $\frac{3}{\sqrt{2}}$; 2; $|\mathrm{grad}_z\,(M_0)|=\sqrt{5}$. 6. $|\mathrm{grad}\,u(A)| \approx 50{,}5$ °C/km. 7. a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1+\mathrm{sen}^2 x}{4\sqrt{\mathrm{sen}^3 x}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{x}{y^2}$; b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{6xy}{z^4}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{z^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=-\frac{2y}{z^3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=-\frac{2x}{z^3}$; c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{-1}{(x+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$; d) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2}$. 9. 2,48 kg/m³ ± 0,26 kg/m³.
11. $x=y=z=\sqrt[3]{a}$. 12. Lados del paralelepípedo: $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{a}{\sqrt{3}}$.
13. Lados del paralelepípedo: $\frac{2r\sqrt{2}}{3}$, $\frac{2r\sqrt{2}}{3}$, $\frac{h}{3}$. 14. $y=198{,}77-5{,}06x$.
15. $x^2 \approx 6x-\frac{26}{3}$. 16. $\min u=0=u(-0{,}6;\ -0{,}8)$; $\max u=10=u(0{,}6;\ 0{,}8)$.

Capítulo XXI

1. Divergente. 2. Divergente. 3. Convergente. 4. Convergente. 5. Divergente. 6. Convergente. 7. Convergente. 8. Convergente. 9. Divergente. 10. Convergente. 11. Convergente. 12. Convergente. 13. Convergente. 14. Convergente. 15. Divergente. 16. Convergente. 17. $-1<x \leqslant 1$. 18. $-\infty<x+\infty$.
19. $x=0$. 20. $-1 \leqslant x<3$. 21. $a^x=1+x\ln a+\frac{x^2\ln^2 a}{2!}+\ldots$ $(-\infty<x<$

$<+\infty)$. **22.** $\operatorname{sen}^2 x=\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+\frac{2^5x^6}{6!}-\ldots$ $(-\infty<x<+\infty)$. **23.** $\sqrt{x}=$ $=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2\cdot 4}(x-1)^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}(x-1)^3+\ldots$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$. **24.** $e^{-x^2}=$ $=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\ldots$ $(-\infty<x<+\infty)$. **25.** INDICACIÓN: $\cos^2 x=\frac{1}{2}\times$ $\times(1+\cos 2x)$; $\cos^2 x=1-\frac{2x^2}{2!}+\frac{2^3x^4}{4!}-\frac{2^5x^6}{6!}+\ldots$ $(-\infty<x<+\infty)$. **26.** $\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\ldots$ $(-1<x<1)$. **27.** $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+$ $+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\ldots$ $(-1<x<1)$. **28.** a) 1,649; b) 0,309; c) 1,037. **29.** 0,5450. **30.** $f(x)\approx x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{72}$. **31.** a) $\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{sen} x}{1}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}+$ $+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3}-\ldots$ $(-\pi<x<\pi)$; b) $x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\right.$ $\left.-\ldots\right)$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$.

Capítulo XXII

3. $y=\frac{3}{4}x^2$. **4.** a) $x^2+y^2=C$; b) $xy=C$; c) $y=C+\ln x$; d) $y=-2+Ce^x$; e) $y=-\ln(C-e^x)$. **5.** a) $y^2=2x^2\ln Cx$; b) $y=xe^{1+Cx}$. **6.** $y=\frac{1}{2}(x^2-1)$. **7.** a) $y=\frac{x^3}{2}+Cx$; b) $x=Ce^y-(y^2+2y+2)$. **8.** $y=\operatorname{sen} x$. **9.** $x^2+y^2=C$. **10.** $y=e^{(x-2)/4}$. **11.** $Q_t=Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/1600}$. **12.** 100 g. **13.** $y(2)=1{,}122$; valor exacto de $y(2)=1+e^{-2}=1{,}135$. **14.** $y=C_1+C_2x-\operatorname{sen} x$. **15.** $y=C_1\operatorname{sen}(x+C_2)$. **16.** $y=C_1+\frac{(x+C_2)^2}{4C_1}$. **17.** $y=1+\frac{x}{2}+\frac{x^3}{6}$. **18.** a) $y=1+x+\frac{1}{2}x^2+$ $+\frac{1}{4}x^3+\ldots$; b) $y=x+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{504}x^7+\ldots$ **19.** $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$. **20.** $y=$ $=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x)$. **21.** $y=e^{-x/2}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. **22.** $y=e^{x/2}(C_1+C_2x)$. **23.** $y=2\cos x-\operatorname{sen} x$. **24.** $y=\frac{1}{3}e^{2x}+C_1e^x+C_2e^{-x}$. **25.** $y=\frac{1}{3}\operatorname{sen} x+C_1\cos 2x+C_2\operatorname{sen} 2x$. **26.** $y=\frac{1}{6}x^2+\frac{5}{18}x+\frac{19}{108}+C_1e^{2x}+$ $+C_2e^{3x}$. **27.** $y=1+x-e^x\cos x$. **28.** $x=C_1e^{-pt/2}\cos\left(t\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}+C_2\right)$, donde $q=k_1/m$, $p=k_2/m$ y k_1, k_2 son coeficientes de proporcionalidad.

