CAPITULO VIII

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

§ 1. DEFINICION DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Examinando las funciones de una sola variable, ya hemos indicado que el estudio de diferentes fenómenos obliga a utilizar las funciones de dos y más variables independientes. Demos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. El área S de un rectángulo de lados x e y, se da por la fórmula:

$$S = xy.$$

A cada par de valores de x e y, corresponde un valor determinado del área S; S es una función de dos variables.

Ejemplo 2. El volumen V de un paralelepípedo recto, en que las aristas tienen longitudes iguales a x, y, z, se da por la fórmula:

$$V = xyz.$$

Aquí, V es una función de tres variables: x, y, z.

Ejemplo 3. El alcance R de un proyectil lanzado a la velocidad inicial v_0, bajo el ángulo φ respecto al horizonte, se expresa por la fórmula:

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g}$$

(despreciando la resistencia del aire). El símbolo g en la fórmula representa la aceleración debida a la fuerza de gravedad. Para cada par de valores v_0 y φ la fórmula da un determinado valor de R, es decir, R es una función de dos variables, v_0 y φ.

Ejemplo 4.

$$u = \frac{x^2 + y^2 + t^2}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Aquí, u es una función de cuatro variables x, y, z, t.

Definición 1. Si a cada par (x, y) de valores de dos variables, x e y, independientes una de otra, tomadas de cierto campo D de su variación, le corresponde un valor determinado de la magnitud z, se dice que z es una *función de dos variables independientes x e y*, definida en el campo D.

En forma simbólica una función de dos variables se representa así:

$$z = f(x, y), \ z = F(x, y), \ \text{etc.}$$

Una función de dos variables puede expresarse por medio de una tabla o analíticamente mediante una fórmula (como se ha hecho en los cuatro ejemplos examinados). La fórmula permite formar la tabla de los valores que toma la función para cada par de valores de las variables independientes. Para el ejemplo 1 se puede formar la siguiente tabla:

$$S = xy$$

y \ x	0	1	1,5	2	3
1	0	1	1,5	2	3
2	0	2	3	4	6
3	0	3	4,5	6	9
4	0	4	6	8	12

En la tabla el valor de la función S se encuentra en la intersección de los renglones y columnas correspondientes a los valores buscados de x e y.

Si la dependencia funcional $z = f(x, y)$ resulta de las mediciones de la magnitud z durante el estudio experimental de un fenómeno, obtenemos la tabla en que z se determina como función de dos variables. En este caso, la función se da sólo mediante la tabla.

La función de dos variables igual que la función de una sola variable puede no estar definida para todos los valores arbitrarios de x e y.

Definición 2. El conjunto de los pares (x, y) de los valores de x e y, para los cuales está definida la función $z = f(x, y)$, se llama *dominio de definición* o *dominio de existencia* de la función.

El dominio de existencia de una función puede ser interpretado geométricamente. Si cada par de valores, x e y, lo representamos mediante un punto $M(x, y)$ en el plano Oxy, el dominio de definición de la función será representado por el conjunto de puntos en este plano. Llamemos también a este conjunto de puntos, dominio de definición de la función. En particular, todo el plano Oxy puede ser este dominio. En lo ulterior los dominios de definición que estudiaremos estarán constituidos por las *partes del plano limitadas por unas líneas.* La línea que limita el dominio dado se llama *frontera* de este dominio. Los puntos del dominio que no pertenecen a la frontera se llaman puntos *interiores* del dominio. Todo dominio integrado solamente de puntos interiores se llama dominio *abierto.*

Un dominio que incluye también los puntos de la frontera se llama dominio *cerrado.*

El dominio se llama *acotado*, si existe una magnitud constante C tal que la distancia entre todo punto M del dominio y el origen de coordenadas sea menor que C: $|OM| < C$.

Ejemplo 5. Hallar el dominio natural de definición de la función

$$z = 2x - y.$$

La expresión analítica $2x - y$ tiene sentido para todos los valores de x e y. Por consiguiente, el dominio natural de definición de esta función coincide con todo el plano Oxy.

Ejemplo 6.

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Para que z tenga un valor real es preciso que el número subradical no sea negativo, es decir, x e y deben satisfacer a la desigualdad:

$$1 - x^2 - y^2 \geqslant 0 \quad ó \quad x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

Todos los puntos $M(x, y)$, cuyas coordenadas satisfacen a la desigualdad

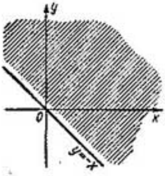

Fig. 165

indicada se sitúan dentro del círculo de radio 1 y centro ubicado en el origen de coordenanadas, así como en la frontera de este círculo.

Ejemplo 7.

$$z = \ln (x + y).$$

Como los logaritmos están determinados sólo para los números positivos, debe existir obligatoriamente la desigualdad:

$$x + y > 0 \quad ó \quad y > -x.$$

El dominio natural de definición de la función z es por consiguiente, el semiplano situado por arriba de la recta $y = -x$, excluyendo la propia recta (fig. 165).

Ejemplo 8. El área S de un triángulo es una función de la base x y la altura y:

$$S = \frac{xy}{2}.$$

El dominio de definición de esta función, es evidentemente el dominio $x > 0$, $y > 0$ (puesto que la base y la altura del triángulo pueden ser expresadas solamente por números positivos). Notemos, que el dominio de definición de la función examinada no coincide con el dominio natural de definición de la expresión analítica, que determina a esta función, puesto que el dominio natural de definición de la expresión $\frac{xy}{2}$ ocupa, evidentemente, todo el plano Oxy.

La definición de función de dos variables, puede extenderse fácilmente al caso de tres y más variables.

Definición 3. Si a todo conjunto estudiado de valores de las variables $x, y, z, \ldots, u, t$ corresponde un valor determinado de la variable w, entonces esta última es *función de las variables independientes* $x, y, z, \ldots, u, t$, es decir: $w = F(x, y, z, \ldots, u, t)$ o $w = f(x, y, z, \ldots, u, t)$, etc.

Análogamente al caso de una función de dos variables, existe el dominio de definición de la función de tres, cuatro y más variables.

Por ejemplo, el dominio de definición de una función de tres variables es un conjunto de ternas de números (x, y, z).

Observemos que cada terna de números define un punto $M(x, y, z)$ en el espacio $Oxyz$. Por tanto, el dominio de definición de una función de tres variables es un cierto conjunto de puntos en el espacio.

De manera análoga se puede determinar el dominio de difinición de una función de cuatro variables $u = f(x, y, z, t)$, como un sistema de los conjuntos de cuatro números (x, y, z, t).

Sin embargo, es imposible dar una simple determinación geométrica del dominio de definición de la función de cuatro o mayor cantidad de variables.

La función de tres variables analizada en el ejemplo 2, está definida para todos los valores de x, y, z. La función de cuatro variables está analizada en el ejemplo 4.

Ejemplo 9.

$$w = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}.$$

Aquí, w es una función de cuatro variables x, y, z, u, definida para los valores de las variables que satisfacen a la correlación:

$$1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2 \geq 0.$$

§ 2. REPRESENTACION GEOMETRICA DE UNA FUNCION DE DOS VARIABLES

Sea la función:

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

definida en el dominio G del plano Oxy (este dominio puede ocupar, en particular, todo el plano), y $Oxyz$, un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio (fig. 166). En cada punto (x, y) del dominio G levantemos una perpendicular al plano Oxy y marquemos en ésta un segmento igual a $f(x, y)$. Así obtenemos en el espacio un punto P de coordenadas $x, y, z = f(x, y)$.

El lugar geométrico de los puntos P, cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación (1), se llama gráfica de la función de dos variables.

Del curso de Geometría analítica sabemos que la ecuación (1) determina una superficie en el espacio. Así la gráfica de una función

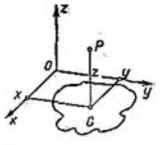

Fig. 166

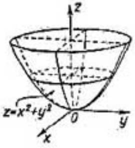

Fig. 167

de dos variables es una superficie cuya proyección sobre el plano Oxy, es el dominio de definición de esta función. Cada perpendicular al plano Oxy corta la superficie $z = f(x, y)$ no más que en un solo punto.

Ejemplo. Por la Geometría analítica sabemos que la gráfica de la función $z = x^2 + y^2$ es un paraboloide de revolución (fig. 167).

Observación. Es imposible dar la representación geométrica en el espacio de la gráfica de una función de tres o más variables.

§ 3. INCREMENTO PARCIAL Y TOTAL DE LA FUNCION

Examinemos la curva PS de intersección de la superficie

$$z = f(x, y)$$

con el plano $y = const$, paralelo al plano Oxz (fig. 168).

Puesto que y es constante en todos los puntos del plano indicado, z variará a lo largo de la curva PS sólo en función de x. Demos a la variable independiente x un incremento Δx, entonces el incremento correspondiente de z recibirá el nombre de *incremento parcial de z respecto a x* que designemos con el símbolo $\Delta_x z$ (el segmento SS' en la figura 168), así que:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y). \tag{1}$$

Análogamente, si x es constante y damos a y un incremento Δy, el incremento correspondiente de z recibirá el nombre de *incremento* *parcial de z respecto a y* que designemos con el símbolo $\Delta_y z$ (el segmento TT' en la figura 168):

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - (f(x, y). \tag{2}$$

La función recibe el incremento $\Delta_y z$ «a lo largo de la curva» de intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $x = const$, paralelo al plano Oyz.

Por último, si damos simultáneamente un incremento Δx a la variable x y un incremento Δy a la variable y obtenemos el incre-

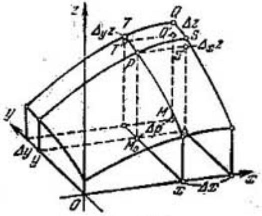

Fig. 168

mento correspondiente de z, Δz, que se llama *incremento total de la función z* y que se determina por la fórmula:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \tag{3}$$

El incremento Δz está representado por el segmento QQ' en la figura 168.

Notemos que, en general, el incremento total no es igual a la suma de incrementos parciales, es decir, $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Ejemplo: $z = xy$.

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)\, y - xy = y\Delta x,$$
$$\Delta_y z = x\,(y + \Delta y) - xy = x\Delta y,$$
$$\Delta z = (x + \Delta x)\,(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$$

Para $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta y = 0{,}3$, tenemos: $\Delta_x z = 0{,}4$, $\Delta_y z = 0{,}3$, $\Delta z = 0{,}76$.

De manera semejante se determinan los incrementos parciales y total de la función de cualquier número de variables. Así, para una función de tres variables $u = f(x, y, t)$ tenemos:

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, t) - f(x, y, t),$$
$$\Delta_y u = f(x, y + \Delta y, t) - f(x, y, t),$$
$$\Delta_t u = f(x, y, t + \Delta t) - f(x, y, t),$$
$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) - f(x, y, t).$$

§ 4. CONTINUIDAD DE LA FUNCION DE VARIAS VARIABLES

Introduzcamos un concepto auxiliar muy importante, que es la vecindad de un punto dado.

Se llama *vecindad* del punto M_0 (x_0, y_0) de radio r al conjunto de todos los puntos (x, y), que satisfacen a la desigualdad: $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$, es decir, el conjunto de todos los

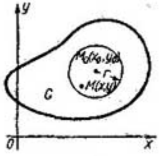

Fig. 169

puntos que se encuentran dentro de un círculo de centro M_0 (x_0, y_0) y radio r.

Cuando decimos que la función $f(x, y)$ tiene cierta propiedad «cerca del punto (x_0, y_0)», o «en la vecindad del punto (x_0, y_0)», esto significa que existe un círculo de centro en el punto (x_0, y_0) de tal manera que en todos los puntos del mismo se cumple la propiedad dada de la función.

Antes de pasar al estudio de la continuidad de una función de varias variables, examinemos el concepto de límite de la función le varias variables*). Sea dada la función:

$$z=f(x, y),$$

definida en un cierto dominio G del plano Oxy.

Examinemos cierto punto M_0 (x_0, y_0) que se encuentra en el interior, o en la frontera del dominio G (fig. 169).

Definición 1. Si para todo número $\varepsilon>0$, existe un número $r>0$ tal que para todos los puntos $M(x, y)$, cuando cada punto $M(x, y)$ tiende a M_0 (x_0, y_0), se cumple la desigualdad $\overline{MM_0}<r$, entonces el número A se llama *límite* de la función $f(x, y)$ y tiene lugar la desigualdad:

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon.$$

*) En adelante estudiaremos, principalmente, las funciones de dos variables, puesto que el examen de las funciones de tres y más variables no agrega ningún elemento nuevo y sólo dificulta adicionalmente el problema desde el punto de vista práctico.

Si el número A es el límite de la función $f(x, y)$ cuando $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$, se escribe:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

Definición 2. Sea $M_0(x_0, y_0)$ el punto que pertenece al dominio de definición de la función $f(x, y)$. Se dice que la función $z = f(x, y)$ es *continua en el punto* $M_0(x_0, y_0)$, si se cumple la igualdad:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0), \tag{1}$$

cuando el punto $M(x, y)$ tiende arbitrariamente al punto $M_0(x_0, y_0)$, permaneciendo en el interior del dominio de definición de la función.

Si ponemos $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, entonces la ecuación (1) se puede escribir así:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) \tag{1'}$$

ó

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0. \tag{1''}$$

Ponemos $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ (véase fig. 168). Cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, $\Delta\rho \to 0$; recíprocamente, si $\Delta\rho \to 0$, entonces $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$.

La expresión encerrada entre corchetes en la igualdad (1'') es el incremento total Δz de la función z. Por consiguiente, se puede escribir la igualdad (1'') en la forma:

$$\lim_{\Delta\rho \to 0} \Delta z = 0. \tag{1'''}$$

Una función, continua en cada punto de un cierto dominio, se llama *continua en este dominio.*

Si la condición (1) no se cumple en cierto punto $N(x_0, y_0)$ éste se llama punto de discontinuidad de la función $z = f(x, y)$. Demos algunos ejemplos en que la condición (1') no se cumple: 1) $z = f(x, y)$ está definida en todos los puntos de cierta vecindad del punto $N(x_0, y_0)$, excepto el mismo punto $N(x_0, y_0)$; 2) la función $z = f(x, y)$ está definida en todos los puntos de una vecindad del punto $N(x_0, y_0)$, pero no existe el límite $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$; 3) la función está definida en todos los puntos de la vecindad $N(x_0, y_0)$ y existe el límite: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$, pero

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \neq f(x_0, y_0).$$

Ejemplo 1. La función

$$z = x^2 + y^2$$

es continua para todos los valores de x e y, es decir, en cada punto del plano Oxy.

En efecto, cualesquiera que sean los números x e y, Δx y Δy, tenemos:

$$\Delta z = [(x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2] - [x^2 + y^2] = 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2,$$

por tanto,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Demos ahora un ejemplo de la función discontinua.

Ejemplo 2. La función

$$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

está definida en todos los puntos, excepto en el punto $x = 0$, $y = 0$ (fig. 170, 171).

Examinemos los valores que toma z en los puntos situados sobre la recta $y = kx$ (k = const). Es evidente que para todos los puntos de la recta:

$$z = \frac{2kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1 + k^2} = \text{const},$$

es decir, sobre cada recta que pasa por el origen de coordenadas, la función z tiene un valor constante, que depende del coeficiente angular k de esta recta.

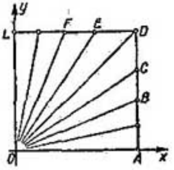

Fig. 170

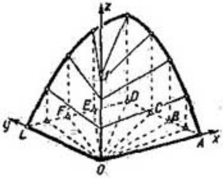

Fig. 171

Por eso el valor límite de la función z depende del camino que recorra el punto (x, y) cuando este punto (x, y) en el plano Oxy tiende al origen de coordenadas, lo que significa que la función $f(x, y)$ no tiene límite. Por consiguiente, la función es discontinua en este punto. No se puede hacer una determinación adicional de esta función en el origen de coordenadas para convertirla en continua. Es fácil ver, por otra parte, que en todos los demás puntos esta función es continua.

Indiquemos sin demostración algunas importantes propiedades de la función de varias variables, continua en el dominio cerrado y acotado. Estas propiedades son semejantes a las de la función de una variable y continua en el segmento (véase § 10, cap. II).

Propiedad 1. Si una función $f(x, y, \ldots)$ está definida y es continua en el dominio D cerrado acotado, entonces en este dominio existe por lo menos un punto $N(x_0, y_0, \ldots)$ tal, que para todos los demás puntos del dominio se cumpla la correlación:

$$f(x_0, y_0, \ldots) \geqslant f(x, y, \ldots),$$

y existe por lo menos un punto $\bar{N}(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ tal que para todos los demás puntos del dominio se cumpla la correlación:

$$f(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \ldots) \leqslant f(x, y, \ldots).$$

El valor de la función $f(x_0, y_0, \ldots) = M$ se llama valor máximo y $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \ldots) = m$ se llama valor mínimo de la función $f(x, y, \ldots)$ en el dominio D. Esa propiedad también se puede formular de otro modo. Una función continua en un dominio D cerrado y acotado alcanza por lo menos una vez el valor máximo M y una vez el valor mínimo m.

Propiedad 2. Si una función $f(x, y, \ldots)$ es continua en un dominio D cerrado y acotado, siendo M y m los valores máximo y mínimo de la función en el dominio mencionado, entonces para cualquier número μ, que satisface a la condición $m < \mu < M$, existirá en el dominio un punto $N^*(x_0^*, y_0^*, \ldots)$ tal que se cumpla la igualdad:

$$f(x_0^*, y_0^*, \ldots) = \mu.$$

Corolario de la propiedad 2.

Si la función $f(x, y, \ldots)$ es continua en un dominio cerrado y acotado y toma valores tanto positivos como negativos, existirán en el interior del dominio unos puntos tales en los que la función $f(x, y, \ldots)$ se anula.

§ 5. DERIVADAS PARCIALES DE LA FUNCION DE VARIAS VARIABLES

Definición. El límite de la razón del incremento parcial $\Delta_x z$ respecto a x, en relación al incremento Δx, cuando Δx tiende a cero se llama *derivada parcial respecto a x* de la función $z = f(x, y)$.

La derivada parcial respecto a x de la función $z = f(x, y)$ se designa por uno de los símbolos siguientes:

$$z'_x; \quad f'_x(x, y); \quad \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial f}{\partial x}.$$

De tal modo, según la definición:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Análogamente, la *derivada parcial* respecto a y de la función $z = f(x, y)$ se determina como el límite de la razón del incremento parcial de la función $\Delta_y z$ respecto a y, en relación al incremento Δy, cuando Δy tiende a cero. La derivada parcial respecto a y se designa por uno de los símbolos siguientes:

$$z'_y; \quad f'_y; \quad \frac{\partial z}{\partial y}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Así,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Observemos que $\Delta_x z$ se calcula manteniéndose y invariable y $\Delta_y z$, manteniéndose x invariable; se llama *derivada parcial de la función* $z = f(x, y)$, *respecto a* x, a la derivada de esta función respecto a x, calculada en la suposición de que y es constante. Se llama *derivada parcial de la función* $z = f(x, y)$, *respecto a* y, a la derivada de esta función respecto a y, calculada en la suposición de que x es constante.

De la definición formulada se deduce que las reglas para calcular las derivadas parciales son las mismas que se utilizan para calcular la derivada de las funciones de una variable; es preciso, solamente, tener en cuenta, respecto a qué variable se busca la derivada.

Ejemplo 1. Hallar las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ de la función $z = x^2 \operatorname{sen} y$.

Solución.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \operatorname{sen} y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y.$$

Ejemplo 2.

$$z = x^y.$$

Aquí

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Las derivadas parciales de una función de cualquier número de variables se hallan de manera análoga. Por ejemplo, si tenemos la función u de cuatro variables x, y, z, t:

$$u = f(x, y, z, t),$$

entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta y}, \quad \text{etc.}$$

Ejemplo 3.

$$u = x^2 + y^2 + xtz^3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + tz^3; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3xtz^2; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = xz^3.$$

§ 6. INTERPRETACION GEOMETRICA DE LAS DERIVADAS PARCIALES DE UNA FUNCION DE DOS VARIABLES

Sea

$$z = f(x, y)$$

una ecuación de la superficie representada en la figura 172.

Tracemos el plano $x = \text{const}$. La intersección de este plano con la superficie determina la curva PT. Examinemos en el plano Oxy un punto $M(x, y)$ para x dado. Al punto M le corresponde el punto $P(x, y, z)$, de la superficie $z = f(x, y)$. Manteniendo x invariable, demos a la variable y un incremento $\Delta y = MN = PT'$. La función z recibirá el incremento $\Delta_y z = TT'$ [al punto $N(x, y + \Delta y)$ corresponde el punto $T(x, y + \Delta y, z + \Delta_y z)$ de la superficie $z = f(x, y)$].

La razón $\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ es igual a la tangente del ángulo formado por la *secante* PT con la dirección positiva del eje Oy:

$$\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \operatorname{tg} \widehat{TPT'}.$$

Por consiguiente, el límite:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

es igual a la tangente del ángulo β formado por la línea tangente PB a la curva PT en el punto P con dirección positiva del eje Oy:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg} \beta.$$

Por tanto, el valor numérico de la derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial y}$ es igual

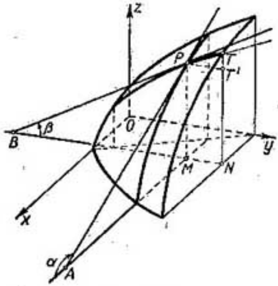

Fig. 172

a la tangente del ángulo de inclinación de la línea tangente a la curva definida por la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $x = const.$

De modo semejante el valor numérico de la derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial x}$ es igual a la tangente del ángulo α formado por la línea tangente a la curva definida por la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = const.$

§ 7. INCREMENTO TOTAL Y DIFERENCIAL TOTAL

Según la definición de incremento total de la función $z = f(x, y)$, tenemos (§ 3, cap. VIII):

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \tag{1}$$

Supongamos que la función $f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas en el punto estudiado (x, y).

Expresemos Δz mediante las derivadas parciales. Sumando $f(x, y + \Delta y)$ al segundo miembro de la ecuación (1) y restando esta expresión, tenemos:

$$\Delta z = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]. \quad (2)$$

El segundo sumando,

$$f(x, y+\Delta y) - f(x, y),$$

comprendido entre corchetes, puede considerarse como la diferencia entre dos valores de una función de una sola variable y (el valor de x permanece constante). Aplicando el teorema de Lagrange a esta diferencia, tenemos

$$f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}, \quad (3)$$

donde $\bar{y}$ está comprendida entre y e $y + \Delta y$.

Del mismo modo, el primer sumando de la ecuación (2) puede ser considerado como la diferencia entre dos valores de una función de una sola variable x (el segundo argumento permanece constante e igual a $y + \Delta y$). Aplicando a esta diferencia el teorema de Lagrange, tenemos:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}, \quad (4)$$

donde $\bar{x}$ está comprendida entre

$$x \text{ y } x + \Delta x.$$

Introduciendo las expresiones (3) y (4) en la ecuación (2), obtenemos:

$$\Delta z = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}. \quad (5)$$

Según la hipótesis, las derivadas parciales son continuas, de donde:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \\ \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

puesto que $\bar{x}$ e $\bar{y}$ están comprendidas primero entre x y $x + \Delta x$, y segundo, entre y e $y + \Delta y$, entonces $\bar{x}$ e $\bar{y}$ tienden a x e y, respectivamente, cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. Por consiguiente se puede escribir las ecuaciones (6) en la forma:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f(\bar{x},\ y+\Delta y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}+\gamma_1,\\ \frac{\partial f(x,\ \bar{y})}{\partial y}=\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}+\gamma_2,\end{aligned}\right\}\qquad(6')$$

donde las magnitudes γ_1 y γ_2 tienden a cero, cuando Δx y Δy tienden a cero (es decir, cuando $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$).

En virtud de las igualdades (6′) la expresión (5) tomará la forma:

$$\Delta z=\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\Delta y+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y.\qquad(5')$$

La suma de los dos últimos términos del segundo miembro es una infinitesimal de orden superior con relación a $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. En efecto, la razón $\frac{\gamma_1\Delta x}{\Delta\rho}\to 0$ para $\Delta\rho\to 0$ puesto que γ_1 es una infinitesimal, y $\frac{\Delta x}{\Delta\rho}$, una magnitud acotada $\left(\left|\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right|\leqslant 1\right)$. De modo semejante se comprueba que $\frac{\gamma_2\Delta y}{\Delta\rho}\to 0$.

La suma de los dos primeros términos es una expresión lineal respecto a Δx y Δy. Cuando $f'_x(x,\ y)\neq 0$ y $f'_y(x,\ y)\neq 0$, esta expresión es la parte principal del incremento, diferenciándose de Δz en una infinitesimal de orden superior con relación a

$$\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$

Definición. La función $z=f(x,\ y)$, se llama *derivable en el punto dado* $(x,\ y)$, si su incremento total $(\Delta_y z)$ en este punto puede ser presentado en forma de una suma de dos términos entre los cuales el primero es una expresión lineal respecto a Δx y Δy, y el segundo, una infinitesimal de orden superior con relación a $\Delta\rho$. La parte lineal del incremento se llama *diferencial total* y se designa por el símbolo dz o df.

De la igualdad (5′) se deduce que, si la función $f(x,\ y)$ tiene derivadas parciales continuas en el punto dado, entonces la función es derivable en este punto y su diferencial total es

$$dz=f'_x(x,\ y)\,\Delta x+f'_y(x,\ y)\,\Delta y.$$

Podemos escribir la igualdad (5′) en la forma:

$$\Delta z=dz+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y,$$

y con la precisión de hast ainfinitesimales de orden superior con relación a $\Delta\rho$ se puede escribir la siguiente igualdad *aproximada*:

$$\Delta z \approx dz.$$

Los incrementos Δx y Δy de las variables independientes se llaman *diferenciales* de las variables independientes x e y y se designan respectivamente por dx y dy. Entonces, la expresión de la diferencial total toma la forma:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Por consiguiente, si la función $z = f(x, y)$ tiene las derivadas parciales continuas, ésta es derivable en el punto (x, y) y su diferencial total es igual a la suma de los productos de las derivadas

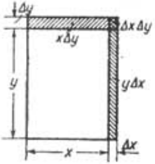

Fig. 173]

parciales, multiplicadas por las diferenciales de las variables independientes correspondientes.

Ejemplo 1. Hallar la diferencial total y el incremento total de la función $z = xy$ en el punto (2; 3), para $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

Solución.

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\, \Delta y,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = y\, dx + x\, dy = y\Delta x + x\Delta y.$$

Por consiguiente,

$$\Delta z = 3 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}72;$$

$$dz = 3 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}7.$$

La figura 173 ilustra este ejemplo 1.

Los razonamientos y definiciones anteriores pueden extenderse, de modo correspondiente, a las funciones de cualquier número de argumentos.

Sea $w = f(x, y, z, u, \ldots, t)$, una función de cualquier número de variables en la que todas las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial t}$ son continuas en el punto $(x, y, z, u, \ldots, t)$, la expresión:

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt$$

será la parte principal del incremento total de la función y se llamará diferencial total. Del modo semejante que en el caso de una función de dos variables se puede demostrar que la diferencia $\Delta w - dw$ es una infinitesimal de orden superior con relación a $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y^2) + \ldots + (\Delta t)^2}$.

Ejemplo 2. Hallar la diferencial total de la función $u = e^{x^2+y^2} \operatorname{sen}^2 z$, de tres variables x, y, z.

Solución. Observando que las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2+y^2} 2x \operatorname{sen}^2 z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2+y^2} 2y \operatorname{sen}^2 z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^{x^2+y^2} 2 \operatorname{sen} z \cos z = e^{x^2+y^2} \operatorname{sen} 2z$$

son continuas para todos los valores de x, y, z, tenemos:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial y}{\partial z}\,dz = e^{x^2+y^2} (2x \operatorname{sen}^2 z\,dx + 2y \operatorname{sen}^2 z\,dy + \operatorname{sen} 2z\,dz).$$

§ 8. APLICACION DE LA DIFERENCIAL TOTAL PARA CALCULOS APROXIMADOS

Supongamos que la función $z = f(x, y)$ es derivable en el punto (x, y). Hallamos el incremento total de esta función:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

de donde:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z. \tag{1}$$

Tenemos ya la fórmula aproximada:

$$\Delta z \approx dz \tag{2}$$

donde:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y. \tag{3}$$

Sustituyendo Δz en la fórmula (1) por la expresión desarrollada para dz, obtenemos la fórmula aproximada:

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)\approx f(x,\ y)+\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\Delta y, \quad (4)$$

en la que el error se expresa en unas infinitesimales de orden superior respecto a Δx y Δy.

Mostremos cómo se usan las fórmulas (2) y (4) para realizar cálculos aproximados.

Problema. Calcular el volumen del material necesario para fabricar un vaso cilíndrico de las dimensiones siguientes (fig. 174):

radio interior del cilindro, R;
altura interior del cilindro, H;
espesor de las paredes y del fondo del vaso, k.

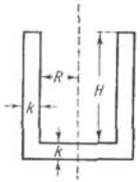

Fig. 174

Solución. Demos dos soluciones del problema: la exacta y la aproximada

a) **Solución exacta.** El volumen buscado v es igual a la diferencia entre los volúmenes de los cilindros exterior e interior. Como el radio del cilindro exterior es $R+k$, y la altura es $H+k$, tenemos:

$$v=\pi(R+k)^2(H+k)-\pi R^2H,$$

ó

$$v=\pi(2RHk+R^2k+Hk^2+2Rk^2+k^3). \quad (5)$$

b) **Solución aproximada.** Designemos por f el volumen del cilindro interior; entonces, $f=\pi R^2H$. Esta es una función de dos variables, R y H. Si aumentamos en k las magnitudes R y H, la función f recibirá el incremento Δf, el cual constityue el volumen buscado v, es decir, $v=\Delta f$.

En virtud de la expresión (1), tenemos una igualdad aproximada:

$$v\approx df$$

o sea

$$v\approx\frac{\partial f}{\partial R}\Delta R+\frac{\partial f}{\partial H}\Delta H.$$

Puesto que

$$\frac{\partial f}{\partial R} = 2\pi RH, \quad \frac{\partial f}{\partial H} = \pi R^2, \quad \Delta R = \Delta H = k,$$

tenemos:

$$v \approx \pi (2RHx + R^2k). \tag{6}$$

Comparando los resultados (5) y (6) vemos que éstos se diferencian en una magnitud $\pi (Hk^2 + 2Rk^2 + k^3)$, compuesta solamente por términos que contienen k al cuadrado y al cubo.

Apliquemos estas fórmulas en los ejemplos numéricos.

Sean $R = 4$ cm, $H = 20$ cm, $k = 0{,}1$ cm. Aplicando (5), obtenemos el volumen exacto:

$$v = \pi (2\cdot 4\cdot 20\cdot 0{,}1 + 4^2\cdot 0{,}1 + 20\cdot 0{,}1^2 + 2\cdot 4\cdot 0{,}1^2 + 0{,}1^3) = 17{,}881\pi.$$

Aplicando (6), obtenemos el volumen aproximado:

$$v \approx \pi (2\cdot 4\cdot 20\cdot 0{,}1 + 4^2\cdot 0{,}1) = 17{,}6\pi.$$

Por consiguiente, mediante la fórmula aproximada (6) obtenemos una respuesta con un error inferior a $0{,}3\pi$, lo que constituye $100\cdot\frac{0{,}03\pi}{17{,}881\pi}\,\%$, es decir, menos del 2% del valor medido.

§ 9. UTILIZACION DE LA DIFERENCIAL PARA EVALUAR EL ERROR DE CALCULO

Sea $u = f(x, y, z, \ldots, t)$, una función de las variables $x, y, z, \ldots, t$.

Supongamos que la evaluación de los valores numéricos de las magnitudes $x, y, z, \ldots, t$ se hace con cierto error correspondiente a Δx, $\Delta y, \ldots, \Delta t$. En este caso, el valor de u, calculado a base de los valores aproximados de los argumentos, será también determinado con cierto error Δu

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, \ldots, z + \Delta z, t + \Delta t) - f(x, y, z, \ldots, t).$$

Cuando los errores Δx, $\Delta y, \ldots, \Delta t$ son conocidos, podemos evaluar también el error Δu.

Siendo los valores absolutos de las magnitudes Δx, $\Delta y, \ldots \ldots, \Delta t$, suficientemente pequeños podemos sustituir el incremento total por la diferencial total y obtener la igualdad aproximada:

$$\Delta u \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t.$$

Aquí los valores de derivadas parciales y errores de los argumentos pueden ser tanto positivos como negativos.

Sustituyéndolos por los valores absolutos, obtenemos la desigualdad:

$$|\Delta u| \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| |\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| |\Delta y| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| |\Delta t|. \tag{1}$$

Designando por $|\Delta^* x|$, $|\Delta^* y|$, ..., $|\Delta^* u|$ los errores absolutos máximos de las magnitudes correspondientes (límites de los valores absolutos de los errores) se puede, evidentemente, admitir:

$$|\Delta^* u| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| |\Delta^* x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| |\Delta^* y| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| |\Delta^* t|. \quad (2)$$

Ejemplos

1. Sea: $u = x + y + z$, entonces:

$$|\Delta^* u| = |\Delta^* x| + |\Delta^* y| + |\Delta^* z|.$$

2. Sea: $u = x - y$, entonces:

$$|\Delta^* u| = |\Delta^* x| + |\Delta^* y|.$$

3. Sea: $u = xy$, entonces:

$$|\Delta^* u| = |x|\,|\Delta^* y| + |y|\,|\Delta^* x|.$$

4. Sea: $u = \frac{x}{y}$, entonces:

$$|\Delta^* u| = \left|\frac{1}{y}\right| |\Delta^* x| + \left|\frac{x}{y^2}\right| |\Delta^* y| = \frac{|y|\,|\Delta^* x| + |x|\,|\Delta^* y|}{y^2}.$$

5. Sean la hipotenusa c y el cateto a del triángulo rectángulo ABC determinados con los errores absolutos máximos: $|\Delta^* c| = 0{,}2$; $|\Delta^* a| = 0{,}1$. Tenemos $c = 75$ y $a = 32$ respectivamente. Determinar el ángulo A por la fórmula $\operatorname{sen} A = \frac{a}{c}$ y el error absoluto máximo $|\overline{\Delta A}|$, al calcular el ángulo A.

Solución. Sen $A = \frac{a}{c}$, $A = \operatorname{arcsen} \frac{a}{c}$; por tanto:

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \quad \frac{\partial A}{\partial c} = -\frac{a}{c\sqrt{c^2 - a^2}}.$$

Según la fórmula (2), tenemos:

$$|\overline{\Delta A}| = \frac{1}{\sqrt{(75)^2 - (32)^2}} \cdot 0{,}1 + \frac{32}{75\sqrt{(75)^2 - (32)^2}} \cdot 0{,}2 =$$
$$= 0{,}00275 \text{ radianes} = 9'38''.$$

De tal modo:

$$A = \operatorname{arcsen} \frac{32}{75} \pm 9'38''.$$

6. Determinado el cateto $b = 121{,}56$ m y el ángulo $A = 25°21'40''$ de un triángulo rectángulo ABC; los errores absolutos máximos cometidos en el curso de la evaluación de estas magnitudes son respectivamente $|\Delta^* b| = 0{,}05$ m y $|\Delta^* A| = 12''$.

Determinar el error absoluto máximo cometido en el cálculo del cateto a por la fórmula $a = b \operatorname{tg} A$.

Solución: Según la fórmula (2):

$$|\Delta^* a| = |\operatorname{tg} A|\,|\Delta^* b| + \frac{|b|}{\cos^2 A}\,|\Delta^* A|.$$

Sustituyendo los valores correspondientes (y expresando $|\Delta^* A|$ en radianes), tenemos:

$$|\Delta^* a| = \operatorname{tg} 25^\circ 21'40'' \cdot 0{,}05 + \frac{121{,}56}{\cos^2 25^\circ 21'40''}\,\frac{12}{206\,265} =$$

$$= 0{,}0237 + 0{,}0087 = 0{,}0324 \text{ м}.$$

La razón del error Δx de cierta magnitud respecto al valor aproximado de x se llama *error relativo* de esta magnitud. Designémoslo por δx:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}.$$

La razón del error absoluto máximo respecto al valor absoluto de x se llama *error relativo máximo* de la magnitud x y se designa por $|\delta^* x|$:

$$|\delta^* x| = \frac{|\Delta^* x|}{|x|}. \tag{3}$$

Para evaluar el error relativo máximo de la función u, dividamos los miembros de la igualdad (2) por $|u| = |f(x, y, z, \ldots, t)|$ respectivamente:

$$\frac{|\Delta^* u|}{|u|} = \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f}\right| |\Delta^* x| + \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f}\right| |\Delta^* y| + \ldots + \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{f}\right| |\Delta^* t|. \tag{4}$$

Pero,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} = \frac{\partial}{\partial x}\ln|f|; \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} = \frac{\partial}{\partial y}\ln|f|; \ \ldots; \ \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{f} = \frac{\partial}{\partial t}\ln|f|.$$

Por consiguiente la igualdad (3) se puede escribir en la forma:

$$|\delta^* u| = \left|\frac{\partial}{\partial x}\ln|f|\right| |\Delta^* x| + \left|\frac{\partial}{\partial x}\ln|f|\right| |\Delta^* y| + \ldots$$

$$\ldots + \left|\frac{\partial}{\partial t}\ln|f|\right| |\Delta^* t| \ldots, \tag{5}$$

o, más brevemente:

$$|\delta^* u| = \Big|\Delta^* \ln|f|\Big|. \tag{6}$$

De las fórmulas (3) y (5) se deduce que el error relativo máximo de una función es igual al error absoluto máximo del logaritmo de esta función.

