N. PISKUNOV

cálculo diferencial e integral

tomo I

Editorial Mir Moscú

ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР •

Н. С. ПИСКУНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

ТОМ

I

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» МОСКВА

N. PISKUNOV

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

3ª edición

TOMO

I

EDITORIAL MIR · MOSCU

Traducido del ruso por el ingeniero
K. MEDKOV

(на испанском языке)

Impreso en la URSS

INDICE

CAPITULO IV. TEOREMAS SOBRE LAS FUNCIONES DERIVABLES

CAPITULO V. ANALISIS DE LA VARIACION DE LAS FUNCIONES

CAPITULO VI. CURVATURA DE UNA CURVA

CAPITULO VII. NUMEROS COMPLEJOS. POLINOMIOS

CAPITULO VIII. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

CAPITULO X. INTEGRAL INDEFINIDA

CAPITULO XI. INTEGRAL DEFINIDA

CAPITULO XII. APLICACIONES GEOMETRICAS Y MECANICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

PREFACIO

La presente obra es la primera versión al idioma español y le sirve de base la séptima edición en ruso.

En esta versión el autor introdujo una serie de suplementos y modificaciones que contribuyen a la mejor asimilación del curso.

Todo el curso está dividido en dos tomos: el primero incluye los capítulos I-XII; el segundo, XIII-XIX.

Los dos primeros capítulos del tomo I, «Número, Variable, Función» y «Límite, Continuidad de la función», están escritos en la forma más breve posible. Algunos problemas que habitualmente se analizan en relación con estas nociones, en el curso dado, sin perjudicar su comprensión, se examinan en capítulos posteriores. Esto da la oportunidad de pasar, cuanto antes posible, al estudio de la noción principal de cálculo diferencial, la derivada, lo que requieren otras asignaturas de la enseñanza superior (la experiencia pedagógica del autor dicta esta distribución del material).

Con el fin de facilitar a los estudiantes la obtención de los conocimientos matemáticos necesarios para el estudio de las disciplinas relacionadas con las máquinas calculadoras y sistemas automáticos (que se estudian actualmente en los centros de enseñanza técnica superior), en el segundo tomo están detalladamente expuestos los siguientes temas: «Integración numérica de las ecuaciones diferenciales y de los sistemas de ecuaciones diferenciales», «Integración de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales», «Noción de la teoría de la estabilidad de Liapunov», «Operador de Hamilton», «Integral de Fourier», etc.

En particular, se ha aumentado el número de problemas que se dan junto con sus soluciones; también se introdujeron varios problemas de elevada dificultad cuya solución requiere el conocimiento más profundo sobre la materia. Los problemas y ejemplos, como también sus soluciones, están elegidos para cada tema de tal forma que contribuyan a la mejor comprensión del curso, circunstancia que además hace el libro más cómodo para aquellas personas que quieren estudiar las matemáticas individualmente y, en particular, para los estudiantes por correspondencia.

En conclusión, expreso mi profunda gratitud a la Editorial Mir por la traducción y publicación de esta mi obra.

N. PISKUNOV

CAPITULO I

NUMERO. VARIABLE. FUNCION

§ 1. NUMEROS REALES. REPRESENTACION DE NUMEROS REALES POR MEDIO DE PUNTOS EN EL EJE NUMERICO

Uno de los conceptos fundamentales de las matemáticas es el número. El concepto de número surgió en la antigüedad, ampliándose y generalizándose con el tiempo.

Los números enteros y fraccionarios, tanto positivos como negativos, así como el número cero, se llaman *números racionales.* El número racional puede expresarse como la razón $\frac{p}{q}$ de dos números enteros p y q. Por ejemplo:

$$\frac{5}{7}; \quad 1,25=\frac{5}{4}.$$

En particular, el número entero p se puede considerar como la razón de dos números enteros $\frac{p}{1}$, por ejemplo:

$$6=\frac{6}{1}; \quad 0=\frac{0}{1}.$$

Los números racionales pueden representarse por fracciones periódicas finitas o por indefinidas. Los números en forma de fracciones decimales indefinidas no periódicas, se denominan *números irracionales*; por ejemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $5-\sqrt{2}$, etc.

La reunión de los números racionales e irracionales se denomina conjunto de números reales. Estos se ordenan según su magnitud, es decir, que para cualquier par de números reales x e y existe una correlación, y sólo una, de las siguientes:

$$x<y, \quad x=y, \quad x>y.$$

Los números reales se pueden expresar por medio de puntos en el eje numérico. Se llama *eje numérico* a una recta infinita en la cual están determinados:

— un punto O que se denomina origen;
— una dirección positiva que se indica con una flecha;
— una escala para medir longitudes.

En general dispondremos el eje numérico en posición horizontal, considerando positiva la dirección hacia la derecha del punto O (origen).

Si el número x_1 es positivo, se representa por el punto M_1. Este se situará a la derecha del punto O a una distancia $OM_1 = x_1$; si el número x_2 es negativo, estará representado por el punto M_2. Este estará situado a la izquierda del punto O, a una distancia $OM_2 = -x_2$ (fig. 1). El punto O representa el número cero. Es evidente que cada

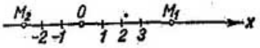

Fig. 1.

número real está representado por un punto en el eje numérico. Dos números reales diferentes están representados en el eje por dos puntos distintos. Es decir, cada punto del eje numérico representa un solo número real, ya sea racional o irracional.

Así pues, entre todos los números reales y puntos del eje numérico existe una correspondencia biunívoca: a cada número le corresponde un solo punto que lo representa en el eje numérico, y recíprocamente, a cada punto corresponde un sólo número. Entonces, «número x» y «punto x» son sinónimos y así los utilizaremos en este manual.

Aceptemos, sin demostración, esta importante propiedad del conjunto de números reales: *entre dos números reales arbitrarios siempre se pueden hallar números, tanto racionales como irracionales.* En lenguaje geométrico esta propiedad se enunciará así: *entre dos puntos arbitrarios del eje numérico siempre podrán situarse puntos, tanto racionales como irracionales.*

Como conclusión, enunciaremos el siguiente teorema que nos servirá, en algún sentido, de «puente entre la teoría y la práctica»:

Teorema. *Todo número irracional α se puede expresar con cualquier grado de precisión por medio de números racionales.*

En efecto, siendo el número irracional $\alpha > 0$, calculemos α con un error no mayor de $\frac{1}{n}$ $\left(\text{por ejemplo, de } \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \text{ etc.}\right)$.

Cualquiera que sea el número α, está comprendido entre dos números enteros consecutivos N y $N+1$. Dividamos el segmento comprendido entre N y $N+1$ en n partes, entonces el número α resultará comprendido entre los números racionales $N + \frac{m}{n}$ y

$N+\frac{m+1}{n}$. Dado que la diferencia entre estos números es $\frac{1}{n}$, cada uno de ellos expresa α con un grado de precisión predeterminado: el primero por defecto, y el segundo por exceso.

Ejemplo: El número irracional $\sqrt{2}$ se expresa por medio de números racionales:

1,4 y 1,5: con un error no mayor de $\frac{1}{10}$;

1,41, y 1,42: con error no mayor de $\frac{1}{100}$;

1,414 y 1,415: con un error no mayor de $\frac{1}{1000}$, etc.

§ 2. VALOR ABSOLUTO DEL NUMERO REAL

Introduzcamos el concepto de valor absoluto del número real. Este concepto es imprescindible para continuar adelante.

Definición. Un número real no negativo, que satisface las condiciones:

$$|x| = x, \text{ si } x \geqslant 0;$$
$$|x| = -x, \text{ si } x < 0.$$

se llama valor absoluto (o módulo) de un número real x (su notación es $|x|$).

Ejemplos: $|2|=2$; $|-5|=5$; $|0|=0$.

De la definición se deduce que para cualquier número x se verifica la correlación $x \leqslant |x|$.

Examinemos algunas propiedades de los valores absolutos.

1. *El valor absoluto de la suma algebraica de varios números reales no es mayor que la suma de los valores absolutos de los sumandos:*

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|.$$

Demostración. Sea $x+y \geqslant 0$. Entonces:

$|x+y| = x+y \leqslant |x|+|y|$ (ya que $x \leqslant |x|$ e $y \leqslant |y|$).

Supongamos ahora que $x+y<0$. Entonces:

$$|x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y) \leqslant |x|+|y|,$$

como se trataba de demostrar.

Esta demostración se puede generalizar fácilmente para cualquier número de sumandos.

Ejemplos:

$$|-2+3| < |-2|+|3| = 2+3 = 5 \quad ó \quad 1<5;$$
$$|-3-5| = |-3|+|-5| = 3+5 = 8 \quad u \quad 8=8.$$

2. *El valor absoluto de la diferencia de dos números no es menor que la diferencia de los valores absolutos del minuendo y sustraendo:*

$$|x - y| \geqslant |x| - |y|.$$

Demostración. Supongamos que $x - y = z$. Entonces $x = y + z$, y según lo demostrado anteriormente, se tiene:

$$|x| = |y + z| \leqslant |y| + |z| = |y| + |x - y|,$$

de donde:

$$|x| - |y| \leqslant |x - y|,$$

como se trataba de demostrar.

3. *El valor absoluto del producto es igual al producto de los valores absolutos de los factores:*

$$|xyz| = |x|\,|y|\,|z|.$$

4. *El valor absoluto del cociente es igual al cociente de dividir el valor absoluto del dividendo por el del divisor:*

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Las dos últimas propiedades provienen directamente de la definición de valor absoluto.

§ 3. MAGNITUDES VARIABLES Y CONSTANTES

Al medir magnitudes físicas: tiempo, longitud, área, volumen, masa, velocidad, presión, temperatura, etc., se obtienen sus valores numéricos. Las matemáticas tratan del estudio de las magnitudes, haciendo abstracción de su contenido concreto. Es por ello que, al hablar de magnitudes, tendremos en cuenta, en lo sucesivo, sus valores numéricos. Hay fenómenos en que algunas magnitudes van cambiando, es decir, alteran su valor numérico y otras lo mantienen constante. Por ejemplo, en el movimiento uniforme de un punto varían el tiempo y la distancia, mientras que la velocidad permanece constante.

Magnitud variable, o simplemente variable, es la que puede adquirir distintos valores numéricos. La magnitud, cuyo valor numérico no se altera, se denomina *constante*. En adelante, las variables se designarán con las letras, x, y, z, u . . ., etc., y las magnitudes constantes con las letras a, b, c . . ., etc.

Observación. En matemáticas, la constante se considera con frecuencia como un caso particular de una magnitud variable cuyos valores numéricos son todos iguales.

Conviene tener en cuenta que, en condiciones físicas concretas, una misma magnitud puede ser constante en un fenómeno y variable en otro. Por ejemplo, la velocidad en el movimiento uniforme es una magnitud constante y en el movimiento uniformemente acelerado, una magnitud variable.

Las magnitudes cuyo valor numérico permanece invariable en cualquier fenómeno se denominan *constantes absolutas*. Por ejemplo, la razón de la longitud de la circunferencia y su diámetro es una magnitud constante, llamada $\pi \approx 3{,}14159$.

Más adelante veremos que el concepto de variable es fundamental en el cálculo diferencial e integral. Federico Engels escribe en «Dialéctica de la naturaleza»: «El punto de viraje de las matemáticas fue la magnitud variable de Descartes. Esto introdujo en las matemáticas el movimiento y, con él, la dialéctica y también, por tanto, y *necesariamente*, el cálculo diferencial e integral».

§ 4. CAMPO DE VARIACION DE LA MAGNITUD VARIABLE

Una magnitud variable puede tomar diversos valores numéricos. Según el problema que se considere, el conjunto de estos valores puede ser también diferente. Por ejemplo, la temperatura del agua, al calentarla en condiciones normales, variará desde 15-18° C hasta

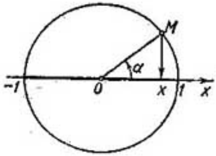

Fig. 2.

el punto de ebullición; es decir, hasta 100° C. La variable $x = \cos\alpha$ puede tomar todos los valores comprendidos entre -1 y $+1$.

Los valores de una magnitud variable se representan geométricamente por medio de puntos en el eje numérico. Por ejemplo, los valores de la variable $x = \cos\alpha$ son representados por un conjunto de puntos del segmento en el eje numérico, desde -1 hasta $+1$, incluyendo estos puntos, para todos los valores de α (fig. 2).

Definición. El conjunto de todos los valores numéricos de la magnitud variable se denomina *campo de variación* de la variable.

Determinemos los siguientes campos de variación de la variable que con frecuencia aparecerán más adelante.

Recibe el nombre de *intervalo* el conjunto de todos los valores numéricos de x comprendidos entre dos números dados a y b ($a < b$), a excepción de los extremos, es decir, a y b no entran en el conjunto analizado de números. La notación del intervalo es: (a, b) o, mediante las desigualdades, $a < x < b$.

El conjunto de todos los valores numéricos de x comprendidos entre los números dados a y b, incluidos estos, es decir, a y b que entran en el conjunto analizado se llama *segmento*. La notación del segmento es: $[a, b]$, o, mediante las desigualdades, $a \leqslant x \leqslant b$. A veces el segmento recibe el nombre de *intervalo cerrado*.

En el caso de que uno de los números, a o b (a, por ejemplo), se una al intervalo, y el otro no, se obtiene un *intervalo semicerrado*, que puede ser expresado por las desigualdades $a \leqslant x < b$ y cuya notación es $[a, b)$. Si se une al intervalo el número b, excluyéndose a, se obtiene el intervalo semicerrado $(a, b]$, que puede expresarse por medio de las desigualdades

$$a < x \leqslant b.$$

Si la variable x adquiere todos los valores posibles, mayores que a, el intervalo se representa por $(a, +\infty)$ y se determina por las desigualdades convencionales

$$a < x < +\infty.$$

De esta misma manera se determinan los intervalos infinitos y los infinitos semicerrados, que son dados por las desigualdades convencionales:

$$a \leqslant x < +\infty; \quad -\infty < x < c; \quad -\infty < x \leqslant c; \quad -\infty < x < +\infty.$$

Ejemplo: El campo de variación de la variable $x = \cos\alpha$, para cualesquiera valores de α, es un segmento $[-1, 1]$ que se determina por las desigualdades $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Las definiciones arriba citadas pueden formularse también utilizando el concepto «punto» en lugar del concepto «número». Por ejemplo:

El conjunto de todos los puntos x comprendidos entre los puntos dados a y b (*extremos del segmento*), cuando estos pertenecen al conjunto considerado, se llama *segmento*.

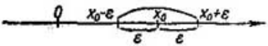

Fig. 3.

El intervalo arbitrario (a, b) que contiene un punto dado x_0, es decir, el intervalo (a, b) cuyos extremos satisfacen la condición $a < x_0 < b$, se denomina *vecindad* de este punto. Con frecuencia ocurre que el intervalo (a, b) es considerado como vecindad (a, b) del punto x_0 en que x_0 es el centro. En este caso, el punto x_0 recibe el nombre de *centro de la vecindad*; la magnitud $\frac{b-a}{2}$ se denomina *radio de la vecindad*. La fig. 3 representa la vecindad $(x_0 - \varepsilon, x + \varepsilon)$ del punto x_0, cuyo radio es ε.

§ 5. VARIABLE ORDENADA. VARIABLES CRECIENTES Y DECRECIENTES. VARIABLE ACOTADA

Por convención, una variable x es *ordenada*, si se conoce su campo de variación y se puede precisar para cada par de sus valores, cuál de ellos es anterior y cuál posterior. Aquí, los conceptos «anterior» y «posterior» no se hallan relacionados con el tiempo, sirviendo sólo como el método de ordenación de los valores de la variable, es decir, el establecimiento de un cierto orden para los valores correspondientes de esta variable.

La sucesión numérica $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k \ldots$, puede considerarse como caso particular de una variable ordenada, donde, siendo $k' < k$, el valor $x_{k'}$ es anterior y el valor x_k posterior, sin dar importancia cuál de estos dos valores sea mayor.

Definición 1. La variable se denomina *creciente*, si cada su valor posterior es mayor que el anterior. Por el contrario, si cada valor posterior es menor que el anterior, la variable se denomina *decreciente*.

Las variables crecientes y decrecientes reciben el nombre de monótonas.

Ejemplo: Al duplicar el número de lados de un polígono regular inscrito en un círculo, el área s de este polígono es una variable creciente. Si duplicamos el número de lados de un polígono regular circunscrito alrededor de un círculo, su área es una variable decreciente. Obsérvese que no toda variable ha de ser forzosamente creciente o decreciente. Por ejemplo, la variable $x = \operatorname{sen} \alpha$ no es monótona, siendo α una magnitud creciente en el segmento $[0, 2\pi]$. Esta crece, al principio, de 0 a 1 y disminuye después de 1 a -1, para luego crecer de nuevo de -1 a 0.

Definición 2. La variable x se denomina magnitud *acotada*, si existe un número constante $M > 0$ tal que, a partir de cierto valor, todos los posteriores satisfagan la condición.

$$-M \leqslant x \leqslant M, \text{ es decir, } |x| \leqslant M.$$

Es decir, una variable se llama acotada, si se puede indicar un segmento $[-M, M]$ tal que, a partir de cierto valor de la misma, todos sus valores posteriores pertenezcan al segmento indicado. Sin embargo, no hay que pensar que la variable tome necesariamente todos los valores del segmento $[-M, M]$. Por ejemplo, una variable que toma diferentes valores racionales en el segmento $[-2, 2]$, es acotada. Sin embargo, ésta no toma en este segmento valores irracionales.

§ 6. FUNCION

Al estudiar diversos fenómenos de la naturaleza y resolver problemas técnicos, y, por consiguiente, matemáticos, surge la necesidad de examinar la variación de una magnitud en dependencia de la variación de otra. Por ejemplo, al estudiar el movimiento, el espacio recorrido se considera como una variable que cambia en dependencia de la variación del tiempo. De este modo el espacio recorrido es *función* del tiempo.

Veamos otro ejemplo. Es sabido que el área de un círculo se expresa por: $Q = \pi R^2$. Si el radio R toma diversos valores numéricos, el área Q tomará también valores diferentes. Como vemos, la variación de una magnitud causa la variación de la otra. En el ejemplo citado, el área Q es función del radio R. Establezcamos el concepto «función».

Definición 1. Si a cada valor de la variable x, perteneciente a cierto campo, le corresponde un sólo valor determinado de otra variable y, entonces ésta será función de x, y podemos escribir simbólicamente:

$$y = f(x), \quad y = \varphi(x), \text{ etc.}$$

La variable x se denomina *variable independiente* o *argumento*. La dependencia que existe entre las variables x e y se llama *funcional*. La letra «f» que entra en la notación simbólica de una dependencia funcional $y = f(x)$ significa que han de realizarse ciertas operaciones con el valor x para obtener el de y. En lugar de $y = f(x)$, $u = \varphi(x)$, etc., a veces se emplea $y = y(x)$, $u = u(x)$, etc., es decir, las letras y, u, etc., representan tanto variable dependiente, como símbolo del conjunto de operaciones que habrán de realizarse con x.

La notación $y = C$, donde C es una constante, significa una función, cuyo valor es constante e igual a C, cualesquiera que sean los valores de x.

Definición 2. El conjunto de los valores de x para los cuales se determinan los valores de la función y, en virtud de la ley $f(x)$, se llama *dominio de definición de la función*.

Ejemplo 1. La función $y = \operatorname{sen} x$ está definida para todos los valores de x. Por lo tanto, su dominio de definición será el intervalo infinito:

$$-\infty < x < +\infty.$$

Observación 1. Si existe una dependencia funcional entre dos variables x e $y = f(x)$ y si éstas se consideran como variables ordenadas, de los dos valores de la función $y^* = f(x^*)$ e $y^{**} = f(x^{**})$, correspondientes a dos valores del argumento x^* y x^{**}, será posterior el valor de la función que corresponda al valor posterior del argumento. De aquí se deduce la siguiente definición.

Definición 3. La función $y = f(x)$ se llama *creciente*, cuando a un mayor valor del argumento x corresponde un mayor valor de la función. De modo análogo se define la función *decreciente*.

Ejemplo 2. La función $Q = \pi R^2$ es creciente cuando $0 < R < +\infty$, puesto que a un valor mayor de R le corresponde un valor mayor de Q.

Observación 2. A veces en la definición del concepto «función» se admite que a cada valor de x, perteneciente a un determinado campo, le corresponde no un sólo valor de y, sino varios valores, e, incluso un número infinito de valores. En este caso la función se denomina multiforme, a diferencia de la función definida anteriormente, y que lleva el nombre de función uniforme. En lo sucesivo tendremos en cuenta sólo las funciones uniformes. Si nos encontramos con una función multiforme haremos una indicación especial.

§ 7. FORMAS DE EXPRESION DE FUNCIONES

I. Forma tabular

En este caso la anotación de los valores del argumento se efectúa en cierto orden: $x_1, x_2, \ldots x_n$. De la misma manera se escriben los valores correspondientes de la función $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

x	x_1	x_2	$\ldots\ldots$	x_n
y	y_1	y_2	$\ldots\ldots$	y_n

De este tipo son las tablas de las funciones trigonométricas, las de logaritmos, etc.

Las tablas que señalan la dependencia funcional que existe entre magnitudes medidas pueden aparecer también, como resultado del estudio experimental de fenómenos. Por ejemplo, en una estación meteorológica, midiendo en un día determinado la temperatura del aire, se obtiene la siguiente tabla:

Valor de la temperatura T (en grados) en función del tiempo t (en horas)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T	0	-1	-2	-2	$-0,5$	1	3	3,5	4

Esta tabla determina T como función de t.

II. Forma gráfica

Dado en el plano del sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas un conjunto de los puntos $M(x, y)$ tal que ningún par de puntos se halla sobre una recta paralela al eje Oy, podemos decir

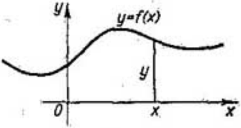

Fig. 4.

que el conjunto mencionado determina una función uniforme $y = f(x)$. Las abscisas de los puntos constituyen los valores del argumento y las ordenadas correspondientes, los de la función (fig. 4).

El conjunto de puntos del plano (xOy), cuyas abscisas representan valores de la variable independiente y las ordenadas, los valores correspondientes de la función, se llama *gráfica* de la función dada.

III. Forma analítica

Primero expliquemos el concepto de «expresión analítica». Se da el nombre de *expresión analítica* a la representación simbólica de un conjunto de ciertas operaciones matemáticas que se realizan en una sucesión determinada con cifras y letras que designan magnitudes constantes y variables. Se entiende por conjunto de operaciones matemáticas no sólo las operaciones elementales (adición, sustracción, extracción de raíz, etc.), sino también las que iremos determinando a medida que avancemos en el curso.

Ejemplos de expresión analítica son:

$$x^4 - 2; \quad \frac{\log x - \operatorname{sen} x}{5x^2 + 1}; \quad 2^x - \sqrt{5 + 3x}, \text{ etc.}$$

Si la dependencia funcional $y = f(x)$ es tal que f designa una expresión analítica, se dice que la función y de x está *expresada analíticamente*. Ejemplos de funciones expresadas analíticamente son: 1) $y = x^4 - 2$; 2) $y = \frac{x+1}{x-1}$; 3) $y = \sqrt{1-x^2}$; 4) $y = \operatorname{sen} x$; 5) $Q = \pi R^2$, etc.

Aquí, las funciones están expresadas analíticamente por medio de una fórmula (se entiende por fórmula la igualdad de dos expresiones analíticas). En estos casos podemos hablar de dominio natural de definición de la función.

El dominio natural de definición de una función expresada analíticamente se compone del conjunto de valores de x para los cuales la expresión analítica, o segundo miembro de la igualdad, adquiere un valor determinado. Así, por ejemplo, como dominio natural de definición de la función $y = x^4 - 2$ tendremos el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$, ya que la función está definida para todos los valores de x. La función $y = \frac{x+1}{x-1}$ está definida para todos los valores de x, menos para $x = 1$, pues, este valor reduce el denominador a cero. Para la función $y = \sqrt{1-x^2}$, el dominio natural de definición está constituido por el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$, etc.

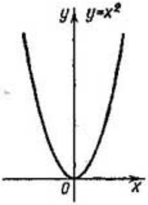

Fig. 5.

Observación. A veces surge la necesidad de examinar no todo el dominio natural de definición de la función, sino parte de él. Así, la dependencia del área Q de un círculo de radio R se determina por la función $Q = \pi R^2$. Al considerar esta fórmula geométrica aparece en calidad de dominio de definición el intervalo infinito $0 < R < +\infty$, mientras que el dominio natural de definición de la función dada es el intervalo infinito $-\infty < R < +\infty$.

Si la función $y = f(x)$ viene expresada analíticamente, puede representarse de manera gráfica en el plano de coordenadas xOy. Así, por ejemplo, la gráfica de la función $y = x^2$ es la parábola representada en la figura 5.

§ 8. FUNCIONES ELEMENTALES FUNDAMENTALES. FUNCIONES ELEMENTALES

Las *funciones elementales fundamentales* expresadas analíticamente son las siguientes:

1. *Función potencial*: $y = x^\alpha$, donde α es un número real *

*) Siendo α un número irracional, esta función se calcula, tomando logaritmos y antilogaritmos: $\log y = \alpha \log x$, suponiendo $x > 0$.

II. *Función exponencial:* $y = a^x$, en la que a es un número positivo, diferente de la unidad.

III. *Función logarítmica:* $y = \log_a x$ en la cual la base a es un número positivo diferente de la unidad.

IV. *Funciones trigonométricas:*

$$y = \operatorname{sen} x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x.$$

$$y = \operatorname{cotg} x,\ y = \sec x,\ y = \operatorname{cosec} x.$$

V. *Funciones trigonométricas inversas:*

$$y = \operatorname{arcsen} x,\ y = \arccos x,\ y = \operatorname{arctg} x,$$

$$y = \operatorname{arccotg} x,\ y = \operatorname{arcsec} x,\ y = \operatorname{arccosec} x.$$

Examinemos los dominios de definición y las gráficas de las funciones elementales fundamentales.

Función potencial. $y = x^{\alpha}$.

1. α es un número entero positivo. La función está definida en el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$. En este caso, para ciertos

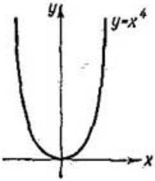

Fig. 6.

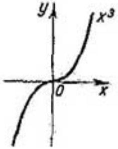

Fig. 7.

valores de α las gráficas de la función toman las formas que se exponen en las figuras 6 y 7.

2. α es un número entero negativo. En este caso, la función está definida para todos los valores de x, excepto para $x = 0$. Las gráficas de la función para ciertos valores de α se exponen en las figuras 8 y 9.

En las figuras 10, 11, 12 tenemos las gráficas de la función potencial cuyos valores de α son números racionales fraccionarios.

Función exponencial, $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Esta función está definida para todos los valores de x. Su gráfica está representada en las figuras 13 y 14.

Función logarítmica, $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

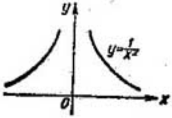

Fig. 8.

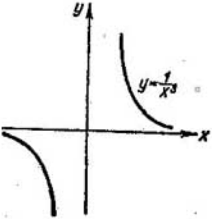

Fig. 9.

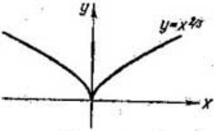

Fig. 10.

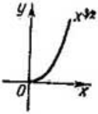

Fig. 11

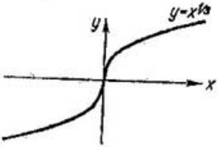

Fig. 12.

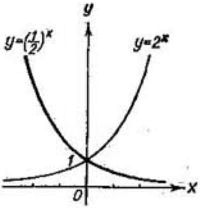

Fig. 13.

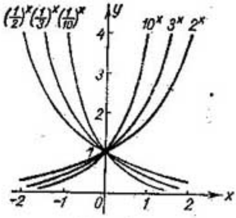

Fig. 14.

Esta función está definida para los valores de $x > 0$. Su gráfica se muestra en la figura 15.

Funciones trigonométricas. En las fórmulas $y = \operatorname{sen} x$, etc., la variable independiente x se expresa en radianes. Todas las funciones trigonométricas indicadas son periódicas. Su definición general es como sigue:

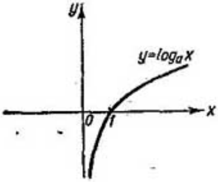

Fig. 15.

Definición 1. La función $y = f(x)$ se denomina *periódica*, si existe un número constante C tal que, al sumarlo (o restarlo) al argumento x, el valor de la función no se altere, $f(x + C) = f(x)$. El valor mínimo de este número constante se denomina *período* de la función; en lo sucesivo lo designaremos por $2l$. Según la definición, la función $y = \operatorname{sen} x$ es periódica, cuyo período es igual a 2π: $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2\pi)$. El período de $\cos x$ es también igual a 2π. Del mismo modo, el período de las funciones $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \operatorname{cotg} x$ es igual a π.

Las funciones $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ están definidas para todos los valores de x. Las funciones $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \sec x$ están definidas

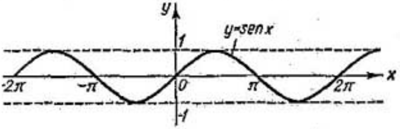

Fig. 16.

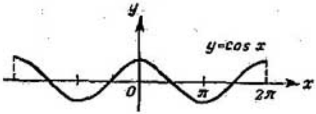

Fig. 17.

en todos los puntos, excepto $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, 1, 2 \ldots)$; las funciones $y = \operatorname{cotg} x$ e $y = \operatorname{cosec} x$ están definidas para todos los valores de x, excepto para $x = k\pi$ $(k = 0, 1, 2 \ldots)$.

Las gráficas de las funciones trigonométricas se muestran en las figuras 15-19. Más adelante examinaremos detalladamente las funciones trigonométricas inversas.

Introduzcamos ahora el concepto de función de función. Si y es una función de u y u depende, a su vez, de una variable x, entonces, y también depende de x.

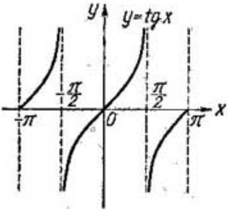

Fig. 18.

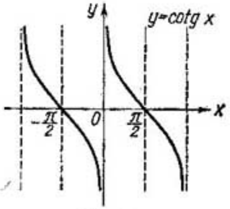

Fig. 19.

Si $y = F(u)$ y $u = \varphi(x)$, la función y de x será:

$$y = F[\varphi(x)].$$

Esta función se denomina *función de función* o *función compuesta.*

Ejemplo 1. Sea $y = \operatorname{sen} u$, $u = x^2$. La función $y = \operatorname{sen}(x^2)$ es una función compuesta de x.

Observación. El dominio de definición de la función $y = F[\varphi(x)]$ está constituido por todo el dominio de la función $u = \varphi(x)$, o bien por la parte de éste en que se definen los valores de u que no salgan fuera del dominio de la función $F(u)$.

Ejemplo 2. El dominio de la función $y = \sqrt{1 - x^2}$ ($y = \sqrt{u}$, $u = 1 - x^2$) es el segmento $[-1, 1]$, ya que $u < 0$ y $|x| > 1$ y, por lo tanto, la función $\sqrt{u}$ no está definida para estos valores de x (aunque la función $u = 1 - x^2$ está definida para todos los valores de x). La gráfica de esta función se representa como la mitad superior de la circunferencia cuyo centro coincide con el origen de coordenadas, siendo el radio de la misma igual a la unidad.

La operación «función de función» puede efectuarse no sólo una vez, sino cualquier número de veces. Por ejemplo, la función $y = \ln[\operatorname{sen}(x^2 + 1)]$ se obtiene, efectuando las siguientes operaciones (es decir, determinando las siguientes funciones):

$$v = x^2 + 1, \quad u = \operatorname{sen} v, \quad y = \ln u.$$

Definamos ahora el concepto de función elemental.

Definición 2. La función que puede ser dada por la fórmula de la forma $y = f(x)$, donde el segundo miembro de la igualdad está compuesto de funciones elementales fundamentales y constantes, mediante un número finito de operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y función de función, se llama *función elemental.*

De está definición se deduce que las funciones expresadas analíticamente son funciones elementales.

Ejemplos de las funciones elementales son:

$$y=\sqrt{1+4\operatorname{sen}^2 x}; \quad y=\frac{\log x+4\sqrt[3]{x}+2\operatorname{tg} x}{10^x-x+10}.$$

Ejemplo de función no elemental:

$y=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ $[y=f(n)]$ es una función no elemental, dado que el número de operaciones que deben efectuarse para calcular y va aumentando a medida que crece n, es decir, el número de operaciones es infinito.

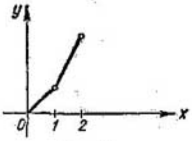

Fig. 20.

Observación. La función expuesta en la figura 20 es elemental aunque viene expresada por dos fórmulas:

$$f(x)=x, \text{ si } 0\leqslant x\leqslant 1; \; f(x)=2x-1, \text{ si } 1\leqslant x\leqslant 2.$$

Es posible demostrar que esta función puede expresarse con una sola fórmula $y=f(x)$, incluida entre las indicadas en la definición 2. (Véanse los ejemplos 139 al 144 de los ejercicios para el capítulo V).

§ 9. FUNCIONES ALGEBRAICAS

Son funciones algebraicas las funciones elementales siguientes:

I. Función racional entera o polinomio

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números constantes que llamamos coeficientes; n es un entero no negativo, llamado grado del polinomio. Evidentemente, la función indicada está definida para todos los valores de x, es decir, en un intervalo infinito.

Ejemplos: 1. $y=ax+b$ es una función lineal. Si $b=0$, la función lineal $y=ax$ expresa la dependencia proporcional de y respecto a x. Si $a=0$, $y=b$, la función es constante.

2. $y=ax^2+bx+c$, es una función cuadrática.

La gráfica de la función cuadrática es una parábola (fig. 21).
Estas funciones han sido estudiadas detalladamente en el curso de geometría analítica.

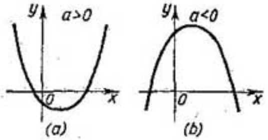

Fig. 21

II. Función racional fraccionaria. Esta función se expresa como la razón de dos polinomios:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}.$$

Como ejemplo de una función racional fraccionaria puede servir

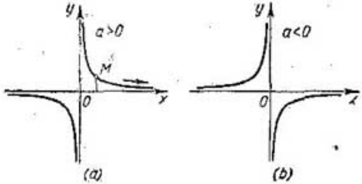

Fig. 22

la función $y = \frac{a}{x}$, que expresa una dependencia inversamente proporcional. Su gráfica se muestra en la figura 22. Es evidente que la función racional fraccionaria está definida para todos los valores de x, excepto para aquellos que reducen el denominador a cero.

III. Función irracional. Si en el segundo miembro de la igualdad $y = f(x)$ se efectúan operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y elevación a potencia, siendo los exponentes números racionales, no enteros, la función de y en dependencia de x se llama *irracional*. Son *irracionales* las funciones siguientes:

$$y = \frac{2x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{1 + 5x^2}}; \qquad y = \sqrt{x}, \text{ etc.}$$

Observación 1. No todas las funciones algebraicas están comprendidas en tres tipos de funciones mencionadas. Se denomina *función algebraica* cualquier función $y = f(x)$ que satisfaga una ecuación de la forma

$$P_0(x)\,y^n + P_1(x)\,y^{n-1} + \ldots + P_n(x) = 0, \qquad (1)$$

donde, $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$ son ciertos polinomios de x.
Se puede demostrar que cada una de las funciones que pertenece a los tres tipos mencionados satisface cierta ecuación de la forma (1); pero no toda función que satisfaga esta ecuación pertenecerá a alguno de los tres tipos denominados.

Observación 2. La función que no es algebraica se llama *transcendente*. Son funciones transcendentes:

$$y = \cos x; \quad y = 10^x, \text{ etc.}$$

§ 10. SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

La posición de un punto en el plano se puede determinar por medio del sistema de *coordenadas polares*.
Elijamos en el plano un punto O, que llamaremos *polo* y una recta o *eje polar*, que tiene su origen en el punto O. La posición de

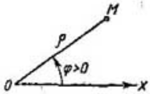

Fig. 23

un punto M en el plano se determina por dos números: ρ y φ. El primero indica la distancia del punto M al polo y el segundo, el valor del ángulo formado por el segmento OM con el eje polar. Para calcular el ángulo φ se considera positiva la dirección contraria a la de las manecillas del reloj. Los números ρ y φ se denominan *coordenadas polares* del punto M (fig. 23).
El radio vector ρ se considera siempre no negativo. Si el ángulo polar φ varía en los límites $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, a cada punto del plano, a excepción del polo, le corresponde un par determinado de números ρ y φ. En el polo, $\rho = 0$ y φ puede tener cualquier valor.
Determinemos la relación que existe entre las coordenadas polares y las rectangulares o cartesianas. Supongamos que el origen de coordenadas rectangulares coincide con el polo y la dirección positiva del eje Ox, con el eje polar. Veamos ahora la relación que existe entre las coordenadas cartesianas y las polares de un mismo punto.

En la figura 24 se ve:

$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho$ sen φ e inversamente $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, tg $\varphi = \frac{y}{x}$.

Observación. Determinando φ hay que tener en cuenta el cuadrante en que se halla el punto y tomar el valor correspondiente de φ.

En el sistema de coordenadas polares la ecuación $\rho = F(\varphi)$ determina una línea.

Ejemplo 1. En coordenadas polares la ecuación $\rho = a$, donde a = const, determina una circunferencia de radio a y centro en el polo. La ecuación

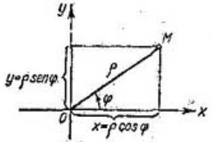

Fig. 24

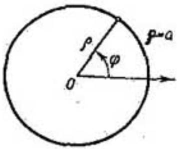

Fig. 25

de la misma circunferencia (fig. 25) en el sistema de coordenadas rectangulares, trazado en la forma expuesta en la figura 24, será:

$$\sqrt{x^2+y^2}=a \text{ ó } x^2+y^2=a^2.$$

Ejemplo 2.

$$\rho = a\varphi, \quad \text{donde} \quad a = \text{const}.$$

Veamos la tabla de valores de ρ para algunos valores de φ:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	3π	4π
ρ	0	$\approx 0{,}78\,a$	$\approx 1{,}57\,a$	$\approx 2{,}36\,a$	$\approx 3{,}14\,a$	$\approx 4{,}71\,a$	$\approx 6{,}28\,a$	$\approx 9{,}42\,a$	$\approx 12{,}56\,a$

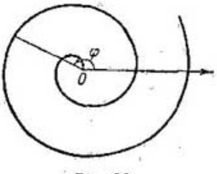

Fig. 26

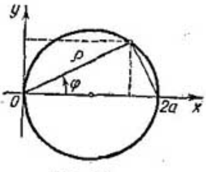

Fig. 27

La curva correspondiente se muestra en la figura 26 y se llama espiral de Arquímedes.

Ejemplo 3.

$$\rho = 2a\cos\varphi.$$

Esta es la ecuación de una circunferencia de radio a y centro en el punto $\rho_0 = a$ y $\varphi = 0$, (fig. 27). Escribamos la ecuación de esta circunferencia en coordenadas rectangulares. Poniendo en esta ecuación $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, obtendremos: $\sqrt{x^2+y^2} = 2a\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, o sea, $x^2+y^2-2ax=0$.

Ejercicios para el capítulo I

1. Dada la función $f(x) = x^2+6x-4$. Comprobar que $f(1) = 3$, $f(3) = 23$.

2. $f(x) = x^2+1$. Calcular los valores:
a) $f(4)$. *Respuesta:* 17. b) $f(\sqrt{2})$. *Respuesta:* 3. c) $f(a+1)$. *Respuesta:* a^2+2a+2. d) $f(a)+1$. *Respuesta:* a^2+2. e) $f(a^2)$. *Respuesta:* a^4+1. f) $[f(a)]^2$. *Respuesta:* a^4+2a^2+1. g) $f(2a)$. *Respuesta:* $4a^2+1$.

3. $\varphi(x) = \frac{x-1}{3x+5}$. Escribir las expresiones: $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ y $\frac{1}{\varphi(x)}$. *Respuesta:* $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-x}{3+5x}$; $\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{3x+5}{1-x}$.

4. $\psi(x) = \sqrt{x^2+4}$. Escríbanse las expresiones $\psi(2x)$ y $\psi(0)$. *Respuesta:* $\psi(2x) = 2\sqrt{x^2+1}$; $\psi(0) = 2$.

5. $f(\theta) = \operatorname{tg}\theta$. Comprobar la igualdad $f(2\theta) = \frac{2f(\theta)}{1-[f(\theta)]^2}$.

6. $\varphi(x) = \log\frac{1-x}{1+x}$. Comprobar la igualdad $\varphi(a)+\varphi(b) = \varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

7. $f(x) = \log x$; $\varphi(x) = x^3$. Escribir las expresiones: a) $f[\varphi(2)]$. *Respuesta:* $3\log 2$. b) $f[\varphi(a)]$. *Respuesta:* $3\log a$. c) $\varphi[f(a)]$. *Respuesta:* $[\log a]^3$.

8. Hallar el dominio natural de definición de la función $y = 2x^2+1$. *Respuesta:* $-\infty < x < +\infty$.

9. Hallar los dominios naturales de definición de las funciones: a) $\sqrt{1-x^2}$. *Respuesta:* $-1 \leqslant x \leqslant +1$. b) $\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{7-x}$. *Respuesta:* $-3 \leqslant x \leqslant 7$. c) $\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[5]{x-b}$. *Respuesta:* $-\infty < x < +\infty$ d) $\frac{a+x}{a-x}$. *Respuesta:* $x \neq a$. e) $\operatorname{arcsen}^2 x$. *Respuesta:* $-1 \leqslant x \leqslant 1$. f) $y = \log x$. *Respuesta:* $x > 0$. g) $y = a^x$ $(a > 0)$. *Respuesta:* $-\infty < x < +\infty$.

Construir las gráficas de las funciones:

10. $y = -3x+5$. 11. $y = \frac{1}{2}x^2+1$. 12. $y = 3-2x^2$. 13. $y = x^2+2x-1$.
14. $y = \frac{1}{x-1}$. 15. $y = \operatorname{sen} 2x$. 16. $y = \cos 3x$. 17. $y = x^2-4x+6$. 18. $y = \frac{1}{1-x^2}$.
19. $y = \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. 20. $y = \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$. 21. $y = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$. 22. $y = \operatorname{cotg}\frac{1}{4}x$.
23. $y = 3^x$. 24. $y = 2^{-x^2}$. 25. $y = \log_2\frac{1}{x}$. 26. $y = x^3+1$. 27. $y = 4-x^3$.

28. $y=\frac{1}{x^2}$. 29. $y=x^4$. 30. $y=x^5$. 31. $y=x^{\frac{1}{2}}$. 32. $y=x^{-\frac{1}{2}}$. 33. $y=x^{\frac{1}{3}}$.
34. $y=|x|$. 35. $y=\log_2|x|$. 36. $y=\log_2(1-x)$. 37. $y=3\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.
38. $y=4\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

39. La función $f(x)$ está definida en el segmento $[-1; 1]$ del modo siguiente:

$$f(x)=1+x \quad \text{para} \quad -1\leqslant x\leqslant 0;$$
$$f(x)=1-2x \quad \text{para} \quad 0\leqslant x<1.$$

40. La función $f(x)$ está definida en el segmento $[0; 2]$ del modo siguiente:

$$f(x)=x^3 \quad \text{para} \quad 0\leqslant x\leqslant 1;$$
$$f(x)=x \quad \text{para} \quad 1\leqslant x\leqslant 2.$$

Construir las curvas dadas por ecuaciones polares:

41. $\rho=\frac{a}{\varphi}$ (espiral hiperbólica). 42. $\rho=a^{\varphi}$ (espiral logarítmica). 43. $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (lemniscata). 44. $\rho=a(1-\cos\varphi)$ (cardioide). 45. $\rho=a\operatorname{sen}3\varphi$.

CAPITULO II

LIMITE. CONTINUIDAD DE LA FUNCION

§ 1. LIMITE DE LA MAGNITUD VARIABLE. VARIABLE INFINITAMENTE GRANDE

En este párrafo trataremos de las magnitudes ordenadas que varían de un modo especial, determinado por la expresión «la variable tiende a un límite». A continuación el concepto de límite de la variable desempeñará un papel fundamental ya que con él están relacionados los conceptos fundamentales del análisis matemático: derivada, integral, etc.

Definición 1. El número constante a se denomina *límite* de la variable x, si para cualquier número infinitesimal positivo ε prefijado, se puede indicar tal valor de la variable x, a partir del cual todos los valores posteriores de la misma satisfacen la desigualdad

$$|x-a|<\varepsilon.$$

Si el número a es el límite de la variable x, se dice que x tiende al límite a; su notación es:

$$x \to a \text{ ó } \lim x = a.$$

En términos geométricos la definición de límite puede enunciarse así: el número constante a es el *límite* de la variable x, si para cualquiera vecindad infinitesimal prefijada de radio ε y centro en el punto a, existe un valor de x tal que todos los puntos correspondientes a los valores posteriores de la variable se encuentren dentro de la misma vecindad (fig. 28). Examinemos algunos ejemplos de variables que tienden al límite.

Ejemplo 1. La variable x toma sucesivamente los valores $x_1=1+1$; $x_2=1+\frac{1}{2}$; $x_3=1+\frac{1}{3}$; ...; $x_n=1+\frac{1}{n}$; ...

Comprobemos que esta variable tiene por límite la unidad.

Tenemos:

$$|x_n-1|=\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right|=\frac{1}{n}.$$

Para cualquier ε todos los valores posteriores de la variable, a partir de n, donde $\frac{1}{n}<\varepsilon$ ó $n>\frac{1}{\varepsilon}$, satisfacen la desigualdad $|x_n-1|<\varepsilon$, que es lo que se trataba de demostrar.

Observemos que, en este caso, la variable tiende al límite decreciendo al mismo tiempo.

Ejemplo 2. La variable x toma sucesivamente los valores

$$x_1=1-\frac{1}{2};\quad x_2=1+\frac{1}{2^2};\quad x_3=1-\frac{1}{2^3};$$

$$x_4=1+\frac{1}{2^4};\ \ldots;\ x_n=1+(-1)^n\frac{1}{2^n};\ \ldots$$

El límite de esta variable es la unidad. En efecto,

$$|x_n-1|=\left|\left(1+(-1)^n\frac{1}{2^n}\right)-1\right|=\frac{1}{2^n}$$

Para cualquier ε, a partir de n, que satisface la correlación $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$, y de la cual se deduce que

$$2^n>\frac{1}{\varepsilon},\quad n\log 2>\log\frac{1}{\varepsilon}\quad \text{ó}\quad n>\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log 2},$$

todos los valores posteriores de x satisfarán la correlación

$$|x_n-1|<\varepsilon.$$

En el caso considerado, la variable tiende al límite «oscilando alrededor de él», es decir, tomando valores unas veces mayores y otras, menores que éste.

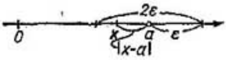

Fig. 28

Observación 1. En el capítulo 1, § 3, se ha indicado que la magnitud constante c se considera frecuentemente como una variable cuyos valores son siempre iguales: $x = c$.

Es evidente que el límite de la constante será igual a la misma constante, dado que siempre se cumple la desigualdad $|x-c| = |c-c| = 0 < \varepsilon$, independientemente del valor que tenga ε.

Observación 2. De la definición de límite se deduce que una magnitud variable no puede tener dos límites. En efecto, si $\lim x = a$ y $\lim x = b$ $(a < b)$, entonces x debe satisfacer las dos desigualdades simultáneamente: $|x - |a < \varepsilon$ y $|x-b| < \varepsilon$ siendo ε arbitrariamente pequeño, pero esto es imposible, si $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ (fig. 29).

Observación 3. No toda variable tiene límite. Supongamos que la variable x toma sucesivamente los siguientes valores:

$$x_1=\frac{1}{2}; \quad x_2=1-\frac{1}{4}; \quad x_3=\frac{1}{8}; \ \ldots; \ x_{2k}=1-\frac{1}{2^{2k}};$$

$$x_{2k+1}=\frac{1}{2^{2k+1}}$$

(fig. 30). Siendo k lo suficientemente grande, el valor x_{2k} y todos los valores posteriores, de subíndices pares, se diferenciarán de la unidad en una cantidad tan pequeña como se quiera, mientras que

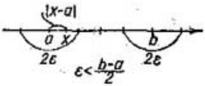

Fig. 29

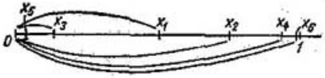

Fig. 30

el valor siguiente x_{2k+1} y todos los valores posteriores de x, de subíndices impares, irán diferenciándose de cero en una cantidad tan pequeña como se desee. Por tanto, la variable x no tiende al límite.

En la definición de límite se indica que si una variable tiende al límite a, éste debe ser un número constante. Pero el concepto «tiende» se usa también para caracterizar otro tipo de variación de la variable, como veremos en la definición que sigue.

Definición 2. La variable x tiende al infinito, si para cualquier numero positivo M prefijado se puede elegir un valor de x tal que, a partir de él todos los valores posteriores de la variable satisfagan la desigualdad $|x|>M$.

La variable x que tiende al infinito, se denomina *infinitamente grande* y esta tendencia se expresa así: $x\to\infty$.

Ejemplo 3. La variable x que toma los valores:

$$x_1=-1; \quad x_2=2; \quad x_3=-3; \ \ldots; \ x_n=(-1)^n n; \ \ldots$$

es infinitamente grande, ya que para cualquier valor de $M>0$ todos los valores de la variable, a partir de uno de ellos, son mayores en valor absoluto que M.

La variable x «tiende al infinito con signo «más», $x\to+\infty$, si M es un número positivo cualquiera de tal manera que, a partir de cierto valor, todos los valores posteriores de la variable sastifagan la desigualdad $M<x$.

Como ejemplo de una variable que tiende al infinito con signo «más» puede servir la variable x que toma los valores $x_1=1$, $x_2=2$, ..., $x_n=n$.

La variable x tiende al inifinito con signo «menos» $x \to -\infty$, si M es un número positivo cualquiera de tal manera que todos los valores sucesivos de la variable, a partir de alguno de ellos, satisfagan la desigualdad $x < -M$.
Por ejemplo, la variable x, que toma los valores $x_1 = -1$, $x_2 = -2, \ldots$ $\ldots, x_n = -n, \ldots$, tiende a $-\infty$.

§ 2. LIMITE DE LA FUNCION

Examinemos algunos casos de variación de una función cuando el argumento x tiende a un límite a o al infinito.

Definición 1. Supongamos que la función $y = f(x)$ está definida en determinada vecindad del punto a o en ciertos puntos de la misma.

La *función* $y = f(x)$ *tiende al límite* b ($y \to b$) *cuando* x *tienda a* a ($x \to a$), si para cada número positivo ε, por pequeño que éste sea, es posible indicar un número positivo δ tal que para todos los valores de x, diferentes de a, que satisfacen la desigualdad* $|x - a| < \delta$, se verificará la desigualdad:

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

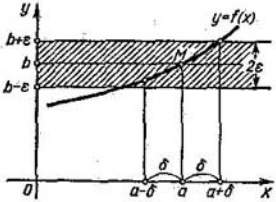

Fig. 31

Si b es el *límite de la función* $f(x)$, cuando $x \to a$, su notación es:

$$\lim_{x \to a} f(x) =$$

o bien $f(x) \to b$, cuando $x \to a$.

Si $f(x) \to b$, cuando $x \to a$, entonces en la gráfica de la función $y = f(x)$ esto se interpreta así (fig. 31): puesto que de la desigualdad $|x - a| < \delta$ se deduce $|f(x) - b| < \varepsilon$, entonces, todos los puntos M en la gráfica de la función $y = f(x)$, correspondientes a los puntos x que se encuentran a una distancia no mayor que δ del punto a, se localizarán dentro de una banda de ancho 2ε, limitada por las rectas $y = b - \varepsilon$ e $y = b + \varepsilon$.

Observación 1. El límite de la función $f(x)$, cuando $x \to a$, se puede definir también del modo siguiente.

---

*) Aquí se tienen en consideración aquellos valores de x que, satisfaciendo la desigualdad $|x - a| < \delta$, pertenecen al dominio de definición de la función. En adelante, consideraciones de este tipo las encontraremos con frecuencia. Así, al examinar la variación de una función, cuando $x \to \infty$, puede ocurrir que la función esté definida sólo para valores enteros y positivos de x. Por consiguiente, en este caso x tiende al infinito, tomando sólo valores enteros positivos. En lo sucesivo prescindiremos de explicaciones de este tipo.

Supongamos que la variable x está ordenada de tal manera que si

$$|x^* - a| > |x^{**} - a|,$$

entonces, x^{**} es valor posterior, y x^*, el anterior. Pero si

$$|\bar{x}^* - a| = |\bar{x}^{**} - a| \text{ y } \bar{x}^* < \bar{x}^{**},$$

entonces $\bar{x}^{**}$ será el valor posterior y $\bar{x}^*$, el anterior.

En otras palabras, de los dos puntos en el eje numérico, será posterior el que esté más cerca del punto a; si son equidistantes será posterior el que se encuentre a la derecha del punto a.

Supongamos que la variable x, ordenada del modo indicado, *tiende al límite* a [$x \to a$ ó $\lim x = a$].

Examinemos ahora la variable $y = f(x)$. En este caso y en lo sucesivo consideraremos que de dos valores de la función, posterior será el que corresponda al valor posterior del argumento.

Si la variable y definida del modo indicado, tiende a un límite b, cuando x tiende a a, escribiremos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

En este caso diremos que la función $y = f(x)$ tiende al límite b, cuando $x \to a$.

Es fácil demostrar que las dos definiciones de límite de la función son equivalentes.

Observación 2. Si $f(x)$ tiende al límite b_1, cuando x tiende a cierto número a de modo que x toma sólo valores inferiores a éste, su notación es $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b_1$, siendo b_1 el *límite de la función* $f(x)$ en *el punto* a *«por la izquierda»*. En caso de que x tome sólo valores mayores que a, la notación será $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b_2$, siendo b_2 el límite de la función en el punto a «por la derecha» (fig. 32).

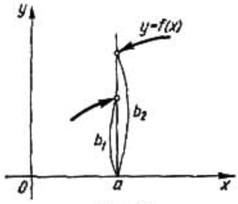

Fig. 32

Se puede demostrar que, si los límites «por la izquierda» y «por la derecha» existen y son iguales, es decir, si $b_1 = b_2 = b$, *entonces* b *será el límite de esta función en el punto* a *en el sentido que acabamos de exponer. Y recíprocamente, si existe el límite* b *de la función en el punto* a, *existen también límites de la función en el punto* a *«por la derecha» y «por la izquierda» que son iguales.*

Ejemplo 1. Demostremos que $\lim\limits_{x \to 2} (3x + 1) = 7$. En efecto, supongamos que está dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$; para que se cumpla la desigualdad

$$|(3x+1)-7| < \varepsilon,$$

es necesario que sean cumplidas las desigualdades siguientes:

$$|3x-6| < \varepsilon, \quad |x-2| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad -\frac{\varepsilon}{3} < x-2 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De este modo, cualquiera que sea ε, para todos los valores de x que satisfagan la desigualdad $|x-2| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$. El valor de la función $3x + 1$ se diferenciará de 7 en una magnitud menor que ε. Esto significa que 7 es el límite de la función cuando $x \to 2$.

Observación 3. Para que exista el límite de la función, cuando $x \to a$, no es necesario que la función esté definida en el punto $x = a$. Cuando se busca el límite, se examinan los valores de la función, diferentes de a, en la vecindad del punto a. Examinemos el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2. Demostremos que $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$.

Aquí la función $\frac{x^2-4}{x-2}$ no está definida en el punto $x = 2$.

Es necesario demostrar que, siendo ε un número cualquiera arbitrario, se encontrará tal δ que se cumpla la desigualdad

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| < \varepsilon, \tag{1}$$

a condición de que $|x-2| < \delta$. Pero cuando $x \neq 2$, la desigualdad (1) es equivalente a:

$$\left|\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} - 4\right| = |(x+2)-4| < \varepsilon.$$

ó

$$|x-2| < \varepsilon. \tag{2}$$

Así pues, siendo ε arbitrario, la desigualdad (1) se verificará, si se cumple la desigualdad (2) (aquí, $\delta = \varepsilon$).

Esto significa que la función dada tiene por límite el número 4, cuando $x \to 2$.

Examinemos algunos casos de variación de la función, cuando $x \to \infty$.

Definición 2. *La función $f(x)$ tiende al límite b cuando $x \to \infty$,* si para cualquier número positivo ε arbitrariamente pequeño existe un número positivo N tal que para todos los valores de x que satisfacen la desigualdad $|x| > N$, se cumpla la desigualdad

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Ejemplo 3. Demostremos que

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) = 1, \text{ o bien } \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1.$$

Para ello es necesario demostrar que siendo ε un número arbitrario se cumplirá la desigualdad

$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right|<\varepsilon, \tag{3}$$

siempre que $|x|>N$, dependiendo N de la elección de ε.

La desigualdad (3) es equivalente a otra: $\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$, que se cumplirá a condición de que

$$|x|>\frac{1}{\varepsilon}=N.$$

Esto significa que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$ (fig. 33).

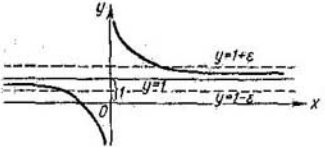

Fig. 33

Conociendo el sentido de los símbolos $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$, es evidente el significado de las expresiones:

«$f(x)$ tiende a b cuando $x\to+\infty$» y

«$f(x)$ tiende a b cuando $x\to-\infty$»,

las cuales simbólicamente se escriben así:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b.$$

§ 3. FUNCION QUE TIENDE AL INFINITO. FUNCIONES ACOTADAS

Hemos examinado los casos en los que la función $f(x)$ tiende a cierto límite b, cuando $x\to a$ ó $x\to\infty$.

Examinemos ahora el caso cuando la función $y=f(x)$ tiende al infinito, para una determinada forma de variación del argumento.

Definición 1. La función $f(x)$ tiende al infinito cuando $x\to a$, es decir, es una magnitud *infinitamente grande* cuando $x\to a$, si para cualquier número positivo M, por grande que sea, existe un valor $\delta>0$ tal que para todos los valores de x diferentes de a y que satisfacen la condición $|x-a|<\delta$, se cumpla la desigualdad $|f(x)|>M$.

Si $f(x)$ tiende al infinito cuando $x \to a$, se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

ó $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a$.

Si $f(x)$ tiende al infinito, cuando $x \to a$, tomando sólo valores positivos, o bien sólo negativos, se escribe, respectivamente: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ó $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Ejemplo 1. Demostremos que $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$.

En efecto, para cualquier $M > 0$ tenemos:

$$\frac{1}{(1-x)^2} > M,$$

siempre que:

$$(1-x)^2 < \frac{1}{M}, \quad |1-x| < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta.$$

La función $\frac{1}{(1-x)^2}$ toma sólo valores positivos (fig. 34).

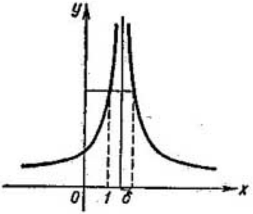

Fig. 34

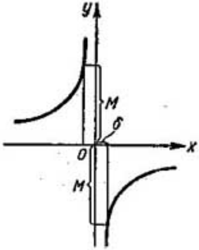

Fig. 35

Ejemplo 2. Demostremos que $\lim\limits_{x\to 0} \left(-\frac{1}{x}\right) = \infty$. En efecto, para cualquier $M > 0$ tenemos:

$$\left|-\frac{1}{x}\right| > M,$$

siempre que:

$$|x| = |x-0| < \frac{1}{M} = \delta.$$

Aquí $\left(-\frac{1}{x}\right) > 0$, para $x < 0$ y $\left(-\frac{1}{x}\right) < 0$, para $x > 0$ (fig. 35).

Si la función $f(x)$ tiende al infinito cuando $x \to \infty$, se escribe:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty,$$

y, en particular, puede suceder:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Por ejemplo,

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty, \quad \text{etc.}$$

Observación 1. No es forzoso que la función $y = f(x)$ tienda a un límite finito o al infinito, cuando $x \to a$ o $x \to \infty$.

Ejemplo 3. La función $y = \operatorname{sen} x$, definida en el intervalo ilimitado $-\infty < x < +\infty$, cuando $x \to \infty$, no tiende a un límite finito, ni al infinito (fig. 36).

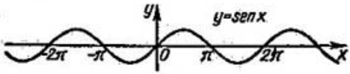

Fig. 36

Ejemplo 4. La función $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, definida para todos los valores de x, excepto $x = 0$, no tiende a un límite finito, ni tampoco al infinito, cuando $x \to 0$. La gráfica de esta función se expone en la fig. 37.

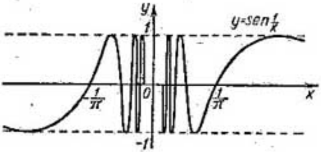

Fig. 37

Definición 2. La función $y = f(x)$ se denomina *acotada* en el dominio dado de variación del argumento x, si existe un número positivo M tal que para todos los valores de x pertenecientes al dominio considerado se cumpla la desigualdad $|f(x)| \leqslant M$. Si el número M no existe, se dice que la función $f(x)$ no está acotada en el dominio dado.

Ejemplo 5. La función $y = \operatorname{sen} x$, definida en el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$, es una función acotada, dado que para todos los valores de x se verifica:

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant 1 = M.$$

Definición 3. La función $f(x)$ se denomina *acotada, cuando* $x \to a$, si existe una vecindad con centro en el punto a en la cual dicha función está acotada.

Definición 4. La función $y = f(x)$ se denomina *acotada, cuando* $x \to \infty$, si existe un número $N > 0$ tal que para todos los valores de x que satisfacen la desigualdad $|x| > N$, la función $f(x)$ esté acotada.

El problema del acotamiento de la función que tiende a un límite se resuelve por medio del siguiente teorema.