Capítulo XXIII

1. a) $3\sqrt{5}/2$; b) $(2\sqrt{2}-1)/3$; c) $\pi R^5/4$; d) $a[(\pi+4)\sqrt{2}-8]$. **2.** $3\frac{1}{3}$.

3. πR. 4. $x_0=0$; $y_0=\frac{2}{\pi}R$. 5. $\frac{2^7}{3^6}\cdot\frac{848}{105}\approx 1{,}42$. 6. $I_x=\frac{256}{15}a^3$. 7. a) 16/15; b) 2π; c) 2π. 8. $-9/2$. 9. a) -2; b) 0; c) 3/2; d) e^2-1. 10. $-2\pi ab$. 11. $A=\frac{k}{2}(a^2-b^2)$. 12. $-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. 13. $\ln\frac{b}{a}$. 14. $31\frac{1}{2}$.

Capítulo XXIV

1. a) 3/20; b) $(1-e^{-1})^2$; c) $\pi/2$. 2. a) $4(2\sqrt{2}-1)/15$; b) 2/5; c) 2π. 3. a) $\int_0^1 dx\int_0^{2x} f(x, y)\,dy=\int_0^2 dy\int_{y/2}^1 f(x, y)\,dx$; b) $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x, y)\,dy+\int_1^2 dx\times\int_0^{2-x} f(x, y)\,dy=\int_0^1 dy\int_0^{2-y} f(x, y)\,dx$; c) $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy=\int_0^1 dy\times\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx$; d) $\int_{-2}^2 dx\int_{x^2}^4 f(x, y)\,dy=\int_0^4 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx$; e) $\int_0^2 dx\times\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\,dy=\int_{-1}^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx$. 4. a) $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx$; b) $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x, y)\,dy$; c) $\int_0^1 dy\int_{\operatorname{arcsen} y}^{\pi-\operatorname{arcsen} y} f(x, y)\,dx$. 5. a) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi\int_0^1 r^4\operatorname{sen}\varphi\times\cos^2\varphi\,dr$; b) $\int_{-\operatorname{arctg} 0,5}^{\operatorname{arctg} 0,5} d\varphi\int_0^{2\sec\varphi} r^2\,dr$; c) $\int_0^{\pi/4} d\varphi\int_0^{\operatorname{sen}\varphi/\cos^2\varphi} rf[r(\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi)]\,dr$. 6. a) 1/3; b) 4/21; c) $2-\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$; d) 16/5. 7. a) $2\pi^2$; b) $\pi/4$. 8. a) 1/3; b) $(3\pi-4)/6$; c) 88/105; d) 32/9; e) $2abc/3$. 9. $I_x=I_y=\frac{\pi}{4}R^4$. 10. $x_0=0$, $y_0=\frac{3}{5}a$. 11. 1/48. 12. 28/3.

Capítulo XXV

1. $A+A=A$, $AA=A$, $A+C=A$, $AC=A$. 2. $P(A)=1/6$; $P(B)=1/2$; $P(C)=2/3$. 3. $\geqslant 790$. 4. a) 3/7; b) 1/2. 5. a) 80%; b) $\approx$97%. 6. a) 0,992; b) 0,876; c) 0,008. 8. $P_0=32/243$; $P_1=80/243$; $P_2=80/243$; $P_3=40/243$; $P_4=10/243$; $P_5=1/243$. 9. $\geqslant 31$. 10. $M=1{,}31$; $D=0{,}0049$; $\sigma=0{,}07$. 12. $\Phi(x)=0$ para $-\infty<x<0$; $\Phi(x)=\frac{1}{4}x$ para $0\leqslant x\leqslant 1$; $\Phi(x)=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$ para $1\leqslant x\leqslant 2$; $\Phi(x)=1$ para $2<x<+\infty$; $M(X)=1\frac{1}{4}$; $D(X)=\frac{13}{48}$. 13. $\varphi(x)=\frac{1}{2l}$; $M(X)=0$; $D(X)=\frac{1}{3}l^2$; $\sigma(X)=\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0{,}58l$. 15. $\approx 0{,}384$. 16. El número de los paquetes estándares debe ser de aproximadamente 9540.