De la fórmula (6) obtenemos las reglas utilizadas en los cálculos aproximados.

1. Sea $u = xy$. Utilizando los resultados del ejemplo 3, tenemos:

$$|\delta^* u| = \frac{|x||\Delta^* x|}{|xy|} + \frac{|y||\Delta^* y|}{|xy|} = \frac{|\Delta^* x|}{|x|} + \frac{|\Delta^* y|}{|y|} = |\delta^* x| + |\delta^* y|,$$

es decir, el error relativo máximo de un producto es igual a la suma de los errores relativos máximos de los factores.

2. Sea $u = \frac{x}{y}$, utilizando los resultados del ejemplo 4, tenemos:

$$|\delta^* u| = |\delta^* x| + |\delta^* y|.$$

Observación: Del ejemplo 2 se deduce que si $u = x - y$, tenemos:

$$|\delta^* u| = \frac{|\Delta^* x| + |\Delta^* y|}{|x - y|}.$$

Si los valores de x e y son cercanos entre sí puede ocurrir que $|\delta^* u|$ sea muy grande en comparación con la magnitud buscada $x - y$. Esta circunstancia debe tenerse en cuenta durante los cálculos.

Ejemplo 7. El período de oscilación de un péndulo es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

donde: l es el largo del péndulo; g, la aceleración debida a la fuerza de gravedad.

Calcular el error relativo de la determinación de T por la fórmula enunciada, poniendo: $\pi \approx 3{,}14$ (con la precisión de hasta 0,005), $l = 1$m (con la precisión de hasta 0,01m), $g = 9{,}8$ m/seg^2 (con la precisión hasta de 0,02 m/seg^2).

Solución: El error relativo máximo según la fórmula (6) será:

$$|\delta^* T| = |\Delta^* \ln T|.$$

Pero,

$$\ln T = \ln 2 + \ln \pi + \frac{1}{2}\ln l - \frac{1}{2}\ln g.$$

Calculemos $|\Delta^* \ln T|$. Teniendo en cuenta que: $\pi \approx 3{,}14$, $\Delta^* \pi = 0{,}005$, $l = 1$ m, $\Delta^* l = 0{,}01$ m, $g = 9{,}8$ m/seg^2, $\Delta^* g = 0{,}02$ m/seg^2, obtenemos:

$$\Delta^* \ln T = \frac{\Delta^* \pi}{\pi} + \frac{\Delta^* l}{2l} + \frac{\Delta^* g}{2g} = \frac{0{,}005}{3{,}14} + \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}02}{2 \cdot 9{,}8} = 0{,}0076$$

Así, el error relativo máximo es:

$$\delta^* T = 0{,}0076 = 0{,}76\%$$

§ 10. DERIVADA DE UNA FUNCION COMPUESTA. DERIVADA TOTAL

Supongamos que en la ecuación

$$z = F(u, v) \tag{1}$$

u y v son funciones de las variables independientes x e y:

$$u = \varphi(x, y); \quad v = \psi(x, y). \tag{2}$$

En este caso z es una función compuesta de las variables x e y. Por supuesto, se puede expresar z directamente en función de x e y

$$z = F[\varphi(x, y), \psi(x, y)]. \tag{3}$$

Ejemplo 1. Sea

$$z = u^3v^3 + u + 1; \quad u = x^2 + y^2; \quad v = e^{x+y} + 1;$$

entonces,

$$z = (x^2 + y^2)^3 (e^{x+y} + 1)^3 + (x^2 + y^2) + 1.$$

Supongamos que las derivadas parciales de las funciones $F(u, v)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ son continuas respecto a todos sus argumentos y calculemos $\frac{\partial z}{\partial y}$ y $\frac{\partial z}{\partial x}$ a partir de las ecuaciones (1) y (2), sin recurrir a la igualdad (3).

Demos al argumento x un incremento Δx, manteniendo invariable el valor de y. En virtud de la ecuación (2), u y v recibirán incrementos $\Delta_x u$ y $\Delta_x v$ respectivamente.

Pero si u y v reciben los incrementos $\Delta_x u$ y $\Delta_x v$, la función $z = F(u, v)$ también recibirá el incremento Δz determinado por la fórmula (5′), § 7, cap. VIII:

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v}\Delta_x v + \gamma_1 \Delta_x u + \gamma_2 \Delta_x v.$$

Dividamos todos los términos de esta igualdad por Δx:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \gamma_1 \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \gamma_2 \frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Si $\Delta x \to 0$, también $\Delta_x u \to 0$ y $\Delta_x v \to 0$ (en virtud de la continuidad de las funciones u y v). Pero, en este caso γ_1 y γ_2 igualmente tienden a cero. Pasando al límite para $\Delta x \to 0$, obtenemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \gamma_1 = 0; \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \gamma_2 = 0$$

y, por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4}$$

Si damos un incremento Δy a la variable y, conservando x invariable, obtenemos análogamente:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{4'}$$

Ejemplo 2.

$$z=\ln(u^2+v);\quad u=e^{x+y^2},\quad v=x^2+y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2u}{u^2+v};\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{u^2+v};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x+y^2};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2ye^{x+y^2};\quad \frac{\partial v}{\partial x}=2x;\quad \frac{\partial v}{\partial y}=1.$$

Utilizando las fórmulas (4) y (4'), tenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2u}{u^2+v}e^{x+y^2}+\frac{1}{u^2+v}2x=\frac{2}{u^2+v}(ue^{x+y^2}+x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2u}{u^2+v}2ye^{x+y^2}+\frac{1}{u^2+v}=\frac{1}{u^2+v}(2uye^{x+y^2}+1).$$

Las fórmulas (4) y (4') se generalizan naturalmente para un mayor número de variables.

Por ejemplo, si $w = F(z, u, v, s)$ es una función de cuatro argumentos z, u, v, s, y cada uno de éstos depende de x e y, las fórmulas (4) y (4') toman la forma:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x}&=\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x},\\ \frac{\partial w}{\partial y}&=\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Si la función $z = F(x, y, u, v)$ es tal que las variables y, u, v dependen, a su vez, del argumento x:

$$y = f(x);\quad u = \varphi(x);\quad v = \psi(x),$$

entonces, z, en esencia, es función de una sola variable x, y se puede, por tanto, hallar la derivada $\frac{dz}{dx}$.

Esta derivada se calcula por la primera de las fórmulas (5):

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};$$

pero, como y, u, v no dependen más que de una sola variable x, las derivadas parciales correspondientes son de hecho las derivadas ordinarias; además, $\frac{dx}{dx}=1$, por tanto:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} \tag{6}$$

La última se llama fórmula para el cálculo de la *derivada total* $\frac{dz}{dx}$ $\left(\text{a diferencia de la derivada } \textit{parcial } \frac{\partial z}{\partial x}\right)$

Ejemplo 3.

$$z=x^2+\sqrt{y},\quad y=\operatorname{sen} x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{y}};\quad \frac{dy}{dx}=\cos x.$$

Según la fórmula (6) tenemos

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}=2x+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cos x=2x+\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}\cos x.$$

§ 11. DERIVADA DE UNA FUNCION DEFINIDA IMPLICITAMENTE

Comencemos el análisis de este problema con el estudio de la función implícita de una sola variable*. Sea y una función de x definida por la ecuación

$$F(x, y)=0$$

comprobemos el teorema siguiente.

Teorema. *Sea y una función continua de x definida implícitamente por la ecuación*

$$F(x, y)=0$$

donde $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ son funciones continuas en cierto dominio D que contiene el punto (x, y), cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación (1); *además, en este punto $F'_y(x, y)\neq 0$. Entonces la función y de x tiene la derivada:*

$$y'_x=-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

*) En el § 11 del capítulo III hemos resuelto el problema de derivación de las funciones implícitas de una variable. Hemos examinado algunos ejemplos, sin obtener la formula general para hallar la derivada de la función implícita. Tampoco hemos aclarado las condiciones de existencia de esta derivada.

Demostración. Supongamos que a un cierto valor de x corresponde un valor de la función y. Aquí

$$F(x, y) = 0.$$

Demos a la variable independiente x un incremento Δx. La función y recibe el incremento Δy, es decir, al valor $x + \Delta x$ del argumento le corresponde el valor $y + \Delta y$ de la función. En virtud de la ecuación $F(x, y) = 0$ tenemos:

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.$$

Por tanto,

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0.$$

El primer miembro de la última igualdad que es el incremento total de la función de dos variables, en virtud de la fórmula (5′) § 7 se puede escribir

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y,$$

donde γ_1 y γ_2 tienden a cero, cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. Como el primer miembro de la última expresión es igual a cero, se puede escribir

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y = 0.$$

Dividamos la igualdad obtenida por Δx y calculemos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \gamma_1}{\frac{\partial F}{\partial y} + \gamma_2}.$$

Aproximemos Δx a cero. Teniendo en cuenta que γ_1 y γ_2 también tienden a cero y que $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, obtenemos como el límite:

$$y'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \qquad (1)$$

Hemos demostrado la existencia de la derivada y'_x de la función definida implícitamente y hemos obtenido la fórmula para calcular esta derivada.

Ejemplo 1. La ecuación

$$x^2+y^2-1=0$$

define y como función implícita de x. Aquí:

$$F(x, y)=x^2+y^2-1, \quad \frac{\partial F}{\partial x}=2x; \quad \frac{\partial F}{\partial y}=2y.$$

Por consiguiente, según la fórmula (1):

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}.$$

Observemos que la ecuación dada define dos funciones distintas [puesto que a cada valor de x en el intervalo $(-1, 1)$ corresponden dos valores de y]; sin embargo, el valor hallado de y'_x es válido para ambas funciones.

Ejemplo 2. Sea la ecuación

$$e^y-e^x+xy=0.$$

Aquí:

$$F(x, y)=e^y-e^x+xy,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-e^x+y; \quad \frac{\partial F}{\partial y}=e^y+x.$$

Por tanto, según la fórmula (1) obtenemos:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{-e^x+y}{e^y+x}=\frac{e^x-y}{e^y+x}.$$

Examinemos ahora la ecuación del tipo

$$F(x, y, z)=0. \tag{2}$$

Si a cada par de números x e y, pertenecientes a cierto dominio, le corresponden uno o varios valores de z que satisfacen a la ecuación (2), ésta define implícitamente una o varias funciones unívocas z de x e y.

Por ejemplo, la ecuación

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0$$

define implícitamente dos funciones continuas z de x e y, que pueden expresarse explícitamente, resolviendo la ecuación respecto a z; en este caso obtenemos:

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2} \quad \text{y} \quad z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$

Hallamos las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ de la función implícita z de x e y definida por la ecuación (2).

Para buscar $\frac{\partial z}{\partial x}$, supongamos que y es constante. Por eso, podemos utilizar aquí la fórmula (1), considerando z como una función de la variable independiente x. Por tanto:

$$z'_x = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

De modo semejante hallamos:

$$z'_y = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Aquí es natural suponer que

$$\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$$

Del mismo modo se definen las funciones implícitas de cualquier número de variables y se calculan las derivadas parciales de las mismas.

Ejemplo 3.

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

Derivando esta función como si fuera explícita (resolviendo esta ecuación respecto a z), obtenemos el mismo resultado.

Ejemplo 4.

$$e^z + x^2 y + z + 5 = 0.$$

Aquí

$$F(x, y, z) = e^z + x^2 y + z + 5,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = e^z + 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{e^z + 1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{e^z + 1}.$$

Observación: Todos los razonamientos del párrafo anterior los hemos realizado, suponiendo que la ecuación $F(x, y) = 0$ define cierta función de una variable $y = \varphi(x)$, y la ecuación $F(x, y, z) = 0$, define cierta función de dos variables $z = f(x, y)$. Indiquemos sin demostración la condición que debe satisfacer la función $F(x, y)$ para que la ecuación $F(x, y) = 0$ defina la función uniforme $y = \varphi(x)$.

Teorema. *Sea la función $F(x, y)$, continua en la vecindad del punto (x_0, y_0) y que tenga derivadas parciales continuas, siendo $F'_y(x, y) \neq 0$; suponiendo también que $F(x_0, y_0) = 0$. Entonces existe una vecindad que comprende el punto (x_0, y_0) donde la ecuación $F(x, y) = 0$ define la función uniforme $y = \varphi(x)$.*

El teorema análogo se cumple también para las condiciones de existencia de la función implícita definida por la ecuación $F(x, y, z) = 0$.

Observación. Al deducir las reglas de derivación de las funciones implícitas, hemos aprovechado las condiciones que determinan la existencia de las funciones implícitas.

§ 12. DERIVADAS PARCIALES DE DIFERENTES ORDENES

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables independientes.

Las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ son, en general, funciones de las variables x e y. Por eso, éstas también pueden tener derivadas parciales. Por consiguiente, las derivadas parciales de segundo orden de una función de dos variables, son *cuatro*, puesto que cada una de las funciones $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ puede ser derivada tanto respecto a x, como respecto a y.

Las derivadas parciales de segundo orden se designan así:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$; donde f se deriva sucesivamente dos veces respecto a x;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = f''_{xy}(x, y)$; donde f se deriva primero respecto a x, luego el resultado se deriva respecto a y;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \, \partial x} = f''_{yx}(x, y)$; donde f se deriva primero respecto a y, luego el resultado se deriva respecto a x;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$; donde f se deriva sucesivamente dos veces respecto a y.

Las derivadas de segundo orden se pueden derivar de nuevo, tanto respecto a x, como respecto a y; como resultado obtenemos derivadas de tercer orden. Es evidente que serán ocho:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x\,\partial y}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

En general, la *derivada parcial de n-ésimo orden* es la primera derivada de la derivada de $(n-1)$-ésimo orden. Por ejemplo, $\frac{\partial^n z}{\partial x^p\,\partial y^{n-p}}$ es derivada de n-ésimo orden. Aquí, la función z está derivada, primero, p veces respecto a x y luego $n-p$ veces respecto a y.

De manera igual se definen las derivadas parciales de órdenes superiores para la función de cualquier número de variables.

Ejemplo 1. Hallar las derivadas parciales de segundo orden de la función $f(x, y) = x^2 y + y^3$.

Solución.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial (2xy)}{\partial y} = 2x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial (x^2+3y^2)}{x} = 2x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$

Ejemplo 2. Hallar $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}$ y $\frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2}$, si $z = y^2 e^x + x^2 y^3 + 1$.

Solución.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^x + 2xy^3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^x + 2y^3; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = 2ye^x + 6y^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^x + 3x^2y^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = 2ye^x + 6xy^2; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2} = 2ye^x + 6y^2.$$

Ejemplo 3. Hallar $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y\,\partial z}$, si $u = z^2 e^{x+y^2}$.

Solución.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z^2 e^{x+y^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = z^2 e^{x+y^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} = 2yz^2 e^{x+y^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y\,\partial z} = 4yze^{x+y^2}.$$

Es natural plantear el problema: ¿si el resultado de derivación de la función de varias variables depende o no del orden de derivación respecto a distintas variables? Es decir, serían, por ejemplo, idénticamente iguales las derivadas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

ó

$$\frac{\partial^3 f(x, y, t)}{\partial x\,\partial y\,\partial t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3 f(x, y, t)}{\partial t\,\partial x\,\partial y}, \quad \text{etc.}$$

Demos la respuesta en forma del teorema siguiente.

Teorema. *Si la función $z = f(x, y)$ y sus derivadas parciales f'_x, f'_y, f''_{xy} y f''_{yx} están definidas y son continuas en el punto $M(x, y)$ como también en cierta vecindad de este punto, entonces en este punto:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} \qquad (f''_{xy} = f''_{yx}).$$

Demostración. Analicemos la expresión

$$A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

Si introducimos una función auxiliar $\varphi(x)$, determinada por la igualdad

$$\varphi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

se puede escribir A en la forma:

$$A = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x).$$

Según la hipótesis, f'_x está definida en la vecindad del punto (x, y). Por consiguiente, $\varphi(x)$ es derivable en el segmento $(x, x + \Delta x)$, y aplicando el teorema de Lagrange, obtenemos:

$$A = \Delta x \varphi'(\bar{x}),$$

donde $\bar{x}$ está comprendida entre x y $x + \Delta x$.

Pero,

$$\varphi'(\bar{x}) = f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) - f'_x(\bar{x}, y).$$

Puesto que f''_{xy} está definida en la vecindad del punto (x, y), f'_x es derivable en el segmento $[y, y + \Delta y]$; por eso, aplicando el teorema de Lagrange a la diferencia obtenida (respecto a la variable y), tenemos:

$$f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) - f'_x(\bar{x}, y) = \Delta y f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}),$$

donde $\bar{y}$ está comprendida entre y e $y + \Delta y$.

Por tanto, la expresión primitiva para A es igual a

$$A = \Delta x\, \Delta y f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}). \tag{1}$$

Al cambiar el orden de los términos medios, obtenemos:

$$A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] - [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)].$$

Introduzcamos la función auxiliar:

$$\psi(y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Entonces:

$$A = \psi(y + \Delta y) - \psi(y).$$

Aplicando otra vez el **teorema de Lagrange**, tenemos:

$$A = \Delta y \psi'(\bar{\bar{y}})$$

donde $\bar{\bar{y}}$ está comprendida entre y e $y + \Delta y$.

Pero,

$$\psi'(\bar{\bar{y}}) = f'_y(x + \Delta x,\ \bar{\bar{y}}) - f'_y(x,\ \bar{\bar{y}}).$$

Aplicando una vez más el teorema de Lagrange, obtenemos:

$$f'_y(x + \Delta x,\ \bar{\bar{y}}) - f'_y(x,\ \bar{\bar{y}}) = \Delta x f''_{yx}(\bar{\bar{x}},\ \bar{\bar{y}}),$$

donde $\bar{\bar{x}}$ está comprendida entre x y $x + \Delta x$.

Así, la expresión primitiva para A se puede escribir en la forma:

$$A = \Delta y \Delta x f''_{yx}(\bar{\bar{x}},\ \bar{\bar{y}}). \qquad (2)$$

Los primeros miembros de las igualdades (1) y (2) son iguales a A, por consiguiente son iguales también los segundos miembros, es decir,

$$\Delta x \Delta y f''_{xy}(\bar{x},\ \bar{y}) = \Delta y \Delta x f''_{xy}(\bar{\bar{x}},\ \bar{\bar{y}}),$$

de donde

$$f''_{xy}(\bar{x},\ \bar{y}) = f''_{yx}(\bar{\bar{x}},\ \bar{\bar{y}}).$$

Pasando en esta ecuación al límite, cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, obtenemos:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(\bar{x},\ \bar{y}) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yx}(\bar{\bar{x}},\ \bar{\bar{y}}).$$

Como las derivadas f''_{xy} y f''_{yx} son continuas en el punto (x, y), tenemos:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(\bar{x},\ \bar{y}) = f''_{xy}(x,\ y) \ \text{ y } \ \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yx}(\bar{\bar{x}},\ \bar{\bar{y}}) = f''_{yx}(x,\ y).$$

En definitiva:

$$f''_{xy}(x,\ y) = f''_{yx}(x,\ y)$$

y queda así demostrado el teorema.

El corolario del teorema demostrado es: si las derivadas parciales $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ y $\dfrac{\partial^n f}{\partial y^{n-k} \partial x^k}$, son continuas, entonces:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k\, \partial y^{n-k}} = \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-k}\, \partial x^k}.$$

Un teorema análogo es válido para la función de cualquier número de variables.

Ejemplo 4. Hallar

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} \text{ y } \frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z\,\partial x}, \text{ si } u = e^{xy} \operatorname{sen} z.$$

Solución.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy} \operatorname{sen} z; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = e^{xy} \operatorname{sen} z + xye^{xy} \operatorname{sen} z = e^{xy}(1+xy) \operatorname{sen} z;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = e^{xy}(1+xy)\cos z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy} \operatorname{sen} z; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = xe^{xy}\cos z;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z\,\partial x} = e^{xy}\cos z + xye^{xy}\cos z = e^{xy}(1+xy)\cos z.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z\,\partial x}$$

(véase, además, los ejemplos 1 y 2 de este párrafo).

§ 13. SUPERFICIES DE NIVEL

Supongamos que en el espacio (x, y, z) existe un dominio D en el cual está dada la función

$$u = u(x, y, z). \tag{1}$$

Suele decirse en este caso que en el dominio D está dado el *campo escalar*. Si, por ejemplo, $u(x, y, z)$ designa la temperatura en el punto $M(x, y, z)$, se dice que está dado el campo escalar de temperaturas. Si el dominio D ha sido llenado con líquido o gas y la función $u(x, y, z)$ designa la presión, se trata del campo escalar de presiones, etc.

Examinemos los puntos del dominio D, donde la función $u(x, y, z)$ tiene un valor constante c:

$$u(x, y, z) = c. \tag{2}$$

El conjunto de estos puntos forma una superficie. Al tomar otro valor de c, obtenemos otra superficie. Estas superficies se llaman *superficies de nivel*.

Ejemplo 1. Sea

$$u(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$$

el campo escalar.

Las superficies de nivel serán:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = c,$$

es decir, elipsoides cuyos semiejes son $2\sqrt{c}$, $3\sqrt{c}$, $4\sqrt{c}$.

Si u es función de dos variables x e y:

$$u = u(x, y),$$

las «superficies» de nivel serán ciertas líneas en el plano Oxy:

$$u(x, y) = c \tag{2'}$$

que se llaman *líneas de nivel*.

Si ponemos los valores de u a lo largo del eje Oz:

$$z = u(x, y),$$

las líneas de nivel en el plano Oxy serán proyecciones de las líneas que se obtienen en la intersección de la superficie $z = u(x, y)$ con

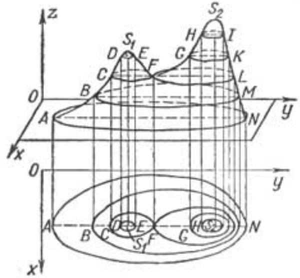

Fig. 175

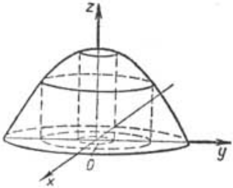

Fig. 176

los planos $z = c$ (fig. 175). Conociendo las líneas de nivel, es fácil estudiar el carácter de la superficie $z = u(x, y)$.

Ejemplo 2. Determinar las líneas de nivel de la función $z = 1 - x^2 - y^2$. Las líneas de nivel serán las líneas representadas por la ecuación $1 - x^2 - y^2 = c$. Estas son circunferencias de radio $\sqrt{1-c}$ (fig. 176). En particular, cuando $c = 0$, obtenemos la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

§ 14. DERIVADA SIGUIENDO UNA DIRECCION

Examinemos la función $u = u(x, y, z)$ y el punto $M(x, y, z)$ dados en el dominio D. Del punto M tracemos el vector S, cuyos cosenos directores son $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (fig. 177). Analicemos un punto $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ sobre el vector S a una distancia Δs de su origen. Entonces:

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Supongamos que la función $u(x, y, z)$ es continua y tiene derivadas continuas respecto a sus argumentos en el dominio D. Análogamente a lo hecho en el § 7, representemos el incremento total de la función así:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z, \tag{1}$$

donde ε_1, ε_2 y ε_3 tienden a cero, cuando $\Delta s \to 0$. Dividamos todos

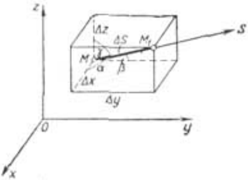

Fig. 177

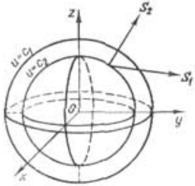

Fig. 178

los miembros de la igualdad (1) por Δs:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta s}. \tag{2}$$

Es evidente que

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta, \quad \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma.$$

Por tanto, la igualdad (2) se puede escribir en la forma:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \\ + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_3\cos\gamma. \tag{3}$$

El límite de la razón $\frac{\partial u}{\partial s}$ para $\Delta s \to 0$ se llama *derivada de la función $u = u(x, y, z)$ en el punto (x, y, z), siguiendo la dirección del vector* $\boldsymbol{S}$, y se designa por $\frac{\partial u}{\partial s}$, es decir,

$$\lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial s}. \tag{4}$$

De este modo, pasando al límite en la igualdad (3), obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{5}$$

De la fórmula (5) se deduce que, conociendo las derivadas parciales, es fácil hallar la derivada siguiendo cualquier dirección $\boldsymbol{S}$. Las propias derivadas parciales se presentan como caso particular de la derivada según la dirección. Así por ejemplo, para $\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{2}$, $\gamma=\frac{\pi}{2}$, tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos 0+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2}+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Ejemplo. Sea la función

$$u=x^2+y^2+z^2.$$

Hallar la derivada $\frac{\partial u}{\partial s}$, en el punto $M(1,\ 1,\ 1)$:

a) siguiendo la dirección del vector $\boldsymbol{S}_1=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$;

b) siguiendo la dirección del vector $\boldsymbol{S}_2=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

Solución. a) Hallemos los cosenos directores del vector S_1:

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{2}{\sqrt{14}},$$

$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{14}},\quad \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial u}{\partial s_1}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{2}{\sqrt{14}}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{14}}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{3}{\sqrt{14}}$$

Las derivadas parciales en el punto $M(1,\ 1,\ 1)$ son·

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=2z;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M=2,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M=2,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M=$$

Así,

$$\frac{\partial u}{\partial s_1}=2\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{12}{\sqrt{14}}$$

b) Hallemos los cosenos directores del vector S_2:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial u}{\partial s_2}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}.$$

Observemos que

$$2\sqrt{3}>\frac{12}{\sqrt{14}}\ (\text{fig. } 178).$$

§ 15. GRADIENTE

En cada punto del dominio D en que se da la función $u=u(x, y, z)$ determinemos un vector, cuyas proyecciones sobre los ejes de coordenadas son los valores de las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ de esta función en el punto correspondiente:

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}. \qquad (1)$$

Este vector se llama *gradiente* de la función $u(x, y, z)$. Se dice que en el dominio D está definido el *campo vectorial de gradientes.* Demostremos ahora el teorema que determina la relación entre el gradiente y la derivada siguiendo la dirección.

Teorema. *Sea el campo escalar* $u=u(x, y, z)$ *en el que está definido el campo de gradientes*

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

La derivada $\frac{\partial u}{\partial s}$ *siguiendo la dirección de un cierto vector* $\boldsymbol{S}$ *es igual a la proyección del vector* grad u *sobre el vector* $\boldsymbol{S}$.

Demostración: Examinemos el vector unitario $\boldsymbol{S}^0$ que corresponde al vector $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{S}^0=\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\cos\beta+\boldsymbol{k}\cos\gamma.$$

Calculemos el producto escalar de los vectores grad u, y $\boldsymbol{S}^0$:

$$\operatorname{grad} u\cdot\boldsymbol{S}^0=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (2)$$

El segundo miembro de la igualdad (2) es la derivada de la función $u(x, y, z)$ siguiendo la dirección del vector $\boldsymbol{S}$. Por consiguiente, se puede escribir:

$$\operatorname{grad} u\cdot\boldsymbol{S}^0=\frac{\partial u}{\partial s}.$$

Si designamos por φ el ángulo entre los vectores grad u y $\boldsymbol{S}^0$ (fig. 179), podemos escribir:

$$|\operatorname{grad} u| \cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial s} \tag{3}$$

o

$$\text{proyección} \cdot S^0 \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial s}. \tag{4}$$

Queda así demostrado el teorema.

Partiendo del teorema demostrado, podemos establecer la relación entre el gradiente y la derivada en el punto dado siguiendo cualquier dirección. En el punto dado $M(x, y, z)$ construimos el vector

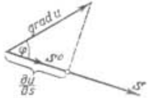

Fig. 179

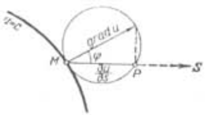

Fig. 180

grad u (fig. 180). Formemos una esfera en la cual el vector grad u es el diámetro. Tracemos el vector $\boldsymbol{S}$, partiendo del punto M. Designemos por P el punto de intersección del vector $\boldsymbol{S}$ con la superficie de la esfera. Es evidente que $MP = |\operatorname{grad} u| \cos\varphi$, si φ es el ángulo entre las direcciones del gradiente y el segmento MP $\left(\text{siendo } \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$, es decir, $MP = \frac{\partial u}{\partial s}$. Está claro que si el vector $\boldsymbol{S}$ toma la dirección contraria, la derivada cambia de signo, pero su valor absoluto permanece invariable.

Determinemos algunas propiedades del gradiente.

1) *La derivada en el punto dado, siguiendo la dirección del vector $\boldsymbol{S}$, tiene el valor máximo, si la dirección del vector $\boldsymbol{S}$ coincide con la del gradiente. Este valor máximo de la derivada es igual a $|\operatorname{grad} u|$.*

Esta afirmación es válida lo que se deduce directamente de la igualdad (3); $\frac{\partial u}{\partial s}$ tiene el valor máximo, cuando $\varphi = 0$, en este caso:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = |\operatorname{grad} u|.$$

2) *La derivada, siguiendo la dirección del vector, tangente a la superficie de nivel, es igual a cero.*

Esta afirmación se deduce de la fórmula (3). En efecto, en este caso:

$$\varphi=\frac{\pi}{2}, \quad \cos\varphi=0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial s}=|\operatorname{grad} u|\cos\varphi=0.$$

Ejemplo 1. Sea la función:

$$u=x^2+y^2+z^2,$$

a) Determinemos el gradiente en el punto M (1, 1, 1). La expresión del gradiente de la función dada en el punto arbitrario será:

$$\operatorname{grad} u=2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}.$$

Por consiguiente,

$$(\operatorname{grad} u)_M=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}, \quad |\operatorname{grad} u|_M=2\sqrt{3}.$$

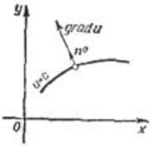

Fig. 181

b) Determinemos la derivada de la función u en el punto M (1, 1, 1) siguiendo la dirección del gradiente. Los cosenos directores del gradiente serán:

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial u}{\partial s}=2\frac{1}{\sqrt{3}}+2\frac{1}{\sqrt{3}}+2\frac{1}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3},$$

es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial s}=|\operatorname{grad} u|.$$

Observación. Si $u=u(x, y)$ es una función de dos variables el vector

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

está en el plano Oxy. Demostremos que *grad u es perpendicular a la línea de nivel* $u(x, y)=c$, la cual se halla en el plano Oxy y pasa por el punto correspondiente. En efecto, el coeficiente angular k_1 de la tangente a la línea de nivel $u(x, y)=c$ será igual a $k_1=-\frac{u'_x}{u'_y}$.

El coeficiente angular k_2 del gradiente es igual a $k_2=\frac{u'_y}{u'_x}$. Es evidente que $k_1k_2=-1$, lo que comprueba que nuestra afirmación es válida (fig. 181). La propiedad análoga del gradiente de una función de tres variables será establecida en el § 6 del capítulo IX.

Ejemplo 2. Hallar el gradiente de la función $u=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$ (fig. 182) en el punto M (2, 4).

Solución. Aquí:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x\,|_M = 2, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2}{3}\,y\,|_M = \frac{8}{3}.$$

Por tanto,

$$\operatorname{grad} u = 2i + \frac{8}{3}\,j.$$

La ecuación de la línea de nivel (fig. 183) que pasa por el punto dado será:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = \frac{22}{3}.$$

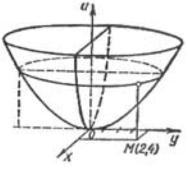

Fig. 182

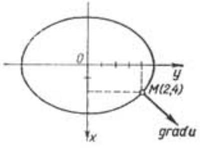

Fig. 183

§ 16. FORMULA DE TAYLOR PARA UNA FUNCION DE DOS VARIABLES

Supongamos que una función de dos variables

$$z = f(x,\ y)$$

es continua, lo mismo que todas sus derivadas parciales de orden hasta $(n+1)$ inclusive en cierta vecindad del punto $M(a,\ b)$. Entonces se puede representar la función de dos variables, al igual que se hizo en el caso de la función de una variable, (véase § 6, cap IV), como la suma de un polinomio de n-ésimo grado, desarrollado según las potencias enteras de $(x-a)$ e $(y-b)$ y un resto. Demostremos después que para $n=2$, esta fórmula tiene la forma:

$$f(x,\ y) = A_0 + D(x-a) + E(y-b) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[A(x-a)^2 + 2B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2\right] + R_2, \quad (1)$$

donde los coeficientes A_0, D, E, A, B, C no dependen de x e y, mientras que el resto R_2 tiene una estructura análoga a la del término complementario de la fórmula de Taylor para una sola variable.

Apliquemos la fórmula de Taylor para la función $f(x,\ y)$ de una sola variable y, considerando x constante (hasta los términos de segundo orden):

$$f(x, y) = f(x, b) + \frac{y-b}{1} f'_y(x, b) +$$

$$+ \frac{(y-b)^2}{1\cdot 2} f''_{yy}(x, b) + \frac{(y-b)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''_{yyy}(x, \eta_1), \quad (2)$$

donde $\eta_1 = b + \theta_1 (y - b)$, $0 < \theta_1 < 1$. Utilizando la fórmula de Taylor, desarrollemos las funciones $f(x, b)$, $f'_y(x, b)$, $f''_{yy}(x, b)$ según las potencias enteras de $(x - a)$, hasta las derivadas mixtas de tercer orden inclusive:

$$f(x, b) = f(a, b) + \frac{x-a}{1} f'_x(a, b) +$$

$$+ \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''_{xx}(a, b) + \frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''_{xxx}(\xi_1, b), \quad (3)$$

donde $\xi_1 = x + \theta_2 (x - a)$, $\theta < \theta_2 < 1$;

$$f'_y(x, b) = f'_y(a, b) + \frac{x-a}{1} f''_{yx}(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f'''_{yxx}(\xi_2, b), \quad (4)$$

donde $\xi_2 = x + \theta_3 (x - a)$, $0 < \theta_3 < 1$;

$$f''_{yy}(x, b) = f''_{yy}(a, b) + \frac{x-a}{1} f'''_{yyx}(\xi_3, b), \quad (5)$$

donde $\xi_3 = x + \theta_4 (x - a)$; $0 < \theta_4 < 1$.

Introduciendo las expresiones (3), (4) y (5) en la fórmula (2), obtenemos:

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{x-a}{1} f'_x(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''_{xx}(a, b) +$$

$$+ \frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''_{xxx}(\xi_1, b) + \frac{y-b}{1}\left[f'_y(a, b) + \frac{x-a}{1} f''_{yx}(a, b) + \right.$$

$$\left. + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f'''_{yxx}(\xi_2, b)\right] + \frac{(y-b)^2}{1\cdot 2}\left[f''_{yy}(a, b) + \frac{x-a}{1} f'''_{yyx}(\xi_3, b)\right] +$$

$$+ \frac{(y-b)^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot} f'''_{yyy}(x, \eta).$$

Disponiendo los números como se indica en la fórmula (1), obtenemos:

$$f(x,\ y)=f(a,\ b)+(x-a)f'_x(a,\ b)+(y-b)f'_y(a,\ b)+$$
$$+\frac{1}{2!}[(x-a)^2 f''_{xx}(a,\ b)+2(x-a)(y-b)f''_{xy}(a,\ b)+$$
$$+(y-b)^2 f''_{yy}(a,\ b)]+\frac{1}{3!}[(x-a)^3 f'''_{xxx}(\xi_1,\ b)+$$
$$+3(x-a)^2(y-b)f'''_{xxy}(\xi_2,\ b)+3(x-a)(y-b)^2 f'''_{xyy}(\xi_3,\ b)+$$
$$+(y-b)^3 f'''_{yyy}(a,\ \eta)]. \qquad (6)$$

Esta es la fórmula de Taylor para $n=2$. La expresión

$$R_2=\frac{1}{3!}[(x-a)^3 f'''_{xxx}(\xi_1,\ b)+3(x-a)^2(y-b)f'''_{xxy}(\xi_2,\ b)+$$
$$+3(x-a)(y-b)^2 f'''_{xyy}(\xi_3,\ b)+(y-b)^3 f'''_{yyy}(a,\ \eta)]$$

se llama término complementario. Pongamos ahora $x-a=\Delta x$, $y-b=\Delta y$, $\Delta\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, y transformemos R_2:

$$R_2=\frac{1}{3!}\left[\frac{\Delta x^3}{\Delta\rho^3}f'''_{xxx}(\xi_1,\ b)+3\frac{\Delta x^2\,\Delta y}{\Delta\rho^3}f'''_{xxy}(\xi_2,\ b)+\right.$$
$$\left.+3\frac{\Delta x\,\Delta y^2}{\Delta\rho^3}f'''_{xyy}(\xi_2,\ b)+\frac{\Delta y^3}{\Delta\rho^3}f'''_{yyy}(a,\ \eta)\right]\Delta\rho^3.$$

Puesto que $|\Delta x|<\Delta\rho$, $|\Delta y|<\Delta\rho$, y las terceras derivadas, según la hipótesis, son acotadas, el coeficiente de $\Delta\rho^3$ es limitado en el dominio examinado. Designemos este coeficiente por α_0 y escribamos:

$$R_2=\alpha_0\Delta\rho^3.$$

La fórmula de Taylor (6) para $n=2$ toma la forma:

$$f(x,\ y)=f(a,\ b)+\Delta x f'_x(a,\ b)+\Delta y f'_y(a,\ b)+$$
$$+\frac{1}{2!}[\Delta x^2 f''_{xx}(a,\ b)+2\Delta x\,\Delta y f''_{xy}(a,\ b)+\Delta y^2 f''_{yy}(a,\ b)]+\alpha_0\,\Delta\rho^3. \qquad (6')$$

Para cualquier n la fórmula de Taylor tiene una forma semejante.