Teorema 1. *Si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, *siendo* b *un número finito, la función* $f(x)$ *está acotada cuando* $x \to a$.

Demostración. De la igualdad $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ se deduce que para cualquier $\varepsilon > 0$ se encontrará un número δ tal que en la vecindad $a - \delta < x < a + \delta$ se cumpla la desigualdad

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

o sea,

$$|f(x)| < |b| + \varepsilon.$$

Esto significa que la función $f(x)$ está acotada, cuando $x \to a$.

Observación 2. De la definición de función acotada $f(x)$ se deduce que si

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \text{ ó } \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty,$$

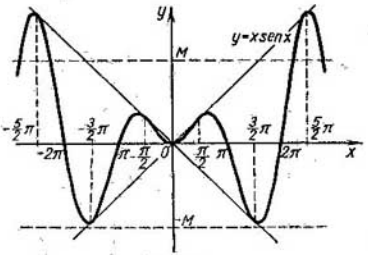

Fig. 38

es decir, si $f(x)$ es infinitamente grande, esta función no está acotada. La notación recíproca no es cierta; es decir, que una función no acotada puede no ser infinitamente grande.

Por ejemplo, la función $y = x \operatorname{sen} x$, cuando $x \to \infty$ no está acotada, ya que para cualquier $M > 0$ se pueden encontrar valores de x tales que $| x \operatorname{sen} x | > M$. Pero la función $y = x \operatorname{sen} x$ no es infinitamente grande, pues se reduce a cero, cuando $x = 0, \pi, 2\pi$ .. La gráfica de la función $y = x \operatorname{sen} x$ está expuesta en la fig. 38.

Teorema 2. *Si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) - b \neq 0$, *la función* $y = \dfrac{1}{f(x)}$ *está acotada, cuando* $x \to a$.

Demostración. De la hipótesis del teorema se deduce que para cualquier $\varepsilon > 0$ arbitrario, en cierta vecindad del punto $x = a$ tendremos: $| f(x) - b | < \varepsilon$, ó $|| f(x) | - | b || < \varepsilon$, ó $-\varepsilon < | f(x) | - | b | < \varepsilon$ ó $| b | - \varepsilon < | f(x) | < | b | + \varepsilon$. De las últimas desigualdades se deduce:

$$\frac{1}{|b| - \varepsilon} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{1}{|b| + \varepsilon}.$$

Al tomar, por ejemplo, $\varepsilon = \frac{1}{10} | b |$, tenemos

$$\frac{10}{9|b|} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{10}{11|b|},$$

lo que significa que la función $\dfrac{1}{f(x)}$ está acotada.

§ 4. INFINITESIMALES Y SUS PRINCIPALES PROPIEDADES

Examinemos en este párrafo las funciones que tienden a cero, para cierto modo de variación del argumento.

Definición. La función $\alpha = \alpha(x)$ se denomina *infinitamente pequeña* (*infinitesimal*), cuando $x \to a$ o cuando $x \to \infty$, si $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ ó $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$.

De la definición de límite se deduce que si, por ejemplo, $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, esto significa que, para cualquier número positivo ε prefijado y arbitrariamente pequeño, se encontrará $\delta > 0$ tal que para todos los x que satisfacen la condición $| x - a | < \delta$, se verifique la condición $| \alpha(x) | < \varepsilon$.

Ejemplo 1. La función $\alpha = (x-1)^2$ es infinitamente pequeña, cuando $x \to 1$, dado que $\lim\limits_{x \to 1} \alpha = \lim\limits_{x \to 1} (x-1)^2 = 0$ (fig. 39).

Ejemplo 2. La función $\alpha=\frac{1}{x}$ es infinitamente pequeña, cuando $x\to\infty$ (fig. 40) (véase el ejemplo 3 en el § 2).

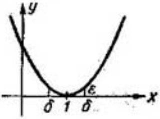

Fig. 39

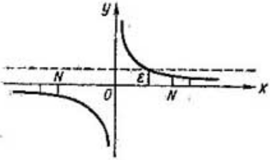

Fig. 40

Tendrá mucha importancia en adelante la correlación siguiente:

Teorema 1. *Si la función $y = f(x)$ puede ser representada como suma del número constante b y la magnitud infinitamente pequeña* α:

$$y = b + \alpha, \tag{1}$$

se tiene que

$$\lim y = b \text{ (cuando } x \to a \text{ ó } x \to \infty).$$

Recíprocamente, *si* $\lim y = b$, *se puede escribir* $y = b + \alpha$, *donde* α *es una magnitud infinitamente pequeña.*

Demostración. De la igualdad (1) se deduce que $|y - b| = |\alpha|$. Pero cuando ε es arbitrario todos los valores de α, a partir de uno de ellos, satisfacen la desigualdad $|\alpha| < \varepsilon$; entonces, para todos los valores de y, a partir de alguno de ellos, se cumplirá la desigualdad $|y - b| < \varepsilon$, lo que significa que $\lim y = b$.

Recíprocamente: si $\lim y = b$, entonces, para ε arbitrario para todos los valores de y, a partir de uno de ellos, se verificará la desigualdad $|y - b| < \varepsilon$. Pero, si designamos $y - b = \alpha$, entonces, para todos los valores de α, a partir de alguno de ellos, tendremos $|\alpha| < \varepsilon$, lo que significa que α es una magnitud infinitamente pequeña.

Ejemplo 3. Dada la función $y=1+\frac{1}{x}$ (fig. 41), es evidente que $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$.

Recíprocamente, si $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$, la variable y puede ser representada como suma del límite 1 y la infinitesimal $\alpha=\frac{1}{x}$, es decir, $y=1+\alpha$.

Teorema 2. *Si* $\alpha = \alpha(x)$ *tiende a cero, cuando* $x \to a$ *(o cuando* $x \to \infty$*), sin reducirse a cero, se tendrá que* $y = \frac{1}{\alpha}$ *tiende al infinito.*

Demostración. Por grande que sea $M > 0$, se cumplirá la desigualdad $\frac{1}{|\alpha|} > M$, siempre que se cumpla $|\alpha| < \frac{1}{M}$. La última desigualdad se cumplirá para todos los valores de α, a partir de alguno de ellos, puesto que $\alpha(x) \to 0$.

Teorema 3. *La suma algebraica de dos, tres o un número determinado de infinitesimales es una función infinitamente pequeña.*

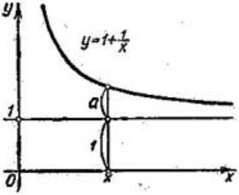

Fig. 41

Demostración. Nos limitaremos a dos sumandos, ya que la demostración es análoga para cualquier número de ellos.

Supongamos que $u(x) = \alpha(x) + \beta(x)$, donde $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} \beta(x) = 0$. Demostremos que para cualquier $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se quiera, se encontrará $\delta > 0$ tal que, al satisfacer la desigualdad $|x - a| < \delta$, se verifique $|u| < \varepsilon$. Puesto que $\alpha(x)$ es una magnitud infitamente pequeña se encontrará δ tal que en la vecindad de radio δ_1 y centro ubicado en el punto a, se verificará, también, $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Puesto que $\beta(x)$ es una magnitud infinitamente pequeña, en la vecindad del punto a de radio δ_2 tendremos $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tomemos δ igual a la menor de las magnitudes δ_1 y δ_2. Entonces, en la vecindad del punto a de radio δ se cumplirán las desigualdades $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$; $|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto, en esta vecindad tendremos:

$$|u| = |\alpha(x) + \beta(x)| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

es decir, $|u| < \varepsilon$, lo que se trataba de demostrar.

De un modo análogo se demuestra el caso:

$$\lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \beta(x) = 0.$$

Observación. En lo sucesivo tendremos que examinar las sumas de magnitudes infinitamente pequeñas en las que, al ir disminuyendo cada sumando, vaya creciendo el número de éstos. En este caso el teorema puede no ser válido.

Examinemos, por ejemplo, $u = \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x}}_{x \text{ sumandos}}$, donde x toma sólo valores enteros positivos ($x = 1, 2, 3, \ldots, n \ldots$). Es evidente que cada sumando, cuando $x \to \infty$, es una magnitud infinitamente pequeña, sin que lo sea la suma $u = 1$.

Teorema 4. *El producto de una función infinitamente pequeña $\alpha = \alpha(x)$ por una función acotada $z = z(\alpha)$, cuando $x \to a$ (ó $x \to \infty$), es una magnitud (función) infinitamente pequeña.*

Demostración. Demostremos el teorema para el caso en que $x \to a$. Dado un número $M > 0$, se encontrará tal vecindad del punto $x = a$ en la que se verificará la desigualdad $|z| < M$. Para cualquier $\varepsilon > 0$ se encontrará una vecindad en la que se cumplirá la desigualdad $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{M}$. En la menor de estas dos vecindades se cumplirá la desigualdad

$$|\alpha z| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

Esto quiere decir que αz es una magnitud infinitamente pequeña. Para el caso de $x \to \infty$, la demostración se efectúa de modo análogo. Del teorema demostrado se deducen dos corolarios.

Corolario 1. Si $\lim \alpha = 0$ y $\lim \beta = 0$, entonces $\lim \alpha\beta = 0$, puesto que $\beta(x)$ es una magnitud acotada. Esto se cumple para cualquier número finito de factores.

Corolario 2. Si $\lim \alpha = 0$ y $c = \text{const}$, entonces $\lim c\alpha = 0$.

Teorema 5. *El cociente $\frac{\alpha(x)}{z(x)}$ de la división de una magnitud infinitamente pequeña $\alpha(x)$ por una función, cuyo límite es diferente de cero, es una magnitud infinitamente pequeña.*

Demostración. Supongamos que $\lim \alpha(x) = 0$ y $\lim z(x) = b \neq 0$. Basándose en el teorema 2, § 3 se deduce que $\frac{1}{z(\alpha)}$ es una magnitud acotada. Por consiguiente, la fracción $\frac{\alpha(x)}{z(x)} = \alpha(x)\frac{1}{z(x)}$ es el producto de una magnitud infinitamente pequeña por otra acotada, es decir, una infinitesimal.

§ 5. TEOREMAS FUNDAMENTALES SOBRE LIMITES

En este apartado, como en el anterior, vamos a examinar conjuntos de funciones que dependen de un mismo argumento x, cuando $x \to a$ o cuando $x \to \infty$.

Por ser análogas las demostraciones para ambos casos nos limitaremos a uno sólo, omitiendo, incluso, las notaciones $x \to a$ o $x \to \infty$, que consideraremos sobreentendidas.

Teorema 1. *El límite de la suma algebraica de dos, tres y, en general, de un número finito de variables es igual a la suma algebraica de los límites de estas variables:*

$$\text{lím}\,(u_1 + u_2 + \ldots + u_k) = \text{lím}\,u_1 + \text{lím}\,u_2 + \ldots + \text{lím}\,u_k.$$

Demostración. Puesto que la demostración es análoga para cualquier número de sumandos, tomemos sólo dos.

Supongamos que $\text{lím}\,u_1 = a_1$, $\text{lím}\,u_2 = a_2$. Basándonos en el teorema 1 § 4, podemos escribir:

$$u_1 = a_1 + \alpha_1,\quad u_2 = a_2 + \alpha_2,$$

donde α_1 y α_2 son magnitudes infinitesimales. Por tanto,

$$u_1 + u_2 = (a_1 + a_2) + (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Puesto que $(a_1 + a_2)$ es una magnitud constante y $(\alpha_1 + \alpha_2)$ es una infinitesimal, entonces, de acuerdo con el teorema 1 § 4, resultará que

$$\text{lím}\,(u_1 + u_2) = a_1 + a_2 = \text{lím}\,u_1 + \text{lím}\,u_2.$$

Ejemplo 1.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 1 + 0 = 1.$$

Teorema 2. *El límite del producto de dos, tres y, en general, de un número finito de variables es igual al producto de los límites de estas variables:*

$$\text{lím}\,u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_k = \text{lím}\,u_1 \cdot \text{lím}\,u_2 \cdot \ldots \cdot \text{lím}\,u_k.$$

Demostración. Con el fin de abreviar, realicemos la demostración para dos factores. Supongamos que $\text{lím}\,u_1 = a_1$ y $\text{lím}\,u_2 = a_2$. Por tanto,

$$u_1 = a_1 + \alpha_1,\quad u_2 = a_2 + \alpha_2.$$

$$u_1u_2 = (a_1 + \alpha_1)(a_2 + \alpha_2) = a_1a_2 + a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2.$$

El producto $a_1 a_2$ es una constante. Según los teoremas del § 4, la magnitud $a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2$ es infinitamente pequeña. Por consiguiente, $\lim u_1 u_2 = a_1 a_2 = \lim u_1 \cdot \lim u_2$.

Corolario. Un factor constante se puede sacar fuera del signo de límite. En efecto, si $\lim u_1 = a_1$, $c = \text{const}$ y, por tanto, $\lim c = c$, se tiene:

$\lim (cu_1) = \lim c \cdot \lim u_1 = c \lim u_1$, que es lo que se trataba de demostrar.

Ejemplo 2.

$$\lim_{x\to 2} 5x^3 = 5 \lim_{x\to 2} x^3 = 5\cdot 8 = 40.$$

Teorema 3. *El límite del cociente de dos variables es igual al cociente de los límites de estas variables, siempre que el límite del denominador sea distinto de cero:*

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}, \text{ siempre que } \lim v \neq 0.$$

Demostración. Supongamos que $\lim u = a$, $\lim v = b \neq 0$. Entonces $u = a + \alpha$, $v = b + \beta$, donde α y β son magnitudes infinitamente pequeñas. Escribamos las identidades

$$\frac{u}{v} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)},$$

o sea,

$$\frac{u}{v} = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)}.$$

La fracción $\frac{a}{b}$ es un número constante y $\frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)}$ (según los teoremas 4 y 5, § 4) es una variable infinitamente pequeña, puesto que $\alpha b - \beta a$ es también una infinitesimal y el denominador $b(b+\beta)$ tiene por límite $b^2 \neq 0$. Por consiguiente, $\lim \frac{u}{v} = \frac{a}{b} = \frac{\lim u}{\lim v}$.

Ejemplo 3.

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x+5}{4x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+5)}{\lim\limits_{x\to 1}(4x-2)} = \frac{3\lim\limits_{x\to 1} x+5}{4\lim\limits_{x\to 1} x-2} = \frac{3\cdot 1+5}{4\cdot 1-2} = \frac{8}{2} = 4.$$

En este ejemplo hemos aprovechado el teorema, ya demostrado, acerca del límite de una fracción, puesto que el límite del denominador, cuando $x \to 1$, es distinto de cero. Pero, si el límite del denominador es cero, no se puede aplicar el teorema citado. En este último caso hacen falta consideraciones especiales.

Ejemplo 4. Hallar $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$.

Aquí el denominador y el numerador tienden a cero, cuando $x \to 2$, y, por tanto, el teorema 3 no es válido para el caso. Realicemos la siguiente transformación idéntica:

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2.$$

La transformación es válida para todos los valores de x diferentes de 2. Por tanto, teniendo en cuenta la definición de límite, podemos escribir:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

Ejemplo 5. Hallar $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x-1}$. Cuando $x \to 1$, el denominador tiende a cero, mientras que el numerador tiende a la unidad. Por consiguiente, el límite de la magnitud inversa es cero, es decir,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}x}=\frac{0}{1}=0.$$

De aquí se deduce, según el teorema 2 del párrafo precedente, que:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}=\infty.$$

Teorema 4. *Si entre los valores correspondientes de las tres funciones $u=u(x)$, $z=z(x)$, $v=v(x)$, se cumplen las desigualdades $u \leqslant z \leqslant v$, y, además, $u(x)$ y $v(x)$ tienden a un mismo límite b, cuando $x \to a$ (o cuando $x \to \infty$), entonces podemos afirmar que la función $z=z(x)$ también tiende a este mismo límite, cuando $x \to a$ (o cuando $x \to \infty$).*

Demostración. Para precisar las ideas, examinemos la variación de las funciones, cuando $x \to a$. De las desigualdades $u \leqslant z \leqslant v$ se infiere que:

$$u-b \leqslant z-b \leqslant v-b;$$

según las condiciones del teorema, tenemos:

$$\lim_{x\to a} u = b,\ \lim_{x\to a} v = b.$$

Por tanto, para cualquier $\varepsilon > 0$, se encontrará alguna vecindad con centro en el punto a, en la que se verificará la desigualdad $|u-b| < \varepsilon$; del mismo modo se encontrará también alguna vecindad con centro en el punto a, en la que se verificará la desigualdad $|v-b| < \varepsilon$. En la vecindad menor de las mencionadas se cumplirán las desigualdades:

$$-\varepsilon < u-b < \varepsilon \text{ y } -\varepsilon < v-b < \varepsilon$$

y, por tanto, también, se cumplirán las desigualdades
$$-\varepsilon < z - b < \varepsilon,$$
es decir,
$$\lim_{x \to a} z = b.$$

Teorema 5. *Si, cuando $x \to a$ (o cuando $x \to \infty$), la función y, tomando valores no negativos ($y \geqslant 0$), tiende al límite b, éste último será un número no negativo, o sea $b \geqslant 0$.*

Demostración. Supongamos que $b < 0$, entonces $|y - b| \geqslant |b|$, es decir, el módulo de la diferencia $|y - b|$ es mayor que el número positivo $|b|$ y, por tanto, no tiende a cero, cuando $x \to a$. Pero, en este caso y no tiende a b, cuando $x \to a$, lo que contradice a la condición del teorema. Esto quiere decir que la hipótesis de que $b < 0$ no es cierta y, por tanto, $b \geqslant 0$.

De la misma manera se demuestra que $\lim y \leqslant 0$, si $y \leqslant 0$.

Teorema 6. *Si entre los valores correspondientes de dos funciones, $u = u(x)$ y $v = v(x)$, que tienden a sus límites respectivos, cuando $x \to a$ (o cuando $x \to \infty$), se cumple la desigualdad $v \geqslant u$, también se verificará que* $\lim v \geqslant \lim u$.

Demostración. Dada la condición $v - u \geqslant 0$, y, de acuerdo con el teorema 5, $\lim (v - u) \geqslant 0$ o $\lim v - \lim u \geqslant 0$, es decir, $\lim v \geqslant \lim u$.

Ejemplo 6. Demostremos que $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$. Según la fig. 42, si $OA = 1$ y $x > 0$, tendremos $AC = \operatorname{sen} x$, $\smile AB = x$, $\operatorname{sen} x < x$. Es evidente que, siendo

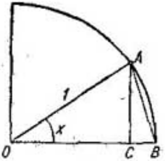

Fig. 42

$x < 0$, tenemos $|\operatorname{sen} x| < |x|$. Según los teoremas 5 y 6, podemos deducir de estas dos desigualdades que $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

Ejemplo 7. Demostremos que $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} = 0$.

En efecto, $\left|\operatorname{sen} \frac{x}{2}\right| < |\operatorname{sen} x|$. Por tanto, $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} = 0$.

Ejemplo 8. Demostremos que $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

Siendo $\cos x = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2 \frac{x}{2}$, tenemos, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \lim\limits_{x\to 0}\left(1 - 2\,\mathrm{sen}^2 \frac{x}{2}\right) =$
$= 1 - 2 \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{sen}^2 \frac{x}{2} = 1 - 0 = 1$.

En algunas investigaciones respecto al límite de las variables es necesario resolver dos problemas independientes:

1) demostrar que una variable tiene su límite y determinar los confines dentro de los cuales se encuentra este límite.

2) calcular el límite dado con el grado de precisión necesaria.

A veces el primer problema se resuelve mediante el siguiente importante teorema.

Teorema 7. *Si la magnitud variable v es creciente, es decir, cada valor posterior de la misma es mayor que el anterior, y si ésta es acotada, o sea $v < M$, entonces dicha variable tiene como límite* $\lim v = a$, *donde* $a \leqslant M$.

En el caso de que la magnitud variable sea decreciente y acotada, el teorema correspondiente se enuncia de un modo semejante. No damos aquí la demostración del teorema porque se basa en la teoría de los números reales, que no se considera en el presente curso.

En los dos párrafos siguientes vamos a calcular los límites de dos funciones que tienen gran aplicación en las matemáticas.

§ 6. LIMITE DE LA FUNCION $\frac{\mathrm{sen}\, x}{x}$, CUANDO $x \to 0$

La función $\frac{\mathrm{sen}\, x}{x}$ no está definida para $x = 0$, puesto que tanto el numerador, como el denominador de la fracción se reducen a cero.

Veamos el límite de esta función, cuando $x \to 0$.

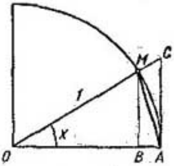

Fig. 43

Consideremos una circunferencia de radio 1 (fig. 43); designemos por x, el ángulo central MOB, siendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$. En la fig. 43 se puede observar que: área $\triangle MOA <$ área del sector $MOA <$ área $\triangle COA$. (1)

$$\text{Area } \triangle MOA = \frac{1}{2} OA \cdot MB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x.$$

$$\text{Area del sector } MOA = \frac{1}{2} OA \cdot \overset{\frown}{AM} = \frac{1}{2} 1 \cdot x = \frac{1}{2} x.$$

$$\text{Area } \triangle COA = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

Suprimiendo el factor 1/2, la desigualdad (1) se escribirá así:

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x.$$

Dividamos por sen x todos los miembros y tendremos:

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x},$$

o sea,

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x.$$

Hemos obtenido esta desigualdad, suponiendo que $x > 0$. Teniendo en cuenta que $\frac{\operatorname{sen}(-x)}{(-x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y $\cos(-x) = \cos x$,

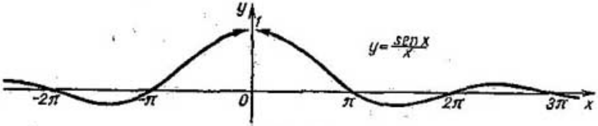

Fig. 44

concluimos que la desigualdad también es válida para $x < 0$. Pero, $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$, $\lim_{x \to 0} 1 = 1$. Por tanto, la variable $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ se halla comprendida entre dos magnitudes que tienen 1 por límite. De este modo, de acuerdo con el teorema 4 del párrafo precedente tenemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

La gráfica de la función $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ se expone en la fig. 44.

Ejemplos:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} kx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}k\frac{\operatorname{sen} kx}{kx}=k\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(kx\to 0)}}\frac{\operatorname{sen}(kx)}{(kx)}=k\cdot 1=k \qquad (k=\text{const}).$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{x}{2}=1\cdot 0=0.$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\operatorname{sen}\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\alpha x}}{\frac{\operatorname{sen}\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\alpha x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{1}=\frac{\alpha}{\beta}$

$(\alpha=\text{const},\ \beta=\text{const}).$

§ 7. NUMERO e

Examinemos la magnitud variable

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

donde n es una variable creciente que va tomando los valores: 1, 2, 3, . . .

Teorema 1. *La variable* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *tiene su límite comprendido entre los números 2 y 3, cuando* $n\to\infty$.

Demostración. Según el binomio de Newton, podemos escribir:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\dots$$

$$\dots+\frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot n}\left(\frac{1}{n}\right)^n. \qquad (1)$$

Después de transformaciones algebraicas evidentes (1), obtenemos:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ \ldots\ \cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (2)$$

De la última igualdad se deduce que la variable $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es creciente, cuando crece n.

En efecto, cada uno de los sumandos crece al pasar del valor n al $n+1$, es decir:

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right), \text{ etc, y se agrega}$$

un término más. Todos los términos del desarrollo son positivos.

Demostremos que la variable $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ está acotada. Teniendo en cuenta que $\left(1-\frac{1}{n}\right)<1$; $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<1$, etc., de la expresión (2) obtenemos la desigualdad

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot n}.$$

Considerando que

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}<\frac{1}{2^2};\quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^3};\quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot\ \ldots\ \cdot n}<\frac{1}{2^{n-1}},$$

podemos escribir

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

Los términos subrayados en el segundo miembro de esta desigualdad forman una progresión geométrica que tiene por razón $q=$

$=\frac{1}{2}$ y por primer término, $a=1$; por esto:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right]=$$

$$=1+\frac{a-aq^n}{1-q}=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1+\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]<3.$$

Por tanto, para todos n tenemos:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

De la igualdad (2) se deduce que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geqslant 2.$$

y por tanto obtenemos las desigualdades

$$2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3. \tag{3}$$

Así pues, queda establecido que la variable $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ está acotada.

Como la variable $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es creciente y acotada, tiene (según el teorema 7, § 5) pues, su límite. Este límite se designa con la letra e.

Definición. Se denomina número e al límite*) de la variable $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, cuando $n\to\infty$:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Conforme al teorema 6, § 5, de la desigualdad (3) podemos deducir que el número e satisface la desigualdad $2\leqslant e\leqslant 3$.

El teorema queda, pues, demostrado.

El número e es irracional. Más adelante exponemos el método para su cálculo con cualquier grado de precisión. Su valor, con diez cifras decimales es:

$$e=2,\ 7182818284\ldots\ .$$

---

*) Se puede demostrar que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e$, cuando $n\to+\infty$, si n no es una variable creciente.

Teorema 2. *La función* $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ *tiende al límite e cuando x tiende al infinito*:

$$\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Demostración. Hemos establecido que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$, cuando $n \to \infty$, si n toma valores enteros y positivos. Supongamos ahora que x tiende al infinito, tomando valores tanto fraccionarios como negativos.

1) Supongamos que $x \to +\infty$. Cada valor de x se halla comprendido entre dos números enteros positivos

$$n \leqslant x < n+1.$$

En este caso se cumplen las desigualdades:

$$\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1},$$

$$1+\frac{1}{n} \geqslant 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Si $x \to \infty$, es evidente que también $n \to \infty$. Hallemos los límites de las variables entre los cuales se encuentra la variable $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$:

$$\lim_{n \to +\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \to +\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \to +\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e,$$

$$\lim_{n \to +\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \to +\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n \to +\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n \to +\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e.$$

Por tanto, según el teorema 4, § 5, se tiene:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \qquad (4)$$

2) Supongamos que $x\to-\infty$. Introduzcamos una nueva variable $t=-(x+1)$ o sea $x=-(t+1)$. Cuando $t\to+\infty$, tendremos que $x\to-\infty$. Entonces

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right)=e\cdot 1=e.$$

El teorema queda demostrado. La gráfica de la función $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ se expone en la fig. 45.

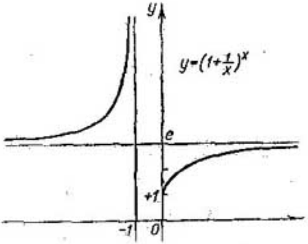

Fig. 45

Si en la igualdad (4) introducimos $\frac{1}{x}=\alpha$, entonces tenemos $\alpha\to 0$ (pero, $\alpha\neq 0$), cuando $x\to\infty$, y obtenemos:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$$

Ejemplos:

1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\times$

$\times\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5}=e\cdot 1=e.$

2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=$

$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\cdot e\cdot e=e^3.$

3) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y}=e^2.$

4) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3}=$

$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{(x-1)+4}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y+4}=$

$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4}=e^4\cdot 1=e^4.$

§ 8. LOGARITMOS NATURALES

En el párrafo 8 del capítulo primero se ha definido la función logarítmica $y=\log_a x$. Como se sabe, el número a es la base de logaritmos. Si $a=10$, entonces y se denomina logaritmo decimal del número x e y se escribe $y=\log x$. En la escuela secundaria se estudian las tablas de logaritmos decimales, llamados también de *Briggs*, nombre del sabio inglés que los inventó (1556-1630).

Los logaritmos que tienen por base el número $e=2{,}71828\ldots$, se llaman *naturales o neperianos*, en honor del matemático Neper (1550-1617), uno de los primeros inventores de las tablas de logaritmos. Por consiguiente, si $e^y=x$, entonces y se denomina logaritmo natural del número x, y se escribe así: $y=\ln x$, en lugar de $y=$ $=\log_e x$. (Véase las gráficas de las funciones $y=\ln x$ e $y=\lg x$ en la fig. 46). Determinemos ahora la correlacion que existe entre logaritmos decimales y los naturales de un mismo número x. Supongamos que $y=\log x$, o sea $x=10^y$.

Tomemos los logaritmos naturales de los dos miembros de la última ecuación, escogiendo e como base, y tendremos: $\ln x=$ $=y\ln 10$, de donde $y=\frac{1}{\ln 10}\ln x$. Sustituyendo el valor de y tendremos:

$$\log x = \frac{1}{\ln 10} \ln x.$$

Lo que quiere decir que, cuando se conoce el logaritmo natural de un número x, se puede hallar su logaritmo decimal, multiplicándolo por el factor $M = \frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}434294$, valor que no depende

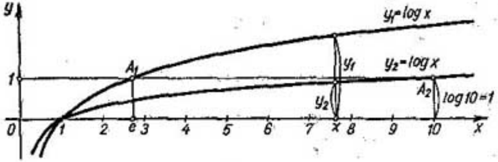

Fig. 46

de x. A este factor M se le denomina módulo o factor de transición de los logaritmos naturales a los decimales:

$$\log x = M \ln x.$$

Al introducir en esta identitud $x = e$, hallaremos la expresión del número M por medio de logaritmos decimales:

$$\log e = M \; (\ln e = 1).$$

Los logaritmos naturales se expresan en logaritmos decimales de la manera siguiente:

$$\ln x = \frac{1}{M} \log x,$$

donde $\frac{1}{M} = 2{,}302585$.

Observación. Existen tablas especiales para el cálculo de logaritmos naturales.

§ 9. CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES

Supongamos que la función $y = f(x)$ está definida para cierto valor x_0 y en cierta vecindad de centro en el mismo punto. Sea: $y_0 = f(x_0)$.

Si x recibe cierto incremento Δx (positivo o negativo), y toma el valor $x = x_0 + \Delta x$, la funcion y también resultará incrementada en Δy. El nuevo valor incrementado de la función será $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ (fig. 47). El incremento de la función Δy se expresa mediante la fórmula

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

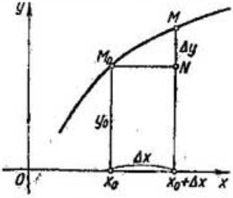

Fig. 47

Definición 1. *La función* $y = f(x)$ se considera *continua, para el valor de* $x = x_0$ (o en el *punto* x_0), si está definida en cierta vecindad del punto x_0, (incluido el punto x_0) y si:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \tag{1}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0. \tag{2}$$

La condición (2) se puede escribir así:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

ó

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)... \tag{2}$$

En lenguaje geométrico la continuidad de la función en el punto dado significa que la diferencia de las ordenadas de la gráfica $y = f(x)$ en los puntos $x_0 + \Delta x$ y x_0 será, en valor absoluto, arbitrariamente pequeña a condición de que $|\Delta x|$ sea lo suficientemente pequeño.

Ejemplo 1. Demostremos que la función $y = x^2$ es continua en el punto x_0, arbitrariamente elegido. En efecto,

$$y_0 = x_0^2,\ y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2,\ \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0\Delta x + \Delta x^2) = 2x \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0,$$

independiente del modo en que Δx tiende a cero (fig. 48*a* y *b*).

Ejemplo 2. Comprobemos que la función $y = \operatorname{sen} x$ es continua en cualquier punto arbitrario x_0. En efecto,

$$y_0 = \operatorname{sen} x_0, \quad y_0 + \Delta y = \operatorname{sen}(x_0 + \Delta x),$$

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x_0 + \Delta x) - \operatorname{sen} x_0 = 2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

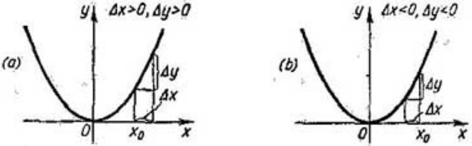

Fig. 48

Ya hemos visto que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} = 0$ (ejemplo 7, § 5). La función $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ está acotada. Por consiguiente,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Del mismo modo se puede demostrar que cualquier función elemental fundamental es continua en cada punto en el que la función esté definida.

Demostremos el siguiente teorema.

Teorema 1. *Siendo las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ continuas en el punto x_0, su suma $\psi(x) = f_1(x) + f_2(x)$, también será función continua en el mismo punto x_0.*

Demostración. Siendo continuas $f_1(x)$ y $f_2(x)$, de acuerdo con la igualdad (2'), podemos escribir:

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = f_1(x_0),$$

$$\lim_{x \to x_0} f_2(x) = f_2(x_0).$$

Según el teorema 1 sobre límites, tenemos:

$$\lim_{x \to x_0} \psi(x) = \lim_{x \to x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x \to x_0} f_1(x) + \lim_{x \to x_0} f_2(x) =$$

$$= f_1(x_0) + f_2(x_0) = \psi(x_0), \text{ es decir,}$$

la suma $\psi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ es una función continua, como se trataba de demostrar.

Como corolario, observemos que el teorema citado es válido para cualquier número de sumandos.

Basándose en las propiedades de los límites, se puede demostrar también los teoremas siguientes:

a) El producto de dos funciones continuas es una función continua.

b) El cociente de dos funciones continuas es una función continua, si el denominador no se reduce a cero en el punto considerado.

c) Si $u = \varphi(x)$ es una función continua para $x = x_0$ y si $f(u)$ también es continua en el punto $u_0 = \varphi(x_0)$, la función compuesta $f[\varphi(x)]$ será continua en el punto x_0.

Basándose en estos teoremas se puede formular el siguiente teorema.

Teorema 2. *Cualquier función elemental es continua en cada punto en el cual la función está definida.*

Observación. Dado que en la igualdad (2′)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

$$x_0 = \lim_{x \to x_0} x,$$

podemos escribirla así:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x), \tag{3}$$

es decir, que para hallar el límite de la función continua cuando $x \to x_0$, basta sustituir el argumento x por su valor x_0 en la expresión de la función.

Ejemplo 3. La función $y = x^2$ es continua en cualquier punto x_0, y por tanto:

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2,$$

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 3^2 = 9.$$

Ejemplo 4. La función $y = \operatorname{sen} x$ es continua en cualquier punto, de donde

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ejemplo 5. La función $y = e^x$ es continua en cualquier punto y por tanto: $\lim\limits_{x \to a} e^x = e^a$.

Ejemplo 6.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \to 0} \ln[(1+x)^{\frac{1}{x}}].$$

Ya que $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ y la función $\ln z$ es continua para $z > 0$ y, por lo tanto, para $x = e$, se tiene

$$\lim_{x\to 0} \ln [(1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln [\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln e = 1.$$

Definición 2. Se dice que la función $y = f(x)$ es continua sobre el intervalo dado (a, b), donde $a < b$, siempre que ésta sea *continua en cada uno de sus puntos.*

Si la función está definida también en el punto $x = a$ siendo $\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$, se dice que en el punto $x = a$ la función $f(x)$ es *continua por la derecha.* Siendo $\lim_{x\to b-0} f(x) = f(b)$, se dice que en el punto $x = b$ la función $f(x)$ es *continua por la izquierda.*

Si la función $f(x)$ es continua en cada punto del intervalo (a, b), y lo es al mismo tiempo en los extremos de éste (por la derecha y por la izquierda, respectivamente) se dice que la función $f(x)$ es *continua en el intervalo o segmento cerrado* $[a, b]$.

Ejemplo 7. La función $y = x^2$ es continua en cualquier segmento $[a, b]$, como se deduce del ejemplo 1.

Si en algún punto $x = x_0$ para la función $y = f(x)$ no se cumple por lo menos una de las condiciones de continuidad, es decir, si para $x = x_0$ la función no está definida o no existe el límite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ o bien $\lim_{x\to x_0} f(x_0) \neq f(x_0)$ cuando $x \to x_0$ de una manera arbitraria, a pesar de que existen las expresiones a la derecha y a la izquierda, entonces la función $y = f(x)$ es *discontinua*, cuando $x = x_0$. El punto $x = x_0$ se denomina, en este caso, *punto de discontinuidad* de la función.

Ejemplo 8. La función $y = \frac{1}{x}$ es discontinua cuando $x = 0$. En efecto, cuando $x = 0$, la función no está definida:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty; \quad \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Es fácil demostrar que esta función es continua para cualquier valor de $x \neq 0$.

Ejemplo 9. La función $y = 2^{\frac{1}{x}}$ es discontinua en $x = 0$. En efecto, $\lim_{x\to 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = \infty$, $\lim_{x\to 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$. La función no está definida en $x = 0$ (fig. 49).

Ejemplo 10. Examinemos la función $f(x)=\frac{x}{|x|}$. Si $x<0$, $\frac{x}{|x|}=-1$, para $x>0$, $\frac{x}{|x|}=1$. Por consiguiente,

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{x}{|x|}=-1;\ \lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{x}{|x|}=1;$$

cuando $x=0$, la función no está definida. De esta manera hemos establecido que la función $f(x)=\frac{x}{|x|}$ es discontinua en $x=0$ (fig. 50).

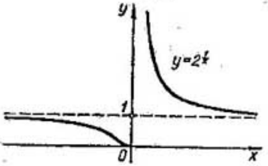

Fig. 49

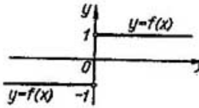

Fig. 50

Ejemplo 11. La función $y=\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ examinada en el ejemplo 4, § 3, es discontinua en $x=0$.

Definición 3. Supongamos que la función $f(x)$ tiene los límites finitos: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$ y $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$, que son desiguales, es decir: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, o el valor de la función $f(x)$ no está definido, cuando $x=x_0$. En este caso, el punto $x=x_0$ se denomina *punto de discontinuidad de primer género*. (Para la función examinada en el ejemplo 10, el punto $x=0$, es un punto de discontinuidad de primer género).

§ 10. ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

En este párrafo examinaremos algunas propiedades de las funciones continuas sobre un segmento. Estas propiedades las presentaremos como teoremas cuya demostración no se da en este libro.

Teorema 1. *Si la función $y=f(x)$ es continua sobre cierto segmento $[a, b]$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, siempre se encontrará en este segmento por lo menos un punto $x=x_1$ tal que el valor de la función en dicho punto satisfaga la correlación*

$$f(x_1)\geqslant f(x),$$

en la que x es cualquier otro punto del segmento, y se encontrará también por lo menos un punto x_2 tal que el valor de la función en el mismo satisfaga la relación

$$f(x_2) \leqslant f(x).$$

El valor de la función $f(x_1)$ se llama *valor máximo* de la función $y = f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y el de la función $f(x_2)$ se denomina *valor mínimo* de la función en el mismo segmento $[a, b]$.

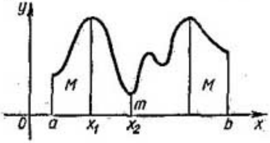

Fig. 51

Este teorema se enuncia brevemente así: *la función continua sobre el segmento $a \leqslant x \leqslant b$ alcanza, una vez por lo menos, su valor máximo M y su valor mínimo m.*

La interpretación geométrica de este teorema se representa en la fig. 51.

Observación. El teorema enunciado puede no ser cierto, debido a que entre los valores de la función mencionada pueden no existir los valores máximo y mínimo en el intervalo $a < x < b$. Si, por ejemplo, examinamos la función $y = x$ en el intervalo $0 < x < 1$ no hallamos entre sus valores el máximo, ni el mímimo. En realidad esto debe ser así, pues no existe el punto extremo izquierdo, ya que si tomamos cualquier punto x^* habrá siempre otro punto, por ejemplo $\frac{x^*}{2}$, más a la izquierda que x^*. Por la misma razón no existe el punto extremo derecho y, por tanto, no puede haber valor máximo ni mínimo de la función $y = x$.

Teorema 2. *Si la función $y = f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, tomando en los extremos de éste valores de signos contrarios, entre los puntos a y b se hallará por lo menos un punto $x = c$, en el que la función se reduce a cero:*

$$f(c) = 0, \quad a < c < b.$$

Este teorema tiene una sencilla interpretación geométrica. La gráfica de la función continua $y = f(x)$, que une los puntos $M_1[a, f(a)]$ y $M_2[b, f(b)]$, donde $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ (o $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$), corta el eje Ox por lo menos en un punto (fig. 52).

Ejemplo. Sea la función $y = x^3 - 2$. Se tiene: $y_{x=1} = -1$, $y_{x=2} = 6$. Esta función es continua en el segmento $[1, 2]$. Por tanto, en éste existe un punto donde $y = x^3 - 2$ se reduce a cero. En efecto, $y = 0$ cuando $x = \sqrt[3]{2}$ (fig. 53).

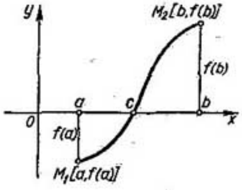

Fig. 52

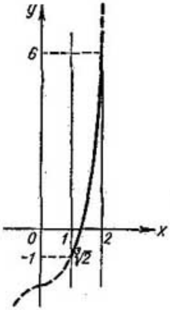

Fig. 53

Teorema 3. *Sea $y = f(x)$ una función definida y continua sobre el segmento $[a, b]$. Si en los extremos del segmento dado la función toma valores diferentes $f(a) = A$, $f(b) = B$, siempre se encontrará*

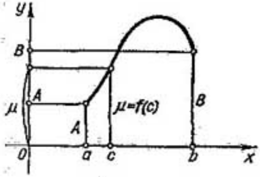

Fig. 54

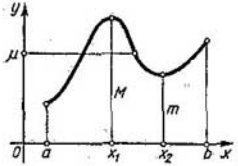

Fig. 55

un punto $x = c$, comprendido entre a y b, tal que $f(c) = \mu$, cualquiera que sea el número μ comprendido entre los valores A y B.

Este teorema se interpreta claramente en la fig. 54. En el caso dado, cualquier recta $y = \mu$ cortará la gráfica de la función $y = f(x)$.

Observación. El teorema 2 es un caso particular del teorema 3, ya que, teniendo A y B signos contrarios, podemos tomar el número 0 como valor de μ, y entonces $\mu = 0$ resultará comprendido entre los números A y B.

Corolario del teorema 3. *Si la función $y = f(x)$ es continua sobre cierto intervalo, tomando los valores máximo y mínimo, se puede deducir que en el intervalo enunciado la función toma, por lo menos una vez, cualquier valor comprendido entre sus valores extremos.*

En efecto, supongamos que $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$. Según el teorema 3, en el segmento $[x_1, x_2]$ la función $y = f(x)$ toma cualquier valor μ, comprendido entre M y m. Pero el segmento $[x_1, x_2]$ se encuentra dentro del intervalo considerado, en el cual está definida la función $f(x)$ (fig. 55).

§ 11. COMPARACION DE LAS MAGNITUDES INFINITESIMALES

Supongamos que unas cuantas magnitudes infinitamente pequeñas (infinitesimales) α, β, γ, . . . son funciones de un mismo argumento x, y tienden a cero cuando x tiende al límite a o al infinito. Analicemos la tendencia de estas variables a cero, considerando la razón de las mismas.*

En adelante usaremos las siguientes definiciones.

Definición 1. Si la razón $\frac{\beta}{\alpha}$ tiene un límite finito y distinto de cero, es decir, que $\lim \frac{\beta}{\alpha} = A \neq 0$ y, por tanto, $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{A} \neq 0$, se dice que las infinitesimales α y β son del mismo orden.

Ejemplo 1. Supóngase que $\alpha = x$, $\beta = \operatorname{sen} 2x$, donde $x \to 0$. Las infinitesimales α y β son del mismo orden, ya que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 2.$$

Ejemplo 2. Cuando $x \to 0$, las infinitesimales x, $\operatorname{sen} 3x$, $\operatorname{tg} 2x$, $7 \ln (1 + x)$ son todas del mismo orden. La demostración es análoga a la del ejemplo 1.

Definición 2. Si la razón $\frac{\beta}{\alpha}$ de dos infinitesimales tiende a cero, es decir, si $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ (y $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$), entonces la infinitesimal β *se denomina infinitesimal del orden superior que* α; *recíprocamente,* α *será una infinitesimal de orden inferior que* β.

---

*) Partimos de que la infinitesimal que sirve de denominador no se reduce a cero en alguna vecindad del punto α.

Ejemplo 3. Supongamos que $\alpha = x$, $\beta = x^n$, $n > 1$, $x \to 0$. La infinitesimal β es de orden superior que la α, puesto que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^n}{x} = \lim_{x\to 0} x^{n-1} = 0.$$

Recíprocamente la infinitesimal α es de orden inferior que la β.

Definición 3. Se dice que β es *magnitud infinitamente pequeña de orden k respecto a* α, si β y α^k son infinitesimales del mismo orden, es decir, si $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = A \neq 0$.

Ejemplo 4. Si $\alpha = x$, $\beta = x^3$, cuando $x \to 0$, la infinitesimal β es una infinitesimal de tercer orden respecto a la infinitesimal α, puesto que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta}{\alpha^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{(x)^3} = 1.$$

Definición 4. Si la razón de dos infinitesimales $\frac{\beta}{\alpha}$ tiende a la unidad, es decir, si $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, estas infinitesimales se denominan equivalentes: y se escriben así: $\alpha \sim \beta$.

Ejemplo 5. Supongamos que $\alpha = x$ y $\beta = \operatorname{sen} x$, donde $x \to 0$. Las infinitesimales α y β son equivalentes, puesto que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Ejemplo 6. Supongamos que $\alpha = x$, $\beta = \ln(1+x)$, donde $x \to 0$. Las infinitesimales α y β son equivalentes, ya que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

(véase ejemplo 6, § 9).

Teorema 1. *Si α y β son infinitesimales equivalentes, su diferencia $\alpha - \beta$ es una infinitesimal de orden superior que las α y β.*

Demostración. En efecto,

$$\lim \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = \lim \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 - \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1 - 1 = 0.$$

Teorema 2. (Recíproco del anterior). *Si la diferencia de dos infinitesimales $\alpha - \beta$ es una infinitesimal de orden superior que las α y β, éstas son infinitesimales equivalentes.*

Demostración. Supongamos que $\lim \frac{\alpha-\beta}{\alpha}=0$, entonces: $\lim\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)=0$, o sea, $1-\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$, o bien, $1=\lim\frac{\beta}{\alpha}$, es decir, $\alpha\approx\beta$.
Si $\lim\frac{\alpha-\beta}{\beta}=0$, se tiene $\lim\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)=0$, o bien $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$, es decir, $\alpha\approx\beta$.

Ejemplo 7. Supongamos que $\alpha=x$ y $\beta=x+x^3$, donde $x\to 0$. Las infinitesimales α y β son equivalentes, ya que su diferencia $\beta-\alpha=x^3$ es una infinitesimal de orden superior que α y β. En efecto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to 0}x^2=0,$$

$$\lim\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+x^2}=0.$$

Ejemplo 8. Cuando $x\to\infty$, las infinitesimales $\alpha=\frac{x+1}{x^2}$ y $\beta=\frac{1}{x}$ son equivalentes, puesto que su diferencia $\alpha-\beta=\frac{x+1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}$ es una infinitesimal de orden superior que α y β. El límite de la razón α respecto a β es 1:

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1.$$

Observación. Si la razón $\frac{\beta}{\alpha}$ de dos infinitesimales no tiene límite y no tiende al infinito, entonces β y α no son comparables en el sentido mencionado anteriormente.

Ejemplo 9. Supongamos que $\alpha=x$, $\beta=x\,\mathrm{sen}\frac{1}{x}$, donde $x\to 0$. Las infinitesimales α y β no son comparables, dado que su razón $\frac{\beta}{\alpha}=\mathrm{sen}\frac{1}{x}$ no tiende a ningún límite finito, ni infinito, cuando $x\to 0$, (véase ejemplo 4 § 3).

Ejercicios para el capítulo II

Calcular los límites siguientes:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x+5}{x^2+1}$. *Respuesta*: 4. 2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[2\,\mathrm{sen}\,x-\cos x+\mathrm{cotg}\,x]$. *Respuesta*: 2. 3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{2+x}}$. *Respuesta*: 0. 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)$. *Respuesta*: 2.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+1}{3x^3-5}$. *Respuesta:* $\dfrac{4}{3}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}$. *Respuesta:* 1. 7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$. *Respuesta:* $\dfrac{1}{2}$. 8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$. *Respuesta:* $\dfrac{1}{3}$.

Indicaciones. Expresemos la fórmula $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ para $k=0, 1, 2, \ldots, n$.

$$1^3=1;$$
$$2^3-1^3=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1;$$
$$3^3-2^3=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1.$$

Sumando miembro a miembro, se obtiene:

$$(n+1)^3=3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+3(1+2+\ldots+n)+(n+1),$$
$$(n+1)^3=3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+3\frac{n(n+1)}{2}+(n+1),$$

de donde

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{2x+5}$. *Respuesta:* ∞. 10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$. *Respuesta:* 0. 11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$. *Respuesta:* $\dfrac{1}{2}$. 12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$. *Respuesta:* 4. 13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$. *Respuesta:* 3. 14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$. *Respuesta:* $\dfrac{1}{8}$. 15. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$. *Respuesta:* 1. 16. $\lim\limits_{y\to -2}\dfrac{y^3+3y^2+2y}{y^2-y-6}$. *Respuesta:* $-\dfrac{2}{5}$. 17. $\lim\limits_{u\to -2}\dfrac{u^3+4u^2+4u}{(u+2)(u-3)}$. *Respuesta:* 0. 18. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$. *Respuesta:* $3x^2$. 19. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x}\right]$. *Respuesta:* -1. 20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$. *Respuesta:* n (n es un número entero positivo). 21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. *Respuesta:* $\dfrac{1}{2}$. 22. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$. *Respuesta:* $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. 23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$. *Respuesta:* $\dfrac{q}{p}$. 24. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$. *Respuesta:* $\dfrac{2}{3}$. 25. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$. *Respuesta:* $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{ma}$. 26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$. *Respuesta:* $\dfrac{1}{2}$. 27. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$. *Respuesta:* 1. 28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$. *Respuesta:* 1 cuando $x\to+\infty$, -1 cuando $x\to-\infty$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$. *Respuesta*: 0. 30. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$. *Respuesta*: $\frac{1}{2}$ cuando $x\to+\infty$, $-\infty$ cuando $x\to-\infty$. 31. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$. *Respuesta*: 1. 32. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 4x}{x}$. *Respuesta*: 4. 33. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{3}}{x^2}$. *Respuesta*: $\frac{1}{9}$.
34. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$. *Respuesta*: $\frac{2}{\sqrt{2}}$. 35. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{cotg} x$. *Respuesta*: 1.
36. $\lim\limits_{v\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos v}{\operatorname{sen}\left(v-\frac{\pi}{3}\right)}$. *Respuesta*: $\sqrt{3}$. 37. $\lim\limits_{z\to 1}(1-z)\operatorname{tg}\frac{\pi z}{2}$. *Respuesta*: $\frac{2}{\pi}$.
38. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsen x}{3x}$. *Respuesta*: $\frac{2}{3}$. 39. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(a+x)-\operatorname{sen}(a-x)}{x}$. *Respuesta*: $2\cos\alpha$. 40. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}$. *Respuesta*: $\frac{1}{2}$. 41. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$. *Respuesta*: e^2. 42. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$. *Respuesta*: $\frac{1}{e}$. 43. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$. *Respuesta*: $\frac{1}{e}$. 44. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$. *Respuesta*: e. 45. $\lim\limits_{n\to\infty}\{n[\ln(n+1)-\ln n]\}$. *Respuesta*: 1. 46. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$. *Respuesta*: e^3. 47. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}$. *Respuesta*: α. 48. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$. *Respuesta*: e. 49. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{cotg}^2 x}$. *Respuesta*: e^3. 50. $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\frac{x}{m}\right)^m$. *Respuesta*: 1. 51. $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\frac{\ln(1+e^{\alpha})}{\alpha}$. *Respuesta*: 1 cuando $\alpha\to+\infty$, 0 cuando $\alpha\to-\infty$. 52. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\operatorname{sen}\beta x}$. *Respuesta*: $\frac{\alpha}{\beta}$. 53. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^x-1}{x}$ $(a>1)$. *Respuesta*: $+\infty$ cuando $x\to+\infty$, 0 cuando $x\to-\infty$. 54. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[a^{\frac{1}{n}}-1\right]$. *Respuesta*: $\ln a$. 55. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$. *Respuesta*: $\alpha-\beta$. 56. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\operatorname{sen}\alpha x-\operatorname{sen}\beta x}$. *Respuesta*: 1.

Determinar los puntos de discontinuidad de las funciones:

57. $y=\frac{x-1}{x(x+1)(x^2-4)}$. *Respuesta*: Discontinuidad para $x=-2$; -1; 0; 2. 58. $y=\operatorname{tg}\frac{1}{x}$. *Respuesta*: Discontinuidad para $x=0$ y $x=\pm\frac{2}{\pi}$; $\pm\frac{2}{3\pi}$; ... ...; $\frac{2}{(2n+1)\pi}$; ...

59. Hallar los puntos de discontinuidad de la función $y=1+2^{\frac{1}{x}}$ y construir la gráfica de esta función. *Respuesta*: Discontinuidad para $x=0$ ($y\to+\infty$ cuando $x\to0+0$, $y\to1$ cuando $x\to0-0$).

60. Entre las infinitesimales (cuando $x\to0$) siguientes: x^2, $\sqrt{x(1-x)}$, $\operatorname{sen}3x$, $2x\cos x\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}$, xe^{2x}, elíjanse las infinitesimales del mismo orden que la infinitesimal x, así como las de orden superior e inferior a x. *Respuesta*: Las infinitesimales del mismo orden son: $\operatorname{sen}3x$ y xe^{2x}, las de orden superior x^2 y $2x\cos\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}$ y la infinitesimal de orden inferior es $\sqrt{x(1-x)}$.

61. Entre las infinitesimales indicadas (cuando $x\to0$) hallar las infinitesimales que son equivalentes a la infinitesimal x: $2\operatorname{sen}x$, $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x$, $x-3x^2$, $\sqrt{2x^2+x^3}$, $\ln(1+x)$, x^3+3x^4. *Respuesta*: $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x$, $x-3x^2$, $\ln(1+x)$.

62. Demostrar que, cuando $x\to1$, las infinitesimales $1-x$ y $1-\sqrt[3]{x}$ son del mismo orden. ¿Serán equivalentes? *Respuesta*: $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}=3$, por consiguiente, las infinitesimales son de un mismo orden, pero no son equivalentes.

CAPITULO III

DERIVADA Y DIFERENCIAL

§ 1. VELOCIDAD DEL MOVIMIENTO

Examinemos el movimiento rectilíneo de un cuerpo sólido, por ejemplo, el de una piedra lanzada verticalmente hacia arriba o el de un pistón en el cilindro de un motor.

Haciendo abstracción de las dimensiones y configuración concretas del cuerpo, imaginémoslo en adelante como un punto móvil M. La distancia s del punto móvil, que se mide a partir de cierta posición inicial M_0, dependerá del tiempo t, es decir, s será función de t:

$$s = f(t). \tag{1}$$

Supongamos que en un instante dado* t, el punto móvil M se encuentre a la distancia s de la posición inicial M_0 y unos instantes después, $t + \Delta t$, se encontrará en la posición M_1, a la distancia $s + \Delta s$ de la posición inicial (fig. 56). Por consiguiente, durante el intervalo de tiempo Δt el espacio recorrido s ha cambiado en una magnitud Δs. Se dice que, en este caso, en el intervalo de tiempo Δt la magnitud s adquirió el incremento Δs.

Consideremos la razón $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Esta representa la velocidad media del punto durante el tiempo Δt:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{2}$$

Sin embargo, la velocidad media no puede caracterizar, en todos los casos, con la debida precisión, la rapidez del desplazamiento del punto M en el momento t. Así, por ejemplo, si el cuerpo al comienzo del intervalo Δt se desplaza con rapidez, mientras que al final de éste lo hace lentamente, la velocidad media no podrá reflejar estas peculiaridades del movimiento del punto y darnos una idea correcta de la velocidad real de su movimiento en el instante t.

*) Aquí, y en adelante, el valor concreto de una variable lo designaremos con la misma letra que empleamos para la propia variable.

Para expresar la velocidad real con mayor precisión, sirviéndose de la velocidad media, es necesario tomar un intervalo de tiempo Δt menor. El límite hacia el cual tiende la velocidad media, cuando $\Delta t \to 0$, caracteriza de la manera más completa la velocidad del punto en el instante t. Este límite se llama *velocidad del movimiento en el instante dado*:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{3}$$

Así, pues, la *velocidad del movimiento en el instante dado* se llama límite de la razón del incremento del espacio recorrido Δs al incremento de tiempo Δt, cuando éste último incremento tiende a cero.

Desarrollemos la igualdad (3).

Como

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

obtenemos

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{3'}$$

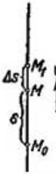

Fig. 56

que será la velocidad del movimiento no uniforme. De este modo vemos que el concepto de velocidad del movimiento no uniforme está estrechamente unido al de límite. Sólo a través del concepto de límite se puede determinar la velocidad del movimiento no uniforme.

De la fórmula (3') se deduce que v no depende del incremento de tiempo Δt, sino del valor t y del carácter de la función $f(t)$.

Ejemplo. Hallar la velocidad del movimiento uniformemente acelerado en un instante arbitrario t y en el $t = 2$ seg, si el espacio recorrido en función del tiempo se expresa por la fórmula siguiente:

$$s = \frac{1}{2} gt^2.$$

Solución. En el instante t se tiene: $s = \frac{1}{2} gt^2$, y en el instante $t + \Delta t$ tendremos:

$$s + \Delta s = \frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2 = \frac{1}{2} g (t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2).$$

Calculemos ahora Δs: $\Delta s = \frac{1}{2} g (t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - \frac{1}{2} gt^2 = gt\Delta t + \frac{1}{2} g\Delta t^2$ y tendremos la razón $\frac{\Delta s}{\Delta t}$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{gt\Delta t + \frac{1}{2} g\Delta t^2}{\Delta t} = gt + \frac{1}{2} g\Delta t.$$

Según la definición de velocidad tenemos:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(gt + \frac{1}{2} g\Delta t\right) = gt.$$

Así pues, la velocidad en un instante t cualquiera es $v = gt$. Cuando $t = 2$ tenemos $(v)_{t=2} = g \cdot 2 = 9{,}8 \cdot 2 = 19{,}6$ m/seg.

§ 2. DEFINICION DE LA DERIVADA

Sea

$$y = f(x), \tag{1}$$

una función definida en cierto intervalo. A cada valor del argumento x en este intervalo corresponde un valor determinado de la función $y = f(x)$.

Admitamos que el argumento x tome un incremento Δx, (positivo o negativo, no importa). Entonces, la función y tomará cierto incremento Δy. De este modo:

al valor del argumento x le corresponde $y = f(x)$,

al valor del argumento $x + \Delta x$ le corresponde $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Calculemos el incremento de la función Δy:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{2}$$

Veamos la razón del incremento de la función al del argumento:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{3}$$

Hallemos el límite de esta razón, cuando $\Delta x \to 0$. Si existe este límite se llama *derivada* de la función dada $f(x)$ y se designa por $f'(x)$. Según la definición tenemos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

o sea,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{4}$$

Por consiguiente, se llama *derivada* de la función dada $y = f(x)$, respecto al argumento x, el límite de la razón del incremento de esta función Δy al incremento del argumento Δx, cuando éste tiende a cero de manera arbitraria.

Observemos que en el caso general, a cada valor de x le corresponde un valor determinado de la derivada $f'(x)$, es decir, la derivada es también *función de x*.

Simultáneamente con la notación $f'(x)$ para la derivada se emplean también, otras designaciones. Por ejemplo:

$$y', \quad y'_x, \quad \frac{dy}{dx}.$$

El valor concreto de la derivada, para $x = a$, se designa por $f'(a)$ o $y'|_{x=a}$.

La operación que tiene por objeto hallar la derivada de la función $f(x)$, se llama *derivación* de esta función (se usa también el término «*diferenciación*»).

Ejemplo 1. Dada la función $y = x^2$. Hallar su derivada y':
1) en un punto cualquiera x,
2) para $x = 3$.

Solución. 1) Cuando el valor del argumento es igual a x, $y = x^2$. Cuando el valor del argumento es igual a $x + \Delta x$, $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$.

Hallemos el incremento de la función

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Formemos la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Pasando al límite, encontraremos la derivada de la función:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Así, pues, la derivada de la función $y = x^2$ en un punto cualquiera se expresará por:

$$y' = 2x.$$

2) Para $x = 3$ obtendremos:

$$y'|_{x=3} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Ejemplo 2.

$$y = \frac{1}{x}; \text{ hallar } y'.$$

Solución. Como en el ejemplo anterior, tendremos

$$y = \frac{1}{x}; \quad y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x};$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)};$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[-\frac{1}{x(x + \Delta x)}\right] = -\frac{1}{x^2}.$$

Observación. En el párrafo anterior se estableció que, si el espacio s recorrido por el punto móvil, en función del tiempo t, viene dado por la fórmula

$$s = f(t),$$

entonces la velocidad v en el instante t se expresará por la fórmula:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Por tanto,

$$v = s'_t = f'(t),$$

es decir, la velocidad es igual a la derivada* del espacio respecto al tiempo t.

§ 3. INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA

Hemos llegado al concepto de derivada, examinando la velocidad del movimiento de un cuerpo (punto), es decir, partiendo de

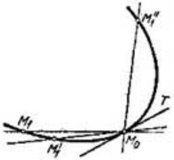

Fig. 57

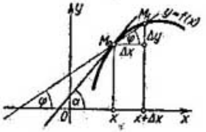

Fig. 58

razonamientos puramente *mecánicos*. Ahora daremos a la derivada otra interpretación, la *geométrica*, también muy importante.

Para ello es necesario, ante todo, definir la *tangente* a una curva en un punto dado.

Sea una curva y un punto fijo M_0 en ella. Tomemos en la curva otro punto M_1 y tracemos una secante M_0M_1 (fig. 57). Si el punto M_1 se aproxima ilimitadamente al punto M_0, desplazándose por la curva, la secante M_0M_1 ocupará las diversas posiciones M_0M_1', M_0M_1'', etc. Si, con la aproximación ilimitada del punto M_1 por la curva al punto M_0 (independientemente del lado por el que se aproxima), la secante tiende a ocupar la posición de una recta deter-

*) Cuando decimos «derivada respecto a x» o «derivada respecto al tiempo t», etc., tenemos en cuenta que, al hallar la derivada, la variable x o el tiempo t, etc., se consideran como argumentos.

minada M_0T, esta última se llama tangente a la curva en el punto M_0 (el concepto «tiende a ocupar» se precisará más adelante).

Examinemos la función $f(x)$ y la curva correspondiente,

$$y = f(x),$$

en el sistema de coordenadas rectangulares (fig. 58). A cierto valor de x le corresponde un valor de la función $y = f(x)$. A los valores dados de x e y les corresponde en la curva el punto $M_0(x, y)$. Demos al argumento x un incremento Δx. Al nuevo valor del argumento $x + \Delta x$ le corresponde un valor «incrementado» de la función $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. A éste último le corresponde en la curva el punto $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Tracemos la secante M_0M_1 y designemos por φ el ángulo formado por la secante y la dirección positiva del eje Ox. Formemos la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. De la figura 58 se deduce que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\varphi. \tag{1}$$

Cuando Δx tiende a cero, el punto M_1 se desplazará a lo largo de la curva, aproximándose al punto M_0. La secante M_0M_1 girará alrededor del punto M_0 y el ángulo φ variará, al variar Δx. Si, para $\Delta x \to 0$, el ángulo φ tiende a cierto límite α, la recta que pasa por el punto M_0 y que forma con la dirección positiva del eje de abscisas el ángulo α, será precisamente la tangente que se busca. Sin dificultad hallaremos el coeficiente angular de esta tangente:

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

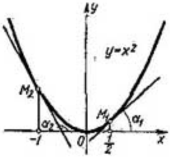

Fig. 59

Por tanto,

$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha, \tag{2}$$

es decir, el *valor de la derivada $f'(x)$ correspondiente al valor dado del argumento x, será igual a la tangente del ángulo formado por la dirección positiva del eje Ox y la tangente a la curva de la función $f(x)$ en el punto correspondiente $M_0(x, y)$.*

Ejemplo. Hallar las tangentes de los ángulos de inclinación de la línea tangente a la curva $y = x^2$ en los puntos

$$M_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right); \quad M_2(-1, 1) \text{ (fig. 59)}.$$

Solución. En virtud del ejemplo 1 § 2, se tiene: $y' = 2x$; entonces:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = y'\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 1; \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = y'\Big|_{x=-1} = -2.$$

§ 4. DERIVACION DE LAS FUNCIONES

Definición. Si la función

$$y = f(x) \tag{1}$$

tiene derivada en el punto $x = x_0$, es decir, si existe

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \tag{2}$$

se dice que para el valor dado $x = x_0$ la función es *derivable* o, lo que es lo mismo, tiene derivada.

Si la función es derivable en *cada punto* de un cierto segmento $[a, b]$ o intervalo (a, b), se dice que la función es *derivable sobre el segmento* $[a, b]$ o, respectivamente, *en el intervalo* (a, b).

Teorema. *Si la función $y = f(x)$ es derivable en un punto $x = x_0$, será continua en este punto.*

En efecto, si

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

se tiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \gamma,$$

donde γ es una magnitud que tiende a cero, cuando $\Delta x \to 0$. Pero en este caso

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \gamma \Delta x;$$

de donde se deduce que $\Delta y \to 0$, cuando $\Delta x \to 0$, lo que quiere decir que la función $f(x)$ es continua en el punto x_0 (véase § 9 del capítulo II).

De este modo, en *los puntos de discontinuidad la función no puede tener derivada*. La recíproca no es cierta, es decir, que de la continuidad de la función $y = f(x)$ en cierto punto $x = x_0$ no se deduce que en este punto la función es necesariamente derivable: la función $f(x)$ puede no tener derivada en el punto x_0. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. La función $f(x)$ está definida en el segmento $[0, 2]$ de la manera siguiente (fig. 60):

$$f(x) = x, \text{ cuando } 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$f(x) = 2x - 1, \text{ cuando } 1 < x \leqslant 2.$$

Esta función no tiene derivada en $x = 1$, aunque es continua en este punto.

En efecto, cuando $\Delta x > 0$, se tiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta u)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2(1+\Delta x)-1]-[2\cdot 1-1]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2,$$

cuando $\Delta x < 0$, obtenemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[1+\Delta x]-1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Es decir que este límite depende del signo de Δx, lo que significa, a su vez, que en el punto $x = 1$ la función no tiene derivada*. Geométricamente, esto

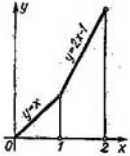

Fig. 60

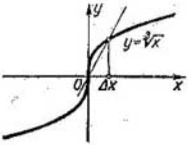

Fig. 61

significa que en el punto $x = 1$ la «curva» dada no tiene tangente determinada.

La continuidad de la función en el punto $x = 1$ se deduce de lo siguiente:

$$\Delta y = \Delta x, \text{ cuando } \Delta x < 0,$$

$$\Delta y = 2\Delta x, \text{ cuando } \Delta x > 0.$$

Por tanto, en ambos casos $\Delta y \to 0$, cuando $\Delta x \to 0$.

Ejemplo 2. La función $y = \sqrt[3]{x}$, cuya gráfica se muestra en la fig. 61, está definida y es continua para todos los valores de la variable independiente. Veamos, si esta función tiene derivada en el punto $x = 0$. Hallemos los valores de la función en $x = 0$ y en $x = 0 + \Delta x$. Cuando $x = 0$, tenemos $y = 0$. Cuando $x = 0 + \Delta x$, $y + \Delta y = \sqrt[3]{(\Delta x)}$.

Por consiguiente,

$$\Delta y = \sqrt[3]{(\Delta x)}.$$

Hallemos el límite de la razón del incremento de la función al del argumento:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty.$$

Así pues, la razón del incremento de la función al del argumento tiende al infinito en el punto $x = 0$, cuando $\Delta x \to 0$, y, por tanto, no tiene límite. Por consiguiente, esta función no es derivable en el punto $x = 0$. La tangente

*) Según la definición de derivada, es necesario que la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tienda a un mismo límite, cuando $\Delta x \to 0$, independientemente de la manera en que Δx tiende a cero.

a la curva en este punto forma con el eje de abscisas un ángulo $\frac{\pi}{2}$, es decir, coincide con el eje Oy.

§ 5. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES. DERIVADA DE LA FUNCION $y=x^n$, SIENDO n ENTERO Y POSITIVO

Para hallar la derivada de una función dada $y = f(x)$, basándose en la definición general de derivada, es necesario:

1) dar al argumento x un incremento Δx y calcular el valor incrementado de la función:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x);$$

2) hallar el incremento correspondiente de la función:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

3) formar la razón del incremento de la función al del argumento:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

4) calcular el límite de la razón mencionada, cuando $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Este método general de cálculo de derivadas lo emplearemos para obtener las derivadas de algunas funciones elementales.

Teorema. *La derivada de la función $y = x^n$ en la que n es un número entero y positivo, es igual a nx^{n-1}*, es decir,

$$\text{siendo } y = x^n, \quad y' = nx^{n-1}. \tag{I}$$

Demostración. Sea la función

$$y = x^n.$$

1) Si x adquiere un incremento Δx, se tiene:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n.$$

2) Según el binomio de Newton tenemos:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \\ + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - x^n$$

ó

$$\Delta y = nx^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n.$$

3) Hallamos la razón:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x+\ \dots\ +(\Delta x)^{n-1}.$$

4) El límite de esta expresión será:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x+\ \dots\ +(\Delta x)^{n-1}\right]=nx^{n-1}.$$

Por consiguiente, $y'=nx^{n-1}$, lo que se trataba de demostrar.

Ejemplo 1.

$$y=x^5,\ y'=5x^{5-1}=5x^4.$$

Ejemplo 2. $y=x$, $y'=1x^{1-1}$, $y'=1$. El último resultado tiene una interpretación geométrica muy sencilla: la línea tangente a la recta $y=x$ coincide con esta recta, sea cual fuese el valor de x, y, por tanto, forma con la dirección positiva del eje Ox un ángulo cuya tangente es igual a 1.

Observemos que la fórmula (I) es válida también, cuando n es negativo o fraccionario, como comprobaremos en el § 12.

Ejemplo 3. $y=\sqrt{x}$.

Representemos esta función en forma de potencia

$$y=x^{\frac{1}{2}}.$$

Según la fórmula (I) (teniendo en cuenta la observación que acabamos de hacer), obtenemos:

$$y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

ó

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ejemplo 4. $y=\frac{1}{x\sqrt{x}}$.

Representemos y en forma de función potencial

$$y=x^{-\frac{3}{2}}.$$

Entonces,

$$y'=-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1}=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}.$$

§ 6. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES $y = \operatorname{sen} x$; $y = \cos x$

Teorema 1. *La derivada de* sen x *es* cos x, *es decir,*

$$si\ y = \operatorname{sen} x,\ y' = \cos x. \qquad \text{(II)}$$

Demostración. Demos al argumento x un incremento Δx, entonces:

1) $y + \Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x)$;

2) $$\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} =$$

$$= 2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

4) $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

pero, puesto que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1,$$

se tiene:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Esta igualdad se obtiene, teniendo en cuenta que cos x es una función continua:

Teorema 2. *La derivada de* cos x es $-$sen x, es decir,

$$si\ y = \cos x,\ y' = -\operatorname{sen} x. \qquad \text{(III)}$$

Demostración: Demos al argumento x un incremento Δx. Entonces:

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x);$$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \operatorname{sen} \frac{x + \Delta x - x}{2} \operatorname{sen} \frac{x + \Delta x + x}{2} =$$

$$= -2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

y, teniendo en cuenta que sen x es una función continua, finalmente tenemos:

$$y' = -\operatorname{sen} x.$$

§ 7. DERIVADAS DE UNA MAGNITUD CONSTANTE, DEL PRODUCTO DE UNA MAGNITUD CONSTANTE POR UNA FUNCION, DE UNA SUMA, PRODUCTO Y COCIENTE

Teorema 1. *La derivada de una constante es igual a cero, es decir, si $y = C$ y $C = const$, se tiene $y' = 0$.* (IV)

Demostración. $y = C$ es una función de x tal que todos sus valores son iguales a C para cualquier x.

Por tanto, cualquiera que sea el valor de x, se tiene:

$$y = f(x) = C.$$

Demos al argumento x un incremento Δx ($\Delta x \neq 0$). Como la función y conserva el valor C para todos los valores del argumento, se tiene

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = C.$$

Esto quiere decir que el incremento de la función es igual a cero:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0.$$

La razón del incremento de la función al del argumento es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

y, por tanto,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

es decir, $y' = 0$.

Este resultado tiene una sencilla interpretación geométrica. La gráfica de la función $y = C$ es una recta paralela al eje Ox. Por tanto, la línea tangente a la gráfica coincide con esta recta en cada uno de sus puntos y, como consecuencia, forma con el eje Ox un ángulo cuya tangente y' es igual a cero.

Teorema 2. El *factor constante se puede escribir fuera del signo de derivada, es decir,*

$$\textit{si } y = Cu(x), \text{ donde } C = \text{const}, \textit{ entonces } y' = Cu'(x). \qquad \text{(V)}$$

Demostración. Razonando como en el teorema anterior, tenemos:

$$y = Cu(x),$$

$$y + \Delta y = Cu(x + \Delta x),$$

$$\Delta y = Cu(x + \Delta x) - Cu(x) = C[u(x + \Delta x) - u(x)],$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = C \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}, \text{ es decir, } y' = Cu'(x).$$

Ejemplo 1. $y = 3\frac{1}{\sqrt{x}}$.

$$y' = 3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = 3\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = 3\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}},$$

es decir,

$$y' = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}.$$

Teorema 3. *La derivada de la suma de un número finito de las funciones derivables es igual a la suma de las derivadas de estas funciones*).*

Por ejemplo, en el caso de tres sumandos tenemos:

$$y = u(x) + v(x) + w(x); \; y' = u'(x) + v'(x) + w'(x). \qquad \text{(VI)}$$

Demostración: Para los valores del argumento x se tiene:

$$y = u + v + w$$

(para abreviar, omitimos x en la designación de la función).

Para el valor del argumento $x + \Delta x$ tenemos:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) + (w + \Delta w);$$

donde Δy, Δu, Δv y Δw son incrementos de las funciones y, u, v y w, que corresponden al incremento Δx del argumento x. Por consiguiente,

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

ó

$$y' = u'(x) + v'(x) + w'(x).$$

Ejemplo 2. $y = 3x^4 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$,

$$y' = 3(x^4)' - \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = 3 \cdot 4x^3 - \left(-\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{1}{3}-1},$$

es decir,

$$y' = 12x^3 + \frac{1}{3}\,\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}.$$

Teorema 4. *La derivada del producto de dos funciones derivables es igual al producto de la derivada de la primera función por la segunda, más el producto de la primera función por la derivada de la segunda, es decir, si $y = uv$, entonces $y' = u'v + uv'$.* (VII)

Demostración. De un modo análogo al teorema anterior, obtenemos:

$$y = uv,$$

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v),$$

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = \Delta u v + u \Delta v + \Delta u \, \Delta v,$$

*) La expresión $y = u(x) - v(x)$ es idéntica a la expresión $y = u(x) + (-1)\,v(x)$ y, por consiguiente,

$$y' = [u(x) + (-1)\,v(x)]' = u'(x) + [-v(x)]' = u'(x) - v'(x).$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}v+\lim_{\Delta x\to 0}u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}=$$

$$=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)v+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

ya que u y v no dependen de Δx.

Analicemos el último término del segundo miembro

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Puesto que la función $u(x)$ es derivable, será también continua. Por tanto, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$. Además

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'\neq\infty.$$

Así, el término examinado es igual a cero y en definitiva tenemos:

$$y'=u'v+uv'$$

Basándonos en el teorema demostrado se deduce fácilmente la regla para la derivación del producto de cualquier número de funciones.

Si tenemos, por ejemplo, el producto de tres funciones

$$y=uvw,$$

entonces, representando el segundo miembro como producto de u y (vw) obtenemos: $y'=u'(vw)+u(vw)'=u'vw+u(v'w+vw')=u'vw+uv'w+uvw'$. De la misma manera se deduce una fórmula análoga para la derivada del producto de cualquier número (finito) de funciones. Es decir, si $y=u_1u_2\ldots u_n$, tenemos:

$$y'=u_1'u_2\ldots u_{n-1}u_n+u_1u_2'\ldots u_{n-1}u_n+\ldots+u_1u_2\ldots u_{n-1}u_n'.$$

Ejemplo 3. Si $y=x^2\operatorname{sen}x$, se tiene:

$$y'=(x^2)'\operatorname{sen}x+x^2(\operatorname{sen}x)'=2x\operatorname{sen}x+x^2\cos x.$$

Ejemplo 4. Si $y=\sqrt{x}\operatorname{sen}x\cos x$, se tiene:

$$y'=(\sqrt{x})'\operatorname{sen}x\cos x+\sqrt{x}(\operatorname{sen}x)'\cos x+\sqrt{x}\operatorname{sen}x(\cos x)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sen}x\cos x+\sqrt{x}\cos x\cos x+\sqrt{x}\operatorname{sen}x(-\operatorname{sen}x)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sen}x\cos x+\sqrt{x}(\cos^2x-\operatorname{sen}^2x)=\frac{\operatorname{sen}2x}{4\sqrt{x}}+\sqrt{x}\cos 2x.$$

Teorema 5. *La derivada de una fracción (es decir, del cociente de la división de una función por otra) es igual a otra fracción que tiene por denominador el cuadrado del denominador de la fracción dada y por numerador, la diferencia entre el producto del denominador por la derivada del numerador y el producto del numerador por la derivada del denominador; es decir si* $y=\frac{u}{v}$, *se tiene* $y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$. (VIII)

Demostración. Si Δy, Δu y Δv son los incrementos de las funciones y, u, v que corresponden al incremento Δx del argumento x entonces se tiene:

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v},$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\,\Delta u-u\,\Delta v}{v(v+\Delta v)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{v\,\Delta u-u\,\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}=\frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)},$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}(v+\Delta v)}.$$

Observando que $\Delta v\to 0$, cuando $\Delta x\to 0$*), obtenemos:

$$y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Ejemplo 5. Si $y=\frac{x^3}{\cos x}$, tendremos:

$$y'=\frac{(x^3)'\cos x-x^3(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{3x^2\cos x+x^3\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}.$$

Observación. Dada una función del tipo

$$y=\frac{u(x)}{C},$$

en la que el denominador C es una constante, para derivar esta función no hace falta recurrir a la fórmula (VIII); en este caso es más

*) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$, ya que la función $v(x)$ es derivable y, por consiguiente, continua.

conveniente la fórmula (V):

$$y' = \left(\frac{1}{C}u\right)' = \frac{1}{C}u' = \frac{u'}{C}.$$

Es obvio que este mismo resultado se obtiene, aplicando la fórmula (VIII).

Ejemplo 6. Si $y = \frac{\cos x}{7}$, tendremos:

$$y' = \frac{(\cos x)'}{7} = -\frac{\operatorname{sen} x}{7}.$$

§ 8. DERIVADA DE LA FUNCION LOGARITMICA

Teorema. *La derivada de la función* $\log_a x$ *es igual a* $\frac{1}{x}\log_a e$, *es decir, si* $y = \log_a x$, *se tiene* $y' = \frac{1}{x}\log_a e$. (IX)

Demostración. Supongamos que Δy es el incremento de la función $y = \log_a x$, correspondiente al incremento Δx del argumento x. Entonces:

$$y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x);$$

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Multiplicando y dividiendo por x el segundo miembro de la última igualdad obtendremos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Designemos por α la magnitud $\frac{\Delta x}{x}$. Para un valor dado de x, $\alpha \to 0$, si $\Delta x \to 0$. Por tanto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Sin embargo, como se sabe, (§ 7, cap. II),

$$\lim_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Si la expresión que se halla bajo el signo de logaritmo tiende al número e, el logaritmo de ésta tiende hacia $\log_a e$ (en virtud de la continuidad de la función logarítmica). Según esto, tendremos en definitiva:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{x} \log_a (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Considerando que $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$, la fórmula obtenida puede escribirse como sigue:

$$y' = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln a}.$$

Veamos el siguiente caso particular. Si en esta fórmula $a = e$, $\ln a = \ln e = 1$, es decir, cuando $y = \ln x$, se tiene

$$y' = \frac{1}{x}. \tag{X}$$

§ 9. DERIVADA DE LA FUNCION COMPUESTA

Supongamos $y = f(x)$ una función compuesta, es decir, una función tal que pueda ser representada en la forma siguiente:

$$y = F(u), \quad u = \varphi(x)$$

o $y = F[\varphi(x)]$ (cap. I, § 8). La variable u en la expresión $y = F(u)$ se *denomina argumento (variable) intermedio.*

Establezcamos la regla de derivación de una función compuesta.

Teorema. *Si en cierto punto x la función $u = \varphi(x)$ tiene por derivada $u'_x = \varphi'(x)$ y la función $y = F(u)$ tiene por derivada $y'_u = F'(u)$ para el valor correspondiente de u, la función compuesta $y = F[\varphi(x)]$ en el punto dado x tendrá también derivada, cuya expresión será:*

$$y'_x = F'_u(u)\, \varphi'(x),$$

donde u debe ser sustituida por $u = \varphi(x)$. La fórmula obtenida se puede expresar en forma abreviada, como sigue:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

es decir que la derivada de una función compuesta es igual al producto de la derivada de la función dada respecto al argumento intermedio u por la derivada del argumento intermedio respecto a x.

Demostración. Para un valor determinado de x, se tiene:

$$u = \varphi(x), \ y = F(u).$$

Para el valor incrementado del argumento $x + \Delta x$, tenemos:

$$u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x), \ y + \Delta y = F(u + \Delta u).$$

Al incremento Δx le corresponde el incremento Δu, al que, a su vez, corresponde el incremento Δy; además, cuando $\Delta x \to 0$, Δu y Δy tenderán también a cero. Según la hipótesis:

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u.$$

Según la definición de límite, obtendremos (para $\Delta u \neq 0$):

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha \tag{1}$$

donde $\alpha \to 0$, cuando $\Delta u \to 0$. Escribamos la ecuación (1) en la forma:

$$\Delta y = y'_u \, \Delta u + \alpha \, \Delta u. \tag{2}$$

Sea cual fuese α, la ecuación (2) se verifica también para $\Delta u = 0$, puesto que se convierte en identidad, $0 = 0$. Cuando $\Delta u = 0$, suponemos que $\alpha = 0$. Dividiendo por Δx los dos miembros de la ecuación (2), tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{3}$$

Según la hipótesis:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Pasando al límite en la ecuación (3), cuando $\Delta x \to 0$, hallaremos:

$$y'_x = y'_u u'_x. \tag{4}$$

Ejemplo 1. Dada la función $y = \operatorname{sen}(x^2)$, hallar y'_x. Interpretemos la función propuesta como función de función:

$$y = \operatorname{sen} u, \quad u = x^2.$$

Tenemos $y'_u = \cos u$, $u'_x = 2x$.

Por tanto, según la fórmula (4):

$$y'_x = y'_u\ u'_x = \cos u \cdot 2x$$

y sustituyendo u por su expresión, obtenemos en definitiva:

$$y'_x = 2x \cos (x^2).$$

Ejemplo 2. Dada la función $y = (\ln x)^3$, hallar y'_x. Representemos la función propuesta de la forma siguiente:

$$y = u^3,\ u = \ln x.$$

Tenemos

$$y'_u = 3u^2,\ u'_x = \frac{1}{x}.$$

Por consiguiente,

$$y'_x = 3u^2 \frac{1}{x} = 3 (\ln x)^2 \frac{1}{x}.$$

Si la función $y = f(x)$ es tal que puede ser representada en la forma

$$y = F(u),\quad u = \varphi(v),\quad v = \psi(x),$$

su derivada y'_x se obtiene, aplicando sucesivamente el teorema anterior.

Sabemos que

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Aplicando el mismo teorema para hallar u'_x, tenemos:

$$u'_x = u'_v v'_x,$$

y sustituyendo en la primera igualdad el factor u'_x por su expresión, obtenemos:

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x \tag{5}$$

ó

$$y'_x = F'_u(u)\, \varphi'_v(v)\, \psi'_x(x).$$

Ejemplo 3. Dada la función $y = \operatorname{sen} [(\ln x)^3]$, hallar y'_x. Representemos la función propuesta en la forma

$$y = \operatorname{sen} u,\ u = v^3,\ v = \ln x.$$

Tenemos:

$$y'_u = \cos u,\ u'_v = 3v^2,\ v'_x = \frac{1}{x}.$$

Por tanto, según la fórmula (5):

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x = 3 (\cos u)\, v^2 \frac{1}{x},$$

y finalmente:

$$y'_x = \cos [(\ln x)^3] \cdot 3 (\ln x)^2 \frac{1}{x}.$$

Hay que tener en cuenta que la función examinada está definida sólo cuando $x > 0$.

§ 10. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$, $y = \ln |x|$

Teorema 1. *La derivada de la función $y = \operatorname{tg} x$ es igual a $\frac{1}{\cos^2 x}$, es decir, si $y = \operatorname{tg} x$, $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$.* (XI)

Demostración. Sea

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

de la fórmula para derivar fracciones (véase fórmula (VIII), § 7, capítulo III), se tiene:

$$y' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - \operatorname{sen} x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Teorema 2. *La derivada de la función $y = \operatorname{cotg} x$ es igual a $-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$, es decir:*

$$si\ y = \operatorname{cotg} x,\ y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}. \qquad \text{(XII)}$$

Demostración. Sea

$$y = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},$$

se tendrá

$$y' = \frac{(\cos x)' \operatorname{sen} x - \cos x (\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Ejemplo 1. Si $y = \operatorname{tg} \sqrt{x}$,

$$y' = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}}.$$

Ejemplo 2. Si $y = \ln \operatorname{cotg} x$,

$$y' = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}(\operatorname{cotg} x)' = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}\left(-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right) = -\frac{1}{\cos x \operatorname{sen} x} = -\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

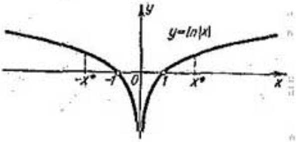

Fig. 62

Teorema 3. *La derivada de la función* $y = \ln|x|$ (fig. 62) *es igual a* $\frac{1}{x}$, es decir,

$$\text{si } y = \ln|x|, \; y' = \frac{1}{x}. \tag{XIII}$$

Demostración. a) Si $x > 0$, se tiene $|x| = x$, $\ln|x| = \ln x$, y por tanto:

$$y' = \frac{1}{x}.$$

b) Supongamos que $x < 0$. Entonces $|x| = -x$. Pero

$$\ln|x| = \ln(-x),$$

(observemos, que si $x < 0$, $-x > 0$).
Interpretemos la función $y = \ln(-x)$ como función compuesta, haciendo

$$y = \ln u; \; u = -x.$$

Entonces,

$$y'_x = y'_u u'_x = \frac{1}{u}(-1) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

De este modo, para los valores negativos de x también se verifica la igualdad

$$y'_x = \frac{1}{x}.$$

Por tanto, la fórmula (XIII) queda demostrada para cualquier valor de $x \neq 0$ (para $x = 0$ la función $\ln|x|$ no está definida).

§ 11. FUNCION IMPLICITA Y SU DERIVACION

Supongamos que los valores de dos variables, x e y, se encuentran ligados mediante una ecuación que, simbólicamente, escribiremos así:

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Si la función $y = f(x)$ definida en cierto intervalo (a, b) es tal que, al sustituir y en la ecuación (1) por la expresión $f(x)$, la ecuación

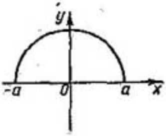

Fig. 63

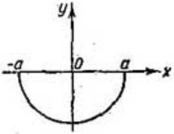

Fig. 64

se convierte en una identidad respecto a x, la función $y = f(x)$ recibe el nombre de *función implícita* determinada por la ecuación (1).

Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \tag{2}$$

determina implícitamente las siguientes funciones elementales (figuras 63 y 64):

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \tag{3}$$

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{4}$$

En efecto, al sustituir y por sus expresiones en la ecuación (2), la convertiremos en identidad, es decir

$$x^2 + (a^2 - x^2) - a^2 = 0.$$

Las expresiones (3) y (4) se han obtenido mediante la resolución de la ecuación (2) respecto a y. Sin embargo, no toda función dada implícitamente puede ser representada en forma explícita, es decir, en forma $y = f(x)$*, donde $f(x)$ es una función elemental.

*) Si la función viene dada en la forma $y = f(x)$, se dice que está dada en *forma explícita* o que es una *función explícita*.

Por ejemplo, las funciones dadas por las ecuaciones

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

ó

$$y - x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} y = 0,$$

no pueden ser expresadas mediante funciones elementales; es decir, no pueden ser resueltas respecto a y.

Observación 1. Es necesario señalar que los términos «función explícita» y «función implícita» no caracterizan la naturaleza de la función, sino la manera en que ésta viene dada.

Toda función explícita, $y = f(x)$, puede ser representada también en forma implícita, $y - f(x) = 0$.

Veamos cómo se obtiene la derivada de una función implícita, sin transformarla en explícita, es decir, sin representarla en la forma $y = f(x)$.

Supongamos que la función viene dada por la ecuación

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Si y es una función de x, determinada por la ecuación anterior, ésta será una identidad.

Al derivar ambos miembros de la identidad respecto a x, considerando que y es una función de x, obtendremos (aplicando la regla para derivar función compuesta):

$$2x + 2yy' = 0,$$

de donde:

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Anotemos que, si derivamos la correspondiente función explícita

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

obtenemos:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{y},$$

es decir, el mismo resultado.

Examinemos un ejemplo más de función implícita y en función de x:

$$y^6 - y - x^2 = 0.$$

Derivemos respecto a x

$$6y^5y' - y' - 2x = 0,$$

y hallamos

$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}.$$

Observación 2. De los ejemplos citados se deduce que, si se trata de hallar la derivada de una función implícita para un valor dado del argumento x, es preciso conocer primeramente el valor de la función y para el mismo valor dado de x.

§ 12. DERIVADAS DE LA FUNCION POTENCIAL CON EXPONENTE REAL CUALQUIERA, DE LA FUNCION EXPONENCIAL Y DE LA FUNCION EXPONENCIAL COMPUESTA

Teorema 1. *La derivada de la función x^n, en la que n es un número real cualquiera, es igual a nx^{n-1}, es decir,*

$$\textit{si } y = x^n, \textit{ se tiene } y' = nx^{n-1}. \qquad \text{(I')}$$

Demostración. Supongamos que $x > 0$. Tomando logaritmos de la función dada, tendremos

$$\ln y = n \ln x.$$

Derivemos ambos miembros de la ecuación respecto a x, considerando que y es función de x:

$$\frac{y'}{y} = n\frac{1}{x}; \; y' = yn\frac{1}{x}.$$

Introduciendo aquí el valor $y = x^n$, obtenemos en definitiva:

$$y' = nx^{n-1}.$$

Es fácil demostrar que esta fórmula es correcta también, cuando $x < 0$, siempre que x^n tenga sentido*).

Teorema 2. *La derivada de la función a^x, en la que $a > 0$, es igual a $a^x \ln a$, es decir,*

$$\textit{si } y = a^x, \quad y' = a^x \ln a. \qquad \text{(XIV)}$$

Demostración. Tomando logaritmos de la igualdad $y = a^x$, se tiene:

$$\ln y = x \ln a.$$

*) Dicha fórmula ha sido ya demostrada (§ 5, cap. III) para el caso en que n es un *número entero y positivo*. Ahora la fórmula (I) queda generalizada para cualquier número constante n.

Derivemos la igualdad obtenida, considerando y como función de x.

$$\frac{1}{y}y' = \ln a; \quad y' = y \ln a,$$

o sea

$$y' = a^x \ln a.$$

Si la base es $a = e$, entonces $\ln e = 1$, y obtenemos la fórmula:

$$y = e^x, \quad y' = e^x. \qquad \text{(XIV)}$$

Ejemplo 1. Dada la función

$$y = e^{x^2}.$$

Interpretémosla como función compuesta, introduciendo el argumento intermedio u:

$$y = e^u, \quad u = x^2;$$

entonces,

$$y'_u = e^u, \quad u'_x = 2x.$$

Por tanto,

$$y'_x = e^u 2x = e^{x^2} 2x.$$

La función en la que tanto la base como el exponente son funciones de x se llama *función exponencial compuesta*. Por ejemplo, $(\operatorname{sen} x)^{x^3}$, $x^{\operatorname{tg} x}$, x^x, $(\ln x)^x$ y, en general, toda función de la forma

$$y = [u(x)]^{v(x)} \equiv u^v.\text{*)}$$

Teorema 3.

Si $y = u^v$, *entonces* $y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u$. (XV)

Demostración. Tomemos logaritmos de la función y:

$$\ln y = v \ln u.$$

Derivando respecto a x la igualdad obtenida, tenemos:

$$\frac{1}{y}y' = v\frac{1}{u}u' + v' \ln u,$$

de donde:

$$y' = y\left(v\frac{u'}{u} + v' \ln u\right).$$

Introduciendo la expresión $y = u^v$, obtenemos:

$$y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u.$$

---

*) Tal función se suele llamar también *exponencial potencial* o *potencial exponencial*.

Así, pues, la derivada de la función exponencial compuesta consta de dos términos que se obtienen del siguiente modo: el primer sumando si, al derivar, suponemos que u es función de x, mientras que v es *constante* (u^v se interpreta como función *potencial*); el segundo, si suponemos que v es función de x, permaneciendo u *constante* (u^v se interpreta como función *exponencial*)

Ejemplo 2. Si $y=x^x$, $y'=xx^{x-1}(x')+x^x(x')\ln x$, o sea, $y'=x^x+x^x\ln x=x^x(1+\ln x)$.

Ejemplo 3. Si $y=(\operatorname{sen} x)^{x^2}$, tendremos

$$y'=x^2(\operatorname{sen} x)^{x^2-1}(\operatorname{sen} x)'+(\operatorname{sen} x)^{x^2}(x^2)'\ln\operatorname{sen} x=$$
$$=x^2(\operatorname{sen} x)^{x^2-1}\cos x+(\operatorname{sen} x)^{x^2}2x\ln\operatorname{sen} x.$$

El procedimiento, aplicado en este párrafo para calcular derivadas, consiste en hallar primeramente la derivada del *logaritmo de la función dada*. Este procedimiento se utiliza ampliamente en la derivación de funciones, y, a veces, simplifica mucho los cálculos.

Ejemplo 4. Hallar la derivada de la función

$$y=\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}.$$

Solución. Tomando logaritmos, encontramos:

$$\ln y=2\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)-3\ln(x+4)-x.$$

Derivemos ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{x+4}-1.$$

Multiplicando por y, y sustituyendo y por $\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}$, obtenemos

$$y'=\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}\left[\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{x+4}-1\right].$$

Observación. La expresión $\frac{y'}{y}=(\ln y)'$, que es la derivada respecto a x del logaritmo natural de la función dada $y=y(x)$, se llama *derivada logarítmica*.

§ 13. FUNCION INVERSA Y SU DERIVACION

Supongamos

$$y=f(x) \tag{1}$$

es una función creciente (fig. 65) o decreciente definida en cierto intervalo (a, b) $(a<b)$ (§ 6, cap. I). Hagamos $f(a)=c$ y $f(b)=d$. Para concretar, en adelante consideraremos sólo la función creciente.

Examinemos dos valores diferentes x_1 y x_2 pertenecientes al intervalo (a, b). De la definición de función creciente se deduce que, si $x_1<x_2$, $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, entonces $y_1<y_2$. Por tanto, a dos valores x_1 y x_2, les corresponden dos valores diferentes

y_1 e y_2 de la función. La recíproca también es cierta. Es decir, si $y_1 < y_2$, $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, entonces, de la definición de función creciente, se deduce que $x_1 < x_2$. De este modo, entre los valores de x y los correspondientes de y se establece una relación biunívoca.

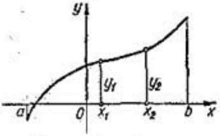

Fig. 65

Interpretando los valores de y como valores del argumento, y los valores de x como valores de la función, obtendremos x como función de y:

$$x = \varphi(y). \tag{2}$$

Esta función se denomina *inversa* de la función $y = f(x)$.

Recíprocamente la función $y = f(x)$ es la inversa de la función $x = \varphi(y)$.

Razonando del mismo modo, se puede demostrar que una función decreciente también tiene su inversa.

Observación 1. Indiquemos, sin demostración, que, *si la función creciente (decreciente) $y = f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, siendo $f(a) = c$ y $f(b) = d$, entonces la función inversa estará definida y será continua en el segmento $[c, d]$.*

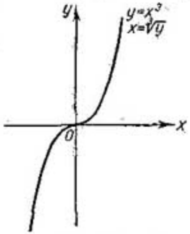

Fig. 66

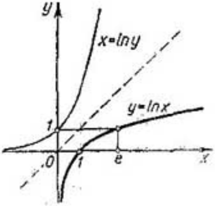

Fig. 67

Ejemplo 1. Sea la función $y = x^3$. Esta función es creciente en el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$ y su inversa es $x = \sqrt[3]{y}$ (fig. 66).

Observemos que la función inversa $x = \varphi(y)$ se halla, resolviendo la ecuación $y = f(x)$ respecto a x.

Ejemplo 2. Sea la función $y = e^x$. Esta función es creciente en el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$; su inversa es $x = \ln y$. El dominio de definición de ésta es $0 < y < +\infty$ (fig. 67).

Observación 2. Si la función $y = f(x)$ no es creciente, ni decreciente en cierto intervalo, ella puede tener varias funciones inversas*).

Ejemplo 3. La función $y = x^2$ está definida en el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$. No es creciente, ni decreciente, ni tampoco tiene función inversa. En el intervalo $0 \leqslant x < +\infty$ dicha función es creciente y su inversa es $x = \sqrt{y}$. En el intervalo $-\infty < x < 0$ la misma función será decreciente y su inversa es $x = -\sqrt{y}$ (fig. 68).

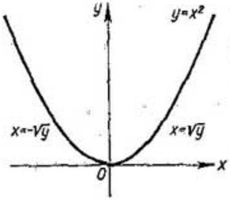

Fig. 68

Observación 3. Siendo $y = f(x)$ y $x = \varphi(y)$ funciones recíprocamente inversas, sus gráficas se representan por una misma curva.

Pero, si designamos por x el argumento de la función inversa y por y la propia función, entonces las gráficas de las dos funciones serán ya distintas en un mismo sistema de coordenadas.

Es fácil ver que las gráficas serán simétricas con respecto a la bisectriz del primer ángulo de coordenadas.

Ejemplo 4. En la figura 67 están trazadas las gráficas de la función $y = e^x$ (o de $x = \ln y$) y de su inversa, $y = \ln x$, examinadas en el ejemplo 2.

El siguiente teorema nos permitirá calcular la derivada de la función $y = f(x)$, conociendo la derivada de la función inversa.

Teorema: *Si para la función*

$$y = f(x) \tag{1}$$

existe una función inversa

$$x = \varphi(y) \tag{2}$$

tal que en un punto analizado y tiene derivada $\varphi'(y)$, distinta de cero, entonces la función $y = f(x)$, en el punto correspondiente x, tiene derivada $f'(x)$, igual a $\frac{1}{\varphi'(y)}$, es decir, se verifica la fórmula

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}. \tag{XVI}$$

*) Insistimos que, al decir que «y es función de x», entendemos que y depende de x de modo unívoco.

De este modo, la derivada de una de las dos funciones recíprocamente inversas es igual a la unidad dividida por la derivada de la segunda función, para los correspondientes valores de x e y*).

Demostración. Dando a y el incremento Δy, de la igualdad (2) deducimos

$$\Delta x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y).$$

Como $\varphi(y)$ es una función monótona, se tiene $\Delta x \neq 0$. Escribamos la identidad

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

Por ser continua la función $\varphi(y)$, $\Delta x \to 0$, cuando $\Delta y \to 0$.

Tomando el límite, cuando $\Delta y \to 0$, en ambos miembros de la última identidad obtenemos:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y},$$

o sea,

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)},$$

es decir, llegamos a la fórmula (XVI).

Observación. La fórmula (XVI) se puede obtener también, aplicando el teorema de derivación de funciones compuestas.

En efecto, derivemos los dos miembros de la igualdad (2) respecto a x, considerando que y es función de x:

$$1 = \varphi'(y)\, y'_x,$$

de donde:

$$y'_x = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

La interpretación geométrica es evidente. Examinemos la gráfica de la función $y = f(x)$ (fig. 69). La misma curva será la gráfica

*) Cuando escribimos $f'(x)$ o y'_x, consideramos que, al calcular la derivada, tomamos x como variable independiente. Cuando escribimos $\varphi'(y)$ o x'_y, consideramos que, al calcular la derivada, la variable independiente es y. Observemos que *después de obtener la derivada respecto a y que figura en el 2° miembro de la fórmula (XVI), es necesario sustituir y por $f(x)$.*

de la función $x = \varphi(y)$ en la que x se considera como función e y, como variable independiente. Consideremos un punto $M(x, y)$ de esta curva. Tracemos una tangente a la misma en este punto. Los ángulos formados por la tangente mencionada y las direcciones positivas de los ejes Ox y Oy los designaremos por α y β respectivamente. En virtud de los resultados obtenidos en el § 3, acerca del significado geométrico de la derivada, tenemos:

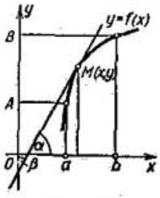

Fig. 69

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = \operatorname{tg}\alpha \\ \varphi'(y) = \operatorname{tg}\beta. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

De la figura 69 se deduce que, si $\alpha < \frac{\pi}{2}$, se tiene:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Ahora bien, si $\alpha > \frac{\pi}{2}$, naturalmente $\beta = \frac{3\pi}{2} - \alpha$.

Por consiguiente, en cualquier caso

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{cotg}\alpha$$

de donde

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{cotg}\alpha = 1,$$

o sea

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Introduciendo aquí las expresiones de $\operatorname{tg}\alpha$ y $\operatorname{tg}\beta$ de la fórmula (3), obtenemos:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

§ 14. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS Y SU DERIVACION

1) Función: $y = \operatorname{arcsen} x$.

Examinemos la función

$$x = \operatorname{sen} y \qquad (1)$$

y construyamos su gráfica, dirigiendo el eje Oy verticalmente hacia arriba (fig. 70). Esta función está definida en el invervalo infinito $-\infty < y < +\infty$. En el segmento $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, la función $x = \operatorname{sen} y$

es creciente, sus valores llenan el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Por eso la función $x = \operatorname{sen} y$ tiene su inversa, que se escribe así: $y = \operatorname{arcsen} x$*).

Esta función está definida en el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$, sus valores llenan el segmento $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. En la figura 70 la gráfica de la función $y = \operatorname{arcsen} x$ va en línea gruesa.

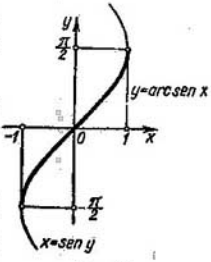

Fig. 70

Teorema 1. *La derivada de la función* $\operatorname{arcsen} x$ *es igual a* $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, es decir,

si $y = \operatorname{arcsen} x$, *se tiene* $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. (XVIII)

Demostración. Según la igualdad (1) tenemos:

$$x'_y = \cos y,$$

y conforme a la regla para derivar la función inversa, será:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y},$$

pero

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Entonces

$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La raíz lleva el signo positivo, porque el valor de la función $y = \operatorname{arcsen} x$ se encuentra en el segmento $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ de donde $\cos y \geqslant 0$.

Ejemplo 1. $y = \operatorname{arcsen} e^x$,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}(e^x)' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

Ejemplo 2. $y = \left(\operatorname{arcsen} \frac{1}{x}\right)^2$,

$$y' = 2 \operatorname{arcsen} \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \left(\frac{1}{x}\right)' = -2 \operatorname{arcsen} \frac{1}{x} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

---

*) Observemos que la igualdad $y = \operatorname{arcsen} x$ conocida del curso de trigonometría, es otra forma de escribir la igualdad (1). Aquí (dado x), y significa conjunto de valores de los ángulos, cuyo seno es igual a x.

2) Función: $y = \arccos x$.
Como en el caso anterior, examinemos la función

$$x = \cos y, \tag{2}$$

construyamos su gráfica y dirijamos el eje Oy hacia arriba (fig. 71). Esta función está definida en el intervalo infinito $-\infty < y < +\infty$. En el segmento $0 \leqslant y \leqslant \pi$ la función $x = \cos y$ es decreciente y tiene su inversa designada así:

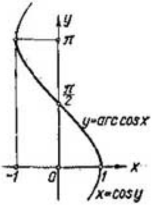

Fig. 71

$$y = \arccos x.$$

Esta función está definida en el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Los valores de la función llenan el segmento $\pi \geqslant y \geqslant 0$. En la figura 71 la gráfica de la función $y = \arccos x$ va en línea gruesa.

Teorema 2. *La derivada de la función* arccos *x es igual a* $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, es decir, si $y = \arccos x$, *se tiene* $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **(XVIII)**

Demostración. Según la igualdad (2) tenemos:

$$x'_y = -\operatorname{sen} y.$$

Por tanto,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\operatorname{sen} y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}.$$

Pero $\cos y = x$, entonces:

$$y'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En la igualdad $\operatorname{sen} y = \sqrt{1-\cos^2 y}$ la raíz lleva el signo positivo, porque los valores de la función $y = \arccos x$ se encuentran en el segmento $0 \leqslant y \leqslant \pi$, por consiguiente $\operatorname{sen} y \geqslant 0$.

Ejemplo 3. $y = \arccos(\operatorname{tg} x)$,

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}(\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}\,\frac{1}{\cos^2 x}.$$

3) Función: $y = \operatorname{arctg} x$.
Examinemos la función

$$x = \operatorname{tg} y$$

y construyamos su gráfica (fig. 72). Esta función está definida para todos los valores de y, excepto $y=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. En el intervalo $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ la función $x=\operatorname{tg} y$ es creciente y tiene su inversa:

$$y=\operatorname{arctg} x.$$

La función está definida en el intervalo $-\infty<x<+\infty$ y sus valores llenan el intervalo $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$. En la figura 72, la gráfica de la función $y=\operatorname{arctg} x$ va en línea gruesa.

Teorema 3. *La derivada de la función* arctg x *es igual a* $\frac{1}{1+x^2}$, es decir, *si* $y=\operatorname{arctg} x$, *se tiene* $y'=\frac{1}{1+x^2}$. (XIX)

Demostración. Según la igualdad (3) tenemos:

$$x'_y=\frac{1}{\cos^2 y}.$$

Por tanto,

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\cos^2 y,$$

pero

$$\cos^2 y=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y};$$

y, puesto que $\operatorname{tg} y=x$, tenemos en definitiva:

$$y'=\frac{1}{1+x^2}.$$

Ejemplo 4. $y=(\operatorname{arctg} x)^4$,

$$y'=4(\operatorname{arctg} x)^3(\operatorname{arctg} x)'=4(\operatorname{arctg} x)^3\frac{1}{1+x^2}.$$

4) Función: $y=\operatorname{arccotg} x$.
Examinemos la función

$$x=\operatorname{cotg} y. \tag{4}$$

Esta función está definida para todos los valores de y, excepto $y=k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2)$. La gráfica de la función está representada en la figura 73. En el intervalo $0 < y < \pi$ la función $x = \operatorname{cotg} y$ es decreciente y tiene su inversa, la cual se designa así:

$$y = \operatorname{arccotg} x.$$

La función, por tanto, está definida en el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$ y sus valores llenan el intervalo $\pi > y > 0$.

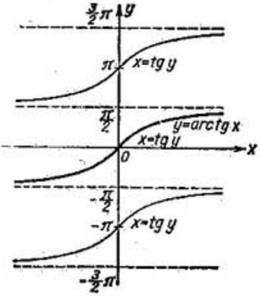

Fig. 72

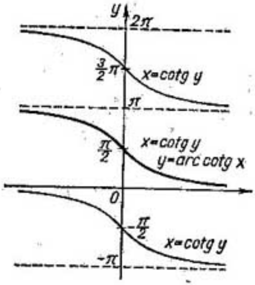

Fig. 73

Teorema 4. *La derivada de la función* $\operatorname{arccotg} x$ *es igual a* $-\frac{1}{1+x^2}$, es decir,

$$\textit{si } y = \operatorname{arccotg} x, \textit{ se tiene } y' = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad \text{(XX)}$$

Demostración: Según la igualdad (4):

$$x'_y = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 y}.$$

Por consiguiente,

$$y'_x = -\operatorname{sen}^2 y = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2 y}.$$

Pero

$$\operatorname{cotg} y = x.$$

Luego,

$$y'_x = -\frac{1}{1+x^2}.$$

§ 15. TABLA DE LAS FORMULAS FUNDAMENTALES PARA LA DERIVACION

Agrupamos ahora en una tabla todas las fórmulas fundamentales y reglas de derivación, obtenidas en los párrafos anteriores.

Fórmulas fundamentales

$$y = \text{const}, \; y' = 0.$$

Función potencial:

$$y = x^{\alpha}, \quad y' = \alpha x^{\alpha-1};$$

en particular,

$$y = \sqrt{x}, \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$y = \frac{1}{x}, \quad y' = -\frac{1}{x^2}.$$

Funciones trigonométricas:

$$y = \operatorname{sen} x, \quad y' = \cos x,$$

$$y = \cos x, \quad y' = -\operatorname{sen} x,$$

$$y = \operatorname{tg} x, \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$y = \operatorname{cotg} x, \quad y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Funciones trigonométricas inversas:

$$y = \operatorname{arcsen} x, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y = \arccos x, \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad y' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$y = \operatorname{arccotg} x, \quad y' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Función exponencial:

$$y = a^x, \quad y' = a^x \ln a;$$

en particular,

$$y = e^x, \quad y' = e^x.$$

Función logarítmica:

$$y = \log_a x, \quad y' = \frac{1}{x} \log_a e;$$

en particular,

$$y = \ln x, \quad y' = \frac{1}{x}.$$

Reglas generales de derivación:

$$y = Cu(x), \qquad y' = Cu'(x) \quad (C = \text{const}),$$

$$y = u + v - w, \qquad y' = u' + v' - w',$$

$$y = u \cdot v, \qquad y' = u'v + uv',$$

$$y = \frac{u}{v}, \qquad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

$$\left.\begin{array}{l} y = f(u), \\ u = \varphi(x), \end{array}\right\} \qquad y'_x = f'_u(u)\, \varphi'_x(x),$$

$$y = u^v, \qquad y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u.$$

Si $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$, donde f y φ son funciones recíprocamente inversas, entonces:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}, \quad \text{donde } y = f(x).$$

§ 16. REPRESENTACION PARAMETRICA DE FUNCION

Consideremos dos ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{array}\right\} \tag{1}$$

donde t toma valores comprendidos en el segmento $[T_1, T_2]$. A cada valor de t le corresponde los de x y de y (suponemos que φ y ψ son funciones unívocas). Considerando que los valores de x y de y son las coordenadas de un punto en el plano Oxy, a cada valor de t le corresponderá un punto determinado del plano. Este punto describe cierta curva en el plano, cuando t varía de T_1 hasta T_2. Las ecuaciones (1) se denominan *ecuaciones paramétricas* de esta curva; t toma el nombre de *parámetro* y el método de dar la curva mediante las ecuaciones (1) se llama método *paramétrico*.

Supongamos ahora que la función $x = \varphi(t)$ tenga su inversa $t = \Phi(x)$. Es evidente que y, en este caso, es función de x:

$$y = \psi[\Phi(x)]. \tag{2}$$

De este modo, las ecuaciones (1) determinan y en función de x y se dice que la función y de x viene representada paramétricamente.

La expresión $y = f(x)$ que muestra como y depende directamente de x, se obtiene eliminando el parámetro t de las ecuaciones (1).

El método paramétrico de dar las curvas se usa ampliamente en mecánica. Si en el plano Oxy se desplaza un punto material y se conocen las leyes del movimiento de sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas,

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

donde el parámetro t es el tiempo, las ecuaciones (1') serán las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del punto en movimiento. Eliminando en estas ecuaciones el parámetro t, obtendremos la ecuación de la trayectoria en la forma $y = f(x)$ o en la forma $F(x, y) = 0$.

Ilustremos esto.

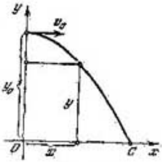

Fig. 74

Problema. Hállese la trayectoria y el punto de caída de un cuerpo arrojado desde un avión que se desplaza horizontalmente a la altura y_0 con velocidad v_0 (se puede prescindir de la resistencia del aire).

Solución. Tomomos el sistema de coordenadas que muestra la figura 74. Suponemos que el cuerpo es arrojado en el instante en que el avión cruza el eje Oy. Es evidente que el desplazamiento horizontal del cuerpo será uniforme con la velocidad constante v_0:

$$x = v_0 t.$$

La caída vertical del cuerpo por efecto de la gravedad se expresa mediante la fórmula:

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

Por tanto, en cualquier instante, la distancia del cuerpo a la tierra se expresará por la fórmula:

$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2}.$$

Las igualdades

$$\begin{aligned} x &= v_0 t, \\ y &= y_0 - \frac{gt^2}{2}, \end{aligned}$$

son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria. Para eliminar el parámetro t hallamos de la ecuación primera su valor $t = \frac{x}{v_0}$ y hacemos en la segunda ecuación la sustitución correspondiente, obteniendo entonces la ecuación de la trayectoria

$$y = y_0 - \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

Esta es la ecuación de la parábola, cuyo vértice se encuentra en el punto M $(0, y_0)$, sirviéndole Oy de eje de simetría.

Determinemos la magnitud del segmento OC. Designemos por X la abscisa del punto C, cuya ordenada es $y = 0$. Introduciendo estos valores en la fórmula anterior, tendremos:

$$0 = y_0 - \frac{g}{2v_0^2} X^2,$$

de donde:

$$X = v_0 \sqrt{\frac{2y_0}{g}}.$$

§ 17. ECUACIONES PARAMETRICAS DE ALGUNAS CURVAS

Circunferencia. Supongamos una circunferencia de radio r, con centro en el origen de las coordenadas (fig. 75).

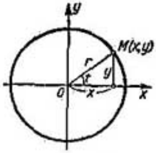

Fig. 75

Designemos con t el ángulo formado por el radio trazado por el punto M (x, y) de la circunferencia y el eje Ox. Entonces, las coordenadas de cualquier punto de la circunferencia se expresarán por medio del parámetro t como sigue:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos t, \\ y = r\,\mathrm{sen}\, t, \end{array}\right\} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Estas son ecuaciones paramétricas de la circunferencia. Si eliminamos en estas ecuaciones el parámetro t, obtendremos la ecuación de la circunferencia que contiene sólo x e y. Elevando al cuadrado las ecuaciones paramétricas y sumándolas, tenemos:

$$x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t),$$

o sea,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Elipse. Escribamos la ecuación de una elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

y hagamos

$$x = a\cos t. \tag{2'}$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (1), obtendremos

$$y = b\,\mathrm{sen}\,t. \tag{2''}$$

Las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= b\,\mathrm{sen}\,t, \end{aligned}\right\}\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \tag{2}$$

son ecuaciones paramétricas de la elipse.

Aclaremos el significado geométrico del parámetro t. Tracemos dos circunferencias de radios a y b, con centro en el origen de coordenadas (fig. 76). Supongamos que el punto $M\ (x,\ y)$ se halla en la elipse y el punto B, que tiene la misma abscisa que el punto M, pertenezca a la circunferencia de mayor radio. Designemos con t el ángulo formado por el radio OB y el eje Ox. De la figura se deduce

$$x = OP = a\cos t\ [\text{ecuación } (2')],$$

$$CQ = b\,\mathrm{sen}\,t.$$

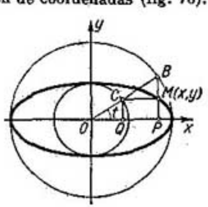

Fig. 76

En virtud de la ecuación (2″) deducimos que $CQ = y$, es decir, la recta CM es paralela al eje Ox. Por consiguiente, en las ecuaciones (2), t representa el ángulo formado por el radio OB y el eje de abscisas. A veces el ángulo t se denomina ángulo excéntrico.

Cicloide. Se da el nombre de cicloide a la curva descrita por un punto de la circunferencia, cuando ésta rueda sin resbalar sobre una línea recta (fig. 77). Supongamos que el punto M de la circunferencia coincide, al principio del movimiento, con el origen de coordenadas. Determinemos las coordenadas del punto M después

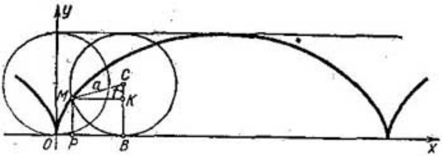

Fig. 77

de haber girado la circunferencia el ángulo t. Designemos por a el radio de la circunferencia en movimiento. Como se ve en la figura 77,

$$x = OP = OB - PB,$$

y teniendo en cuenta que la circunferencia rueda sin resbalar, tenemos:

$$OB = \overset{\frown}{MB} = at,\ PB = MK = a\,\mathrm{sen}\,t.$$

Por tanto, $x=at-a \operatorname{sen} t=a(t-\operatorname{sen} t)$.

Luego,

$y=MP=KB=CB-CK=a-a\cos t=a(1-\cos t)$.

Las expresiones

$$\left.\begin{aligned} x&=a(t-\operatorname{sen} t),\\ y&=a(1-\cos t), \end{aligned}\right\} 0\leqslant t\leqslant 2\pi, \tag{3}$$

son ecuaciones paramétricas de la cicloide. Cuando t varía de 0 a 2π, el punto M describe un arco de la cicloide.

Eliminando el parámetro t en estas ecuaciones, obtenemos la forma en que x directamente depende de y. En el segmento $0\leqslant t\leqslant\pi$ la función $y=a(1-\cos t)$ tiene por inversa

$$t=\arccos\frac{a-y}{a}.$$

Sustituyendo t en la primera ecuación del sistema (3) por su expresión, tendremos:

$$x=a\arccos\frac{a-y}{a}-a\operatorname{sen}\left(\arccos\frac{a-y}{a}\right),$$

ó

$$x=a\arccos\frac{a-y}{a}-\sqrt{2ay-y^2},\ \text{para}\ 0\leqslant x\leqslant\pi a.$$

De la figura se deduce que, si

$\pi a\leqslant x\leqslant 2\pi a$, se tiene:

$$x=2\pi a-\left(a\arccos\frac{a-y}{a}-\sqrt{2ay-y^2}\right).$$

Observemos que la función

$$x=a(t-\operatorname{sen} t)$$

tiene su inversa, pero ésta no se expresa mediante funciones elementales. Por eso la función $y=f(x)$ tampoco se expresa mediante funciones elementales.

Observación 1. En el ejemplo de la cicloide se ve que en algunos casos las ecuaciones paramétricas son más cómodas en el análisis de funciones y curvas, que la dependencia directa entre x e y.

Astroide. Se da el nombre de astroide a la curva representada por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos^3 t,\\ y&=a\operatorname{sen}^3 t, \end{aligned}\right\} 0\leqslant t\leqslant 2\pi. \tag{4}$$

Elevando todos los términos de ambos miembros de las dos ecuaciones a la potencia 2/3 y sumándolas, obtenemos la dependencia entre x e y:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(\cos^2 t-\operatorname{sen}^2 t),$$

o bien,

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \tag{5}$$

Más adelante (§ 12, cap. V) demostremos que dicha curva tiene la forma que se expone en la figura 78. Esta curva puede interpretarse como trayectoria de un punto de la circunferencia de radio $\frac{a}{4}$, que rueda, sin resbalar, sobre otra circunferencia de radio a, quedando siempre dentro de la mayor (fig. 78).

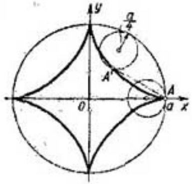

Fig. 78

Observación 2. Señalemos que la función $y = f(x)$ no es la única que se determina por las ecuaciones (4) y (5). Estas ecuaciones determinan en realidad dos funciones continuas en el segmento $-a \leqslant x \leqslant +a$, una de las cuales toma valores no negativos y la otra, valores no positivos.

§ 18. DERIVADA DE LA FUNCION DADA PARAMETRICAMENTE

Supongamos que la representación paramétrica de la función y de x es

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{array}\right\} t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

y que, además, estas funciones tienen derivadas y la función $x = \varphi(t)$ tiene por inversa $t = \Phi(x)$ que, a su vez, también tiene derivada. En este caso, la función $y = f(x)$, definida por las ecuaciones paramétricas, puede ser interpretada como función compuesta

$$y = \psi(t), \quad t = \Phi(x).$$

Aquí, t es el argumento intermedio.

Según la regla para derivar función compuesta, tenemos

$$y'_x = y'_t t'_x = \psi'_t(t)\,\Phi'_x(x). \tag{2}$$

Del teorema de derivación de función inversa tenemos:

$$\Phi'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Introduciendo esta expresión en la igualdad (2), obtenemos:

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

o sea,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad \text{(XXI)}$$

Con la fórmula obtenida se puede calcular la derivada, y'_x, de la función dada paramétricamente, sin recurrir a la expresión de la dependencia directa de y en función de x.

Ejemplo 1. La función y de x está dada por ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos t, \\ y = a \operatorname{sen} t, \end{array}\right\} (0 \leqslant t \leqslant \pi).$$

Calcular la derivada $\frac{dy}{dx}$:

1) para cualquier valor de t;

2) para $t = \frac{\pi}{4}$.

Solución.

1) $y'_x = \frac{(a \operatorname{sen} t)'}{(a\cos t)'} = \frac{a\cos t}{-a \operatorname{sen} t} = -\operatorname{cotg} t$;

2) $(y'_x)_{t=\frac{\pi}{4}} = -\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} = -1$.

Ejemplo 2. Hallar el coeficiente angular de la línea tangente a la cicloide,

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \qquad y = a(1 - \cos t)$$

en un punto arbitrario $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

Solución. El coeficiente angular de la tangente en cada punto es igual al valor de la derivada y'_x en este punto, es decir,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Pero

$$x'_t = a(1 - \cos t), \qquad y'_t = a \operatorname{sen} t,$$

y, por tanto,

$$y'_x = \frac{a \operatorname{sen} t}{a(1-\cos t)} = \frac{2 \operatorname{sen}\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2 \operatorname{sen}^2\frac{t}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{t}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right).$$

Por consiguiente, el coeficiente angular de la línea tangente a la cicloide en cada uno de sus puntos es igual a $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)$, donde t es el valor del parámetro correspondiente a este punto. Esto último significa que el ángulo α de inclinación de la línea tangente con respecto al eje x es igual a $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ (para los valores de t situados entre $-\pi$ y π)*).

*) En efecto, el coeficiente angular es igual a $\operatorname{tg}\alpha$, donde α es el ángulo

§ 19. FUNCIONES HIPERBOLICAS

En muchas aplicaciones del análisis matemático se encuentran combinaciones de las funciones exponenciales del tipo $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ y $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Estas combinaciones se consideran como funciones nuevas y se designan:

$$\left.\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.\right\} \tag{1}$$

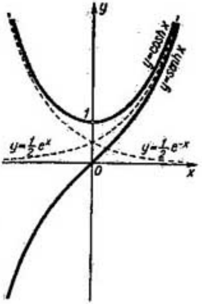

Fig. 79

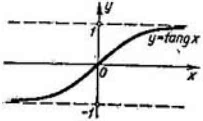

Fig. 80

La primera de estas funciones (1) se denomina *seno hiperbólico* y la segunda, *coseno hiperbólico*. Con estas funciones se pueden definir dos funciones más: $\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$ y $\coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$, es decir,

$$\left.\begin{aligned} \tanh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \textit{tangente hiperbólica} \\ \coth x &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad \textit{cotangente hiperbólica}. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

---

de inclinación de la línea tangente respecto al eje Ox. De aquí $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)$ y $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ en aquellos valores de t, para los cuales $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ se halla entre 0 y π.