§ 17. MAXIMO Y MINIMO DE UNA FUNCION DE VARIAS VARIABLES

Definición 1. Se dice que la función $z=f(x,\ y)$ tiene un máximo en el punto $M_0(x_0,\ y_0)$ (es decir, cuando $x=x_0$, e $y=y_0$) si

$$f(x_0,\ y_0)>f(x,\ y)$$

para todos los puntos (x, y) suficientemente próximos al punto (x_0, y_0) y distintos de este punto.

Definición 2. De modo igual se dice que la función $z = f(x, y)$ tiene un *mínimo* en el punto $M_0(x_0, y_0)$, si

$$f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

para todos los puntos (x, y) suficientemente próximos al punto (x_0, y_0) y distintos de este punto.

El máximo y el mínimo de una función se llaman *extremos* de esta función, es decir, la función admite un extremo en un punto dado, si tiene un máximo o un mínimo en esto punto.

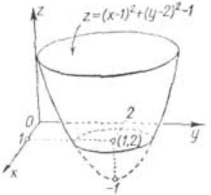

Fig. 184

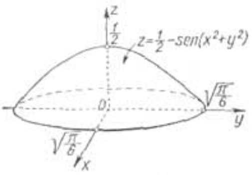

Fig. 185

Ejemplo 1. La función

$$z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$$

alcanza el mínimo para $x = 1$, $y = 2$, es decir, en el punto $(1, 2)$. Efectivamente, $f(1, 2) = -1$ y como $(x-1)^2$ y $(y-2)^2$ son siempre positivos para $x \neq 1$, $y \neq 2$, entonces:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 > -1$$

es decir,

$$f(x, y) > f(1, 2).$$

En la figura 184 se da la interpretación geométrica de este resultado.

Ejemplo 2. La función $z = \frac{1}{2} - \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$ admite un máximo cuando $x = 0$, $y = 0$ (es decir, en el origen de coordenadas, véase la figura 185). En efecto

$$f(0, 0) = \frac{1}{2}.$$

En el interior de la superficie $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{6}$ tomemos un punto (x, y) distinto del punto $(0, 0)$; entonces, para $0 < x^2 + y^2 < \frac{\pi}{6}$ tenemos:

$$\operatorname{sen}(x^2 + y^2) > 0$$

y por eso

$$f(x, y) = \frac{1}{2} - \operatorname{sen}(x^2 + y^2) < \frac{1}{2}$$

es decir,

$$f(x, y) < f(0, 0).$$

La definición de máximo y mínimo de la función se puede formular del modo siguiente:

Hagamos $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$; entonces:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta f.$$

1) Si $\Delta f < 0$ para todos los incrementos suficientemente pequeños de las variables independientes, la función $f(x, y)$ admite un *máximo* en el punto $M(x_0, y_0)$.

2) *Si $\Delta f > 0$ para todos los incrementos suficientemente pequeños* de las variables independientes, la función $f(x, y)$ admite un *mínimo* en el punto $M(x_0, y_0)$.

Estas definiciones son igualmente válidas para una función de cualquier número de variables.

Teorema 1. (Condiciones necesarias para la existencia de un extremo).

Si la función $z = f(x, y)$ toma un extremo, cuando $x = x_0$ e $y = y_0$, entonces cada derivada parcial de primer orden de z o bien se anula para estos valores de los argumentos, o bien no existe.

En efecto, demos a la variable y un valor determinado, $y = y_0$. *Entonces la función $f(x, y_0)$ será la función de una sola variable x.* Puesto que la función tiene un extremo (máximo o mínimo) cuando $x = x_0$, por consiguiente, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ es igual a cero, o no existe. De modo semejante se puede demostrar que $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ es igual a cero o no existe.

Este teorema no es suficiente para estudiar el problema de la existencia de los valores extremos de la función. Sin embargo, si estamos seguros de que existen los extremos, este teorema nos permite hallar sus valores. En caso contrario es preciso hacer un estudio más detallado.

Así por ejemplo, la función $z = x^2 - y^2$ tiene las derivadas $\frac{\partial z}{\partial x} = +2x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$, que se reducen a cero cuando $x = 0$, $y = 0$.

Sin embargo, la función no tiene máximo ni mínimo para los valores indicados. En efecto, esta función es igual a cero en el origen de coordenadas, mientras que en la vecindad inmediata de este punto, toma tantos valore positivos como negativos. Por consiguiente, el valor cero no es máximo ni mínimo (fig. 186).

Los puntos donde $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ (o no existe) y $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (o no existe), se llaman puntos *críticos* de la función $z = f(x, y)$.

Si la función alcanza el extremo en cualquier punto, esto puede tener lugar (en virtud del teorema 1) sólo en el punto crítico.

Para estudiar las funciones en puntos críticos establezcamos las condiciones suficientes del extremo de una función de dos variables.

Teorema 2. *Sea $f(x, y)$ una función definida en un dominio que comprende el punto $M_0(x_0, y_0)$. Esta función tiene derivadas parciales*

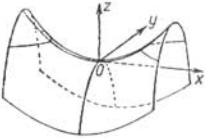

Fig. 186

continuas de hasta tercer orden inclusive. Supongamos, además, que $M_0(x_0, y_0)$ es un punto crítico de la función $f(x, y)$, es decir:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Entonces, para $x = x_0$, $y = y_0$:

1) *$f(x, y)$ tiene un máximo, si*

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0;$$

2) *$f(x, y)$ tiene un mínimo, si*

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0;$$

3) *$f(x, y)$ no tiene máximo ni mínimo, si*

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}\right)^2 < 0;$$

4) *si* $\frac{\partial^2 f(x_0 y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0 y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 0$ *puede existir o no el extremo (en este caso hace falta realizar estudios más detallados).*

Demostración. Escribamos la fórmula de Taylor de segundo orden para la función $f(x, y)$ (fórmula (6) § 16).

Haciendo

$$a = x_0,\ b = y_0,\ x = x_0 + \Delta x,\ y = y_0 + \Delta y,$$

tenemos:

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)=f(x_0,\ y_0)+\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}\Delta y+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right]+\alpha_0(\Delta\rho)^3,$$

donde $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ y α_0 tiende a cero, cuando $\Delta\rho\to 0$.

Según la hipótesis

$$\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}=0.$$

Por consiguiente,

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)=$$

$$=\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2\right]+\alpha_0(\Delta\rho)^3. \qquad (1)$$

Designemos por A, B, C los valores de las segundas derivadas parciales en el punto $M_0(x_0,\ y_0)$:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{M_0}=A;\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_{M_0}=B;\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{M_0}=C.$$

Designemos por φ el ángulo formado entre el eje Ox y la dirección del segmento M_0M, donde M es el punto de coordenadas $M(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$; entonces

$$\Delta x=\Delta\rho\ \cos\varphi;\ \Delta y=\Delta\rho\ \operatorname{sen}\varphi.$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula para Δf, hallamos:

$$\Delta f=\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2[A\cos^2\varphi+2B\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi+C\operatorname{sen}^2\varphi+2\alpha_0\Delta\rho]. \qquad (2)$$

Supongamos que $A\neq 0$.

Dividiendo y multiplicando por A la expresión comprendida entre corchetes, obtenemos:

$$\Delta f=\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\times$$

$$\times\left[\frac{(A\cos\varphi+B\operatorname{sen}\varphi)^2+(AC-B^2)\operatorname{sen}^2\varphi}{A}+2\alpha_0\Delta\rho\right]. \qquad (3)$$

Examinemos ahora cuatro casos posibles:

1) Sea $AC - B^2 > 0$, $A < 0$. Entonces, en el numerador de la fracción tenemos la suma de dos magnitudes no negativas. Estas no se anulan simultáneamente, puesto que el primer término se reduce a cero cuando $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{A}{B}$, y el segundo, cuando $\operatorname{sen} \varphi = 0$.

Si $A < 0$, la fracción es igual a una magnitud negativa que no se reduce a cero. Vamos a designarla por $-m^2$; entonces:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta\rho)^2 [-m^2 + 2\alpha_0 \Delta\rho],$$

donde m no depende de $\Delta\rho$ y $\alpha_0 \Delta\rho \to 0$ cuando $\Delta\rho \to 0$. Por tanto, para $\Delta\rho$ suficientemente pequeño tenemos:

$$\Delta f < 0$$

ó

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) < 0.$$

Pero, en este caso, para todos los puntos $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ suficientemente próximos al punto (x_0, y_0) tiene lugar la desigualdad

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) < f(x_0, y_0),$$

lo que significa que en el punto (x_0, y_0) la función $f(x, y)$ toma un *máximo*.

2) Sea $AC - B^2 > 0$ y $A > 0$. Razonando de modo semejante obtenemos:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta\rho)^2 [m^2 + 2\alpha_0 \Delta\rho]$$

ó

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) > f(x_0, y_0),$$

es decir, $f(x, y)$ toma un *mínimo* en el punto (x_0, y_0).

3') Sea $AC - B^2 < 0$ y $A > 0$. En este caso la función *no tiene máximo, ni mínimo*. La función crece a partir del punto (x_0, y_0), cuando seguimos unas direcciones, y decrece cuando seguimos las otras. En efecto, al desplazarnos a lo largo del rayo $\varphi = 0$, tenemos:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta\rho)^2 [A + 2\alpha_0 \Delta\rho] > 0;$$

la función crece. Al desplazarse a lo largo del rayo $\varphi = \varphi_0$ tal que $\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{A}{B}$, para $A > 0$, tenemos:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta\rho)^2 \left[\frac{AC - B^2}{A} \operatorname{sen}^2 \varphi_0 + 2\alpha_0 \Delta\rho\right] < 0;$$

la función decrece.

3″) Sea $AC - B^2 < 0$ y $A < 0$. Aquí la función *no tiene máximo, ni mínimo*. El estudio se realiza de manera igual que en el caso 3′.

3‴) Sea $AC - B^2 < 0$ y $A = 0$. Entonces $B \neq 0$, y podremos escribir la igualdad (2) en la forma:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 [\operatorname{sen}\varphi\,(2B\cos\varphi + C\operatorname{sen}\varphi) + 2\alpha_0\,\Delta\rho].$$

Cuando φ es suficientemente pequeño, la expresión $(2B\cos\varphi + C\operatorname{sen}\varphi)$ conserva su signo, puesto que se encuentra en la vecindad de $2B$, mientras que el factor $\operatorname{sen}\varphi$ cambia de signo, según sea φ mayor o menor de cero (después de elegir $\varphi > 0$ y $\varphi < 0$, podemos tomar ρ suficientemente pequeño, de modo que $2\alpha_0$ no influya sobre el signo de la expresión entre corchetes). Por consiguiente, en este caso Δf también cambia de signo, para diferentes φ, es decir, *para diferentes Δx y Δy. Esto significa que la función no tiene* máximo, ni mínimo.

Así, cualquiera que sea el signo de A, siempre será válida la afirmación:

Si $AC - B^2 < 0$ en el punto (x_0, y_0), la función no tiene máximo ni mínimo en este punto. En este caso, la superficie que representa gráficamente esta función puede tener, por ejemplo, en la vecindad de este punto la forma de una silla de montar (véase la fig. 186). Se dice que la función tiene en este punto un *míni-máx*.

4) Sea $AC - B^2 = 0$. En este caso las fórmulas (2) y (3) no dan ninguna indicación respecto al signo de Δf. Así, por ejemplo, para $A \neq 0$, tenemos:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 \left[\frac{(A\cos\varphi + B\operatorname{sen}\varphi)^2}{A} + 2\alpha_0\,\Delta\rho\right];$$

cuando $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{A}{B}\right)$, el signo de Δf se determinará por el signo de $2\alpha_0$ y es necesario realizar una investigación especial (por ejemplo, mediante la fórmula de Taylor de orden superior o mediante algún otro procedimiento). De este modo el teorema (2) queda completamente demostrado.

Ejemplo 3. Hallar el máximo y el mínimo de la función

$$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1.$$

Solución: 1) Hallemos los puntos críticos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 2.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3 &= 0, \\ -x + 2y - 2 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

obtenemos:

$$x=-\frac{4}{3}; \quad y=\frac{1}{3}.$$

2) Hallemos las derivadas de segundo orden en el punto crítico $\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ y determinemos la naturaleza de este punto crítico:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2; \quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-1; \quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2;$$

$$AC-B^2=2\cdot 2-(-1)^2=3>0.$$

Por tanto, en el punto $\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ la función dada tiene un mínimo que es igual a:

$$z_{\text{mín}}=-\frac{4}{3}.$$

Ejemplo 4. Hallar el máximo y el mínimo de la función:

$$z=x^3+y^3-3xy.$$

Solución. 1) *Hallemos los puntos críticos*, utilizando las condiciones necesarias para la existencia de un extremo

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=3x^2-3y=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=3y^2-3x=0.\end{aligned}\right\}$$

De aquí obtenemos dos puntos críticos:

$$x_1=1, \quad y_1=1 \ \text{ y } \ x_2=0, \quad y_2=0.$$

2) Hallemos las derivadas de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y.$$

3) Estudiemos la naturaleza del primer punto crítico

$$A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=1\\y=1}}=6; \quad B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)_{\substack{x=1\\y=1}}=-3, \quad C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=1\\y=1}}=6;$$

$$AC-B^2=36-9=27>0; \quad A>0.$$

Por tanto, en el punto (1, 1) la función dada tiene un mínimo:

$$z_{\text{mín}}=-1.$$

4) Estudiemos la naturaleza del segundo punto crítico $M_2\,(0, 0)$:

$$A=0; \quad B=-3; \quad C=0;$$

$$AC-B^2=-9<0.$$

Por tanto, en el segundo punto crítico la función no tiene máximo, ni mínimo (míni—máx).

Ejemplo 5. Desarrollar el número positivo dado a en tres sumandos positivos de modo que el producto de éstos tenga el valor máximo.

Solución. Designemos respectivamente estos tres números por x, y y $a-x-y$. El producto de estos sumandos es igual a:

$$u=xy\,(a-x-y).$$

Según la hipótesis, $x>0$, $y>0$, $a-x-y>0$, es decir, $x+y<a$, $u>0$. Por consiguiente, x e y pueden tomar valores pertencientes al dominio limitado por las rectas $x=0$, $y=0$, $x+y=a$.

Hallemos las derivadas parciales de la función u:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y(a-2x-y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x(a-2y-x).$$

Igualando estas derivadas a cero, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$y(a-2x-y)=0; \qquad x(a-2y-x)=0.$$

Resolviendo este sistema, encontremos los puntos críticos

$$\begin{array}{lll} x_1=0, & y_1=0, & M_1(0,\ 0); \\ x_2=0, & y_2=a, & M_2(0,\ a); \\ x_3=a, & y_3=0, & M_3(a,\ 0); \\ x_4=\dfrac{a}{3}, & y_4=\dfrac{a}{3}, & M_4\left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{a}{3}\right). \end{array}$$

Los primeros tres puntos se encuentran en la frontera del dominio y el último, en su interior. En la frontera del dominio la función u es igual a cero y en su interior la función es positiva; por tanto, en el punto $\left(\frac{a}{3},\ \frac{a}{3}\right)$ la función u tiene un máximo (puesto que el punto indicado es el único punto extremo dentro del *triángulo*). *El valor máximo del producto es*

$$u_{\text{máx}}=\frac{a}{3}\,\frac{a}{3}\left(a-\frac{a}{3}-\frac{a}{3}\right)=\frac{a^3}{27}.$$

Estudiemos la naturaleza de los puntos críticos, utilizando las condiciones necesarias y suficientes de existencia de un extremo. Hallemos las derivadas parciales de segundo orden de la función u:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-2y; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=a-2x-2y; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2x.$$

En el punto $M_1(0,\ 0)$ tenemos: $A=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$; $B=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=a$; $C=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; $AC-B^2=-a^2<0$. Por tanto, en el punto M_1 no hay máximo, ni mínimo. En el punto $M_2(0,\ a)$ tenemos: $A=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-2a$; $B=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-a$; $C=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; $AC-B^2=-a^2<0$. Por consiguiente, en el punto M_2 tampoco hay máximo o mínimo. En el punto $M_3(a,\ 0)$ tenemos: $A=0$; $B=-a$; $C=-2a$; $AC-B^2=-a^2<0$. En el punto M_3 no hay máximo, ni mínimo. En el punto $M_4\left(\frac{a}{3},\ \frac{a}{3}\right)$ tenemos:

$$A=-\frac{2a}{3}; \quad B=-\frac{a}{3}; \quad C=-\frac{2a}{3}; \quad AC-B^2=\frac{4a^2}{9}-\frac{a^2}{9}>0; \quad A<0.$$

Por tanto, la función tiene el máximo en el punto M_4.

Observación. La teoría de máximos y mínimos de la función de varias variables sirve de base para un método de obtención de fórmulas que representan dependencias funcionales mediante los datos experimentales. El problema de «Obtención de una función a base de los datos experimentales según el método de cuadrados mínimos» se estudia en § 19 del capítulo presente.

§ 18. MAXIMO Y MINIMO DE LA FUNCION DE VARIAS VARIABLES RELACIONADAS MEDIANTE ECUACIONES DADAS (MAXIMOS Y MINIMOS CONDICIONADOS)

Numerosos problemas de la determinación de los valores más grandes y más pequeños de la función se reducen a la búsqueda de los máximos y los mínimos de una función de varias variables que no son independientes, sino que están relacionadas entre sí mediante ciertas condiciones adicionales (por ejemplo, las variables deben *satisfacer a las ecuaciones dadas*).

Examinemos, por ejemplo, el siguiente problema. De un pedazo de hojalata dado de área $2a$ hace falta hacer una caja cerrada en *forma de paralelepípedo que tenga el volumen máximo. Designemos* el largo, el ancho y el alto de la caja por x, y, z respectivamente. El problema se reduce a la búsqueda del máximo de la función

$$v = xyz,$$

a condición de que $2xy + 2xz + 2yz = 2a$. Aquí se trata de un problema del *extremo condicionado*: las variables x, y, z están ligadas por la relación $2xy + 2xz + 2yz = 2a$. En este párrafo examinemos los métodos que se usan para solucionar tales problemas.

Estudiaremos, al principio, el problema del extremo condicionado de una función de dos variables, ligadas sólo por una condición. Hallemos los máximos y los mínimos de la función

$$u = f(x, y), \tag{1}$$

a condición de que x e y estén ligados entre sí por medio de la ecuación

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{2}$$

Al existir la condición (2), sólo una de las dos variables x e y *es independiente (por ejemplo x), puesto que y se determina de la* ecuación (2) como función de x. Si resolvemos la ecuación (2) respecto a y, sustituimos en la igualdad (1) y por la expresión hallada, obtenemos la función de una variable x y reducimos el problema al estudio de máximos y mínimos de la función de una sola variable independiente x.

Podemos también solucionar el problema planteado sin resolver la ecuación (2), respecto a x o y. La derivada de u respecto a x debe reducirse a cero para aquellos valores de x en los que la función u pueda tener máximo o mínimo.

Hallemos $\frac{du}{dx}$ de la ecuacion (1), teniendo en cuenta que y es una función de x:

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Por tanto, en los puntos de extremo

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0\,. \tag{3}$$

De la igualdad (2) hallemos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0\,. \tag{4}$$

La igualdad (4) es válida para todos los x e y que satisfagan a la ecuación (2) (véase § 11, cap. VIII). Si multiplicamos todos los términos de la igualdad (4) por un coeficiente indeterminado λ, y los sumamos con los términos correspondientes de la igualdad (3), obtenemos:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)+\lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=0$$

ó

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0. \tag{5}$$

Esta igualdad se cumple en todos los puntos en que hay un extremo. Elijamos λ de manera tal que para los valores de x e y correspondientes a un extremo de la función u la expresión $\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\right.$ $\left.+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$ de la fórmula (5) se reduzca a cero *),

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0\,.$$

Entonces para estos valores de x e y de la igualdad (5), se deduce que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0\,.$$

*) Para ser más precisos supongamos que en los puntos críticos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}\neq 0.$$

Así, pues, en los puntos de extremos se satisfacen tres ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0,\\ \varphi(x,\ y)=0\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

de tres incógnitas x, y, λ. De estas ecuaciones determinemos x e y, así como λ. La última desempeñó un papel auxiliar y ya no es necesaria.

Está claro que las ecuaciones (6) son condiciones necesarias para la existencia de un extremo condicionado, es decir, en los puntos de *los extremos se cumplen las ecuaciones* (6). *La proposición* recíproca no es cierta puesto que la función puede no tener un extremo condicionado para todos los x e y (y λ) que satisfagan las ecuaciones (6). Entonces hace falta realizar un estudio adicional de la naturaleza del punto crítico. Solucionando problemas concretos, se logra a veces determinar la naturaleza del punto crítico a base del carácter del mismo problema. Observemos, que los primeros miembros de las ecuaciones (6) son las derivadas parciales de la función

$$F(x,\ y,\ \lambda)=f(x,\ y)+\lambda\varphi(x,\ y) \tag{7}$$

respecto a las variables x, y, λ.

Así, *con el fin de hallar los valores de x e y que satisfagan a la* condición (2), para los cuales la función $u=f(x,\ y)$ pueda tener un máximo o un mínimo condicionado, es preciso formar una función auxilar (7), igualar a cero sus derivadas respecto a x, y y λ y determinar los desconocidos x, y (igual que el factor auxiliar λ) de las tres ecuaciones (6) obtenidas. El método examinado puede ser extendido al estudio del extremo condicionado de una función de cualquier número de variables.

Supongamos que es preciso determinar los máximos y los mínimos de la función $u=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ de n variables, a condición de que las variables $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ estén ligadas mediante $m\,(m<n)$ ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=0,\\ \varphi_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi_m(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=0.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Con el objeto de hallar los valores de $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, para los cuales puedan haber máximos y mínimos condicionados, hay que formar la función:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) + \\ + \lambda_2\varphi_2(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m\varphi_m(x_1, \ldots, x_n),$$

e igualar a cero sus derivadas parciales respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} = 0. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Determinemos de las $m + n$ ecuaciones (8) y (9) $x_1, x_2, \ldots, x_n$, así como las incógnitas auxiliares $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Como en el caso de una función de dos variables, el problema de la existencia de un máximo o un mínimo, para los valores encontrados de la función o de la ausencia completa de cualquier extremo en este punto queda pendiente.

Esta cuestión la resolvemos mediante consideraciones auxiliares.

Ejemplo 1. Volvamos al problema formulado al principio del párrafo presente: hallar el máximo de la función

$$v = xyz,$$

si es:

$$xy + xz + yz - a = 0 \quad (x > 0,\ y > 0,\ z > 0). \tag{10}$$

Formemos una función auxiliar:

$$F(x, y, \lambda) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - a).$$

Hallemos sus derivadas parciales y las igualamos a cero:

$$\left.\begin{array}{l} yz + \lambda(y + z) = 0, \\ xz + \lambda(x + z) = 0, \\ xy + \lambda(x + y) = 0. \end{array}\right\} \quad (11)$$

El problema se reduce a la solución del sistema de cuatro ecuaciones (10) y (11) con cuatro incógnitas (x, y, z, y λ). Para solucionar este sistema, multipliquemos la primera ecuación de (11) por x, la segunda por y, la tercera, por z, y sumemos las expresiones obtenidas. Teniendo en cuenta la igualdad (10), hallemos $\lambda = -\dfrac{3xyz}{2a}$. Introduciendo en la ecuacion (11) el valor obtenido de λ obtenemos:

$$yz\left[1-\frac{3x}{2a}(y+z)\right]=0,$$

$$xz\left[1-\frac{3y}{2a}(x+z)\right]=0,$$

$$xy\left[1-\frac{3z}{2a}(x+y)\right]=0.$$

Puesto que x, y, z según la naturaleza del problema son distintos de cero de las últimas ecuaciones se deduce:

$$\frac{3x}{2a}(y+z)=1, \quad \frac{3y}{2a}(x+z)=1, \quad \frac{3z}{2a}(x+y)=1.$$

De las dos primeras ecuaciones hallemos $x=y$, de las ecuaciones segunda y tercera, $y=z$. Pero, en este caso se deduce de la ecuacion (10): $x=y=z=\sqrt{\frac{a}{3}}$.

Así, obtenemos el único sistema de los valores x, y, z para los cuales la función puede tener un máximo o un mínimo.

Se puede demostrar que éste es el punto de máximo. Lo mismo se deduce también de ciertas consideraciones geométricas: según las condiciones del problema, el volumen de la caja no puede ser infinitamente grande, por tanto, el volumen debe ser máximo para ciertos valores de sus lados.

Entonces, el volumen de la caja es máximo, cuando ésta tiene la forma de cubo, con arista igual a $\sqrt{\frac{a}{3}}$.

Ejemplo 2. Hallar el valor máximo de la raíz de n-ésimo grado del producto de los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a condición de que la suma de estos números sea igual a un número dado a. El problema, por consiguiente se puede plantear así: hallar el máximo de la función $u=\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$, a condición de que:

$$\begin{gathered} x_1+x_2+\ldots+x_n-a=0 \\ (x_1>0,\ x_2>0,\ \ldots,\ x_n>0). \end{gathered} \tag{12}$$

Formemos una función auxiliar:

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda)=\sqrt[n]{x_1, \ldots, x_n}+\lambda(x_1+x_2+\ldots+x_n-a).$$

Hallemos sus derivadas parciales:

$$F'_{x_1}=\frac{1}{n}\frac{x_2x_3\ldots x_n}{(x_1\ldots x_n)^{\frac{n-1}{n}}}+\lambda=\frac{1}{n}\frac{u}{x_1}+\lambda=0 \quad \text{ó} \quad n=-n\lambda x_1,$$

$$F'_{x_2}=\frac{1}{n}\frac{u}{x_2}+\lambda=0 \qquad \text{ó} \quad u=-n\lambda x_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F'_{x_n}=\frac{1}{n}\frac{u}{x_n}+\lambda=0 \qquad \text{ó} \quad u=-n\lambda x_n.$$

De las últimas ecuaciones encontremos:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n$$

y, en virtud de la ecuación (12), obtenemos:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{a}{n}.$$

La naturaleza del problema dicta que en este punto crítico la función $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$ tiene un máximo igual a $\frac{a}{n}$.

Por consiguiente, para todos los números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ligados mediante la correlación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$, se cumple la desigualdad:

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant \frac{a}{n} \qquad (13)$$

(puesto que, según ha sido demostrado, $\frac{a}{n}$ es el mayor valor de esta función).

Sustituyendo a en la desigualdad (13) por su expresión de la ecuación (12), obtenemos:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}. \qquad (14)$$

Esta ecuación es válida para todos los números provistos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La expresión del primer miembro de la igualdad (14) se llama *valor medio geométrico* de estos números. Así, el valor medio geométrico de unos cuantos números positivos no es mayor que el valor medio aritmético de estos números.

§ 19. OBTENCION DE UNA FUNCION A BASE DE DATOS EXPERIMENTALES SEGUN EL METODO DE CUADRADOS MINIMOS

Supongamos que es preciso determinar experimentalmente una dependencia de la magnitud y en función de x:

$$y = \varphi(x). \qquad (1)$$

Sea el resultado del experimento n valores de la función y para los valores correspondientes del argumento x:

x	x_1	x_2	. . . . . .	x_n
y	y_1	y_2	. . . . . .	y_n

La forma de la función $y = \varphi(x)$ se determina teóricamente o a base del carácter de disposición en el plano de coordenadas de los puntos que corresponden a los valores experimentales. Estos puntos se llaman experimentales. Supongamos que los puntos experimentales se disponen en el plano de coordenadas de la manera indicada en la fig. 187*a*.

Tomando en consideración que durante el experimento tienen lugar errores, es natural suponer que la función desconocida $y = \varphi(x)$ se puede buscar en la forma de una función lineal $y = ax + b$. Si los puntos experimentales están dispuestos de la manera indicada en la fig. 187 *b*, es natural buscar la función $y = \varphi(x)$ en la forma: $y = ax^b$, etc. Elegida la forma de función $y = \varphi(x, a, b, c, \ldots)$, *tenemos que buscar los parámetros* $a, b, c, \ldots$ (que la integran) de modo tal que la función describa de la mejor manera el proceso examinado.

El método ampliamente difundido para solucionar el problema dado es el de *cuadrados mínimos* que consiste en lo siguiente.

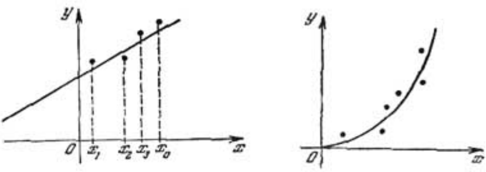

Fig. 187a, b

Examinemos una suma de los cuadrados de diferencias de los valores y_i, que se obtienen del experimento, y la función $\varphi(x, a, b, c, \ldots)$ en los puntos correspondientes:

$$S(a, b, c, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \ldots)]^2. \qquad (2)$$

Elijamos los parámetros $a, b, c, \ldots$ de modo que esta suma tenga valor mínimo:

$$S(a, b, c, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \ldots)]^2 = \text{mín}. \qquad (3)$$

Así, el problema se ha reducido a la búsqueda de los valores de los parámetros $a, b, c, \ldots$, para los cuales la función $S(a, b, c, \ldots)$ tiene un mínimo.

En virtud del teorema 1 (pág. 311) tenemos que estos valores a, b $c, \ldots$ satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \ \ldots, \qquad (4)$$

o, en la forma desarrollada:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i,\ a,\ b,\ c,\ \ldots)]\frac{\partial\varphi(x_i,\ a,\ b,\ c,\ \ldots)}{\partial a}=0,\\
&\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i,\ a,\ b,\ c,\ \ldots)]\frac{\partial\varphi(x_i,\ a,\ b,\ c,\ \ldots)}{\partial b}=0,\\
&\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i,\ a,\ b,\ c,\ \ldots)]\frac{\partial\varphi(x_i,\ a,\ b,\ c,\ \ldots)}{\partial c}=0.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Aquí, el número de ecuaciones es igual al de incógnitas. En cada caso concreto se investiga la cuestión sobre la existencia de la solución del sistema de ecuaciones (5) y del mínimo de la función $S\,(a,\ b,\ c,\ \ldots)$.

Examinemos algunos casos de la determinación de la función $y=\varphi\,(x,\ a,\ b,\ c,\ \ldots)$.

I. Sea $y=ax+b$. Entonces, la función $S\,(a,\ b)$ tiene la forma: (véase la expresión (2)):

$$S\,(a,\ b)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]^2. \qquad (6)$$

Esta es una función con dos variables, a y b (x_i e y_i son números dados; véase la tabla en la pág. 323). Por consiguiente,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial S}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]\,x_i=0,\\
&\frac{\partial S}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]=0,
\end{aligned}\right\}$$

es decir, el sistema de ecuaciones (5) en este caso, toma la forma:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}y_ix_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i^2-b\sum_{i=1}^{n}x_i=0,\\
&\sum_{i=1}^{n}y_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i-bn=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Hemos obtenido el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas a y b. Es evidente que el sistema tiene una solución determinada y la función $S(a, b)$ tiene un mínimo para los valores encontrados a y b*).

II. Sea la función de aproximación un trinomio de segundo grado

$$y = ax^2 + bx + c.$$

En este caso la expresión (2) tiene la forma:

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2. \tag{8}$$

Esta es una función de tres variables a, b, c.

El sistema de ecuaciones (5) toma la forma:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]\, x_i^2 = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]\, x_i = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] = 0, \end{aligned}\right\}$$

o, en la forma desarrollada:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 - a \sum_{i=1}^{n} x_i^4 - b \sum_{i=1}^{n} x_i^3 - c \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i^3 - b \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - c \sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} y_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b \sum_{i=1}^{n} x_i - cn = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Obtenemos un sistema de ecuaciones lineales para determinar las incógnitas a, b, c. De las condiciones del problema se deduce que el sistema tiene una solución determinada y, además, la función $S(a, b, c)$ tiene un mínimo para los valores obtenidos de a, b, c.

---

*) Esto se verifica fácilmente también a base de las condiciones suficientes (véase la pág. 312). En efecto, tenemos:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a\, \partial b} = \sum_{i=1}^{n} x_i; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = n.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a\, \partial b}\right)^2 = n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2 > 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} > 0.$$

Ejemplo: Supongamos que a base de un experimento hemos obtenido cuatro valores de la función buscada $y = \varphi(x)$, para los cuatro valores del argumento ($n = 4$) que se dan en la tabla

x	1	2	3	5
y	3	4	2,5	0,5

Busquemos la función φ en forma de una función lineal $y = ax + b$. Formemos la expresión $S(a, b)$:

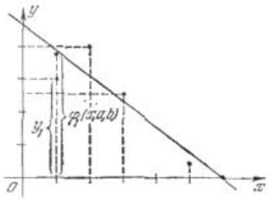

Fig. 187c

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{4} [y_i - (ax_i + b)]^2.$$

Para formar el sistema (7), de determinación de los coeficientes a y b, calculamos previamente

$$\sum_{i=1}^{4} y_i x_i = 21; \qquad \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 39;$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 11; \qquad \sum_{i=1}^{4} y_i = 10.$$

El sistema (2) toma la forma:

$$\left.\begin{array}{r} 21 - 39a - 11b = 0, \\ 10 - 11a - 4b = 0. \end{array}\right\}$$

Resolviendo este sistema, hallamos a y b: $a = -\frac{26}{35}$, $b = \frac{159}{35}$. La recta buscada (véase fig. 187c) es:

$$y = -\frac{26}{35}x + \frac{159}{35}.$$

§ 20. PUNTOS SINGULARES DE UNA CURVA

El concepto de la derivada parcial se utiliza para el estudio de las curvas.

Sea $F(x, y) = 0$, la ecuación de una curva.

El coeficiente angular de la tangente a la curva se determina según la fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

(vease § 11, cap. VIII). Si por lo menos una de las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$ no se reduce a cero en el punto dado $M(x, y)$ de la curva examinada, en éste se define $\frac{\partial y}{\partial x}$ o $\frac{\partial x}{\partial y}$. La curva $F(x, y) = 0$ tiene en este punto una tangente bien determinada. En este caso $M(x, y)$ se llama *punto simple*. Al contrario, si el punto $M_0(x_0, y_0)$ es tal que:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0,$$

el coeficiente angular de la tangente es indeterminado.

Definición. Si ambas derivadas parciales, $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$, se anulan en el punto $M_0(x_0, y_0)$ de la curva $F(x, y) = 0$ éste se llama *punto singular* de la curva. Por consiguiente, el *punto singular* de la curva está determinado por el sistema de ecuaciones:

$$F = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Claro está que no todas las curvas tienen puntos singulares. Por ejemplo, para la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

es evidente que

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}.$$

Las derivadas $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$ se reducen a cero sólo cuando $x = 0$, $y = 0$.

Pero estos valores de x e y no satisfacen la ecuación de la elipse, por consiguiente, la elipse no tiene puntos singulares.

Sin emprender un estudio detallado de la conducta de una curva en la proximidad del punto singular, examinemos unos cuantos ejemplos de curvas que tienen puntos singulares.

Ejemplo 1. Estudiar los puntos singulares de la curva

$$y_2 - x(x-a)^2 = 0 \quad (a > 0)$$

Solución. En el caso dado $F(x, y) = y^2 - x(x-a)^2$, por tanto

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x-a)(a-3x); \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$$

Resolviendo tres ecuaciones en conjunto:

$$F(x, y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{y} = 0$$

hallamos el sistema único de valores de x e y que las satisface:

$$x_0 = a, \quad y_0 = 0.$$

Por consiguiente, $M_0(a, 0)$ es el punto singular de la curva.

Estudiemos la conducta de la curva en la proximidad del punto singular y construyamos esta curva. Escribamos la ecuación dada en la forma:

$$y = \pm (x-a)\sqrt{x}.$$

De esta fórmula se deduce que la curva:

1) está definida sólo para $x \geqslant 0$; 2) es simétrica con relación al eje Ox; 3) corta el eje Ox en los puntos $(0,0)$ y $(a, 0)$. Como se ha indicado, el último punto es singular.

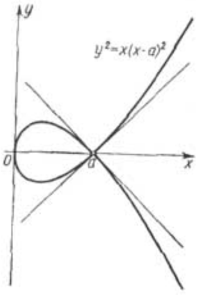

Fig. 188a.

Examinemos primero la parte de la curva, correspondiente a los valores positivos.

$$y = (x-a)\sqrt{x}.$$

Hallemos la primera y segunda derivadas de y respecto a x:

$$y' = \frac{3x-a}{2\sqrt{x}}, \qquad y'' = \frac{3x+a}{4x\sqrt{x}}.$$

Para $x = 0$ tenemos $y' = \infty$. Por consiguiente, la curva toca el eje Oy en el origen de coordenadas. Para $x = \frac{a}{3}$ tenemos $y' = 0$, $y'' > 0$, es decir, la función y tiene un mínimo cuando $x = \frac{a}{3}$:

$$y = -\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

En el segmento $0 < x < a$ tenemos $y < 0$; para $x > \frac{a}{3}$, $y' > 0$; cuando $x \to \infty$, $y \to \infty$. Para $x = a$ tenemos $y' = \sqrt{a}$, es decir, la rama de la curva

$y = +(x-a)\sqrt{x}$ tiene una tangente $y=\sqrt{a}\,(x-a)$ en el punto singular $M_0\,(a,\,0)$.

Puesto que la segunda rama de la curva $y = -(x-a)\sqrt{x}$ es simétrica a la primera respecto del eje Ox, es claro que en el punto singular la curva tiene otra tangente (a la segunda rama) definida por la ecuación

$$y=-\sqrt{a}\,(x-a).$$

La curva pasa dos veces por el punto singular. Tal punto se llama *doble* (o *crunodal*). La curva examinada se expone en la figura 188*a*.