Las funciones senh x, cosh x, tanh x tienen por dominio, evidentemente, todos los valores de x. La función coth x tiene el mismo dominio, a excepción del punto $x = 0$.

Las gráficas de las funciones hiperbólicas están representadas en las figuras 79, 80, 81.

De la definición de las funciones senh x y cosh x [fórmulas (1)] se deducen correlaciones análogas a las conocidas entre las funciones trigonométricas correspondientes:

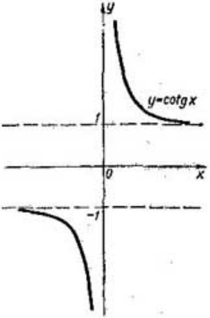

Fig. 81

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1, \qquad (2)$$

$$\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \operatorname{senh} a \operatorname{senh} b, \qquad (3)$$

$$\operatorname{senh}(a+b) = \operatorname{senh} a \cosh b + \cosh a \operatorname{senh} b. \qquad (3')$$

En efecto,

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1.$$

Considerando que

$$\cosh(a+b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2},$$

obtenemos:

$$\cosh a \cosh b + \operatorname{senh} a \operatorname{senh} b = \frac{e^a + e^{-a}}{2}\,\frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2}\,\frac{e^b - e^{-b}}{2} =$$

$$= \frac{e^{a+b} + e^{-a+b} + e^{a-b} + e^{-a-b} + e^{a+b} - e^{-a+b} - e^{a-b} + e^{-a-b}}{4} = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \cosh(a+b).$$

Del mismo modo se demuestra la fórmula (3′).

El nombre «función hiperbólica» se debe a que las funciones senh t y cosh t desempeñan en la representación paramétrica de la hipérbola,

$$x^2 - y^2 = 1,$$

el mismo papel que las funciones trigonométricas sen t y cos t en la representación paramétrica de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 1.$$

En efecto, eliminando el parámetro t en las ecuaciones

$$x = \cos t, \; y = \operatorname{sen} t,$$

obtendremos:

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t$$

ó

$x^2 + y^2 = 1$ (ecuación de la circunferencia).

Análogamente,

$$x = \cosh t,$$
$$y = \operatorname{senh} t$$

son ecuaciones paramétricas de la hipérbola.

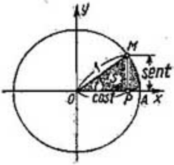

Fig. 82

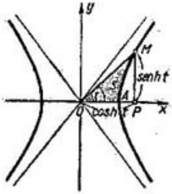

Fig. 83

En efecto, elevando al cuadrado estas ecuaciones y restando la segunda de la primera, obtendremos:

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t.$$

Ya que la expresión del segundo miembro, según la (2), es igual a la unidad, tenemos:

$$x^2 - y^2 = 1,$$

que es la ecuación de una hipérbola.

Examinemos la circunferencia, dada por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ (fig. 82). En las ecuaciones $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, el parámetro t equivale numéricamente al ángulo central AOM o al área doble S del sector AOM, ya que $t = 2S$.

Señalemos sin demostración que en las ecuaciones paramétricas de la hipérbola

$$x = \cosh t,$$
$$y = \operatorname{senh} t$$

el parámetro t es también numéricamente igual al área doble del «sector hiperbólico» AOM (fig. 83).

Las derivadas de las funciones hiperbólicas se determinan por las fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} &(\operatorname{senh} x)' = \cosh x, \quad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}, \\ &(\cosh x)' = \operatorname{senh} x, \quad (\coth x)' = -\frac{1}{\operatorname{senh}^2 x}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XXII)}$$

que se obtienen de la propia definición de función hiperbólica; por ejemplo, para la función $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, se tiene:

$$(\operatorname{senh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

§ 20. DIFERENCIAL

Supongamos que la función $y = f(x)$ es derivable sobre el segmento $[a, b]$. En un punto x del segmento $[a, b]$ la derivada de esta función se determina por la igualdad

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Cuando $\Delta x \to 0$, la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiende a un número determinado $f'(x)$ y, por tanto, se diferencia de la derivada $f'(x)$ en una magnitud infinitamente pequeña:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

donde $\alpha \to 0$, cuando $\Delta x \to 0$.

Multiplicando todos los términos de la última igualdad por Δx, obtenemos:

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha\Delta x. \tag{1}$$

Dado que en el caso general $f'(x) \neq 0$, entonces, cuando x es constante y $\Delta x \to 0$, el producto $f'(x)\,\Delta x$ es una magnitud infinitamente pequeña de primer orden respecto a Δx. El producto $\alpha\Delta x$

es siempre una magnitud infinitamente pequeña de orden superior a Δx, ya que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Así, pues, el incremento Δy de la función se compone de dos sumandos, de los cuales el primero recibe el nombre [cuando $f'(x) \neq 0$] de *parte principal* del incremento, que es *lineal* con relación a Δx. El producto $f'(x) \Delta x$ se denomina *diferencial* de la función y se designa por dy o $df(x)$.

De modo que, si la función $y = f(x)$ tiene derivada $f'(x)$ en el punto x, el producto de ésta por el incremento Δx, del argumento se llama *diferencial* de la función y se designa con el símbolo dy, o sea,

$$dy = f'(x) \Delta x. \tag{2}$$

Hallemos la diferencial de la función $y = x$. En este caso

$$y' = (x)' = 1,$$

y, por tanto, $dy = dx = \Delta x$ o $dx = \Delta x$. De este modo, la *diferencial dx de la variable independiente x coincide con su incremento Δx.* La igualdad $dx = \Delta x$ podría ser considerada como definición de la diferencial de una variable independiente, y, en este caso, el ejemplo examinado demostraría que ello no contradice a la definición de diferencial de la función. En cualquier caso la fórmula (2) se puede escribir así:

$$dy = f'(x)\, dx.$$

Pero de esta correlación se desprende que

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Por tanto, *la derivada $f'(x)$ puede ser considerada como razón de la diferencial de la función respecto a la diferencial de la variable independiente.*

Teniendo en cuenta la fórmula (2), escribamos la fórmula (1) así:

$$\Delta y = dy + \alpha \Delta x. \tag{3}$$

Así, pues, el incremento de la función difiere de la diferencial de ésta en una magnitud infinitamente pequeña, de orden superior respecto a Δx. Si $f'(x) \neq 0$, $\alpha \Delta x$ es una infinitesimal de orden superior también respecto a dy, y, por tanto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{f'(y) \Delta x} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{f'(x)} = 1.$$

Esto nos permite, a veces, utilizar en los cálculos aproximados la igualdad aproximada

$$\Delta y \approx dy, \tag{4}$$

o, en su forma desarrollada,

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x, \tag{5}$$

con lo cual se abrevian los cálculos.

Ejemplo 1. Calcular la diferencial dy y el incremento Δy de la función $y = x^2$:

1) para valores arbitrarios de x y Δx,
2) para valores $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$.

Solución: 1) $\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$,
$dy = (x^2)'\,\Delta x = 2x\Delta x$.

2) Si $x = 20$ y $\Delta x = 0{,}1$ entonces:

$$\Delta y = 2\cdot 20\cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 4{,}01,$$
$$dy = 2\cdot 28\cdot 0{,}1 \qquad = 4{,}00.$$

El error que resulta de la sustitución de Δy por dy es igual a $0{,}01$. En muchos casos se le puede despreciar, por considerarlo pequeño en comparación con $\Delta y = 4{,}01$.

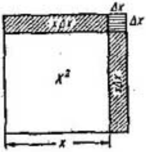

Fig. 84

El problema examinado se ilustra en la figura 84.

En cálculos aproximados se usa también la igualdad aproximada que se obtiene de la ecuación (5):

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{6}$$

Ejemplo 2. Supongamos $f(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces,

$$f'(x) = \cos x.$$

En este caso, la igualdad aproximada (6) tomará la forma

$$\operatorname{sen}(x+\Delta x) \approx \operatorname{sen} x + \cos x\Delta x. \tag{7}$$

Calculemos el valor aproximado de sen 46°. Haciendo $x = 45° = \frac{\pi}{4}$, tenemos

$$\Delta x = 1° = \frac{\pi}{180},$$

$$46° = 45° + 1° = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}.$$

Introduciendo en (7) los valores calculados, obtenemos

$$\operatorname{sen} 46° = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\,\frac{\pi}{180},$$

o sea,

$$\operatorname{sen} 46° = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\pi}{180} = 0{,}7071 + 0{,}7071\cdot 0{,}017 = 0{,}7194.$$

Ejemplo 3. Si en la fórmula (7) hacemos $x=0$ y $\Delta x=\alpha$, obtendremos la siguiente igualdad aproximada:

$$\operatorname{sen}\alpha \approx \alpha.$$

Ejemplo 4. Si $f(x)=\operatorname{tg} x$, según la fórmula (6), obtenemos la siguiente igualdad aproximada:

$$\operatorname{tg}(x+\Delta x) \approx \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x}\Delta x,$$

cuando $x=0$ y $\Delta x=\alpha$, obtenemos:

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha.$$

Ejemplo 5. Si $f(x)=\sqrt{x}$, la fórmula (6), nos da:

$$\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x.$$

Haciendo $x=1$ y $\Delta x=\alpha$, obtenemos la igualdad aproximada:

$$\sqrt{1+\alpha} \approx 1+\frac{1}{2}\alpha.$$

El cálculo de la diferencial de una función se reduce en realidad al cálculo de la derivada, ya que, al multiplicar la última por la diferencial de argumento, se obtiene la diferencial de la función. Por tanto, la mayoría de los teoremas y fórmulas que se refieren a las derivadas, siguen siendo válidos también para las diferenciales. Por ejemplo:

La diferencial de la suma de dos funciones derivables u y v es igual a la suma de las diferenciales de estas funciones:

$$d(u+v)=du+dv.$$

La diferencial del producto de dos funciones derivables u y v se determina por la fórmula $d(uv)=u\,dv+v\,du$. Demostremos esta última fórmula. Si $y=uv$, se tiene:

$$dy=y'dx=(uv'+vu')\,dx=uv'dx+vu'dx,$$

pero

$$v'dx=dv,\ u'dx=du,$$

luego,

$$dy=u\,dv+v\,du.$$

Del mismo modo se demuestran las otras fórmulas; por ejemplo, la que determina la diferencial de un cociente:

$$\text{si}\quad y=\frac{u}{v},\quad \text{se tiene}\quad dy=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}.$$

Veamos algunos ejemplos de cálculo de la diferencial de una función.

Ejemplo 6. $y=\operatorname{tg}^2 x$, $dy=2\operatorname{tg} x\dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx$.

Ejemplo 7. $y=\sqrt{1+\ln x}$, $dy=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}\,\dfrac{1}{x}\,dx$.

Hallar la expresión de la diferencial de una función compuesta. Supongamos

$$y=f(u),\ u=\varphi(x),\ \text{o}\ y=f[\varphi(x)].$$

Según la regla de derivación de función compuesta, se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=f'_u(u)\,\varphi'(x).$$

Por consiguiente,

$$dy=f'_u(u)\,\varphi'(x)\,dx,$$

pero $\varphi'(x)dx=du$, luego, $dy=f'(u)\,du$.

De modo que, *la diferencial de una función compuesta tiene la misma forma que ésta tendría en caso de que el argumento intermedio u fuera la variable independiente.* En otras palabras, la *forma de la diferencial no depende de que el argumento de la función sea variable independiente o sea función de otro argumento.* Esta importante propiedad de la diferencial, que se conoce por *invariancia de la forma de la diferencial*, la usaremos con frecuencia en lo sucesivo.

Ejemplo 8. Sea la función $y=\operatorname{sen}\sqrt{x}$, hallar dy.
Solución. Interpretando esta función como función compuesta, se tiene:

$$y=\operatorname{sen} u,\quad u=\sqrt{x},$$

de donde

$$dy=\cos u\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx;$$

pero como $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=du$, se puede escribir:

$$dy=\cos u\,du\quad\text{ó}\quad dy=\cos(\sqrt{x})\,d(\sqrt{x}).$$

§ 21. SIGNIFICADO GEOMETRICO DE LA DIFERENCIAL

Examinemos la función

$$y=f(x)$$

y su correspondiente curva (fig. 85).

Tomemos en la curva $y=f(x)$ un punto arbitrario $M(x,\ y)$, tracemos una tangente a la curva en este punto y designemos por α el ángulo* formado por la tangente y la dirección positiva del

*) Suponiendo que la función $f(x)$ tenga derivada finita en el punto x, entonces $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}$.

eje Ox. Demos a la variable independiente un incremento Δx; entonces la función recibirá el incremento $\Delta y = NM_1$. A los valores $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ corresponderá en la curva $y = f(x)$ el punto $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

En el triángulo MNT encontramos:

$$NT = MN \operatorname{tg} \alpha.$$

Como

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x), \quad MN = \Delta x,$$

tenemos

$$NT = f'(x)\Delta x.$$

Pero, según la definición de diferencial, $f'(x)\,\Delta x = dy$. Entonces, $NT = dy$.

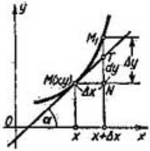

Fig. 85

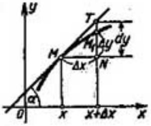

Fig. 86

Esta igualdad significa que la *diferencial de la función $f(x)$, correspondiente a los valores dados de x y Δx, es igual al incremento de la ordenada de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto dado x.*

En la figura 85 se ve que

$$M_1T = \Delta y - dy.$$

Según lo demostrado antes, $\dfrac{M_1T}{NT} \to 0$, cuando $\Delta x \to 0$.

No siempre Δy es mayor que dy.

Así, como se deduce de la fig. 86,

$$\Delta y = M_1N, \quad dy = NT, \quad \text{es decir,} \quad \Delta y < dy.$$

§ 22. DERIVADAS DE DIVERSOS ORDENES

Supongamos que la función $y = f(x)$ es derivable en un segmento $[a, b]$. Los valores de la derivada $f'(x)$ dependen de x, es decir, *la derivada $f'(x)$ también es función de x*. Derivando esta última función, obtendremos la llamada segunda derivada de la función $f(x)$.

La derivada de la primera derivada se denomina *derivada de segundo orden* o *segunda derivada* de la función primitiva y se designa por el símbolo y'' o $f''(x)$:

$$y'' = (y')' = f''(x).$$

Por ejemplo, si $y = x^5$, se tiene

$$y' = 5x^4;\ y'' = (5x^4)' = 20x^3.$$

La derivada de la segunda derivada se denomina *derivada de tercer orden* o *tercera derivada* y se designa por y''', o sea, $f'''(x)$.

En general, la derivada (de primer orden) de la derivada del orden $(n-1)$ se denomina *derivada de n—ésimo orden de la función* $f(x)$ y se designa por el símbolo $y^{(n)}$ o $f^{(n)}(x)$:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = f^{(n)}(x).$$

(El orden de la derivada se pone entre paréntesis para no confundirlo con un exponente de potencia).

Las derivadas de cuarto, quinto, sexto, etc. órdenes pueden designarse también por cifras romanas: y^{IV}, y^{V}, y^{VI}, . . . En este caso el orden de la derivada se puede escribir sin paréntesis. Por ejemplo, si $y = x^5$, se tiene:
$y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$, $y^{\mathrm{IV}} = y^{(4)} = 120x$, $y^{\mathrm{V}} = y^{(5)} = 120$, $y^{(6)} = y^{(7)} = \ldots\ldots = 0$.

Ejemplo 1. Sea la función $y = e^{kx}$ ($k =$ const). Hallar la expresión general de su derivada de orden n.

Solución. $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$, . . ., $y^{(n)} = k^ne^{kx}$.

Ejemplo 2. Sea la función $y = \operatorname{sen} x$. Hallar $y^{(n)}$.

Solución.

$$y' = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = -\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = -\cos x = \operatorname{sen}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{\mathrm{IV}} = \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Del mismo modo se obtienen las fórmulas de las derivadas de cualquier orden de otras funciones elementales.

Obtenga Vd., como ejercicio práctico, las fórmulas de las derivadas de n — ésimo orden de las funciones $y = x^k$, $y = \cos x$, $y = \ln x$.

Las reglas indicadas en los teoremas 2 y 3, § 7, se pueden generalizar para cualquier orden de derivadas.

En el caso dado, son evidentes las fórmulas:

$$(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}, \quad (Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$$

Demostremos la fórmula (llamada de Leibniz) para calcular la derivada de n—esimo orden del producto de dos funciones $u(x)\, v(x)$. Para obtener esta fórmula, hallemos primero varias derivadas consecutivas y establezcamos después la ley general aplicable para el cálculo de una derivada de cualquier orden:

$$\begin{aligned}
y &= uv,\\
y' &= u'v+uv',\\
y'' &= u''v+u'v'+u'v'+uv''=u''v+2u'v'+uv'',\\
y''' &= u'''v+u''v'+2u''v'+2u'v''+u'v''+uv'''=\\
&= u'''v+3u''v'+3u'v''+uv''',\\
y^{IV} &= u^{IV}v+4u'''v'+6u''v''+4u'v'''+uv^{IV}.
\end{aligned}$$

Se ve que la ley de la obtención de las derivadas es válida para derivadas de cualquier orden y es como sigue.

Se desarrolla la expresión $(u+v)^n$ por la fórmula del binomio de Newton y en la serie obtenida se sustituyen los exponentes de u y v por los índices del orden de las derivadas; además, los exponentes cero ($u^0=v^0=1$) que entran en los términos extremos del desarrollo, se sustituyen por las propias funciones (es decir, por las «derivadas del orden cero»):

$$y^{(n)}=(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+\ldots+uv^{(n)}.$$

Es decir, hemos obtenido la *fórmula de Leibniz.*

En rigor, se pudo llegar también a esta fórmula por el método de inducción matemática completa (es decir, demostrar de que, siendo válida la fórmula para el n —ésimo orden, es válida también para el orden $n+1$).

Ejemplo 3. Dada la función $y=e^{ax}x^2$. Hallar la derivada $y^{(n)}$.
Solución.

$$\begin{array}{ll}
u=e^{ax}, & v=x^2,\\
u'=ae^{ax}, & v'=2x,\\
u''=a^2e^{ax}, & v''=2,\\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\\
u^{n}=a^ne^{ax}, & v'''=v^{IV}=\ldots=0,
\end{array}$$

$$y^{(n)}=a^ne^{ax}x^2+na^{n-1}e^{ax}\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}e^{ax}\cdot 2,$$

es decir,

$$y^{(n)}=e^{ax}\left[a^nx^2+2na^{n-1}x+n(n-1)a^{n-2}\right].$$

§ 23. DIFERENCIALES DE DIVERSOS ORDENES

Supongamos la función $y = f(x)$, donde x es una variable independiente. La diferencial de esta función,

$$dy = f'(x)\, dx,$$

es cierta función de x. Pero de x puede depender sólo el primer factor $f'(x)$, puesto que el segundo, (dx) es un incremento de la variable independiente x que no depende del valor de ésta. Como dy es función de x, se puede hablar de la diferencial de esta función.

La diferencial de la diferencial de una función se denomina *segunda diferencial* o *diferencial de segundo orden* de esta función y se designa por d^2y:

$$d(dy) = d^2y.$$

Hallemos la expresión de la segunda diferencial. En virtud de la definición general de diferencial, tenemos:

$$d^2y = [f'(x)\, dx]'\, dx.$$

Puesto que dx es independiente de x, al derivar, dx se escribe fuera del signo de la derivada. Así, tendremos

$$d^2y = f''(x)\, (dx)^2.$$

En la potencia de la diferencial se omite el paréntesis. Por ejemplo, en lugar de $(dx)^2$ se escribe dx^2, sobreentendiéndose que se trata del cuadrado de la expresión dx; $(dx)^3$ se escribirá dx^3 y así sucesivamente.

Se llama *tercera diferencial* o *diferencial de tercer orden* de una función a la diferencial de la segunda diferencial de esta función:

$$d^3y = d(d^2y) = [f''(x)\, dx^2]'\, dx = f'''(x)\, dx^3.$$

En general, se llama *diferencial de n-ésimo orden* a la primera diferencial de la diferencial del orden $(n-1)$,

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = [f^{(n-1)}(x)\, dx^{n-1}]'\, dx,$$

$$d^ny = f^{(n)}(x)\, dx^n. \tag{1}$$

Sirviéndonos de las diferenciales de diversos órdenes, la derivada de un orden cualquiera puede ser expresada como la razón de las diferenciales del orden correspondiente:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}; \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \; \ldots, \; f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}. \tag{2}$$

Conviene anotar, sin embargo, que las igualdades (1) y (2) (para $n > 1$) son válidas sólo en el caso de que x sea una variable independiente*).

§ 24. DERIVADAS DE DIVERSOS ORDENES DE FUNCIONES IMPLICITAS Y DE FUNCIONES REPRESENTADAS PARAMETRICAMENTE

1. Veamos con un ejemplo el método para obtener las derivadas de diversos órdenes de las funciones implícitas.

Supongamos que la función implícita y de x viene determinada por la igualdad

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0. \tag{1}$$

Derivando respecto a x todos los términos de esta igualdad y teniendo en cuenta que y es función de x, resulta:

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0;$$

de aquí hallamos

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}. \tag{2}$$

Volvamos a derivar la última igualdad respecto a x (teniendo en cuenta que y es función de x):

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{y-x\dfrac{dy}{dx}}{y^2}.$$

Sustituyendo aquí la derivada $\frac{dy}{dx}$ por su expresión en la igualdad (2), se obtiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{y+x\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}}{y^2},$$

*) Sin embargo, la igualdad (2) la escribiremos también en el caso en que x no sea variable independiente, pero entonces, las expresiones $\frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ se deben considerar como representación simbólica de las derivadas.

y simplificando:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2(a^2y^2 + b^2x^2)}{a^4y^3}.$$

De la ecuación (1) se deduce

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

luego, la segunda derivada puede ser presentada en la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Derivando la última igualdad respecto a x, hallamos $\frac{d^3y}{dx^3}$ y así sucesivamente.

2. Veamos ahora el modo de hallar las derivadas de órdenes superiores de la *función representada paramétricamente.*

Supongamos que la función y de x viene dada paramétricamente por

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{array}\right\} \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

y la función $x = \varphi(t)$ en el segmento $[t_0, T]$ tiene su inversa, $t = \Phi(x)$.

Se ha demostrado en el § 18 que en este caso la derivada $\frac{dy}{dx}$ se determina por la igualdad

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}. \tag{4}$$

Para hallar la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ derivemos respecto a x la igualdad (4), teniendo en cuenta que t es función de x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)\frac{dt}{dx}, \tag{5}$$

pero

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)-\frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}=$$

$$=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2},$$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}.$$

Introduciendo las últimas expresiones en la fórmula (5), obtendremos:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Esta fórmula se puede escribir en forma compacta así:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\varphi'(t)\,\psi''(t)-\psi'(t)\,\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

De la misma manera se puede hallar las derivadas

$$\frac{d^3y}{dx^3},\quad \frac{d^4y}{dx^4},\ \text{etc.}$$

Ejemplo. Sea la función y de x, cuya representación paramétrica es

$$x=a\cos t,\quad y=b\,\mathrm{sen}\,t,$$

hallar las derivadas $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Solución.

$$\frac{dx}{dt}=-a\,\mathrm{sen}\,t;\ \frac{d^2x}{dt^2}=-a\cos t;$$

$$\frac{dy}{dt}=b\cos t;\ \frac{d^2y}{dt^2}=-b\,\mathrm{sen}\,t;$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\cos t}{-a\,\mathrm{sen}\,t}=-\frac{b}{a}\mathrm{cotg}\,t;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(-a\,\mathrm{sen}\,t)(-b\,\mathrm{sen}\,t)-(b\cos t)(-a\cos t)}{(-a\,\mathrm{sen}\,t)^3}=-\frac{b}{a^2}\frac{1}{\mathrm{sen}^3\,t}.$$

§ 25. INTERPRETACION MECANICA DE LA SEGUNDA DERIVADA

El espacio s recorrido por un cuerpo en movimiento de traslación en función del tiempo t, se expresa así:

$$s = f(t). \tag{1}$$

Como es sabido (§ 1, cap. III), la velocidad v del cuerpo en un instante dado es igual a la primera derivada del espacio recorrido respecto al tiempo:

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{2}$$

Supongamos que en cierto instante t la velocidad del cuerpo era v. Si el movimiento no es uniforme, en el intervalo de tiempo Δt a partir de t, la velocidad variará, recibiendo el incremento Δv.

Se denomina *aceleración media* en el tiempo Δt la razón del incremento de la velocidad Δv respecto al del tiempo:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Se denomina *aceleración en un instante dado* el límite de la razón del incremento de la velocidad respecto al del tiempo, cuando éste tiende a cero

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t};$$

es decir, la aceleración (en el instante dado) es igual a la derivada de la velocidad respecto al tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt},$$

pero como $v = \frac{ds}{dt}$, se tiene, por consiguiente:

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2},$$

o sea que *la aceleración del movimiento rectilíneo es igual a la segunda derivada del espacio recorrido respecto al tiempo.* De la igualdad (1) tenemos

$$a = f''(t).$$

Ejemplo. Hallar la velocidad v y la aceleración a de un cuerpo que cae libremente en el espacio por efecto de la gravedad, si el espacio recorrido s depende del tiempo t, según la siguiente fórmula:

$$s = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + s_0, \tag{3}$$

donde $g = 9{,}8$ m/seg^2 es la aceleración de la gravedad

y $s_0 = s_{t=0}$, el valor de s, cuando $t = 0$.

Solución. Derivando, hallamos:

$$v = \frac{ds}{dt} = gt + v_0. \tag{4}$$

De esta fórmula se deduce $v_0 = (v)_{t=0}$.
Derivando una vez más, hallamos:

$$a = \frac{dv}{dt} - \frac{d^2s}{dt^2} = g.$$

Recíprocamente, si la aceleración de cierto movimiento permanece constante y es igual a g, la velocidad se expresará por la igualdad (4), y el espacio recorrido por la (3), a condición de que $(v)_{t=0} = v_0$ y $(s)_{t=0} = s_0$.

§ 26. ECUACIONES DE LA LINEA TANGENTE Y DE LA NORMAL. LONGITUDES DE LA LINEA SUBTANGENTE Y DE LA SUBNORMAL

Sea una curva cuya ecuación es

$$y = f(x).$$

Tomemos en esta curva un punto $M(x_1, y_1)$ (fig. 87) y escribamos la ecuación de la tangente a la curva dada en el punto M, suponiendo que esta tangente no sea paralela al eje de ordenadas.

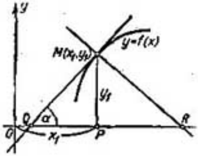

Fig. 87

La ecuación de una recta, del coeficiente angular k, que pasa por el punto M, es de la forma

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

En el caso de la tangente (§ 3),

$$k = f'(x_1).$$

Por tanto, la *ecuación de la tangente* será:

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1).$$

Conjuntamente con la tangente a la curva en el punto dado, surge con frecuencia la necesidad de estudiar la normal.

Definición. Se denomina *normal* a la curva en un punto dado, a la recta que, pasando por éste, es perpendicular a la tangente trazada por el mismo punto.

De la definición de normal se deduce que su coeficiente angular k_n está relacionado con el coeficiente angular k_t de la tangente de la manera siguiente:

$$k_n = -\frac{1}{k_t},$$

es decir,

$$k_n = -\frac{1}{f'(x_1)}.$$

Por tanto, la *ecuación de la normal* a la curva $y = f(x)$ en el punto $M(x_1, y_1)$ tiene la forma

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1).$$

Ejemplo 1. Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $y = x^3$, en el punto $M(1, 1)$.

Solución. Puesto que $y' = 3x^2$, el coeficiente angular de la tangente es igual a $(y')_{x=1} = 3$. Por consiguiente, la ecuación de la tangente será

$$y - 1 = 3(x - 1) \text{ ó } y = 3x - 2.$$

La ecuación de la normal es:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

o sea,

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

(fig. 88).

La longitud T del segmento de la tangente QM (fig. 87) comprendido entre el punto de tangencia y el eje Ox se denomina *longitud de la tangente*. La proyección del segmento indicado sobre el eje Ox, es decir, el segmento QP, se llama *subtangente* y su longitud se designa por S_T. La longitud N del segmento MR se llama *longitud de la normal* y la proyección RP del segmento RM sobre el eje Ox toma el nombre de *subnormal* y su longitud se designa por S_N.

Hallemos los valores T, S_T, N, S_N para la curva $y = f(x)$ y el punto $M(x_1, y_1)$.

En la figura 87 podemos observar que

$$QP = y_1 \operatorname{cotg} \alpha = \frac{y_1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{y_1}{y_1'},$$

por tanto,

$$S_T = \left| \frac{y_1}{y_1'} \right|;$$

$$T = \sqrt{y_1^2 + \frac{y_1^2}{y_1'^2}} = \left| \frac{y_1}{y_1'} \sqrt{y_1'^2 + 1} \right|,$$

al mismo tiempo esta figura muestra que

$$PR = y_1 \operatorname{tg} \alpha = y_1 y_1',$$

y entonces

$$S_N = |y_1 y_1'|,$$

$$N = \sqrt{y_1^2 + (y_1 y_1')^2} = |y_1 \sqrt{1 + y_1'^2}|.$$

Las fórmulas indicadas han sido obtenidas en el supuesto de que $y_1 > 0$, $y_1' > 0$. Sin embargo, son válidas, también, para un caso cualquiera.

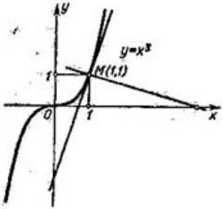

Fig. 88

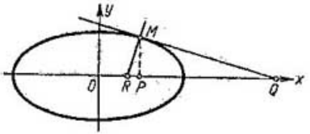

Fig. 89

Ejemplo 2. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal y las longitudes de la tangente, subtangente, normal y subnormal de la elipse:

$$x = a \cos t, \qquad y = b \operatorname{sen} t \tag{1}$$

en el punto $M(x_1, y_1)$, en el cual $t = \frac{\pi}{4}$ (fig. 89).

Solución. De las ecuaciones (1) deducimos

$$\frac{dx}{dt} = -a \operatorname{sen} t; \quad \frac{dy}{dt} = b \cos t; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{cotg} t; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}.$$

Hallemos ahora las coordenadas del punto de tangencia M:

$$x_1=(x)_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{a}{\sqrt{2}},\quad y_1=(y)_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Ecuación de la tangente: $y-\frac{b}{\sqrt{2}}=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, o sea, $bx+ay-ab\sqrt{2}=0$.

Ecuación de la normal:

$$y-\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{a}{b}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right),\ \text{ o sea, }(ax-by)\sqrt{2}-a^2+b^2=0.$$

Longitudes de la subtangente y de la subnormal:

$$S_T=\left|\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}}\right|=\frac{a}{\sqrt{2}};\quad S_N=\left|\frac{b}{\sqrt{2}}\left(-\frac{b}{a}\right)\right|=\frac{b^2}{a\sqrt{2}}.$$

Longitudes de la tangente y de la normal:

$$T=\left|\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}}\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2+1}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2};$$

$$N=\left|\frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\left(-\frac{b}{a}\right)^2}\right|=\frac{b}{a\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2}.$$

§ 27. INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA DEL RADIO VECTOR RESPECTO AL ANGULO POLAR

Supongamos que tenemos una curva cuya ecuación en coordenadas polares es

$$\rho=f(\theta). \tag{1}$$

Escribamos las fórmulas para transformar las coordenadas polares en cartesianas:

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\operatorname{sen}\theta.$$

Sustituyendo ρ en estas ecuaciones por su expresión mediante θ en la ecuación (1), tendremos:

$$x=f(\theta)\cos\theta,\ y=f(\theta)\operatorname{sen}\theta. \tag{2}$$

Las ecuaciones (2) constituyen la representación paramétrica de la curva dada, sirviendo de parámetro el ángulo polar θ (fig. 90).

Designando por φ el ángulo formado por la tangente a la curva en cierto punto $M(\rho, \theta)$ con la dirección positiva del eje de abscisas, tendremos

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}},\quad \text{o sea,}\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{\frac{d\rho}{d\theta}\operatorname{sen}\theta+\rho\cos\theta}{\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta-\rho\operatorname{sen}\theta}. \qquad (3)$$

Designemos por μ el ángulo formado por el radio vector y la tangente. Evidentemente, $\mu=\varphi-\theta$

y

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\theta}.$$

Sustituyendo $\operatorname{tg}\varphi$ por su expresión (3) y haciendo las transformaciones correspondientes, obtenemos:

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{(\rho'\operatorname{sen}\theta+\rho\cos\theta)\cos\theta-(\rho'\cos\theta-\rho\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta}{(\rho'\cos\theta-\rho\operatorname{sen}\theta)\cos\theta+(\rho'\operatorname{sen}\theta+\rho\cos\theta)\operatorname{sen}\theta}=\frac{\rho}{\rho'},$$

o bien

$$\rho'_\theta=\rho\operatorname{cotg}\mu. \qquad (4)$$

De modo que la derivada del radio vector respecto al ángulo polar es igual al producto de la longitud del primero por la cotangen-

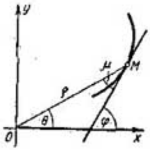

Fig. 90

te del ángulo formado por el radio vector y la tangente a la curva en el punto dado.

Ejemplo.

Como ilustración, demostrar que la tangente a la espiral logarítmica $\rho=e^{a\theta}$ forma con el radio vector un ángulo constante.

Solución. De la ecuación de la espiral deducimos: $\rho'=ae^{a\theta}$. En virtud de la fórmula (4), obtenemos:

$$\operatorname{cotg}\mu=\frac{\rho'}{\rho}=a,\ \text{es decir,}\ \mu=\operatorname{arccotg}a=\text{const}.$$

Ejercicios para el capítulo III

Partiendo de la definición de derivada, hallar las derivadas de las funciones:

1. $y=x^3$. *Respuesta:* $3x^2$. 2. $y=\frac{1}{x}$. *Respuesta:* $-\frac{1}{x^2}$. 3. $y=\sqrt{x}$. *Respuesta:* $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 4. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$. *Respuesta:* $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$. 5. $y=\operatorname{sen}^2 x$. *Respuesta:* $2\operatorname{sen} x\cos x$. 6. $y=2x^2-x$. *Respuesta:* $4x-1$.

Determinar las tangentes de ángulos de inclinación de las líneas tangentes a las curvas:

7. $y=x^3$. a) Cuando $x=1$. *Respuesta:* 3. b) Cuando $x=-1$. *Respuesta:* 3; construir la gráfica. 8. $y=\frac{1}{x}$. a) Cuando $x=1/2$. *Respuesta:* -4. b) Cuando $x=1$. *Respuesta:* -1; construir la gráfica. 9. $y=\sqrt{x}$ cuando $x=2$. *Respuesta:* $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Hallar las derivadas de las funciones:

10. $y=x^4+3x^2-6$. *Respuesta* $y'=4x^3+6x$. 11. $y=6x^3-x^2$. *Respuesta:* $y'=18x^2-2x$. 12. $y=\frac{x^5}{a+b}-\frac{x^2}{a-b}-x$. *Respuesta:* $y'=\frac{5x^4}{a+b}-\frac{2x}{a-b}-1$. 13. $y=\frac{x^3-x^2+1}{5}$. *Respuesta:* $y'=\frac{3x^2-2x}{5}$. 14. $y=2ax^3-\frac{x^2}{b}+c$. *Respuesta:* $y'=6ax^2-\frac{2x}{b}$. 15. $y=6x^{\frac{7}{2}}+4x^{\frac{5}{2}}+2x$. *Respuesta:* $y'=21x^{\frac{5}{2}}+10x^{\frac{3}{2}}+2$. 16. $y=\sqrt{3x}+\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}$. *Respuesta:* $y'=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x^2}$. 17. $y=\frac{(x+1)^3}{x^{\frac{3}{2}}}$. *Respuesta:* $y'=\frac{3(x+1)^2(x-1)}{2x^{\frac{5}{2}}}$. 18. $y=\frac{x}{m}+\frac{m}{x}+\frac{x^2}{n^2}+\frac{n^2}{x^2}$. *Respuesta:* $y'=\frac{1}{m}-\frac{m}{x^2}+\frac{2x}{n^2}-\frac{2n^2}{x^3}$. 19. $y=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}+5$. *Respuesta:* $y'=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}$. 20. $y=\frac{ax^2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{b}{x\sqrt{x}}-\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$. *Respuesta:* $y'=\frac{5}{3}ax^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}bx^{-\frac{5}{2}}+\frac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}}$. 21. $y=(1+4x^3)(1+2x^2)$. *Respuesta:* $y'=4x(1+3x+10x^3)$. 22. $y=x(2x-1)(3x+2)$. *Respuesta:* $y'=2(9x^2+x-1)$. 23. $y=(2x-1)(x^2-6x+3)$. *Resp.* $y'=6x^2-26x+12$. 24. $y=\frac{2x^4}{b^2-x^2}$. *Resp.* $y'=\frac{4x^3(2b^2-x^2)}{(b^2-x^2)^2}$. 25. $y=\frac{a-x}{a+x}$. *Resp.* $y'=-\frac{2a}{(a+x)^2}$. 26. $f(t)=\frac{t^3}{1+t^2}$. *Resp.* $f'(t)=\frac{t^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2}$. 27. $f(s)=\frac{(s+4)^2}{s+3}$. *Resp.* $f'(s)=\frac{(s+2)(s+4)}{(s+3)^2}$. 28. $y=\frac{x^3+1}{x^2-x-2}$. *Resp.* $y'=\frac{x^4-2x^3-6x^2-2x+1}{(x^2-x-2)^2}$. 29. $y=\frac{x^p}{x^m-a^m}$. *Resp.*

$y'=\frac{x^{p-1}[(p-m)x^m-pa^m]}{(x^m-a^m)^2}$. 30. $y=(2x^2-3)^2$. *Resp.* $y'=8x(2x^2-3)$. 31. $y=(x^2+a^2)^5$. *Resp.* $y=10x(x^2+a^2)^4$. 32. $y=\sqrt{x^2+a^2}$. *Resp.* $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$. 33. $y=(a+x)\sqrt{a-x}$. *Resp.* $y'=\frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$. 34. $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. *Resp.* $y'=\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$. 35. $y=\frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$. *Resp.* $y'=\frac{1+4x^2}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$. 36. $y=\sqrt[3]{x^2+x+1}$. *Resp.* $y'=\frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$. 37. $y=(1+\sqrt[3]{x})^3$. *Resp.* $y'=\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$. 38. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. *Resp.* $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\times$ $\times\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$. 39. $y=\operatorname{sen}^2 x$. *Resp.* $y'=\operatorname{sen} 2x$. 40. $y=2\operatorname{sen} x+\cos 3x$. *Resp.* $y'=2\cos x-3\operatorname{sen} 3x$. 41. $y=\operatorname{tg}(ax+b)$. *Resp.* $y'=\frac{a}{\cos^2(ax+b)}$. 42. $y=\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$. *Resp.* $y'=\frac{1}{1+\cos x}$. 43. $y=\operatorname{sen} 2x\cos 3x$. *Resp.* $y'=2\cos 2x\cos 3x-3\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} 3x$. 44. $y=\operatorname{cotg}^2 5x$. *Resp.* $y'=-10\operatorname{cotg} 5x\csc^2 5x$. 45. $y=t\operatorname{sen} t+\cos t$. *Resp.* $y'=t\cos t$. 46. $y=\operatorname{sen}^3 t\cos t$. *Resp.* $y'=\operatorname{sen}^2 t\,(3\cos^2 t-\operatorname{sen}^2 t)$. 47. $y=a\sqrt{\cos 2x}$. *Resp.* $y'=-\frac{a\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

48. $r=a\operatorname{sen}^3\frac{\varphi}{3}$. *Resp.* $r'_\varphi=a\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$. 49. $y=\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{cotg}\frac{x}{2}}{x}$. *Resp.* $y'=-\frac{2x\cos x+\operatorname{sen}^2 x\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{cotg}\frac{x}{2}\right)}{x^2\operatorname{sen}^2 x}$. 50. $y=a\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)^2$. *Resp.* $y'=2a\operatorname{sen}^3\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$. 51. $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x$. *Resp.* $y'=\operatorname{tg} x\operatorname{sc}^2 x$. 52. $y=\ln\cos x$. *Resp.* $y'=-\operatorname{tg} x$. 53. $y=\ln\operatorname{tg} x$. *Resp.* $y'-2/\operatorname{sen} 2x$. 54. $y=\ln\operatorname{sen}^2 x$. *Resp.* $y'=2\operatorname{cotg} x$. 55. $y=\frac{\operatorname{tg} x-1}{\operatorname{sc} x}$. *Resp.* $y'=\operatorname{sen} x+\cos x$. 56. $y=\ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$. *Resp.* $y'=\frac{1}{\cos x}$. 57. $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. *Resp.* $y'=\frac{1}{\cos x}$. 58. $y=\operatorname{sen}(x+a)\cos(x+a)$. *Resp.* $y'=\cos 2(x+a)$. 59. $f(x)=\operatorname{sen}(\ln x)$. *Resp.* $f'(x)=\frac{\cos(\ln x)}{x}$. 60. $f(x)=\operatorname{tg}(\ln x)$. *Resp.* $f'(x)=\frac{\operatorname{sc}^2(\ln x)}{x}$. 61. $f(x)=\operatorname{sen}(\cos x)$. *Resp.* $f'(x)=-\operatorname{sen} x\cos(\cos x)$. 62. $r=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\varphi-\operatorname{tg}\varphi+\varphi$. *Resp.* $\frac{dr}{d\varphi}=\operatorname{tg}^4\varphi$. 63. $f(x)=(x\operatorname{cotg} x)^2$. *Resp.* $f'(x)=2x\operatorname{cotg} x\,(\operatorname{cotg} x-x\csc^2 x)$.

64. $y=\ln(ax+b)$. *Resp.* $y'=a/(ax+b)$. 65. $y=\log_a(x^2+1)$. *Resp.* $y'=\frac{2x}{(x^2+1)\ln a}$. 66. $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$. *Resp.* $y'=\frac{2}{1-x^2}$. 67. $y=\log_3(x^2-\operatorname{sen} x)$. *Resp.* $y'=\frac{2x-\cos x}{(x^2-\operatorname{sen} x)\ln 3}$. 68. $y=\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}$. *Resp.* $y'=\frac{4x}{1-x^4}$. 69. $y=\ln(x^2+x)$. *Resp.* $y'=\frac{2x+1}{x^2+x}$. 70. $y=\ln(x^3-2x+5)$. *Resp.* $y'=\frac{3x^2-2}{x^3-2x+5}$.

71. $y=x\ln x$. *Resp.* $y'=\ln x+1$. 72. $y=\ln^3 x$. *Resp.* $y'=\frac{3\ln^2 x}{x}$. 73. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. *Resp.* $y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. 74. $y=\ln(\ln x)$. *Resp.* $y'=\frac{1}{x\ln x}$.
75. $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. *Resp.* $f'(x)=\frac{1}{1-x^2}$. 76. $f(x)=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}+x}$. *Resp.* $f'(x)=-\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$. 77. $y=\sqrt{a^2+x^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}$. *Resp.* $y'=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$. 78. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$. *Resp.* $y'=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}$. 79. $y=-\frac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x}+\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. *Resp.* $y'=\frac{1}{\operatorname{sen}^3 x}$. 80. $y=\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos^2 x}$. *Resp.* $y'=\frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{2\cos^3 x}$.
81. $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln\cos x$. *Resp.* $y'=\operatorname{tg}^3 x$. 82. $y=e^{ax}$. *Resp.* $y'=ae^{ax}$.
83. $y=e^{4x+5}$. *Resp.* $y'=4e^{4x+5}$. 84. $y=a^{x^2}$. *Resp.* $2xa^{x^2}\ln a$. 85. $y=7^{x^2+2x}$. *Resp.* $y'=2(x+1)\,7^{x^2+2x}\ln 7$. 86. $y=c^{a^2-x^2}$. *Resp.* $y'=-2xc^{a^2-x^2}\ln c$.
87. $y=ae^{\sqrt{x}}$. *Resp.* $y'=\frac{a}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$. 88. $r=a^{\theta}$. *Resp.* $r'=a^{\theta}\ln a$. 89. $r=a^{\ln\theta}$. *Resp.* $\frac{dr}{d\theta}=\frac{a^{\ln\theta}\ln a}{\theta}$. 90. $y=e^x(1-x^2)$. *Resp.* $y'=e^x(1-2x-x^2)$.
91. $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$. *Resp.* $y'=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$. 92. $y=\ln\frac{e^x}{1+e^x}$. *Resp.* $y'=\frac{1}{1+e^x}$.
93. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$. *Resp.* $y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$. 94. $y=e^{\operatorname{sen} x}$. *Resp.* $y'=e^{\operatorname{sen} x}\cos x$. 95. $y=a^{\operatorname{tg} nx}$. *Resp.* $y'=na^{\operatorname{tg} nx}\operatorname{sc}^2 nx\ln a$. 96. $y=e^{\cos x}\operatorname{sen} x$. *Resp.* $y'=e^{\cos x}(\cos x-\operatorname{sen}^2 x)$. 97. $y=e^x\ln\operatorname{sen} x$. *Resp.* $y'=e^x(\operatorname{cotg} x+\ln\operatorname{sen} x)$. 98. $y=x^n e^{\operatorname{sen} x}$. *Resp.* $y'=x^{n-1}e^{\operatorname{sen} x}(n+x\cos x)$. 99. $y=x^x$. *Resp.* $y'=x^x(\ln x+1)$. 100. $y=x^{\frac{1}{x}}$. *Resp.* $y'=x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$. 101. $y=x^{\ln x}$. *Resp.* $y'=x^{\ln x-1}\ln x^2$. 102. $y=e^{x^x}$. *Resp.* $y'=e^{x^x}(1+\ln x)\,x^x$. 103. $y=(x/n)^{nx}$. *Resp.* $y'=n\left(\frac{x}{n}\right)^{nx}\left(1+\ln\frac{x}{n}\right)$. 104. $y=x^{\operatorname{sen} x}$. *Resp.* $x^{\operatorname{sen} x}\times\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}+\ln x\cos x\right)$. 105. $y=(\operatorname{sen} x)^x$. *Resp.* $(\operatorname{sen} x)^x(\ln\operatorname{sen} x+x\operatorname{cotg} x)$.
106. $y=(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$. *Resp.* $y'=(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}(1+\operatorname{sc}^2 x\ln\operatorname{sen} x)$. 107. $y=\operatorname{tg}\times\frac{1-e^x}{1+e^x}$. *Resp.* $y'=-\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}\frac{1}{\cos^2\frac{1-e^x}{1+e^x}}$. 108. $y=\operatorname{sen}\sqrt{1-2^x}$. *Resp.* $y'=-\frac{\cos\sqrt{1-2x}}{2\sqrt{1-2^x}}2^x\ln 2$. 109. $y=10^{x\operatorname{tg} x}$. *Resp.* $y'=10^{x\operatorname{tg} x}\ln 10\times\left(\operatorname{tg} x+\frac{x}{\cos^2 x}\right)$.

Calcular las derivadas de las funciones siguientes, hallando previamente sus logaritmos. **110.** $y=\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$. *Resp.* $y'=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}\left(\frac{1}{x}+\right.$ $\left.+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}\right)$. **111.** $y=\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$. *Resp.* $y'=\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}\times$ $\times\left(\frac{3}{x+1}+\frac{3}{4(x-2)}-\frac{2}{5(x-3)}\right)$. **112.** $y=\frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$. *Resp.* $y'=$ $=-\frac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}$. **113.** $y=\frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^3}\sqrt[3]{(x-3)^7}}$. *Resp.* $y'=$ $=\frac{-161x^2+480x-271}{60\sqrt[5]{(x-1)^3}\sqrt[4]{(x-2)^7}\sqrt[3]{(x-3)^{10}}}$. **114.** $y=\frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$. *Resp.* $y'=$ $=\frac{1+3x^2-2x^4}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. **115.** $y=x^5(a+3x)^3(a-2x)^2$. *Resp.* $y'=5x^4(a+3x)^2\times$ $\times(a-2x)(a^2+2ax-12x^2)$. **116.** $y=\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$. *Resp.* $y'=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$. **117.** $y=(\operatorname{arcsen} x)^2$. *Resp.* $y'=\frac{2\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$. **118.** $y=\operatorname{arctg}(x^2+1)$. *Resp.* $y'=$ $=\frac{2x}{1+(x^2+1)^2}$. **119.** $y=\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$. *Resp.* $y'=\frac{2}{1+x^2}$. **120.** $y=\arccos(x^2)$. *Resp.* $y'=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$. **121.** $y=\frac{\arccos x}{x}$. *Resp.* $y'=\frac{-(x+\sqrt{1-x^2}\arccos x)}{x^2\sqrt{1-x^2}}$. **122.** $y=\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{\sqrt{2}}$. *Resp.* $y'=\frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. **123.** $y=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\times$ $\times\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$. *Resp.* $y'=2\sqrt{a^2-x^2}$. **124.** $y=\sqrt{a^2-x^2}+a\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$. *Resp.* $y'=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$. **125.** $u=\operatorname{arctg}\frac{v+a}{1-av}$. *Resp.* $\frac{du}{dv}=\frac{1}{1+v^2}$. **126.** $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\times$ $\times\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$. *Resp.* $y'=\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$. **127.** $y=x\operatorname{arcsen} x$. *Resp.* $y'=\operatorname{arcsen} x+$ $+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **128.** $f(x)=\arccos(\ln x)$. *Resp.* $f'(x)=-\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. **129** $f(x)=\operatorname{arcsen}\sqrt{\operatorname{sen} x}$. *Resp.* $f'(x)=\frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}^2 x}}$. **130.** $y=$ $=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\ (0\leqslant x<\pi)$. *Resp.* $y'=\frac{1}{2}$. **131.** $y=e^{\operatorname{arctg} x}$. *Resp.* $y'=$ $=\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}$. **132.** $y=\operatorname{arctg}\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. *Resp.* $y'=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$. **133.** $y=x^{\operatorname{arcsen} x}$. *Resp.* $y'=x^{\operatorname{arcsen} x}\left(\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}+\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. **134.** $y=\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$. *Resp.* $y'=$ $=\frac{\cos x}{|\cos x|}=\begin{cases}+1 \text{ en los cuadrantes } 1^{\text{ro}} \text{ y } 4^{\text{o}}\\ -1 \text{ en los cuadrantes } 2^{\text{o}} \text{ y } 3^{\text{o}}\end{cases}$. **135.** $y=\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{sen} x}{3+5\cos x}$. *Resp.* $y'=\frac{4}{5+3\cos x}$. **136.** $y=\operatorname{arctg}\frac{a}{x}+\ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$. *Resp.* $y'=$

$=\frac{2a^3}{x^4-a^4}$. 137. $y=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$. *Resp.* $y'=\frac{x^2}{1-x^4}$. 138. $y=-\frac{3x^2-1}{3x^3}+\ln\sqrt{1+x^2}+\operatorname{arctg} x$. *Resp.* $y'=\frac{x^5+1}{x^6+x^4}$. 139. $y=\frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. *Resp.* $y'=\frac{1}{x^3+1}$. 140. $y=\ln\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}+2\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$. *Resp.* $y'=\frac{4\sqrt{2}}{1+x^4}$. 141. $y=\arccos\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$. *Resp.* $-\frac{2n\,|x|^n}{x\,(x^{2n}+1)}$.

Derivación de las funciones implícitas

Hallar $\frac{dy}{dx}$ si:

142. $y^2=4px$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=\frac{2p}{y}$. 143. $x^2+y^2=a^2$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$. 144. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$. 145. $y^3-3y+2ax=0$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=\frac{2a}{3(1-y^2)}$. 146. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=-\sqrt{\frac{y}{x}}$. 147. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. 148. $y^2-2xy+b^2=0$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y-x}$. 149. $x^3+y^3-3axy=0$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$. 150. $y=\cos(x+y)$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=-\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{1+\operatorname{sen}(x+y)}$. 151. $\cos(xy)=x$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=-\frac{1+y\operatorname{sen}(xy)}{x\operatorname{sen}(xy)}$.

Hallar $\frac{dy}{dx}$ de las funciones dadas paramétricamente:

152. $x=a\cos t$, $y=b\operatorname{sen} t$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\operatorname{cotg} t$. 153. $x=a(t-\operatorname{sen} t)$; $y=a(1-\cos t)$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=\operatorname{cotg}\frac{t}{2}$. 154. $x=a\cos^3 t$; $y=b\operatorname{sen}^3 t$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\operatorname{tg} t$. 155. $x=\frac{3at}{1+t^2}$; $y=\frac{3at^2}{1+t^2}$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=\frac{2t}{1-t^2}$. 156. $u=2\ln\operatorname{cotg} s$, $v=\operatorname{tg} s+\operatorname{cotg} s$. Demostrar que $\frac{du}{dv}=\operatorname{tg} 2s$.

Hallar las tangentes de los ángulos de inclinación de las líneas tangentes a las curvas:

157. $x=\cos t$, $y=\operatorname{sen} t$ en el punto $x=-\frac{1}{2}$, $y=\sqrt{3/2}$. Construir la gráfica. *Respuesta*: $1/\sqrt{3}$. 158. $x=2\cos t$, $y=\operatorname{sen} t$ en el punto $x=1$, $y=-\sqrt{3/2}$. Construir la gráfica. *Respuesta*: $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. 159. $x=a(t-\operatorname{sen} t)$,

$y=a(1-\cos t)$ cuando $t=\pi/2$. Construir la gráfica. *Respuesta*: 1. **160.** $x=a\cos^3 t$, $y=a\operatorname{sen}^3 t$ cuando $t=\frac{\pi}{4}$; Construir la gráfica. *Respuesta*: -1.

161. Un cuerpo lanzado al espacio, formando con la horizontal un ángulo α, describe en el vacío, por acción de la gravedad, una curva (parábola), cuyas ecuaciones son: $x=v_0\cos\alpha t$, $y=v_0\operatorname{sen}\alpha t-\frac{gt}{2}$ ($g=9{,}8$ m/seg^2). Sabiendo que $\alpha=60°$, $v_0=50$ m/seg, determinar la dirección del movimiento, cuando: 1) $t=2$ seg; 2) $t=7$ seg. Construir la gráfica. *Respuesta*: 1) $tg\,\varphi_1=0{,}948$, $\varphi_1=43°30'$; 2) $\operatorname{tg}\varphi_2=-1{,}012$, $\varphi_2=+134°7'$.

Hallar las diferenciales de las funciones siguientes: **162.** $y=(a^2-x^2)^5$. *Respuesta*: $dy=-10x(a^2-x^2)^4\,dx$. **163.** $y=\sqrt{1+x^2}$. *Respuesta*: $dy=\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$. **164.** $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}x$. *Respuesta*: $dy=\operatorname{sc}^4 x dx$. **165.** $y=\frac{x\ln x}{1-x}+\ln(1-x)$. *Respuesta*: $dy=\frac{\ln x dx}{(1-x^2)}$.

Calcular los incrementos y diferenciales de las funciones:

166. $y=2x^2-x$, cuando $x=1$, $\Delta x=0{,}01$. *Respuesta*: $\Delta y=0{,}0302$, $dy=0{,}03$. **167.** Dada $y=x^3+2x$. Hallar Δy y dy, cuando $x=-1$, $\Delta x=0{,}02$. *Respuesta*: $\Delta y=0{,}098808$, $dy=0{,}1$. **168.** Dada $y=\operatorname{sen}x$. Hallar dy, cuando $x=\pi/3$, $\Delta x=\pi/18$. *Respuesta*: $dy=\frac{\pi}{36}=0{,}00873$. **169.** Conociendo que $\operatorname{sen}60°=\sqrt{3/2}=0{,}866025$; $\cos 60°=\frac{1}{2}$, hallar los valores aproximados de sen 60°3′ y sen 60°18′. Comparar los resultados con datos tabulares. *Respuesta*: sen 60°3′ ≈ ≈ 0,866461; sen 60°18′ ≈ 0,868643. **170.** Hallar el valor aproximado de tg 45°4′30″. *Respuesta*: 1,00262. **171.** Conociendo que $\log_{10}200=2{,}30103$, hallar el valor aproximado de $\log_{10}200{,}2$. *Respuesta*: 2,30146.

Derivadas de diversas órdenes **172.** $y=3x^3-2x^2+5x-1$. Hallar y''. *Resp.* $18x-4$. **173.** $y=\sqrt[5]{x^3}$. Hallar y'''. *Resp.* $\frac{42}{125}x^{-\frac{12}{5}}$. **174.** $y=x^6$. Hallar $y^{(6)}$. *Resp.* 6!. **175.** $y=\frac{C}{x^n}$. Hallar y''. *Resp.* $\frac{n(n+1)C}{x^{n+2}}$. **176.** $y=\sqrt{a^2-x^2}$. Hallar y''. *Resp.* $-\frac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$. **177.** $y=2\sqrt{x}$. Hallar $y^{(4)}$. *Resp.* $-\frac{15}{8\sqrt{x^7}}$. **178.** $y=ax^2+bx+c$. Hallar y'''. *Resp.* 0. **179.** $f(x)=\ln(x+1)$. Hallar $f^{IV}(x)$. *Resp.* $-\frac{6}{(x+1)^4}$. **180.** $y=\operatorname{tg}x$. Hallar y'''. *Resp.* $6\operatorname{sc}^4 x-4\operatorname{sc}^2 x$. **181.** $y=\ln\operatorname{sen}x$. Hallar y'''. *Resp.* $2\operatorname{cotg}x\csc^2 x$. **182.** $f(x)=\sqrt{\operatorname{sc}2x}$. Hallar $f''(x)$. *Resp.* $f''(x)=3[f(x)]^5-f(x)$. **183.** $y=\frac{x^3}{1-x}$. Hallar $f^{IV}(x)$. *Resp.* $\frac{4!}{(1-x)^5}$. **184.** $p=(q^2+a^2)\operatorname{arctg}\frac{q}{a}$. Hallar $\frac{d^3p}{dq^3}$. *Resp.* $\frac{4a^3}{(a^2+q^2)^2}$. **185.** $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$. *Resp.* $\frac{y}{a^2}$. **186.** $y=\cos ax$. Hallar $y^{(n)}$. *Resp.* $a^n\cos(ax+n\pi/2)$. **187.** $y=a^x$. Hallar $y^{(n)}$. *Resp.* $(\ln a)^n a^x$. **188.** $y=\ln(1+x)$. Hallar $y^{(n)}$. *Resp.* $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

189. $y=\frac{1-x}{1+x}$. Hallar $y^{(n)}$. *Resp.* $2(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$. 190. $y=e^x x$. Hallar $y^{(n)}$. *Resp.* $e^x(x+n)$. 191. $y=x^{n-1}\ln x$. Hallar $y^{(n)}$. *Resp.* $\frac{(n-1)!}{x}$. 192. $y=\operatorname{sen}^2 x$. Hallar $y^{(n)}$. *Resp.* $-2^{n-1}\cos(2x+\pi n/2)$. 193. $y=\operatorname{sen} x$. Hallar $y^{(n)}$. *Resp.* $x\operatorname{sen}(x+\pi n/2)-n\cos(x+\pi n/2)$. 194. Si $y=e^x\operatorname{sen} x$, demostrar que $y''-2y'+2y=0$. 195. $y^2=4ax$. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$. *Resp.* $-\frac{4a^2}{y^3}$. 196. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$ y $\frac{d^3y}{dx^3}$. *Resp.* $-\frac{b^4}{a^2y^3}$; $-\frac{3b^6x}{a^4y^5}$. 197. $x^2+y^2=r^2$. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$. *Resp.* $-\frac{r^2}{y^3}$. 198. $y^2-2xy=0$. Hallar $\frac{d^3y}{dx^3}$. *Resp.* 0. 199. $\rho=\operatorname{tg}(\varphi+\rho)$. Hallar $\frac{d^3\rho}{d\varphi^3}$. Resp. $-\frac{2(5+8\rho^2+3\rho^4)}{\rho^8}$. 200. $\sec\varphi\cdot\cos\rho=C$. Hallar $\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}$. *Resp.* $\frac{\operatorname{tg}^2\rho-\operatorname{tg}^2\varphi}{\operatorname{tg}^3\rho}$. 201. $e^x+x=e^y+y$. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$. *Resp.* $\frac{(1-e^{x+y})(e^x-e^y)}{(e^y+1)^3}$. 202. $y^3+x^3-3axy=0$. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$. *Resp.* $-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$. 203. $x=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a(1-\cos t)$. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$. *Resp.* $-\frac{1}{4a\operatorname{sen}^4 t/2}$. 204. $x=a\cos 2t$, $y=b\operatorname{sen}^2 t$. Demostrar que $\frac{d^2y}{dx^2}=0$. 205. $x=a\cos t$, $y=a\operatorname{sen} t$. Hallar $\frac{d^3y}{dx^3}$. *Resp.* $-\frac{3\cos t}{a^2\operatorname{sen}^5 t}$. 206. Demostrar que $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(\operatorname{senh} x)=\operatorname{senh} x$; $\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}(\operatorname{senh} x)=\cosh x$.

Ecuaciones de la tangente y de la normal. Longitudes de la subtangente y de la subnormal

207. Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $y=x^3-3x^2-x+5$ en el punto $M(3,2)$. *Respuesta*: tangente $8x-y-22=0$; normal $x+8y-19=0$.

208. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal, las longitudes de la subtangente y subnormal de la circunferencia $x^2+y^2=r^2$ en el punto $M(x_1, y_1)$. *Respuesta*: tangente $xx_1+yy_1=r^2$; normal $x_1y-y_1x=0$; $s_T=\left|\frac{y_1^2}{x_1}\right|$; $s_N=|-x_1|$.

209. Demostrar que la subtangente correspondiente a un punto arbitrario de la parábola $y^2=4px$ queda dividida por el vértice en dos partes iguales y que la subnormal es constante e igual a $2p$. Construir la gráfica.

210. Hallar la ecuación de la tangente en el punto $M(x_1, y_1)$: a) A la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. *Respuesta*: $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$. b) A la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. *Respuesta*: $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$. 211. Hallar la ecuación de la tangente y de la normal a la curva de Agnesi $y=\frac{8a^3}{4a^2+x^2}$ en el punto donde $x=2a$. *Respuesta*: tangente $x+2y=4a$; normal $y=2x-3a$.