Ejemplo 2. Hallar los puntos singulares de la curva parábola semicúbica)

$$y^2-x^3=0.$$

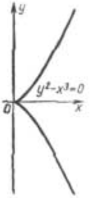

Fig. 188b

Solución. Las coordenadas de los puntos singulares se determinan, resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$y^2-x^3=0;\quad 3x^2=0;\quad 2y=0.$$

Por tanto, $M_0\,(0,\,0)$ es el punto singular. Escribamos la ecuación dada en la forma

$$y=\pm\sqrt{x^3}\;.$$

Para construir la curva, estudiemos al principio la rama que corresponde a los valores positivos: la otra rama de la curva, correspondiente a los valores negativos, no necesita un estudio especial, puesto que es simétrica a la primera con relación al eje Ox.

La función y está definida sólo para $x \geqslant 0$, no es negativa y crece con el aumento de x. Hallemos primera y segunda derivadas de la función $y=\sqrt{x^3}$:

$$y'=\frac{3}{2}\sqrt{x};\quad y''=\frac{3}{4}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\;.$$

Para $x=0$ tenemos: $y=0$, $y'=0$. Por consiguiente, la rama examinada de la curva tiene una tangente $y=0$ en el origen de coordenadas. La segunda rama de la curva $y=-\sqrt{x^3}$ también pasa por el origen de coordenadas teniendo la misma tangente $y=0$. Por tanto, dos diferentes ramas de la curva pasan por el origen de coordenadas, tienen una misma tangente y se disponen simétricamente por ambos lados de esta tangente. Tal punto singular se llama *punto de retroceso de primera especie* (fig. 188 *b*).

Observación. Se puede considerar la curva $y^2-x^3=0$ como un caso límite de la curva $y^2=x\,(x-a)^2$ (examinada en el ejemplo 1), cuando $a\to 0$, es decir, *cuando el lazo de la curva se contrae hasta reducirse a un solo punto.*

Ejemplo 3. Estudiar la curva $(y-x^2)^2-x^5=0$.

Solución. *Las coordenadas de los puntos singulares se determinan por* el sistema de ecuaciones

$$-4x\,(y-x^2)-5x^4=0;\quad 2\,(y-x^2)=0,$$

que tiene la solución única: $x=0$, $y=0$. Por tanto, el origen de coordenadas es un punto singular.

Escribamos la ecuación dada en la forma: $y=x^2\pm\sqrt{x^5}$. *De esta ecuación* se deduce que x puede tomar todos los valores comprendidos entre 0 y $+\infty$.

Hallemos las derivadas de primer y segundo orden:

$$y' = 2x \pm \frac{5}{2}\sqrt{x^3}; \quad y'' = 2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{x}.$$

Estudiemos por separado las ramas de la curva que corresponden respectivamente a los valores positivos y negativos. En ambos casos para $x = 0$ tenemos: $y = 0$, $y' = 0$, es decir, el eje Ox es la única tangente para las dos ramas. Examinemos al principio la rama

$$y = x^2 + \sqrt{x^5}.$$

Cuando x crece desde 0 hasta ∞, y también crece desde 0 hasta ∞. La rama segunda

$$y = x^2 - \sqrt{x^5}$$

corta el eje Ox en los puntos (0, 0) y (1, 0). Cuando $x = \frac{16}{25}$, la función $y =$

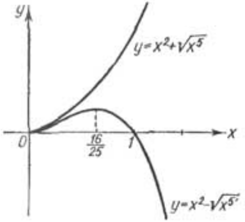

Fig. 189

$= x^2 - \sqrt{x^5}$ tiene un máximo. Si $x \to +\infty$, entonces $y \to -\infty$.

Así, las dos ramas de la curva pasan por el origen de coordenadas. Ambas tienen una misma tangente y se disponen por un lado de ésta, en la vecindad del punto de contacto. Tal punto singular se llama *punto de retroceso de segunda especie*. La gráfica de la función estudiada está expuesta en la figura 189.

Ejemplo 4. Estudiar la curva $y^2 - x^4 + x^6 = 0$.

Solución. El origen de coordenadas es un punto singular. Para examinar variación de la curva en la vecindad de este punto escribamos la ecuación de la curva en forma:

$$y = \pm x^2\sqrt{1 - x^2}.$$

Puesto que en la ecuación entran solamente potencias pares de las variables, la curva es simétrica con relación a los ejes de coordenadas y, por consiguiente, es suficiente estudiar una parte de la curva, correspondiente a los valores positivos de x e y. De la última ecuación se deduce que x puede variar en el segmento desde 0 hasta 1, es decir, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Hallemos la primera derivada para la rama de la curva que presenta gráficamente la función $y = +x^2\sqrt{1-x^2}$:

$$y' = \frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Para $x = 0$ tenemos: $y = 0$, $y' = 0$. Por tanto, la curva toca el eje Ox en el origen de coordenadas.

Para $x = 1$ tenemos: $y = 0$, $y' = \infty$. Por consiguiente, en el punto $(1, 0)$ la tangente es paralela al eje Oy. Cuando $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$, la función tiene un máximo (fig. 190).

En el origen de coordenadas (en el punto singular) las dos ramas de la curva, que corresponden a los signos positivo y negativo delante de la raíz, se tocan

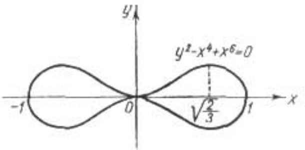

Fig. 190

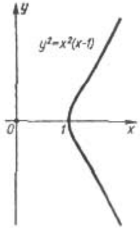

Fig. 191

mutuamente. Tal punto singular se llama punto de osculación (se llama también *tacnodo*).

Ejemplo 5. Estudiar la curva $y^2 - x^2(x-1) = 0$.

Solución. Escribamos el sistema de ecuaciones que define los puntos singulares:

$$y^2 - x^2(x-1) = 0; \quad -3x^2 + 2x = 0; \quad 2y = 0.$$

Este sistema tiene la solución: $x = 0$, $y = 0$, por consiguiente, el punto $(0, 0)$ de la curva es singular. Escribamos la ecuación dada en la forma $y = \pm x\sqrt{x-1}$. Es evidente que x puede tomar todos los valores comprendidos entre 1 y $+\infty$, así como el valor de cero (en este caso $y = 0$).

Estudiamos la rama de la curva correspondiente al valor positivo, delante de la raíz. Cuando x crece desde 1 hasta ∞, y aumenta también desde 0 hasta ∞. La derivada es:

$$y' = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}.$$

Para $x = 1$ tenemos $y' = \infty$. Por consiguiente, en el punto $(1, 0)$ la tangente es paralela al eje Oy.

La segunda rama de la curva, que corresponde al signo negativo, es simétrica a la primera respecto al eje Ox.

El punto (0, 0) tiene coordenadas que satisfacen la ecuación y, por tanto, pertenece a la curva, pero en su vecindad no hay otros puntos de la curva (fig. 191). El punto singular de este género se llama *aislado*.

Ejercicios para el capítulo VIII

Hallar las derivadas parciales de las siguientes funciones:

1. $z=x^2\,\mathrm{sen}^2\,y$. *Resp.* $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\,\mathrm{sen}^2\,y$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\,\mathrm{sen}\,2y$. **2.** $z=x^{y^2}$. *Resp.* $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2x^{y^2-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x^{y^2}2y\ln x$. **3.** $u=x^{x^2+y^2+z^2}$. *Resp.* $\frac{\partial u}{\partial x}=2xe^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=2ye^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=2ze^{x^2+y^2+z^2}$. **4.** $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. *Resp.* $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **5.** $z=\mathrm{arcotg}\,(xy)$. *Resp.* $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{1+x^2y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{1+x^2y^2}$. **6.** $z=\mathrm{arcotg}\,\frac{y}{x}$. *Resp.* $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$.

7. $z=\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$. *Resp.* $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$.

8. $u=e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{z}{y}}$. *Resp.* $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}-\frac{z}{y^2}e^{\frac{z}{y}}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{y}e^{\frac{z}{y}}$. **9.** $z=\mathrm{arcsen}\,(x+y)$. *Resp.* $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}=\frac{\partial z}{\partial y}$. **10.** $z=\mathrm{arcotg}\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$. *Resp.* $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2}{x\sqrt{x^4-y^4}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{x^4-y^4}}$.

Hallar las diferenciales totales de las siguientes funciones

11. $z=x^2+xy^2+\mathrm{sen}\,y$. *Resp.* $dz=(2x+y^2)\,dx+(2xy+\cos y)\,dy$. **12.** $z=\ln(xy)$. *Resp.* $dz=\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}$. **13.** $z=e^{x^2+y^2}$. *Resp.* $dz=2e^{x^2+y^2}(x\,dx+y\,dy)$.

14. $u=\mathrm{tg}\,(3x-y)+6^{y+z}$. *Resp.* $du=\frac{3\,dx}{\cos^2(3x-y)}+\left(-\frac{1}{\cos^2(3x-y)}+6^{y+z}\ln 6\right)dy+6^{y+z}\ln 6\,dz$. **15.** $w=\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{y}$. *Resp.* $dw=\frac{y\,dx-x\,dy}{|y|\sqrt{y^2-x^2}}$.

16. Hallar $f'_x(2, 3)$ y $f'_y(2, 3)$ si $f(x, y)=x^2+y^2$. *Respuesta:* $f'_x(2, 3)=4$, $f'_y(2, 3)=27$. **17.** Hallar $df(x, y)$ para $x=1$, $y=0$; $dx=\frac{1}{2}$, $dy=\frac{1}{4}$ si $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$. *Respuesta:* $\frac{1}{2}$. **18.** Hallar para los pequeños valores absolutos de las variables x, y, z una fórmula que da la expresión aproximada para: $\sqrt{\frac{1+x}{(1+y)(1+z)}}$ *Respuesta*: $1+\frac{1}{2}(x-y-z)$. **19.** Hallar lo mismo para $\sqrt{\frac{1+x}{1+y+z}}$. *Respuesta*: $1+\frac{1}{2}(x-y-z)$. **20.** Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $z=u+v^2$, $u=x^2+\operatorname{sen} y$, $v=\ln(x+y)$. *Respuesta*: $\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2v\frac{1}{x+y}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\cos y+2v\frac{1}{x+y}$. **21.** Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $z=\sqrt{\frac{1+u}{1+v}}$; $u=-\cos x$; $v=\cos x$. *Respuesta*: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=0$. **22.** Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$

58

y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $z=e^{u-2v}$, $u=\operatorname{sen} x$, $v=x^3+y^2$. Respuesta: $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{u-2v}(\cos x-6x^2)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{u-2v}(0-2\cdot 2y)=-4ye^{u-2v}$. **23.** Hallar las derivadas totales de las funciones dadas: $z=\operatorname{arcsen}(u+v)$; $u=\operatorname{sen} x\cos\alpha$; $v=\cos x\operatorname{sen}\alpha$. *Resp.* $\frac{\partial z}{\partial x}=1$, si $2k\pi-\frac{\pi}{2}<x+\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial x}=-1$, si $2k\pi+\frac{\pi}{2}<x+\alpha<(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$. **24.** $u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$; $y=a\operatorname{sen} x$; $z=\cos x$. *Resp.* $\frac{\partial u}{\partial x}=e^{ax}\operatorname{sen} x$. **25.** $z=\ln(1-x^4)$; $x=\sqrt{\operatorname{sen}\theta}$; $\frac{dz}{d\theta}=-2\operatorname{tg}\theta$.

Hallar las derivadas de las funciones implícitas de x, dadas por las ecuaciones

26. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$. **27.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$. **28.** $y^x=x^y$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=\frac{yx^{y-1}-y^x\ln y}{xy^{x-1}-x^y\ln x}$. **29.** $\operatorname{sen}(xy)-e^{xy}-x^2y=0$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=\frac{y[\cos(xy)-e^{xy}-2x]}{x[x+e^{xy}-\cos(xy)]}$. **30.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; hállese $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$. *Resp.* $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2y}{b^2z}$. **31.** $u-v\operatorname{tg} aw=0$; hállese $\frac{\partial w}{\partial u}$ y $\frac{\partial w}{\partial v}$. *Resp.* $\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\cos^2 aw}{av}$; $\frac{dw}{dv}=-\frac{\operatorname{sen} 2aw}{2av}$. **32.** $z^2+\frac{2}{x}=\sqrt{y^2-z^2}$; demuéstrese que $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{z}$. **33.** $\frac{z}{x}=F\left(\frac{y}{z}\right)$; demuéstrese que $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$, sea cual fuera la función derivable F.

Calcular las derivadas parciales de segundo orden:

34. $z=x^3-4x^2y+5y^2$. *Resp.* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x-8y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=-8x$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=10$.

35. $z=e^x \ln y+\operatorname{sen} y \ln x$. *Resp.* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x \ln y-\frac{\operatorname{sen} y}{x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{e^x}{y}+$ $+\frac{\cos y}{x}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{e^x}{y^2}-\operatorname{sen} y \ln x$. **36.** Demostrar que, si $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ entonces: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$. **37.** Demostrar que, si $z=\frac{x^2y^2}{x+y}$ entonces: $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=2\frac{\partial z}{\partial x}$. **38.** Demostrar que, si $z=\ln(x^2+y^2)$ entonces: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. **39.** Demostrar que, si $z=\varphi(y+ax)+\psi(y-ax)$, entonces:

$$a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

para φ y ψ cualesquiera, derivadas dos veces.

40. Hallar la derivada de la función $z=3x^4-xy+y^3$ en el punto $M(1, 2)$ siguiendo dirección que forma con el eje Ox el ángulo de $60°$. *Respuesta*: $5+11\sqrt{3/2}$.

41. Hallar la derivada de la función $z=5x^2-3x-y-1$ en el punto $M(2, 1)$ siguiendo la dirección de la recta que une este punto con el punto $N(5, 5)$. *Respuesta*: 9, 4.

42. Hallar la derivada de la función $f(x, y)$, siguiendo las direcciones: 1) de la bisectriz del ángulo de coordenadas Oxy. *Respuesta*: $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

2) del semieje negativo Ox. *Respuesta*: $-\frac{\partial f}{\partial x}$.

43. $f(x, y)=x^3+3x^2+4xy+y^2$. Demostrar que en el punto $M\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ la derivada es igual a cero, siguiendo cualquier dirección ("función estacionaria").

44. Determinar de todos los triángulos de igual perímetro $2p$ el que tiene mayor área. *Respuesta*: triángulo equilátero.

45. Hallar un paralelepípedo rectangular de área total dada S que tenga el volumen máximo. *Respuesta*: cubo con arista igual a $\sqrt{\frac{S}{6}}$.

46. Hallar la distancia entre dos rectas en el espacio, cuyas ecuaciones son: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$, $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$. *Respuesta*: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Analizar el máximo y el mínimo de la función:

47. $z=x^3y^2(a-x-y)$. *Respuesta*: máximo z para $x=\frac{a}{2}$; $y=\frac{a}{3}$. **48.** $z=$ $=x^2+xy+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$. *Respuesta*: mínimo z para $x=y=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

49. $z=\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y+\operatorname{sen}(x+y)$ $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2};\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ *Respuesta*: máximo z para $x=y=\frac{\pi}{3}$.

50. $z=\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x+y)$ $(0\leqslant x\leqslant\pi;\ 0\leqslant y\leqslant\pi)$: *Respuesta*: máximo z para $x=y=\frac{\pi}{3}$.

Hallar los puntos singulares de las curvas siguientes, analizar la naturaleza de estos puntos singulares y escribir las ecuaciones de las tangentes en estos puntos:

51. $x^3+y^3-3axy=0$. *Respuesta*: $M_0(0, 0)$ es nudo; $x=0$, $y=0$ son ecuaciones de las tangentes.

52. $a^4y^2=x^4(a^2-x^2)$. *Respuesta*: punto de osculación en el origen de coordenadas; tangente doble $y^2=0$.

53. $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$. *Respuesta*: $M_0(0, 0)$ es punto de retroceso de primera especie, $y^2=0$ es la ecuación de la tangente.

54. $y^2=x^2(9-x^2)$. *Respuesta*: $M_0(0, 0)$ es nudo, $y=\pm 3x$ son las ecuaciones de las tangentes.

55. $x^4-2ax^2y-axy^2+a^2x^2=0$. *Respuesta*: $M_0(0, 0)$ es punto de retroceso de segunda especie; $y^2=0$ es la ecuación de la tangente doble.

56. $y^2(a^2+x^2)=x^2(a^2-x^2)$. *Respuesta*: $M_0(0, 0)$ es nudo; $y=\pm x$ son las ecuaciones de las tangentes.

57. $b^2x^2+a^2y^2=x^2y^2$. *Respuesta*. $M_0(0, 0)$ es un punto aislado.

58. Demostrar que el origen de coordenadas para la curva $y=x\ln x$ es un punto extremo y que en este punto el eje Oy es tangente a la curva.

59. Demostrar que el origen de coordenadas es el punto angular de la curva $y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ y que las tangentes en este punto son; a la derecha $y=0$ y a la izquierda $y=x$.

CAPITULO IX

APLICACIONES DEL CALCULO DIFERENCIAL A LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO

§ 1. ECUACIONES DE LA CURVA EN EL ESPACIO

Estudiemos el vector $\overline{OA} = r$ cuyo origen coincide con el de coordenadas, y su extremo es un punto A (x, y, z) (fig. 192). Este vector se llama *radio vector*.

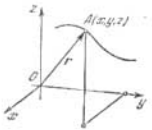

Fig. 192

Expresemos este vector mediante sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas:

$$r = xi + yj + zk. \qquad (1)$$

Supongamos que las proyecciones del vector r son funciones de cierto parámetro t:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \\ z &= \chi(t). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

En este caso la fórmula (1) se puede escribir así:

$$r = \varphi(t)\, i + \psi(t)\, j + \chi(t)\, k \qquad (1')$$

o, en la forma más breve:

$$r = r(t). \qquad (1)$$

Cuando t varía, las coordenadas x, y, z varían también y el punto A, que es el extremo del vector r, describirá en el espacio una línea llamada *hodógrafo* del vector $r = r(t)$. Las ecuaciones (1′) o (1″), se llaman *ecuaciones vectoriales* de una línea en el espacio. Las ecuaciones (2) se llaman *ecuaciones paramétricas* de una línea en el espacio. Con ecuaciones se determinan las coordenadas x, y, z del punto correspondiente de la curva para cada valor de t.

Observación. La curva en el espacio puede definirse también como el lugar geométrico de los puntos de intersección de dos super-

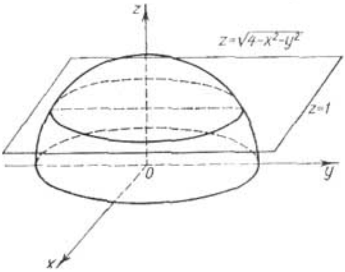

Fig. 193

ficies. Por tanto, esta curva puede estar dada por las dos ecuaciones de estas superficies:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_1(x,\ y,\ z)=0,\\ \Phi_2(x,\ y,\ z)=0.\end{array}\right\} \tag{3}$$

Así, por ejemplo, las ecuaciones

$$x^2+y^2+z^2=4, \quad z=1$$

son las de una circunferencia en el espacio que se obtiene como resultado de la intersección de una esfera con un plano (fig. 193).

Así, la curva en el espacio puede ser expresada o bien por las ecuaciones paramétricas (2), o bien mediante dos ecuaciones de las superficies (3).

Si eliminamos el parámetro t de las ecuaciones (2), y obtenemos dos ecuaciones que ligan x, y y z, realizamos el paso de las curvas dadas por el procedimiento paramétrico a las curvas expresadas por la intersección de dos superficies. Recíprocamente, si ponemos $x=\varphi(t)$ (donde $\varphi(t)$ es una función arbitraria) y hallamos y y z como funciones de t de las ecuaciones

$$\Phi_1[\varphi(t),\ y,\ z]=0, \qquad \Phi_2[\varphi(t),\ y,\ z]=0,$$

realizamos el paso de las curvas expresadas por la intersección de dos superficies a las curvas dadas por el procedimiento paramétrico.

Ejemplo 1. Sean

$$x=4t-1,\ y=3t,\ z=t+2$$

las ecuaciones paramétricas de una recta. Eliminando el parámetro t obtenemos dos ecuaciones cada una de las cuales es la ecuación de un plano. Por ejemplo, al restar sucesivamente, término a término, de la primera ecuación la segunda y la tercera, obtenemos: $x-y-z=-3$. Por otro lado,

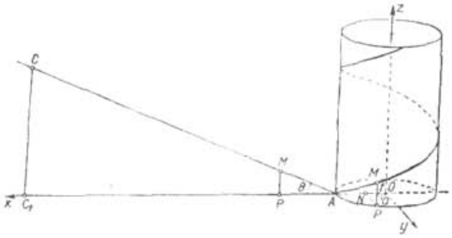

Fig. 194

restando la tercera, previamente cuadruplicada de la primera ecuación, obtenemos: $x-4z=-9$. Resulta que la recta dada es una línea de intersección de los planos $x-y-z+3=0$ y $x-4z+9=0$.

Ejemplo 2. Examinemos un cilindro recto de radio a cuyo eje coincide con el eje Oz (fig. 194). Arrollemos sobre este cilindro un triángulo rectángulo C_1AC de modo que el vértice A del triángulo coincida con el punto de intersección de la generatriz del cilindro con el eje Ox, y el cateto AC_1 se arrolle sobre la sección de este cilindro, situada en el plano Oxy. En este caso la hipotenusa formará sobre el cilindro una línea llamada *hélice*.

Escribamos la ecuación del hélice, designando por x, y, z las coordenadas de su punto variable M y por t el ángulo AOP (véase la figura 194). Entonces:

$$x=a\cos t,\ y=a\operatorname{sen} t,\ z=PM=AP\operatorname{tg}\theta,$$

donde, θ designa el ángulo agudo del triángulo C_1AC. Notemos que $\overset{\frown}{AP}=at$ (puesto que $\overset{\frown}{AP}$ es el arco de una circunferencia de radio a correspondiente al ángulo central t) designemos $\operatorname{tg}\theta$ por m. Así obtenemos las ecuaciones paramétricas del hélice:

$$x=a\cos t,\ y=a\operatorname{sen} t,\ z=\mathrm{amt}$$

(aquí t es el parámetro), o en forma vectorial:

$$r=ia\cos t+ja\operatorname{sen} t+k\ \mathrm{amt}.$$

De las ecuaciones paramétricas del hélice es fácil eliminar el parámetro t. Elevando al cuadrado dos primeras ecuaciones y sumándolas, hallamos $x^2 + y^2 = a^2$. Esta es la ecuación del cilindro sobre el cual está trazado el *hélice*. Ahora, dividiendo, término a término, la segunda ecuación por la primera y sustituyendo en la relación obtenida el valor de t hallado de la tercera ecuación, encontremos la ecuación de otra superficie sobre que está trazada el hélice:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{am}.$$

Esta es la llamada *superficie helicoidal* (*helicoide*). Se puede considerarla *como la huella del movimiento de una semirrecta paralela al plano Oxy que* tiene siempre uno de sus extremos en el eje Oz, mientras que la misma semirrecta gira alrededor del eje Oz con una velocidad angular constante, y al mismo tiempo, *con una velocidad constante, se desplaza hacia arriba*. El *hélice no es más que* una línea de intersección de estas dos superficies. Por eso, el hélice se puede definir mediante dos ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{am}.$$

§ 2. LIMITE Y DERIVADA DE UNA FUNCION VECTORIAL DE UN ARGUMENTO ESCALAR. ECUACION DE LA TANGENTE A UNA CURVA. ECUACION DEL PLANO NORMAL

Volvamos a las fórmulas (1') y (1") del párrafo anterior:

$$\boldsymbol{r} = \varphi(t)\,\boldsymbol{i} + \psi(t)\,\boldsymbol{j} + \chi(t)\,\boldsymbol{k}$$

ó

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t).$$

En el caso general cuando t varía, la magnitud y la dirección del vector $\boldsymbol{r}$ varían también. Se dice que $\boldsymbol{r}$ es una función vectorial del argumento escalar t.

Supongamos que:

$$\lim_{t \to t_0} \varphi(t) = \varphi_0,$$

$$\lim_{t \to t_0} \psi(t) = \psi_0,$$

$$\lim_{t_0 \to t_0} \chi(t) = \chi_0.$$

En este caso se dice que el vector $\boldsymbol{r}_0 = \varphi_0\,\boldsymbol{i} + \psi_0\,\boldsymbol{j} + \chi_0\,\boldsymbol{k}$ es el límite del vector $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ (fig. 195):

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0.$$

De la última ecuación se deduce que:

$$\lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0| = \lim_{t \to t_0} \sqrt{[\varphi(t) - \varphi_0]^2 + [\psi(t) - \psi_0]^2 + [\chi(t) - \chi_0]^2} = 0$$

y

$$\lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{r}(t)| = |\boldsymbol{r}_0|.$$

Pasemos ahora a la noción de la derivada de una función vectorial del argumento escalar

$$\boldsymbol{r}(t) = \varphi(t)\,\boldsymbol{i} + \psi(t)\,\boldsymbol{j} + \chi(t)\,\boldsymbol{k}, \tag{1}$$

suponiendo que el origen del vector $\boldsymbol{r}(t)$ coincide con el origen de coordenadas. Sabemos que la última ecuación es la ecuación vectorial de *una línea en el espacio.*

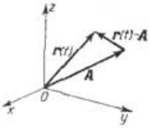

Fig. 195

Elijamos un valor fijo de t, que corresponda a un punto determinado M en la curva, y demos a t un incremento Δt; en este caso obtenemos el vector:

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t) = \varphi(t+\Delta t)\,\boldsymbol{i} + \psi(t+\Delta t)\,\boldsymbol{j} + \chi(t+\Delta t)\,\boldsymbol{k},$$

que determina en la curva un punto M_1 (fig. 196). Hallemos el incremento del vector:

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t) = [\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)]\,\boldsymbol{i} + \\ + [\psi(t+\Delta t) - \psi(t)]\,\boldsymbol{j} + [\chi(t+\Delta t) - \chi(t)]\,\boldsymbol{k}.$$

Este incremento está representado en la figura 196, por el vector $\overline{MM_1} = \Delta\,\boldsymbol{r}(t)$ donde $\overline{OM} = \boldsymbol{r}(t)$, $\overline{OM_1} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t)$. Consideremos la razón $\frac{\Delta r(t)}{\Delta t}$ del incremento de la función vectorial respecto al incremento del argumento escalar; será, evidentemente, un *vector colineal con el vector $\Delta\boldsymbol{r}(t)$, puesto que se obtiene de este* último, al multiplicarlo por factor escalar $\frac{1}{\Delta t}$. Podemos escribir este vector en la forma:

$$\frac{\Delta \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}\,\boldsymbol{i} + \\ + \frac{\psi(t+\Delta t) - \psi(t)}{\Delta t}\,\boldsymbol{j} + \frac{\chi(t+\Delta t) - \chi(t)}{\Delta t}\,\boldsymbol{k}.$$

Si las derivadas de las funciones $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ existen para el valor elegido de t, los factores de $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ se transformarán en las derivadas $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$, tendiendo al límite, cuando $\Delta t \to 0$. Por tanto, en este caso, el límite $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ existe cuando $\Delta t \to 0$, y es igual al vector $\varphi'(t)\boldsymbol{i} + \psi'(t)\boldsymbol{j} + \chi'(t)\boldsymbol{k}$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \varphi'(t)\boldsymbol{i} + \psi'(t)\boldsymbol{j} + \chi'(t)\boldsymbol{k}.$$

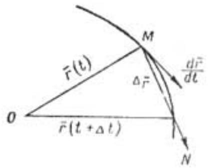

Fig. 196

El vector determinado por la última igualdad se llama *derivada* del vector $\boldsymbol{r}(t)$ respecto al argumento escalar t. La derivada se designa por el símbolo $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ o $\boldsymbol{r}'$.

Así

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{r}' = \varphi'(t)\boldsymbol{i} + \psi'(t)\boldsymbol{j} + \chi'(t)\boldsymbol{k} \tag{2}$$

ó

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}. \tag{2'}$$

Determinemos la dirección del vector $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$.

Cuando $\Delta t \to 0$, el punto M_1 tiende al punto M y la dirección de la secante MM_1 coincide en el límite con la de la tangente. Por tanto, el vector de la derivada $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ está dirigido a lo largo de la tangente a la curva en el punto M. El largo del vector $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ se determina por la fórmula*)

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}. \tag{3}$$

Los resultados obtenidos permiten escribir la ecuación de la tangente a la curva

$$r = xi + yj + zk$$

en el punto $M(x, y, z)$, teniendo en cuenta que en la ecuación de la curva $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$.

La ecuación de la recta que pasa por el punto $M(x, y, z)$ tiene la forma:

$$\frac{X-x}{m} = \frac{Y-y}{n} = \frac{Z-z}{p},$$

donde X, Y, Z son coordenadas de un punto variable de la recta y m, n, p, las magnitudes proporcionales a los cosenos directores de esta recta (es decir, a las proyecciones del vector director de la recta).

Por otra parte hemos establecido que el vector

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k$$

está dirigido, siguiendo la tangente. Por eso las proyecciones de este vector son los números proporcionales a los cosenos directores de la tangente y, por consiguiente, a los números m, n, p. La ecuación de la tangente será entonces:

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}. \tag{4}$$

Ejemplo 1. Escribir la ecuación de la tangente al hélice

$$x = a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad z = amt,$$

para t arbitrario y para $t = \frac{\pi}{4}$.

Solución.

$$\frac{dx}{dt} = -a \operatorname{sen} t, \quad \frac{dy}{dt} = a\cos t, \quad \frac{dz}{dt} = am.$$

---

*) Supongamos que en los puntos estudiados $\left|\frac{dr}{dt}\right| \neq 0$.

Según la fórmula (4) tenemos:

$$\frac{X-a\cos t}{-a\operatorname{sen} t}=\frac{Y-a\operatorname{sen} t}{a\cos t}=\frac{Z-amt}{am}.$$

En particular, cuando $t=\frac{\pi}{4}$, obtenemos:

$$\frac{X-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{-\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{Y-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{Z-am\frac{\pi}{4}}{am}.$$

Lo mismo que en el caso de una curva plana, la recta, perpendicular a la tangente y que pasa por el punto de tangencia, se llama *normal* a la curva en el espacio en el punto dado. Es evidente que existe una infinidad de normales a la curva en el espacio en el punto dado. Todas ellas se hallan en un plano perpendicular a la tangente. El plano mencionado se llama *plano normal*.

Deduzcamos la ecuación del plano normal, partiendo de la condición de su perpendicularidad respecto a la tangente (4):

$$\frac{dx}{dt}(X-x)+\frac{dy}{dt}(Y-y)+\frac{dz}{dt}(Z-z)=0. \tag{5}$$

Ejemplo 2. Escribir la ecuación del plano normal a la hélice en el punto donde $t=\frac{\pi}{4}$.

Solución. Utilizando los resultados del ejemplo 1 y la fórmula (5), tenemos:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(X-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(Y-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)+m\left(Z-am\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Deduzcamos ahora la ecuación de la tangente y del plano normal para una curva en el espacio en el caso de una curva dada por las ecuaciones:

$$\Phi_1(x,\ y,\ z)=0, \qquad \Phi_2(x,\ y,\ z)=0. \tag{6}$$

Expresemos las coordenadas x, y, z de esta curva en función de un parámetro arbitrario t:

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t). \tag{7}$$

Supongamos que $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ son las funciones derivables de t.

Sustituyendo x, y, z en la ecuación (6) por sus valores en función de t para los puntos de la curva, obtenemos dos identidades respecto a t:

$$\Phi_1[\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)]=0, \tag{8a}$$

$$\Phi_2[\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)]=0. \tag{8b}$$

Derivándolas respecto a t, encontramos

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0,\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

De las ecuaciones (9) se deduce que

$$\frac{\dfrac{dx}{dt}}{\dfrac{dz}{dt}}=\frac{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial z}-\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial z}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial y}}{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial y}-\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial x}};\quad \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dz}{dt}}=\frac{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial z}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial x}-\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial z}}{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial y}-\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial x}}. \tag{10}$$

Supongamos que $\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\neq 0$. Sin embargo, se puede demostrar que las fórmulas definitivas (11) y (12) (que aparecen más abajo) son también válidas para el caso en que esta expresión es igual a cero, siempre y cuando por lo menos uno de los determinantes que figuran en estas formulas es diferente de cero. De las igualdades (10) tenemos:

$$\frac{\dfrac{dx}{dt}}{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial z}-\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial z}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial y}}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial z}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial x}-\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial z}}=\frac{\dfrac{dz}{dt}}{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial y}-\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial x}}.$$

Por tanto, en virtud de la fórmula (4), la ecuación de la tangente tendrá la forma:

$$\frac{X-x}{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial z}-\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial z}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial y}}=\frac{Y-y}{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial z}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial x}-\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial z}}=\frac{Z-z}{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial y}-\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial x}},$$

o, utilizando determinantes:

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y} & \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial z}\\[2mm] \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial y} & \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial z}\end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial z} & \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial z} & \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial x}\end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial y}\end{vmatrix}}. \tag{11}$$

La ecuación del plano normal será

$$(X-x)\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\end{vmatrix}+(Y-y)\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\end{vmatrix}+(Z-z)\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\end{vmatrix}=0. \quad (12)$$

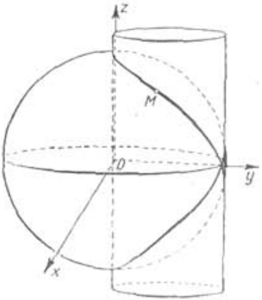

Fig. 197

Las últimas fórmulas son válidas sólo cuando en éstas por lo menos uno de los determinantes es diferente de cero. Si en un punto de la curva todos los tres determinantes

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\end{vmatrix}$$

se anulan, el punto mencionado se llama *punto singular* de la curva en el espacio. La curva puede no tener ninguna tangente en este punto, igual que en los puntos singulares de las curvas planas (véase § 19, cap. VIII).

Ejemplo 3. Hallar las ecuaciones de la tangente y del plano normal ala curva definida por la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=4r^2$, y el ilindro $x^2+y^2=2ry$ en el punto $M(r, r, r\sqrt{2})$ (fig. 197).

Solución.

$$\Phi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4r^2,$$
$$\Phi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2ry,$$
$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 2z,$$
$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = 2y - 2r, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0.$$

Los valores de las derivadas en el punto dado M serán:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = 2r, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 2r, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 2r\sqrt{2},$$
$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 2r, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0.$$

Por eso, la ecuación de la tangente es

$$\frac{X-r}{0} = \frac{Y-r}{\sqrt{2}} = \frac{Z-r\sqrt{2}}{-1},$$

y la ecuación del plano normal

$$\sqrt{2}(Y-r) - (Z - r\sqrt{2}) = 0.$$

§ 3. REGLAS DE DERIVACION DE LOS VECTORES (FUNCIONES VECTORIALES)

Hemos definido la derivada del vector

$$r(t) = \varphi(t)\boldsymbol{i} + \psi(t)\boldsymbol{j} + \chi(t)\boldsymbol{k} \tag{1}$$

es igual a

$$r'(t) = \varphi'(t)\boldsymbol{i} + \psi'(t)\boldsymbol{j} + \chi'(t)\boldsymbol{k}. \tag{2}$$

De esta definición se deduce inmediatamente que las reglas fundamentales de la derivación de las funciones son válidas también para los vectores.

Introduzcamos ahora ciertas fórmulas de derivación de las funciones a partir de los vectores. Estas fórmulas nos serán necesarias más adelante.

I. *La derivada de la suma de vectores es igual a la suma de derivadas de estos vectores.*

En efecto, si están dados dos vectores

$$\left.\begin{aligned} r_1(t) &= \varphi_1(t)\boldsymbol{i} + \psi_1(t)\boldsymbol{j} + \chi_1(t)\boldsymbol{k}, \\ r_2(t) &= \varphi_2(t)\boldsymbol{i} + \psi_2(t)\boldsymbol{j} + \chi_2(t)\boldsymbol{k}; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

su suma será:

$$r_1(t) + r_2(t) =$$
$$= [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]\boldsymbol{i} + [\psi_1(t) + \psi_2(t)]\boldsymbol{j} + [\chi_1(t) + \chi_2(t)]\boldsymbol{k}.$$

Según la definición, la derivada de un vector variable es:

$$\frac{d[r_1(t)+r_2(t)]}{dt}=[\varphi_1(t)+\varphi_2(t)]'\,i+[\psi_1(t)+\psi_2(t)]'\,j+$$

$$+[\chi_1(t)+\chi_2(t)]'\,k$$

ó

$$\frac{d[r_1(t)+r_2(t)]}{dt}=[\varphi_1'(t)+\varphi_2'(t)]\,i+[\psi_1'(t)+\psi_2'(t)]\,j+$$

$$+[\chi_1'(t)+\chi_2'(t)]\,k=\varphi_1'(t)\,i+\psi_1'(t)\,j+\chi_1'(t)\,k+\varphi_2'(t)\,i+$$

$$+\psi_2'(t)\,j+\chi_2'(t)\,k=r_1'+r_2'.$$

Por tanto,

$$\frac{d[r_1(t)+r_2(t)]}{dt}=\frac{dr_1}{dt}+\frac{dr_2}{dt}. \tag{I}$$

II. *La derivada del producto escalar de dos vectores se expresa mediante la fórmula*:

$$\frac{d(r_1r_2)}{dt}=\frac{dr_1}{dt}r_2+r_1\frac{dr_2}{dt}. \tag{II}$$

En efecto, si los vectores $r_1(t)$, $r_2(t)$ están definidos por las fórmulas (3), su producto escalar es igual

$$r_1(t)\,r_2(t)=\varphi_1\varphi_2+\psi_1\psi_2+\chi_1\chi_2.$$

Por eso

$$\frac{d(r_1r_2)}{dt}=\varphi_1'\varphi_2+\varphi_1\varphi_2'+\psi_1'\psi_2+\psi_1\psi_2'+\chi_1'\chi_2+\chi_1\chi_2'=$$

$$=(\varphi_1'\varphi_2+\psi_1'\psi_2+\chi_1'\chi_2)+(\varphi_1\varphi_2'+\psi_1\psi_2'+\chi_1\chi_2')=$$

$$=(\varphi_1'i+\psi_1'j+\chi_1'k)(\varphi_2i+\psi_2j+\chi_2k)+$$

$$+(\varphi_1i+\psi_1j+\chi_1k)(\varphi_2'i+\psi_2'j+\chi_2'k)=\frac{dr_1}{dt}r_2+r_1\frac{dr_2}{dt}$$

Queda así demostrado el teorema.