212. Demostrar que la normal a la curva $3y=6x-5x^3$ trazada en el punto $M\left(1, \frac{1}{3}\right)$ pasa por el origen de las coordenadas.

213. Demostrar que la tangente a la curva $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2$ en el punto $M(a, b)$ está dada por la ecuación $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$.

214. Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $y^2=20x$ que forma con el eje Ox un ángulo de 45°. *Respuesta*: $y=x+5$ [en el punto (5, 10)].

215. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2+y^2=52$, paralelas a la recta $2x+3y=6$. *Respuesta*: $2x+3y\pm 26=0$.

216. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $4x^2-9y^2=36$, perpendiculares a la recta $2y+5x=10$. *Respuesta*: no existen tales tangentes.

217. Demostrar que el segmento de la tangente a la hipérbola $xy=m$, comprendido entre los ejes de coordenadas, se divide por el punto de tangencia en dos partes iguales.

218. Demostrar que el segmento de la tangente a la astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, comprendido entre los ejes de coordenadas, tiene longitud constante.

219. Hallar el ángulo α bajo el cual se cortan las curvas $y=a^x$ e $y=b^x$. *Respuesta*: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\ln a-\ln b}{1+\ln a\cdot\ln b}$.

220. Hallar las longitudes de la subtangente, subnormal, tangente y normal de la cicloide $x=a(\theta-\operatorname{sen}\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ en el punto en que $\theta=\frac{\pi}{2}$. *Respuesta*: $s_T=a$; $s_N=a$; $T=a\sqrt{2}$; $N=a\sqrt{2}$.

221. Hallar los valores s_T, s_N, T y N para la hipocicloide $x=4a\cos^3 t$, $y=4a\operatorname{sen}^3 t$. *Respuesta*: $s_T=-4a\operatorname{sen}^2 t\cos t$; $s_N=-4a\frac{\operatorname{sen}^4 t}{\cos t}$; $T=4a\operatorname{sen}^2 t$; $N=4a\operatorname{sen}^2 t\operatorname{tg} t$.

Problemas diversos

Calcular derivadas de las funciones: **222.** $y=\frac{\operatorname{sen}x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$. *Resp.* $y'=\frac{1}{\cos^3 x}$. **223.** $y=\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}$. *Resp.* $y'=-\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$. **224.** $y=\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}x)$. *Resp.* $y'=\frac{\cos x}{|\cos x|}$. **225.** $y=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$ $(a>0,\ b>0)$. *Resp.* $y'=\frac{1}{a+b\cos x}$. **226.** $y=|x|$. *Resp.* $y'=\frac{x}{|x|}$. **227.** $y=\operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2}$. *Resp.* $y'=-\frac{x}{|x|}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

228. De las fórmulas para calcular el volumen y la superficie de la esfera $v=\frac{4}{3}\pi r^3$ y $s=4\pi r^2$, se deduce que $\frac{dv}{dr}=s$. Explicar el significado geométrico de este resultado. Hallar la correlación análoga entre el área del círculo y la longitud de la circunferencia.

229. En el triángulo ABC el lado a se expresa a través de los otros dos lados b, c y el ángulo A, formado por estos últimos, mediante la fórmula $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$. Siendo invariables b y c, a es una función del ángulo A. Demostrar que $\frac{da}{dA}=h_a$, donde h_a es la altura del triángulo que corresponde a la base a. Interpretar el significado geométrico de este resultado.

230. Empleando el concepto de diferencial, interpretar el origen de las fórmulas aproximadas $\sqrt{a^2+b}\approx a+\frac{b}{2a}$, $\sqrt[3]{a^3+b}\approx a+\frac{b}{3a^2}$, donde $|b|$ es un número pequeño, en comparación con a.

231. El período de oscilaciones de un péndulo es $T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. ¿Qué influencia ejerce sobre el error, al calcular el valor del período T, un error del 1% cometido al medir:

1) la longitud del péndulo l; 2) la aceleración de la fuerza de gravedad g?

Respuesta: 1) $\approx\frac{1}{2}$ %; 2) $\approx\frac{1}{2}$ %.

232. La tractriz tiene la propiedad de que en cada uno de sus puntos, el segmento de la tangente T es de longitud constante. Demostrar esto,

1) dada la ecuación de la tractriz: $x=\sqrt{a^2-y^2}+\frac{a}{2}\ln\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{a+\sqrt{a^2-y^2}}$ $(a>0)$;

2) dadas las ecuaciones paramétricas

$$x=a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}+\cos t\right),\quad y=a\operatorname{sen}t.$$

233. Demostrar que la función $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$ satisface la ecuación $y''+3y'+2y=0$ (C_1 y C_2 son constantes).

234. Suponiendo que $y=e^x\operatorname{sen}x$, $z=e^x\cos x$, demostrar que

$$y''=2z,\quad z''=-2y.$$

235. Demostrar que la función $y=\operatorname{sen}(m\arcsen x)$ satisface la ecuación $(1-x^2)\,y''-xy'+m^2y=0$.

236. Demostrar que, si $(a=bx)\,e^{\frac{y}{x}}=x$, se tiene:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2.$$

CAPITULO IV

TEOREMAS SOBRE LAS FUNCIONES DERIVABLES

§ 1. TEOREMA SOBRE LAS RAICES DE LA DERIVADA (TEOREMA DE ROLLE)

Teorema de Rolle. *Si una función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y derivable en todos los puntos interiores de éste, reduciéndose a cero en los extremos $x = a$ y $x = b$, $[f(a) = f(b) = 0]$, entonces, dentro del segmento $[a, b]$ existe por lo menos un punto, $x = c$, $a < c < b$, en el que la derivada $f'(x)$ se reduce a cero, es decir, $f'(c) = 0$*.*

Demostración. Puesto que la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$, debe tener en éste su valor máximo M, y su valor mínimo m. Si $M = m$, la función $f(x)$ es constante, es decir, tiene una valor constante $f(x) = m$ para todos los valores de x. Pero, en este caso, en cualquier punto del segmento $f'(x) = 0$ y el teorema queda demostrado. Supongamos ahora que $M \neq m$. Entonces, por lo menos uno de estos números no es igual a cero.

Para concretar, supongamos que $M > 0$ y que la función toma su valor máximo cuando $x = c$, es decir, $f(c) = M$. Observemos que c es diferente de a y de b ya que, según la condición, $f(a) = 0$, $f(b) = 0$. Si $f(c)$ es el valor máximo de la función, entonces $f(c + \Delta x) - f(c) \leqslant 0$, tanto para $\Delta x > 0$, como para $\Delta x < 0$.

De aquí se deduce que:

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \leqslant 0, \quad \text{cuando} \quad \Delta x > 0; \tag{1'}$$

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \geqslant 0, \quad \text{cuando} \quad \Delta x < 0. \tag{1''}$$

Ya que, según la hipótesis del teorema, existe la derivada en el punto $x = c$, entonces, pasando al límite, cuando $\Delta x \to 0$, obtene-

---

*) El número c se denomina *raíz de la función* $\varphi(x)$, si $\varphi(c) = 0$

mos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'(c) \leqslant 0, \quad \text{cuando} \quad \Delta x > 0;$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'(c) \geqslant 0, \quad \text{cuando} \quad \Delta x < 0.$$

Pero las correlaciones $f'(c) \leqslant 0$ y $f'(c) \geqslant 0$ son compatibles sólo para el caso en que $f'(c) = 0$. Por tanto, dentro del segmento $[a, b]$ hay un punto c, en el cual la derivada $f'(x)$ es cero.

El teorema sobre las raíces de la derivada tiene una interpretación geométrica muy sencilla. Si una curva continua, con tangente

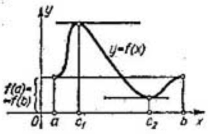

Fig. 91

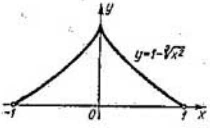

Fig. 92

en cada uno de sus puntos, corta el eje Ox en los puntos de abscisas a y b, entonces en esta curva existirá por lo menos un punto de abscisa c, $a < c < b$, en el cual la tangente es paralela al eje Ox.

Observación 1. El teorema demostrado es también válido para una función derivable que en los extremos del segmento $[a, b]$ no se reduzca a cero, sino tome valores iguales: $f(a) = f(b)$ (fig. 91). La demostración es análoga a la anterior.

Observación 2. Si la función $f(x)$ es tal que no tiene derivada en todos los puntos del segmento $[a, b]$, el teorema puede ser falso (es decir, que en este caso, en el segmento $[a, b]$ puede no existir un punto c en el que la derivada $f'(x)$ se reduzca a cero).

Por ejemplo, la función

$$y = f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

(fig. 92) es continua en el segmento $[-1, 1]$ y se reduce a cero en los extremos del mismo; sin embargo, la derivada

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

no se reduce a cero dentro del segmento. Esto se debe a que dentro del mismo hay un punto $x = 0$, en el cual no existe derivada (se reduce al infinito).

La gráfica de la figura 93 nos da un ejemplo más de una función, cuya derivada no se reduce a cero en el segmento $[0, 2]$.

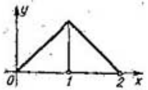

Fig. 93

Para esta función tampoco se cumplen las condiciones del teorema de Rolle, puesto que la función no tiene derivada en el punto $x = 1$.

§ 2. TEOREMA SOBRE LOS INCREMENTOS FINITOS (TEOREMA DE LAGRANGE)

Teorema de Lagrange. *Si la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y derivable en todos los puntos interiores del mismo, dentro del segmento $[a, b]$ existirá por lo menos un punto c, $a < c < b$ en que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)\ (b - a). \tag{1}$$

Demostración. Designemos por Q el número $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, es decir,

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \tag{2}$$

y examinemos la función auxiliar $F(x)$, determinada por la igualdad

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\,Q. \tag{3}$$

Veamos el significado geométrico de la función $F(x)$. Para ello escribamos primero la ecuación de la cuerda AB (fig. 94), teniendo en cuenta que su coeficiente angular es igual a $Q = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, y que la cuerda pasa por el punto $(a; f(a))$:

$$y - f(a) = Q\,(x - a);$$

de donde,

$$y = f(a) + Q\,(x - a).$$

Pero $F(x) = f(x) - [f(a) + Q(x - a)]$. Por tanto, para cada valor de x, $F(x)$ es igual a la diferencia entre las ordenadas de la curva, $y = f(x)$, y la cuerda $y = f(a) + Q(x - a)$, para los puntos de una misma abscisa x.

Es fácil ver que $F(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$, derivable en su interior y se reduce a cero en los extremos, es decir,

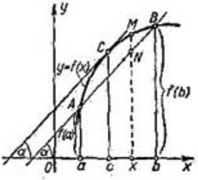

Fig. 94

$F(a) = 0$, $F(b) = 0$. Por eso, a la función $F(x)$ se puede aplicar el teorema de Rolle, según el cual, dentro del segmento existe un punto $x = c$, de tal manera que

$$F'(c) = 0.$$

Pero

$$F'(x) = f'(x) - Q.$$

Es decir,

$$F'(c) = f'(c) - Q = 0,$$

de donde

$$Q = f'(c).$$

Sustituyendo el valor de Q en la igualdad (2), tendremos:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \tag{1'}$$

de donde se deduce directamente la fórmula (1). Así, pues, el teorema queda demostrado.

Con el fin de aclarar el significado geométrico del teorema de Lagrange veamos la figura 94. En ésta, la magnitud $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ representa la tangente del ángulo α de inclinación de la cuerda que pasa por los puntos A y B de la gráfica y cuyas abscisas son a y b.

Por otra parte, $f'(c)$ es la tangente del ángulo de inclinación de la línea tangente a la curva en el punto de abscisa c. De modo que, el significado geométrico de la igualdad (1'), equivalente a la igualdad (1), es el siguiente: si por cada punto del arco AB puede trazarse una tangente, existirá en este arco, entre A y B, un punto C tal que en éste la línea tangente sea paralela a la cuerda que une los puntos A y B.

Observemos, ahora, lo siguiente; puesto que el valor c satisface la condición $a < c < b$, entonces, $c - a < b - a$, o sea,

$$c - a = \theta\,(b - a),$$

donde θ es un número comprendido entre 0 y 1, es decir,

$$0 < \theta < 1.$$

Pero, en este caso,

$$c = a + \theta\,(b - a),$$

y la fórmula (1) puede tomar la forma que sigue:

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'[a + \theta(b - a)], \quad 0 < \theta < 1. \tag{1''}$$

§ 3. TEOREMA SOBRE LA RAZON DE LOS INCREMENTOS DE DOS FUNCIONES (TEOREMA DE CAUCHY)

Teorema de Cauchy. *Siendo $f\,(x)$ y $\varphi\,(x)$ dos funciones continuas sobre el segmento $[a, b]$ y derivables dentro del mismo, y si, además, $\varphi'\,(x)$ no se anula en el interior del segmento, entonces dentro de éste existirá un punto $x = c$, $a < c < b$ tal que:*

$$\frac{f\,(b) - f\,(a)}{\varphi\,(b) - \varphi\,(a)} = \frac{f'\,(c)}{\varphi'\,(c)}. \tag{1}$$

Demostración. Definamos el número Q por la igualdad

$$Q = \frac{f\,(b) - f\,(a)}{\varphi\,(b) - \varphi\,(a)}. \tag{2}$$

Observemos que $\varphi\,(b) - \varphi\,(a) \neq 0$, ya que en el caso contrario $\varphi\,(b)$ sería igual a $\varphi\,(a)$, y, según el teorema de Rolle, la derivada $\varphi'\,(x)$ se reduciría a cero dentro del segmento, lo que contradice a la hipótesis del teorema.

Formemos una función auxiliar

$$F\,(x) = f\,(x) - f\,(a) - Q\,[\varphi\,(x) - \varphi\,(a)].$$

Es evidente, que $F\,(a) = 0$ y $F\,(b) = 0$ (que se deduce de la definición de la función $F\,(x)$ y de la de Q). Teniendo en cuenta que la función $F\,(x)$ satisface en el segmento $[a, b]$ todas las condiciones del teorema de Rolle, deducimos que entre a y b existe un valor $x = c$ $(a < c < b)$ tal que $F'\,(c) = 0$. Pero, $F'\,(x) = f'\,(x) -$

$-Q\varphi'(x)$ y entonces

$$F'(c)=f'(c)-Q\varphi'(c)=0,$$

de donde:

$$Q=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Sustituyendo el valor de Q en la igualdad (2), obtendremos la igualdad (1).

Observación. Contrariamente a lo que parece a primera vista, el teorema de Cauchy no se puede demostrar aplicando el teorema de Lagrange a los dos términos de la fracción

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}.$$

En efecto, en este caso obtendríamos (después de reducir la fracción por $b-a$) la fórmula:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c_1)}{\varphi'(c_2)},$$

en la que $a<c_1<b$, $a<c_2<b$. Pero como, en el caso general, $c_1\neq c_2$, el resultado obtenido, no confirma, evidentemente, el teorema de Cauchy.

§ 4. LIMITE DE LA RAZON DE DOS INFINITESIMALES $\left(\text{«CALCULO DE LIMITES INDETERMINADOS DEL TIPO } \frac{0}{0}\text{»}\right)$

Supongamos que las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ satisfacen las condiciones del teorema de Cauchy en cierto segmento $[a, b]$ y se reducen a cero en el punto $x=a$ del mismo, es decir, $f(a)=0$ y $\varphi(a)=0$.

La razón $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ no está definida, cuando $x=a$, pero tiene, sin embargo, un significado bien determinado para los valores de $x\neq a$. Por tanto, se puede plantear el problema de hallar el límite de esta razón, cuando $x\to a$. El cálculo de los límites de esta índole se llama habitualmente «cálculo de límites indeterminados del tipo $\frac{0}{0}$».

Nos hemos encontrado con problemas de este género cuando considerábamos, por ejemplo, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y cuando hallábamos las derivadas de las funciones elementales. La expresión $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ no tiene sentido, cuando $x=0$, es decir, la función $F(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

no está definida, cuando $x = 0$, pero hemos visto que el límite de la expresión $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, cuando $x \to 0$, existe y es igual a 1.

Teorema (Regla de L'Hospital). *Supongamos que las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ satisfacen en cierto segmento $[a, b]$ las condiciones del teorema de Cauchy y se reducen a cero en el punto $x = a$, es decir, $f(a) = \varphi(a) = 0$; entonces, si existe el límite de la razón $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, cuando $x \to a$, existirá también $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ y además:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Demostración. Tomemos en el segmento $[a, b]$ un punto $x \neq a$. Aplicando la fórmula de Cauchy, tendremos:

$$\frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

donde ξ se encuentra entre a y x. Según la condición, $f(a) = \varphi(a) = 0$. Esto significa que:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{1}$$

Si $x \to a$, también $\xi \to a$, ya que ξ está comprendida entre x y a. Al mismo tiempo, si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$, entonces existirá también $\lim\limits_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ igual a A.

Está claro que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A,$$

y en definitiva:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Observación 1. El teorema es válido también en el caso en que las funciones $f(x)$ ó $\varphi(x)$ no están definidas en $x = a$, pero

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to a} \varphi(x) = 0.$$

Para reducir este caso al examinado anteriormente, es necesario definir adicionalmente las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ en el punto $x = a$ de tal modo que éstas sean continuas en dicho punto.

Para esto es suficiente poner

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = 0; \qquad \varphi(a) = \lim_{x \to a} \varphi(x) = 0,$$

ya que, evidentemente, el límite de la razón $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, cuando $x \to a$, no depende de que las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ estén o no definidas en el punto $x = a$.

Observación 2. Si $f'(a) = \varphi'(a) = 0$ y las derivadas $f'(x)$ y $\varphi'(x)$ satisfacen las condiciones puestas sobre las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$, según la hipótesis del teorema, entonces, aplicando la regla de L'Hospital para la razón $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, obtendremos la fórmula:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}, \quad \text{etc.}$$

Observación. 3. Si $\varphi'(a) = 0$, pero $f'(x) \neq 0$, el teorema se aplica a la razón inversa $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, que tiende a cero, cuando $x \to a$. Por tanto, la razón $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tiende al infinito.

Ejemplo 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} 5x)'}{(3x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{5\cos 5x}{3} = \frac{5}{3}.$$

Ejemplo 2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ejemplo 3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen}^x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

En este caso fue necesario aplicar tres veces la regla de L'Hospital, puesto que, para $x = 0$, las razones de las primeras, segundas y terceras derivadas conducen a la indeterminación $\frac{0}{0}$.

Observación 4. La regla de L'Hospital también puede ser aplicada, cuando

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0.$$

En efecto, haciendo $x = \frac{1}{z}$, vemos que $z \to 0$, cuando $x \to \infty$, y, por tanto:

$$\lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = 0, \qquad \lim_{z \to 0} \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = 0.$$

Aplicando la misma regla de L'Hospital a la razón $\dfrac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}$ hallamos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{z \to 0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z \to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \lim_{z \to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

lo que se trataba de demostrar.

Ejemplo 4.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{k}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{k \cos \frac{k}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} k \cos \frac{k}{x} = k.$$

§ 5. LIMITE DE LA RAZON DE DOS MAGNITUDES INFINITAMENTE GRANDES

(«CALCULO DE LIMITES INDETERMINADOS DE LA FORMA $\frac{\infty}{\infty}$»)

Examinemos el problema acerca del límite de la razón de las dos funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$, que tienden al infinito, cuando $x \to a$ (o cuando $x \to \infty$).

Teorema. *Supongamos que $f(x)$ y $\varphi(x)$ son funciones continuas y derivables, para todos los valores de $x \neq a$ en la vecindad del punto a, y que la derivada $\varphi'(x)$ no se reduce a cero. Supongamos también que:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to a} \varphi(x) = \infty$$

y que existe el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \tag{1}$$

Entonces existirá también el $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, *o sea:*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A. \tag{2}$$

Demostración. En la vecindad considerada del punto a elijamos dos puntos α y x de tal modo que

$$\alpha<x<a \quad (\text{ó } a>x>\alpha).$$

Según el teorema de Cauchy, tendremos:

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{\varphi(x)-\varphi(\alpha)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \tag{3}$$

donde $\alpha<c<x$. El primer miembro de la igualdad (3) lo transformaremos así:

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{\varphi(x)-\varphi(\alpha)}=\frac{f(x)}{\varphi(x)}\,\frac{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}{1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}. \tag{4}$$

De las correlaciones (3) y (4) obtenemos:

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\frac{f(x)}{\varphi(x)}\,\frac{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}{1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}.$$

De donde:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}\,\frac{1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}. \tag{5}$$

De la condición (1) se deduce que para cualquier $\varepsilon>0$ arbitrariamente pequeño, se puede elegir α tan próximo de a, que para todos los valores de $x=c$, donde $\alpha<c<a$, se cumpla la desigualdad

$$\left|\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}-A\right|<\varepsilon$$

$$A-\varepsilon<\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}<A+\varepsilon. \tag{6}$$

Examinemos, ahora, la fracción

$$\frac{1-\dfrac{\psi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}.$$

Fijemos α de tal manera que se cumpla la desigualdad (6), y aproximemos x al valor a. Ya que $f(x)\to\infty$ y $\varphi(x)\to\infty$, cuando $x\to a$, tendremos:

$$\lim_{x\to a}\frac{1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}=1$$

y, por consiguiente, para el valor de $\varepsilon>0$, prefijado anteriormente, para x, suficientemente próximo de a, tendremos:

$$\left|\frac{1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}\right|<\varepsilon$$

ó

$$1-\varepsilon<\frac{1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}<1+\varepsilon. \tag{7}$$

Multiplicando miembro a miembro las desigualdades (6) y (7), obtenemos:

$$(A-\varepsilon)(1-\varepsilon)<\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}\,\frac{1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}<(A+\varepsilon)(1+\varepsilon),$$

o, en virtud de la igualdad (5):

$$(A-\varepsilon)(1-\varepsilon)<\frac{f(x)}{\varphi(x)}<(A+\varepsilon)(1+\varepsilon).$$

Puesto que ε es un número arbitrariamente pequeño, cuando x se encuentra lo suficientemente próximo de a, de las últimas desigualdades se deduce:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=A,$$

o, según (1):

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A,$$

lo que se trataba de demostrar.

Observación 1. Si en (1), $A=\infty$, es decir,

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\infty,$$

la igualdad (2) sigue siendo válida. En efecto, de la expresión anterior se tiene

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}=0.$$

Según el teorema demostrado:

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}=0,$$

de donde,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty.$$

Observación 2. El teorema se puede generalizar fácilmente al caso en que $x\to\infty$.

En el caso de que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$ y existe $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, entonces:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{8}$$

Esto se demuestra haciendo la sustitución de $x = \frac{1}{z}$, como se hizo en condiciones análogas, al calcular los límites indeterminados del tipo $\frac{0}{0}$ (véase § 4, observación 4).

Ejemplo 1.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$$

Observación 3. Insistamos una vez más en que las fórmulas (2) y (8) se verifican sólo cuando exista el límite (finito o infinito) del segundo miembro. Puede ocurrir que exista el límite del primer miembro y el del segundo no, como ocurre en el caso siguiente:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x}.$$

Este límite existe y es igual a 1. En efecto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1.$$

Pero la razón de las derivadas

$$\frac{(x + \operatorname{sen} x)'}{(x')} = \frac{1 + \cos x}{1} = 1 + \cos x$$

no tiende a ningún límite, cuando $x \to \infty$, sino que oscila entre 0 y 2.

Ejemplo 2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2 + b}{cx^2 - d} = \lim_{x\to\infty} \frac{2ax}{2cx} = \frac{a}{c}.$$

Ejemplo 3.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{3}{\cos^2 3x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \frac{2\cdot 3 \cos 3x \operatorname{sen} 3x}{2 \cos x \operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3 \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{(-1)}{(1)} = 3 \frac{(-1)}{(1)} \cdot \frac{(-1)}{(1)} = 3.$$

Ejemplo 4.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

En general, para cualquier número entero $n > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)\ldots 1}{e^x} = 0.$$

Los cálculos de los límites indeterminados, que simbólicamente se representan así:

a) $0\cdot\infty$; b) 0^0; c) ∞^0; d) 1^∞; e) $\infty-\infty$,

se reducen a los casos ya examinados.

El significado de estos límites indeterminados es como sigue:

a) Suponiendo $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} \varphi(x) = \infty$, hallar

$$\lim_{x\to a} [f(x)\,\varphi(x)].$$

Esta es una indeterminación de tipo $0\cdot\infty$.

Escribiendo esta expresión en la forma:

$$\lim_{x\to a} [f(x)\,\varphi(x)] = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}$$

o en la forma:

$$\lim_{x\to a} [f(x)\,\varphi(x)] = \lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}},$$

obtendremos, para $x\to a$, una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo 5.

$$\lim_{x\to 0} x^n \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{n}{x^{n+1}}} = -\lim_{x\to 0} \frac{x^n}{n} = 0.$$

b) Sea:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to a} \varphi(x) = 0,$$

hallar

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{\varphi(x)},$$

o, como suele decirse, calcular el límite indeterminado de tipo 0^0.

Poniendo

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)},$$

y tomando logaritmos en ambos miembros de la igualdad, tendremos

$$\ln y = \varphi(x)\,[\ln f(x)].$$

Si $x \to a$, obtenemos en el segundo miembro una indeterminación de tipo $0 \cdot \infty$. Una vez calculado el $\lim\limits_{x \to a} \ln y$, será fácil hallar el $\lim\limits_{x \to a} y$. Efectivamente, en virtud de la continuidad de la función logarítmica, se tiene $\lim\limits_{x \to a} \ln y = \ln \lim\limits_{x \to a} y$, y si $\ln \lim\limits_{x \to a} y = b$, resultará, evidentemente, que $\lim\limits_{x \to a} y = e^b$. Si, como caso particular, $b = +\infty$ ó $b = -\infty$, entonces será, respectivamente, $\lim y = +\infty$ ó $\lim y = 0$.

Ejemplo 6. Hallar $\lim\limits_{x \to 0} x^x$. Haciendo $y = x^x$, hallamos $\ln \lim y = \lim \ln y = \lim \ln (x^x) = \lim (x \ln x)$;

$$\lim_{x \to 0} (x \ln x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \to 0} x = 0,$$

por tanto, $\ln \lim y = 0$, de donde resulta que $\lim y = e^0 = 1$, es decir,

$$\lim_{x \to 0} x^x = 1.$$

De un modo análogo se calculan los límites en los demás casos.

§ 6. FORMULA DE TAYLOR

Supongamos que la función $y = f(x)$ tiene todas las derivadas, hasta la de orden $(n + 1)$ inclusive, en cierto segmento que contiene el punto $x = a$. Hallemos un polinomio $y = P_n(x)$ de grado no superior a n, cuyo valor en el punto $x = a$ sea igual al de la función $f(x)$ en el mismo punto, y los valores de sus derivadas hasta el n — ésimo orden sean iguales en el punto $x = a$ a los valores de las derivadas correspondientes de la función $f(x)$, en este punto:

$$P_n(a) = f(a), \quad P_n'(a) = f'(a), \quad P_n''(a) = f''(a), \ \ldots \\ \ldots, \ P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \qquad (1)$$

Es de suponer que este polinomio, en cierto aspecto, será «proximo» a la función $f(x)$.

Hallaremos este en forma de polinomio, siguiendo las potencias de $(x - a)$ con coeficientes indeterminados

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x - a) + C_2(x - a)^2 + C_3(x - a)^3 + \ldots \\ \ldots + C_n(x - a)^n. \qquad (2)$$

Los coeficientes indeterminados $C_1, C_2, \ldots, C_n$ calculemos de tal modo que se cumplan las condiciones (1).

Hallemos previamente las derivadas de $P_n(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} P'_n(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \ldots + nC_n(x-a)^{n-1}, \\ P''_n(x) = 2C_2 + 3\cdot 2C_3(x-a) + \ldots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_n^{(n)}(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad n(n-1)\ \ldots\ 2\cdot 1\cdot C_n. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Sustituyendo x por el valor de a en los dos miembros de las igualdades (2) y (3) y sustituyendo, según (1), $P_n(a)$ por $f(a)$, $P'_n(a) = f'(a)$ etc., obtendremos:

$$\begin{array}{l} f(a) = C_0, \\ f'(a) = C_1, \\ f''(a) = 2\cdot 1C_2, \\ f'''(a) = 3\cdot 2\cdot 1C_3, \\ \ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ 2\cdot 1C_n, \end{array}$$

de donde resulta:

$$\left.\begin{array}{l} C_0 = f(a), \qquad C_1 = f'(a), \qquad C_2 = \dfrac{1}{1\cdot 2} f''(a), \\ C_3 = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(a), \ \ldots, \ C_n = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} f^{(n)}(a). \end{array}\right\} \quad (4)$$

Introduciendo en la fórmula (2) los valores hallados de $C_1, C_2, \ldots, C_n$, obtenemos el polinomio buscado

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} f^{(n)}(a). \qquad (5)$$

Designemos por $R_n(x)$ la diferencia entre los valores de la función dada, $f(x)$, y del polinomio calculado $P_n(x)$ (fig. 95):

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

de donde tenemos:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

o, en forma desarrollada:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ \dots$$

$$\dots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x). \qquad (6)$$

El término $R_n(x)$ se conoce con el nombre de *término complementario*. Para aquellos valores de x en el que el término complementario $R_n(x)$ es pequeño, el polinomio $P_n(x)$ da un valor aproximado de la función $f(x)$.

Así, pues, la fórmula (6) permite sustituir la función $y=f(x)$ por el polinomio $y=P_n(x)$ con el grado correspondiente de precisión, igual al valor del término complementario $R_n(x)$.

Estimemos el valor del $R_n(x)$ para diferentes valores de x.

Escribamos el término complementario en la forma

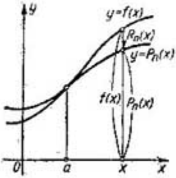

Fig. 95

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x), \qquad (7)$$

donde $Q(x)$ es la función que debemos hallar. Escribamos de nuevo la fórmula (6), del siguiente modo:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ \dots$$

$$\dots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x). \qquad (6')$$

Considerando fijos los valores de x y a, la función $Q(x)$ tendrá un valor determinado, que designamos por Q.

Veamos ahora la función auxiliar de t (t está comprendido entre a y x):

$$F(t)=f(x)-f(t)-\frac{x-t}{1}f'(t)-\frac{(x-t)^2}{2!}f''(t)-\ \dots$$

$$\dots-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}Q,$$

donde el valor de Q viene determinado por la correlación (6′), cuando a y x son números determinados.

Hallemos la derivada $F'(t)$:

$$F'(t) = -f'(t) + f'(t) - \frac{x-t}{1} f''(t) + \frac{2(x-t)}{2!} f''(t) -$$

$$-\frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) + \ldots - \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) + \frac{n(x-t)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(t) -$$

$$-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!} Q,$$

y reduciendo:

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!} Q. \tag{8}$$

Por consiguiente, la función $F(t)$ tiene derivada en todos los puntos t, próximos al punto de abscisa a. Observemos que, según la fórmula (6′), se tiene:

$$F(x) = 0, \quad F(a) = 0.$$

Por eso, a la función $F(t)$ se le puede aplicar el teorema de Rolle y, por tanto, existe un valor $t = \xi$, comprendido entre a y x, para el cual $F'(\xi) = 0$. De aquí, en virtud de la correlación (8), obtenemos:

$$-\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) + \frac{(x-\xi)^n}{n!} Q = 0,$$

de donde

$$Q = f^{(n+1)}(\xi).$$

Introduciendo esta expresión en la fórmula (7), resulta:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Esta es la llamada *fórmula de Lagrange* para el término complementario.

Como ξ está comprendido entre x y a, puede ser representado en la forma*:

$$\xi = a + \theta(x-a),$$

*) Véase el final del § 2 del presente capítulo.

donde, θ es un número comprendido entre 0 y 1, es decir, $0 < \theta < 1$. En este caso la fórmula del término complementario toma la forma:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)].$$

La fórmula:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)] \qquad (9)$$

se denomina *fórmula de Taylor* para la función $f(x)$.

Haciendo $a = 0$, la fórmula de Taylor se escribirá así:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \qquad (10)$$

donde, θ está comprendido entre 0 *y* 1. En este caso particular, la fórmula de Taylor toma también el nombre de fórmula de Maclaurin.

§ 7. DESARROLLO DE LAS FUNCIONES e^x, sen x y cos x POR LA FORMULA DE TAYLOR

1. Desarrollo de la función $f(x) = e^x$.

Hallando las derivadas sucesivas de $f(x)$, obtendremos:

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x, & f(0) = 1, \\ f'(x) = e^x, & f'(0) = 1, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ f^{(n)}(x) = e^x, & f^{(n)}(0) = 1. \end{array}$$

Introduciendo las expresiones obtenidas en la fórmula (10) § 6, tendremos:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Si $|x| \leqslant 1$, haciendo $n = 8$, habremos evaluado el término complementario:

$$R_8 < \frac{1}{9!} 3.$$

Cuando $x = 1$, se obtiene la fórmula que permite hallar el valor aproximado del número e:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{8!};$$

realizando las operaciones sobre las fracciones decimales hasta el quinto signo después de la coma hallamos:

$$e = 2{,}71827.$$

Aquí se toman como exactas las primeras cuatro cifras decimales, ya que el error no es superior a $\frac{3}{9!}$ ó a 0,00001. Tengamos en cuenta que para cualquiera x el término complementario será

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \to 0, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Efectivamente, si $\theta < 1$, y x tiene un valor fijo, la magnitud $e^{\theta x}$ está acotada (es menor que e^x, cuando $x > 0$, y menor que 1, cuando $x < 0$).

Demostremos que, para todo x fijo, se verifica:

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

En efecto,

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1} \right|.$$

Si x es un número fijo, se hallará un entero positivo N tal que $|x| < N$.

Ponemos $\frac{|x|}{N} = q$. Entonces, teniendo en cuenta que $0 < q < 1$, siendo $n = N + 1$, $N + 2$, $N + 3$, etc., podemos escribir:

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1} \right| =$$

$$= \left| \frac{x}{1} \right| \cdot \left| \frac{x}{2} \right| \cdot \left| \frac{x}{3} \right| \cdot \ldots \cdot \left| \frac{x}{N-1} \right| \cdot \left| \frac{x}{N} \right| \cdot \ldots \cdot \left| \frac{x}{n} \right| \cdot \left| \frac{x}{n+1} \right| <$$

$$< \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{N-1} \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q = \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} q^{n-N+2},$$

puesto que

$$\left|\frac{x}{N}\right| = q; \quad \left|\frac{x}{N+1}\right| < q; \quad \ldots; \quad \left|\frac{x}{n+1}\right| < q.$$

Pero la magnitud $\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$ es constante, es decir, no depende de n, mientras que q^{n-N+2} tiende a cero, cuando $n \to \infty$. Por tanto,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0. \tag{1}$$

y entonces,

$$R_n(x) = e^{\theta x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

De lo anterior se deduce que para todo valor de x se puede calcular e^x con cualquier grado de precisión, tomando el número suficiente de términos.

2. Desarrollo de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Hallemos las derivadas sucesivas de $f(x) = \operatorname{sen} x$:

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \qquad f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \qquad f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = -\cos x = \operatorname{sen}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \qquad f'''(0) = -1,$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x) = \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{\mathrm{IV}}(0) = 0,$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(n)}(0) = \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2},$$

$$f^{(n+1)}(x) = \operatorname{sen}\left[x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right], \quad f^{(n+1)}(\xi) = \operatorname{sen}\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right].$$

Introduciendo las expresiones halladas en la fórmula (10) § 6, obtenemos el desarrollo de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ según la fórmula de Taylor:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

$$\ldots + \frac{x^n}{n!} \operatorname{sen} n \frac{\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname{sen} \left[\xi + (n+1) \frac{\pi}{2} \right],$$

y puesto que $\left| \operatorname{sen} \left[\xi + (n+1) \frac{\pi}{2} \right] \right| \leqslant 1$, se tendrá $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todos los valores de x.

Apliquemos la fórmula obtenida para el cálculo aproximado de

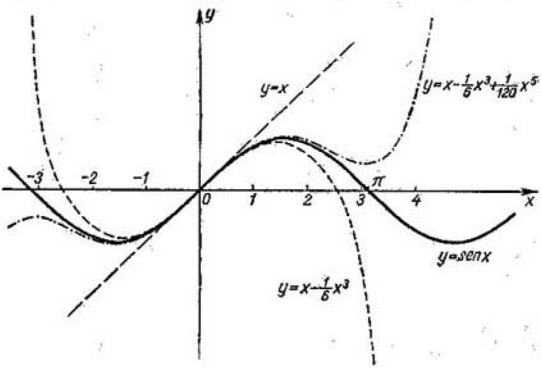

Fig. 96

sen 20°. Hagamos $n = 3$, es decir, nos limitaremos a los dos primeros términos del desarrollo:

$$\operatorname{sen} 20^\circ = \operatorname{sen} \frac{\pi}{9} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^3 = 0{,}343.$$

Evaluemos el error que resulta igual al término complementario:

$$|R_3| = \left| \left(\frac{\pi}{9} \right)^4 \frac{1}{4!} \operatorname{sen} (\xi + 2\pi) \right| \leqslant \left(\frac{\pi}{9} \right)^4 \frac{1}{4!} = 0{,}0006 < 0{,}001.$$

Por tanto, el error es inferior a 0,001, es decir, sen 20° = 0,343, con un error menor de 0,001.

En la figura 96 están representadas las gráficas de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ y de las tres primeras aproximaciones:

$$S_1(x) = x; \quad S_2(x) = x - \frac{x^3}{3!}; \quad S_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

3. Desarrollo de la función $f(x) = \cos x$. Hallando los valores de las derivadas sucesivas de la función $f(x) = \cos x$ para $x = 0$ e introduciéndolos en la fórmula de Maclaurin, obtendremos el desarrollo:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\dots + \frac{x^n}{n!}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right],$$

$$|\xi| < |x|.$$

Aquí también $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todos los valores de x.

Ejercicios para el capítulo IV

Comprobar que el teorema de Rolle es válido para las funciones: **1.** $y = x^2 - 3x + 2$ en el segmento $[1, 2]$. **2.** $y = x^3 + 5x^2 - 6x$ en el segmento $[0, 1]$. **3.** $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ en el segmento $[1, 3]$. **4.** $y = \operatorname{sen}^2 x$ en el segmento $[0, \pi]$. **5.** La función $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$ tiene por raíces 1 y -1. Hallar la raíz de la derivada $f'(x)$, estudiada en el teorema de Rolle. **6.** Comprobar que entre las raíces de la función $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$ se halla la de su derivada. **7.** Comprobar que el teorema de Rolle es válido para la función $y = \cos^2 x$ en el segmento $\left[-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right]$. **8.** La función $y = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ se anula en los extremos del segmento $[-1, 1]$. Demostrar que la derivada de esta función no se reduce a cero en ningún punto del segmento $[-1, 1]$. Explicar por qué razón no es aplicable en este caso el teorema de Rolle. **9.** Escribir la fórmula de Lagrange para la función $y = \operatorname{sen} x$ en el segmento $[x_1, x_2]$. *Respuesta*: $\operatorname{sen} x_2 - \operatorname{sen} x_1 = (x_2 - x_1)\cos c$, $x_1 < c < x_2$. **10.** Comprobar que la fórmula de Lagrange es válida para la función $y = 2x - x^2$ en el segmento $[0, 1]$. **11.** ¿En qué punto de la curva $y = x^n$ la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $M_1(0, 0)$ y $M_2(a, a^n)$? *Respuesta*: en el punto de abscisa $c = \frac{a}{\sqrt[n-1]{n}}$. **12.** ¿En qué punto de la curva $y = \ln x$ la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $M_1(1, 0)$ y $M_2(e, 1)$? *Respuesta*: en el punto de abscisa $c = e - 1$.

Aplicando el teorema de Lagrange, demostrar las desigualdades: **13.** $e^x \geqslant 1 + x$. **14.** $\ln(1 + x) < x$ $(x > 0)$. **15.** $b^n - a^n < nb^{n-1}(b - a)$ para $b > a$. **16.** $\operatorname{arctg} x < x$. **17.** Aplicar la fórmula de Cauchy a las funciones $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = x^3$ en el segmento $[1, 2]$ y hallar c. *Respuesta*: $c = \frac{14}{9}$.

Calcular los límites siguientes: 18. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}$. *Resp.* $\frac{1}{n}$. 19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$. *Resp.* 2. 20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x-\operatorname{sen} x}$. *Resp.* 2. 21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$. *Resp.* -2. 22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-\cos x}}$. *Resp.* No existe el límite. ($\sqrt{2}$ para $x\to+0$, $-\sqrt{2}$ para $x\to-0$). 23. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\operatorname{sen} x}{(\pi-2x)^2}$. *Resp.* $-\frac{1}{8}$. 24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$. *Resp.* $\ln\frac{a}{b}$. 25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$. *Resp.* $-\frac{1}{6}$. 26. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} a}{x-a}$. *Resp.* $\cos a$. 27. $\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y+\operatorname{sen} y-1}{\ln(1+y)}$. *Resp.* 2. 28. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\operatorname{sen} x-x}{3x^2+x^5}$. *Resp.* $\frac{1}{3}$. 29. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-1}{2x+5}$. *Resp.* $\frac{3}{2}$. 30. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}$ (donde $n>0$). *Resp.* 0. 31. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccotg} x}$. *Resp.* 1. 32. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x}}{\ln\frac{x-1}{x}}$. *Resp.* -1. 33. $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y}{e^{ay}}$. *Resp.* 0, cuando $a>0$; ∞, cuando $a\leqslant 0$. 34. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$. *Resp.* 1. 35. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{sen} 3x}{\ln\operatorname{sen} x}$. *Resp.* 1. 36. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{tg} 7x}{\ln\operatorname{tg} 2x}$. *Resp.* 1 37. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)-x}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2x}}$. *Resp.* 0. 38. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$. *Resp.* $\frac{2}{\pi}$. 39. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right]$. *Resp.* $-\frac{1}{2}$. 40. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right]$. *Resp.* -1. 41. $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}(\sec\varphi-\operatorname{tg}\varphi)$. *Resp.* 0. 42. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right]$. *Resp.* $\frac{1}{2}$. 43. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{cotg} 2x$. *Resp.* $\frac{1}{2}$. 44. $\lim\limits_{x\to 0} x^2e^{\frac{1}{x^2}}$. *Resp.* ∞. 45. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. *Resp.* $\frac{1}{e}$. 46. $\lim\limits_{t\to\infty}\sqrt[t]{t^2}$. *Resp.* 1. 47. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$. *Resp.* 1. 48. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$. *Resp.* e^a. 49. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$. *Resp.* $\frac{1}{e}$. 50. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$. *Resp.* 1. 51. $\lim\limits_{\varphi\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\varphi}\right)^{\frac{1}{\varphi^2}}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$. 52. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$. *Resp.* $\frac{1}{e}$. 53. Desarrollar en potencias de $x-2$ el polinomio $x^4-5x^3+5x^2+x+2$. *Respuesta*: $2-7(x-2)-(x-2)^2+$ $+3(x-2)^3+(x-2)^4$. **54.** Desarrollar en potencias de $x+1$ el polinomio $x^5+2x^4-x^2+x+1$. *Respuesta*: $(x+1)^2+2(x+1)^3-3(x+1)^4+(x+1)^5$. **55.** Aplicar la fórmula de Taylor a la función $y=\sqrt{x}$, cuando $a=1$, $n=3$. *Respuesta*: $\sqrt{x}=1+\frac{x-1}{1}\cdot\frac{1}{2}-\frac{(x-1)^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{(x-1)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{3}{8}-\frac{(x-1)^4}{4!}\cdot\frac{5}{16}\times$ $\times[1+\theta(x-1)]^{-7/2}$, $0<\theta<1$. **56.** Aplicar la fórmula de Maclaurin a la función $y=\sqrt{1+x}$, cuando $n=2$. *Respuesta*: $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+$ $+\frac{x^3}{16(1+\theta x)^{5/2}}$, $0<\theta<1$. **57.** Tomando los resultados del ejemplo anterior, evaluar el error de la igualdad aproximada $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$, cuando $x=0{,}2$. *Respuesta*: menos de $\frac{1}{2\cdot 10^3}$.

Explicar la procedencia de las igualdades aproximadas, válidas para pequeños valores de x, y evaluar el error de las mismas: **58.** $\ln\cos x\approx$ $\approx-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}$. **59.** $\operatorname{tg} x\approx x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}$. **60.** $\operatorname{arcsen} x\approx x+\frac{x^3}{6}$. **61.** $\operatorname{arctg} x\approx$ $\approx x-\frac{x^3}{3}$. **62.** $\frac{e^x+e^{-x}}{2}\approx 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$. **63.** $\ln(x+\sqrt{1-x^2})\approx x-\frac{x^3}{3!}$.

Aplicando la fórmula de Taylor, calcular los límites de las expresiones: **64.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}$. *Resp.* 1. **65.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+x)-\operatorname{sen}^2 x}{1-e^{-x^2}}$. *Resp.* 0. **66.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x)-x^3}{x^5}$. *Resp.* 1. **67.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$. *Resp.* $\frac{1}{2}$. **68.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\operatorname{cotg} x}{x}\right)$. *Resp.* $\frac{1}{3}$. **69.** $\lim\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{cotg}^2 x\right)$. *Resp.* $\frac{2}{3}$.

CAPITULO V

ANALISIS DE LA VARIACION DE LAS FUNCIONES

§ 1. GENERALIDADES

El estudio del aspecto cuantitativo de los diferentes fenómenos de la naturaleza se reduce al establecimiento y análisis de la dependencia funcional entre las magnitudes variables que participan en cada fenómeno. Si se logra expresar tal dependencia funcional de modo analítico, es decir, mediante una o varias fórmulas, podemos explorar la dependencia mencionada, sirviéndonos de los métodos del análisis matemático. Por ejemplo, al estudiar el fenómeno del movimiento de un proyectil en el vacío se obtiene la fórmula que determina el alcance de caída R en función del ángulo de elevación α y la velocidad inicial v_0:

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

(donde g es la aceleración de la gravedad).

Con esta fórmula, podemos establecer a qué ángulo α, corresponde el alcance R, máximo o mínimo, en qué condiciones el crecimiento del ángulo α determina el aumento del alcance, etc.

Consideremos otro ejemplo. Como resultado del estudio de las oscilaciones de una carga sobre una ballesta (de un vagón, de un automóvil, etc.) se obtiene la fórmula de la desviación y de la carga, respecto a la posición de equilibrio, en función de tiempo t:

$$y = e^{-kt} (A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t).$$

Las magnitudes k, A, B, ω, que integran la fórmula, tienen un valor determinado para un sistema oscilatorio dado (dependen de la elasticidad de la ballesta, de la carga aplicada, etc., que no varían con el tiempo t) y, por eso, se consideran como constantes.

Con esta fórmula, se puede establecer para qué valores de t crece la desviación y al aumentar t, cómo varía la magnitud de la desviación máxima en función del tiempo, para qué valores de t estas desviaciones son máximas, a qué valores de t corresponden las velocidades máximas del movimiento de la carga, etc.

Todos los problemas mencionados forman parte del concepto «análisis de la variación de una función».Es evidente que será difícil aclarar todas las cuestiones consideradas, calculando los valores de la función en puntos aislados (como se ha hecho en el capítulo II). La finalidad del presente capítulo consiste en establecer un método general para el análisis de la variación de funciones.

§ 2. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCION

En el § 6 del capítulo primero hemos dado la definición de una función creciente y decreciente. Apliquemos ahora el concepto de derivada al análisis del crecimiento y decrecimiento de una función.

Teorema. 1) *Si la función $f(x)$, derivable en el segmento $[a, b]$, crece en este segmento, su derivada en éste no es negativa, es decir,* $f'(x) \geqslant 0$.

2) *Si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ y derivable sobre el intervalo (a, b) cuando $f'(x)$ es positiva para $a < x < b$, esta función es creciente sobre el segmento $[a, b]$.*

Demostración. Demostremos la primera parte del teorema. Supongamos que $f(x)$ crece sobre el segmento $[a, b]$; demos al argumento x un incremento Δx y consideremos la razón

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Como $f(x)$ es una función creciente, se tiene:

$$f(x+\Delta x)>f(x) \quad \text{para} \quad \Delta x>0$$

y

$$f(x+\Delta x)<f(x) \quad \text{para} \quad \Delta x<0.$$

En ambos casos

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0, \tag{2}$$

y, por lo tanto,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geqslant 0,$$

es decir, $f'(x) \geqslant 0$, lo que se trataba de demostrar. [Si fuera $f'(x) < 0$, entonces, para valores de Δx suficientemente pequeños, la razón (1) sería negativa, lo que contradice a la relación (2)].

Pasemos ahora a la segunda parte del teorema. Sea $f'(x) > 0$ para todos los valores de x pertenecientes al intervalo (a, b).

Consideremos dos valores arbitrarios, x_1 y x_2, $x_1 < x_2$, pertenecientes al segmento $[a, b]$.

Conforme al teorema de Lagrange sobre incrementos finitos tenemos:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad x_1 < \xi < x_2.$$

Puesto que $f'(\xi) > 0$, entonces $f(x_2) - f(x_1) > 0$, lo que significa que $f(x)$ es una función creciente. Existe un teorema análogo para las funciones decrecientes (si son derivables).

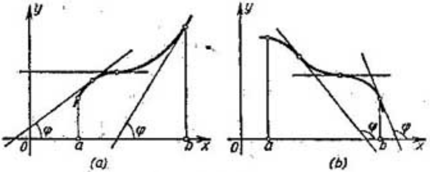

Fig. 97

Si la función $f(x)$ decrece sobre el segmento $[a, b]$, sobre el mismo segmento la derivada $f'(x) \leqslant 0$. Si $f'(x) < 0$ sobre el intervalo (a, b), la función $f(x)$ decrece en el segmento $[a, b]$. Se supone que la función es también continua en cada punto del segmento $[a, b]$ y derivable en todo el intervalo (a, b).

Observación. El teorema demostrado tiene la siguiente interpretación geométrica. Si la función $f(x)$ es creciente sobre el segmento $[a, b]$, la línea tangente a la curva $y = f(x)$, en cada punto del mismo, forma con el eje Ox un ángulo agudo φ, o en algunos puntos, puede ser paralela al eje. La tangente de este ángulo no es negativa: $f'(x) = \operatorname{tg} \varphi \geqslant 0$ (fig. 97, *a*).

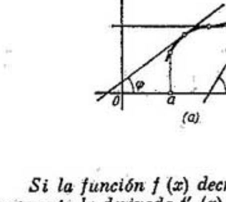

Fig. 98

Si la función $f(x)$ es decreciente sobre el segmento $[a, b]$ el ángulo de inclinación de la línea tangente será obtuso (en algunos puntos la línea tangente puede ser paralela al eje Ox). La tangente del ángulo no es positiva (fig. 97,*b*).

Del mismo modo se interpreta la segunda parte del teorema. El teorema permite juzgar sobre el crecimiento o decrecimiento de la función por el signo de su derivada.

Ejemplo: Determínense los dominios de crecimiento y decrecimiento de la función

$$y = x^4.$$

Solución. La derivada es $y' = 4x^3$; $y' > 0$, es positiva para $x > 0$; es decir, la función crece;

$y' < 0$ es negativa, para $x < 0$, es decir, la función decrece (fig. 98).

§ 3. MAXIMO Y MINIMO DE LAS FUNCIONES

Definición de máximo. Se dice que la función $f(x)$ tiene un *máximo* en el punto x_1, si su valor es aquí mayor que en cualquier otro punto x de cierto intervalo que comprende el punto x_1. Es decir, la función tiene un *máximo* en $x = x_1$, si $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ para todo valor de Δx (positivo o negativo) suficientemente pequeño en valor absoluto*.

Así, por ejemplo, la función $y = f(x)$, cuya gráfica se expone en la figura 99, tiene máximo cuando $x = x_1$.

Definición de mínimo. Se dice que la función $f(x)$ tiene un *mínimo* para $x = x_2$ si

$$f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$$

para cualquier valor de Δx (positivo o negativo) suficientemente pequeño en valor absoluto (fig. 99).

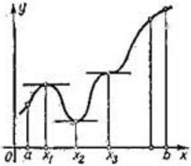

Fig. 99

Por ejemplo, la función $y = x^4$, examinada al final del párrafo anterior (véase fig. 98) tiene un mínimo en $x = 0$, ya que $y = 0$ cuando $x = 0$ e $y > 0$ para otros valores de x.

En relación con estas definiciones de máximo y de mínimo es necesario prestar atención a lo siguiente:

1. La función definida en un segmento puede alcanzar su valor máximo o mínimo sólo en los puntos comprendidos dentro del segmento considerado.

2. Sería un error suponer que el máximo y el mínimo de una función son respectivamente el mayor y menor valor de la misma en este segmento. En el punto del máximo, la función tiene el mayor valor sólo en comparación con los valores que ésta tiene en los puntos suficientemente próximos al punto del máximo. En el punto del mínimo, la función tiene el menor valor sólo en comparación con los valores que ésta tiene en los puntos suficientemente próximos al punto del mínimo.

---

*) A veces, esta definición se enuncia así: la función $f(x)$ tiene un *máximo* en el punto x_1, si existe una vecindad (α, β) del punto x_1 $(\alpha < x_1 < \beta)$ tal que para todos los puntos de la misma distintos de x_1, se cumpla la desigualdad $f(x) < f(x_1)$.

En la fig. 100 se representa una función definida en el segmento $[a, b]$, que tiene:

$$\text{máximo, cuando } x = x_1 \text{ y } x = x_3,$$

$$\text{mínimo, cuando } x = x_2 \text{ y } x = x_4,$$

pero el mínimo de la función en $x = x_4$ es mayor que el máximo en $x = x_1$. Para $x = b$, el valor de la función es mayor que cualquier máximo de la función en el segmento considerado.

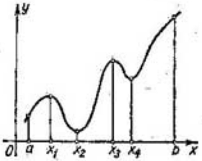

Fig. 100

Los máximos y los mínimos se llaman *valores extremos* de la función.

Los valores extremos de la función y su situación en el segmento $[a, b]$ caracterizan en cierto modo la variación de la función en dependencia de la variación del argumento.

Más adelante indicaremos el modo de calcular los valores extremos.

Teorema 1. (Condición necesaria para la existencia de un valor extremo). *Si la función derivable $y = f(x)$ tiene un máximo o un mínimo en el punto $x = x_1$, su derivada en este punto se reduce a cero, es decir, $f'(x_1) = 0$.*

Demostración. Supongamos que en el punto $x = x_1$ la función tiene un máximo. Entonces, para los incrementos Δx ($\Delta x \neq 0$), suficientemente pequeños en valor absoluto, se verificará:

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1),$$

es decir,

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0.$$

Pero en este caso, el signo de la razón,

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x},$$

se determina por el de Δx:

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0 \quad \text{cuando} \quad \Delta x < 0,$$

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0 \quad \text{cuando} \quad \Delta x > 0.$$

Conforme a la definición de derivada, se tiene:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Si la función $f(x)$ tiene derivada en $x = x_1$, el límite del segundo miembro no depende de como Δx tiende a cero (permaneciendo positivo o negativo).

Pero, si $\Delta x \to 0$, siendo negativo, resulta:

$$f'(x_1) \geqslant 0.$$

Si $\Delta x \to 0$, siendo positivo, se tiene:

$$f'(x_1) \leqslant 0.$$

Puesto que $f'(x_1)$ es un número determinado que no depende de la manera en que Δx tiende a cero, las dos últimas desigualdades serán compatibles únicamente cuando

$$f'(x_1) = 0.$$

Del mismo modo se demuestra el teorema, cuando se trata del mínimo de la función.

Este teorema tieneel siguiente significado geométrico: si en los puntos de máximo o de mínimo la función $f(x)$ tiene derivada, la tangente a la curva $y = f(x)$ en estos puntos será paralela al eje Ox. Efectivamente, si $f'(x_1) = \operatorname{tg} \varphi = 0$, donde φ es el ángulo formado por la tangente y el eje Ox, se tiene que $\varphi = 0$ (fig. 99).

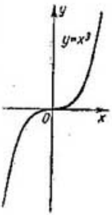

Fig. 101

De este teorema se deduce, que *si la función $f(x)$ tiene derivada para todos los valores considerados del argumento x, ésta puede tener valores extremos (máximo o mínimo) únicamente en los puntos en los que la derivada se reduce a cero.* La conclusión recíproca no es cierta: *una función puede no tener máximo ni mínimo en el punto en que la derivada se anula.* En la figura 99 se representa una función cuya derivada se reduce a cero cuando $x = x_3$ (la tangente es horizontal); sin embargo, la función no tiene en este punto máximo ni mínimo. Análogamente, la función $y = x^3$ (fig. 101) tiene derivada igual a cero en $x = 0$:

$$(y')_{x=0} = (3x^2)_{x=0} = 0.$$

Pero en este punto la función no tiene máximo ni mínimo. En efecto, por muy cerca que se encuentre el punto x del punto 0, siempre se verificará

$$x^3 < 0 \quad \text{para} \quad x < 0$$

y

$$x^3 > 0 \quad \text{para} \quad x > 0.$$

Hemos analizado el caso en que la función tiene derivada en todos los puntos del segmento. ¿Y qué ocurre en los puntos donde no existe la derivada? En los ejemplos que siguen explicaremos que en los puntos donde la función no tiene derivada puede haber máximo o mínimo, pero puede ocurrir también que en éstos no haya ni uno ni otro.

Ejemplo 1. La función $y = |x|$ no tiene derivada en el punto $x = 0$ (en este punto la curva no tiene tangente determinada), pero en este punto

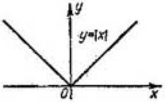

Fig. 102

la función dada admite un mínimo; en efecto, $y = 0$ cuando $x = 0$, mientras que para cualquier otro punto x, distinto de cero, tenemos $y > 0$ (fig. 102).

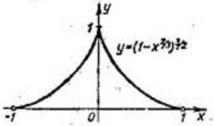

Fig. 103

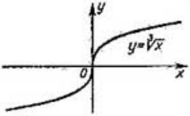

Fig. 104

Ejemplo 2. La función $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$ no tiene derivada cuando $x = 0$, ya que la expresión $y' = -(1-x^{2/3})^{1/2}\, x^{-1/3}$ es igual al infinito cuando $x = 0$, no obstante, en este punto la función tiene máximo: $f(0) = 1$, $f(x) < 1$ para x diferente de cero (fig. 103).

Ejemplo 3. La función $y = \sqrt[3]{x}$ no tiene derivada en $x = 0$ ($y' \to \infty$ cuando $x \to 0$). En este punto la función no tiene ni máximo ni mínimo puesto que $f(0) = 0$; $f(x) < 0$ para $x < 0$; y $f(x) > 0$ para $x > 0$ (fig. 104).

Así pues, la función puede tener valores extremos solamente en los puntos donde la derivada existe y es igual a cero, o bien en aquellos donde no existe la derivada.

Observemos que si la derivada no existe en cierto punto, pero existe en los cercanos a éste, entonces la derivada tiene discontinuidad en dicho punto.

Los valores del argumento, en los que la derivada se reduce a cero o tiene discontinuidad, se llaman *valores* o *puntos críticos*.

De lo anterior se deduce que no para todo valor crítico la función tiene máximo o mínimo. Sin embargo, si en un punto la función admite un máximo o mínimo, este punto es obligatoriamente crítico. Por eso, para hallar los valores extremos de la función, se procede de la manera siguiente: hallamos todos los puntos críticos y después estudiamos cada uno de ellos aclarando, si hay o no en éstos un máximo o mínimo de la función.

El análisis de la función en los puntos críticos está basado en los teoremas siguientes.

Teorema 2. (Condiciones suficientes para la existencia de un valor extremo). *Supongamos que la función $f(x)$ es continua sobre cierto intervalo, al cual pertenece el punto crítico x_1, y es derivable en cada punto del mismo (excepto, posiblemente, el mismo punto x_1). Si, al pasar por este punto de izquierda a derecha, el signo de la derivada cambia de «más» a «menos», entonces la función admite máximo en $x = x_1$. Si, al pasar por el punto x_1, de izquierda a derecha, el signo de la derivada cambia de «menos» a «más», la función admite un mínimo en este punto.*

De modo que si:

a) $\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{para } x < x_1 \\ f'(x) < 0 & \text{para } x > x_1, \end{cases}$

en el punto x_1 la función tiene *máximo*;

b) $\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{para } x < x_1 \\ f'(x) > 0 & \text{para } x > x_1 \end{cases}$

en el punto x_1 la función tiene *mínimo*. Hay que tener en cuenta que las condiciones a) y b) deben cumplirse para todos los valores de x, suficientemente cercanos al valor x_1, es decir, deben cumplirse en cada punto de la vecindad suficientemente pequeña, del punto crítico x_1.

Demostración. Veamos primero el caso en que el signo de la derivada cambia de «más» a «menos», es decir que para todos los puntos x, suficientemente próximos al punto x_1, se tiene:

$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x < x_1,$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad x > x_1.$$

Aplicando el teorema de Lagrange a la diferencia $f(x) - f(x_1)$, obtenemos:

$$f(x) - f(x_1) = f'(\xi)(x - x_1),$$

donde ξ es un punto comprendido entre x y x_1.

1) Sea $x < x_1$, entonces se tiene:

$$\xi < x_1, \quad f'(\xi) > 0, \quad f'(\xi)(x - x_1) < 0$$

y, por tanto:

$$f(x) - f(x_1) < 0,$$

o sea

$$f(x) < f(x_1). \tag{1}$$

2) Sea $x > x_1$, entonces se tiene:

$$\xi > x_1, \quad f'(\xi) < 0, \quad f'(\xi)(x - x_1) < 0$$

y, por tanto:

$$f(x) - f(x_1) < 0,$$

o sea

$$f(x) < f(x_1). \tag{2}$$

Las correlaciones (1) y (2) muestran que para todos los valores de x, suficientemente cercanos a x_1, los valores de la función son menores que el valor de ésta en el punto x_1. Por consiguiente, en este punto la función $f(x)$ tiene un máximo.