De la fórmula (II) se deduce siguiente corolario importante.

Corolario: *Si e es un vector unitario, es decir,* $|e|=1$, *su derivada es un vector perpendicular al vector unitario.*

Demostración: Si e es un vector unitario, entonces:

$$ee=1.$$

Derivemos ambos miembros de la última igualdad respecto a t:

$$e\frac{de}{dt}+\frac{de}{dt}e=0,$$

ó

$$2e\frac{de}{dt}=0,$$

es decir, el producto escalar

$$e\frac{de}{dt}=0,$$

lo que significa que el vector $\frac{de}{dt}$ es perpendicular al vector $\boldsymbol{e}$.

III. *Si $f(t)$ es una función escalar y $\bar{r}(t)$ es función vectorial, entonces la derivada del producto $f(t)\cdot r(t)$ se expresa por la fórmula*:

$$\frac{d(f\bar{r})}{dt}=\frac{df}{dt}\bar{r}+f\frac{d\bar{r}}{dt}. \tag{III}$$

Demostración:

Si $\bar{r}(t)$ se determina por la fórmula (I), entonces $f(t)\,\bar{r}(t)=$ $=f(t)\,\varphi(t)\,\boldsymbol{i}+f(t)\,\psi(t)\,\boldsymbol{j}+f(t)\,\chi(t)\,\boldsymbol{k}$.

Según la fórmula (2), tenemos:

$$\frac{d[f(t)\cdot\bar{r}(t)]}{dt}=\left(\frac{df}{dt}\varphi+f\frac{d\varphi}{dt}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{df}{dt}\psi+f\frac{d\psi}{dt}\right)\boldsymbol{j}+$$

$$\left(\frac{df}{dt}\chi+f\frac{d\chi}{dt}\right)\boldsymbol{k}=\frac{df}{dt}(\varphi\boldsymbol{i}+\psi\boldsymbol{j}+\chi\boldsymbol{k})+$$

$$+f\left(\frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{d\psi}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{d\chi}{dt}\boldsymbol{k}\right)=\frac{df}{dt}\bar{r}+f\frac{d\bar{r}}{dt},$$

lo que se trataba de demostrar.

Si $f(t)=a=\text{const}$, entonces $\frac{df}{dt}=0$ y se deduce la regla siguiente.

IV. *El factor constante numérico se puede sacar fuera del signo de la derivada*

$$\frac{d(a\cdot\bar{r}(t))}{dt}=a\frac{d\bar{r}}{dt}=ar'(t). \tag{IV}$$

De modo análogo al empleado en la fórmula II se demuestra que:

V. *La derivada del producto vectorial de los vectores* $\bar{r}_1$ (t) *y* $\bar{r}_2$ (t), *se determina por la fórmula:*

$$\frac{d(\bar{r}_1 x \ \bar{r}_2)}{dt}=\frac{d\bar{r}_1}{dt} x \ \bar{r}_2+\bar{r}_1 \ x \ \frac{d\bar{r}_2}{dt}. \qquad \text{(V)}$$

§ 4. DERIVADAS PRIMERA Y SEGUNDA DE UN VECTOR RESPECTO A LA LONGITUD DEL ARCO. CURVATURA DE LA CURVA. NORMAL PRINCIPAL. VELOCIDAD Y ACELERACION DEL PUNTO DURANTE EL MOVIMIENTO CURVILINEO

La longitud del arco*) de una curva en el espacio $\widehat{M_0A}=s$ se determina de manera semejante a la definición de una curva plana (fig. 198). Cuando el punto variable A (x, y, z) se desplaza a lo largo

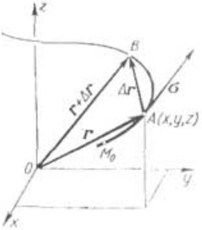

Fig. 198

de la curva, la longitud del arco s varía y, viceversa, cuando s varía las coordenadas x, y, z del punto variable A de la curva varían también. Por tanto, se puede considerar las coordenadas x, y, z del punto variable A de la curva como funciones de la longitud del arco s:

$$x=\varphi(s),$$
$$y=\psi(s),$$
$$z=\chi(s).$$

En estas ecuaciones paramétricas de la curva el parámetro es la longitud del arco s.

*) La longitud del arco de una curva en el espacio se determina del modo semejante a la de una curva plana (véase § 1, cap. VI y § 3 cap. XII).

El vector $\overline{OA} = \boldsymbol{r}$ se expresará correspondientemente en la forma:

$$\boldsymbol{r} = \varphi(s)\,\boldsymbol{i} + \psi(s)\,\boldsymbol{j} + \chi(s)\,\boldsymbol{k},$$

ó

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s),$$

es decir, el vector $\boldsymbol{r}$ es una función de la longitud del arco s.

Aclaremos el sentido geométrico de la derivada $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$. De la figura 198 se deducen las siguientes igualdades:

$$\overset{\frown}{M_0A} = s, \quad \overset{\frown}{AB} = \Delta s, \quad \overset{\frown}{M_0B} = s + \Delta s,$$
$$\overline{OA} = \boldsymbol{r}(s), \quad \overline{OB} = \boldsymbol{r}(s + \Delta s),$$
$$\overline{AB} = \Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s + \Delta s) - \boldsymbol{r}(s),$$
$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s} = \frac{\overline{AB}}{\overset{\frown}{AB}}.$$

Hemos visto, en el § 2, que el vector $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}$ está orientado, siguiendo la tangente a la curva en el punto A, en dirección del crecimiento de s. Por otra parte, tenemos la igualdad: $\lim \left| \frac{\overline{AB}}{\overset{\frown}{AB}} \right| = 1$ [límite de la razón de longitud de la cuerda con respecto al largo del arco*)]. Por consiguiente, $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ es un vector *unitario* dirigido siguiendo a la tangente; designemos este vector por $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{\sigma}. \tag{2}$$

Si el vector $\boldsymbol{r}$ está dado por las proyecciones:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

entonces:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{dx}{ds}\,\boldsymbol{i} + \frac{dy}{ds}\,\boldsymbol{j} + \frac{dz}{ds}\,\boldsymbol{k}, \tag{3}$$

además,

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1.$$

*) Esta correlación, como hemos demostarado (§ 1, cap. VI) para una curva plana, se verifica, también para una curva en el espacio $\boldsymbol{r}(t) = \varphi(t)\,\boldsymbol{i} + \psi(t)\,\boldsymbol{j} + \chi(t)\,\boldsymbol{k}$, si las derivadas de las funciones $\varphi(t)$, $\psi(t)$ y $\chi(t)$ son continuas y no se anulan simultáneamente.

Examinemos ahora la segunda derivada $\frac{d^2r}{ds^2}$ de la función vectorial r, es decir, de la derivada $\frac{dr}{ds}$ y demos el significado geométrico de esta segunda derivada.

De la fórmula (2) se deduce:

$$\frac{d^2r}{ds^2}=\frac{d}{ds}\left[\frac{dr}{ds}\right]=\frac{d\sigma}{ds}.$$

Por tanto, debemos calcular $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$

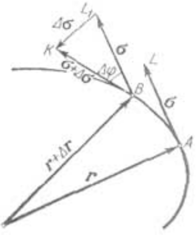

Fig. 199

En la figura 199 se ve que $AB=\Delta s$, $\overline{AL}=\sigma$, $\overline{BK}=\sigma+\Delta\sigma$. Tracemos del punto B el vector $\overline{BL_1}=\sigma$. Del triángulo BKL_1 tenemos:

$$\overline{BK}=\overline{BL_1}+\overline{L_1K}$$

o,

$$\sigma+\Delta\sigma=\sigma+\overline{L_1K}.$$

Por tanto, $L_1K=\Delta\sigma$. *Puesto que, según lo demostrado,* la longitud del vector σ no cambia, entonces $|\sigma|=|\sigma+\Delta\sigma|$, por consiguiente el triángulo BKL_1 es isósceles.

El ángulo $\Delta\varphi$ en el vértice de este triángulo es el ángulo de rotación *de la tangente a la curva, cuando pasa del punto A al punto B*, es decir, el ángulo corresponde al incremento de la longitud del arco Δs. Del triángulo BKL_1 tenemos:

$$L_1K=|\Delta\sigma|=2|\sigma|\left|\operatorname{sen}\frac{\Delta\varphi}{2}\right|=2\left|\operatorname{sen}\frac{\Delta\varphi}{2}\right|$$

(puesto que $|\sigma|=1$).

Dividamos los dos miembros de la última ecuación por Δs:

$$\left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right| = 2\left|\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\right|\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

Tomemos límites en ambos miembros de esta igualdad para $\Delta s \to 0$. En el primer miembro obtenemos:

$$\lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\sigma}{ds}\right|.$$

Luego,

$$\lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\right| = 1,$$

puesto que en el caso dado consideramos las curvas que tienen como límite $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ y, por consiguiente $\Delta\varphi \to 0$ cuando $\Delta s \to 0$.

Así, después de tomar límites, tenemos:

$$\left|\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|. \tag{4}$$

La razón (en valor absoluto) del ángulo $\Delta\varphi$ de rotación de la tangente con respecto a la longitud Δs del arco AB, cuando se pasa del punto A al punto B se llama (igual que para una curva plana) *curvatura media* de la línea dada en el segmento AB:

$$\text{curvatura media} = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

El límite de la curvatura media, cuando $\Delta s \to 0$, se llama *curvatura* de la línea en el punto A y se designa por K:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

De la igualdad (4) se deduce que $\left|\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}\right| = K$, es decir, la longitud de la derivada del vector unitario*) de la tangente respecto a la

*) Recordemos que la derivada de un **vector** es también **vector** y por eso se puede hablar de la **longitud** de la derivada.

longitud del arco es igual a la curvatura de la línea en el punto dado. Puesto que σ es un vector unitario, su derivada $\frac{d\sigma}{ds}$ es perpendicular a éste (véase § 3, cap. IX, corolario).

Así, el vector $\frac{d\sigma}{ds}$ está dirigido, siguiendo la perpendicular al vector de la tangente y su longitud es igual a la curvatura de la curva en este punto.

Definición: Una recta que coincide en dirección con el vector $\frac{d\sigma}{ds}$ y pasa por el punto correspondiente de la curva se llama *normal principal* de la curva en el punto dado. Designemos por n el vector unitario de esta dirección.

Puesto que la longitud del vector $\frac{d\sigma}{ds}$ es igual a la curvatura K de la curva, tenemos:

$$\frac{d\sigma}{ds} = Kn.$$

La magnitud $\frac{1}{K}$, inversa a la curvatura, se llama *radio de curvatura* de esta línea en el punto dado y se designa por R, es decir, $\frac{1}{K} = R$. Entonces, se puede escribir:

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{n}{R}. \tag{5}$$

De la fórmula (5) se deduce:

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2r}{ds^2}\right)^2. \tag{6}$$

Pero,

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d^2x}{ds^2}\,i + \frac{d^2y}{ds^2}\,j + \frac{d^2z}{ds^2}\,k.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}. \tag{6'}$$

La última fórmula permite calcular la curvatura en un punto cualquiera, de una curva dada por sus ecuaciones paramétricas, en las que el parámetro es la longitud s del arco, (es decir, cuando el radio vector del punto variable de esta curva es una función de la longitud del arco).

Examinemos el caso en que el radio vector r es función de un parámetro arbitrario t:

$$r = r(t).$$

Supongamos que en este caso, la longitud del arco s es una función del parámetro t. El cálculo dé la curvatura se efectúa del modo siguiente:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt}. \tag{7}$$

Puesto que*)

$$\left|\frac{dr}{ds}\right| = 1;$$

entonces:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \tag{8}$$

Derivando los dos miembros y dividiéndolos por dos, tenemos:

$$\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}. \tag{9}$$

De la fórmula (7) se deduce:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt}\frac{1}{\dfrac{ds}{dt}}.$$

Derivando respecto a s ambos miembros de la última igualdad tenemos:

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\frac{1}{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2} - \frac{dr}{dt}\frac{\dfrac{d^2s}{dt^2}}{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^3}.$$

---

*) Esta igualdad se deduce de $\left|\frac{dr}{ds}\right| = \lim\limits_{\Delta s=0}\left|\frac{\Delta r}{\Delta s}\right|$. Pero Δr es la cuerda del arco de la longitud Δs. Por eso, $\frac{|\Delta r|}{|\Delta s|}$ tiende a 1, cuando $\Delta s \to 0$.

Introduciendo en la fórmula (6) la expresión encontrada para $\frac{d^2 r}{ds^2}$, obtenemos:

$$\frac{1}{R^2}=\left[\frac{d^2 r}{dt^2}\frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}-\frac{dr}{dt}\frac{\frac{d^2 s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}\right]^2=$$

$$=\frac{\left(\frac{d^2 r}{dt^2}\right)^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-2\frac{d^2 r}{dt^2}\frac{dr}{dt}\frac{ds}{dt}\frac{d^2 s}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)^2}{\left(\frac{ds}{dt^2}\right)^6}.$$

Expresando $\frac{ds}{dt}$ y $\frac{d^2 s}{dt^2}$ en función de las derivadas de $r(t)$, a partir de las fórmulas (8) y (9), obtenemos*):

$$\frac{1}{R^2}=\frac{\left(\frac{d^2 r}{dt^2}\right)^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-\left(\frac{d^2 r}{dt^2}\frac{dr}{dt}\right)^2}{\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3}. \tag{10}$$

La fórmula (10) se puede escribir también en la forma**):

$$K^2=\frac{1}{R^2}=\frac{\left[\frac{dr}{dt}\times\frac{d^2 r}{dt^2}\right]^2}{\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3}. \tag{11}$$

---

*) Transformemos el denominador del modo siguiente:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^6=\left\{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right\}^3=\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3.$$

Aquí no podemos escribir $\left(\frac{dr}{dt}\right)^6$, puesto que $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ designa el cuadrado escalar del vector $\frac{dr}{dt}$, mientras que $\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3$ designa el cubo del número $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$. La expresión $\left(\frac{dr}{dt}\right)^6$ no tiene sentido.

**) Hemos aprovechado la identidad $a^2b^2-(ab)^2=(a\times b)^2$. Para demostrar que esta identidad es válida es suficiente escribirla en la forma:

$$a^2b^2-(ab\cos\varphi)^2=(ab\,\mathrm{sen}\,\varphi)^2.$$

Hemos obtenido la fórmula que permite calcular la curvatura de la curva en cada uno de sus puntos, dada por las ecuaciones paramétricas *arbitrarias*.

Si, en un caso particular, la curva es plana y está situada en el plano Oxy, sus ecuaciones paramétricas son:

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t),$$
$$z = 0.$$

Sustituyendo las expresiones de x, y, z en la fórmula (11), obtenemos la fórmula ya conocida (véase cap. VI), que determina la curvatura de una curva plana dada por las ecuaciones paramétricas:

$$K = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)|}{\{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2\}^{3/2}}.$$

Ejemplo. Hallar la curvatura de la hélice

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos t + \boldsymbol{j}a\,\mathrm{sen}\,t + \boldsymbol{k}\,amt$$

en un punto arbitrario.

Solución:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -\boldsymbol{i}a\,\mathrm{sen}\,t + \boldsymbol{j}a\cos t + \boldsymbol{k}am,$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\boldsymbol{i}a\cos t - \boldsymbol{j}a\,\mathrm{sen}\,t,$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -a\,\mathrm{sen}\,t & a\cos t & am \\ -a\cos t & -a\,\mathrm{sen}\,t & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}a^2m\,\mathrm{sen}\,t - \boldsymbol{j}a^2m\cos t + \boldsymbol{k}a^2,$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)^2 = a^4(m^2+1),$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2 = a^2\,\mathrm{sen}^2\,t + a^2\cos^2 t + a^2m^2 = a^2(1+m^2).$$

Por tanto,

$$\frac{1}{R^2} = \frac{a^4(m^2+1)}{[a^2(1+m^2)]^3} = \frac{1}{a^2(1+m^2)^2},$$

de donde

$$R = a(1+m^2) = \mathrm{const}.$$

Así, el radio de curvatura de la hélice es constante.

Observación. Siempre se puede suponer que una curva plana está situada en el plano Oxy (lo que se puede demostrar fácilmente, transformando el sistema de coordenadas). Por consiguiente, en el plano Oxy, $z = 0$; pero en este caso, $\frac{d^2z}{ds^2} = 0$, y, por tanto, el vector n está situado también en el plano Oxy. De aquí se deduce una conclusión importante: la normal principal de una curva plana está situada en el plano de esta curva.

Velocidad de un punto en el movimiento curvilíneo. Si un punto móvil en un instante t se encuentra en el punto M, determinado por el radio vector $\overline{OM} = \bar{r}(t)$ (fig. 196), y en otro instante $t + \Delta t$, en el punto M_1 determinado por el radio vector $\overline{OM_1} = \bar{r}(t + \Delta t)$, entonces el vector $\overline{MM_1}$ se llama *vector de desplazamiento del punto*. La razón del vector de desplazamiento $\overline{MM_1}$ respecto al incremento correspondiente del tiempo Δt se llama *velocidad media del* punto durante un lapso

$$\bar{v}_{\text{med}} \neq \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \overline{MN}.$$

El vector de la velocidad media está orientado a lo largo de la cuerda MM_1 (fig. 196) en la dirección del movimiento del punto (durante el movimiento rectilíneo la dirección del vector coincide con la trayectoria).

La velocidad del punto $\frac{dr}{dt}$ en el instante dado se determina por:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} (\bar{V}_{\text{med}}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt},$$

es decir,

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \tag{12}$$

Por consiguiente, se puede enunciar lo siguiente:

La velocidad del punto en un instante dado es igual a la primera derivada del radio vector de este punto respecto al tiempo.

En virtud de la fórmula (2), las proyecciones de la velocidad sobre los ejes de coordenadas son:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Determinemos el módulo de la velocidad según la fórmula (3):

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{13}$$

Introduzcamos la longitud s del arco (como lo hemos hecho al principio del presente párrafo) y consideremos s como función del tiempo t. Entonces podemos escribir la fórmula 12:

$$\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}=\frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\bar{\sigma}\cdot v \tag{14}$$

donde, $v=\frac{ds}{dt}$ es valor absoluto de la velocidad, $\bar{\sigma}$ es vector unitario orientado a lo largo de la tangente en la dirección del movimiento.

Aceleración de un punto en el movimiento curvilíneo. En el § 25, capítulo III, hemos considerado la aceleración del movimiento rectilíneo. Análogamente, en el movimiento curvilíneo, la segunda derivada del vector de la velocidad respecto al tiempo se llama *aceleración* $\bar{w}$ *de un punto*:

$$\bar{w}=\frac{d\bar{v}}{dt}; \tag{15}$$

pero

$$\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Por consiguiente,

$$\bar{w}=\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \tag{16}$$

A partir de la fórmula (14) obtenemos:

$$\bar{w}=\frac{d\bar{v}}{dt}=\frac{d(v\bar{\sigma})}{dt}.$$

Desarrollando la última derivada según la fórmula (III) § 3, tenemos:

$$\bar{w}=\frac{dv}{dt}\bar{\sigma}+v\frac{d\bar{\sigma}}{dt}. \tag{17}$$

Transformemos la derivada $\frac{d\bar{\sigma}}{dt}$, usando la fórmula (5):

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dt}=\frac{d\bar{\sigma}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{\bar{n}}{R}v.$$

Introduciendo la expresión de $\frac{d\bar{\sigma}}{dt}$ en la igualdad (17), obtenemos en definitiva:

$$\bar{w}=\frac{d\bar{v}}{dt}\cdot\bar{\sigma}+v^2\frac{\bar{n}}{R}. \tag{18}$$

Aquí, $\bar{\sigma}$ es el vector unitario orientado a lo largo de la tangente en dirección del movimiento, $\bar{n}$ es un vector unitario dirigido a lo largo de la normal principal.

Por consiguiente, se puede interpretar la fórmula (18) así: la proyección de la aceleración de un punto sobre la tangente es igual a la primera derivada del valor absoluto de la velocidad; la proyección de la aceleración sobre la normal principal es igual al cuadrado de la velocidad dividido por el radio de curvatura de la trayectoria en el punto dado.

Puesto que los vectores $\bar{\sigma}$ y $\bar{n}$ son mutuamente perpendiculares, el módulo de aceleración se determina por la fórmula:

$$w=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \tag{19}$$

§ 5. PLANO OSCULADOR. BINORMAL. TORSION

Definición 1. El plano que pasa por la tangente y la normal principal a una curva dada en el punto A se llama *plano osculador* en este punto A. Cuando una curva es plana, el plano osculador coincide con el plano de la curva. Si la curva no es plana, dos planos osculadores en los puntos P y P_1 de la curva, forman entre sí un diedro μ. Cuanto mayor es el ángulo μ, tanto más la curva se diferencia de la curva plana. Con el fin de precisar este problema introduzcamos la definición siguiente.

Definición 2. La normal a la curva, perpendicular al plano osculador, se llama *binormal.*

Tomemos un vector unitario $\boldsymbol{b}$ sobre la binormal y dirijámoslo de tal modo que los vectores $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ formen una terna de misma orientación que los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ de los ejes de coordenadas (figs. 200, 201).

En virtud de la definición de los productos vectorial y escalar de vectores tenemos:

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n};\quad \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}=1. \tag{1}$$

Hallemos la derivada $\frac{db}{ds}$. Según la fórmula (IV) § 3,

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\frac{d(\bar{\sigma}\times\boldsymbol{n})}{ds}=\frac{d\bar{\sigma}}{ds}\times\boldsymbol{n}+\bar{\sigma}\times\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}. \tag{2}$$

Pero $\frac{d\bar{\sigma}}{ds}=\frac{\boldsymbol{n}}{R}$ (véase § 4), por eso:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds}\times\boldsymbol{n}=\frac{1}{R}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}=0$$

y fórmula (2) toma la forma:

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \sigma \times \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}. \tag{3}$$

Partiendo de la definición de producto vectorial se deduce que el vector $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ es perpendicular al vector de la tangente $\boldsymbol{\sigma}$. Por otra

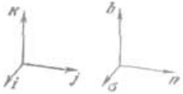

Fig. 200

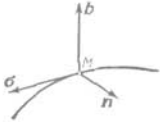

Fig. 201

parte, $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ es perpendicular a $\boldsymbol{b}$ puesto que $\boldsymbol{b}$ es un vector unitario (véase § 3, corolario).

Por tanto, el vector $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ es perpendicular también a $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{b}$, es decir, es colineal al vector $\boldsymbol{n}$.

Designemos por $\frac{1}{T}$ la longitud del vector $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$, es decir, pongamos:

$$\left| \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} \right| = \frac{1}{T}.$$

Entonces,

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \frac{1}{T}\boldsymbol{n}.$$

La magnitud $\frac{1}{T}$ se llama *torsión* de la curva dada.

El diedro μ, formado por los planos osculadores correspondientes a dos puntos de la curva es igual al ángulo formado por las binormales. Análogamente a la formula (4) § 4 cap. IX, se puede escribir:

$$\left| \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mu}{|\Delta s|}.$$

Así, la torsión de la curva en el punto A, en valor absoluto, es igual al límite a que tiende la razón del ángulo μ formado por los planos osculadores en el punto A y en el punto vecino B, respecto a la longitud $|\Delta s|$ del arco AB, cuando $\Delta s \to 0$.

Si la curva es **plana**, el plano osculador no varía su dirección y, por tanto, la torsión es igual a cero.

De la definición de torsión se deduce que esta magnitud caracteriza la desviación de la curva en el espacio respecto a la curva plana. La magnitud T se llama *radio de torsión* de la curva.

Hallemos la fórmula para calcular la torsión. De las fórmulas (3) y (4) se deduce:

$$\frac{1}{T} n = \sigma \times \frac{dn}{ds}.$$

Multiplicando (escalarmente) ambos miembros por n obtenemos:

$$\frac{1}{T} nn = n \left[\sigma \times \frac{dn}{ds} \right].$$

El segundo miembro de esta igualdad es el llamado producto mixto (triple) de tres vectores n, σ y $\frac{dn}{ds}$. Como sabemos, tal producto no varía por la permutación de los factores en orden circular. Como $nn = 1$, escribamos la última igualdad en la forma:

$$\frac{1}{T} = \sigma \left[\frac{dn}{ds} \times n \right]$$

ó

$$\frac{1}{T} = -\sigma \left[n \times \frac{dn}{ds} \right]. \tag{5}$$

Pero, como $n = R \frac{d^2 r}{ds^2}$, entonces:

$$\frac{dn}{ds} = R \frac{d^3 r}{ds^3} + \frac{dR}{ds} \cdot \frac{d^2 r}{ds^2}$$

y

$$\left[n \times \frac{dn}{ds} \right] = R \frac{d^2 r}{ds^2} \times \left\{ R \frac{d^3 r}{ds^3} + \frac{dR}{ds} \frac{d^2 r}{ds^2} \right\} =$$

$$= R^2 \left[\frac{d^2 r}{ds^2} \times \frac{d^3 r}{ds^3} \right] + R \frac{dR}{ds} \left[\frac{d^2 r}{ds^2} \times \frac{d^2 r}{ds^2} \right].$$

Puesto que el producto vectorial de un vector por sí mismo es igual

a cero,

$$\left[\frac{d^2 r}{ds^2} \times \frac{d^2 r}{ds^2}\right] = 0.$$

Así,

$$\left[n \times \frac{dn}{ds}\right] = R^2 \left[\frac{d^2 r}{ds^2} \times \frac{d^3 r}{ds^3}\right].$$

Notemos que $\sigma = \dfrac{dr}{ds}$; según la igualdad (5), de donde:

$$\frac{1}{T} = -R^2 \frac{dr}{ds} \left[\frac{d^2 r}{ds^2} \times \frac{d^3 r}{ds^3}\right]. \tag{6}$$

Si el vector r está expresado en función de un parámetro arbitrario t, se puede demostrar*) (utilizando el mismo procedimiento

---

*) Efectivamente,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

Derivemos una vez más esta igualdad respecto a t:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{ds}\right) \frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} + \frac{dr}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2 r}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dr}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Volvemos a derivar respecto a t:

$$\frac{d^3 r}{dt^3} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d^2 r}{ds}\right) \frac{ds}{dt} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d^2 r}{ds^2} 2 \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{ds}\right) \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{dr}{ds} \frac{d^3 s}{dt^3} =$$

$$= \frac{d^3 r}{ds^3} \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 3 \frac{d^2 r}{ds^2} \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{dr}{ds} \frac{d^3 s}{dt^3}.$$

Formemos el producto mixto (triple)

$$\frac{dr}{dt}\left(\frac{d^2 r}{dt^2} \times \frac{d^3 r}{dt^3}\right) = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} \left\{\left[\frac{d^2 r}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dr}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2}\right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{d^3 r}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 3 \frac{d^2 r}{ds^2} \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{dr}{ds} \frac{d^3 r}{dt^3}\right]\right\}.$$

Desarrolando este producto según la regla de multiplicación de los polinomios y omitiendo todos los términos que contengan por lo menos dos factores vectoriales idénticos (puesto que el producto mixto de tres factores en el cual aunque dos factores son idénticos es igual a cero) obtenemos:

$$\frac{dr}{dt}\left(\frac{d^2 r}{dt^2} \times \frac{d^3 r}{dt^3}\right) = \frac{dr}{ds}\left(\frac{d^2 r}{ds^2} \times \frac{d^3 r}{ds^3}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^6.$$

Finalmente

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \text{ ó } \left(\frac{ds}{dt}\right)^6 = \left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3,$$

obteniendo así la ecuación buscada.

que en el párrafo anterior) que

$$\frac{dr}{ds}\left[\frac{d^2r}{ds^2}\times\frac{d^3r}{ds^3}\right]=\frac{\frac{dr}{dt}\left[\frac{d^2r}{dt^2}\times\frac{d^3r}{dt^3}\right]}{\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3}.$$

Introduciendo esta expresión en la fórmula (6) y sustituyendo R^2 por su expresión según la fórmula (11) § 4, tenemos en definitiva:

$$\frac{1}{T}=-\frac{\frac{dr}{dt}\left[\frac{d^2r}{dt^2}\times\frac{d^3r}{dt^3}\right]}{\left[\frac{dr}{dt}\times\frac{d^2r}{dt^2}\right]}. \tag{7}$$

Esta fórmula permite calcular la torsión en cualquier punto de la curva, dada por sus ecuaciones paramétricas en el caso de un parámetro arbitrario t.

Como conclusión anotemos que las fórmulas que expresan las derivadas de los vectores σ, b, n, se llaman *fórmulas de Serret-Frenet*:

$$\frac{d\sigma}{ds}=\frac{n}{R},\qquad \frac{db}{ds}=\frac{n}{T},\qquad \frac{dn}{ds}=-\frac{\sigma}{R}-\frac{b}{T}.$$

La última de ellas se obtiene así:

$$n=b\times\sigma,$$

$$\frac{dn}{ds}=\frac{d(b\times\sigma)}{ds}=\frac{db}{ds}\times\sigma+b\times\frac{d\sigma}{ds}=\frac{n}{T}\times\sigma+b\times\frac{n}{R}=$$

$$=\frac{1}{T}n\times\sigma+\frac{1}{R}b\times n.$$

Pero,

$$n\times\sigma=-b;\quad b\times n=-\sigma.$$

Por eso,

$$\frac{dn}{ds}=-\frac{b}{T}-\frac{\sigma}{R}.$$

Ejempo: Calcular la torsión del hélice

$$r=ia\cos t+ja\operatorname{sen} t+k\,amt.$$

Solución:

$$\frac{dr}{dt}\left[\frac{d^2r}{dt^2}\times\frac{d^3r}{dt^3}\right]=\begin{vmatrix} -a\,\text{sen}\,t & a\cos t & am \\ -a\cos t & -a\,\text{sen}\,t & 0 \\ a\,\text{sen}\,t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}=a^3m,$$

$$\left[\frac{dr}{dt}\times\frac{d^2r}{dt^2}\right]^2=a^4(1+m^2) \text{ (véase el ejemplo § 4).}$$

Por tanto:

$$T=-\frac{a^4(1+m^2)}{a^3m}=-\frac{a(1+m^2)}{m}.$$

§ 6. PLANO TANGENTE Y NORMAL A UNA SUPERFICIE

Sea

$$F(x,\ y,\ z)=0, \tag{1}$$

la ecuación de una superficie.

Introduzcamos las siguientes definiciones.

Definición 1. Si una recta es tangente a una curva cualquiera situada sobre una superficie y pasa por un punto P, esta recta se llama *tangente* a la superficie en el punto $P(x,\ y,\ z)$.

Puesto que una infinidad de curvas, trazadas sobre la superficie, pasan por el punto P, en general, existe en este punto, igualmente una infinidad de tangentes a esta superficie.

Introduzcamos las nociones sobre los puntos singulares y simples de una superficie $F(x,\ y,\ z)=0$.

Si en el punto $M(x,\ y,\ z)$ las tres derivadas $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ son iguales a cero o, por lo menos, una de estas derivadas no existe, entonces M es un punto **singular** de la superficie. Si en el punto $M(x,\ y,\ z)$ las tres derivadas $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ existen y son continuas y por lo menos una de éstas es distinta de cero entonces M es un punto *simple* de la superficie.

Ahora podemos enunciar el teorema siguiente:

Teorema: *Todas las tangentes rectas a la superficie dada* (1) *en su punto simple P pertenecen a un mismo plano.*

Demostración: Estudiemos en la superficie una curva L (fig. 202) que pasa por el punto dado P de una superficie.

Sean

$$x=\varphi(t);\ y=\psi(t);\ z=\chi(t), \tag{2}$$

las ecuaciones paramétricas de esta curva.

La tangente a esta curva será una tangente a la superficie. Las ecuaciones de esta tangente son:

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}.$$

Pongamos las expresiones (2) en la ecuación (1) y obtengamos una identidad respecto a t, puesto que la curva (2) está trazada sobre la superficie (1). Derivando esta identidad respecto a t obtenemos*):

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{dt}=0. \tag{3}$$

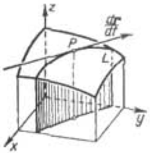

Fig. 202

Estudiemos ahora los vectores $\boldsymbol{N}$ y $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ que pasan por el punto P:

$$\boldsymbol{N}=\frac{\partial F}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{4}$$

Las proyecciones de este vector $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ dependen de las coordenadas x, y, z del punto P. Notemos que estas proyecciones no se reducen a cero simultáneamente en el punto P, puesto que P *es un punto simple*

$$|\boldsymbol{N}|=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}\neq 0.$$

El vector

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k} \tag{5}$$

es tangente a la curva que pasa por el punto P y que además está trazada sobre la superficie.

*) Utilicemos aquí la regla para derivar funciones complejas de tres variables. Esta regla es válida en el caso dado, puesto que todas las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ según la hipótesis, son continuas.

Se puede calcular las proyecciones de este vector a partir de las ecuaciones (2), si damos al parámetro t el valor que corresponde al punto P. Calculemos el producto escalar de los vectores $\boldsymbol{N}$ y $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$. Este producto escalar es igual a la suma de los productos de las proyecciones correspondientes:

$$\boldsymbol{N}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

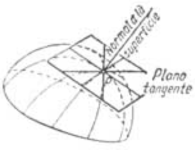

Fig. 203

En virtud de la igualdad (3) el segundo miembro es igual a cero por consiguiente:

$$\boldsymbol{N}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=0.$$

De la última ecuación se deduce que el vector $\boldsymbol{N}$ es perpendicular al vector de la tangente $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ a la curva (2) en el punto P. La demostración dada es válida para cualquier curva (2) trazada sobre la superficie, y que pasa por el punto P. Por consiguiente, todas las tangentes a esta superficie en el punto P son perpendiculares respecto a un mismo vector $\boldsymbol{N}$, por lo que todas las tangentes pertenecen a un mismo plano perpendicular al vector $\boldsymbol{N}$. El teorema queda demostrado.

Definición 2. El plano, formado por todas las tangentes en un punto P a las curvas trazadas sobre una superficie que pasan por este punto, se llama *plano tangente* a la superficie en el punto P (fig. 203).

Notemos que en los puntos singulares de la superficie puede no existir el plano tangente. En tales puntos las rectas tangentes a la superficie pueden no pertenecer a un mismo plano. Así, por ejemplo, el vértice de una superficie cónica es un punto singular. Las tangentes a la superficie cónica en este punto no pertenecen a un mismo plano, formando también una superficie cónica.

Escribamos la ecuación del plano tangente a la superficie (1) en un punto simple. Este plano es perpendicular al vector (4), su ecuación tiene la forma:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0$$

Si la ecuación de superficie es

$$z=f(x,\ y),\quad \text{ó}\quad z-f(x,\ y)=0,$$

entonces

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial x},\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial y},\qquad \frac{\partial F}{\partial z}=1$$

y la ecuación del plano tangente es

$$Z-z=\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y).$$

Observación: Si hacemos en la fórmula (6′) $X-x=\Delta x$, $Y-y=\Delta y$, obtenemos:

$$Z-z=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y;$$

su segundo miembro es la diferencial total de la función $z=f(x,\ y)$. Por tanto, $Z-z=dz$. Así, la diferencial total de una función de dos variables en el punto $M(x,\ y)$, que corresponde a los incrementos Δx y Δy de las variables independientes x e y, es igual al *incremento correspondiente de la cota* (*z*) *del plano tangente a la superficie* que representa la gráfica de la función dada.

Definición 3. La recta, trazada por el punto $P(x,\ y,\ z)$, de la superficie (1) de modo perpendicular al plano tangente se llama *normal* a superficie en este punto (fig. 203).

Escribamos las ecuaciones de la normal. Puesto que su dirección coincide con la del vector N, sus ecuaciones son

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{7}$$

Si la ecuación de la superficie es $z=f(x,\ y)$, ó

$$z-f(x,\ y)=0,$$

las ecuaciones de la normal son:

$$\frac{X-x}{-\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y-y}{-\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{Z-z}{1}.$$

Observación: Sea $F(x, y, z) = 0$ la superficie del nivel para una función de tres variables $u = u(x, y, z)$, es decir,

$$F(x, y, z) = u(x, y, z) - C = 0.$$

Es evidente que el vector $\boldsymbol{N}$, determinado por la fórmula (4) y dirigido, siguiendo la normal a la superficie del nivel $F = u(x, y, z,) - C = 0$, será:

$$\boldsymbol{N} = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

es decir,

$$\boldsymbol{N} = \text{grad } u.$$

Así hemos comprobado que *el gradiente de la función* $u(x, y, z)$ *está dirigido, siguiendo la normal, a la superficie del nivel que pasa por el punto dado.*

Ejemplo. Escribir la ecuación del plano tangente y ecuaciones de la normal a la superficie de una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ en el punto $P(1, 2, 3)$.

Solución.

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z;$$

para $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 4; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 6.$$

Por tanto, la ecuación del plano tangente es:

$$2(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0 \quad \text{ó} \quad x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

Las ecuaciones de la normal son:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6},$$

ó

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}.$$

Ejercicios para el capítulo IX

Hallar las derivadas de los vectores **1.** $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\,\text{cotg}\, t + \boldsymbol{j}\,\text{arctg}\, t$. *Resp.* $\boldsymbol{r}' = -\frac{1}{\text{sen}^2 t}\boldsymbol{i} + \frac{1}{1+t^2}\boldsymbol{j}$. **2.** $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}e^{-t} + \boldsymbol{j}2t + \boldsymbol{k}\ln t$. *Resp.* $\boldsymbol{r}' = -\boldsymbol{i}e^{-t} + 2\boldsymbol{j} + \frac{\boldsymbol{k}}{t}$. **3.** $\boldsymbol{r} = t^2\boldsymbol{i} - \frac{\boldsymbol{j}}{t} + \frac{\boldsymbol{k}}{t^2}$. *Resp.* $\boldsymbol{r}' = 2t\boldsymbol{i} + \frac{\boldsymbol{j}}{t^2} - \frac{2\boldsymbol{k}}{t^3}$.

4. Hallar el vector de la tangente, la ecuación de la tangente y la ecuación del plano normal a la curva $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$ en el punto $(3, 9, 27)$. *Respuesta*: $\boldsymbol{r}^1 = \boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 27\boldsymbol{k}$; la tangente es: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-9}{6} = \frac{z-27}{27}$; el plano normal es: $x + 6y + 27z = 786$.

5. Hallar el vector de la tangente, las ecuaciones de la tangente y la ecuación del plano normal a la curva: $r = i\cos^2\frac{t}{2} + \frac{1}{2}j\operatorname{sen} t + k\operatorname{sen}\frac{t}{2}$. *Respuesta.* $r' = -\frac{1}{2}i\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}j\cos t + \frac{1}{2}k\cos\frac{t}{2}$; la ecuación de la tangente es $\dfrac{X-\cos^2\frac{t}{2}}{-\operatorname{sen} t} = \dfrac{Y-\frac{1}{2}\operatorname{sen} t}{\cos t} = \dfrac{Z-\operatorname{sen}\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}$; la ecuación del plano normal: $+X\operatorname{sen} t - Y\cos t - Z\cos\frac{t}{2} = -x\operatorname{sen} t + y\cos t + z\cos\frac{t}{2}$, donde x, y, z son las coordenadas de un punto de la curva por el que pasa el plano normal $\left(\text{es decir } x=\cos^2\frac{t}{2},\ y=\frac{1}{2}\operatorname{sen} t,\ z=\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right)$.

6. Hallar las ecuaciones de la tangente a la curva $x=t-\operatorname{sen} t$, $y=1-\cos t$, $z=4\operatorname{sen}\frac{t}{2}$ y cosenos de los ángulos que forma la tangente con los ejes de coordenadas. *Respuesta.* $\dfrac{X-X_0}{\operatorname{sen}\frac{t_0}{2}} = \dfrac{Y-Y_0}{\cos\frac{t_0}{2}} = \dfrac{Z-Z_0}{\operatorname{cotg}\frac{t_0}{2}}$, $\cos\alpha = \operatorname{sen}^2\frac{t_0}{2}$; $\cos\beta = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t_0$; $\cos\gamma = \cos\frac{t_0}{2}$.

7. Hallar la ecuación de un plano normal a la curva $z=x^2-y^2$, $y=x$ en el origen de coordenadas. **Indicación.** Expresar la curva mediante ecuaciones paramétricas. *Respuesta.* $x+y=0$.

8. Hallar σ, n, b en el punto $t=\frac{\pi}{2}$ para la curva $r = i(\cos t + \operatorname{sen}^2 t) + j\operatorname{sen} t(1-\cos t) - k\cos t$. *Respuesta.* $\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}(-i+j+k)$; $n = \dfrac{-5i-4j-k}{\sqrt{42}}$; $b = \dfrac{i-2j+3k}{\sqrt{14}}$.

9. Hallar las ecuaciones de la normal principal y de la binormal a la curva $x=\frac{t^4}{4}$; $y=\frac{t^3}{3}$; $z=\frac{t^2}{2}$ en el punto (x_0, y_0, z_0). *Respuesta.* $\dfrac{x-x_0}{t_0^3+2t_0} = \dfrac{y-y_0}{1-t_0^4} = \dfrac{z-z_0}{-2t_0^3-t_0}$; $\dfrac{x-x_0}{1} = \dfrac{y-y_0}{2t_0} = \dfrac{z-z_0}{t_0^2}$.

10. Hallar la ecuación de un plano osculador a la curva $y^2=x$; $x^2=z$ en el punto $M(1, 1, 1)$. *Respuesta.* $6x-8y-z+3=0$.

11. Hallar el radio de curvatura de la curva dada por las ecuaciones $x^2+y^2+z^2-4=0$, $x+y-z=0$. *Respuesta.* $R=2$.

12. Hallar el radio de torsión de la curva: $r = i\cos t + j\operatorname{sen} t + k\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$. *Respuesta.* $T = \dfrac{(e^t+e^{-t})^2}{2(e^t-e^{-t})}$.

13. Hallar el radio de curvatura y de torsión de la curva $r = t^2 i + 2t^3 j$. *Respuesta.* $R = \frac{2}{3}t(1+9t^2)^{3/2}$, $T=\infty$.

14. Demostrar que la curva $r = (a_1t^2+b_1t+c_1)\,i + (a_2t^2+b_2t+c_2)\,j + (a_3t^2+b_3t+c_3)\,k$ es plana. *Respuesta*: $r''' \equiv 0$, por lo que la torsión es nula.

15. Hallar la curvatura y la torsión de la curva $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=t\sqrt{2}$. *Respuesta.* La curvatura es igual a $\frac{\sqrt{2}}{(x+y)^2}$, la torsión es igual a $\frac{-\sqrt{2}}{(x-y)^2}$.

16. Hallar la curvatura y la torsión de la curva $x=e^{-t}\operatorname{sen} t$, $y=e^{-t}\cos t$; $z=e^t$. *Respuesta.* La curvatura es igual a $\frac{\sqrt{2}}{3}e^t$, la torsión es igual a $\frac{1}{3}e^t$.

17. Hallar la ecuación de un plano tangente al hiperboloide $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ en el punto (x_1, y_1, z_1). *Respuesta.* $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}-\frac{z_1z}{c^2}=1$.

18. Hallar la ecuación de la normal a la superficie $x^2-4y^2+2z^2=6$ en el punto $(2, 2, 3)$. *Respuesta.* $y+4x=10$; $3x-z=3$.

19. Hallar la ecuación de un plano tangente a la superficie $z=2x^2+4y^2$ en el punto $M(2, 1, 12)$. *Respuesta.* $8x+8y-z=12$.

20. Trazar un plano tangente a la superficie $x^2+2y^2+z^2=1$ de modo que sea paralelo al plano $x-y+2z=0$. *Respuesta.* $x-y+2z=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}$.

CAPITULO X

INTEGRAL INDEFINIDA

§ 1. FUNCION PRIMITIVA E INTEGRAL INDEFINIDA

En el capítulo III hemos estudiado el problema siguiente: dada una función $F(x)$, hallar su derivada, es decir, la función $f(x) = F'(x)$.

En el capítulo presente consideremos el problema inverso: dada *una función $f(x)$, es preciso hallar una función $F(x)$ cuya derivada* sea igual a $f(x)$, es decir,

$$F'(x) = f(x).$$

Definición 1. *Si en todos los puntos del segmento $[a, b]$ se verifica la ecuación*

$$F'(x) = f(x)$$

la función $F(x)$ se llama primitiva de la función $f(x)$ sobre este segmento.

Ejemplo. Hallar una función primitiva de la función $f(x) = x^2$. De la definición de función primitiva se deduce que la función $F(x) = \frac{x^3}{3}$ es primitiva de la $f(x)$, puesto que $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

Es fácil ver que si la función dada $f(x)$ tiene una función primitiva, ésta no es la única. Así, en el ejemplo citado como funciones *primitivas podrían figurar las siguientes:* $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$; $F(x) = \frac{x^3}{3} - 7$, o, en general $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ (donde C es una constante arbitraria) puesto que:

$$\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2.$$

Por otra parte se puede demostrar que las funciones del tipo $\frac{x^3}{3}+C$ abarcan todas las funciones primitivas de la función x^2. Esto se deduce del teorema siguiente.

Teorema: *Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son dos funciones primitivas de la funcion $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$, su diferencia es una constante.*

Demostración. En virtud de la definición de la función primitiva tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} F_1'(x)=f(x) \\ F_2'(x)=f(x) \end{array}\right\} \tag{1}$$

para todo valor de x en el segmento $[a, b]$.

Designemos:

$$F_1(x)-F_2(x)=\varphi(x). \tag{2}$$

Según las igualdades (1), tenemos:

$$F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$$

ó

$$\varphi'(x)=[F_1(x)-F_2(x)]'\equiv 0$$

para todo valor de x en el segmento $[a, b]$. Pero, de la igualdad $\varphi'(x)=0$ se deduce que $\varphi(x)$ es una constante.

En efecto, apliquemos el teorema de Lagrange (véase § 2, cap. IV) a la función $\varphi(x)$ que es, evidentemente, continua y derivable en el segmento $[a, b]$. En virtud del teorema de Lagrange, para todo x arbitrario del segmento $[a, b]$ tenemos:

$$\varphi(x)-\varphi(a)=(x-a)\,\varphi'(\xi),$$

donde

$$a<\xi<x.$$

Puesto que $\varphi'(\xi)=0$, entonces:

$$\varphi(x)-\varphi(a)=0$$

ó

$$\varphi(x)=\varphi(a). \tag{3}$$

Así, la función $\varphi(x)$, en todo punto x del segmento $[a, b]$ conserva el valor igual a $\varphi(a)$, lo que quiere decir que esta función es constante en el segmento $[a, b]$. Designemos la constante $\varphi(a)$ por C, de las igualdades (2) y (3) obtenemos:

$$F_1(x)-F_2(x)=C.$$

Del teorema demostrado se deduce que si conocemos cualquier función primitiva $F(x)$, de la función $f(x)$ entonces toda otra función primitiva de $f(x)$ tiene la forma $F(x)+C$, donde $C=\text{const}$.

Definición 2. Si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$, la expresión $F(x) + C$ se llama *integral indefinida* de la función $f(x)$ y se designa mediante el símbolo $\int f(x)\,dx$. De tal modo, según la definición:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

si

$$F'(x) = f(x).$$

En este caso, $f(x)$ *se llama integrando o función bajo el signo de integral;* $f(x)\,dx$, *elemento de integración o la expresión bajo el signo de integral y el símbolo* $\int$, *signo de integral.*

Así, la integral indefinida representa una familia de funciones $y = F(x) + C$.

El significado geométrico de la integral indefinida es un conjunto (familia) de curvas, cada una de las cuales se obtiene mediante el desplazamiento de una curva paralelamente a sí misma hacia arriba o hacia abajo, es decir, a lo largo del eje Oy.

Naturalmente surge una cuestión: ¿si toda $f(x)$ tiene funciones primitivas (y, por consiguiente, integral indefinida)? La respuesta es negativa. Sin embargo, notemos, por ahora sin demostración, *que toda función* $f(x)$ *continua en el segmento* $[a, b]$ *tiene una función primitiva (y, por tanto, una integral indefinida).*

En el capítulo presente vamos a estudiar los métodos que permiten determinar las funciones primitivas (y por consiguiente las integrales indefinidas) de ciertas clases de funciones elementales.

El proceso que permite hallar la función primitiva de una función $f(x)$ se llama *integración de la función* $f(x)$.

Observemos lo siguiente: mientras que la derivada de una función elemental es siempre una función elemental, la primitiva de una función elemental puede no expresarse mediante un número finito de funciones elementales. Estudiemos más detalladamente este problema al final del presente capítulo.

De la definición 2 se deduce:

1. *La derivada de una integral indefinida es igual al integrando, es decir, si* $F'(x) = f(x)$, *entonces:*

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = f(x). \tag{4}$$

Esta última igualdad significa que la derivada de una primitiva cualquiera es igual al integrando.

2. *La diferencial de una integral indefinida es igual al elemento de integración*

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx. \tag{5}$$

Esto se deduce de la fórmula (4).

3. *La integral indefinida de la diferencial de una cierta función es igual a la suma de esta función y de una constante arbitraria*

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Es fácil comprobar que esta igualdad es válida mediante la derivación (las diferenciales de ambos miembros de la igualdad son iguales a $dF(x)$).

§ 2. TABLA DE INTEGRALES

Antes de proceder a la exposición de los métodos de integración daremos una tabla de integrales de las funciones elementales.

La tabla de integrales se deduce inmediatamente de la definición 2 § 1, cap. X, y de la tabla de las derivadas (§ 15, cap. III). (Es fácil comprobar que las igualdades de la tabla son válidas mediante la derivación, es decir, se puede verificar que la derivada del segundo miembro es igual al integrando).

1. $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$. (Aquí y en las fórmulas siguientes C designa una constante arbitraria).

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C.$

4. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C.$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C.$

7. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C.$

8. $\int \operatorname{cotg} x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C.$

9. $\int e^x\,dx = e^x + C.$

10. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

11'. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C.$

13'. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C.$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

Observación. En la tabla de las derivadas (§ 15, cap. III) no hay fórmulas que correspondan a las 7, 8, 11', 12, 13' y 14. Sin embargo, es fácil comprobar que estas fórmulas son válidas mediante la derivación.

En el caso de la fórmula 7 tenemos:

$$(-\ln|\cos x|)' = -\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x,$$

por tanto, $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C$.

En el caso de la fórmula 8 tenemos:

$$(\ln|\operatorname{sen} x|)' = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotg} x,$$

por tando, $\int \operatorname{cotg} x = \ln|\operatorname{sen} x| + C$.

En caso de la fórmula 12 tenemos:

$$\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\right)' = \frac{1}{2a}[\ln|a+x| - \ln|a-x|]' =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right] = \frac{1}{a^2-x^2},$$

por tanto,

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$$

Notemos que la última fórmula se deduce también de los resultados generales del § 9, cap. X.

En el caso de la fórmula 14 tenemos:

$$(\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$$

por tanto

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C.$$

Esta fórmula también se deduce de los resultados generales del § 11.

De la manera análoga se verifican las fórmulas 11′ y 13′. Observemos que estas fórmulas serán obtenidas en lo ulterior de las fórmulas 11 y 13 (véase § 4, ejemplos 3 y 4).

§ 3. ALGUNAS PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

Teorema 1. *La integral indefinida de la suma algebraica de dos o varias funciones es igual a la suma algebraica de sus integrales*

$$\int[f_1(x)+f_2(x)]\,dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx. \tag{1}$$

Para demostrar el teorema hallemos las derivadas del primero y segundo miembros de esta igualdad (1). En virtud de la igualdad (4) del párrafo anterior hallamos:

$$\left(\int[f_1(x)+f_2(x)]\,dx\right)'=f_1(x)+f_2(x),$$

$$\left(\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx\right)'=\left(\int f_1(x)\,dx\right)'+\left(\int f_2(x)\,dx\right)'=f_1(x)+f_2(x).$$

Así, la derivada del primer miembro de la igualdad (1) es igual a la derivada del segundo miembro, es decir, la derivada de cualquier función primitiva del primer miembro es igual a la derivada de una función arbitraria del segundo miembro. Por consiguiente, según el teorema § 1 cap. X, toda función del primer miembro de la igualdad (1) se diferencia de toda función del segundo miembro de esta igualdad en un sumando constante. La igualdad (1) tiene precisamente este significado.

Teorema 2. *El factor constante se puede sacar fuera del signo de la integral, es decir, si* $a=$ const, *entonces*:

$$\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx. \tag{2}$$

Para demostrar la igualdad (2), derivemos ambos miembros:

$$\left(\int af(x)\,dx\right)'=af(x),$$

$$\left(a\int f(x)\,dx\right)'=a\left(\int f(x)\,dx\right)'=af(x).$$

Las derivadas de ambos miembros son iguales, por consiguiente, lo mismo que en la igualdad (1), la diferencia de dos funciones cualesquiera, *dispuestas a la derecha* y *a la izquierda, es una constante*. La igualdad (2) tiene precisamente este significado.

Durante el cálculo de las integrales indefinidas es útil tener en cuenta las reglas siguientes.

I. Si:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

entonces:

$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a} F(ax) + C. \tag{3}$$

En efecto, derivando ambos miembros de la igualdad (3), obtenemos:

$$\left(\int f(ax)\,dx\right)' = f(ax),$$

$$\left(\frac{1}{a} F(ax)\right)' = \frac{1}{a}(F(ax))'_x = \frac{1}{a} F'(ax)\,a = F'(ax) = f(ax).$$

Las derivadas de los dos miembros son iguales, lo que se trataba de demostrar:

II. Si

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

entonces:

$$\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + C. \tag{4}$$

III. Si

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

entonces:

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C. \tag{5}$$

Las igualdades (4) y (5) se demuestran mediante la derivación de sus miembros.

Ejemplo 1.

$$\int (2x^3 - 3\,\text{sen}\,x + 5\sqrt{x})\,dx = \int 2x^3\,dx - \int 3\,\text{sen}\,x\,dx + \int 5\sqrt{x}\,dx =$$

$$= 2\int x^3\,dx - 3\int \text{sen}\,x\,dx + 5\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = 2\,\frac{x^{3+1}}{3+1} - 3(-\cos x) +$$

$$+ 5\,\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2}x^4 + 3\cos x + \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C.$$

Ejemplo 2.

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+x\sqrt[4]{x}\right)dx=3\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx+\frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx+$$

$$+\int x^{\frac{5}{4}}\,dx=3\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+\frac{1}{2}\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1}+C=$$

$$=\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}+\frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x}+C.$$

Ejemplo 3.

$$\int\frac{dx}{x+3}=\ln|x+3|+C.$$

Ejemplo 4.

$$\int\cos 7x\,dx=\frac{1}{7}\operatorname{sen} 7x+C.$$

Ejemplo 5.

$$\int\operatorname{sen}(2x-6)\,dx=-\frac{1}{2}\cos(2x-6)+C.$$

§ 4. INTEGRACION POR CAMBIO DE VARIABLE O POR SUSTITUCION

Supongamos que es preciso hallar la integral

$$\int f(x)\,dx,$$

pero, no podemos elegir inmediatamente la función primitiva para $f(x)$, aunque sabemos que ésta existe.

Realicemos el cambio de variable en el elemento de integración, haciendo

$$x=\varphi(t), \tag{1}$$

donde, $\varphi(t)$ es una función continua, lo mismo que su derivada, y tiene una función inversa. Entonces $dx=\varphi'(t)\,dt$; demostremos que en este caso se verifica la siguiente igualdad:

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{2}$$

Aquí se sobreentiende que la variable t será sustituida después de la integración del segundo miembro de la igualdad, por su expresión en función de x, en virtud de la igualdad (1).

Para determinar que las expresiones en los dos miembros son iguales, en el sentido indicado, es preciso demostrar que sus derivadas respecto a x son iguales. Hallemos la derivada del primer miembro:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'_x=f(x).$$

Derivemos el segundo miembro de la igualdad (2), respecto a x, como función compuesta en la que t es un argumento intermedio. La igualdad (1) expresa la dependencia que tiene t de x, siendo $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$; según la regla de derivación de una función inversa:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

De tal manera tenemos:

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\right)'_x = \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\right)'_t \frac{dt}{dx} =$$

$$= f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x).$$

Por consiguiente, las derivadas respecto a x de los dos miembros de la igualdad (2) son iguales, lo que se trataba de demostrar.

Hay *que elegir la función* $x = \varphi(t)$ *de modo que se pueda calcular la integral indefinida que figura en el segundo miembro de la igualdad* (2).

Observación. A veces es preferible elegir la sustitución de la variable en la forma $t = \psi(x)$ y no en $x = \varphi(t)$.

Ilustrémoslo con un ejemplo. Supongamos que es preciso calcular la integral

$$\int \frac{\psi'(x)\,dx}{\psi(x)}.$$

Es conveniente poner:

$$\psi(x) = t,$$

entonces:

$$\psi'(x)\,dx = dt,$$

$$\int \frac{\psi'(x)\,dx}{\psi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\psi(x)| + C.$$

Demos algunos ejemplos de integración por cambio de variables.

Ejemplo 1. $\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx = ?$ Hagamos la sustitución $t = \operatorname{sen} x$, entonces: $dt = \cos x\,dx$, y, por tanto,

$$\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{1/2}\,dt = \frac{2t^{3/2}}{3} + C = \frac{2}{3}\operatorname{sen}^{3/2} x + C.$$

Ejemplo 2. $\int \frac{x\,dx}{1+x^2}=?$ Sea $t=1+x^2$, entonces $dt=2x\,dx$, y,
$\int \frac{x\,dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln t+C=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$

Ejemplo 3. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$. Sea $t=\frac{x}{a}$, entonces: $dx=a\,dt$,

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int \frac{a\,dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}\ \operatorname{arctg} t+C=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

Ejemplo 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$. Sea $t=\frac{x}{a}$; entonces: $dx=a\,dt$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int \frac{a\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\operatorname{arcsen} t+C=\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+C.$$

(se supone que $a>0$).

En los ejemplos 3 y 4 hemos obtenido las fórmulas 11′ y 13′ de la tabla de integrales (véase § 2).

Ejemplo 5. $\int (\ln x)^3\frac{dx}{x}=?$. Sea $t=\ln x$; entonces $dt=\frac{dx}{x}$, $\int (\ln x)^3\frac{dx}{x}=$
$=\int t^3\,dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{1}{4}(\ln x)^4+C.$

Ejemplo 6. $\int \frac{x\,dx}{1+x^4}=?$. Sea $t=x^2$; entonces $dt=2x\,dx$,

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\ \operatorname{arctg} t+C=\frac{1}{2}\ \operatorname{arctg} x^2+C.$$

La integración por sustitución de variables es uno de los métodos más importantes del cálculo de las integrales indefinidas. Incluso cuando utilizamos algún otro método frecuentemente, estamos obligados a recurrir en las operaciones intermedias al método de sustitución de variables. El éxito de la integración depende en grado considerable de la habilidad para elegir la sustitución adecuada de variables. Esto simplifica la integral dada. Por eso, el estudio de los métodos de integración se reduce, en su esencia, a la determinación de la conveniente sustitución de variables para uno u otro elemento de integración. Al estudio de los métodos mencionados se dedica la mayor parte del capítulo presente.

§ 5. INTEGRALES DE CIERTAS FUNCIONES QUE CONTIENEN UN TRINOMIO CUADRADO

1. Calcular la integral

$$I_1=\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Transformemos, previamente, en forma de una suma o una diferencia de los cuadrados el trinomio en el denominador,

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=$$

$$=a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right],$$

donde está designado:

$$\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\pm k^2.$$

El signo «más» o «menos» se toma según sea positiva o negativa la expresión del primer miembro, es decir, según sean complejas o reales las raíces del trinomio ax^2+bx+c. De este modo, la integral I_1 toma la forma:

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right]}.$$

Cambiemos la variable en la última integral:

$$x+\frac{b}{2a}=t,\quad dx=dt.$$

Obtenemos

$$I_1=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}.$$

Estas son las integrales 11′ y 12 de la tabla.

Ejemplo 1. Calcular la integral

$$\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}.$$

Solución.

$$I=\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+10}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+4+10-4}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+2)^2+6}.$$

Sustituimos la variable $x+2=t$, $dx=dt$, y, poniéndola en la expresión en consideración, obtenemos la integral de la tabla:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+6} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{6}} + C.$$

Sustituyendo t por su expresión en función de x; en definitiva obtenemos:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C.$$

II. Calcular una integral de la forma más general

$$I_2 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Transformemos el integrando en la forma siguiente:

$$I_2 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Respresentemos la última integral en forma de una suma de dos integrales. Sacando los factores constantes fuera del signo de la integral, obtenemos:

$$I_1 = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

La última es la integral I_1, que ya sabemos calcular. En la integral primera realicemos el cambio de variable:

$$ax^2 + bx + c = t, \ (2ax + b)\,dx = dt.$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{(2ax+b)\,dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|ax^2+bx+c|C.$$

En definitiva obtenemos:

$$I_2 = \frac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) I_1.$$

Ejemplo 2. Calcular la integral

$$I = \int \frac{x+3}{x^2-2x-5}\,dx.$$

Apliquemos el procedimiento mencionado:

$$I=\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}=\int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)+\left(3+\frac{1}{2}2\right)}{x^2-2x-5}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)\,dx}{x^2-2x-5}+4\int \frac{dx}{x^2-2x-5}=\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5|+$$

$$+4\int \frac{dx}{(x-1)^2-6}=\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5|+4\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)}\right|+C.$$

III. Calcular la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Utilizando las transformaciones estudiadas en el punto I, se puede reducir la integral (según sea el signo de a) a una de las integrales de la tabla:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}} \text{ para } a>0 \text{ ó } \int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}} \text{ para } a<0,$$

Estos dos integrales figuran en la tabla (véase las fórmulas 13' y 14).

IV. La integral

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

se calcula con ayuda de las siguientes transformaciones análogas a las estudiadas en el punto II:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Realizando en la primera integral la sustitución

$$ax^2+bx+c=t,\ (2ax+b)\,dx=dt,$$

obtenemos:

$$\int \frac{(2ax+b)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{ax^2+bx+c}+C.$$

La segunda integral ha sido examinada en el punto III del párrafo presente.

Ejemplo 3.

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx=\int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx=$$
$$=\frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx-7\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}}=$$
$$=5\sqrt{x^2+4x+10}-7\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}\right|+C=$$
$$=5\sqrt{x^2+4x+10}-7\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right|+C.$$

§ 6. INTEGRACION POR PARTES

Si u y v son dos funciones derivables de x, entonces como sabemos, la diferencial del producto uv es:

$$d\,(uv)=u\,dv+v\,du.$$

De aquí, integrando, obtenemos:

$$uv=\int u\,dv+\int v\,du$$

ó

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du \tag{1}$$

Esta es *la fórmula de integración por partes.* Esta fórmula se usa frecuentemente para integrar las expresiones que pueden ser representadas en forma de un producto de dos factores, u y dv, de tal manera que la búsqueda de la función v, a partir de su diferencial dv, y el cálculo de la integral $\int v\,du$, constituyan en conjunto un problema más simple que el cálculo directo de la integral $\int u\,dv$.

Para descomponer el elemento de integración dado en dos factores u y dv se necesita cierta experiencia que se adquiere resolviendo problemas. Demos algunos ejemplos para demostrar el procedimiento en casos semejantes.

Ejemplo 1. $\int x \operatorname{sen} x\,dx=?$ Sea:

$$u=x,\quad dv=\operatorname{sen} x\,dx$$

entonces,

$$du=dx,\quad v=-\cos x.$$

Por consiguiente, $\int x\operatorname{sen} x\,dx=-x\cos x+\int \cos x\,dx=-x\cos x+\operatorname{sen} x+C.$

Observación. Cuando determinamos la función v a partir de su diferencial dv, se puede tomar cualquiera constante arbitraria, puesto que ésta no figura en el resultado final (lo que es fácil verificar sustituyendo v en la igualdad (1) por la expresión $v+C$). Por eso es preferible elegir esta constante igual a cero.

El método de integración por partes se utiliza en muchos casos. Así, por ejemplo, las integrales del tipo

$$\int x^k \operatorname{sen} ax\,dx \qquad \int x^k \cos ax\,dx,$$

$$\int x^k e^{ax}\,dx, \qquad \int x^k \ln x\,dx,$$

como también otras que contienen funciones trigonométricas inversas, se calculan, usando la integración por partes.

Ejemplo 2. Hallar: $\int \operatorname{arctg} x\,dx$. Sea $u=\operatorname{arctg} x$, $dv=dx$, entonces: $du=\frac{dx}{1+x^2}$, $v=x$.

Por consiguiente,

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2|+C.$$

Ejemplo 3. Hallar: $\int x^2e^x\,dx$. Sea $u=x^2$, $dv=e^x\,dx$, entonces:

$$du=2x\,dx,\ v=e^x$$

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x-2\int xe^x\,dx.$$

Integrando por partes la última integral,

$$u_1=x, \qquad du_1=dx,$$

$$dv_1=e^x\,dx, \qquad v_1=e^x.$$

Entonces:

$$\int xe^x\,dx = xe^x-\int e^x\,dx = xe^x-e^x+C.$$

En definitiva tenemos:

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x-2(xe^x-e^x)+C = x^2e^x-2xe^x+2e^x+C = e^x(x^2-2x+2)+C.$$

Ejemplo 4. Calcular: $\int (x^2+7x-5)\cos 2x\,dx$. Haciendo $u=x^2+7x-5$; $dv=\cos 2x\,dx$; entonces:

$$du=(2x+7)\,dx,\ v=\frac{\operatorname{sen} 2x}{2},$$

$$\int (x^2+7x-5)\cos 2x\,dx = (x^2+7x-5)\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \int (2x+7)\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\,dx.$$

Apliquemos el método de integración por partes a la última integral, teniendo en cuenta que $u_1=\frac{2x+7}{2}$, $dv_1=\operatorname{sen} 2x\,dx$; entonces:

$$du_1=dx,\ v_1=-\frac{\cos 2x}{2};$$

$$\int \frac{2x+7}{2}\operatorname{sen} 2x\,dx = \frac{2x+7}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) - \int\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)dx =$$

$$= -\frac{(2x+7)\cos 2x}{4}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}+C.$$

De donde finalmente obtenemos:

$$\int (x^2+7x-5)\cos 2x\,dx=(x^2+7x-5)\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}+(2x+7)\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}+C.$$

Ejemplo 5. $I=\int \sqrt{a^2-x^2}dx=?$

Efectuemos las transformaciones idénticas. Multipliquemos y dividamos el integrando por $\sqrt{a^2-x^2}$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=$$

$$=a^2 \operatorname{arsen}\frac{x}{a}-\int x\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Apliquemos a esta integral el método de integración por partes, poniendo

$$u=x, \qquad du=dx,$$

$$dv=\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad v=-\sqrt{a^2-x^2}.$$

Entonces:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int x\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-x\sqrt{a^2-x^2}+\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Sustituyendo el último resultado en la expresión de la integral dada obtenida antes, tenemos:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2 \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}-\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Traslademos la integral de la derecha a la izquierda, y llevando a cabo las transformaciones elementales, obtenemos en definitiva:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Ejemplo 6. Hallar las integrales

$$I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx \;\text{ y }\; I_2=\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx.$$

Aplicando el método de integración por partes a la primera integral, obtenemos:

$$u=e^{ax}, \qquad du=ae^{ax},$$

$$dv=\cos bx\,dx, \quad v=\frac{1}{b}\operatorname{sen} bx,$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}e^{ax}\operatorname{sen} bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx.$$

Apliquemos de nuevo a la última integral el método de integración por partes:

$$u=e^{ax}, \qquad du=ae^{ax},$$

$$dv=\operatorname{sen} bx\,dx, \quad v=-\frac{1}{b}\cos bx,$$

$$\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Introduciendo la expresión obtenida en la igualdad anterior, obtenemos:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}e^{ax}\operatorname{sen} bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

De la última igualdad hallemos I_1:

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bx\,dx=e^{ax}\left(\frac{1}{b}\operatorname{sen} bx+\frac{a}{b^2}\cos bx\right),$$

de donde

$$I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}(b\operatorname{sen} bx+a\cos bx)}{a^2+b^2}+C.$$

Del modo análogo hallamos:

$$I_2=\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\operatorname{sen} bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C.$$

§ 7. FRACCIONES RACIONALES. FRACCIONES RACIONALES ELEMENTALES Y SU INTEGRACION

Como veremos más abajo, no toda integral de una función elemental se resuelve mediante las funciones elementales. Por eso tiene gran importancia la definición de ciertas clases de funciones, cuyas integrales pueden ser expresadas mediante las funciones elementales. La más simple de estas clases es la clase de las funciones racionales.

Toda función racional puede ser representada en la forma de *una fracción racional, es decir, como la razón de dos polinomios:*

$$\frac{Q(x)}{f(x)}=\frac{B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_m}{A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n}.$$

Sin limitar la generalidad del razonamiento, supongamos que estos polinomios no tienen raíces comunes.

Si el grado del *numerador* es *inferior* al del *denominador*, la fracción se llama *propia*; en el caso contrario, la fracción se llamará *impropia*.

Si la fracción es impropia, al dividir el numerador por el denominador (según la regla de división de los polinomios) se puede representar la fracción dada como la suma de un polinomio y de una fracción propia:

$$\frac{Q(x)}{f(x)}=M(x)+\frac{F(x)}{f(x)},$$

donde, $M(x)$ es un polinomio, y $\frac{F(x)}{f(x)}$ es una fracción propia.

Ejemplo 1. Sea $\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}$ una fracción racional impropia.

Al dividir el numerador por el denominador (según la regla de división de los polinomios), obtenemos:

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}=x^2-2x+3-\frac{4x-6}{x^2+2x+1}.$$

La integración de los polinomios no ofrece dificultades. Por eso, la dificultad fundamental de la integración de fracciones racionales consiste en la integración de las fracciones racionales propias.

Definición: Las fracciones racionales propias del tipo:

I. $\frac{A}{x-a}$,

II. $\frac{A}{x-a^k}$ (k es un número entero positivo $\geqslant 2$).

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ $\left(\text{las raíces del denominador son complejas, es decir, } \frac{p^2}{4}-q<0\right)$,

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ (k es un número entero positivo $\geqslant 2$, las raíces del denominador son complejas).

se llaman *fracciones simples del tipo I, II, III, IV*, respectivamente.

En el § 8 demostraremos que cada fracción racional puede ser representada en forma de una suma de fracciones simples. Por eso, estudiemos al principio las integrales de las fracciones simples.

La integración de las fracciones simples del tipo I, II, III no ofrece grandes dificultades, por eso efectuaremos su integración sin dar explicaciones detalladas.

I. $$\int\frac{A}{x-a}\,dx=A\ln|x-a|+C.$$

II. $$\int\frac{A}{(x-a)^k}\,dx=A\int(x-a)^{-k}\,dx=$$

$$=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C.$$

III. $$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}\,dx=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C \text{ (véase § 5).}$$

La integración de las fracciones simples del tipo IV requiere cálculos más complicados. Supongamos que debemos calcular una integral de este tipo.

IV. $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx.$

Hagamos las transformaciones:

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^k}\,dx=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}.$$

La primera integral se halla por sustitución $x^2+px+q=t$; $(2x+p)\,dx=dt$:

$$\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx=\int\frac{dt}{t^k}=\int t^{-k}\,dt=\frac{t^{-k+1}}{1-k}+C=$$

$$=\frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}}+C.$$

Escribamos la segunda integral designada por I_k, en la forma:

$$I_k=\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}=\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k}=$$

$$=\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k},$$

haciendo

$$x+\frac{p}{2}=t, \quad dx=dt, \quad q-\frac{p^2}{4}=m^2.$$

(según la hipótesis, las raíces del denominador son complejas y, por tanto, $q-\frac{p^2}{4}>0$). Ahora procedamos del modo siguiente:

$$I_k=\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k}=\frac{1}{m^2}\int\frac{(t^2+m^2)-t^2}{(t^2+m^2)^k}\,dt=$$

$$=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2}{(t^2+m^2)^k}\,dt.$$

Transformemos la última integral:

$$\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+m^2)^k}=\int\frac{t\cdot t\,dt}{(t^2+m^2)^k}=$$

$$=\frac{1}{2}\int t\,\frac{d(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^k}=-\frac{1}{2(k-1)}\int t\,d\left(\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right).$$

Integrando por partes, tenemos:

$$\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+m^2)^k}=-\frac{1}{2(k-1)}\left[t\,\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right].$$

Sustituyendo esta expresión en la igualdad (1), obtenemos:

$$I_k=\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k}=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}+$$

$$+\frac{1}{m^2}\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right]=$$

$$=\frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2m^2(k-1)}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}.$$

En el segundo miembro se encuentra la integral del mismo tipo que I_k, siendo el exponente del grado del denominador del integrando menor en una unidad $(k-1)$; así resulta que hemos expresado I_k en función de I_{k-1}.

Aplicando sucesivamente este procedimiento obtenemos la integral conocida:

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{t}{m}+C.$$

Sustituyendo ahora t y m por sus valores, obtenemos la expresión de la integral IV, en función de x y números dados A, B, p, q.

Ejemplo 2.

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+(-1-1)}{(x^2+2x+3)^2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} =$$
$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x^2+2x+3)} - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Apliquemos a la última integral la sustitución $x+1=t$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+2)-t^2}{(t^2+2)^2}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{(t^2+2)^2}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+2)^2}.$$

Examinemos la última integral:

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{t\,d(t^2+2)}{(t^2+2)^2} = -\frac{1}{2}\int t\,d\left(\frac{1}{t^2+2}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\,\frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} = -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}.$$

aquí todavía no ponemos una constante arbitraria, la escribiremos en el resultado final).

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\left[-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right].$$

En definitiva tenemos:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

§ 8. DESCOMPOSICION DE LA FRACCION RACIONAL EN FRACCIONES SIMPLES

Demostremos ahora que toda fracción racional propia puede ser descompuesta en la suma de fracciones simples.

Sea $\frac{F(x)}{f(x)}$ una fracción racional propia.

Supongamos que los coeficientes de los polinomios que la integran son números reales y la fracción dada es irreducible (lo último significa que el numerador y el denominador no tienen raíces comunes).

Teorema 1. *Sea $x = a$ una raíz múltiple de orden k del denominador, es decir,* $f(x) = (x-a)^k f_1(x)$, *donde* $f_1(a) \neq 0$ (véase § 6, cap. VII). *Entonces la fracción propia dada* $\frac{F(x)}{f(x)}$ *se puede descomponer en la suma de dos fracciones propias:*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}, \tag{1}$$

donde A es una constante, diferente de cero, y $F_1(x)$ es un polinomio de grado inferior al grado del denominador $(x-a)^{k-1} f_1(x)$.