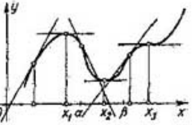

Fig. 105

Del modo análogo se demuestra la segunda parte del teorema, es decir, la condición suficiente para el valor mínimo.

La figura 105 nos ilustra claramente el sentido del teorema 2. Supongamos que en el punto $x = x_1$ tenemos $f'(x_1) = 0$, y que en cada punto x, suficientemente cercano a x_1, se cumplen las desigualdades:

$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x < x_1,$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad x > x_1.$$

Entonces, cuando $x < x_1$ la tangente a la curva forma con el eje Ox un ángulo agudo, y la función crece; cuando $x > x_1$, el ángulo formado por la tangente y el eje Ox es obtuso, y la función decrece. Cuando $x = x_1$, la función creciente comienza a decrecer, es decir, tiene un máximo.

Si en el punto x_2 tenemos $f'(x_2) = 0$ y para todos los valores de x, suficientemente cercanos a x_2 se cumplen las desigualdades:

$$f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad x < x_2,$$
$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x > x_2,$$

entonces, cuando $x < x_2$, la tangente a la curva forma con el eje Ox un ángulo obtuso, y la función decrece; cuando $x > x_2$ el ángulo formado por la tangente y el eje Ox es agudo y la función crece. Cuando $x = x_2$, la función decreciente pasa a ser creciente, es decir, tiene un mínimo.

Si para $x = x_3$ tenemos $f'(x_3) = 0$, y, para todos los valores de x, suficientemente cercanos a x_3, se cumplen las desigualdades:

$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x < x_3,$$
$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x > x_3,$$

entonces, la función es creciente tanto para $x < x_3$ como para $x > x_3$. Por lo tanto, para $x = x_3$ la función no tiene ni máximo ni mínimo.

Precisamente este es el caso de la función $y = x^3$, cuando $x = 0$.

En efecto, la derivada $y' = 3x^2$, por tanto:

$$(y')_{x=0} = 0,$$
$$(y')_{x<0} > 0,$$
$$(y')_{x>0} > 0,$$

lo que significa que en $x = 0$ la función no tiene máximo ni mínimo (fig. 101).

§ 4. ANALISIS DEL MAXIMO Y MINIMO DE UNA FUNCION DERIVABLE MEDIANTE LA PRIMERA DERIVADA

Basándonos en lo expuesto anteriormente podemos construir el esquema para el análisis de máximos y mínimos de una función derivable $y = f(x)$:

1. Hallar la primera derivada $f'(x)$ de la función.

2. Hallar los valores críticos del argumento x, para lo cual es necesario:

a) igualar a cero la primera derivada y encontrar las raíces reales de la ecuación obtenida $f'(x) = 0$;

b) determinar los valores de x para los cuales la derivada $f'(x)$ es discontinua.

3. Analizar el signo de la derivada a la izquierda y a la derecha del punto crítico. Puesto que el signo de la derivada permanece invariable en el intervalo entre dos puntos críticos, entonces para

estudiar el signo de la derivada en ambos lados del punto crítico (x_2, por ejemplo) (fig. 105), será suficiente determinar el signo de la derivada en los puntos α y β ($x_1 < \alpha < x_2$, $x_2 < \beta < x_3$, donde x_1 y x_3 son dos puntos críticos más próximos).

4. Calcular los valores de la función $f(x)$ para cada valor crítico del argumento.

De este modo, llegamos al siguiente esquema de casos posibles:

Signos de la derivada $f'(x)$ al pasar por el punto crítico x_1:			Naturaleza del punto crítico
$x < x_1$	$x = x_1$	$x > x_1$	
$+$	$f'(x_1)=0$ ó es discontinua	$-$	Punto de máximo
$-$	$f'(x_1)=0$ ó es discontinua	$+$	Punto de mínimo
$+$	$f'(x_1)=0$ ó es discontinua	$+$	No hay máximo ni mínimo (la función crece)
$-$	$f'(x_1)=0$ ó es discontinua	$-$	No hay máximo ni mínimo (la función decrece)

Ejemplo 1. Estúdiense el máximo y el mínimo de la función

$$y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1.$$

Solución. 1) Hallamos la primera derivada:

$$y'=x^2-4x+3.$$

2) Calculamos las raíces reales de la derivada:

$$x^2-4x+3=0.$$

Por consiguiente,

$$x_1=1, \quad x_2=3.$$

La derivada es continua en todos los puntos y por tanto no existen otros puntos críticos.

3) Analizamos los valores críticos y los resultados los llevamos a la fig. 106. El primer punto crítico es, $x_1=1$. Como $y'=(x-1)(x-3)$, resulta que:

$$\text{para } x<1 \text{ se tiene: } y'=(-)\cdot(-)>0,$$
$$\text{para } x>1 \text{ se tiene: } y'=(+)\cdot(-)<0.$$

Esto quiere decir que al pasar (de izquierda a derecha) por el punto $x_1=1$, el signo de la derivada cambia de «más» a «menos». Por tanto, en $x=1$ la función tiene un máximo:

$$(y)_{x=1}=\frac{7}{3}.$$

El segundo punto crítico es $x_2=3$

$$\text{para } x<3 \text{ se tiene } y'=(+)\cdot(-)<0,$$

$$\text{para } x>3 \text{ se tiene } y'=(+)\cdot(+)>0.$$

Esto significa que al pasar por el punto $x=3$ el signo de la derivada cambia de «menos» a «más». Por tanto, en $x=3$ la función tiene mínimo:

$$(y)_{x=3}=1.$$

Basándonos en este análisis trazamos la gráfica de la función (fig. 106)

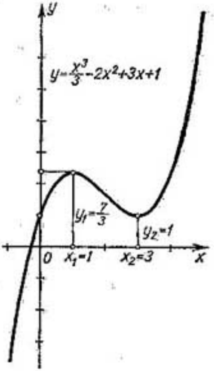

Fig. 106

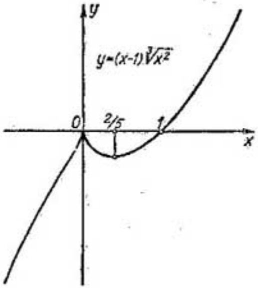

Fig. 107

Ejemplo 2. Analícense los valores máximo y mínimo de la función

$$y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}.$$

Solución. 1) Hallamos la primera derivada:

$$y'=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

2) Calculamos los valores críticos del argumento: a) encontramos los puntos en los que la derivada se reduce a cero:

$$y'=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}=0, \quad x_1=\frac{2}{5};$$

b) encontramos los puntos en los cuales la derivada es discontinua (aquí la derivada se reduce al infinito). De tal punto sirve, evidentemente, el punto

$$x_2=0.$$

(Obsérvese que cuando $x_2=0$, la función está definida y es continua).

No existen más puntos críticos.

3) Analizamos la naturaleza de los puntos críticos obtenidos. Veamos primero el punto $x_1=\frac{2}{5}$. Como

$$(y')_{x<\frac{2}{5}}<0, \quad (y')_{x>\frac{2}{5}}>0,$$

deducimos que en $x=\frac{2}{5}$ la función tiene un mínimo. El valor de la función en este punto es igual a

$$(y)_{x=\frac{2}{5}}=\left(\frac{2}{5}-1\right)\sqrt[3]{\frac{4}{25}}=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}.$$

Veamos ahora el segundo punto crítico, $x=0$. Como

$$(y)_{x<0}>0, \quad (y')_{x>0}<0,$$

deducimos que en $x=0$ la función tiene un máximo, siendo $(y)_{x=0}=0$. La gráfica de la función analizada se expone en la figura 107.

§ 5. ANALISIS DEL MAXIMO Y MINIMO DE UNA FUNCION MEDIANTE LA SEGUNDA DERIVADA

Supongamos que en $x=x_1$ la derivada de la función $y=f(x)$ se reduce a cero, es decir, $f'(x_1)=0$. Admitamos, además que existe la segunda derivada, $f''(x)$, y es continua sobre cierta vecindad del punto x_1. Para este caso es válido el siguiente teorema.

Teorema. *Si $f'(x_1)=0$, entonces en $x=x_1$ la función tiene máximo cuando $f''(x_1)<0$, y, un mínimo cuando $f''(x_1)>0$.*

Demostración. Consideremos la primera parte del teorema Supongamos que $f'(x_1)=0$ y $f''(x_1)<0$, como, según la hipótesis, $f''(x)$ es continua en cierta vecindad del punto $x=x_1$, entonces existirá evidentemente un segmento pequeño, que incluya el punto $x=x_1$, en todos los puntos del cual la segunda derivada $f''(x)$ es negativa.

Puesto que $f''(x)$ es la derivada de la primera derivada $f''(x)=(f'(x))'$, de la condición $(f'(x))'<0$ se infiere que $f'(x)$ decrece en el segmento que contiene el punto $x=x_1$ (§ 2, cap. V). Pero $f'(x_1)=0$. Por consiguiente, en este segmento tenemos $f'(x)>0$ cuando $x<x_1$, y $f'(x)<0$ cuando $x>x_1$, es decir, el signo de la derivada $f'(x)$ cambia de «más» a «menos» al pasar por el punto $x=x_1$, lo que significa que en el punto x_1 la función $f(x)$ admite un máximo. La primera parte del teorema queda demostrada.

Del mismo modo se demuestra la segunda parte: si $f''(x_1)>0$, entonces $f''(x)>0$ en todos los puntos del segmento mencionado que incluye el punto x_1; pero, en este caso, en el segmento dado,

$f''(x) = (f'(x))' > 0$ y, por tanto, $f'(x)$ crece. Como $f'(x_1) = 0$, al pasar por el punto x_1, el signo de la derivada $f'(x)$ cambia de «menos» a «más», es decir, la función $f(x)$ tiene un mínimo cuando $x = x_1$.

Si en el punto crítico $f''(x_1) = 0$, entonces en este punto puede haber un máximo o un mínimo, pero puede ocurrir que no exista ni uno ni otro. En este caso hay que realizar el análisis utilizando el primer método (véase § 4, cap. V).

El resultado del análisis de los valores extremos, mediante la segunda derivada, puede ser representado por la tabla siguiente:

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	Naturaleza del punto crítico
0	$-$	Punto del máximo
0	$+$	Punto del mínimo
0	0	Desconocido

Ejemplo 1. Hallar el máximo y mínimo de la función

$$y = 2\operatorname{sen} x + \cos 2x.$$

Solución. Puesto que la función es periódica y tiene un período de 2π, es suficiente estudiarla en el segmento $[0, 2\pi]$.

1) Hallamos la derivada

$$y' = 2\cos x - 2\operatorname{sen} 2x = 2(\cos x - 2\operatorname{sen} x \cos x) = 2\cos x\,(1 - 2\operatorname{sen} x).$$

2) Calculamos los valores críticos del argumento:

$$2\cos x\,(1 - 2\operatorname{sen} x) = 0,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6}; \quad x_2 = \frac{\pi}{2}; \quad x_3 = \frac{5\pi}{6}; \quad x_4 = \frac{3\pi}{2}.$$

3) Hallamos la segunda derivada:

$$y'' = -2\operatorname{sen} x - 4\cos 2x.$$

4) Analizamos la naturaleza de cada punto crítico:

$$(y'')_{x_1 = \frac{\pi}{6}} = -2\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{2} = -3 < 0.$$

Por lo tanto, en el punto $x_1 = \frac{\pi}{6}$ tenemos el máximo:

$$(y)_{x = \frac{\pi}{6}} = 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Luego,

$$(y'')_{x = \frac{\pi}{2}} = -2\cdot 1 + 4\cdot 1 = 2 > 0.$$

Por consiguiente, en el punto $x_2 = \frac{\pi}{2}$ tenemos el mínimo

$$(y)_{x=\frac{\pi}{2}} = 2\cdot 1 - 1 = 1.$$

En el punto $x_3 = \frac{5\pi}{6}$ tenemos:

$$(y'')_{x=\frac{5\pi}{6}} = -2\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{2} = -3 < 0.$$

Por tanto, para $x_3 = \frac{5\pi}{6}$ la función tiene el máximo:

$$(y)_{x_3=\frac{5\pi}{6}} = 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Finalmente

$$(y'')_{x=\frac{3\pi}{2}} = -2(-1) - 4(-1) = 6 > 0.$$

Consecuentemente, en el punto $x_4 = \frac{3\pi}{2}$ tenemos el mínimo:

$$(y)_{x=\frac{3\pi}{2}} = 2(-1) - 1 = -3.$$

La gráfica de la función analizada se da en la fig. 108.

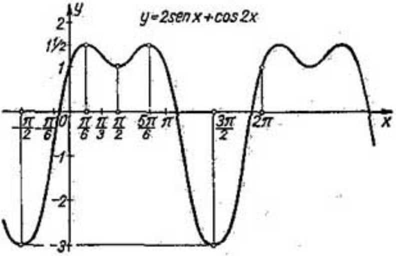

Fig. 108

Mostremos ahora con ejemplos que si $f'(x_1) = 0$ y $f''(x_1) = 0$, en cierto punto $x = x_1$ la función $f(x)$ puede tener un máximo o un mínimo en el mismo; pero, puede no haber ni uno ni otro.

Ejemplo 2. Analizar el máximo y el mínimo de la función

$$y = 1 - x^4.$$

Solución. 1) Hallemos los puntos críticos:

$$y' = -4x^3, \quad -4x^3 = 0, \quad x = 0.$$

2) Determinemos el signo de la segunda derivada cuando $x = 0$:

$$y'' = -12x^2, \quad (y'')_{x=0} = 0.$$

Por consiguiente, en este caso es imposible determinar la naturaleza del punto crítico con ayuda del signo de la segunda derivada.

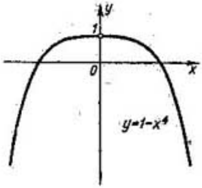

Fig. 109

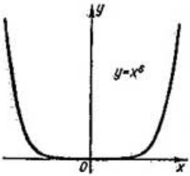

Fig. 110

3) Investiguemos la naturaleza del punto crítico utilizando el primer método (§ 4, cap. V):

$$(y')_{x<0} > 0, \quad (y')_{x>0} < 0.$$

Por tanto, cuando $x = 0$, la función tiene como máximo:

$$(y)_{x=0} = 0.$$

La gráfica de la función examinada se muestra en la fig. 109.

Ejemplo 3. Analizar el máximo y el mínimo de la función

$$y = x^6.$$

Solución. Mediante el segundo método, hallamos:

$$1)\ y' = 6x^5, \quad y' = 6x^5 = 0, \quad x = 0; \quad 2)\ y'' = 30x^4, \quad (y'')_{x=0} = 0.$$

Por consiguiente, el segundo método no da la respuesta. Recurriendo al primer método, obtenemos:

$$(y')_{x<0} < 0, \quad (y')_{x>0} > 0.$$

Por tanto, cuando $x = 0$ la función tiene un mínimo (fig. 110).

Ejemplo 4. Analizar el máximo y el mínimo de la función

$$y = (x-1)^3.$$

Solución. El segundo método

$$y' = 3(x-1)^2, \quad 3(x-1)^2 = 0, \quad x = 1;$$

$$y'' = 6(x-1), \quad (y'')_{x=1} = 0.$$

En este caso el segundo método no da la respuesta. Utilizando el primer método, hallamos:

$$(y')_{x<1} > 0, \quad (y')_{x>1} > 0.$$

Por tanto, cuando $x=1$, la función no tiene máximo ni mínimo (fig. 111).

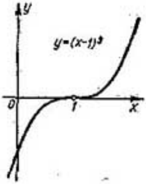

Fig. 111

§ 6. VALORES MAXIMO Y MINIMO DE UNA FUNCION EN UN SEGMENTO

Sea $y = f(x)$ una función continua en el segmento $[a, b]$. Entonces en este segmento la función alcanza su valor máximo (§ 10, cap. II). Supongamos que en el segmento dado la función $f(x)$ tenga un número finito de puntos críticos. Si el valor máximo se alcanza dentro del segmento $[a, b]$, es evidente que este valor será uno de los máximos de la función (si hay varios máximos), o sea, el máximo mayor. Pero puede ocurrir que el valor máximo es alcanzable en uno de los extremos del segmento.

Así pues, en el segmento $[a, b]$ la función adquiere su valor máximo en uno de los extremos del segmento dado, o bien en un punto interior del mismo, el del valor máximo.

Lo mismo puede decirse sobre el valor mínimo de la función: éste es alcanzable en uno de los extremos del segmento, o en un punto interior del mismo: en el punto del mínimo. De lo dicho se infiere la siguiente regla: para hallar el valor máximo de una función continua en el segmento $[a, b]$, es preciso:

1) hallar todos los máximos de la función en el segmento;

2) determinar los valores de la función en los extremos del segmento, es decir, calcular $f(a)$ y $f(b)$;

3) elegir el mayor valor de todos los valores obtenidos de la función. Este representará el valor máximo de la función en el segmento. Del mismo modo se debe proceder al determinar el valor mínimo de la función en el segmento.

Ejemplo. Determinar los valores máximo y mínimo de la función

$$y = x^3 - 3x + 3 \text{ en el segmento } \left[-3;\ \frac{3}{2}\right].$$

Solución. 1) Hallemos los máximos y mínimos de la función en el segmento $\left[-3;\ \frac{3}{2}\right]$:

$$y' = 3x^2 - 3,\quad 3x^2 - 3 = 0,\quad x_1 = 1,\quad x_2 = -1,$$
$$y'' = 6x,\quad (y'')_{x=1} = 6 > 0.$$

Por tanto, en el punto $x = 1$ hay un mínimo:

$$(y)_{x=1} = 1.$$

Luego

$$(y'')_{x=-1} = -6 < 0.$$

Por lo tanto, en el punto $x = -1$ hay un máximo:

$$(y)_{x=-1} = 5.$$

2) Determinar los valores de la función en los extremos del segmento:

$$(y)_{x=\frac{3}{2}} = \frac{15}{8},\qquad (y)_{x=-3} = -15.$$

De este modo, el valor máximo de la función examinada en el segmento $\left[-3;\ \frac{3}{2}\right]$ es: $(y)_{x=-1} = 5$, y el valor mínimo es:

$$(y)_{x=-3} = -15.$$

La gráfica de la función está representada en la fig. 112.

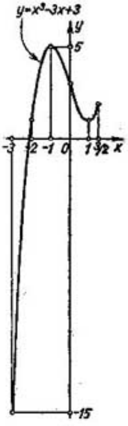

Fig. 112

§ 7. APLICACION DE LA TEORIA DE MAXIMOS Y MINIMOS DE LAS FUNCIONES A LA SOLUCION DE PROBLEMAS

La teoría de máximos y mínimos permite resolver varios problemas de geometría, mecánica, etc. Analicemos algunos de ellos.

Problema 1. La distancia $R = OA$ (fig. 113) (en el vacío) que cubre un proyectil, lanzado con velocidad inicial v_0 desde una pieza de artillería que tiene un ángulo de elevación φ respecto al horizonte, se determina según la fórmula:

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g}$$

(g es la aceleración de la gravedad). Determinar el ángulo φ con el cual la distancia R resultará máxima, dada la velocidad inicial v_0.

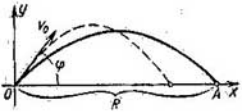

Fig. 113

Solución. La magnitud R es una función del ángulo variable φ. Analicemos el máximo de esta función en el segmento $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{dR}{d\varphi}=\frac{2v_0^2\cos 2\varphi}{g}; \quad \frac{2v_0^2\cos 2\varphi}{g}=0; \quad \text{valor crítico} \quad \varphi=\frac{\pi}{4};$$

$$\frac{d^2R}{d\varphi^2}=-\frac{4v_0^2\operatorname{sen} 2\varphi}{g}; \quad \left(\frac{d^2R}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{4}}=-\frac{4v_0^2}{g}<0.$$

Por tanto, para $\varphi=\frac{\pi}{4}$ la función R tiene el máximo:

$$(R)_{\varphi=\frac{\pi}{4}}=\frac{v_0^2}{g}.$$

Los valores de la función R en los extremos del segmento $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ son iguales a:

$$(R)_{\varphi=0}=0, \qquad (R)_{\varphi=\frac{\pi}{2}}=0.$$

De este modo, el máximo hallado es precisamente el mayor valor de R.

Problema 2. ¿Que dimensiones debe tener un cilindro para que sea mínima su área total S, dado el volumen v?

Solución. Designando por r y h el radio de la base del cilindro y su altura, respectivamente, tendremos:

$$S=2\pi r^2+2\pi rh.$$

Si el volumen del cilindro es conocido, h se expresa en función de r según la fórmula:

$$v=\pi r^2 h,$$

de donde

$$h = \frac{v}{\pi r^2}.$$

Sustituyendo la expresión de h en la fórmula para S, obtenemos:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{v}{\pi r^2},$$

o sea

$$S = 2\left(\pi r + \frac{v}{r}\right).$$

Aquí, v es el número dado. Por consiguiente hemos representado S como función de una variable independiente r. Hallemos el valor mínimo de esta función en el intervalo $0 < r < \infty$:

$$\frac{dS}{dr} = 2\left(2\pi r - \frac{v}{r^2}\right),$$

$$2\pi r - \frac{v}{r^2} = 0, \quad r_1 = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}},$$

$$\left(\frac{d^2S}{dr^2}\right)_{r=r_1} = 2\left(2\pi + \frac{2v}{r^3}\right)_{r=r_1} > 0.$$

Por consiguiente, la función S tiene un mínimo en el punto $r = r_1$. Como $\lim\limits_{r\to 0} S = \infty$ y $\lim\limits_{r\to\infty} S = \infty$, es decir, cuando r tiende a cero o al infinito, el área S crece infinitamente, lo que atestigua que la función S tiene un valor mínimo en el punto $r = r_1$.

Pero, si $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$, resulta: $h = \frac{v}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}} = 2r$.

Por tanto, para que el área total S sea mínima, dado el volumen v, la altura del cilindro debe ser igual al diámetro de éste.

§ 8. ANALISIS DE LOS VALORES MAXIMO Y MINIMO DE UNA FUNCION MEDIANTE LA FORMULA DE TAYLOR

Como se ha indicado en el § 5, capítulo V, si en algún punto $x = a$ tenemos $f'(a) = 0$ y $f''(a) = 0$, en éste puede haber un máximo o un mínimo, o bien no haya ni uno, ni otro. Hemos señalado que para resolver el problema en el caso dado, se recomienda realizar el análisis mediante el primer método, es decir, estudiando el signo de la primera derivada a la izquierda y a la derecha del punto $x = a$.

En este caso se puede también realizar el estudio mediante la fórmula de Taylor (§ 6, cap. IV).

Con el fin de generalizar el estudio supongamos que no sólo $f''(x)$, sino todas las derivadas de la función $f(x)$, hasta el orden n — ésimo inclusive, se reducen a cero cuando $x = a$:

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0, \tag{1}$$

mientras que

$$f^{(n+1)}(a) \neq 0.$$

Supongamos también que $f(x)$ tiene derivadas continuas hasta el orden $(n + 1)$ inclusive, en la vecindad del punto $x = a$.

Escribamos la fórmula de Taylor para $f(x)$, tomando en cuenta las igualdades (1):

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{2}$$

donde ξ es un número comprendido entre a y x. Como $f^{(n+1)}(x)$ es continua en la vecindad del punto a y $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, existirá un número positivo h tan pequeño que para todo x, que satisfaga la desigualdad $|x - a| < h$, se tenga $f^{(n+1)}(x) \neq 0$. Además, si $f^{(n+1)}(a) > 0$, en todos los puntos del intervalo $(a - h, a + h)$ será $f^{(n+1)}(x) > 0$; si $f^{(n+1)}(a) < 0$, en todos los puntos del intervalo mencionado $f^{(n+1)}(x)$ será negativa.

Escribamos la fórmula (2) en la forma:

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{2'}$$

y examinemos diferentes casos particulares.

Primer caso: n es un número impar.

a) Sea $f^{(n+1)}(a) < 0$. Entonces existirá tal intervalo $(a - h, a + h)$, en cada punto del cual la derivada de orden $(n+1)$ es negativa. Siendo x un punto de este intervalo, ξ también se encontrará entre $a - h$ y $a + h$. Por consiguiente, $f^{(n+1)}(\xi) < 0$. Puesto que $n + 1$ es un número par, entonces $(x - a)^{n+1} > 0$ cuando $x \neq a$, y, por eso, el segundo miembro de la fórmula (2') es negativo.

Por consiguiente, cuando $x \neq a$ en todos los puntos del intervalo $(a - h, a + h)$ tenemos:

$$f(x) - f(a) < 0,$$

lo que significa que la función tiene un máximo en el punto $x = a$.

b) Sea $f^{(n+1)}(a) > 0$. Entonces, para un valor h suficientemente pequeño tenemos $f^{(n+1)}(\xi) > 0$ en todos los puntos x del intervalo

$(a - h,\ a + h)$. Por tanto, el segundo miembro de la fórmula (2') será positivo, es decir, cuando $x \neq a$, en todos los puntos del intervalo indicado será:

$$f(x) - f(a) > 0,$$

lo que significa que la función tiene un mínimo en el punto $x = a$.

Segundo caso: n es un número par.

El número $n + 1$ será impar y la magnitud $(x - a)^{n+1}$ tendrá signos opuestos cuando $x < a$ y $x > a$. Si h es suficientemente pequeño en valor absoluto, la derivada de orden $(n + 1)$ en todos los demás puntos del intervalo $(a - h,\ a + h)$ conserva el mismo signo que en el punto a. Por consiguiente, $f(x) - f(a)$ tiene signos diferentes para $x < a$, y para $x > a$. Esto significa que en el punto $x = a$ no existe máximo, ni mínimo.

Observemos que, si n es par y $f^{(n+1)}(a) > 0$, entonces $f(x) < f(a)$ para $x < a$, y $f(x) > f(a)$ para $x > a$. Pero si n es par y $f^{(n+1)}(a) < 0$, entonces $f(x) > f(a)$ para $x < a$, y $f(x) < f(a)$ para $x > a$.

Se puede formular los resultados obtenidos del modo siguiente: Cuando $x = a$, tenemos:

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0$$

y la primera derivada $f^{(n+1)}(a)$, que no se anula, es de orden *par* entonces en el punto a la función $f(x)$ tiene un *máximo*, si $f^{(n+1)}(a) < 0$; la función $f(x)$ tiene un *mínimo*, si es $f^{(n+1)}(a) > 0$. Si la primera derivada $f^{(n+1)}(a)$, que no se anula, es la de orden *impar*, en el punto a la función no tiene máximo, ni mínimo. Además,

$$f(x) \textit{ crece, si } f^{(n+1)}(a) > 0;$$
$$f(x) \textit{ decrece, si } f^{(n+1)}(a) < 0.$$

Ejemplo. Analizar el máximo y el mínimo de la función:

$$f'(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$$

Solución. Hallemos los valores críticos de la función

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1).$$

De la ecuación

$$4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$$

obtenemos el único punto crítico:

$$x = 1$$

(ya que la ecuación dada tiene sólo una raíz real).

A continuación estudiamos la naturaleza del punto crítico $x = 1$:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 12 = 0 \text{ para } x = 1,$$

$$f'''(x) = 24x - 24 = 0 \text{ para } x = 1,$$

$$y^{\mathrm{IV}}(x) = 24 > 0 \text{ para todo } x \text{ cualquiera.}$$

Por consiguiente, cuando $x = 1$, la función $f(x)$ tiene un mínimo.

§ 9. CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD DE LA CURVA. PUNTOS DE INFLEXION

Sea una curva plana $y = f(x)$ que representa la función $f(x)$, uniforme y derivable.

Definición. Se dice que la curva es *convexa hacia arriba* en el intervalo (a, b), si todos los puntos de la misma están por debajo de cualquier tangente a la curva en este intervalo.

Se dice que la curva es *convexa hacia abajo* en el intervalo (b, c), si todos los puntos de la misma están situados por arriba de cualquier tangente a la curva en este intervalo.

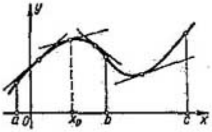

Fig. 114

La curva que tiene la convexidad hacia arriba se llama *convexa*, igual que la curva que tiene la convexidad hacia abajo se denomina *cóncava*.

En la figura 114 se muestra una curva convexa en el intervalo (a, b) y cóncava en el intervalo (b, c).

La dirección de la convexidad de la curva es una característica importante de su forma. A continuación determinemos los criterios según los cuales, durante el estudio de la función $y = f(x)$, podemos juzgar sobre la dirección de su convexidad en diferentes intervalos.

Demostremos el siguiente teorema.

Teorema 1. *Si la segunda derivada de la función $f(x)$ es negativa en todos los puntos del intervalo (a, b), es decir, si $f''(x) < 0$, la curva $y=f(x)$ tiene su convexidad dirigida hacia arriba en este intervalo (la curva es convexa).*

Demostración. Tomemos en el intervalo (a, b) un punto arbitrario $x = x_0$ (fig. 114) y tracemos una tangente a la curva en el punto cuya abscisa es $x = x_0$. El teorema quedará demostrado, si establecemos que todos los puntos de la curva en el intervalo (a, b) están situados por debajo de la tangente, es decir, la ordenada de cualquier punto de la curva $y = f(x)$ es menor que la ordenada y de la tangente, para un mismo valor de x.

La ecuación de la curva es:

$$y = f(x) \tag{1}$$

La ecuación de la tangente a la curva en el punto $x = x_0$ tiene la forma:

$$\bar{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

o sea

$$\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{2}$$

De las ecuaciones (1) y (2) se deduce que para un mismo valor de x la diferencia de las ordenadas de la curva y de la tangente es igual a:

$$y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Aplicando el teorema de Lagrange a la diferencia $f(x) - f(x_0)$, obtenemos:

$$y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

(donde c se encuentra entre x_0 y x) o sea,

$$y - \bar{y} = [f'(c) - f'(x_0)](x - x_0).$$

Apliquemos de nuevo el teorema de Lagrange a la expresión del corchete:

$$y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0) \tag{3}$$

(donde c_1 se encuentra entre x_0 y c).

Examinemos primero el caso, cuando $x > x_0$. Aquí: $x_0 < c < x$, puesto que

$$x - x_0 > 0, \quad c - x_0 > 0;$$

además, según la condición:

$$f''(c_1) < 0,$$

de la ecuación (3) se deduce que $y - \bar{y} < 0$.

Examinemos ahora el caso cuando $x < x_0$. Por ahora: $x < c < c_1 < x_0$, y $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$. Puesto que, según la condición, $f''(c_1) < 0$, entonces de la igualdad (3) se deduce que:

$$y - \bar{y} < 0.$$

Hemos comprobado que cualquier punto de la curva está situado por debajo de la tangente a la misma, cualesquiera que sean los valores de x y x_0 en el intervalo (a, b). Esto significa que la curva es convexa. Queda así demostrado el teorema.

Del mismo modo se comprueba el teorema siguiente:

Teorema 1'. *Si la segunda derivada de la función $f(x)$ es positiva en todos los puntos del intervalo (b, c), es decir, si $f''(x) > 0$, la curva $y = f(x)$ tiene su convexidad dirigida hacia abajo en este intervalo (la curva es cóncava).*

Observación. El significado geométrico de los teoremas 1 y 1' puede ser interpretado de modo siguiente. Estudiemos la curva $y = f(x)$ que tiene su convexidad dirigida hacia arriba en el intervalo (a, b) (fig. 115). La derivada $f'(x)$ es igual a la tangente del

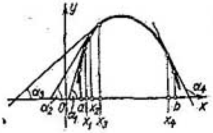

Fig. 115

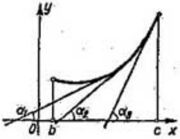

Fig. 116

ángulo α formado por la línea tangente a la curva y el eje Ox en el punto de abscisa x, es decir, $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$. Por lo tanto $f''(x) = [\operatorname{tg}\alpha]'_x$.

Si $f''(x) < 0$ para cualquier x en el intervalo (a, b), esto quiere decir que $\operatorname{tg}\alpha$ decrece a medida que crece x. Desde el punto de vista geométrico está claro que si $\operatorname{tg}\alpha$ decrece a medida que crece x, entonces la curva correspondiente será convexa. El teorema 1 es la comprobación analítica de esta deducción. Del mismo modo se interpreta geométricamente el teorema 1' (fig. 116).

Ejemplo 1. Determinar los intervalos de convexidad y de concavidad de la curva dada por la ecuación:

$$y = 2 - x^2,$$

Solución. La segunda derivada es

$$y'' = -2 < 0$$

para cualquier valor de x. Por consiguiente, la convexidad de la curva está dirigida hacia arriba en todos los puntos (fig. 117).

Ejemplo 2. Una curva está dada por la ecuación

$$y = e^x.$$

Puesto que:

$$y'' = e^x > 0,$$

para todos los valores de x, la curva es cóncava en todos los puntos, es decir, su convexidad está dirigida hacia abajo (fig. 118).

Ejemplo 3. Una curva está representada por la ecuación

$$y = x^3.$$

Puesto que:

$$y'' = 6x$$

entonces $y'' < 0$ para $x < 0$, e $y'' > 0$ para $x > 0$. Por consiguiente, la convexidad de la curva está dirigida hacia arriba cuando $x < 0$ y hacia abajo, cuando $x > 0$ (fig. 119).

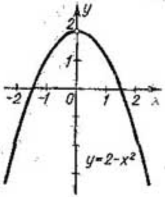

Fig. 117

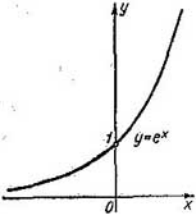

Fig. 118

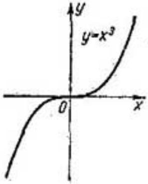

Fig. 119

Definición 2. El punto que en una curva continua separa la parte convexa de la cóncava, se llama *punto de inflexión* de la curva.

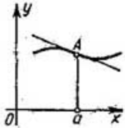

Fig. 120

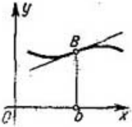

Fig. 121

En las figuras 119, 120 y 121 los puntos O, A y B son los puntos de inflexión.

Es evidente que en el punto de inflexión la tangente *corta* a la curva de modo que a un lado del punto la curva está situada por debajo de la tangente, y al otro lado, por encima de ésta.

Establezcamos ahora las condiciones suficientes para que el punto dado de la curva sea el de inflexión.

Teorema 2. *Sea $y = f(x)$ la ecuación de una curva.*

Si $f''(a) = 0$, o $f''(a)$ no existe, y la derivada $f''(x)$ cambia de signo al pasar por el valor $x = a$, entonces, el punto de la curva de abscisa $x = a$ es el punto de inflexión.

Demostración. 1) Sea $f''(x) < 0$ cuando $x < a$, y $f''(x) > 0$, cuando $x > a$. Entonces, para $x < a$ la curva es convexa y para $x > a$ es cóncava. Por tanto, el punto A de la curva, de abscisa $x = a$, es el punto de inflexión (fig. 120).

2) Si $f''(x) > 0$ cuando $x < b$, y $f''(x) < 0$, cuando $x > b$, entonces para $x < b$ la curva es cóncava y para $x > b$ es convexa. Por consiguiente el punto B de la curva de abscisa $x = b$ es el punto de inflexión (fig. 121).

Ejemplo 4. Determinar los puntos de inflexión y los intervalos de convexidad y de concavidad de la curva

$$y = e^{-x^2} \text{ (curva de Gauss).}$$

Solución. 1) Hallemos las derivadas primera y segunda:

$$y' = -2xe^{-x^2},$$

$$y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

2) La derivada segunda existe en todos los puntos. Hallemos los valores de x para los cuales $y'' = 0$:

$$2e^{-x^2}(2x^2-1) = 0,$$

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3) Analicemos los valores obtenidos:

$$\text{para } x < -\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ tenemos } y'' > 0,$$

$$\text{para } x > -\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ tenemos } y'' < 0.$$

La segunda derivada cambia de signo al pasar por el punto x_1, por tanto para $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ en la curva hay un punto de inflexión. Sus coordenadas son: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$;

$$\text{para } x < \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ tenemos } y'' < 0,$$

$$\text{para } x > \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ tenemos } y'' > 0.$$

Por consiguiente, para $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ en la curva también existe un punto de inflexión, cuyas coordenadas son: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$. La existencia del segundo punto de inflexión se deduce también de la simetría de la curva respecto al eje Oy.

4) De lo anterior se deduce que:

para $-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ la curva es cóncava

para $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ la curva es convexa

para $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$ la curva es cóncava.

5) De la expresión de la primera derivada

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

se deduce que:

si $x < 0$, $y' > 0$, es decir, la función crece;
si $x > 0$, $y' < 0$, es decir, la función decrece;
si $x = 0$, $y' = 0$.

En este punto la función tiene un máximo, o bien $y = 1$.
Basándose en el estudio realizado es fácil construir la gráfica de la curva (fig. 122).

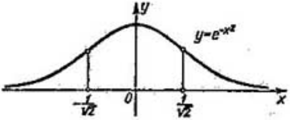

Fig. 122

Ejemplo 5. Analizar los puntos de inflexión de la curva

$$y = x^4.$$

Solución: 1) Hallemos la segunda derivada.

$$y'' = 12x^2.$$

2) Determinemos los puntos para los cuales $y'' = 0$:

$$12x^2 = 0, \quad x = 0.$$

3) Analicemos el valor obtenido de $x = 0$:

si $x < 0$, $y'' > 0$, la curva es cóncava;
si $x > 0$, $y'' > 0$, la curva es cóncava.

Por consiguiente, la curva no tiene puntos de inflexión (fig. 123).
Ejemplo 6. Analizar los puntos de inflexión de la curva

$$y = (x-1)^{\frac{1}{3}}.$$

Solución. 1) Hallemos las derivadas primera y segunda:

$$y' = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}; \quad y'' = -\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}}.$$

2) La segunda derivada no se reduce a cero en ningún punto, pero tampoco existe cuando $x = 1$, $(y'' = \pm\infty)$.
3) Analicemos el valor de $x = 1$:

si $x < 1$, $y'' > 0$, la curva es cóncava;
si $x > 1$, $y'' < 0$, la curva es convexa.

Por tanto, hay un punto de inflexión en $x = 1$ que es punto $(1; 0)$.

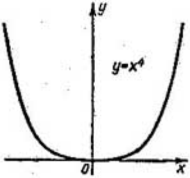

Fig. 123

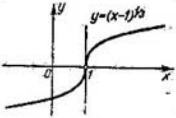

Fig. 124

Observemos que $y' = \infty$ cuando $x = 1$, es decir, la tangente a la curva en este punto es vertical (fig. 124).

§ 10. ASINTOTAS

Frecuentemente es preciso estudiar la forma de una curva $y = f(x)$, y, por tanto, la variación de la función correspondiente cuando la abscisa y la ordenada de un punto variable de la curva, juntas, o por separado *tienden al infinito* (según la magnitud absoluta). Aquí tiene especial importancia el caso en que la curva estudiada se aproxima indefinidamente a una recta, al tender el punto desplazable de la curva hacia el infinito*.

Definición. Si la distancia δ entre una recta A y el punto desplazable M de la curva tiende a cero, mientras que el punto M tiende al infinito, esta recta recibe el nombre de *asíntota* de la curva (figs. 125 y 126).

---

*) Se dice que el punto desplazable M se mueve a lo lagro de una curva hacia infinito, si la distancia entre este punto y el origen de coordenadas crece indefinidamente.

Para estudios ulteriores vamos a distinguir las asíntotas *verticales* (paralelas al eje de ordenadas), de las *oblicuas* (no paralelas al eje de ordenadas).

I. Asíntotas verticales.

De la definición de asíntota se deduce que si $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$, ó $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$, o bien $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, la recta $x = a$ es la asíntota de la curva $y = f(x)$. Recíprocamente, si la recta $x = a$ es una asíntota, se cumple una de estas igualdades.

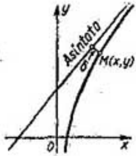

Fig. 125

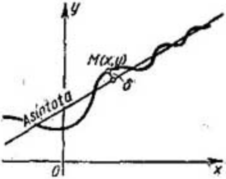

Fig. 126

Por consiguiente, para determinar las asíntotas verticales es preciso encontrar tales valores de $x = a$ que, al aproximarse a los mismos, la función tienda al infinito. En este caso la recta $x = a$ será asíntota vertical.

Ejemplo 1. La curva $y = \frac{2}{x-5}$ tiene una asíntota vertical $x = 5$, puesto que $y \to \infty$ cuando $x \to 5$ (fig. 127).

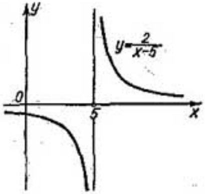

Fig. 127

Ejemplo 2. La curva $y = \operatorname{tg} x$ tiene infinidad de asíntotas verticales:

$$x = \pm\frac{\pi}{2};\quad x = \pm\frac{3\pi}{2};\quad x = \pm\frac{5\pi}{2};\ \ldots$$

Esto se deduce de que $\operatorname{tg} x \to \infty$, cuando x tiende a los valores $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, ... o a los valores $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{2}$, ... (fig. 128).

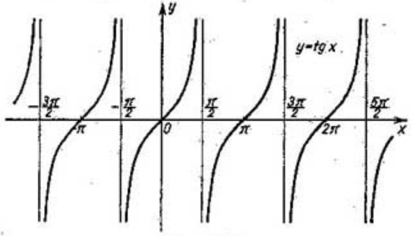

Fig. 128

Ejemplo 3. La curva $y = e^{\frac{1}{x}}$ tiene una asíntota vertical $x = 0$, puesto que $\lim\limits_{x \to +0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ (fig. 129).

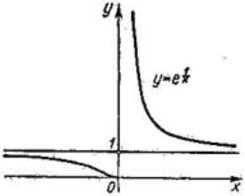

Fig. 129

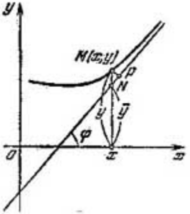

Fig. 130

II. Asíntotas oblicuas.

Supongamos que la curva $y = f(x)$ tiene una asíntota oblicua, cuya ecuación es:

$$y = kx + b. \tag{1}$$

Determinemos los números k y b (fig. 130). Sea $M(x, y)$ un punto de la curva y $N(x, \bar{y})$, un punto de la asíntota. La longitud del segmento MP es igual a la distancia entre el punto M y la asíntota. Según la hipótesis

$$\lim_{x \to +\infty} MP = 0. \tag{2}$$

Designando con φ el ángulo formado por la asíntota y el eje Ox, del ΔNMP hallamos:

$$NM = \frac{MP}{\cos\varphi}.$$

Puesto que φ es un ángulo invariable $\left(\text{diferente de } \frac{\pi}{2}\right)$, según la igualdad anterior tenemos:

$$\lim_{x\to+\infty} NM = 0. \tag{2'}$$

Recíprocamente, de la igualdad (2') se deduce la igualdad (2). Pero

$$NM = |QM - QN| = |y - \bar{y}| = |f(x) - (kx + b)|,$$

la igualdad (2') toma la forma:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx - b] = 0. \tag{3}$$

Así que, si la recta (1) es una asíntota, se cumple la igualdad (3). Recíprocamente, si para k y b constantes se cumple la igualdad (3), la recta $y = kx + b$ será asíntota.

Determinemos ahora k y b. Despejando x en la igualdad (3), obtenemos:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0.$$

Puesto que $x \to +\infty$, debe cumplirse la igualdad

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0.$$

Cuando b es constante, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x} = 0$. Por tanto,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k\right] = 0,$$

o sea

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{4}$$

Conciendo k, hallamos b de la igualdad (3):

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx]. \tag{5}$$

De suerte que si la recta $y = kx + b$ es una asíntota, entonces k y b se encuentran según las fórmulas (4) y (5). Recíprocamente, si existen los límites (4) y (5), se cumple la igualdad (3) y la recta $y = kx + b$ es una asíntota. Si uno de los límites (4) y (5) no existe, la curva no tiene asíntota.

Observemos que hemos estudiado el problema referente a la figura 130, cuando $x \to +\infty$; sin embargo, todos los razonamientos son válidos también para el caso cuando $x \to -\infty$.

Ejemplo 4. Hallar las asíntotas de la curva

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}.$$

Solución: 1) Hallamos las asintotas verticales:

$$\text{cuando } x \to -0, \ y \to +\infty;$$
$$\text{cuando } x \to +0, \ y \to -\infty.$$

Por consiguiente, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

2) Encontremos las asíntotas oblicuas

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \left[1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right] = 1,$$

es decir,

$$k = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [y - x] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x\right] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x}\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[2 - \frac{1}{x}\right] = 2$$

o bien,

$$b = 2.$$

Por consiguiente, la recta $y = x + 2$ es una asíntota oblicua de la curva dada.

Para estudiar la disposición mutua de la asíntota y de la curva, examinemos la diferencia de las ordenadas de la curva y de la asíntota para un mismo valor de x:

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - (x + 2) = -\frac{1}{x}.$$

La diferencia es negativa para $x > 0$, y positiva para $x < 0$; por tanto cuando $x > 0$, la curva está situada debajo de la asíntota, y cuando $x < 0$, encima de la asíntota (fig. 131).

Ejemplo 5. Hallar las asíntotas de la curva

$$y = e^{-x} \operatorname{sen} x + x.$$

Solución 1) Evidentemente no existen asíntotas verticales.
2) Las asíntotas oblicuas serán:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}\operatorname{sen}x+x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{-x}\operatorname{sen}x}{x}+1\right]=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[e^{-x}\operatorname{sen}x+x-x\right]=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\operatorname{sen}x=0.$$

Por consiguiente, la recta

$$y=x$$

es una asíntota oblicua para $x\to+\infty$. La curva dada no tiene asíntota cuando $x\to-\infty$. En efecto, no existe $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}$, puesto que $\frac{y}{x}=\frac{e^{-x}}{x}\operatorname{sen}x+1$.

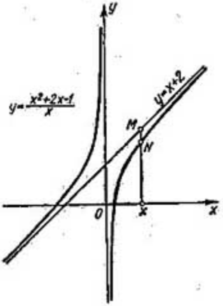

Fig. 131

(Aquí, el primer sumando crece indefinidamente cuando $x\to-\infty$, y, por tanto, no tiene límite).

§ 11. ESQUEMA GENERAL DEL ANALISIS DE FUNCIONES Y DE LA CONSTRUCCION DE GRAFICAS

El análisis de funciones se reduce generalmente a la determinación de los siguientes elementos:

1) el dominio natural de definición de la función;
2) los puntos de discontinuidad de la función;
3) los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función;
4) los puntos de máximo y mínimo, así como los valores máximos y mínimos de la función;

5) los dominios de convexidad y concavidad de la gráfica y los puntos de inflexión;

6) las asíntotas de la gráfica de la función.

Este análisis permite construir la gráfica de la función (a veces resulta más conveniente trazar los elementos de la gráfica simultáneamente con el análisis).

Observación 1. Si la función estudiada $y = f(x)$ es *par*, es decir, es tal que el valor de la función no varía cuando el argumento cambia de signo, es decir, si:

$$f(-x) = f(x),$$

será suficiente analizar la función y construir su gráfica sólo para los valores positivos del argumento, pertenecientes al dominio de definición de la función. Para los valores negativos del argumento la gráfica de la función se construye teniendo en cuenta que una función par tiene su gráfica simétrica respecto al eje de ordenadas.

Ejemplo 1. La función $y = x^2$ es par, puesto que $(-x^2) = (x)^2$ (véase fig. 5).

Ejemplo 2. La función $y = \cos x$ es par, puesto que $\cos(-x) = \cos(x)$ (véase fig. 16).

Observación 2. Si la función $y = f(x)$ es *impar*, es decir, que la función cambia de signo cuando varía el argumento, o sea, si:

$$f(-x) = -f(x),$$

será suficiente analizar la función para los valores positivos del argumento. La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Ejemplo 3. La función $y = x^3$ es impar, puesto que $(-x^3) = -x^3$ (véase fig. 7).

Ejemplo 4. La función $y = \operatorname{sen} x$ es impar, puesto que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ (véase fig. 15).

Observación 3. Como el conocimiento de algunas propiedades de una función permite hacer conclusiones sobre las otras, a veces resulta conveniente elegir el orden del análisis partiendo de las particularidades de la función dada. Por ejemplo, si determinamos que la función dada es continua y derivable, y encontramos los puntos de máximo y mínimo de la misma, quedan determinados también los dominios de crecimiento y decrecimiento de la función.

Ejemplo 5. Analizar la función,

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

y construir su gráfica.

Solución. 1) El dominio de definición de la función es el intervalo $-\infty < x < +\infty$. Inmediatamente observamos que para $x < 0$ tenemos $y < 0$ y para $x > 0$ tenemos $y > 0$.

2) La función es continua en todos los puntos.

3) Analicemos los máximos y mínimos de la función partiendo de la ecuación

$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0.$$

Hallamos los puntos críticos

$$x_1 = -1, \; x_2 = 1.$$

Analicemos ahora la naturaleza de los puntos críticos:

$$\text{cuando } x_1 < -1 \text{ tenemos } y' < 0;$$
$$\text{cuando } x_1 > -1 \text{ tenemos } y' > 0.$$

Por tanto, la función tiene un mínimo cuando $x = -1$:

$$y_{\text{mín}} = (y)_{x=-1} = -0{,}5.$$

De igual manera:

$$\text{cuando } x < 1 \text{ tenemos } y' > 0;$$
$$\text{cuando } x > 1 \text{ tenemos } y' < 0.$$

Por tanto, la función tiene un máximo cuando $x = 1$:

$$y_{\text{máx}} = (y)_{x=1} = 0{,}5.$$

4) Determinemos los campos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$\text{cuando} \begin{cases} -\infty < x < -1 \text{ tenemos } y' < 0 \text{: la función decrece;} \\ -1 < x < 1 \text{ tenemos } y' > 0 \text{: la función crece;} \\ 1 < x < +\infty \text{ tenemos } y' < 0 \text{: la función decrece.} \end{cases}$$

5) Determinemos los campos de convexidad y concavidad de la curva y los puntos de inflexión partiendo de la ecuación

$$y'' = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0$$

obtenemos:

$$x_1 = -\sqrt{3}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{3}.$$

Estudiando y'' como función de x, encontramos que:

para $-\infty < x < -\sqrt{3}$ tenemos $y'' < 0$: la curva es convexa;
para $-\sqrt{3} < x < 0$ tenemos $y'' > 0$: la curva es cóncava;
para $0 < x < \sqrt{3}$ tenemos $y'' < 0$: la curva es convexa:
para $\sqrt{3} < x < +\infty$ tenemos $y'' > 0$: la curva es cóncava.

Por tanto, el punto de coordenadas: $x = -\sqrt{3}$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}$, es el de inflexión, lo mismo que los puntos $(0, 0)$ y $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

6) Hallemos las asíntotas de la curva:

$$\text{para } x \to +\infty \text{ tenemos } y \to 0;$$
$$\text{para } x \to -\infty \text{ tenemos } y \to 0.$$

Por consiguiente, la recta $y = 0$ es la única asíntota oblicua. La curva no tiene asíntotas verticales, puesto que no existe ningún valor finito de x para el cual la función tienda al infinito.

La gráfica de la curva estudiada está expuesta en la figura 132.

Ejemplo 6. Analizar la función

$$y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$$

y construir su gráfica.

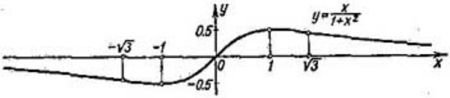

Fig. 132

Solución. 1) La función está definida para todos los valores de x.

2) La función es continua en todos los puntos.

3) Analicemos los máximos y los mínimos de la función:

$$y' = \frac{4ax - 3x^2}{3\sqrt[3]{(2ax^2 - x^3)^2}} = \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x(2a - x)^2}}.$$

La derivada existe en todos los puntos a excepción de los siguientes:

$$x_1 = 0 \text{ y } x_2 = 2a.$$

Analicemos los valores límites de la derivada para $x \to -0$ y para $x \to +0$:

$$\lim_{x \to -0} \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(2a + x)^2}} = -\infty, \quad \lim_{x \to +0} \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(2a + x)^2}} = +\infty$$

para $x < 0$ tenemos $y' < 0$, para $x > 0$ tenemos $y' > 0$.

Por tanto, la función tiene un mínimo cuando $x = 0$. El valor de la función en este punto es cero.

Estudiemos ahora la función en otro punto crítico $x_2 = 2a$. Si $x \to 2a$, la derivada también tiende al infinito. Sin embargo, en este caso, para todos los valores de x próximos a $2a$ (tanto a la derecha como a la izquierda del punto $2a$), la derivada es negativa. En consecuencia, en este punto la función no tiene máximo, ni mínimo. En el punto $x_2 = 2a$, como también en la proximidad de éste, la función decrece. La tangente a la curva en este punto es vertical.

Cuando $x = \frac{4a}{3}$ la derivada se reduce a cero. Estudiemos la naturaleza de este punto crítico. Analizando la expresión de la primera derivada, observemos que

$$\text{para } x < \frac{4a}{3} \text{ tenemos } y' > 0, \quad \text{para } x > \frac{4a}{3} \text{ tenemos } y' < 0.$$

Por tanto, la función tendrá un máximo para $x=\frac{4a}{3}$:

$$y_{\text{máx}}=\frac{2}{3}\ a\ \sqrt[3]{4}.$$

4) Utilizando los resultados del análisis efectuado obtenemos los campos de crecimiento y decrecimiento de la función:

para $-\infty<x<0$ la función decrece;

para $0<x<\frac{4a}{3}$ la función crece;

para $\frac{4a}{3}<x<+\infty$ la función decrece.

5) Hallemos los campos de convexidad y concavidad de la curva y puntos de inflexión: la segunda derivada

$$y''=-\frac{8a^2}{9x^{\frac{4}{3}}(2a-x)^{\frac{5}{3}}}$$

no se reduce a cero en ningún punto. Sin embargo existen dos puntos en los que la segunda derivada es discontinua: los puntos $x_1=0$ y $x_2=2a$.

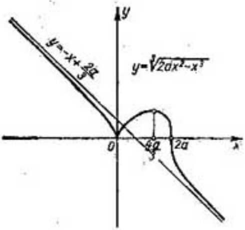

Fig. 133

Investiguemos el signo de la segunda derivada en la proximidad de cada uno de estos puntos: cuando $x<0$ tenemos $y''<0$, y la curva tiene su convexidad dirigida hacia arriba;
cuando $x>0$ tenemos $y''<0$, y la curva tiene su convexidad dirigida hacia arriba.

Quiere decir que el punto de abscisa $x=0$ no es el punto de inflexión.

Cuando $x<2a$ se tiene $y''<0$, y la curva tiene su convexidad dirigida hacia arriba.

Cuando $x>2a$ se tiene $y''>0$, y la curva tiene su convexidad dirigida hacia abajo.

Quiere decir que el punto $(2a;\ 0)$ de la curva es el de inflexión.

6) Hallemos las asíntotas de la curva

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{2ax^2-x^3}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{2a}{x}-1}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[\sqrt[3]{2ax^2-x^3}+x]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2ax^2-x^3+x^3}{\sqrt[3]{(2ax^2-x^3)^2}-x\sqrt[3]{2ax^2-x^3}+x^2}=\frac{2a}{3}.$$

Por tanto, la recta

$$y=-x+\frac{2a}{3}$$

es una asíntota oblicua de la curva

$$y=\sqrt[3]{2ax^2-x^3}.$$

La gráfica de la función estudiada se da en la fig. 133.

§ 12. ANALISIS DE LAS CURVAS DADAS EN FORMA PARAMETRICA

Sea la curva dada por ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t),\\ y&=\psi(t).\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

En este caso el análisis y la construcción de la curva se efectúan de manera análoga a la que ha sido utilizada para la curva dada por la ecuación

$$y=f(x).$$

Primeramente calculamos las derivadas:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=\varphi'(t),\\ \frac{dy}{dt}&=\psi'(t).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Para los puntos de la curva en la proximidad de los cuales ésta sirve de gráfica de la función $y=f(x)$, calculamos la derivada

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{3}$$

Encontremos los valores del parámetro $t=t_1, t_2, \ldots t_k$ para los cuales por lo menos una de las derivadas, $\varphi'(t)$ o $\psi'(t)$, se reduce a cero o tiene discontinuidad. (Tales valores de t los llamaremos críticos). Según la fórmula (3), determinemos el signo de la derivada $\frac{dy}{dx}$ en cada uno de los intervalos (t_1, t_2); (t_2, t_3); . . .; (t_{k-1}, t_k)

y, por tanto, en cada uno de los intervalos (x_1, x_2); (x_2, x_3); ... ...; (x_{k-1}, x_k) donde $x_i = \varphi(t_i)$. De esta manera quedan determinados los dominios de crecimiento y decrecimiento. Esto da la posibilidad de determinar la naturaleza de los puntos que corresponden a los valores del parámetro $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Luego calculamos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\,\varphi'(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \tag{4}$$

Esta fórmula nos permite determinar la dirección de la convexidad en cada punto de la curva. Para hallar las asíntotas, encontramos tales valores de t, en cuya proximidad una de las variables, x o y, tienda al infinito y tales valores de t en cuya proximidad x e y tiendan al infinito. Después realizamos el estudio de la curva del modo habitual. Mostremos con ejemplos algunas particularidade del estudio de las curvas dadas en forma paramétrica.

Ejemplo 1. Analizar la curva dada por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos^3 t, \\ y &= a\,\mathrm{sen}^3 t. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Solución. Los valores x e y están determinados para todos los valores de t. Siendo periódicas las funciones $\cos^3 t$ y $\mathrm{sen}^3 t$ de período 2π, será suficiente considerar la variación del parámetro t en los límites de 0 hasta 2π. El segmento $[-a, a]$ es el dominio de definición tanto para x como para y. Por consiguiente, la curva estudiada no tiene asíntotas. Hallemos ahora:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -3a\cos^2 t\,\mathrm{sen}\,t, \\ \frac{dy}{dt} &= 3a\,\mathrm{sen}^2 t\cos t. \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

Estas derivadas se reducen a cero, cuando $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$. Determinemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3a\,\mathrm{sen}^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\,\mathrm{sen}\,t} = -\mathrm{tg}\,t. \tag{3'}$$

Tomando en consideración las fórmulas (2') y (3') componemos la tabla siguiente.

Campo de variación de t	Campo de variación correspondiente de x	Campo de variación correspondiente de y	Signo de $\frac{dy}{dx}$	Carácter de variación de y en función de x ($y = f(x)$)
$0 < t < \frac{\pi}{2}$	$a > x > 0$	$0 < y < a$	$-$	Decrece
$\frac{\pi}{2} < t < \pi$	$0 > x > -a$	$a > y > 0$	$+$	Crece
$\pi < t < \frac{3\pi}{2}$	$-a < x < 0$	$0 > y > -a$	$-$	Decrece
$\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$	$0 < x < a$	$-a < y < 0$	$+$	Crece

De la tabla se deduce que las ecuaciones (1') definen dos funciones continuas del tipo $y = f(x)$; para $0 \leqslant t \leqslant \pi$ tenemos $y \geqslant 0$ (véanse dos primeros renglones de la tabla), para $\pi < t \leqslant 2\pi$ tenemos $y < 0$ (véanse los últimos renglones de la tabla). De la fórmula (3') se deduce:

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{dy}{dx} = \infty$$

y

$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}} \frac{dy}{dx} = \infty.$$

En estos puntos la tangente a la curva es vertical. Hallemos ahora:

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\pi} = 0, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=2\pi} = 0.$$

En estos puntos la tangente a la curva es horizontal. Calculemos ahora:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3a \cos^4 t \operatorname{sen} t}.$$

De aquí se deduce:

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$$

para $0 < t < \pi$, la curva es cóncava

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

para $\pi < t < 2\pi$ la curva es convexa.

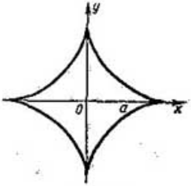

Fig. 134

Los resultados obtenidos permiten construir una curva correspondiente (fig. 134). Esta curva se llama *astroide*.

Ejemplo 2. Construir la curva dada por las ecuaciones (*folio de Descartes*)

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}. \tag{1''}$$

Solución. Estas dos funciones están definidas para todos los valores de t, a excepción de $t=-1$, además:

$$\lim_{t\to -1-0} x = \lim_{t\to -1-0} \frac{3at}{1+t^3} = +\infty, \quad \lim_{t\to -1-0} y = \lim_{t\to -1-0} \frac{3at^2}{1+t^3} = -\infty;$$

$$\lim_{t\to -1+0} x = -\infty, \quad \lim_{t\to -1+0} y = +\infty.$$

Observemos ahora que

para $t=0$ es $x=0$, $y=0$,
para $t\to+\infty$ es $x\to 0$, $y\to 0$,
para $t\to-\infty$ es $x\to 0$, $y\to 0$.

Hallemos $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6a\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}{(1+t^3)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}. \qquad (2'')$$

Para t obtenemos los siguientes valores críticos:

$$t_1=-1,\ t_2=0,\ t_3=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ t_4=\sqrt[3]{2}.$$

Hallemos ahora:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}. \qquad (3'')$$

Utilizando las fórmulas (1"), (2"), (3") componemos la tabla.

Campo de variación de t	Campo de variación correspondiente de x	Campo de variación correspondiente de y	Signo de $\frac{dy}{dx}$	Carácter de variación de y en función de x ($y=f(x)$)
$-\infty<t<-1$	$0<x<+\infty$	$0>y>-\infty$	$-$	Decrece
$-1<t<0$	$-\infty<x<0$	$+\infty>y>0$	$-$	Decrece
$0<t<\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$0<x<a\sqrt[3]{4}$	$0<y<a\sqrt[3]{2}$	$+$	Crece
$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}<t<\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{4}>x>a\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{2}<y<a\sqrt[3]{4}$	$-$	Decrece
$\sqrt[3]{2}<t<+\infty$	$a\sqrt[3]{2}>x>+0$	$a\sqrt[3]{4}>y>0$	$+$	Crece

De la fórmula (3") se deduce:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=0\\ \binom{x=0}{y=0}}} = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\infty\\ \binom{x=0}{y=0}}} = \infty.$$

Por tanto, la curva pasa por el origen de coordenadas dos veces: una vez, con la tangente paralela al eje Ox y la otra, con la tangente paralela al eje Oy.

Ahora:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ \left(\substack{x=a\sqrt[3]{4} \\ y=a\sqrt[3]{2}}\right)}}=\infty.$$

En este punto la tangente a la curva es vertical.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\sqrt[3]{2} \\ \left(\substack{x=a\sqrt[3]{2} \\ y=a\sqrt[3]{4}}\right)}}=0.$$

En este punto la tangente a la curva es horizontal. Busquemos la asíntota:

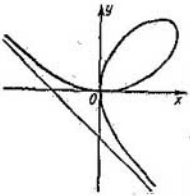

Fig. 135

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1-0}\frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to-1+0}\left[\frac{3at^2}{1+t^3}-(-1)\frac{3at}{1+t^3}\right]=$$

$$=\lim_{t\to-1-0}\left[\frac{3at(t+1)}{1+t^3}\right]=\lim_{t\to-1-0}\frac{3at}{1-t+t^2}=-a.$$

Por consiguiente la recta $y=-x-a$ es la asíntota de una rama de la curva para

$$x\longrightarrow+\infty.$$

De igual manera hallemos:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(y-kx)=-a.$$

Así, la recta $y=-x-a$ es la asíntota también de la rama de la curva para $x\to-\infty$.

Terminado el análisis podemos construir la curva (fig. 135).

Algunos problemas relacionados con el análisis de las curvas serán estudiados adicionalmente en el capítulo VIII, § 20. «Puntos singulares de una curva».

Ejercicios para el capítulo V

Hallar los extremos de las funciones: 1. $y=x^2-2x+3$. *Respuesta*: $y_{\text{mín}}=2$ para $x=1$. 2. $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$. *Respuesta*: $y_{\text{máx}}=\frac{7}{3}$ para $x=1$. 3. $y=x^3-9x^2+15x+3$. *Respuesta*: $y_{\text{máx}}=10$ para $x=1$, $y_{\text{mín}}=-22$ para

$x=5$. 4. $y=-x^4+2x^2$. *Respuesta:* $y_{\text{máx}}=1$ para $x=\pm 1$, $y_{\text{mín}}=0$ para $x=0$. 5. $y=x^4-8x^2+2$. *Respuesta:* $y_{\text{máx}}=2$ para $x=0$, $y_{\text{mín}}=-14$ para $x=\pm 2$. 6. $y=3x^5-125x^3+2160x$. *Respuesta:* máx para $x=-4$ y $x=3$, mín para $x=-3$ y $x=4$. 7. $y=2-(x-1)^{2/3}$. *Respuesta:* $y_{\text{máx}}=2$ para $x=1$. 8. $y=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$. *Respuesta:* no hay máx ni mín. 9. $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$. *Respuesta:* mín para $x=\sqrt{2}$, máx para $x=-\sqrt{2}$. 10. $y=\frac{(x-2)(3-x)}{x^2}$. *Respuesta:* máx para $x=\frac{12}{5}$. 11. $y=2e^x+e^{-x}$. *Respuesta:* mín para $x=-\frac{\ln 2}{2}$. 12. $y=\frac{x}{\ln x}$. *Respuesta:* $y_{\text{mín}}=e$ para $x=e$. 13. $y=\cos x+\operatorname{sen} x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. *Respuesta:* $y_{\text{máx}}=\sqrt{2}$ para $x=\frac{\pi}{4}$. 14. $y=\operatorname{sen} 2x-x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. *Respuesta:* máx para $x=\frac{\pi}{6}$, mín para $x=-\frac{\pi}{6}$. 15. $y=x+\operatorname{tg} x$. *Respuesta:* no hay máx, ni mín. 16. $y=e^x \operatorname{sen} x$. *Respuesta:* mín para $x=2k\pi-\frac{\pi}{4}$, máx para $x=2k\pi+\frac{3}{4}\pi$. 17. $y=x^4-2x^2+2$. *Respuesta:* máx para $x=0$; dos mínimos para $x=-1$ y $x=1$. 18. $y=(x-2)^3(2x+1)$. *Respuesta:* $y_{\text{mín}}\approx-8{,}24$ para $x=\frac{1}{8}$. 19. $y=x+\frac{1}{x}$ *Respuesta:* mín para $x=1$; máx para $x=-1$. 20. $y=x^2(a-x)^2$. *Respuesta:* $y_{\text{máx}}=\frac{a^4}{16}$ para $x=\frac{a}{2}$; $y_{\text{mín}}=0$ para $x=0$ y para $x=a$. 21. $y=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{a-x}$. *Respuesta:* máx para $x=\frac{a^2}{a-b}$; mín para $x=\frac{a^2}{a+b}$. 22. $y=x+\sqrt{1-x}$. *Respuesta:* $y_{\text{máx}}=\frac{5}{4}$ para $x=\frac{3}{4}$; $y_{\text{mín}}=-1$ para $x=-1$. 23. $y=x\sqrt{1-x}$ $(x\leqslant 1)$. *Respuesta:* $y_{\text{máx}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ para $x=\frac{2}{3}$. 24. $y=\frac{x}{1+x^2}$. *Respuesta:* mín para $x=-1$, máx para $x=1$. 25. $y=x\ln x$. *Respuesta:* mín para $x=\frac{1}{e}$. 26. $y=x\ln^2 x$. *Respuesta:* máx para $x=e^{-\frac{1}{2}}$; mín para $x=1$. 27. $y=\ln x-\operatorname{arctg} x$. *Respuesta:* Función va creciendo. 28. $y=\operatorname{sen} 3x-3\operatorname{sen} x$. *Respuesta:* mín para $x=\frac{\pi}{2}$; máx para $x=\frac{3\pi}{2}$. 29. $y=2x+\operatorname{arctg} x$. *Respuesta:* no hay extremos. 30. $y=\operatorname{sen} x\cos^2 x$. *Respuesta:* mín para $x=\frac{\pi}{2}$; dos máximos: para $x=\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$ y para $x=\arccos\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. 31. $y=\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$ *Respuesta:* máx para $x=\frac{(4m+1)\pi}{2}$; mín para $x=\frac{(4m+3)\pi}{2}$.

Hallar los valores máximos y mínimos de las funciones en los segmentos indicados:

32. $y=-3x^4+6x^2-1\ (-2\leqslant x\leqslant 2)$. *Respuesta*: $y_{\text{máx}}=2$ para $x=\pm 1$, $y_{\text{mín}}=-25$ para $x=\pm 2$.

33. $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1\ (-1\leqslant x\leqslant 5)$. *Respuesta*: $y_{\text{máx}}=\frac{23}{3}$ para $x=5$, $y_{\text{mín}}=-\frac{13}{3}$ para $x=-1$.

34. $y=\frac{x-1}{x+1}\ (0\leqslant x\leqslant 4)$. *Respuesta*: $y_{\text{máx}}={}^3/_5$ para $x=4$, $y_{\text{mín}}=-1$ para $x=0$. 35. $y=\operatorname{sen} 2x-x\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. *Respuesta*: $y_{\text{máx}}=\frac{\pi}{2}$ para $x=-\frac{\pi}{2}$, $y_{\text{mín}}=-\frac{\pi}{2}$ para $x=\frac{\pi}{2}$.

36. Con una hojalata cuadrada de lado a es preciso hacer un cajón abierto por arriba que tenga el volumen máximo. Se recortan cuadrados en los ángulos de la hojalata y se dobla ésta para formar el cajón. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados?

Respuesta: $a/6$.

37. Demostrar que de todos los rectángulos que puedan inscribirse en un círculo dado el cuadrado tiene el área máxima. Demostrar que el cuadrado tendrá también el perímetro máximo.

38. Demostrar que de todos los triángulos isósceles inscritos en un círculo dado un triángulo equilátero tendrá el perímetro máximo.

39. Hallar un triángulo rectangular del área máxima cuya hipotenusa es h. *Respuesta*: la longitud de cada cateto es igual a $h/\sqrt{2}$.

40. Hallar la altura de un cilindro recto de volumen máximo inscrito en una esfera de radio R.

Respuesta: la altura es igual a $2R/\sqrt{3}$.

41. Hallar la altura de un cilindro recto que tenga la superficie lateral máxima, inscrito en una esfera de radio R. *Respuesta*: la altura es igual a $R\sqrt{2}$.

42. Hallar la altura de un cono recto de volumen mínimo, circunscrito alrededor de una esfera de radio R. *Respuesta*: la altura es igual a $4R$ (el volumen del cono es igual a dos volúmenes de la esfera).

43. El interior de un recipiente con el fondo cuadrado y abierto por arriba debe revestirse con plomo. Si el volumen del recipiente es igual a 32 lit, ¿cuáles deben ser sus dimensiones para que sea mínima la cantidad de plomo?

Respuesta: la altura es 0,2 m; el lado de la base es 0,4 m (es decir, el lado de la base debe ser dos veces mayor que la altura).

44. Un techador quiere fabricar un canalón abierto de capacidad máxima. El fondo y los costados del canalón deben ser de 10 cm de ancho, además los costados han de estar igualmente inclinados respecto al fondo. ¿Cuál debe ser la anchura del canalón por arriba?

Respuesta: 20 cm.

45. Demostrar que un pabellón cónico de capacidad dada requiere una cantidad mínima de tela cuando su altura es $\sqrt{2}$ veces mayor que el radio de la base.

46. Hace falta fabricar un cilindro abierto por arriba, cuyas paredes y el fondo tengan un espesor dado. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del cilindro para que, dada la capacidad, sea mínima la cantidad de material utilizado?

Respuesta: Si R es el radio interior de la base y v, el volumen interior del cilindro, entonces: $R=\sqrt[3]{v/\pi}$.

47. Es preciso fabricar una caldera, compuesta de un cilindro y dos fondos semiesféricos, con paredes de espesor constante, de modo que con el volumen dado v tenga una superficie exterior mínima.

Respuesta: la caldera debe tener la forma de una esfera con radio interior R, igual a $\sqrt[3]{3v/4\pi}$.

48. Construir un trapecio isósceles que, dada el área S, tenga un perímetro mínimo; el ángulo en la base del trapecio es α. *Respuesta*: el largo del lado lateral es igual a $\sqrt{S/\operatorname{sen}\alpha}$.

49. Inscribir en una esfera de radio R un prisma triangular regular de volumen máximo.

Respuesta: la altura del prisma es igual a $2R/\sqrt{3}$.

50. Circunscribir alrededor de una semiesfera de radio R un cono de volumen mínimo; el plano de la base del cono coincide con el de la base de la semiesfera; hallar la altura del cono.

Respuesta: la altura del cono es igual a $R\sqrt{3}$.

51. Circunscribir alrededor de un cilindro de radio r un cono recto de volumen mínimo; suponiendo que coinciden los planos y los centros de las bases circulares del cilindro y del cono. *Respuesta*: el radio de la base del cono es igual a $\frac{3r}{2}$.

52. Cortar un segmento de una hoja circular de radio R. Este segmento debe ser tal que al enrollarlo se obtenga un embudo de capacidad máxima.

Respuesta: el ángulo central del segmento es igual a $2\pi\sqrt{2/3}$.

53. Hallar el cilindro del volumen máximo entre todos los cilindros redondos inscritos en un cubo dado con arista a de tal modo que sus ejes coincidan con la diagonal del cubo y las circunferencias de las bases toquen las caras del mismo. *Respuesta*: la altura del cilindro es igual a $a\sqrt{3}/3$, el radio de la base es igual a $a/\sqrt{6}$.

54. Sea dado un punto (x_0, y_0) que se halla en el primer cuadrante en el sistema rectangular de coordenadas. Trazar por este punto una recta, de manera que forme un triángulo de área mínima con las direcciones positivas de los ejes de coordenadas.

Respuesta: la recta corta en los ejes los segmentos: $2x_0$ y $2y_0$, es decir, tiene la ecuación $\frac{x}{2x_0}+\frac{y}{2y_0}=1$.

55. Sea dado un punto, en el eje de la parábola $y^2=2px$ a la distancia a del vértice. Hallar la abscisa del punto de la curva más próximo al punto dado.

Respuesta: $x=a-p$.

56. La solidez de una barra de sección rectangular es directamente proporcional a la anchura y al cubo de altura. Hallar el ancho de la barra de máxima solidez que podría ser cortada de un tronco de madera de 16 cm de diámetro.

Respuesta: la anchura es igual a 8 cm.

57. Un torpedero se encuentra anclado a 9 km del punto más próximo de la costa. Es preciso enviar un mensajero a un campamento militar situado a 15 km del punto de la tierra más próximo al torpedero, contando a lo largo de la costa; el mensajero, andando a pie hace 5 km/hora y remando, 4 km/hora.

¿En qué punto de la costa debe desembarcarse el mensajero para llegar al campamento en el tiempo mínimo posible?

Respuesta: A 3 km del campamento.

58. Un punto se desplaza por un plano en un medio, dispuesto fuera de la línea MN, a la velocidad v_1 y por la línea MN, con la v_2.

¿Que camino debe pasar el punto para desplazarse de la posición A a la B, situada en la línea MN, en un tiempo mínimo? La distancia entre el punto

A y la línea MN es igual a h; la distacia entre la proyección α del punto A sobre la línea MN, y el punto B es igual a a.

Respuesta: Si ACB es el trayecto del punto, tenemos:

$$\frac{\alpha C}{AC}=\frac{v_1}{v_2} \text{ cuando } \frac{\alpha B}{AB}\geqslant\frac{v_1}{v_2}, \text{ y } \alpha C=\alpha B, \text{ cuando } \frac{\alpha B}{AB}<\frac{v_1}{v_2}.$$

59. Una carga w se eleva mediante una palanca, siendo F la fuerza aplicada a un extremo de ésta; el punto de apoyo se encuentra en el otro extremo de la misma. Si la carga está colgada en el punto que se halla a la distancia a cm del de apoyo y cada centímetro lineal de la palanca pesa v gramos ¿cuál debe ser la longitud de la palanca para que la fuerza necesaria para elevar la carga sea mínima?

Respuesta: $x=\sqrt{2a\,w/v}$ *cm*.

60. Realizadas n mediciones de una magnitud incógnita x, se han obtenido las lecturas: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Demostrar que la suma de los cuadrados de los errores $(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\ldots+(x-x_n)^2$ será la mínima, si se toma por x el número $(x_1+x_2+\ldots x_n)/n$.

61. Para disminuir cuanto sea posible la fricción del líquido contra las paredes de un canal, el área mojada por el agua debe ser mínima. Demostrar que la mejor forma del canal rectangular abierto de área dada de sección transversal, es aquélla en que el ancho del canal es dos veces mayor que su altura.

Hallar los puntos de inflexión, los intervalos de convexidad y concavidad de las curvas.

62. $y=x^5$. *Respuesta*: para $x<0$, la curva es convexa, es cóncava para $x>0$; hay punto de inflexión para $x=0$.

63. $y=1-x^2$. *Respuesta*: La curva es convexa en todos los puntos.

64. $y=x^3-3x^2-9x+9$. *Respuesta*: hay punto de inflexión para $x=1$.

65. $y=(x-b)^5$. *Respuesta*: hay punto de inflexión para $x=b$.

66. $y=x^4$. *Respuesta*: la curva es cóncava en todos los puntos.

67. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$. *Respuesta*: hay punto de inflexión para $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

68. $y=\operatorname{tg} x$. *Respuesta*: hay punto de inflexión para $x=n\pi$.

69. $y=xe^{-x}$. *Respuesta*: hay punto de inflexión para $x=2$.

70. $y=a-\sqrt[3]{x-b}$. *Respuesta*: hay punto de inflexión para $x=b$.

71. $y=a-\sqrt[5]{(x-b)^2}$. *Respuesta*: la curva no tiene el punto de inflexión.

Hallar las asíntotas de las curvas siguientes:

72. $y=\dfrac{1}{x-1}$. *Respuesta*: $x=1$; $y=0$. 73. $y=\dfrac{1}{(x+2)^3}$. *Respuesta*: $x=-2$; $y=0$. 74. $y=c+\dfrac{a^3}{(x-b)^2}$. *Respuesta*: $x=b$, $y=c$. 75. $y=e^{\frac{1}{x}}-1$. *Respuesta*: $x=0$; $y=0$. 76. $y=\ln x$. *Respuesta*: $x=0$. 77. $y^3=6x^2+x^3$. *Respuesta*: $y=x+2$. 78. $y^3=a^3-x^3$. *Respuesta*: $y+x=0$. 79. $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$. *Respuesta*: $x=2a$. 80. $y^2(x-2a)=x^3-a^3$. *Respuesta*: $x=2a$, $y=\pm(x+a)$.

Analizar las funciones y construir sus gráficas:

81. $y=x^4-2x+10$. 82. $y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$. 83. $y=e^{-\frac{1}{x}}$. 84. $y=\dfrac{6x}{1+x^2}$. 85. $y=\dfrac{4+x}{x^2}$. 86. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$. 87. $y=\dfrac{x+2}{x^3}$. 88. $y=\dfrac{x^2}{1+x}$. 89. $y^2=x^3-x$. 90. $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$. 91. $y=\sqrt[3]{x^2}+2$. 92. $y=x-\sqrt[3]{x^3+1}$. 93. $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$. 94. $y=xe^{-x}$.

95. $y=x^2e^{-x^2}$. **96.** $y=x-\ln(x+1)$. **97.** $y=\ln(x^2+1)$. **98.** $y=\operatorname{sen} 3x$. **99.** $y=x+\operatorname{sen} x$. **100.** $y=x\operatorname{sen} x$. **101.** $y=e^{-x}\operatorname{sen} x$. **102.** $y=\ln\operatorname{sen} x$. **103.** $y=\frac{\ln x}{x}$. **104.** $\begin{cases} x=t^2, \\ y=\frac{1}{2}t. \end{cases}$ **105.** $\begin{cases} x=t^2, \\ y=t^3. \end{cases}$ **106.** $\begin{cases} x=a(t-\operatorname{sen} t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$

107. $\begin{cases} x=ae^t\cos t, \\ y=ae^t\operatorname{sen} t. \end{cases}$

Problemas complementarios

Hallar las asíntotas de las líneas:

108. $y=\frac{x^2+1}{1+x}$. *Respuesta:* $x=-1$; $y=x-1$. **109.** $y=x+e^{-x}$. *Respuesta:* $y=x$. **110.** $2y(x+1)^2=x^3$. *Respuesta:* $x=-1$; $y=\frac{1}{2}x-1$. **111.** $y^3=a^3-x^3$. *Respuesta:* $x+y=0$. **112.** $y=e^{-2x}\operatorname{sen} x$. *Respuesta:* $y=0$. **113.** $y=e^{-x}\operatorname{sen} 2x+x$. *Respuesta:* $y=x$. **114.** $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$. *Respuesta:* $x=-\frac{1}{e}$; $y=x+\frac{1}{e}$.

115. $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$. *Respuesta:* $x=0$, $y=x$. **116.** $x=\frac{2t}{1-t^2}$, $y=\frac{t^2}{1-t^2}$. *Respuesta:* $y=\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

Estúdiense las funciones y constrúyanse sus gráficas:

117. $y=|x|$. **118.** $y=\ln|x|$. **119.** $y^2=x^3-x$. **120.** $y=(x+1)^2(x-2)$. **121.** $y=x+|x|$. **122.** $y=\sqrt[3]{x^2}-x$. **123.** $y=x^2\sqrt{x+1}$. **124.** $y=\frac{x^2}{2}-\ln x$. **125.** $y=\frac{x^2}{2}\ln x$. **126.** $y=\frac{1}{e^x-1}$. **127.** $y=\frac{x}{\ln x}$. **128.** $y=x+\frac{\ln x}{x}$. **129.** $y=x\ln x$.

130. $y=e^{\frac{1}{x}}-x$. **131.** $y=|\operatorname{sen} 3x|$. **132.** $y=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. **133.** $y=x\operatorname{arctg} x$. **134.** $y=x-2\operatorname{arctg} x$. **135.** $y=e^{-2x}\operatorname{sen} 3x$. **136.** $y=|\operatorname{sen} x|+x$. **137.** $y=\operatorname{sen}(x^2)$. **138.** $y=\cos^3 x+\operatorname{sen}^3 x$. **139.** $y=\frac{x+|x|}{2}$. **140.** $y=\frac{x-|x|}{2}$. **141.** $y=\operatorname{sen}\left(\frac{x+|x|}{2}\right)-\frac{x-|x|}{2}$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$. **142.** $y=\cos\left(\frac{x-|x|}{2}\right)-\frac{x+|x|}{2}$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 1\right)$. **143.** $y=\frac{1}{2}(3x+|x|)+1$. **144.** $y=\frac{1}{2}[3(x-1)+|x-1|]+1$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$.

CAPITULO VI

CURVATURA DE UNA CURVA

§ 1. LONGITUD DEL ARCO Y SU DERIVADA

Supongamos que un arco de la curva M_0M (fig. 136) sea la gráfica de la función $y = f(x)$, definida en el intervalo (a, b). Determinemos la longitud del arco de la curva. Tomemos en la curva AB los puntos M_0, M_1, M_2, ..., M_{i-1}, M_i, ... M_{n-1}, M. Uniendo con rectas los puntos tomados, obtenemos una línea quebrada

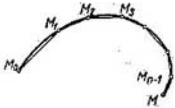

Fig. 136

$M_0M_1M_2 \ldots M_{i-1}M_i \ldots M_{n-1}M$, inscrita en el arco M_0M. Designemos por P_n la longitud de esta línea quebrada.

El límite (lo indiquemos con s), al cual tiende la longitud de la línea quebrada cuando tiende a cero la longitud del segmento más grande $M_{i-1}M_i$ se llama la *longitud del arco* M_0M, si este límite existe y no depende de la elección de los puntos en la línea quebrada $M_0M_1M_2 \ldots M_{i-1}M_i \ldots M_{n-1}M$. Observamos que la definición de la longitud del arco de una curva arbitraria es análoga a la de longitud de una circunferencia.

En el capítulo XII demostraremos que, si en el segmento $[a, b]$ la función $f(x)$ y su derivada $f'(x)$ son continuas el arco de la curva $y = f(x)$, comprendido entre los puntos $[a; f(a)]$ y $[b; f(b)]$, tiene una longitud bien determinada. En el mismo capítulo se demostrará el modo de calcular esta longitud. También será establecido (como corolario) que en las condiciones dadas la razón de la longitud de cualquier arco de esta curva a la longitud de la cuerda respectiva tiende a 1, cuando la longitud de cuerda tiende a 0:

$$\lim_{M_0M \to 0} \frac{\text{long. } \widehat{M_0M}}{\text{long. } \overline{M_0M}} = 1.$$

Este teorema puede ser fácilmente comprobado para la circunferencia*, sin embargo, en el caso general, lo tomaremos ahora sin demostración.

Estudiemos el problema siguiente. Sea $y = f(x)$ la ecuación de una curva en un plano.

Sea $M_0(x_0, y_0)$ un punto fijo de la curva, y $M(x, y)$, un punto desplazable de la misma. Designemos por s la longitud del arco M_0M (fig. 138).

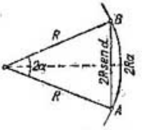

Fig. 137

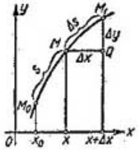

Fig. 138

Al variar la abscisa x del punto M varía también la longitud s del arco, es decir, s es una función de x. Calculemos la derivada s con respecto a x.

Daremos a x un incremento Δx. Entonces el arco s recibirá un incremento $\Delta x =$ long. $\widehat{MM_1}$. Sea $\overline{MM_1}$ la cuerda de este arco. Para determinar $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta x}$, procedamos de la manera siguiente: del triángulo ΔMM_1Q encontramos:

$$\overline{MM_1^2}\,(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Multipliquemos y dividamos por Δs^2 el primer miembro:

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}\right)^2 \Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

---

*) Consideremos el arco AB, cuyo ángulo central es igual a 2α (fig. 137). La longitud de este arco es igual a $2R\alpha$ (R es el radio de la circunferencia) y la de su cuerda es igual a $2R$ sen α. Por eso:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\text{long. } \widehat{AB}}{\text{long. } \overline{AB}} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{2R\alpha}{2R \operatorname{sen} \alpha} = 1.$$

Dividamos por Δx^2 todos los términos de la igualdad:

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}\right)^2 \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

Encontremos los límites de los miembros primero y segundo cuando $\Delta x \to 0$. Teniendo en cuenta que $\lim\limits_{\overline{MM}_1 \to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta s} = 1$ y $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, obtenemos: $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$
o sea

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{1}$$

Obtenemos la siguiente expresión para la diferencial de un arco:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{2}$$

o bien*

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \tag{2'}$$

Hemos obtenido la expresión de la diferencial de la longitud de un arco cuando la curva se da por la ecuación $y = f(x)$. Sin embargo, la fórmula (2') es válida también cuando la curva se representa mediante ecuaciones paramétricas.

Si las ecuaciones paramétricas de la curva son:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

entonces:

$$dx = \varphi'(t)\, dt, \quad dy = \psi'(t)\, dt,$$

y la expresión (2') toma la forma $ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt$.

§ 2. CURVATURA

Uno de los elementos que caracterizan la forma de una curva es el grado de su curvatura. Supongamos que existe una curva que no se corta y tiene una tangente bien determinada en cada uno de sus puntos. Tracemos las tangentes a la curva en dos puntos arbitrarios A y B, y designemos por α el ángulo formado por estas tangentes

*) Razonando estrictamente, la fórmula (2') es válida sólo cuando $dx > 0$. Si $dx < 0$, entonces $dx = -\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Por eso, en general, será más justo escribir esta fórmula del modo siguiente: $|ds| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

o (con mayor exactitud), el ángulo de giro de la tangente cuando ésta pasa del punto A al punto B (fig. 139). Este ángulo se llama *ángulo de contingencia* del arco AB. De los dos arcos de una misma longitud, será el más encorvado el que tiene mayor ángulo de contingencia (fig. 139, 140).

Por otra parte, es evidente que no se puede determinar el grado de curvatura de los arcos de diferente longitud considerando sólo

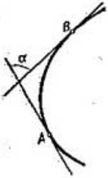

Fig. 139

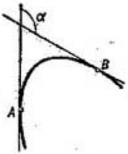

Fig. 140

Fig. 141

sus ángulos de contingencia. Por consiguiente, la característica completa de la curvatura de una curva será la razón del ángulo de contingencia a la longitud del arco correspondiente.

Definición 1. La razón del ángulo de contingencia correspondiente α respecto a la longitud del arco se llama *curvatura media* K_{med} *del arco* $\overset{\frown}{AB}$: $K_{\text{med}}=\dfrac{\alpha}{\overset{\frown}{AB}}$.

La curvatura media de diferentes arcos (partes) de una curva puede ser diferente. Así, por ejemplo, la curvatura media de los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{A_1B_1}$ de la curva expuesta en la figura 141 es diferente, aunque las longitudes de estos arcos son iguales. Mas aún su grado de curvatura varía de un punto al otro. Para caracterizar el grado de curvatura de la curva dada en la proximidad inmediata del punto A, introduzcamos la noción de curvatura de la curva en el punto dado.

Definición 2. El límite de la curvatura media del arco $\overset{\frown}{AB}$, cuando la longitud del mismo tiende a cero (es decir, cuando el punto B se aproxima* al punto A) se llama *curvatura* K_A de la curva en el punto dado A:

$$K_A=\lim_{B\to A} K_{\text{med}}=\lim_{AB\to 0}\frac{\alpha}{\overset{\frown}{AB}}.$$

*) Se supone que el valor del límite no depende de la dirección en que se toma en la curva el punto desplazable B respecto al punto A.

Ejemplo. Para una circunferencia de radio r: 1) determinar la curvatura media del arco $\overset{\frown}{AB}$, correspondiente al ángulo central α (fig. 142); 2) determinar la curvatura en el punto A.

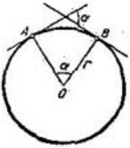

Fig. 142

Solución: 1) Es evidente que el ángulo de contingencia del arco $\overset{\frown}{AB}$ es igual a α y la longitud del arco es igual a αr. Por tanto:

$$K_{\text{med}} = \frac{\alpha}{\alpha \cdot r}$$

o sea

$$K_{\text{med}} = \frac{1}{r}.$$

2) La curvatura en el punto A es igual a

$$K = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\alpha r} = \frac{1}{r}.$$

Así pues, la curvatura media del arco de una circunferencia de radio r no depende de la longitud y posición del arco; para todos los arcos es igual a $\frac{1}{r}$. La curvatura de la circunferencia en un punto cualquiera tampoco depende de la posición del punto y es igual a $\frac{1}{r}$.

Observación. Notemos que la curvatura de una curva arbitraria puede, generalmente, variar de un punto al otro, como lo veremos más abajo.

§ 3. CALCULO DE LA CURVATURA

Deduzcamos la fórmula para calcular la curvatura de una curva en cada uno de sus puntos $M(x, y)$. Supongamos que la curva está dada en el sistema de coordenadas rectangulares por la ecuación:

$$y = f(x), \tag{1}$$

y que la función $f(x)$ tiene la segunda derivada continua.

Tracemos las tangentes a la curva en los puntos M y M_1, cuyas abscisas son x y $x + \Delta x$, respectivamente, y designemos con φ y $\varphi + \Delta\varphi$ los ángulos formados por estas tangentes y el eje Ox (fig. 143).

Designemos por s la longitud del arco $\widehat{M_0M}$, calculado a partir de un punto dado M_0. Entonces $\Delta s = \widehat{M_0M_1} - \widehat{M_0M}$ y $|\Delta s| = \widehat{MM_1}$.

Como se ve en la figura 143, el ángulo de contingencia que corresponde al arco $\widehat{MM_1}$ es igual al valor absoluto* de la diferencia entre los ángulos φ y $\varphi + \Delta\varphi$, es decir, es igual a $|\Delta\varphi|$.

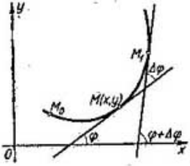

Fig. 143

Conforme a la definición de la curvatura media de una curva en el segmento MM_1, tenemos:

$$K_{\text{méd}} = \frac{|\Delta\varphi|}{|\Delta s|} = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

Para determinar la *curvatura en el punto M* es preciso hallar el límite de esta expresión cuando la longitud del arco $\widehat{MM_1}$ tiende a cero:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

Puesto que φ y s dependen de x (son funciones de x), entonces, φ se puede considerar como una función de s y suponer que esta función se ha dado por las ecuaciones paramétricas mediante el parámetro x. En este caso:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}$$

y, por tanto,

$$K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|. \tag{2}$$

*) Es evidente que para la curva dada en la figura 143 $|\Delta\varphi| = \Delta\varphi$, puesto que $\Delta\varphi > 0$.

Para calcular $\frac{d\varphi}{ds}$ utilicemos la fórmula de derivación de funciones paramétricas:

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}}.$$

Para expresar la derivada $\frac{d\varphi}{dx}$ a través de la función $y=f(x)$, observemos que $\operatorname{tg}\varphi=\frac{dy}{dx}$ y, por tanto,

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{dy}{dx}.$$

Derivando la última igualdad con respecto a x tenemos:

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Para la derivada $\frac{ds}{dx}$, hemos encontrado en el § 1, cap. VI,

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

De donde

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}}=\frac{\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}},$$

y, dado $K=\left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$, obtenemos en definitiva:

$$K=\frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \qquad (3)$$

Por consiguiente, en cualquier punto de la curva, donde existe y es continua la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ se puede calcular la curvatura, utilizando la fórmula (3). Observemos que calculando la curvatura de una curva, conviene tomar sólo el valor aritmético (positivo) de la raíz en el denominador puesto que, según la definición, la curvatura de una curva no puede ser negativa.

Ejemplo 1. Determinar la curvatura de la parábola $y^2 = 2px$:
a) en un punto arbitrario $M(x, y)$;
b) en el punto $M_1(O, O)$;
c) en el punto $M_2\left(\frac{p}{2}, p\right)$.

Solución. Hallar las derivadas primera y segunda de la función $y = \sqrt{2px}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{(2px)^{3/2}}.$$

Poniendo las expresiones obtenidas en la fórmula (3), obtenemos:

a) $K = \frac{p^2}{(2px + p^2)^{3/2}}$;

b) $K_{x=0,\ y=0} = \frac{1}{p}$;

c) $K_{x=\frac{p}{2},\ y=p} = \frac{1}{2\sqrt{2p}}$.

Ejemplo 2. Determinar la curvatura de la recta $y = ax + b$ en un punto arbitrario (x, y).

Solución.

$$y' = a, \quad y'' = 0.$$

En virtud de la fórmula (3), obtenemos:

$$K = 0.$$

Así la recta es una curva de «curvatura cero». El mismo resultado se puede sacar inmediatamente de la definición de curvatura.

§ 4. CALCULO DE LA CURVATURA DE UNA CURVA DADA EN FORMA PARAMETRICA

Sea una curva dada en forma paramétrica:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Entonces (§ 24, cap. III):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{(\varphi')^3}.$$

Introduciendo las expresiones obtenidas en la fórmula (3) del párrafo antecedente, tenemos:

$$K=\frac{|\psi''\varphi'-\psi'\varphi''|}{[\varphi'^2+\psi'^2]^{3/2}}. \tag{1}$$

Ejemplo: Determinar la curvatura de la cicloide

$$x=a(t-\operatorname{sen} t), \quad y=a(1-\cos t)$$

en un punto arbitrario (x, y).

Solución

$$\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t), \quad \frac{d^2x}{dt^2}=a \operatorname{sen} t, \quad \frac{dy}{dt}=a \operatorname{sen} t, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=a\cos t.$$

Introduciendo las expresiones obtenidas en la fórmula (3), obtenemos:

$$K=\frac{|a(1-\cos t)\,a\cos t-a\operatorname{sen} t\cdot a\operatorname{sen} t|}{|a^2(1-\cos t)^2+a^2\operatorname{sen}^2 t|^{3/2}}=\frac{|\cos t-1|}{2^{3/2}a(1-\cos t)^{3/2}}=$$

$$=\frac{1}{2^{3/2}(1-\cos t)^{1/2}}=\frac{1}{4a\left|\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right|}.$$

§ 5. CALCULO DE LA CURVATURA DE UN CURVA DADA EN COORDENADAS POLARES

Sea la curva dada por la ecuación del tipo

$$\rho=f(\theta). \tag{1}$$

Escribamos las fórmulas de paso de las coordenadas polares a las de Descartes:

$$\left.\begin{array}{l} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\operatorname{sen}\theta. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Si en estas fórmulas sustituimos ρ por su expresión en función de θ, es decir, por $f(\theta)$, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x=f(\theta)\cos\theta, \\ y=f(\theta)\operatorname{sen}\theta. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Estas ecuaciones se pueden considerar como ecuaciones paramétricas de la curva (1), en las cuales θ sirve de parámetro.

Entonces:

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta-\rho\operatorname{sen}\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta}=\frac{d\rho}{d\theta}\operatorname{sen}\theta+\rho\cos\theta,$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2}=\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\cos\theta-2\frac{d\rho}{d\theta}\operatorname{sen}\theta-\rho\cos\theta,$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}=\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\operatorname{sen}\theta+2\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta-\rho\operatorname{sen}\theta.$$

Introduciendo las últimas expresiones en la fórmula (1) del párrafo anterior, obtenemos la fórmula para calcular la curvatura de una curva en coordenadas polares:

$$K = \frac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}. \qquad (4)$$

Ejemplo. Determinar la curvatura de la espiral de Arquímedes

$$\rho = a\theta \; (a > 0)$$

en un punto arbitrario (fig. 144).

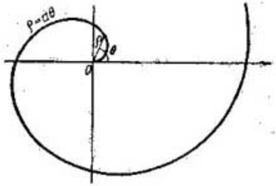

Fig. 144

Solución.

$$\frac{d\rho}{d\theta} = a; \quad \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = 0.$$

Por tanto,

$$K = \frac{|a^2\theta^2 + 2a^2|}{(a^2\theta^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a}\frac{\theta^2 + 2}{(\theta^2 + 1)^{3/2}}.$$

Observemos que para valores grandes de θ se cumplen las ecuaciones aproximadas:

$$\frac{\theta^2 + 2}{\theta^2} \approx 1, \quad \frac{\theta^2 + 1}{\theta^2} \approx 1.$$

Por eso, sustituyendo en la fórmula antecedente, $\theta^2 + 2$ por θ^2, y $\theta^2 + 1$ por θ^2, obtenemos la fórmula aproximada (para valores grandes de θ):

$$K \approx \frac{1}{a}\frac{\theta^2}{(\theta^2)^{3/2}} = \frac{1}{a\theta}.$$

De este modo, la espiral de Arquímedes para valores grandes de θ, tiene aproximadamente la misma curvatura que una circunferencia de radio $a\theta$.

§ 6. RADIO Y CIRCULO DE CURVATURA. CENTRO DE CURVATURA. EVOLUTA Y EVOLVENTE

Definición. La magnitud R, recíproca a la curvatura K de una curva en un punto dado M, se denomina *radio de curvatura* de la curva en este punto de que se trata:

$$R=\frac{1}{K}, \tag{1}$$

o sea,

$$R=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}. \tag{2}$$

Tracemos por el punto M de la curva (fig. 145) la normal dirigida hacia la concavidad de aquella y marquemos en esta normal un segmento MC igual al radio R de curvatura de la curva en el punto M.

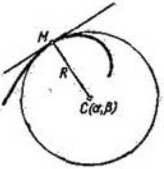

Fig. 145

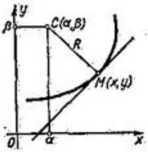

Fig. 146

El punto C se llama *centro de curvatura* de esta curva en el punto M; el círculo de radio R y centro en el punto C (que pasa por el punto M), se denomina *círculo de curvatura* de la curva dada en el punto M.

De la definición de círculo de curvatura se deduce que en el punto dado la curvatura de la curva es igual a la del círculo de curvatura.

Obtengamos las fórmulas que determinan las coordenadas del centro de curvatura.

Sea una curva dada por la ecuación

$$y=f(x), \tag{3}$$

fijemos en la curva un punto $M(x, y)$ y determinemos las coordenadas α y β del centro de curvatura correspondiente al punto elegido (fig. 146). Escribamos la ecuación de la normal a la curva en el punto M:

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x). \tag{4}$$

(Aquí, X e Y son coordenadas corrientes de un punto de la normal).

Puesto que el punto C $(\alpha,\ \beta)$ está situado en la normal, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (4):

$$\beta-y=-\frac{1}{y'}(\alpha-x). \tag{5}$$

Luego, la distancia entre el punto C $(\alpha,\ \beta)$ y el M $(x,\ y)$ es igual al radio R de curvatura:

$$(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2=R^2. \tag{6}$$

Resolviendo juntamente las ecuaciones (5) y (6), hallamos α y β:

$$(\alpha-x)^2+\frac{1}{y'^2}(\alpha-x)^2=R^2,$$

$$(\alpha-x)^2=\frac{y'^2}{1+y'^2}R^2;$$

de donde: $\alpha=x\pm\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}R$, $\beta=y\mp\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}R$, y, dado que: $R=\dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$, tenemos: $\alpha=x\pm\dfrac{y'(+y'^2)}{|y''|}$, $\beta=y\mp\dfrac{1+y'^2}{|y''|}$.

Para decidir qué signos (superiores o inferiores) debemos tomar en las últimas fórmulas, conviene examinar el caso: $y''>0$ y $y''<0$. Si $y''>0$, la curva es cóncava en este punto y, por tanto, $\beta>y$ (fig. 146), por consiguiente, debemos tomar los signos inferiores. Tomando en cuenta que en este caso $|y''|=y''$, las fórmulas de las coordenadas del centro de curvatura serán:

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''},\\ \beta&=y+\frac{1+y'^2}{y''}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

De modo análogo se puede demostrar que las fórmulas (7) se verifican también en el caso de $y''<0$.

Si la curva está dada por ecuaciones paramétricas

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

las coordenadas del centro de curvatura se obtienen con facilidad de las fórmulas (7), sustituyendo en éstas y' e y'' por sus expresiones en función del parámetro:

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t}; \qquad y'' = \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{x'^3_t}.$$

Entonces,

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}, \\ \beta &= y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}. \end{aligned}\right\} \qquad (7')$$

Ejemplo 1. Hallar las coordenadas del centro de curvatura de la parábola

$$y^2 = 2px$$

a) en un punto arbitrario $M(x, y)$; b) en el punto $M_0(0, 0)$; c) en el punto $M_1\left(\frac{p}{2}, p\right)$.

Solución. Introduciendo los valores de $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$ en las fórmulas (7), tenemos (fig. 147):

a) $\alpha = 3x + p, \quad \beta = -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}$;

b) para $x = 0$ encontramos: $\alpha = p, \ \beta = 0$;

c) para $x = \frac{p}{2}$ tenemos: $\alpha = \frac{5p}{2}, \ \beta = -p$.

Si la curvatura en el punto $M_1(x, y)$ no es igual a cero, al punto mencionado le corresponde un centro de curvatura bien determinado: $C_1(\alpha, \beta)$. El conjunto de todos los centros de curvatura de la curva dada forma una curva nueva, llamada *evoluta* de la curva estudiada.

De este modo, el lugar geométrico de los centros de curvatura se llama *evoluta de la curva*. La curva estudiada, con relación a su evoluta, se llama *evolvente* o *involuta* (o *desarrollo*).

Si la curva dada está representada por la ecuación $y = f(x)$, entonces las ecuaciones (7) se pueden considerar como ecuaciones paramétricas de la evoluta con el parámetro x. Eliminando en las ecuaciones dadas el parámetro x (si es posible), obtenemos la expresión de la dependencia directa entre las coordenadas corrientes

α y β de la evoluta. Si la curva está representada por las ecuaciones paramétricas $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, las ecuaciones (7′) serán ecuaciones

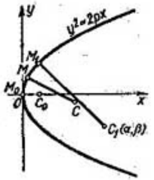

Fig. 147

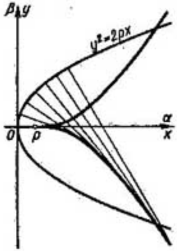

Fig. 148

paramétricas de la evoluta (puesto que los valores x, y, x', y', x'', y'' son funciones de t).

Ejemplo 2. Hallar la ecuación de la evoluta de la parábola

$$y^2 = 2px.$$

Solución. Utilizando los resultados del ejemplo 1, tenemos para cada punto (x, y) de la parábola:

$$\alpha = 3x + p,$$

$$\beta = -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}.$$

Eliminando en estas ecuaciones el parámetro x, obtenemos:

$$\beta^2 = \frac{8}{27p}(\alpha - p)^3.$$

Esta es la ecuación de la parábola semicúbica (fig. 148).

Ejemplo 3. Hallar la ecuación de la evoluta de una elipse dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = a\cos t, \quad y = b\,\mathrm{sen}\,t.$$

Solución. Calculamos las derivadas de x e y con respecto a t:

$$x' = -a\,\mathrm{sen}\,t, \quad y' = b\cos t;$$

$$x'' = -a\cos t, \quad y'' = -b\,\mathrm{sen}\,t.$$

Poniendo las expresiones de las derivadas en las fórmulas (7′) tenemos:

$$\alpha = a\cos t - \frac{b\cos t\,(a^2\,\mathrm{sen}^2\,t + b^2\cos^2 t)}{ab\,\mathrm{sen}^2\,t + ab\cos^2 t} =$$

$$= a\cos t - a\cos t\,\mathrm{sen}^2\,t - \frac{b^2}{a}\cos^3 t = \left(a - \frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t.$$

Así, pues,

$$\alpha=\left(a-\frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t.$$

De modo análogo:

$$\beta=\left(b-\frac{a^2}{b}\right)\operatorname{sen}^3 t.$$

Eliminando el parámetro t, obtenemos la ecuación de la evoluta de la elipse:

$$\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{\beta}{a}\right)^{2/3}=\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{2/3}.$$

Aquí, α y β son coordenadas corrientes de la evoluta (fig. 149).

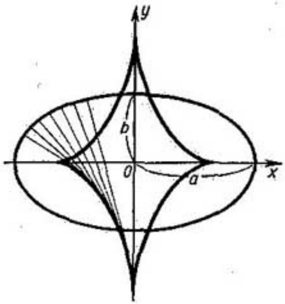

Fig. 149

Ejemplo 4. Hallar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de una cicloide:

$$x=a(t-\operatorname{sen} t),$$
$$y=a(1-\cos t).$$

Solución.

$$x'=a(1-\cos t);\quad y'=a\operatorname{sen} t;$$
$$x''=a\operatorname{sen} t;\quad y''=-a\cos t.$$

Introduciendo las expresiones obtenidas en la fórmula (7') tenemos

$$\alpha=a(t+\operatorname{sen} t),$$
$$\beta=-a(1-\cos t).$$

Transformemos las variables, haciendo:

$$\alpha=\xi-\pi a,$$
$$\beta=\eta-2a,$$
$$t=\tau-\pi.$$

Las ecuaciones de la evoluta tomarán la forma:

$$\xi = a(\tau - \operatorname{sen}\tau),$$
$$\eta = a(1 - \cos\tau).$$

Estas últimas determinan en las coordenadas ξ, η una cicloide generada por el mismo círculo de radio a. De este modo, la evoluta de una cicloide es la misma cicloide, pero desplazada en $-\pi a$ por el eje Ox y en $-2a$, por el eje Oy (fig. 150).

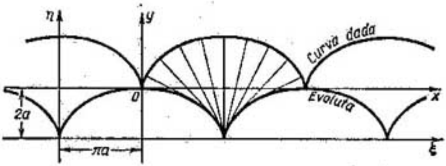

Fig. 150

§ 7. PROPIEDADES DE LA EVOLUTA

Teorema 1. *La normal a la curva dada es tangente a su evoluta.*

Demostración. El coeficiente angular de la tangente a la evoluta, determinada por las ecuaciones paramétricas (7′) del párrafo antecedente, es igual a:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\dfrac{d\beta}{dx}}{\dfrac{d\alpha}{dx}}.$$

Notemos que [en virtud de las mismas ecuaciones (7′)]

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{3y'y''^2 - y'y''' - y'^3y'''}{y''^2} = -y'\frac{3y'y'' - y''' - y'^2y'''}{y''^2}, \quad (1)$$

$$\frac{d\beta}{dx} = -\frac{3y''y' - y''' - y'^2y'''}{y''^2}, \quad (2)$$

de donde obtenemos la correlación:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{y'}.$$

Pero y' es el coeficiente angular de la tangente a la curva en el punto correspondiente; por tanto, de la correlación obtenida se deduce que la tangente a la curva es perpendicular a la tangente a la evoluta de esta curva en el punto correspondiente, es decir, la normal a la curva es tangente a la evoluta de esta curva.

Teorema 2. *Si el radio de curvatura varía uniformemente sobre cierto segmento M_1M_2 de la curva (es decir, sólo crece o sólo decrece), el incremento de la longitud del arco de la evoluta en este segmento de la curva es igual (en valor absoluto) al incremento correspondiente del radio de curvatura de esta curva.*

Demostración. En virtud de la fórmula (2′) § 1 cap. VI, tenemos:

$$ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2,$$

donde, ds es la diferencial de la longitud del arco de la evoluta; de aquí se tiene: $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2$.

Introduciendo en esta ecuación las expresiones (1) y (2), tenemos:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = (1 + y'^2) = \left(\frac{3y'y''^2 - y''' - y'^2y'''}{y''^2}\right)^2. \qquad (3)$$

Hallemos ahora $\left(\frac{dR}{dx}\right)^2$. Puesto que

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}, \quad \text{se tiene} \quad R^2 = \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2}.$$

Derivando ambos miembros de esta igualdad con respecto a x y realizando las transformaciones correspondientes, obtenemos: $2R\frac{dR}{dx} = \frac{2(1 + y'^2)^2(3y'y''^2 - y''' - y'^2 - y''')}{(y'')^3}$. Dividiendo ambos miembros de la igualdad por $2R = \frac{2(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$, obtenemos: $\frac{dR}{dx} = \frac{(1 + y'^2)^{1/2}(3y'y''^2 - y''' - y'^2y''')}{y''^2}$.

Elevando al cuadrado:

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 = (1 + y'^2)\left(\frac{3y'y''^2 - y''' - y'^2y'''}{y''^2}\right)^2. \qquad (4)$$

Comparando las ecuaciones (3) y (4):

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2,$$

de donde

$$\frac{dR}{dx} = \mp \frac{ds}{dx}.$$

Según la hipótesis, $\frac{dR}{dx}$ no cambia de signo (R sólo crece, o decrece), por consiguiente, $\frac{ds}{dx}$ conserva su signo. Tomemos (para mayor precisión del razonamiento): $\frac{dR}{dx} \leqslant 0$, $\frac{ds}{dx} \geqslant 0$ (lo que corresponde a la fig. 151). Por consiguiente, $\frac{dR}{dx} = -\frac{ds}{dx}$. Sean x_1 y x_2 las abscisas de los puntos M_1 y M_2. Apliquemos el teorema de Cauchy para las funciones $s(x)$ y $R(x)$ en el segmento $[x_1, x_2]$:

$$\frac{s(x_2) - s(x_1)}{R(x_2) - R(x_1)} = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=\xi}}{\left(\frac{dR}{dx}\right)_{x=\xi}} = -1,$$

donde, ξ es un número comprendido entre x_1 y x_2 ($x_1 < \xi < x_2$).

Introduzcamos las siguientes designaciones (fig. 151):

$$s(x_2) = s_2, \quad s(x_1) = s_1, \quad R(x_2) = R_2, \quad R(x_1) = R_1.$$

Entonces, $\frac{s_2 - s_1}{R_2 - R_1} = -1$, ó $s_2 - s_1 = -(R_2 - R_1)$. Esto significa que

$$|s_2 - s_1| = |R_2 - R_1|.$$

De la misma manera se demuestra esta ecuación cuando el radio de curvatura crece.

Hemos demostrado los teoremas 1 y 2 para el caso de la curva dada por una ecuación explícita $y = f(x)$. Estos teoremas son válidos también cuando la curva está dada por ecuaciones paramétricas. Su demostración es absolutamente análoga.

Observación. Mostremos un procedimiento mecánico elemental para construir la curva (evolvente) siguiendo su evoluta.

Sea una regla flexible encorvada en forma de la evoluta C_0C_5 (fig. 152). Imaginemos un hilo inextensible que contornea esta regla y uno de los extremos del hilo está fijado en el punto C_0. Si desenrollamos este hilo, manteniéndolo siempre bien tenso, su otro extremo describirá una curva M_5M_0, que será la evolvente.

La comprobación de que la curva obtenida es realmente una evolvente puede ser realizada con ayuda de las propiedades de la evoluta, arriba establecidas.

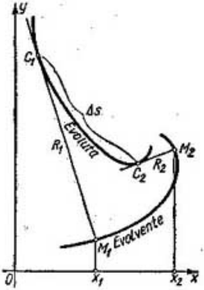

Fig 151

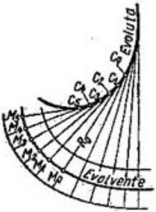

Fig. 152

Observemos que a una evoluta le corresponde una multitud infinita de diferentes evolventes (fig. 152).

Ejemplo. Se da una circunferencia de radio a (fig. 153), elijamos entre las evolventes de esta circunferencia la que pasa por el punto M_0 $(a, 0)$. Tomando

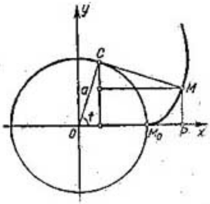

Fig. 153

en cuenta que $CM = \widehat{CM}_0 = at$, será fácil obtener las ecuaciones de la evolvente de la circunferencia:

$$OP = x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t),$$

$$PM = y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t).$$

Señalemos que el perfil del diente de un piñón tiene, en la mayoría de los casos, la forma de evolvente de un círculo.

§ 8. CALCULO APROXIMADO DE LAS RAICES REALES DE UNA ECUACION

Los métodos del análisis de la variación de funciones permiten calcular los valores aproximados de las raíces de la ecuación

$$f(x) = 0.$$

Si ésta es una ecuación algebraica*) de primero, segundo, tercero o cuarto grado, existen también las fórmulas que permiten expresar las raíces de la ecuación en función de sus coeficientes, mediante un número finito de operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces. Para las ecuaciones de grado superior al cuarto las fórmulas de tal índole, en caso general, no existen. Si los coeficientes de cualquier ecuación, algebraica o no, (trascendente), son numéricos, sus raíces pueden ser aproximadamente calculadas con cualquier grado de precisión. Observemos que, incluso cuando las raíces de la ecuación algebraica se expresan mediante radicales, en la práctica, es a veces más conveniente aplicar métodos aproximados para resolver las ecuaciones. He aquí algunos métodos del cálculo aproximado de las raíces de una ecuación.

1. Método de las cuerdas. Sea dada la ecuación

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

donde $f(x)$ es una función continua, derivada dos veces en el segmento $[a, b]$. Supongamos que analizando la función $y = f(x)$ dentro del segmento $[a, b]$ definimos otro segmento $[x_1, x_2]$ dentro del cual la función es monótona (creciente o decreciente) y en los extremos los valores $f(x_1)$ y $f(x_2)$ tienen signos contrarios. Para expresarse con más precisión supongamos que $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$ (fig. 154). Puesto que la función $y = f(x)$ es continua en el segmento $[x_1, x_2]$, su gráfica cortará el eje Ox en un punto, situado entre x_1 y x_2.

Tracemos la cuerda AB que une los extremos de la curva $y = f(x)$, correspondientes a las abscisas x_1 y x_2. Entonces, la abscisa a_1 del punto de intersección de la cuerda con el eje Ox será el valor aproximado de la raíz (fig. 155).

Para obtener este valor aproximado, escribamos la ecuación de la recta AB, que pasa por los puntos dados $A[x_1, f(x_1)]$ y $B[x_2, f(x_2)]$: $\dfrac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Puesto que $y = 0$ para $x = a_1$, por tanto:

$$\frac{-f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{a_1 - x_1}{x_2 - x_1},$$

*) La ecuación $f(x) = 0$ se llama *algebraica*, si $f(x)$ es un polinomio (véase § 6, cap. VII).

de donde

$$a_1 = x_1 - \frac{(x_2 - x_1)\, f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}. \tag{2}$$

Para determinar el valor más exacto de la raíz hallamos $f(a_1)$. Si $f(a_1) < 0$, repitimos el mismo procedimiento, aplicando la fórmula (2) al segmento $[a_1, x_2]$. Si $f(a_1) > 0$, aplicamos la fórmula

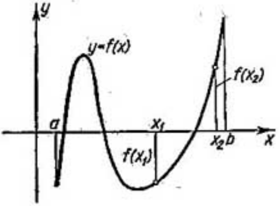

Fig. 154

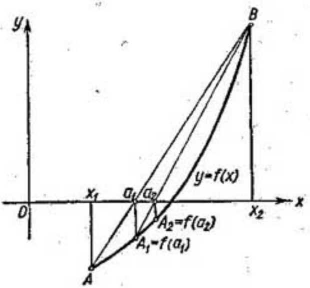

Fig. 155

mencionada para el segmento $[x_1, a_1]$. Utilizando este procedimiento unas cuantas veces, obtenemos, evidentemente los valores cada vez más precisos de la raíz a_2, a_3, etc.

Ejemplo 1. Hallar los valores aproximados de las raíces de la ecuación

$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0.$$

Solución. Hallemos ante todo los segmentos en que la función $f(x)$ es monótona. El resultado del cálculo de la derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 6,$$

muestra que ésta es positiva para $x < -\sqrt{2}$, negativa para $-\sqrt{2} < x < +\sqrt{2}$, y de nuevo positiva para $x > \sqrt{2}$ (fig. 156). Así, la función tiene tres segmentos de monotonía dentro de cada uno de los cuales se halla una raíz. Para simplificar los cálculos ulteriores, haremos más estrechos estos segmentos de monotonía, pero de modo que en cada segmento siga permaneciendo la raíz correspondiente. Para esto, variando al azar los valores de x en la expresión de $f(x)$, encontremos dentro de cada segmento de monotonía otros más pequeños, en cuyos extremos la función tenga signos contrarios:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = 0, & f(0) = 2, \\ x_2 = 1, & f(1) = -3, \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_3=-3, & f(-3)=-7, \\ x_4=-2, & f(-2)=6, \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_5=2, & f(2)=-2, \\ x_6=3, & f(3)=11. \end{array}\right\}$$

De este modo, las raíces se encuentran en los intervalos:

$$(0;\ 1),\ (-3;\ -2),\ (2;\ 3).$$

Determinemos el valor aproximado de la raíz en el intervalo (0; 1); según la fórmula (2) tenemos:

$$a_1=0-\frac{(1-0)\,2}{-3-2}=\frac{2}{5}=0{,}4.$$

Puesto que $f(0{,}4)=0{,}4^3-6\cdot 0{,}4+2=-0{,}336$, $f(0)=2$, la raíz se encuentra comprendida entre 0 y 0,4. Aplicando de nuevo la fórmula (2) para el intervalo, obtenemos el siguiente valor aproximado:

$$a_2=0-\frac{(0{,}4-0)\cdot 2}{-0{,}336-2}=\frac{0{,}8}{2{,}336}=0{,}342, \text{ etc.}$$

De modo análogo se hallan los valores aproximados de las raíces en otros intervalos.

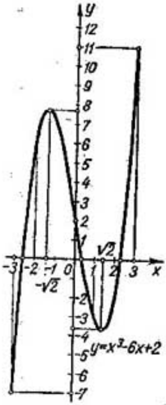

Fig. 156

2. Método de tangentes (Método de Newton). Supongamos de nuevo que $f(x_1)<0$, $f(x_2)>0$, y que en el segmento $[x_1,\ x_2]$ la primera derivada no cambia de signo. En este caso, en el intervalo $(x_1,\ x_2)$ se halla una raíz de la ecuación $f(x)=0$. Supongamos, además, que la segunda derivada tampoco cambia de signo en el segmento $[x_1,\ x_2]$, lo que puede lograrse, reduciendo el intervalo que contiene la raíz. El hecho de que la segunda derivada no cambia el signo en el segmento $[x_1,\ x_2]$ significa que la curva es sólo convexa o cóncava en este segmento.

Tracemos una tangente a la curva en el punto B (fig. 157). La abscisa a_1 del punto de intersección de la tangente con el eje Ox será el valor aproximado de la raíz buscada. Para encontrar esta abscisa, escribamos la ecuación de la tangente en el punto B:

$$y-f(x_2)=f'(x_2)\,(x-x_2).$$

Notamos que, si $y=0$, $x=a_1$, obtenemos:

$$a_1=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}. \tag{3}$$

Tracemos luego una tangente en el punto B_1 y de modo análogo obtengamos un valor más preciso de la raíz a_2. Repitiendo este procedimiento unas cuantas veces, podemos calcular el valor aproximado de la raíz con cualquier grado de precisión que se desee.

Observemos la circunstancia siguiente. Si trazáramos la tangente a la curva no en el punto B, sino en el A, podría resultar que el punto de intersección de la tangente con el eje Ox se encontrara

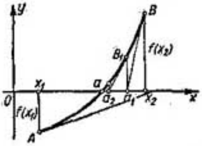

Fig. 157

fuera del intervalo (x_1, x_2). Se ve claramente en las figuras 157 y 158 que la tangente debe trazarse en aquel extremo del arco donde coinciden los signos de la función y de su segunda derivada. Según la hipótesis, la segunda derivada conserva su signo en el segmento

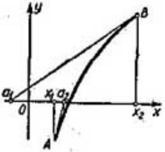

Fig. 158

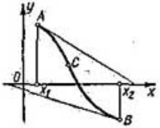

Fig. 159

$[x_1, x_2]$. Por consiguiente los signos de la función y de la segunda derivada coinciden obligatoriamente en uno de los extremos. Esta regla es también válida para el caso en que $f'(x) < 0$. Si la tangente se traza por el extremo izquierdo del intervalo, es preciso sustituir x_2 por x_1 en la fórmula (3):

$$a_1 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \tag{3'}$$

Si en el interior del intervalo (x_1, x_2) se encuentra un punto de inflexión C, el método de tangentes puede dar un valor aproximado de la raíz, situado fuera del intervalo (x_1, x_2) (fig. 159).

Ejemplo 2. Apliquemos la fórmula (3) para calcular la raíz de la ecuación $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$, comprendida en el intervalo (0; 1). Tenemos:

$$f(0) = 2, \ f'(0) = (3x^2 - 6)\,|_{x=0} = -6.$$

Por eso, según la fórmula (3) obtenemos:

$$a_1 = 0 - \frac{2}{-6} = \frac{1}{3} = 0{,}333.$$

3. Método combinado (fig. 160). Si en el segmento $[x_1, x_2]$ aplicamos simultáneamente los métodos de las cuerdas y de las tangentes, obtenemos dos puntos a_1 y $\bar{a}_1$, situados a ambos lados de la raíz buscada a (puesto que $f(a_1)$ y $f(\bar{a}_1)$ tienen signos contrarios).

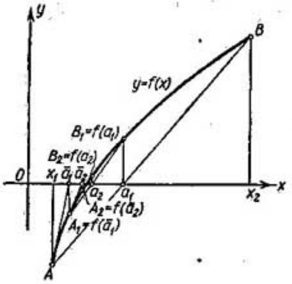

Fig. 160

Luego aplicamos los métodos de cuerdas y de tangentes en el segmento $[a_1, \bar{a}_1]$. Como resultado obtenemos dos números, a_2 y $\bar{a}_2$, aún más próximos al valor de la raíz. Procedemos de esta manera hasta que la diferencia entre los valores aproximados hallados sea menor que el grado necesario de precisión.

Notemos que aplicando el método combinado, nos aproximamos a la raíz buscada por los dos lados a la vez (es decir, encontramos simultáneamente tanto el valor aproximado por exceso, como por defecto).