Demostración. Escribamos la identidad

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F(x) - Af_1(x)}{(x-a)^k f_1(x)} \tag{2}$$

(que se verifica para cualquier A) y definamos la constante A de modo que el polinomio $F(x) - Af_1(x)$ sea divisible por $x - a$. En virtud del teorema de Bezout, es necesario y suficiente que se verifique la igualdad

$$F(a) - Af_1(a) = 0.$$

Puesto que $f_1(a) \neq 0$, $F(a) \neq 0$, se puede definir A de una manera unívoca por la igualdad

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)}.$$

Para tal A tenemos:

$$F(x) - Af_1(x) = (x-a) F_1(x),$$

donde $F_1(x)$ es un polinomio de grado inferior al del polinomio $(x-a)^{k-1} f_1(x)$. Reduciendo la fracción en la fórmula (2) por $(x-a)$, obtenemos la igualdad (1).

Corolario. A la fracción racional propia

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}$$

que entra en la igualdad (1), se pueden aplicar razonamientos análogos. Así, si el denominador tiene una raíz múltiple $x = a$ de orden k, se puede escribir:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \frac{F_k(x)}{f_1(x)},$$

donde $\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$ es una fracción propia irreducible a la cual se puede aplicar el teorema recién demostrado, si $f_1(x)$ tiene otras raíces reales.

Estudiemos ahora el caso en que el denominador tiene raíces complejas. Recordemos que las raíces complejas del polinomio de coeficientes reales están conjugadas en pares (véase § 8 cap. VII).

En la descomposición del polinomio en factores reales, a cada par de raíces conjugadas corresponde una expresión de la forma $x^2 + px + q$. Si las raíces conjugadas son múltiples de orden μ la expresión correspondiente será $(x^2 + px + q)^\mu$.

Teorema 2. *Si* $f(x) = (x^2 + px + q)^\mu \varphi_1(x)$, *donde el polinomio* $\varphi_1(x)$ *no es divisible por* $x^2 + px + q$, *la fracción racional propia* $\frac{F(x)}{f(x)}$ *puede ser representada por la suma de dos fracciones propias:*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{\Phi_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\mu-1}\varphi_1(x)} \tag{3}$$

donde $\Phi_1(x)$ *es un polinomio de grado inferior al del polinomio* $(x^2 + px + q)^{\mu-1}\varphi_1(x)$.

Demostración: Escribamos la identidad

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x^2 + px + q)^\mu \varphi_1(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\mu} +$$

$$+ \frac{F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x)}{(x^2 + px + q)^\mu \varphi_1(x)}, \tag{4}$$

que se verifica para todo M y N y definamos M y N de modo que el polinomio $F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x)$ se divida por $x^2 + px + q$. Para esto es necesario y suficiente que la ecuación

$$F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x) = 0$$

tenga las mismas raíces $\alpha \pm i\beta$ que el polinomio $x^2 + px + q$.

Por tanto,

$$F(\alpha + i\beta) - [M(\alpha + i\beta) + N]\varphi_1(\alpha + i\beta) = 0$$

ó

$$M(\alpha + i\beta) + N = \frac{F(\alpha + i\beta)}{\varphi_1(\alpha + i\beta)}.$$

Pero, $\frac{F(\alpha + i\beta)}{\varphi_1(\alpha + i\beta)}$ es un número complejo determinado que se puede escribir en la forma $K + iL$; donde K y L son números reales. Así,

$$M(\alpha + i\beta) + N = K + iL;$$

de donde $M\alpha + N = K$, $M\beta = L$
ó

$$M = \frac{L}{\beta}, \qquad N = \frac{K\beta - L\alpha}{\beta}.$$

Siendo estos los valores de los coeficientes M y N, el polinomio $F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x)$ tiene el número $\alpha + i\beta$ por raíz, y, por tanto, la raíz conjugada $\alpha - i\beta$. Pero, en este caso, el polinomio es divisible sin resto por las diferencias $x - (\alpha + i\beta)$ y $x - (\alpha - i\beta)$, y, lógicamente, por su producto, es decir, por $x^2 + px + q$.

Designando el cociente de esta división por $\Phi_1(x)$, obtenemos:

$$F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x) = (x^2 + px + q)\,\Phi_1(x).$$

Simplificando por $x^2 + px + q$ la última fracción en la igualdad (4), obtenemos la igualdad (3), quedándose claro que $\Phi_1(x)$ es un polinomio de grado inferior al del denominador, lo que se trataba de demostrar.

Aplicando los resultados de los teoremas 1 y 2 a la fracción propia $\frac{F(x)}{f(x)}$, podemos destacar sucesivamente todas las fracciones simples, correspondientes a todas las raíces del denominador $f(x)$. Así, de lo anterior se deduce el siguiente resultado:

Si $f(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x^2+px+q)^{\mu}\ldots(x^2+lx+s)^{\nu}$, *la fracción* $\frac{F(x)}{f(x)}$ *puede ser descompuesta de la manera siguiente:*

$$\left.\begin{aligned}
\frac{F(x)}{f(x)} = {} & \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \\
& + \frac{B}{(x-b^{\beta})} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + \ldots + \frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+px+q} + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{Px+Q}{(x^2+lx+s)^{\nu}} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+lx+s)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{P_{\nu-1}x+Q_{\nu-1}}{x^2+lx+s}.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Se puede determinar los coeficientes $A, A_1, \ldots, B, B_1, \ldots$ teniendo en cuenta las consideraciones siguientes. La igualdad (5) es una identidad, por consiguiente, al reducir estas fracciones a un común denominador obtenemos en los numeradores del primero y segundo miembros polinomios idénticos. Igualando los coeficientes de los términos que tienen las mismas potencias de x, obtenemos un sistema de ecuaciones para determinar los coeficientes incógnitos $A, A_1, \ldots, B, B_1, \ldots$

También podemos determinar estos coeficientes, teniendo en cuenta la observación siguiente: los polinomios obtenidos en ambos miembros de la igualdad, después de la reducción de las fracciones al común denominador, deben ser idénticamente iguales; por consiguiente, los valores de estos polinomios son iguales para cada valor particular de x. Dando a x valores particulares, obtenemos las ecuaciones necesarias para la determinación de los coeficientes.

De este modo demostramos que toda fracción racional propia puede ser representada en la forma de una suma de las fracciones racionales simples.

Ejemplo. Descomponer la fracción $\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$ en fracciones simples.

En virtud de la fórmula (5) tenemos:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A}{(x+1)^3}+\frac{A_1}{(x+1)^2}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{B}{x-2}.$$

Reduciendo a un común denominador e igualando los numeradores obtenemos:

$$x^2+2=A(x-2)+A_1(x+1)(x-2)+A_2(x+1)^2(x-2)+B(x+1)^3, \qquad (6)$$

ó

$$x^2+2=(A_2+B)x^3+(A_1+3B)x^2+(A-A_1-3A_2+3B)x+$$
$$+(-2A-2A_1-2A_2+B).$$

Igualando los coeficientes de x^3, x^2, x^1, x^0 (término absoluto), obtenemos un sistema de ecuaciones para determinar los coeficientes:

$$\begin{aligned} 0&=A_2+B,\\ 1&=A_1+3B,\\ 0&=A-A_1-3A_2+3B,\\ 2&=-2A-2A_1-2A_2+B.\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema, tenemos:

$$A=-1;\quad A_1=\frac{1}{3};\quad A_2=-\frac{2}{9};\quad B=\frac{2}{9}.$$

Se puede, también, determinar algunos coeficientes a partir de las ecuaciones que se obtienen de la igualdad (6), que es identidad respecto a x, cuando a la variable x se dan ciertos valores particulares.

Pues, haciendo $x=-1$, tenemos $3=-3A$ ó $A=-1$;

haciendo $x=2$, tenemos $6=27B$; $B=\frac{2}{9}$.

Si adjuntamos a estas dos ecuaciones otras dos obtenidas mediante la igualación de los coeficientes de las mismas potencias de x, obtenemos cuatro ecuaciones para determinar cuatro coeficientes desconocidos.

En definitiva, tenemos una descomposición:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=-\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{3(x+1)^2}-\frac{2}{9(x+1)}+\frac{2}{9(x-2)}.$$

§ 9. INTEGRACION DE LAS FRACCIONES RACIONALES

Supongamos que hace falta calcular la integral de la fracción racional $\frac{Q(x)}{f(x)}$, es decir, la integral

$$\int \frac{Q(x)}{f(x)}\,dx.$$

Si la fracción dada es **impropia**, la representamos como suma de un polinomio $M(x)$ y una fracción racional **propia** $\frac{F(x)}{f(x)}$ (véase 7). Pero fracción $\frac{F(x)}{f(x)}$ la representamos en la forma de una suma de fracciones **simples** (según la fórmula (5) § 8). De tal modo, la integración de toda la fracción racional consiste fundamentalmente en la integración de un polinomio y de varias fracciones **simples**. De los resultados obtenidos en el § 8 se deduce que las raíces del denominador $f(x)$ determinan la forma de las fracciones simples. Son posibles los siguientes casos:

Caso I. *Las raíces del denominador son reales y diferentes, es decir,*

$$f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-d).$$

En este caso la fracción $\frac{F(x)}{f(x)}$ se descompone en las fracciones simples del tipo I:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{D}{x-d},$$

y luego

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{A}{x-a}\,dx + \int \frac{B}{x-b}\,dx + \ldots + \int \frac{D}{x-d}\,dx =$$

$$= A\ln|x-a| + B\ln|x-b| + \ldots + D\ln|x-d| + C.$$

Caso II. *Las raíces del denominador son reales; pero, algunas raíces son múltiples:*

$$f(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-d)^{\delta}.$$

En este caso la fracción $\frac{F(x)}{f(x)}$ se descompone en fracciones simples del tipo I y II.

Ejemplo 1. (véase el ejemplo en el § 8 cap. X).

$$\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}\,dx = -\int \frac{dx}{(x+1)^3} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x+1} +$$

$$+\frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{9}\ln|x+1| +$$

$$+\frac{2}{9}\ln|x-2| + C = -\frac{2x-1}{-6(x+1)^2} + \frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C.$$

Caso III. *El denominador tiene raíces complejas simples*, es decir, *diferentes*:

$$f(x) = (x^2+px+q)(x^2+lx+s)\ \ldots\ (x-a)^\alpha\ \ldots\ (x-d)^\delta.$$

En este caso la fracción $\frac{F(x)}{f(x)}$ se descompone en fracciones simples de los tipos I, II y III.

Ejemplo 2. Calcular la integral

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Descomponemos la fracción bajo el signo de integral en fracciones simples (véase (5) § 8, cap. X):

$$\frac{x}{(x_2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}.$$

Por consiguiente,

$$x = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1).$$

Haciendo $x=1$, tenemos: $1=2C$, $C=\frac{1}{2}$.

Haciendo $x=0$, tenemos: $0=-B+C$, $B=\frac{1}{2}$.

Igualando los coeficientes de x^2, obtenemos $0=A+C$, de donde $A=-\frac{1}{2}$.

Así,

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)} = -\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C.$$

Caso IV. El *denominador contiene también raíces complejas múltiples*:

$$f(x) = (x^2 + px + q)^{\mu} (x^2 + lx + s)^{\nu} \dots (x - a)^{\alpha} \dots (x - d)^{\delta}.$$

En este caso las fracciones simples del tipo IV entran también en la descomposición de la fracción $\frac{F(x)}{f(x)}$.

Ejemplo 3. Calcular la integral

$$\int \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2 (x + 1)} \, dx.$$

Solución. Descompongamos la fracción en elementos simples:

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2 (x + 1)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 2x + 3)^2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2x + 3)} + \frac{E}{x + 1},$$

de donde

$$x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8 =$$
$$= (Ax + B)(x + 1) + (Cx + D)(x^2 + 2x + 3)(x + 1) + E(x^2 + 2x + 3)^2.$$

Combinando los dos métodos dados para determinar los coeficientes, hallamos:

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad E = 1.$$

De tal modo tenemos:

$$\int \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2 (x + 1)} \, dx = \int \frac{x - 1}{(x^2 + 2x + 3)^2} \, dx + \int \frac{dx}{x + 1} =$$
$$= -\frac{x + 2}{2(x^2 + 2x + 3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + \ln |x + 1| + C$$

En el ejemplo 2, § 7, cap. X hemos calculado la primera integral del segundo miembro. La segunda integral puede ser calculada directamente.

Del estudio realizado se deduce que la integral de cualquier función racional puede ser expresada mediante funciones elementales finitas, es decir:

1) mediante los logaritmos, si las fracciones simples son del tipo I;

2) mediante las funciones racionales, si las fracciones simples son del tipo II;

3) mediante los logaritmos y arcos tangentes, si las fracciones simples son del tipo III;

4) mediante las funciones racionales y arcos tangentes, si las fracciones simples son del tipo IV.

§ 10. METODO DE OSTROGRADSKI

Para calcular la integral de una función racional, cuando el denominador tiene las raíces **múltiples**, se puede utilizar otro método más simple. Este método permite destacar la **parte racional** de la integral, sin descomponer la fracción en los elementos simples e integrar después la fracción racional, cuyo denominador tiene solamente raíces **simples**. La integración de tal fracción no ofrece ninguna dificultad, puesto que puede ser descompuesta en fracciones simples de los tipos I y III. Este método se debe al célebre matemático ruso M. V. Ostrogradski (1801—1862) y se basa en lo siguiente.

Supongamos que se necesita integrar una fracción racional propia $\frac{F(x)}{f(x)}$, donde

$$f(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ \ldots\ (x^2+px+q)^{\mu}.$$

En virtud de la igualdad (5) (§ 8) el caso se reduce a la integración de las fracciones racionales propias de cuatro tipos (véase § 7). En este caso:

1) La integral de la fracción del tipo $\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}$ es una fracción del tipo $\frac{A^*}{(x-a)^{\alpha-1}}$.

2) La integral de la fracción $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}}$ es una suma de fracciones del tipo $\frac{M^*x+N^*}{(x^2+px+q)^{\mu^*}}$, donde $\mu^* \leqslant \mu - 1$, y de una integral del tipo

$$\int \frac{N^{**}}{x^2+px+q}\,dx.$$

Por ahora dejemos aparte la integración de las fracciones de los tipos I y III.

Al sumar las fracciones racionales obtenidas después de la integración de las fracciones del tipo II y IV, tenemos la fracción propia del tipo $\frac{Y(x)}{Q(x)}$, en la que el polinomio $Q(x)$ es igual a

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1} \dots (x^2+px+q)^{\mu-1} \dots$$
$$\dots (x^2+lx+s)^{\nu-1}.$$

$Y(x)$ es un polinomio cuyo grado es menor, en una unidad, que el del polinomio Q.

Al sumar las integrales de todas las fracciones del tipo I y III, (incluyendo también las integrales del tipo

$$\int \frac{N^{**}}{x^2+px+q}\,dx,$$

obtenidas mediante la integración de las fracciones del tipo IV) obtenemos la integral de la fracción propia del tipo $\frac{X(x)}{P(x)}$, donde el polinomio $P(x)$ es igual a

$$P(x) = (x-a)(x-b) \dots (x^2+px+q) \dots (x^2+lx+s).$$

Así, encontremos que

$$\int \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Y(x)}{Q(x)} + \int \frac{X(x)}{P(x)}\,dx. \tag{1}$$

Aquí, $X(x)$ es un polinomio cuyo grado es menor en una unidad que el del polinomio $P(x)$.

Determinemos ahora los polinomios $X(x)$ y $Y(x)$ de los numeradores. Para esto derivemos ambos miembros de la igualdad (1):

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{QY' - Q'Y}{Q^2} + \frac{X}{P}$$

ó

$$F(x) = \frac{f(x)\,Y'}{Q} - \frac{f(x)\,Q'Y}{Q^2} + \frac{f(x)\,X}{P}. \tag{2}$$

Demostremos que la expresión del segundo miembro es un polinomio. Notemos que $f(x) = PQ$ y escribamos la igualdad (2) en la forma:

$$F(x) = PY' - \frac{PQ'Y}{Q} + QX. \tag{2'}$$

Queda demostrar que la expresión $-\frac{PQ'Y}{Q}$ es un polinomio, o que PQ' es divisible por Q. Para esto observemos que

$$\frac{Q'}{Q}=[\ln Q]'=[(\alpha-1)\ln(x-a)+(\beta-1)\ln(x-b)+\ldots$$

$$\ldots+(\mu-1)\ln(x^2+px+q)+\ldots+(\nu-1)\ln(x^2+lx+s)]'=$$

$$=\frac{\alpha-1}{x-a}+\frac{\beta-1}{x-b}+\ldots+\frac{(\mu-1)(2x+p)}{x^2+px+q}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(\nu-1)(2x+l)}{x^2+lx+s}.$$

El polinomio P será el denominador común de las fracciones del segundo miembro. El numerador será un polinomio del grado inferior al del de P. Designémoslo por T. De tal modo,

$$\frac{Q'}{Q}=\frac{T}{P}.$$

Por consiguiente, la expresión

$$P\frac{Q'}{Q}Y=P\frac{T}{P}Y=TY$$

es un polinomio. La igualdad (2') tomará la forma:

$$F(x)=PY'-TY+QX. \tag{3}$$

Comparando los coeficientes de iguales potencias de la variable en la igualdad (3), obtenemos el sistema de ecuaciones, de donde encontramos los coeficientes desconocidos de los polinomios X y Y.

Ejemplo. Calcular

$$\int\frac{1}{(x^3-1)^2}\,dx.$$

Solución. *En este caso:*

$$f(x)=(x-1)^2(x^2+x+1)^2,$$
$$P(x)=(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1,$$
$$Q(x)=\qquad\qquad\qquad\qquad=x^3-1.$$

La igualdad (1) tiene la forma:

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1}+\int\frac{Ex^2+Fx+G}{x^3-1}\,dx. \tag{4}$$

Derivando ambos miembros de la igualdad (4) tenemos:

$$\frac{1}{(x^3-1)^2}=\frac{(x^3-1)(2Ax+B)-(Ax^2+Bx+c)\,3x^2}{(x^3-1)^2}+\frac{Ex^2+Fx+G}{x^3-1}.$$

Eliminando el denominador, obtenemos:

$$1=(x^3-1)(2Ax+B)-(Ax^2+Bx+C)\,3x^2+(x^3-1)(Ex^2+Fx+G).$$

Igualando los coeficientes de los términos con las mismas potencias de x en ambos miembros de la igualdad, obtenemos un sistema de seis ecuaciones para determinar los coeficientes A, B, C, E, F, G:

$$\begin{aligned}0&=E,\\0&=-A+F,\\0&=-2B+G,\\0&=3C-E,\\0&=-2A-F,\\1&=-B-G.\end{aligned}$$

La solución de este sistema nos da:

$$E=0,\ A=0,\ C=0,\ B=-\frac{1}{3},\ F=0,\ G=-\frac{2}{3}.$$

Sustituyendo los valores de los coeficientes determinados en la igualdad (4), obtenemos:

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}=\frac{-\frac{1}{3}x}{x^3-1}+\int \frac{-\frac{2}{3}}{x^3-1}\,dx.$$

El denominador de la última integral tiene sólo raíces simples y, por eso, la integral se calcula fácilmente. En definitiva:

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}=\frac{-x}{3(x^3-1)}+\int\left[\frac{-\frac{2}{9}}{x-1}+\frac{\frac{2}{9}x+\frac{4}{9}}{x^2+x+1}\right]dx=$$

$$=-\frac{x}{3(x^2-1)}-\frac{2}{9}\ln|x-1|+\frac{1}{9}\ln(x^2+x+1)+\frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

§ 11. INTEGRALES DE LAS FUNCIONES IRRACIONALES

No siempre es posible expresar la integral de función irracional mediante funciones elementales. En este párrafo y en los posteriores estudiaremos funciones irracionales, cuyas integrales se reducen, mediante sustituciones de las variables correspondientes, a las integrales de funciones racionales y se integran, por tanto, totalmente.

1. Examinemos la integral $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$, donde R es una función racional de sus argumentos*.

---

*) El símbolo $R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right)$ indica que con las magnitudes x, $x^{\frac{m}{n}}$, ..., $x^{\frac{r}{s}}$ se ejecutan sólo operaciones racionales.

Del mismo modo hay que entender en lo ulterior los símbolos del tipo $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots\right)$, $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, etc. Así por ejemplo, el símbolo $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ indica que con $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ se realizan operaciones racionales.

Sea k el común denominador de las fracciones $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$. Ejecutemos la sustitución:

$$x = t^k, \qquad dx = kt^{k-1}\,dt.$$

Entonces, cada potencia **fraccionaria** de x se puede expresar *mediante una potencia* **entera** *de t y, por consiguiente, el integrando* se transformará en **función racional** de t.

Ejemplo 1. Calcular la integral

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{x^{\frac{3}{4}}+1}.$$

Solución. El común denominador de las fracciones $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$ es 4. Por eso, efectuemos la sustitución $x = t^4$, $dx = 4t^3\,dt$; entonces:

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{x^{\frac{3}{4}}+1} = 4\int \frac{t^2}{t^3+1}\,t^3\,dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}\,dt = 4\int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right)dt =$$

$$= 4\int t^2\,dt - 4\int \frac{t^2}{t^3+1}\,dt = 4\frac{t^3}{3} - \frac{4}{3}\ln|t^3+1| + C =$$

$$= \frac{4}{3}[x^{\frac{3}{4}} - \ln|x^{\frac{3}{4}}+1|] + C.$$

II. Examinemos la integral del tipo

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right]dx.$$

La integral se reduce a la de una función racional por medio de la sustitución

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,$$

donde, k es un denominador común de las fracciones $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$.

Ejemplo 2. Calcular la integral

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx.$$

Solución. Efectuemos la sustitución

$$x+4 = t^2; \; x = t^2 - 4;$$

$dx=2t\,dt$; entonces:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx=2\int \frac{t^2}{t^2-4}dt=2\int \left(1+\frac{4}{t^2-4}\right)dt=2\int dt+8\int \frac{dt}{t^2-4}=$$

$$=2t+2\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C.$$

§ 12. INTEGRALES DEL TIPO $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$

Examinemos la integral

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx. \tag{1}$$

Esta integral se reduce a la de una función racional de la nueva variable mediante las siguientes sustituciones de Euler.

1. *Primera sustitución de Euler.* Si $a>0$, hacemos:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t.$$

Para mayor precisión, tomemos el signo más delante de $\sqrt{a}$. Entonces,

$$ax^2+bx+c=ax^2+2\sqrt{a}xt+t^2,$$

de donde x se define como una función racional de t:

$$x=\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}$$

(lo que quiere decir que dx también es una función racional de t), por consiguiente:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+t=\sqrt{a}\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}+t$$

es decir, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ es función racional de t.

Puesto que $\sqrt{ax^2+bx+c}$, x y dx se expresan mediante funciones racionales de t, por tanto, la integral dada (1) se transforma en la integral de una función racional de t.

Ejemplo 1. Calcular la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+C}}.$$

Solución. Puesto que aquí $a=1>0$, pongamos $\sqrt{x^2+C}=-x+t$; entonces:

$$x^2+C=x^2-2xt+t^2,$$

de donde

$$x=\frac{t^2-C}{2t}.$$

Por consiguiente,

$$dx = \frac{t^2+C}{2t^2}\,dt,$$

$$\sqrt{x^2+C} = -x+t = -\frac{t^2-C}{2t}+t = \frac{t^2+C}{2t}.$$

Retornando a la integral inicial, tenemos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+C}} = \int \frac{\frac{t^2+C}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2+C}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C_1 = \ln|x+\sqrt{x^2+C}| + C_1$$

(véase la fórmula 14 de la tabla de integrales).

2. *Segunda sustitución de Euler.* Si $c > 0$, pongamos

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c},$$

entonces:

$$ax^2+bx+c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c.$$

(Para mayor precisión hemos tomado el signo más delante de la raíz). De aquí x se define como función racional de t:

$$x = \frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2}.$$

Puesto que dx y $\sqrt{ax^2+bx+c}$ también se expresan mediante funciones racionales de t, entonces sustituyendo los valores de x, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ y dx en la integral $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, reducimos esta última a la integral de una función racional de t.

Ejemplo 2. Calcular la integral

$$\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$$

Solución. Pongamos $\sqrt{1+x+x^2} = xt+1$, entonces,

$$1+x+x^2 = x^2t^2+2xt+1;\quad x = \frac{2t-1}{1-t^2};\ dx = \frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}\,dt;$$

$$\sqrt{1+x+x^2} = xt+1 = \frac{t^2-t+1}{1-t^2};\ 1-\sqrt{1+x+x^2} = \frac{-2t^2+t}{1-t^2}.$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas en la integral inicial, encontramos:

$$\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\,dx = \int \frac{(-2t^2+t)^2(1-t^2)^2(1-t^2)(2t^2-2t+2)}{(1-t^2)^2(2t-1)^2(t^2-t+1)(1-t^2)^2}\,dx =$$

$$= +2\int \frac{t^2}{1-t^2}\,dt + C = -2t + \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C =$$

$$=-\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x}+\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}-1}{x-\sqrt{1+x+x^2}+1}\right|+C=$$

$$=-\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x}+\ln\left|2x+2\sqrt{1+x+x^2}+1\right|+C.$$

3. *Tercera sustitución de Euler*. Supongamos que α y β son raíces reales del trinomio ax^2+bx+c. Pongamos:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)\,t.$$

Siendo $ax^2+bx+c=a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)$, tenemos:

$$\sqrt{a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)}=(x-\alpha)\,t,$$

$$a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)=(x-\alpha)^2\,t^2,$$

$$a\,(x-\beta)=(x-\alpha)\,t^2.$$

De donde x se expresa como una función racional de t:

$$x=\frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}.$$

Puesto que dx y $\sqrt{ax^2+bx+c}$ son también funciones racionales de t, la integral dada se transforma en la integral de la función racional de t.

Observación 1. La tercera sustitución de Euler es aplicable no sólo cuando $a<0$, sino también cuando $a>0$; la única condición es que el polinomio ax^2+bx+c tenga dos raíces reales.

Ejemplo 3. Calcular la integral

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}.$$

Solución. Puesto que $x^2+3x-4=(x+4)\,(x-1)$, pongamos:

$$\sqrt{(x+4)\,(x-1)}=(x+4)\,t.$$

Entonces: $(x+4)\,(x-1)=(x+4)^2\,t^2$, $x-1=(x+4)\,t^2$,

$$x=\frac{1+4t^2}{1-t^2},\qquad dx=\frac{10t}{(1-t^2)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{(x+4)\,(x-1)}=\left[\frac{1+4t^2}{1-t^2}+4\right]t=\frac{5t}{1-t^2}.$$

Retornando a la integral inicial, tenemos:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}=\int\frac{10t\,(1-t^2)}{(1-t^2)^2\,5t}\,dt=\int\frac{2}{1-t^2}\,dt=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right|+C.$$

Observación 2. Notemos que para reducir la integral (1) a la integral de una función racional es suficiente utilizar la primera y la tercera sustituciones de Euler. Examinemos el trinomio $ax^2 + bx + c$. Si $b^2 - 4ac > 0$, las raíces del trinomio son reales y, por tanto, es aplicable la tercera sustitución de Euler. Si $b^2 - 4ac \leqslant \leqslant 0$, tenemos

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}[(2ax + b)^2 + (4ac - b^2)]$$

y, por tanto, el trinomio tiene el mismo signo que a. Para que $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ sea real, hace falta que el trinomio sea positivo y, partiendo de aquí, *tiene que ser $a > 0$. En este caso se puede usar* la primera sustitución.

§ 13. INTEGRACION DE LOS BINOMIOS DIFERENCIALES

La expresión de la forma

$$x^m (a + bx^n)^p \, dx,$$

en la que m, n, p, a, b son números constantes se llama *binomio diferencial*.

Teorema. La *integral del binomio diferencial*

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx,$$

puede reducirse, si m, n, p, son números racionales, a la integral de una función racional y, por consiguiente, puede expresarse mediante funciones elementales en los tres casos siguientes:

1) p *es un número entero* (positivo, negativo o cero);

2) $\frac{m+1}{n}$ *es un número entero* (positivo, negativo o cero);

3) $\frac{m+1}{n} + p$ *es un número entero* (positivo, negativo o cero).

Demostración. Transformemos la integral dada con ayuda de la sustitución

$$x = z^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n} - 1} dz .$$

Entonces:

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx = \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n} - 1} (a + bz)^p \, dz = \frac{1}{n} \int z^q (a + bz)^p \, dz, \quad (1)$$

donde

$$q = \frac{m+1}{n} - 1.$$

1. Sea p un número entero. Siendo q un número racional, desig-némoslo por $\frac{r}{s}$. En este caso, la integral (1), tiene la forma:

$$\int R\left(z^{\frac{r}{s}}, z\right) dz .$$

Hemos indicado en el § 11, cap. X, que una integral de este tipo puede reducirse a una función racional mediante la sustitución $z = t^s$.

2. Sea $\frac{m+1}{n}$ un número entero. Entonces $q = \frac{m+1}{n} - 1$ es también un número entero. El número p es racional, $p = \frac{\lambda}{\mu}$.

La integral (1) se reduce entonces, a una integral del tipo

$$\int R\left[z^q, (a+bz)^{\frac{\lambda}{\mu}}\right] dz.$$

Esta integral fue estudiada en el § 11, cap. X. Se puede reducirla a la integral de una función racional con ayuda de la sustitución

$$a + bz = t^\mu.$$

3. Sea $\frac{m+1}{n} + p$ un número entero. Pero, entonces, $\frac{m+1}{n} - 1 + p = q + p$ también es un número entero. Transformemos la integral (1):

$$\int z^q (a+bz)^p\, dz = \int z^{q+p} \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p dz,$$

donde $q+p$ es un número entero y $p = \frac{k}{l}$ es un número racional. La última integral pertenece al grupo de integrales

$$\int R\left[z, \left(\frac{a+bz}{z}\right)^{\frac{k}{l}}\right] dz ,$$

Esta integral fue examinada en el § 11, cap. X. La integral indicada se reduce a la integral de una función racional mediante la sustitución $\frac{a+bz}{z} = t^l$.

Examinemos los ejemplos de la integración en todos los tres casos.

Ejemplo 1. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x^2})} = \int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{2}{3}})^{-1}\,dx$. Aquí, $p=-1$ (número entero). Pongamos $x^{\frac{2}{3}}=z$, transformemos la igualdad hasta obtener entre paréntesis la expresión lineal respecto a z:

$$\int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{2}{3}})^{-1}\,dx=\int z^{-1}(1+z)^{-1}\frac{3}{2}z^{\frac{1}{2}}\,dz=\frac{3}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}(1+z)^{-1}\,dz.$$

Hagamos la sustitución:

$$z^{\frac{1}{2}}=t.$$

Entonces, $z=t^2$, $dz=2t\,dt$, y

$$\int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{2}{3}})^{-1}\,dx=\frac{3}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}(1+z)^{-1}\,dz=\frac{3}{2}\int t^{-1}(1+t^2)^{-1}\,2t\,dt=$$

$$=3\int\frac{dt}{1+t^2}=3\operatorname{arctg}t+C=3\operatorname{arctg}\sqrt{z}+C=3\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}+C.$$

Ejemplo 2. $\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int x^3(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$. Aquí, $m=3$; $n=2$; $p=$ $=-\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n}=2$ (número entero). Realicemos la sustitución $x^2=z$. Entonces, $x=z^{\frac{1}{2}}$, $dx=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\,dz$, y

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int z^{\frac{3}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\,dz=\frac{1}{2}\int z(1-z)^{-\frac{1}{2}}\,dz.$$

Para transformar la expresión entre segundos paréntesis en racional, pongamos $(1-z)^{\frac{1}{2}}=t$; entonces: $1-z=t^2$; $z=t^2-1$; $dz=2t\,dt$.
Por consiguiente,

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac{1}{2}\int z(1-z)^{-\frac{1}{2}}\,dz=\frac{1}{2}\int(t^2-1)\,t^{-1}2t\,dt=\int(t^2-1)\,dt=$$

$$=\frac{t^3}{3}-t+C=\frac{t}{3}(t^2-3)+C=\frac{\sqrt{1-z}}{3}(-z-2)+C=$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}}{3}(-x^2-2)+C.$$

Ejemplo 3. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}=\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx$. Aquí, $m=-2$, $n-2$, $p=-\frac{3}{2}$, y $\frac{m+1}{n}+p=-2$ (número entero).

Transformemos la expresión entre paréntesis en función lineal:

$$x^2 = z; \quad x = z^{\frac{1}{2}}; \quad dx = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz;$$

$$\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} dx = \int z^{-1}(1+z)^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}(1+z)^{-\frac{3}{2}} dz =$$
$$= \frac{1}{2}\int z^{-3}\left(\frac{1+z}{z}\right)^{-\frac{3}{2}} dz.$$

El primer factor es una función racional. Para que el segundo factor sea racional también efectuemos la sustitución:

$$\left(\frac{1+z}{z}\right)^{\frac{1}{2}} = t;$$

Entonces:

$$\frac{1+z}{z} = t^2; \quad z = \frac{1}{t^2-1}; \quad dz = \frac{-2t\,dt}{(t^2-1)^2}.$$

Por consiguiente:

$$\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{2}\int z^{-3}\left(\frac{1+z}{z}\right)^{-\frac{3}{2}} dz =$$
$$= \frac{1}{2}\int (t^2-1)^3 t^{-3} \frac{-2t\,dt}{(t^2-1)^2} = -\int \frac{t^2-1}{t^2} dt = -t - \frac{1}{t} + C =$$
$$= -\left(\frac{1+z}{z}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{z}{1+z}\right)^{\frac{1}{2}} + C = -\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}} + C =$$
$$= -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Observación. P.L. Chébishev, destacado matemático ruso, demostró que la integral de los binomios diferenciales, con exponentes racionales puede expresarse mediante funciones elementales solamente en los tres casos citados; (por supuesto, a condición de que $a \neq 0$ y $b \neq 0$). Si ninguno de los números p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n} + p$ es entero, esta integral no puede ser expresada por funciones elementales.

§ 14. INTEGRACION DE CIERTAS CLASES DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Hasta ahora hemos estudiado sistemáticamente las integrales de funciones algebraicas (racionales o irracionales). En el párrafo presente examinemos las integrales de ciertas clases de funciones no algebraicas, en primer lugar, de las funciones trigonométricas.

Examinemos la integral

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx. \tag{1}$$

Demostremos que esta integral, con ayuda de la sustitución,

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \tag{2}$$

se reduce siempre a una integral de una función racional. Expresemos sen x y cos x en función de tg $\frac{x}{2}$ y, por consiguiente, en función de t:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Luego,

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Así, sen x, cos x y dx quedan expresadas mediante funciones *racionales de t. Puesto que una función racional de funciones racionales* es también racional, sustituyendo las expresiones obtenidas en la integral (1), ésta se reduce a una integral de función racional:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx = \int R\left[\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right]\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ejemplo 1. Analicemos la integral

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}.$$

En virtud de las fórmulas expuestas, tenemos:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

La sustitución examinada ofrece la posibilidad de integrar cualquier función del tipo $R(\cos x, \operatorname{sen} x)$. Por eso, se llama, a veces «sustitución trigonométrica universal». Sin embargo, en la práctica esta sustitución conduce a menudo a funciones racionales demasiado complicadas. Por esto, siempre es preferible conocer, aparte de la sustitución «universal» otras sustituciones, que, a veces, conducen más rápidamente al objetivo.

1) Si la integral tiene la forma $\int R(\operatorname{sen} x) \cos x\, dx$, la sustitución $\operatorname{sen} x = t$, $\cos x\, dx = dt$, reduce la integral a una integral de la forma $\int R(t)\, dt$.

2. Si la integral tiene la forma $\int R(\cos x) \operatorname{sen} x\, dx$, la sustitución $\cos x = t$, $\operatorname{sen} x\, dx = -dt$, reduce la integral a una integral de función racional.

3) Si el integrando sólo es función de $\operatorname{tg} x$, la sustitución $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ reduce la integral a una integral de función racional:

$$\int R(\operatorname{tg} x)\, dx = \int R(t) \frac{dt}{1+t^2}.$$

4) Si el integrando tiene la forma $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, donde las potencias de $\operatorname{sen} x$ y de $\cos x$ son exclusivamente pares, se usa la misma sustitución:

$$\operatorname{tg} x = t, \tag{2'}$$

puesto que $\operatorname{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$ se expresan mediante expresiones racionales de $\operatorname{tg} x$:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2},$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Después de realizar la sustitución, obtenemos la integral de una función racional.

Ejemplo 2. Calcular la integral $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{2+\cos x}\, dx$.

Solución. Esta integral se reduce fácilmente a una de la forma $\int R(\cos x) \operatorname{sen} x\, dx$.

En efecto,

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{2+\cos x}\,dx=\int \frac{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x\,dx}{2+\cos x}=\int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x}\operatorname{sen} x\,dx.$$

Efectuemos la sustitución $\cos x = z$. Entonces, $\operatorname{sen} x\,dx = -dz$:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{2+\cos x}\,dx=\int \frac{1-z^2}{2+z}(-dz)=\int \frac{z^2-1}{z+2}\,dz=\int\left(z-2+\frac{3}{z+2}\right)dz=$$

$$=\frac{z^2}{2}-2z+3\ln(z+2)+C=\frac{\cos^2 x}{2}-2\cos x+3\ln(\cos x+2)+C.$$

Ejemplo 3. Calcular $\int \frac{dx}{2-\operatorname{sen}^2 x}$.