Para ilustrar esta deducción en el ejemplo 2 podemos convencernos, mediante la sustitución, que $f(0{,}333) > 0$, $f(0{,}342) < 0$. Por consiguiente, el valor de la raíz está comprendido entre los valores aproximados:

$$0{,}333 < x < 0{,}342.$$

Ejercicios para el capítulo VI

Hallar la curvatura de las curvas en los puntos indicados: 1. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ en los puntos $(0, b)$ y $(a, 0)$. *Respuesta*: $\frac{b}{a^2}$ en el punto $(0, b)$; $\frac{a}{b^2}$ en el punto $(a, 0)$. 2. $xy=12$ en el punto $(3, 4)$. *Respuesta*: 24/125 3. $y=x^3$ en el punto (x_1, y_1). *Respuesta*: $\frac{6x_1}{(1+9x_1^4)^{3/2}}$. 4. $16y^2=4x^4-x^6$ en el punto $(2, 0)$. *Respuesta*: $\frac{1}{2}$. 5. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ en el punto arbitrario. *Respuesta*: $1/3\,(axy)^{\frac{1}{3}}$.

Hallar el radio de curvatura de las curvas en los puntos indicados; trazar cada curva y construir el círculo de curvatura correspondiente. 6. $y^2=x^3$ en el punto $(4, 8)$. *Respuesta*: $R=80\sqrt{10/3}$. 7. $x^2=4ay$ en el punto $(0, 0)$. *Respuesta*: $R=2a$. 8. $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ en el punto (x_1, y_1). *Respuesta*: $R=\frac{(b^4x_1+a^4y_1)^{3/2}}{a^4b^4}$. 9. $y=\ln x$ en el punto $(1, 0)$. *Respuesta*: $R=2\sqrt{2}$. 10. $y=\operatorname{sen} x$ en el punto $(\pi/2, 1)$. *Respuesta*: $R=1$. 11. $\left.\begin{array}{l}x=a\cos^3 t\\ y=a\operatorname{sen}^3 t\end{array}\right\}$ para $t=t_1$. *Respuesta*: $R=3a\operatorname{sen} t_1\cos t_1$.

Hallar el radio de curvatura de las curvas: 12. $\left.\begin{array}{l}x=3t^2\\ y=3t-t^3\end{array}\right\}$ para $t=1$. *Respuesta*: $R=6$. 13. La circunferencia $\rho=a\operatorname{sen}\theta$. *Respuesta*: $R=a/2$. 14. La espiral de Arquímedes $\rho=a\theta$. *Respuesta*: $R=\frac{(\rho^2+a^2)^{3/2}}{\rho^2+2a^2}$. 15. La cardioide $\rho=a(1-\cos\theta)$. *Respuesta*: $R=\frac{2}{3}\sqrt{2a\rho}$. 16. La lemniscata $\rho^2=a^2\cos 2\theta$. *Respuesta*: $R=\frac{a^2}{3\rho}$. 17. La parábola $\rho=a\operatorname{sc}^2\frac{\theta}{2}$. *Respuesta*: $R=2a\operatorname{sc}^3\frac{\theta}{2}$. 18. $\rho=a\operatorname{sen}^3\frac{\theta}{3}$. *Respuesta*: $R=\frac{3}{4}a\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{3}$.

Hallar los puntos de las curvas en los que el radio de curvatura tenga un valor mínimo: 19. $y=\ln x$. *Respuesta*: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\ln 2\right)$. 20. $y=e^x$. *Respuesta*: $\left(-\frac{1}{2}\ln 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 21. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$. *Respuesta*: $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$. 22. $y=a\ln\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$. *Respuesta*: En el punto $(0, 0)$ $R=a/2$.

Hallar las coordenadas del centro de curvatura (α, β) y las ecuaciones de la evoluta para cada una de las curvas siguientes:

23. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. *Respuesta*: $\alpha=\frac{(a^2+b^2)x^3}{a^4}$; $\beta=-\frac{(a^2+b^2)y^3}{b^4}$. 24. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. *Respuesta*: $\alpha=x+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$; $\beta=y+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$. 25. $y^3=a^2x$. *Respuesta*: $\alpha=\frac{a^4+15y^4}{6a^2y}$; $\beta=\frac{a^4y-9y^5}{2a^4}$. 26. $\begin{cases}x=3t,\\ y=t^2-6.\end{cases}$ *Respuesta*: $\alpha=-\frac{4}{3}t^3$;

$\beta=3t^2-\frac{3}{2}$. 27. $\begin{cases} x=k\ln\operatorname{cotg}\frac{t}{2}-k\cos t, \\ y=k\operatorname{sen} t. \end{cases}$ *Respuesta*: $y=\frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)$ (tractriz).

28. $\begin{cases} x=a(\cos t+t\operatorname{sen} t) \\ y=a(\operatorname{sen} t-t\cos t) \end{cases}$. *Respuesta*: $\alpha=a\cos t$; $\beta=a\operatorname{sen} t$. 29. $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\operatorname{sen}^3 t. \end{cases}$ *Respuesta*: $\alpha=a\cos^3 t+3a\cos t\operatorname{sen}^2 t$; $\beta=a\operatorname{sen}^3 t+3a\cos^2 t\operatorname{sen} t$. 30. Calcular las raíces de la ecuación $x^3-4x+2=0$ con la precisión de hasta 0,001. *Respuesta*: $x_1=1{,}675$, $x_2=0{,}539$, $x_3=-2{,}214$. 31. Calcular el valor aproximado de la raíz de la ecuación $f(x)=x^5-x-0{,}2=0$ comprendida en el intervalo (1; 1,1). *Respuesta*: 1,045. 32. Calcular las raíces de la ecuación $x^4+2x^2-6x+2=0$, con precisión de hasta 0,01. *Respuesta*: $0{,}38<x_1<0{,}39$; $1{,}24<x_2<1{,}25$. 33. Calcular el valor aproximado de la ecuación $x^3-5=0$. *Respuesta*: $x_1\approx 1{,}71$, $x_{2,3}=1{,}71\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. 34. Hallar el valor aproximado de la raíz de la ecuación $x-\operatorname{tg} x=0$ comprendida entre 0 y $\frac{3\pi}{2}$. *Respuesta*: 4,4935. 35. Hallar la raíz aproximada de la ecuación $\operatorname{sen} x=1-x$ con precisión de 0,001.

Indicación: Redúzcase la ecuación a la forma $f(x)=0$. *Respuesta*: $0{,}5110<x<0{,}5111$.

Problemas

36. Demostrar que la curvatura en cada punto de la lemniscata $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ es proporcional al radio vector de este punto.

37. Hallar el valor máximo del radio de curvatura de la curva $\rho=a\operatorname{sen}^3\frac{\varphi}{3}$. *Respuesta*: $R=\frac{3a}{4}$.

38. Hallar las coordenadas del centro de curvatura de la curva $y=x\ln x$ en el punto, en que $y'=0$. *Respuesta*: $(e^{-1}, 0)$.

39. Comprobar que para los puntos de la espiral de Arquímedes $\rho=a\varphi$ el valor de la diferencia entre el radio vector y el radio de curvatura tiende a 0, cuando $\varphi\to\infty$.

40. Hallar la parábola $y=ax^2+bx+c$ que tiene en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ una tangente y curvatura comunes con la sinusoide $y=\operatorname{sen} x$. Construir la gráfica. *Respuesta*: $y=-\frac{x^2}{2}+\frac{\pi x}{2}+1-\frac{\pi^2}{8}$.

41. La función $y=f(x)$ está definida del modo siguiente:

$$f(x)=x^3 \text{ en el intervalo } -\infty<x\leqslant 1$$
$$f(x)=ax^2+bx+c \text{ en el intervalo } 1<x<+\infty.$$

¿Cuáles deben ser a, b, c para que la línea $y=f(x)$ tenga la curvatura continua en todos los puntos? Construir la gráfica. *Respuesta*: $a=3$, $b=-3$, $c=1$.

42. Demostrar que el radio de curvatura de una cicloide en cualesquiera de sus puntos es dos veces mayor que la normal en el mismo punto.

43. Escribir la ecuación de la circunferencia de curvatura de la parábola $y=x^2$ en el punto (1, 1). *Respuesta*: $(x+4)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{125}{4}$.

44. Escribir la ecuación de la circunferencia de curvatura de la curva $y=\operatorname{tg} x$ en el punto $\left(\frac{\pi}{4}\,;\,1\right)$. *Respuesta:* $\left(x-\frac{\pi-10}{4}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{125}{16}$.

45. Hallar la longitud total de la evoluta de una elipse cuyos semiejes son iguales a a y b. *Respuesta:* $4(a^3-b^3)/ab$.

46. Hallar los valores aproximados de las raíces de la ecuación $xe^x=2$, con precisión de hasta 0,01. *Respuesta*: La ecuación tiene la única raíz real: $x\approx 0{,}84$.

47. Hallar los valores aproximados de las raíces de la ecuación $x\ln x=0{,}8$ con precisión de hasta 0,01. *Respuesta*: La ecuación tiene la única raíz real: $x\approx 1{,}64$.

48. Hallar los valores aproximados de las raíces de la ecuación $x^2 \operatorname{arctg} x=1$ con precisión de hasta 0,001. *Respuesta*: La ecuación tiene la única raíz real: $x\approx 1{,}096$.

CAPITULO VII

NUMEROS COMPLEJOS. POLINOMIOS

§ 1. NUMEROS COMPLEJOS. GENERALIDADES

Se llama *número complejo* a toda expresión de la forma

$$a + bi, \tag{1}$$

donde, a y b son números reales; i es la *unidad llamada imaginaria*, definida por las ecuaciones:

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{ó} \quad i^2 = -1; \tag{2}$$

a es la parte *real* y bi, parte *imaginaria* del número complejo. Dos números complejos $a + bi$ y $a - bi$ que se diferencian sólo por el signo de su parte imaginaria se llaman *conjugados*.

Si $a = 0$, el número $0 + bi = bi$, es un número *puramente imaginario*; si $b = 0$, se obtiene un número real $a + 0 \cdot i = a$.

Aceptemos dos concepciones fundamentales:

1) dos números complejos, $a_1 + b_1 i$ y $a_2 + b_2 i$ se consideran iguales, si:

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2$$

es decir, si son iguales sus partes reales e imaginarias por separado;

2) un número complejo es igual a cero:

$$a + bi = 0,$$

siempre que $a = 0$, $b = 0$.

1. Representación geométrica de los números complejos. Todo número complejo $a + bi$ puede ser representado sobre el plano Oxy mediante un punto A (a, b), de coordenadas a y b (fig. 161). Recíprocamente, todo punto M (a, b) del plano Oxy puede considerarse como la imagen geométrica del número complejo $a + bi$.

Pero, si a todo punto A (a, b) corresponde algún número complejo $a + bi$, se puede decir, en particular, que a todo punto del eje Ox le corresponde un número real ($b = 0$). Todo punto del eje Oy

representa un número puramente imaginario, puesto que en este caso $a = 0$. Por eso, representando los números complejos sobre un plano, el eje Oy se llama *eje imaginario* y el Ox, *eje real.*

Uniendo el punto A (a, b) con el origen de coordenadas, obtenemos el vector $\overline{OA}$. En algunos casos es muy conveniente considerar el *vector* $\overline{OA}$ como la representación geométrica del número complejo $a + bi$.

2. Forma trigonométrica de los números complejos. Designemos por φ y r $(r \geqslant 0)$ las coordenadas polares del punto A (a, b),

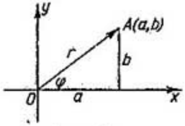

Fig. 161

tomando por polo el origen de coordenadas y por eje polar, la dirección positiva del eje Ox. En este caso (fig. 161), tenemos las expresiones siguientes:

$$a = r \cos \varphi, \qquad b = r \operatorname{sen} \varphi$$

y, por tanto, el número complejo puede ser representado en la forma:

$$a + bi = r (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi). \tag{3}$$

La expresión representada por el segundo miembro se llama forma trigonométrica del número complejo $a + bi$. Las magnitudes r y φ se expresan en función de a y b mediante las fórmulas:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \varphi = \operatorname{Arctg} \frac{b}{a}.$$

El número r se llama *módulo* y φ, *argumento* del número complejo $a + bi$.

El argumento de un número complejo, es decir, el ángulo φ, es positivo, cuando se toma a partir de la dirección positiva del eje Ox en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, y es negativo, cuando se calcula en dirección opuesta. Es evidente que el argumento φ no se determina de una manera unívoca, sino con precisión igual al valor del sumando $2\pi k$; donde k es cualquier número entero.

El módulo r del número complejo $a + bi$ se designa a veces por el símbolo $| a + bi |$:

$$r = | a + bi |.$$

Notemos que todo número real A también puede escribirse en la forma (3), o bien:

$$A = |A| (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) \text{ cuando } A > 0$$
$$A = |A| (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) \text{ cuando } A < 0.$$

El módulo del número complejo 0 es igual a cero: $|0| = 0$. Como argumento de cero se puede tomar caulquier ángulo φ. En efecto, para todo ángulo φ tiene lugar la igualdad:

$$0 = 0 \cdot (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi).$$

§ 2. OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NUMEROS COMPLEJOS

1. Adición. La suma de dos números complejos, $a_1 + b_1 i$ y $a_2 + b_2 i$, es un número complejo definido por la ecuación:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i. \qquad (1)$$

De la fórmula (1) se deduce que la adición de los números complejos, representados en forma de vectores, se efectúa según la regla de adición de vectores.

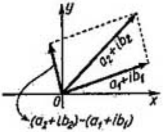

Fig. 162

2. Sustracción. La diferencia de dos números complejos, $a_2 + b_2 i$ y $a_1 + b_1 i$, es un número complejo que, adicionado a $a_1 + b_1 i$, da $a_2 + b_2 i$.

Es fácil ver que:

$$(a_2 + b_2 i) - (a_1 + b_1 i) = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1) i. \qquad (2)$$

Observemos que el módulo de la diferencia de dos números complejos $\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$ es igual a la distancia entre los puntos que representan estos números en el plano de la variable compleja (fig. 162).

3. Multiplicación. El producto de los números complejos, $a_1 + b_1 i$ y $a_2 + b_2 i$, multiplicados estos números como binomios, según las reglas algebraicas, es un número complejo. Hay que tener en cuenta que:

$$i^2 = -1; \ i^3 = (-1)\,i = -i; \ i^4 = (-i)\,(i) = -i^2 = 1;$$
$$i^5 = 1 \cdot i, \text{ etc.}$$

y, en general, para k entero:

$$i^{4k} = 1; \quad i^{4k+1} = i; \quad i^{4k+2} = -1; \quad i^{4k+3} = -i.$$

En virtud de esta regla tenemos:

$$(a_1 + b_1 i)\,(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + b_1 a_2 i + a_1 b_2 i + b_1 b_2 i^2,$$

ó

$$(a_1 + b_1 i)\,(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2)\,i. \tag{3}$$

Si los números complejos están expresados en forma trigonométrica, tenemos:

$$\begin{aligned}
r_1 (\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1)\, r_2 (\cos\varphi_2 + i \operatorname{sen}\varphi_2) &= \\
= r_1 r_2 [\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\varphi_2 &+ \\
+ i \cos\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2 + i^2 \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2] &= \\
= r_1 r_2 [\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2) &+ \\
+ i (\operatorname{sen}\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2)] &= \\
= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)]&.
\end{aligned}$$

Así pues:

$$r_1 (\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1)\, r_2 (\cos\varphi_2 + i \operatorname{sen}\varphi_2) = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)], \tag{3'}$$

es decir, el *producto de dos números complejos es un número complejo cuyo módulo es igual al producto de los módulos de los factores y el argumento es igual a la suma de argumentos de los factores.*

Observación 1. En virtud de la fórmula (3), los números complejos conjugados, $a + bi$ y $a - bi$, satisfacen a la igualdad:

$$(a + ib)\,(a - ib) = a^2 + b^2,$$

es decir, el producto de dos números complejos conjugados es igual a la suma de los cuadrados de sus módulos.

4. División. La división de dos números complejos es la operación inversa a su multiplicación. Si

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = x + yi$$

(donde $\sqrt{a_2^2 + b_2^2} \neq 0$), entonces x e y deben ser tales que se cumpla la igualdad:

$$a_1 + b_1 i = (a_2 + b_2 i)\,(x + yi),$$

o sea:

$$a_1 + b_1 i = (a_2 x - b_2 y) + (a_2 y + b_2 x)\, i.$$

Por consiguiente,

$$a_1 = a_2 x - b_2 y, \qquad b_1 = b_2 x + a_2 y,$$

de donde:

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \qquad y = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2},$$

y finalmente:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i.$$

En la práctica, la división de los números complejos se efectúa de la manera siguiente: para dividir $a_1 + ib_1$ por $a_2 + ib_2$, multiplicamos, tanto el dividendo como el divisor, por un número complejo conjugado de este último (es decir, por $a_2 - ib_2$). Entonces, el divisor será un número real; al dividir por éste la parte real y la imaginaria del dividendo, obtenemos:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)\, i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i.$$

Si el número complejo está expresado en forma trigonométrica, tendremos:

$$\frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \operatorname{sen} (\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Para verificar esta igualdad, basta multiplicar el divisor por el cociente:

$$r_2 (\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2) \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \operatorname{sen} (\varphi_1 - \varphi_2)] =$$

$$= r_2 \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2) + i \operatorname{sen} (\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2)] =$$

$$= r_1 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1).$$

De tal modo, *el módulo del cociente de dos números complejos es igual al cociente de los módulos del dividendo y del divisor; el argumento del cociente es igual a la diferencia entre los argumentos del dividendo y del divisor.*

Observación 2. De las reglas de operaciones con números complejos se deduce que la adición, sustracción, multiplicación y división de los números complejos dan de nuevo un número complejo. Si las reglas de operaciones con números complejos son aplicadas a los números reales (considerándolos como caso particular de los números complejos), entonces estas reglas coinciden con las reglas ordinarias de la aritmética.

Observación 3. Volviendo a la deficición de suma, diferencia, producto y cociente de los números complejos, es fácil comprobar que, si en estas expresiones son sustituidos los números complejos por sus números conjugados correspondientes, los resultados de las operaciones indicadas también son sustituidos por los números conjugados. De aquí, en particular, se deduce el teorema siguiente:

Teorema. *Si en un polinomio con coeficientes reales*

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n$$

sustituimos x por el número $a + bi$, y, después, por el número conjugado $a - bi$, los resultados obtenidos serán mutuamente conjugados.

§ 3. ELEVACION A POTENCIA Y EXTRACCION DE LA RAIZ DEL NUMERO COMPLEJO

1. Elevación a potencia. De la fórmula (3') del párrafo precedente se deduce que si n es un número entero positivo, entonces:

$$[r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi). \tag{1}$$

Esta expresión es la *fórmula de Moivre* y muestra que, *al elevar un número complejo a una potencia entera y positiva, el módulo de este número se eleva a la misma potencia y el argumento se multiplica por el exponente de esta potencia.*

Consideremos ahora una aplicación más de la fórmula de Moivre. Haciendo $r = 1$, obtenemos:

$$(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^n = \cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi.$$

Desarrollando el primer miembro según la fórmula del binomio de Newton e igualando las partes reales e imaginarias, podremos expresar $\operatorname{sen} n\varphi$ y $\cos n\varphi$ en función de potencias de $\operatorname{sen}\varphi$ y $\cos\varphi$.

Así, por ejemplo, si $n = 3$, obtenemos:
$\cos^3\varphi + i3\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi - i\operatorname{sen}^3\varphi = \cos 3\varphi + i\operatorname{sen} 3\varphi.$

Usando la igualdad de estos números complejos, tenemos:
$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi,\quad \operatorname{sen} 3\varphi = -\operatorname{sen}^3\varphi + 3\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi.$

2. Extracción de la raíz. La raíz n—ésima de un número complejo es otro número complejo que, al ser elevado a la potencia n, dará el número comprendido bajo el radical, es decir, si:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\operatorname{sen}\psi),$$

$$\rho^n(\cos n\psi + i\operatorname{sen} n\psi) = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi).$$

Como los módulos de los números complejos iguales han de ser iguales y los argumentos pueden diferenciarse en un múltiplo de 2π, tenemos:

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi.$$

De aquí:

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

donde, k es un número entero arbitrario, $\sqrt[n]{r}$ es el valor aritmético (real y positivo) de la raíz del número positivo r. Por consiguiente,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right). \tag{2}$$

Dando a k los valores $0, 1, 2 \ldots, n - 1$, obtenemos n diferentes valores de la raíz. Para otros valores de k los argumentos se diferenciarán de los obtenidos antes en un múltiplo de 2π y, por tanto, se obtendrán los valores de la raíz que coinciden con los estudiados.

Así pues, la raíz n—ésima de un número complejo tiene n diferentes valores.

La raíz n—ésima del número real A, distinto de cero, también tiene n valores, puesto que el número real es un caso particular del número complejo y puede ser representado en forma trigonométrica:

si $A > 0$, tenemos: $A = |A|(\cos 0 + i\operatorname{sen} 0)$;
si $A < 0$, tenemos: $A = |A|(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi)$.

Ejemplo 1. Hallar todos los valores de la raíz cúbica de la unidad.
Solución. Representemos la unidad en forma trigonométrica:

$$1 = \cos 0 + i\operatorname{sen} 0.$$

Según la fórmula (2):

$$\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{\cos 0+i\operatorname{sen} 0}=\cos\frac{0+2k\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{0+2k\pi}{3}.$$

Haciendo k igual a 0, 1, 2, obtenemos tres valores de la raíz:

$$x_1=\cos 0+i\operatorname{sen} 0=1;\quad x_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3};\quad x_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}.$$

Tomando en cuenta que

$$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2};\ \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2};\ \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

resulta:

$$x_1=1;\quad x_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\quad x_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En la figura 163 los puntos A, B, C son las imágenes geométricas de las raíces obtenidas.

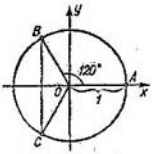

Fig. 163

3. Solución de la ecuación binomia.

La ecuación

$$x^n=A$$

se llama *binomia*. Hallemos las raíces de esta ecuación.

Si A es un número real positivo, tenemos:

$$x=\sqrt[n]{A}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

La expresión encerrada en el paréntesis da todos los valores de la raíz de n—ésima potencia de la 1.

Si A es un número real negativo, entonces:

$$x=\sqrt[n]{|A|}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\pi+2k\pi}{n}\right).$$

La expresión entre paréntesis da todos los valores de la raíz de n—ésima potencia de -1.

Si A es un número complejo, los valores de x se hallan según la fórmula (2).

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$x^4 = 1.$$

Solución.

$$x = \sqrt[4]{\cos 2k\pi + i \operatorname{sen} 2k\pi} = \cos \frac{2k\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{4}.$$

Haciendo k igual a 0, 1, 2, 3, obtenemos:

$$x_1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1,$$

$$x_2 = \cos \frac{2\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{4} = i,$$

$$x_3 = \cos \frac{4\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{4} = -1,$$

$$x_4 = \cos \frac{6\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{6\pi}{4} = -i.$$

§ 4. FUNCION EXPONENCIAL CON EXPONENTE COMPLEJO Y SUS PROPIEDADES

Sea $z = x + iy$. Si x e y son variables reales, z es una variable compleja. A cada valor de la variable compleja le corresponde un punto bien determinado (fig. 161) en el plano Oxy (plano de la variable compleja.)

Definición. Si a cada valor de una variable compleja z, perteneciente a cierto dominio del plano de variables complejas, corresponde un valor bien determinado de otra variable compleja w, se dice que w es una *función de la variable compleja* z: $w = f(z)$ ó $w = w(z)$.

Existen las nociones del límite, de la derivada, de la integral, etc., de una función de variable compleja.

Estudiemos una función de la variable compleja, o bien, la función exponencial:

$$w = e^z$$

o sea:

$$w = e^{x+iy}.$$

Los valores complejos de la función w se determinan del modo siguiente*:

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y), \tag{1}$$

*) Demostraremos más adelante (§ 21, cap. XIII y § 18 cap. XVI, tomo II) la conveniencia de esta definición de la función exponencial.

es decir,

$$w(z) = e^{x}(\cos y + i \operatorname{sen} y). \qquad (2)$$

Ejemplos:

1. $z = 1 + \frac{\pi}{4} i$, $e^{1+\frac{\pi}{4} i} = e\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = e\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

2. $z = 0 + \frac{\pi}{2} i$, $e^{0+\frac{\pi}{2} i} = e^{0}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = i$,

3. $z = 1 + i$, $e^{1+i} = e^{1}(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1) = 0{,}54 + i\cdot 0{,}83$,

4. $z = x$ (x es un número real), $e^{x+0i} = e^{x}(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = e^{x}$ que es una función exponencial ordinaria.

Propiedades de la función exponencial

1. Si z_1 y z_2 son dos números complejos, entonces:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}. \qquad (3)$$

Demostración. Sea

$$z_1 = x_1 + iy_1, \; z_2 = x_2 + iy_2;$$

entonces

$$e^{z_1+z_2} = e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} =$$
$$= e^{x_1} e^{x_2}[\cos(y_1+y_2) + i \operatorname{sen}(y_1+y_2)]. \qquad (4)$$

Por otra parte, en virtud del teorema sobre el producto de dos números complejos expresados en forma trigonométrica, tenemos:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1+iy_1} e^{x_2+iy_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)\, e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2) =$$
$$= e^{x_1} e^{x_2}[\cos(y_1+y_2) + i \operatorname{sen}(y_1+y_2)]. \qquad (5)$$

Los segundos miembros de las igualdades (4) y (5) son iguales y, por consiguiente, serán iguales también los primeros

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

2. De modo análogo se demuestra la fórmula:

$$e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}. \qquad (6)$$

3. Si m es un número entero, tenemos:

$$(e^{z})^{m} = e^{mz}. \qquad (7)$$

Esta fórmula se obtiene fácilmente de (3), cuando $m > 0$.

La misma se obtiene a partir de las fórmulas (3) y (6) si $m < 0$.

4. Demostremos la identidad:

$$e^{z+2\pi i} = e^z. \tag{8}$$

En efecto, según las fórmulas (3) y (1) tenemos:

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = e^z.$$

De la identidad (8) se deduce que la función exponencial e es una función periódica con período $2\pi i$.

5. Estudiemos ahora la magnitud compleja

$$w = u(x) + iv(x),$$

donde $u(x)$ y $v(x)$ son funciones reales de la variable real x. Es una *función compleja de la variable real.*

a) Supongamos que existen los límites:

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = u(x_0); \qquad \lim_{x \to x_0} v(x) = v(x_0).$$

Entonces, $u(x_0) + iv(x_0) = w_0$ es el límite de la variable compleja w.

b) Si existen las derivadas $u'(x)$ y $v'(x)$, la expresión

$$w'_x = u'(x) + iv'(x) \tag{9}$$

es la *derivada* de una función compleja de variable real con respecto al argumento real.

Estudiemos ahora la siguiente función exponencial:

$$w = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{(\alpha + i\beta) x},$$

donde α y β son números constantes reales, y x es una variable real. Es una función compleja de variable real que, conforme a la fórmula (1), puede escribirse así:

$$w = e^{\alpha x}[\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x]$$

ó

$$w = e^{\alpha x} \cos \beta x + ie^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x.$$

Hallemos la derivada w'_x. Según la fórmula (9) tenemos:

$$\begin{aligned} w'_x &= (e^{\alpha x} \cos \beta x)' + i(e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x)' = \\ &= e^{\alpha x}(\alpha \cos \beta x - \beta \operatorname{sen} \beta x) + ie^{\alpha x}(\alpha \operatorname{sen} \beta x + \beta \cos \beta x) = \\ &= \alpha [e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x)] + i\beta [e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x)] = \\ &= (\alpha + i\beta)[e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x)] = (\alpha + i\beta) e^{(\alpha + i\beta) x}. \end{aligned}$$

Así pues, si $w = e^{(\alpha + i\beta)x}$, entonces: $w' = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x}$

ó

$$[e^{(\alpha + i\beta) x}]' = (\alpha + i\beta) e^{(\alpha + i\beta) x}. \tag{10}$$

De tal modo, si k es un número complejo (y, en particular, real) y x es un número real:

$$(e^{kx})' = ke^{kx}. \tag{9'}$$

Hemos obtenido la fórmula general para la derivación de una función exponencial. También tenemos:

$$(e^{kx})'' = [(e^{kx})']' = k(e^{kx})' = k^2 e^{kx}$$

y para n arbitrario:

$$(e^{kx})^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

Utilizaremos estas fórmulas más adelante.

§ 5. FORMULA DE EULER. FORMA EXPONENCIAL DEL NUMERO COMPLEJO

Si hacemos $x = 0$ en la fórmula (1) del párrafo anterior, obtenemos:

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y. \tag{1}$$

Esta es la *fórmula de Euler* y expresa la relación entre la función exponencial con exponente imaginario y las funciones trigonométricas.

Sustituyendo y por $-y$ en la fórmula (1), obtenemos:

$$e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y. \tag{2}$$

De las igualdades (1) y (2) hallemos $\cos y$ y $\operatorname{sen} y$:

$$\left.\begin{aligned} \cos y &= \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \\ \operatorname{sen} y &= \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Las fórmulas (3) se usan, en particular, para expresar las potencias de $\cos \varphi$ y de $\operatorname{sen} \varphi$, así como también de sus productos, en función del seno y del coseno de arcos múltiples.

Ejemplos:

1. $$\cos^2 y = \left(\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{i2y} + 2 + e^{-i2y}) =$$
$$= \frac{1}{4}[(\cos 2y + i \operatorname{sen} 2y) + 2 + (\cos 2y - i \operatorname{sen} 2y)] =$$
$$= \frac{1}{4}(2\cos 2y + 2) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2y).$$

$$2.\ \cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\varphi=\left(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\right)^2=$$
$$=\frac{(e^{i2\varphi}-e^{-i2\varphi})^2}{4\cdot 4i^2}=-\frac{1}{8}\cos 4\varphi+\frac{1}{8}.$$

Forma exponencial del número complejo. Escribamos un número complejo z en forma trigonométrica:

$$z=r(\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi),$$

donde, r es el módulo y φ, el argumento de este número complejo.
Según la fórmula de Euler:

$$\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi=e^{i\varphi}.$$

Por consiguiente, todo número complejo puede ser representado en la forma exponencial:

$$z=re^{i\varphi}.$$

Ejemplos. Escribir los números 1, i, -2, $-i$ en la forma exponencial.
Solución.

$$1=\cos 2k\pi+i\,\mathrm{sen}\,2k\pi=e^{2k\pi i},$$
$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}=e^{\frac{\pi}{2}i},$$
$$-2=2(\cos\pi+i\,\mathrm{sen}\,\pi)=2e^{\pi i},$$
$$-i=\cos\frac{\pi}{2}-i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}=e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

§ 6. DESARROLLO DEL POLINOMIO EN FACTORES

Sabemos que la función

$$f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n,$$

en la que n es un número entero se llama *polinomio* o *función racional entera de x*. El número n es el *grado del polinomio*. Los coeficientes A_0, A_1 ... A_n son aquí números reales o complejos. La variable independiente x puede tomar tanto valores reales como complejos. El valor de la variable x para el cual el polinomio se reduce a cero es la *raíz* del polinomio.

Teorema 1. **(Teorema de Bezout).** *El resto de la división del polinomio $f(x)$ por la diferencia $(x-a)$ es igual a $f(a)$.*

Demostración. El cociente de la división del polinomio $f(x)$ por $(x-a)$ es un polinomio $f_1(x)$, de grado inferior en una unidad que él del polinomio $f(x)$, el resto es un número constante R. Entonces podemos escribir:

$$f(x) = (x - a)\ f_1(x) + R. \tag{1}$$

Esta igualdad es válida para todos los valores de x distintos de a (la división por $x - a$ cuando $x = a$ no tiene sentido).

Si x tiende a a, el límite del primer miembro de la igualdad (1) es $f(a)$ y el límite del segundo miembro, es R. Como las funciones $f(x)$ y $(x - a)\ f_1(x) + R$ son iguales para todos los valores de $x \neq a$, sus límites serán también iguales, cuando $x \to a$, es decir, $f(a) = R$.

Colorario. *Si a es una raíz del polinomio, es decir,* $f(a) = 0$, *entonces* $f(x)$ *se divide por* $x - a$ *sin resto alguno* y, por tanto, se representa como un producto:

$$f(x) = (x - a)\ f_1(x),$$

donde $f_1(x)$ es un polinomio.

Ejemplo 1. El polinomio $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ se anula cuando $x = 1$, es decir, $f(1) = 0$. Por eso el polinomio dado se divide sin resto por $x - 1$:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6).$$

Estudiemos ahora las ecuaciones con una incógnita x.

Todo número (real o complejo) que sustituya a x en la ecuación y la convierta en identidad, se llama *raíz* de la ecuación.

Ejemplo 2. Los números $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{5\pi}{4}$; $x_3 = \frac{9\pi}{4}$; ..., son raíces de la ecuación $\cos x = \operatorname{sen} x$.

Si una ecuación tiene la forma $P(x) = 0$, donde $P(x)$ es polinomio de grado n, se llama ecuación *algebraica* de n—ésimo grado. De la definición se deduce que las raíces de la ecuación algebraica $P(x) = 0$ son idénticas a las del polinomio $P(x)$.

Naturalmente, surge la pregunta, si toda ecuación tiene raíces. Para las ecuaciones no algebraicas la respuesta es negativa: existen ecuaciones no algebraicas que no tienen raíces (reales, ni complejas), como, por ejemplo, la ecuación $e^x = 0$*).

Sin embargo, para las ecuaciones algebraicas la respuesta es positiva, lo que constituye el contenido del siguiente teorema fundamental del álgebra.

---

*) En efecto, si el número $x_1 = a + bi$ fuera la raíz de esta ecuación, existiría la identidad $e^{a+bi} = 0$, o (en virtud de la fórmula de Euler) $e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b) = 0$. Pero, e^a no puede anularse cualquiera que sea el número real a; tampoco $\cos b = i \operatorname{sen} b$ es igual a cero (puesto que el módulo de este número es igual a $\sqrt{\cos^2 b + \operatorname{sen}^2 b} = 1$ para cualquier b). Por tanto, el producto $e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b) \neq 0$, es decir, $e^{a+bi} \neq 0$, lo que significa que la ecuación $e^x = 0$ no tiene raíces.

Teorema 2. (***Teorema fundamental del álgebra***). *Toda función racional entera $f(x)$ tiene por lo menos una raíz real o compleja.*

Este teorema se demuestra en el curso de álgebra superior. Aquí lo admitiremos sin demostración.

Utilizando el teorema fundamental del álgebra es fácil demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3. *Todo polinomio de n—ésimo grado puede ser desarrollado en n factores lineales de la forma $x-a$ y un factor igual al coeficiente de x^n.*

Demostración. Sea $f(x)$ un polinomio de grado n:

$$f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n.$$

En virtud del teorema fundamental este polinomio tiene por lo menos una raíz; designémosla por a_1. Ahora bien, según el corolario del teorema de Bezout podemos escribir:

$$f(x)=(x-a_1)\,f_1(x),$$

donde, $f_1(x)$ es el polinomio de grado $(n-1)$; $f_1(x)$ también tiene una raíz que designemos por a_2. Entonces,

$$f_1(x)=(x-a_2)\,f_2(x),$$

donde, $f_2(x)$ es el polinomio de grado $(n-2)$. De igual manera:

$$f_2(x)=(x-a_3)\,f_3(x).$$

Continuando este proceso, llegamos a la expresión:

$$f_{n-1}(x)=(x-a_n)\,f_n,$$

donde f_n es un polinomio de grado cero, es decir, f_n es un número fijo. Evidentemente, este número es igual al coeficiente de x^n, es decir, $f_n=A_0$.

En virtud de las igualdades obtenidas podemos escribir:

$$f(x)=A_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n). \tag{2}$$

Del desarrollo (2) se deduce que los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son las raíces del polinomio $f(x)$, puesto que, realizada la sustitución $x=a_1$, $x=a_2$, $\ldots$, $x=a_n$, el segundo miembro y, por consiguiente, el primero se reducen a cero.

Ejemplo 3. El polinomio $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ se reduce a cero, cuando

$$x=1,\ x=2,\ x=3.$$

Por consiguiente,

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3).$$

Ningún valor $x=a$ distinto de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ puede ser raíz del polinomio $f(x)$, puesto que ningún factor del segundo miembro de la igualdad (2) se anula cuando $x = a$. Ahora podemos expresar el siguiente enunciado:

Todo polinomio de grado n no puede tener más que n raíces diferentes.

Pero, en este caso, obtenemos el teorema siguiente.

Teorema 4. *Si los valores de dos polinomios* $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ *de grado* n *coinciden para* $n+1$ *valores diferentes* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ *del argumento* x, *los polinomios enunciados son idénticos.*

Demostración. Designemos por $f(x)$ la diferencia de estos polinomios:

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

Según la hipótesis, $f(x)$ es un polinomio de grado no superior a n, que se reduce a cero en los puntos $a_1, \ldots, a_n$. Por tanto, éste puede ser representado en la forma:

$$f(x) = A_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n).$$

Pero, según la hipótesis, $f(x)$ se anula también en el punto a_0. Entonces, $f(a_0) = 0$, siendo distintos de cero todos los factores lineales. Por eso, $A_0 = 0$, y de la igualdad (2) se deduce que el polinomio $f(x)$ es idénticamente igual a cero. Por consiguiente, $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) \equiv 0$, ó $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$.

Teorema 5. *Si el polinomio*

$$P(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

es idénticamente igual a cero, todos sus coeficientes son iguales a cero.

Demostración. Escribamos el desarrollo de este polinomio en factores según la fórmula (2):

$$P(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = \\ = A_0(x-a_1)\ldots(x-a_n). \quad (1')$$

Si este polinomio es idénticamente igual a cero, también será igual a cero para un valor de x, distinto de $a_1, \ldots, a_n$. Pero, en este caso, los factores $x-a_1, \ldots, x-a_n$ no se anulan y, por tanto, $A_0 = 0$.

De igual manera se demuestra que $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, etc.

Teorema 6. *Los coeficientes correspondientes de dos polinomios idénticamente iguales son iguales.*

Esto se deduce del hecho de que la diferencia entre los polinomios dados es un polinomio idénticamente igual a cero. Por tanto, en virtud del teorema anterior, todos sus coeficientes son ceros.

Ejemplo 4. Si el polinomio $ax^3 + bx^2 + cx + d$ es idénticamente igual al polinomio $x^2 - 5x$, entonces: $a = 0$, $b = 1$, $c = -5$, $d = 0$.

§ 7. RAICES MULTIPLES DEL POLINOMIO

Si ciertos factores lineales del desarrollo de un polinomio de grado n

$$f(x) = A_0 (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) \tag{1}$$

son iguales, se puede agruparlos y luego, factorizar el polinomio de la manera siguiente:

$$f(x) = A_0 (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_m)^{k_m}. \tag{1'}$$

Donde

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n.$$

En este caso se dice que a_1 es una *raíz múltiple* de orden k_1, (k_1, es la multiplicidad de la raíz); a_2 es una raíz múltiple de orden k_2, etc.

Ejemplo. El polinomio $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ se desarrolla en los suguientes factores lineales:

$$f(x) = (x-2)(x-2)(x-1).$$

Este desarrollo puede escribirse así:

$$f(x) = (x-2)^2 (x-1),$$

$a_1 = 2$ es una raíz doble; $a_2 = 1$, una raíz simple.

Si el polinomio tiene una raíz múltiple a de orden k, consideremos que el polinomio tiene k raíces iguales. Entonces, del teorema del desarrollo de un polinomio en factores lineales se deduce el teorema siguiente.

Todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces (reales o complejas).

Observación. Todo lo que se ha dicho acerca de las raíces del polinomio

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$$

es igualmente cierto para las raíces de una ecuación algebraica:

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n = 0.$$

Demostremos a continuación, el teorema siguiente:

Teorema. *Si a_1 es una raíz múltiple de orden $k_1 > 1$ para el polinomio $f(x)$, entonces a_1 será una raíz múltiple de orden $k - 1$ para la derivada $f'(x)$.*

Demostración. Si a_1 es una raíz múltiple de orden k_1 donde $k_1 > 1$ de la fórmula (1') se deduce:

$$f(x) = (x - a_1)^{k_1} \varphi(x),$$

donde $\varphi(x) = (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_m)^{k_m}$ no se anula para $x = a_1$, es decir, $\varphi(a_1) \neq 0$. Derivando, tenemos:

$$f'(x) = k_1 (x - a_1)^{k_1 - 1} \varphi(x) + (x - a_1)^{k_1} \varphi'(x) =$$
$$= (x - a_1)^{k_1 - 1} [k_1 \varphi(x) + (x - a_1) \varphi'(x)].$$

Designemos:

$$\psi(x) = k_1 \varphi(x) + (x - a_1) \varphi'(x).$$

Entonces,

$$f'(x) = (x - a_1)^{k_1 - 1} \psi(x),$$

donde:

$$\psi(a_1) = k_1 \varphi(a_1) + (a_1 - a_1)\varphi'(a_1) = k_1 \varphi(a_1) \neq 0,$$

es decir, $x = a_1$ es la raíz múltiple de orden $k_1 - 1$ del polinomio $f'(x)$. De la demostración se deduce que si $k_1 = 1$, a_1 no es una raíz de la derivada $f'(x)$.

Del teorema demostrado se deduce que a_1 es una raíz múltiple de orden $k_1 - 2$, para la derivada $f''(x)$, una raíz de orden $k_1 - 3$, para la derivada $f'''(x)$ . . ., una raíz de orden 1 (raíz simple), para la derivada $f^{(k_1-1)}(x)$; y no es una raíz para la derivada $f^{(k_1)}(x)$, es decir,

$$f(a_1) = 0, \quad f'(a_1) = 0, \quad f''(a_1) = 0, \ \dots, \ f^{(k_1-1)}(a_1) = 0,$$

pero

$$f^{(k)}(a_1) \neq 0.$$

§ 8. FACTORIZACION DE UN POLINOMIO CON RAICES COMPLEJAS

Las raíces $a_1, a_2, \dots, a_n$ de la fórmula (1), § 7, cap. VII pueden ser tanto reales como complejas. Tiene lugar el teorema siguiente.

Teorema. *Si un polinomio $f(x)$ con coeficientes reales tiene la raíz compleja $a + bi$, este polinomio tiene también una raíz conjugada $a - bi$.*

Demostración. Si en el polinomio $f(x)$ sustituimos x por el número $a + bi$, elevamos a unas potencias y agrupamos por separado los términos que contienen y no contienen i, obtenemos:

$$f(a + bi) = M + Ni,$$

donde M y N son las expresiones que no contienen i.

Puesto que $a + bi$ es la raíz del polinomio, tenemos:

$$f(a + bi) = M + Ni = 0$$

de donde:

$$M = 0, \ N = 0$$

Sustituimos ahora x en el polinomio por la expresión $a - bi$. Entonces (según la observación 3, § 2), obtenemos un número conjugado con $M + Ni$, es decir,

$$f(a - bi) = M - Ni.$$

Como $M = 0$, y $N = 0$, se tiene: $f(a - bi) = 0$, es decir, $a - bi$ es una raíz del polinomio.

Por consiguiente, en la factorización

$$f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)$$

las raíces complejas se encuentran en *pares conjugados*.

Al multiplicar entre sí los factores lineales que corresponden al par de raíces complejas conjugadas, obtenemos un trinomio de segundo grado con coeficientes reales:

$$[x - (a + bi)][x - (a - bi)] = [(x - a) - bi][(x - a) + bi] =$$
$$= (x - a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q,$$

donde $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$ son los números reales.

Si el número $a + bi$ es una raíz múltiple de orden k, el número conjugado $a - bi$ es también una raíz múltiple de orden k, de modo que, en la factorización de un polinomio entran tantos factores lineales $x - (a + bi)$ cuantos sean los factores lineales $x - (a - bi)$. Así, *todo polinomio con coeficientes reales se desarrolla en factores con coeficientes reales de primero y segundo grado de multiplicidad correspondiente, es decir,*

$$f(x) = A_0(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2}\dots$$
$$\dots(x - a_r)^{k_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}\dots(x^2 + p_sx + q_s)^{l_s},$$

donde

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2l_1 + \dots + 2l_s = n.$$

§ 9. INTERPOLACION. FORMULA DE LA INTERPOLACION DE LAGRANGE

Supongamos que al estudiar cierto fenómeno, fue demostrada la existencia de una dependencia funcional entre las magnitudes x e y, que caracteriza el aspecto cuantitativo de este fenómeno. La función $y = \varphi(x)$ es desconocida, sin embargo, mediante una serie de experiencias determinemos los valores de esta función: y_0, y_1, y_2, ..., y_n para ciertos valores del argumento x_0, x_1, x_2, ..., x_n, pertenecientes al segmento $[a, b]$.

El problema consiste en hallar la función más simple, para facilitar los cálculos (un polinomio, por ejemplo) que sea la expresión exacta o aproximada de la función desconocida $y = \varphi(x)$ en el segmento $[a, b]$. En forma más abstracta el problema puede ser formulado de modo siguiente: los valores de una función desconocida $y = \varphi(x)$ se dan en $n+1$ puntos diferentes: $x_0, x_1, \ldots, x_n$ del segmento $[a, b]$:

$$y_0 = \varphi(x_0),\ y_1 = \varphi(x_1),\ \ldots,\ y_n = \varphi(x_n);$$

es preciso hallar un *polinomio* $P(x)$ del grado inferior o igual a n que exprese aproximadamente la función $\varphi(x)$.

Para esto elijamos un polinomio cuyos valores en los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ *coincidan* con los correspondientes valores de $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la función $\varphi(x)$ (fig. 164). En este caso,

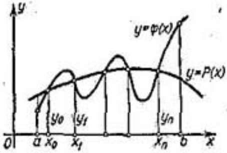

Fig. 164

el problema planteado, que se llama «problema *de interpolación* de la función», se puede formular de modo siguiente: hallar para una función dada $\varphi(x)$ un polinomio $P(x)$ de grado $\leqslant n$, que tome en los puntos dados $x_0, x_1, \ldots, x_n$ los valores

$$y_0 = \varphi(x_0),\ y_1 = \varphi(x_1),\ \ldots,\ y_n = \varphi(x_n).$$

Tomemos para esto un polinomio de n-ésimo grado y de la forma:

$$\begin{aligned} P(x) = {} & C_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) + \\ & + C_1(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n) + \\ & + C_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n) + \ldots \\ & \ldots + C_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}). \end{aligned} \tag{1}$$

Determinemos los coeficientes $C_0, C_1, \ldots, C_n$ de tal manera que se cumplan las condiciones:

$$P(x_0) = y_0,\ P(x_1) = y_1,\ \ldots,\ P(x_n) = y_n. \tag{2}$$

Hagamos $x = x_0$ en la fórmula (1); entonces, teniendo en cuenta las igualdades (2), obtenemos:

$$y_0 = C_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)$$

de donde

$$C_0 = \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}.$$

Haciendo, luego, $x = x_1$, obtenemos:

$$y_1 = C_1 (x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n)$$

de donde

$$C_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n)}.$$

De igual manera encontramos

$$C_2 = \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \ldots (x_2 - x_n)};$$

. . . .

$$C_n = \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \ldots (x_n - x_{n-1})}.$$

Poniendo los valores determinados de los coeficientes en la fórmula (1), obtenemos:

$$P(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_n)} y_0 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n)} y_1 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \ldots (x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \ldots (x_2 - x_n)} y_2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1})} y_n. \qquad (3)$$

La fórmula enunciada se llama *fórmula de interpolación de Lagrange.*

Admitamos sin demostración que si $\varphi(x)$ tiene una derivada de $(n + 1)$ — ésimo orden en el segmento $[a, b]$, el error cometido, al reemplazar la función $\varphi(x)$ por el polinomio $P(x)$, (es decir, la magnitud $R(x) = \varphi(x) - P(x)$ satisface a la desigualdad:

$$|R(x)| < |(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)| \frac{1}{(n + 1)!} \text{máx} |\varphi^{(n+1)}(x)|.$$

Observación. Del teorema 4, § 6, se deduce que el polinomio $P(x)$ es el único que satisface a las condiciones del problema planteado.

Ejemplo. Como resultado de un experimento hemos obtenido los valores de la función $y = \varphi(x)$: $y_0 = 3$ para $x_0 = 1$; $y_1 = -5$ para $x_1 = 2$; $y_2 = 4$ para $x_2 = -4$. Hallar la expresión aproximada de la función $y = \varphi(x)$ por medio del polinomio de segundo grado.

Solución. Según la fórmula (3) tenemos (para $n = 2$):

$$P(x) = \frac{(x-2)(x+4)}{(1-2)(1+4)}\,3 + \frac{(x-1)(x+4)}{(2-1)(2+4)}(-5) + \frac{(x-1)(x-2)}{(-4-1)(-4-2)}\,4,$$

o sea

$$P(x) = -\frac{39}{30}x^2 - \frac{123}{30}x + \frac{252}{30}.$$

§ 10. FORMULA DE LA INTERPOLACION DE NEWTON

Sean conocidos $n+1$ valores de la función $\varphi(x)$: $y_0, y_1, \ldots, y_n$, que corresponden a $n+1$ valores del argumento: $x_0, x_1, \ldots, x_n$, siendo constante la diferencia entre los valores contiguos del argumento. Designemos por h esta diferencia. La tabla de valores de la función desconocida $y = \varphi(x)$ para los valores correspondientes del argumento tendrá la forma siguiente.

x	x_0	$x_1 = x_0 + h$	$x_2 = x_0 + 2h$	$x_n = x_0 + nh$
y	y_0	y_1	y_2	y_n

Formemos un polinomio de grado no superior a n, que tomará valores correspondientes a los de x. Este polinomio representará aproximadamente la función $\varphi(x)$.

Introduzcamos las designaciones:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0;\quad \Delta y_1 = y_2 - y_1;\quad \Delta y_2 = y_3 - y_2, \text{ etc.}$$
$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0),$$
$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (y_3 - 2y_2 + y_1) - (y_2 - 2y_1 + y_0),$$
$$\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0.$$

Estas son las llamadas diferencias de primero, segundo y n-ésimo orden. Escribamos un polinomio que toma los valores

$$y_0, y_1 \text{ para } x_0 \text{ y } x_1.$$

Será un polinomio de primer grado

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h}. \tag{1}$$

En efecto,

$$P_1(x)|_{x=x_0}=y_0,\quad P_1|_{x=x_1}=y_0+\Delta y_0\frac{h}{h}=y_0+(y_1-y_0)=y_1.$$

Escribamos un polinomio que toma los valores

$$y_0,\ y_1,\ y_2 \text{ para } x_0,\ x_1,\ x_2.$$

Será un polinomio de segundo grado:

$$P_2(x)=y_0+\Delta y_0\frac{x-x_0}{h}+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}\cdot\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right). \qquad (2)$$

Es evidente que

$$P_2\,|_{x=x_0}=y_0,\ P_2\,|_{x=x_1}=y_1.$$

Comprobemos ahora:

$$P_2|_{x=x_2}=y_0+\Delta y_0\cdot 2+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}\cdot\frac{2h}{h}\left(\frac{2h}{h}-1\right)=y_2.$$

El polinomio de tercer orden tendrá la forma:

$$P_3(x)=y_0+\Delta y_0\frac{x-x_0}{h}+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)+\frac{\Delta^3 y_0}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{x-x_0}{h}\times$$
$$\times\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right).$$

El polinomio del orden n que asume los valores $y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ para $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, será:

$$P_n(x)=y_0+\Delta y_0\frac{x-x_0}{h}+\frac{\Delta^2 y_0}{1\cdot 2}\cdot\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)+\ \ldots$$
$$\ldots+\frac{\Delta^n y_0}{h}\cdot\frac{x-x_0}{h}\cdot\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ \ldots\ \left[\frac{x-x_0}{h}-(h-1)\right]. \qquad (4)$$

Mediante una sustitución directa es fácil convencerse de que la igualdad obtenida es correcta. Esta es la fórmula o el polinomio de la interpolación de Newton.

En esencia, el polinomio de Lagrange y el de Newton para la tabla dada de valores, son idénticos aunque escritos de modo diferente. Es decir, el polinomio de grado no superior a h, que tom a $n+1$ valores dados para $n+1$ valores de x, se halla de una sol a manera.

En muchos casos resulta más conveniente utilizar el polinomio de la interpolación de Newton que el de Lagrange. Su particularidad consiste en que, al pasar del polinomio de grado k al polinomio de grado $k+1$, los primeros $k+1$ términos no cambian, sino que se adiciona un término nuevo que es igual a cero, para todos los valores anteriores del argumento.

Observación. Según las fórmulas de Lagrange (véase la fórmula 3 § 10) y de Newton (fórmula 4) se determinan los valores de una función en el segmento $x_0 < x < x_n$. Si estas fórmulas se usan para determinar el valor de la función, cuando $x < x_0$ (lo que se puede hacer cuando $|x - x_0|$ es pequeño), se dice que se efectúa la extrapolación de la tabla hacia atrás. Si se determina el valor de la función para $x_0 < x$, se dice que se efectúa la extrapolación de la tabla hacia adelante.

§ 11. DERIVACION NUMERICA

Supongamos que los valores de una función desconocida $\Phi(x)$ están dados por medio de la tabla que fue examinada anteriormente. Es preciso determinar aproximadamente la derivada de esta función. Con este fin se forma el polinomio de interpolación de Lagrange o de Newton y de este último se halla la derivada.

Puesto que más a menudo se analizan las tablas de iguales diferencias entre los valores vecinos del argumento, utilicemos la fórmula de interpolación de Newton. Sean dados tres valores de la función: y_0, y_1, y_2, que corresponden a los valores: x_0, x_1, x_2 del argumento. Entonces, escribamos el polinomio (2) y derivémoslo. Obtenemos el valor aproximado de la derivada de la función en el segmento $x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$

$$\varphi^1(x) \approx P_2'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h}\left(2\frac{x - x_0}{h} - 1\right). \tag{5}$$

Cuando $x = x_0$, tenemos:

$$\varphi'(x_0) \approx P_2'(x_0) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h}. \tag{6}$$

Examinemos el polinomio de tercer orden (véase (3)), y derivándolo, obtenemos la siguiente expresión para su derivada:

$$\varphi'(x) \approx P_3'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h}\left(2\frac{x - x_0}{h} - 1\right) +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{2\cdot 3h}\left[3\left(\frac{x - x_0}{h}\right)^2 - 6\left(\frac{x - x_0}{h}\right) + 2\right]. \tag{7}$$

En particular, cuando $x = x_0$, tenemos:

$$\varphi'(x_0) \approx P_3'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \frac{\Delta^3 y_0}{3h}. \qquad (8)$$

Al utilizar la fórmula (4), cuando $x = x_0$, obtenemos la siguiente forma para la expresión aproximada de la derivada:

$$\varphi'(x_0) \approx P_n'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \frac{\Delta^3 y_0}{3h} - \frac{\Delta^4 y_0}{4h} + \ldots \qquad (9)$$

Notemos que para una función que tiene derivadas, la diferencia Δy_0 es una infinitesimal de primer orden respecto a h; $\Delta^2 y_0$, infinitesimal de segundo orden; $\Delta^3 y_0$, de tercer orden, etc.

§ 12. OPTIMA APROXIMACION DE LAS FUNCIONES POR MEDIO DE POLINOMIOS. TEORIA DE CHEBISHEV

Del problema examinado en el § 9, se deduce, naturalmente, lo siguiente: sea una función continua $\varphi(x)$ en el segmento $[a, b]$. ¿Se puede expresarla aproximadamente en forma de un polinomio $P(x)$ con cualquier grado de precisión previamente dado? Es decir, ¿será posible encontrar un polinomio $P(x)$ tal que la diferencia en valor absoluto, entre $\varphi(x)$ y $P(x)$, sea inferior en todos los puntos del segmento $[a, b]$, que cualquier número positivo ε previamente dado? El teorema que sigue y que citamos aquí sin demostración, nos da una respuesta afirmativa*.

Teorema de Weierstrass. *Si la función $\varphi(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un polinomio $P(x)$, que en cada punto de este segmento se cumpla la igualdad:*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

S. N. Bernstein, notable matemático y académico soviético, nos ha proporcionado el siguiente método racional para la formación directa de polinomios aproximadamente iguales a la función continua $\varphi(x)$ en el segmento dado.

Supongamos, por ejemplo, que la función $\varphi(x)$ es continua en el segmento $[0, 1]$.

---

*) Notemos que el polinomio de la interpolación de Lagrange (véase (3) § 9) no da la respuesta a la cuestión planteada. En los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ los valores de este polinomio en realidad son iguales a los valores correspondientes de la función, pero en otros puntos del segmento $[a, b]$ estos valores pueden diferenciarse notablemente.

Formemos la expresión:

$$B_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\varphi\left(\frac{m}{n}\right)C_n^m x^m(1-x)^{n-m}.$$

En esta expresión C_n^m son coeficientes binomiales; $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$ es el valor de la función dada en el punto $x=\frac{m}{n}$. La expresión $B_n(x)$ es un polinomio de n-ésimo grado, llamado *de Bernstein*.

Para todo número arbitrario $\varepsilon>0$ positivo, se puede buscar un polinomio de Bernstein tal (es decir, elegir su grado n) de manera que para todos los valores de x en el segmento $[0, 1]$ se cumpla la desigualdad:

$$|B_n(x)-\varphi(x)|<\varepsilon.$$

Observemos que el análisis del segmento $[0, 1]$ en lugar del segmento arbitrario $[a, b]$ no limita esencialmente las leyes generales puesto que mediante el cambio de variable: $x=a+t(b-a)$, se puede transformar cualquier segmento $[a, b]$, en el segmento $[0, 1]$. Esta transformación conserva el grado del polinomio.

La teoría sobre la óptima aproximación de las funciones mediante polinomios fue desarrollada por el célebre matemático ruso P. L. Chébishev (1821-1894).

Los valiosos resultados que obtuvo en este campo, han influenciado decisivamente en los trabajos de matemáticos posteriores. El punto de partida en la creación de esta teoría fue su trabajo en la teoría de los mecanismos articulados que son de amplio uso en la maquinaria. El estudio de tales mecanismos le condujo a la búsqueda entre todos los polinomios de un grado n dado, cuyo coeficiente de término mayor es igual a la unidad, de un polinomio tal que se desvíe de cero, en el segmento dado, mucho menor que todos los demás polinomios. Este gran matemático logró a resolver el problema y los polinomios hallados por él fueron llamados *polinomios de Chébishev*. Estos poseen muchas propiedades notables y son actualmente un potente medio de investigaciones en numerosos problemas matemáticos y técnicos.

Ejercicios para el capítulo VII

1. Hallar $(3+5i)(4-i)$. *Respuesta*: $17+17i$. 2. Hallar $(6+11i)(7+3i)$. *Respuesta:* $9+95i$. 3. Hallar $\frac{3-i}{4+5i}$. *Respuesta:* $\frac{7}{41}-\frac{19}{41}i$. 4. Hallar $(4-7i)^3$. *Respuesta:* $-524+7i$. 5. Hallar $\sqrt{i}$. *Respuesta:* $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. 6. Ha-

llar $\sqrt{-5-12i}$. *Respuesta:* $\pm(2-3i)$. 7. Reducir a la forma trigonométrica las expresiones: a) $1+i$. *Respuesta:* $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$. b) $1-i$. *Respuesta:* $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$. 8. Hallar $\sqrt[3]{i}$. *Respuesta:* $\frac{i+\sqrt{3}}{2}$; $-i$; $\frac{i-\sqrt{3}}{2}$. 9. Expresar en función de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ las siguientes expresiones: $\operatorname{sen} 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{sen} 4x$, $\cos 4x$, $\operatorname{sen} 5x$, $\cos 5x$. 10. Expesar en función del seno y coseno de los arcos múltiples las expresiones: $\cos^2 x$, $\cos^3 x$, $\cos^4 x$, $\cos^5 x$, $\cos^6 x$; $\operatorname{sen}^2 x$, $\operatorname{sen}^3 x$, $\operatorname{sen}^4 x$, $\operatorname{sen}^5 x$. 11. Dividir $f(x)=x^3-4x^2+8x-1$ por $x+4$. *Respuesta:* $f(x)=(x+4)(x^2-8x+40)-161$, es decir, cociente $=x^2-8x+40$; el resto $f(-4)=-161$. 12. Dividir $f(x)=x^4+12x^3+54x^2+108x+81$ por $x+3$. *Respuesta:* $f(x)=(x+3)(x^3+9x^2+27x+27)$. 13. Dividir $f(x)=x^7-1$ por $x-1$. *Respuesta:* $f(x)=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$.

Factorizar los polinomios: 14. $f(x)=x^4-1$. *Respuesta:* $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$. 15. $f(x)=x^2-x-2$. *Respuesta:* $f(x)=(x-2)(x+1)$. 16. $f(x)=x^3+1$. *Respuesta:* $f(x)=(x+1)(x^2-x+1)$.

17. Como resultado de un experimento se han obtenido los valores de la función y de x:

$$y_1=4 \text{ para } x_1=0,$$
$$y_2=6 \text{ para } x_2=1,$$
$$y_3=10 \text{ para } x_3=2.$$

Expresar de modo aproximado esta función mediante un polinomio de segundo grado. *Respuesta:* x^2+x+4.

18. Hallar el polinomio de cuarto grado que toma respectivamente los valores 2, 1,—1, 5, 0, para $x = 1, 2, 3, 4, 5$. *Respuesta:*

$$\frac{3}{2}x^4-17x^3+\frac{129}{2}x^2-92x+35.$$

19. Hallar el polinomio de grado posiblemente inferior que toma respectivamente los valores 3, 7, 9, 19 para $x = 2, 4, 5, 10$. *Respuesta:* $2x-1$.

20. Hallar los polinomios de Bernstein de primero, segundo, tercero, cuarto grados para la función $y=\operatorname{sen}\pi x$ en el segmento $[0,1]$. *Respuesta:* $B_1(x)=0$; $B_2(x)=2x(1-x)$; $B_3(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}x(1-x)$; $B_4(x)=2x(1-x)\times[(2\sqrt{2}-3)x^2-(2\sqrt{2}-3)x+\sqrt{2}]$.