Efectuemos la sustitución $\operatorname{tg} x = t$:

$$\int \frac{dx}{2-\operatorname{sen}^2 x}=\int \frac{dt}{\left(2-\frac{t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)}=\int \frac{dt}{2+t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

5) Examinemos ahora una integral más, de la forma $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$, aquí bajo el signo de integral se encuentra el producto $\operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$ (donde m y n son números enteros). Es preciso estudiar tres casos.

a) $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$, donde por lo menos uno de los números m y n es impar. Para evitar toda ambigüedad, supongamos que n es impar. Hagamos $n = 2p + 1$ y transformemos la integral:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2p+1} x\,dx = \int \operatorname{sen}^m x \cos^{2p} x \cos x\,dx =$$

$$= \int \operatorname{sen}^m x\,(1-\operatorname{sen}^2 x)^p \cos x\,dx.$$

Efectuemos el cambio de variable:

$$\operatorname{sen} x = t,\quad \cos x\,dx = dt.$$

Sustituyendo la nueva variable en la integral dada, obtenemos:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx = \int t^m (1-t^2)^p\,dt,$$

que es la integral de una función racional de t.

Ejemplo 4.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx=\int \frac{\cos^2 x\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x}=\int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x}.$$

Designando $\operatorname{sen} x = t$, $\cos x\,dx = dt$, obtenemos:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx=\int \frac{(1-t^2)\,dt}{t^4}=\int \frac{dt}{t^4}-\int \frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{t}+C=$$

$$=-\frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x}+\frac{1}{\operatorname{sen} x}+C.$$

b) $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$, donde m y n son números no negativos y pares.

Pongamos $m = 2p$, $n = 2q$. Escribamos las conocidas fórmulas trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x. \tag{3}$$

Sustituyéndolas en la integral, obtenemos:

$$\int \operatorname{sen}^{2p} x \cos^{2q} x\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^q dx.$$

Ejecutando operaciones de elevar a potencia y abrir los paréntesis, obtenemos términos que contienen $\cos 2x$ en potencias pares e impares. Los términos que contienen las potencias impares, se integran como hemos indicado en el caso a). Los términos que tienen las potencias pares, los reduciamos de nuevo, utilizando sucesivamente las fórmulas (3). Procediendo de esta manera llegamos hasta los términos de la forma $\int \cos kx\, dx$, que pueden integrarse fácilmente.

Ejemplo 5.

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \frac{1}{2^2}\int (1-\cos 2x)^2\, dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[x - \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\, dx\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x - \operatorname{sen} 2x + \frac{\operatorname{sen} 4x}{8}\right] + C.$$

c) Si los dos exponentes son pares y, por lo menos, uno de ellos es negativo, el método indicado en el caso anterior b) no da resultado. Es preciso hacer la sustitución

$$\operatorname{tg} x = t \quad (\text{ó } \operatorname{cotg} x = t).$$

Ejemplo 6.

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\, dx}{\cos^6 x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x\,(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^6 x}\, dx = \int \operatorname{tg}^2 x\,(1+\operatorname{tg}^2 x)^2\, dx.$$

Hagamos $\operatorname{tg} x = t$, entonces, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ y obtenemos:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x}\, dx = \int t^2(1+t^2)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2(1+t^2)\, dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.$$

6) En conclusión examinemos las integrales de la forma siguiente:

$$\int \cos mx \cos nx\, dx, \qquad \int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx, \qquad \int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx.$$

Estas se pueden calcular con ayuda de las siguientes*) fórmulas ($m \neq n$):

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x],$$

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$

Sustituyendo e integrando, obtenemos:

$$\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]\, dx =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

Del modo análogo se calculan las otras dos integrales.

Ejemplo 7.

$$\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 3x\, dx = \frac{1}{2}\int [-\cos 8x + \cos 2x]\, dx = -\frac{\operatorname{sen} 8x}{16} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C.$$

§ 15. INTEGRACION DE CIERTAS FUNCIONES IRRACIONALES CON AYUDA DE SUSTITUCIONES TRIGONOMETRICAS

Regresemos a la integral examinada en el § 12 cap. X,

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx \tag{1}$$

Mostremos aquí cómo esta integral puede transformarse en una integral de la forma

$$\int \overline{R}(\operatorname{sen} z, \cos z)\, dz, \tag{2}$$

estudiada en el párrafo anterior.

---

*) Estas fórmulas se calculan fácilmente de la manera siguiente:

$$\cos(m+n)x = \cos mx \cos nx - \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx,$$

$$\cos(m-n)x = \cos mx \cos nx + \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx.$$

Sumando estas igualdades término a término y dividiéndolas por dos, obtenemos la primera de las tres fórmulas indicadas. Restando término a término y dividiendo por dos, obtenemos la tercera de estas fórmulas. La segunda fórmula se obtiene de modo análogo, escribiendo las igualdades idénticas para $\operatorname{sen}(m+n)x$ y $\operatorname{sen}(m-n)x$ y sumándolas término a término.

Transformemos el trinomio que figura bajo signo de la raíz:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right).$$

Efectuemos el cambio de variable, haciendo

$$x+\frac{b}{2a}=t, \qquad dx=dt.$$

Entonces:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{at^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}.$$

Examinemos todos los casos posibles.

1. Sea: $a>0$, $c-\frac{b^2}{4a}>0$. Introduzcamos las designaciones $a=m^2$, $c-\frac{b}{4a}=n^2$. En este caso tenemos:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2+n^2}.$$

2) Sea: $a>0$, $c-\frac{b^2}{4a}<0$. Entonces, $a=m^2$, $c-\frac{b^2}{4a}=-n^2$. Por consiguiente,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2-n^2}.$$

3) Sea: $a<0$, $c-\frac{b^2}{4a}>0$. Entonces, $a=-m^2$, $c-\frac{b^2}{4a}=n^2$. Por consiguiente,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{n^2-m^2t^2}.$$

4) Sea: $a<0$, $c-\frac{b^2}{4a}<0$. En este caso $\sqrt{ax^2+bx+c}$ es un número complejo, para todo valor de x.

Así, la integral (1) puede reducirse a una de las siguientes clases de integrales:

$$\text{I.} \quad \int R\left(t, \sqrt{m^2t^2+n^2}\right) dt. \tag{3.1}$$

$$\text{II.} \quad \int R\left(t, \sqrt{m^2t^2-n^2}\right) dt. \tag{3.2}$$

$$\text{III.} \quad \int R\left(t, \sqrt{n^2-m^2t^2}\right) dt. \tag{3.3}$$

Es evidente que la integral (3.1) se reduce a una integral de la forma (2), con ayuda de la sustitución $t=\frac{n}{m}\operatorname{tg} z$. La integral (3.2) se reduce a una integral de la forma (2) mediante la sustitución

$t=\dfrac{n}{m}\sec z$. La integral (3.3) se reduce a una integral de la forma (2) mediante la sustitución $t=\dfrac{n}{m}\operatorname{sen} t$.

Ejemplo. Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

Solución. Es la integral del tipo III. Hagamos la sustitución $x=a\operatorname{sen} z$, entonces: $dx=a\cos z\,dz$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\int \frac{a\cos z\,dz}{\sqrt{(a^2-a^2\operatorname{sen}^2 z)^3}}=\int \frac{a\cos z\,dz}{a^3\cos^3 z}=\frac{1}{a^2}\int \frac{dz}{\cos^2 z}=$$
$$=\frac{1}{a^2}\operatorname{tg} z+C=\frac{1}{a^2}\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}=\frac{1}{a^2}\frac{\operatorname{sen} z}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 z}}+C=\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+C.$$

§ 16. FUNCIONES CUYAS INTEGRALES NO PUEDEN EXPRESARSE MEDIANTE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

Hemos indicado (sin demostración) en el § 1 cap. X que toda función $f(x)$, continua en el intervalo (a, b), tiene en este intervalo una función primitiva, es decir, existe una función $F(x)$ tal que

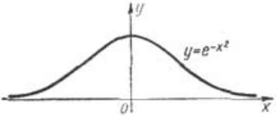

Fig. 204

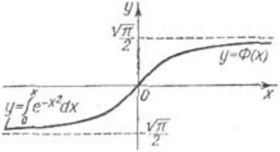

Fig. 205

$F'(x)=f(x)$. Sin embargo, no **cada función primitiva,** incluso cuando ésta existe, **puede expresarse mediante un número finito de funciones elementales.**

Así, por ejemplo, hemos indicado, que las funciones primitivas de los binomios diferenciales no pertenecientes a las tres formas estudiadas, no pueden ser expresadas mediante un número finito de funciones elementales (teorema de Chébishev). Tales son, por ejemplo, las funciones primitivas expresadas por las integrales

$$\int e^{-x^2}\,dx,\ \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx,\ \int \frac{\cos x}{x}\,dx,\ \int \sqrt{1-k^2\operatorname{sen} x}\,dx,\ \int \frac{dx}{\ln x}$$

y muchas otras.

En todos estos casos la función primitiva representa evidentemente, otra función que no se expresa mediante una combinación de un número finito de funciones elementales.

Así, por ejemplo, la función primitiva $\int e^{-x^2}dx + C$, que se anula para $x = 0$, se llama *función de Laplace* y se designa por $\Phi(x)$. Por tanto,

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2}dx + C_1, \text{ si } \Phi(0) = 0.$$

Esta función está bien estudiada. Existen tablas de sus valores para diferentes valores de x. En el § 21 cap. XVI (tomo II) veremos, como puede ser realizado esto. En las figuras 204 y 205 se dan respectivamente la gráfica del integrando

$$y = e^{-x^2}$$

y la gráfica de la función de Laplace $y = \Phi(x)$. La función primitiva

$$\int \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}\, dx + C \qquad (k < 1)$$

que se anula cuando x sea igual a cero, se llama *integral elíptica* y se designa por $E(x)$,

$$E(x) = \int \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}\, dx + C_2, \text{ si } E(0) = 0.$$

Existen también tablas de los valores de esta función para diferentes valores de x.

Ejercicios para el capítulo X

I. Calcular las integrales:

1. $\int x^5\,dx$. *Resp.* $\frac{x^6}{6} + C$. 2. $\int (x + \sqrt{x})\,dx$. *Resp.* $\frac{x^2}{2} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$. 3. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx$. *Resp.* $6\sqrt{x} - \frac{1}{10}x^2\sqrt{x} + C$. 4. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x}}$. *Resp.* $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$. 5. $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2\right)dx$. *Resp.* $-\frac{1}{x} - \frac{8}{\sqrt{x}} + 2x + C$. 6. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$. *Resp.* $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$. 7. $\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$. *Resp.* $\frac{x^5}{5} + \frac{3}{4}x^2\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + C$.

Integración por sustitución: 8. $\int e^{5x}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{5}e^{5x} + C$. 9. $\int \cos 5x\,dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + C$. 10. $\int \operatorname{sen} ax\,dx$. *Resp.* $-\frac{\cos ax}{a} + C$. 11. $\int \frac{\ln x}{x}dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$. 12. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 3x}$. *Resp.* $-\frac{\operatorname{cotg} 3x}{3} + C$. 13. $\int \frac{dx}{\cos^2 7x}$. *Resp.* $\frac{\operatorname{tg} 7x}{7} + C$. 14. $\int \frac{dx}{3x - 7}$. *Resp.* $\frac{1}{3}\ln|3x - 7| + C$. 15. $\int \frac{dx}{1 - x}$. *Resp.* $-\ln|1 - x| + C$. 16. $\int \frac{dx}{5 - 2x}$. *Resp.* $-\frac{1}{2}\ln|5 - 2x| + C$. 17. $\int \operatorname{tg} 2x\,dx$.

Resp. $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C$. **18.** $\int \operatorname{cotg}(5x-7)\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{5}\ln|\operatorname{sen}(5x-7)|+C$. **19.** $\int \frac{dy}{\operatorname{cotg} 3y}$. *Resp.* $-\frac{1}{3}\ln|\cos 3y|+C$. **20.** $\int \operatorname{cotg}\frac{x}{3}\,dx$. *Resp.* $3\ln\left|\operatorname{sen}\frac{x}{3}\right|+C$. **21.** $\int \operatorname{tg}\varphi \operatorname{sc}^2\varphi\,d\varphi$. *Resp.* $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi+C$. **22.** $\int (\operatorname{cotg} e^x)\,e^x\,dx$. *Resp.* $\ln|\operatorname{sen} e^x|+C$. **23.** $\int \left(\operatorname{tg} 4S-\operatorname{cotg}\frac{S}{4}\right)dS$. *Resp.* $-\frac{1}{4}\ln|\cos 4S|-$ $-4\ln\left|\operatorname{sen}\frac{S}{4}\right|+C$. **24.** $\int \operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}+C$. **25.** $\int \cos^3 x\operatorname{sen} x\,dx$. *Resp.* $-\frac{\cos^4 x}{4}+C$. **26.** $\int \sqrt{x^2+1}\,x\,dx$. *Resp.* $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$. **27.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+3}}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3}+C$. **28.** $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3+1}}$. *Resp.* $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C$. **29.** $\int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}$. *Resp.* $-\frac{1}{\operatorname{sen} x}+C$. **30.** $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos^3 x}$. *Resp.* $\frac{1}{2\cos^2 x}+C$. **31.** $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+C$. **32.** $\int \frac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$. *Resp.* $-\frac{\operatorname{cotg}^2 x}{2}+C$. **33.** $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x-1}}$. *Resp.* $2\sqrt{\operatorname{tg} x-1}+C$. **34.** $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx$. *Resp.* $\frac{\ln^2(x+1)}{2}+C$. **35.** $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2\operatorname{sen} x+1}}$. *Resp.* $\sqrt{2\operatorname{sen} x+1}+C$. **36.** $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{(1+\cos 2x)^2}$. *Resp.* $\frac{1}{2(1+\cos 2x)}+C$. **37.** $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$. *Resp.* $2\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}+C$. **38.** $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x+1}}{\cos^2 x}\,dx$. *Resp.* $\frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{tg} x+1)^3}+C$. **39.** $\int \frac{\cos 2x\,dx}{(2+3\operatorname{sen} 2x)^3}$. *Resp.* $-\frac{1}{12}\frac{1}{(2+3\operatorname{sen} 2x)^2}+C$. **40.** $\int \frac{\operatorname{sen} 3x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt[3]{\cos 3x}}+C$. **41.** $\int \frac{\ln^2 x\,dx}{x}$. *Resp.* $\frac{\ln^3 x}{3}+C$. **42.** $\int \frac{\operatorname{arcsen} x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Resp.* $\frac{\operatorname{arcsen}^2 x}{2}+C$. **43.** $\int \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{1+x^2}$. *Resp.* $\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}+C$. **44.** $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. *Resp.* $-\frac{\arccos^3 x}{3}+C$. **45.** $\frac{\operatorname{arccotg} x}{1+x^2}\,dx$. *Resp.* $-\frac{\operatorname{arccotg}^2 x}{2}+C$. **46.** $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$. **47.** $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+C$. **48.** $\int \frac{\cos x\,dx}{2\operatorname{sen} x+3}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\ln(2\operatorname{sen} x+3)+C$. **49.** $\int \frac{dx}{x\ln x}$. *Resp.* $\ln|\ln x|+C$. **50.** $\int 2x(x^2+1)^4\,dx$. *Resp.* $\frac{(x^2+1)^5}{5}=C$. **51.** $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-\operatorname{tg} x+x+C$. **52.** $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$. *Resp.* $\ln|\operatorname{arctg} x|+C$. **53.** $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg} x+1)}$. *Resp.* $\frac{1}{3}\ln|3\operatorname{tg} x+1|+C$. **54.** $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}\,dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+C$. **55.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x}$.

Resp. $\ln|\arcsen x|+C$. **56.** $\int \frac{\cos 2x}{2+3\operatorname{sen} 2x}dx$. *Resp.* $\frac{1}{6}\ln|2+3\operatorname{sen} 2x|+C$.
57. $\int \cos(\ln x)\frac{dx}{x}$. *Resp.* $\operatorname{sen}(\ln x)+C$. **58.** $\int \cos(a+bx)\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{b}\operatorname{sen}(a+bx)+C$. **59.** $\int e^{2x}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}e^{2x}+C$. **60.** $\int e^{\frac{x}{3}}\,dx$. *Resp.* $3e^{\frac{x}{3}}+C$. **61.** $\int e^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx$. *Resp.* $e^{\operatorname{sen} x}+C$. **62.** $\int a^{x^2}x\,dx$. *Resp.* $\frac{a^{x^2}}{2\ln a}+C$. **63.** $\int e^{\frac{x}{a}}\,dx$. *Resp.* $ae^{\frac{x}{a}}+C$. **64.** $\int (e^{2x})^2\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{4}e^{4x}+C$.
65. $\int 3^x e^x\,dx$. *Resp.* $\frac{3^x e^x}{\ln 3+1}+C$. **66.** $\int e^{-3x}\,dx$. *Resp.* $-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$.
67. $\int (e^{5x}+a^{5x})\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{5}\left(e^{5x}+\frac{a^{5x}}{\ln a}+C\right)$. **68.** $\int e^{x^2+4x+3}(x+2)\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}e^{x^2+4x+3}+C$. **69.** $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^x b^x}dx$. *Resp.* $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x-\left(\frac{b}{a}\right)^x}{\ln a-\ln b}-2x+C$.
70. $\int \frac{e^x\,dx}{3+4e^x}$. *Resp.* $\frac{1}{4}\ln(3+4e^x)+C$. **71.** $\int \frac{e^{2x}\,dx}{2+e^{2x}}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\ln(2+e^{2x})+C$. **72.** $\int \frac{dx}{1+2x^2}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x)+C$. **73.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsen(\sqrt{3}x)+C$. **74.** $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$. *Resp.* $\frac{1}{3}\arcsen\frac{3x}{4}+C$.
75. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. *Resp.* $\arcsen\frac{x}{3}+C$. **76.** $\int \frac{dx}{4+x^2}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$.
77. $\int \frac{dx}{9x^2+4}$. *Resp.* $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2}+C$. **78.** $\int \frac{dx}{4-9x^2}$. *Resp.* $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right|+$ $+C$. **79.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$. *Resp.* $\ln|x+\sqrt{x^2+9}|+C$. **80.** $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}}$. *Resp.* $\frac{1}{b}\ln|bx+\sqrt{b^2x^2-a^2}|+C$. **81.** $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2+a^2x^2}}$. *Resp.* $\frac{1}{a}\ln|ax+\sqrt{b^2+a^2x^2}|+$ $+C$. **82.** $\int \frac{dx}{a^2x^2-c^2}$. *Resp.* $\frac{1}{2ac}\ln\left|\frac{ax-c}{ax+c}\right|+C$. **83.** $\int \frac{x^2\,dx}{5-x^6}$. *Resp.* $\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x^3+\sqrt{5}}{x^3-\sqrt{5}}\right|+C$. **84.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\arcsen x^2+C$.
85. $\int \frac{x\,dx}{x^4+a^4}$. *Resp.* $\frac{1}{2a^2}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a^2}+C$. **86.** $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. *Resp.* $\arcsen e^x+$ $+C$. **87.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsen\sqrt{\frac{5}{3}}\,x+C$. **88.** $\int \frac{\cos x\,dx}{a^2+\operatorname{sen}^2 x}$. *Resp.* $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{a}\right)+C$. **89.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. *Resp.* $\arcsen(\ln x)+C$.

90. $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. *Resp.* $-\frac{1}{2}(\arccos x)^2+\sqrt{1-x^2}+C$. **91.** $\int \frac{x-\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2+C$. **92.** $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$. *Resp.* $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C$. **93.** $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$. *Resp.* $\frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3}+C$. **94.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$. *Resp.* $4\sqrt{1+\sqrt{x}}+C$. **95.** $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$. *Resp.* $\operatorname{arctg} e^x+C$. **96.** $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}}$. *Resp.* $3\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}+C$. **97.** $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,\operatorname{sen} 2x\,dx$. *Resp.* $-\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^2 x)^3}+C$. **98.** $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$. *Resp.* $-2\sqrt{1+\cos^2 x}+$ $+C$. **99.** $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x}+C$. **100.** $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}{\cos^2 x}\,dx$. *Resp.* $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 x}+C$. **101.** $\int \frac{dx}{2\operatorname{sen}^2 x+3\cos^2 x}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{tg} x\right)+$ $+C$. Integrales del tipo $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$. **102.** $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$. **103.** $\int \frac{dx}{3x^2-2x+4}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{11}}+C$. **104.** $\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right|+C$. **105.** $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$. *Resp.* $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+C$. **106.** $\int \frac{dz}{2z^2-2z+1}$. *Resp.* $\operatorname{arctg}(2z-1)+C$. **107.** $\int \frac{dx}{3x^2-2x+2}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{5}}+C$. **108.** $\int \frac{(6x-7)\,dx}{3x^2-7x+11}$. *Resp.* $\ln|3x^2-7x+11|+C$. **109.** $\int \frac{(3x-2)\,dx}{5x^2-3x+2}$. *Resp.* $\frac{3}{10}\ln(5x^2-3x+2)-$ $-\frac{11}{5\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{10x-3}{\sqrt{31}}+C$. **110.** $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\,dx$. *Resp.* $\frac{3}{2}\ln(x^2-x+1)+$ $+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$. **111.** $\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1}\,dx$. *Resp.* $\frac{2}{3}\ln(3x-1)+$ $+\frac{1}{2}\ln(2x+1)+C$. **112.** $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{5}\ln(5x^2-x+2)+$ $+\frac{8}{5\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{10x-1}{\sqrt{39}}+C$. **113.** $\int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1}\,dx$. *Resp.* $x^3-\frac{x^2}{2}+$ $+\frac{1}{4}\ln|2x^2-x+1|+\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{7}}+C$. **114.** $\int \frac{dx}{2\cos^2 x+\operatorname{sen} x\cos x+\operatorname{sen}^2 x}$. *Resp.* $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x+1}{\sqrt{7}}+C$. Integrales del tipo $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+C}}\,dx$:

115. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\arcsin\frac{8x+3}{\sqrt{41}}+C$. **116.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$. *Resp.* $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C$. **117.** $\int \frac{dS}{\sqrt{2aS+S^2}}$. *Resp.* $\ln|S+a+\sqrt{2aS+S^2}|+C$. **118.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{6x+7}{\sqrt{109}}+$ $+C$. **119.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x(3x+5)}}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|6x+5+\sqrt{12x(3x+5)}|+C$. **120.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$. *Resp.* $\arcsin\frac{2x+3}{\sqrt{17}}+C$. **121.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-x-1}}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln|10x-1+\sqrt{20(5x^2-x-1)}|+C$. **122.** $\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$. *Resp.* $2\sqrt{ax^2+bx+c}+C$. **123.** $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$. *Resp.* $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}+$ $+\frac{5}{4}\ln|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}|+C$. **124.** $\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}}$. *Resp.* $-\frac{1}{11}\sqrt{3+66x-11x^2}+C$. **125.** $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$. *Resp.* $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+$ $+\frac{7}{4}\arcsin\frac{2x-1}{2}+C$. **126.** $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}}\,dx$. *Resp.* $\frac{3}{2}\sqrt{2x^2-x}+$ $+\frac{23}{4\sqrt{2}}\ln(4x-1+\sqrt{8(2x^2-x)})+C$.

II. Integración por partes:

127. $\int xe^x\,dx$. *Resp.* $e^x(x-1)+C$. **128.** $\int x\ln x\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C$. **129.** $\int x\operatorname{sen} x\,dx$. *Resp.* $\operatorname{sen} x-x\cos x+C$. **130.** $\int \ln x\,dx$. *Resp.* $x(\ln x-1)+C$. **131.** $\int \arcsin x\,dx$. *Resp.* $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. **132.** $\int \ln(1-x)\,dx$. *Resp.* $-x-(1-x)\ln(1-x)+C$. **133.** $\int x^n\ln x\,dx$. *Resp.* $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C$. **134.** $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}[(x^2+1)\operatorname{arctg} x-x]+C$. **135.** $\int x\arcsin x\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{4}[(2x^2-1)\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}]+C$. **136.** $\int \ln(x^2+1)\,dx$. *Resp.* $x\ln(x+1)-2x+2\operatorname{arctg} x+C$. **137.** $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$. *Resp.* $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-$ $-\sqrt{x}+C$. **138.** $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$. *Resp.* $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$. **139.** $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$. *Resp.* $x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$.

140. $\int x\cos^2 x\,dx$. *Resp.* $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\operatorname{sen}2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$. **141.** $\int\frac{x\arcsen x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. *Resp.* $x-\sqrt{1-x^2}\arcsen x+C$. **142.** $\int\frac{x\operatorname{arctg}x}{(x^2+1)^2}\,dx$. *Resp.* $\frac{x}{4(1+x^2)}+$ $+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}+C$. **143.** $\int x\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C$. **144.** $\int\frac{\arcsen x}{x^2}\,dx$. *Resp.* $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\frac{1}{x}\arcsen x+C$. **145.** $\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$. *Resp.* $x\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|-\sqrt{1+x^2}+C$. **146.** $\int\arcsen x\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. *Resp.* $\frac{\arcsen x}{\sqrt{1-x^2}}+$ $+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$.

Utilizar sustituciones trigonométricas en los ejemplos siguientes:

147. $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx$. *Resp.* $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsen\frac{x}{a}+C$. **148.** $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$. *Resp.* $2\arcsen\frac{x}{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{4}x^3\sqrt{4-x^2}+C$. **149.** $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. *Resp.* $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$. **150.** $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$. *Resp.* $\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C$. **151.** $\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. *Resp.* $\frac{x}{a^2}\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}+C$.

Integración de las fracciones racionales:

152. $\int\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,dx$. *Resp.* $\ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right|+C$. **153.** $\int\frac{x\,dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$. *Resp.* $\frac{1}{8}\ln\frac{(x+3)^6}{(x+5)^5(x+1)}$. **154.** $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$. *Resp.* $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+$ $+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$. **155.** $\int\frac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x+2)}$. *Resp.* $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)}{(x+1)^3}+$ $+\frac{16}{3}\ln(x+2)+C$. **156.** $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$. *Resp.* $\frac{1}{x-1}+\ln\frac{x-2}{x-1}+C$. **157.** $\int\frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx$. *Resp.* $\frac{3}{x-2}+\ln\frac{(x-2)^2}{x^2}+C$. **158.** $\int\frac{3x+2}{x(x+1)^3}\,dx$. *Resp.* $\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+\ln\frac{x^2}{(x+1)^2}+C$. **159.** $\int\frac{x^2\,dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$. *Resp.* $-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+$ $+\ln\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^2+C$. **160.** $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$. *Resp.* $\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$. **161.** $\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\,dx$. *Resp.* $\ln\frac{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}{x-1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$. **162.** $\frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx$. *Resp.* $\ln\frac{x^2+4}{p\sqrt{x^2+}}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

163. $\int \frac{dx}{x^3+1}$. *Resp.* $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$. **164.** $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}\,dx$. *Resp.* $\ln\frac{x^2+4}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. **165.** $\int \frac{4\,dx}{x^4+1}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C$. **166.** $\int \frac{x^5}{x^3-1}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{3}[x^3+\ln(x^3-1)]+C$.

167. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$. *Resp.* $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\ln(x^2+2)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

168. $\int \frac{(4x^2-8x)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$. *Resp.* $\frac{3x^2-1}{(x-1)(x^2+1)}+\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x+C$.

169. $\int \frac{dx}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}$. *Resp.* $\ln\frac{x-1}{x}-\frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\frac{2x-1}{3(x^2-x+1)}+C$.

Integración de las funciones irracionales **170.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx$. *Resp.* $\frac{4}{3}[\sqrt[4]{x^3}-\ln(\sqrt[4]{x^3}+1)]+C$. **171.** $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}\,dx$. *Resp.* $\frac{2}{27}\sqrt[4]{x^9}-\frac{2}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+C$. **172.** $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}\,dx$. *Resp.* $-\frac{6}{\sqrt[6]{x}}+\frac{12}{\sqrt[12]{x}}+2\ln x-24\ln(\sqrt[12]{x}+1)+C$. **173.** $\int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}\,dx$. *Resp.* $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-9\ln(\sqrt[6]{x}+1)+\frac{3}{2}\ln(\sqrt[6]{x^2}+1)+3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. **174.** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x^2}$ *Resp.* $\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right|-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$. **175.** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$. *Resp.* $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}\,\sqrt{1-x}}+C$. **176.** $\int \frac{\sqrt[7]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^8}+\sqrt[14]{x^{15}}}\,dx$. *Resp.* $14\left[\sqrt[14]{x}-\frac{1}{2}\sqrt[7]{x}+\frac{1}{3}\sqrt[14]{x^3}-\frac{1}{4}\sqrt[7]{x^2}+\frac{1}{5}\sqrt[14]{x^5}\right]+C$. **177.** $\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}\,dx$. *Resp.* $\sqrt{3x^2-7x-6}+\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left(x-\frac{7}{6}+\sqrt{x^2-\frac{7}{3}x-2}\right)+C$. Integrales del tipo $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$: **178.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\times\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{3}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right|+C$. **179.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$. *Resp.* $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|+C$. **180.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$. *Resp.*

$\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x-2}{x\sqrt{2}}+C$. **181.** $\int\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\,dx$. *Resp.* $\sqrt{x^2+2x}+\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}|+C$. **182.** $\int\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$. *Resp.* $\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}+C$.

183. $\int\sqrt{2x-x^2}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}\left[(x-1)\sqrt{2x-x^2}+\operatorname{arcsen}(x-1)\right]+C$.

184. $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$. *Resp.* $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C$.

185. $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$. *Resp.* $\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2+x+\sqrt{1+x+x^2}}\right|+C$.

186. $\int\frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}\,dx$. *Resp.* $-\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}+C$. **187.** $\int\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$. *Resp.* $\ln\left|\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x^2}\right|+C$. **188.** $\int\frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2}\,dx$. *Resp.* $-\frac{8}{x+\sqrt{x^2+4x}}+\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x}|+C$.

Integración de los binomios diferenciales:

189. $\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$. *Resp.* $2\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}+C$. **190.** $\int x^{\frac{1}{3}}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}dx$. *Resp.* $\frac{10x^{\frac{2}{3}}-16}{15}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{4}}+C$. **191.** $\int\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. *Resp.* $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$. **192.** $\int\frac{dx}{x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. *Resp.* $-(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\left(2x+\frac{1}{x}\right)+C$. **193.** $\int\sqrt[4]{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^3}\,dx$. *Resp.* $\frac{8}{77}(7\sqrt{x}-4)(1+\sqrt{x})^{\frac{7}{4}}+C$. **194.** $\int\frac{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. *Resp.* $\frac{2(4+3\sqrt[3]{x})(2-\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{2}}}{5}$.

195. $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$. *Resp.* $\frac{5x^3-3}{40}(1+x^3)^{\frac{5}{3}}$.

Integración de las funciones trigonométricas:

196. $\int\operatorname{sen}^3x\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{3}\cos^3x-\cos x+C$. **197.** $\int\operatorname{sen}^5x\,dx$. *Resp.* $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3x-\frac{\cos^5x}{5}+C$. **198.** $\int\cos^4x\operatorname{sen}^3x\,dx$. *Resp.* $-\frac{1}{5}\cos^5x+\frac{1}{7}\cos^7x+C$.

199. $\int\frac{\cos^3x}{\operatorname{sen}^4x}\,dx$. *Resp.* $\csc x-\frac{1}{3}\csc^3x+C$. **200.** $\int\cos^2x\,dx$. *Resp.* $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x+C$. **201.** $\int\operatorname{sen}^4x\,dx$. *Resp.* $\frac{3}{8}x-\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+\frac{\operatorname{sen}4x}{32}+C$.

202. $\int\cos^6x\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{16}\left(5x+4\operatorname{sen}2x-\frac{\operatorname{sen}^3 2x}{3}+\frac{3}{4}\operatorname{sen}4x\right)+C$.

203. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\, dx$. *Resp.* $\frac{1}{128}\left(3x-\operatorname{sen} 4x+\frac{\operatorname{sen} 8x}{8}\right)+C$. **204.** $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C$. **205.** $\int \operatorname{cotg}^5 x\, dx$. *Resp.* $-\frac{1}{4}\operatorname{cotg}^4 x+\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 x+$ $+\ln|\operatorname{sen} x|+C$. **206.** $\int \operatorname{cotg}^3 x\, dx$. *Resp.* $-\frac{\operatorname{cotg}^2 x}{2}-\ln|\operatorname{sen} x|+C$. **207.** $\int \operatorname{sc}^3 x\, dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7}+\frac{3\operatorname{tg}^5 x}{5}+\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} x+C$. **208.** $\int \operatorname{tg}^4 x \operatorname{sc}^4 x\, dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7}+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C$. **209.** $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. *Resp.* $\operatorname{tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$. **210.** $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx$. *Resp.* $C-\csc x$. **211.** $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x\, dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$. *Resp.* $\frac{3}{5}\cos^{\frac{5}{3}} x+3\cos^{-\frac{1}{3}} x+C$. **212.** $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x\, dx$. *Resp.* $-\frac{\operatorname{sen} 4x}{8}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}+C$. **213.** $\int \cos 4x \cos 7x\, dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{sen} 11x}{22}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{6}+C$. **214.** $\int \cos 2x \operatorname{sen} 4x\, dx$. *Resp.* $-\frac{\cos 6x}{12}-\frac{\cos 2x}{4}+C$. **215.** $\int \operatorname{sen}\frac{1}{4}x\cos\frac{3}{4}x\, dx$. *Resp.* $-\frac{\cos x}{2}+\cos\frac{1}{2}x+C$. **216.** $\int \frac{dx}{4-5\operatorname{sen} x}$. *Resp.* $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right|+C$. **217.** $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. **218.** $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1+\operatorname{sen} x}$. *Resp.* $\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+x+C$. **219.** $\int \frac{\cos x\, dx}{1+\cos x}$. *Resp.* $x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$. **220.** $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos^4 x+\operatorname{sen}^4 x}dx$. *Resp.* $\operatorname{arctg}(2\operatorname{sen}^2 x-1)+C$. **221.** $\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{6}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}+C$. **222.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{tg}^2 x}$. *Resp.* $-\frac{1}{2}\left[\operatorname{cotg} x+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)\right]+C$. **223.** $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}dx$. *Resp.* $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)-x+C$.

CAPITULO XI

INTEGRAL DEFINIDA

§ 1. PLANTEO DEL PROBLEMA. SUMAS INTEGRALES INFERIOR Y SUPERIOR

Un medio potente de investigación en las matemáticas, física, mecánica y otras ramas de la ciencia es la **integral definida**, uno de los conceptos fundamentales del análisis matemático. El cálculo

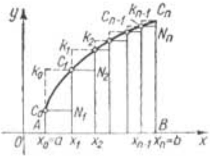

Fig. 206

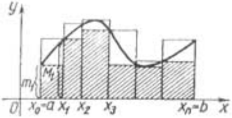

Fig. 207

de las áreas limitadas por las curvas, de las longitudes de arcos, volúmenes, trabajo, velocidad, espacio, momentos de inercia, etc., se reduce al cálculo de una integral definida.

Sea $y = f(x)$ una función **continua** dada sobre el segmento $[a, b]$ (figs. 206 y 207). Designemos por m y M sus valores mínimo y máximo respectivamente en este segmento. Dividamos mediante los puntos el segmento $[a, b]$ en n partes

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = b,$$

en este caso,

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n,$$

y pongamos:

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1,\ x_2 - x_1 = \Delta x_2,\ \ldots,\ x_n - x_{n-1} = \Delta x_n.$$

Designemos ahora los valores mínimo y máximo de la función $f(x)$

en el segmento $[x_0, x_1]$, por m_1 y M_1,
en el segmento $[x_1, x_2]$, por m_2 y M_2,

. . . .

en el segmento $[x_{n-1}, x_n]$, por m_n y M_n respectivamente.

Formemos las sumas:

$$\underline{s}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \ldots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \tag{1}$$

$$\overline{s}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \ldots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i. \tag{2}$$

$\underline{s}_n$ se llama *suma integral inferior* y $\overline{s}_n$, *suma integral superior*.

Si $f(x) \geqslant 0$, la suma integral inferior es numéricamente igual al área de la «figura escalonada inscrita» $AC_0N_1C_1N_2 \ldots C_{n-1}N_nBA$, limitada por una línea quebrada «inscrita». La suma integral superior es numéricamente igual al área de la «figura escalonada cir-

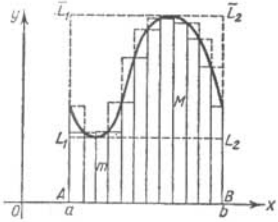

Fig. 208

cunscrita» $AK_0C_1K_1 \ldots C_{n-1}K_{n-1}C_nBA$, limitada por una línea quebrada «circunscrita».

Analicemos algunas propiedades de las sumas integrales, superiores e inferiores.

a) Dado que $m_i \leqslant M_i$ para cualquier i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, en virtud de las fórmulas (1) y (2) tenemos:

$$\underline{s}_n \leqslant \overline{s}_n.$$

(El signo de igualdad sólo corresponde al caso en que $f(x) = \text{const}$).

b) Dado que

$$m_1 \geqslant m, \ m_2 \geqslant m, \ \ldots, \ m_n \geqslant m,$$

donde m es el valor mínimo de $f(x)$ en el segmento $[a, b]$, tenemos:

$$\underline{s}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \ldots + m_n \Delta x_n \geqslant m \Delta x_1 + m \Delta x_2 + \ldots$$
$$\ldots + m \Delta x_n = m(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) = m(b-a).$$

Así:

$$\underline{s}_n \geqslant m(b-a)$$

c) Dado que

$$M_1 \leqslant M, \ M_2 \leqslant M, \ \ldots, \ M_n \leqslant M,$$

donde M es el valor máximo de $f(x)$ en el segmento $[a, b]$, tenemos:

$$\bar{s}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \ldots + M_n \Delta x_n \leqslant M \Delta x_1 + M \Delta x_2 + \ldots$$
$$\ldots + M \Delta x_n = M(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) = M(b-a).$$

Así:

$$\bar{s}_n \leqslant M(b-a).$$

Uniendo dos desigualdades obtenidas, tenemos:

$$m(b-a) \leqslant \underline{s}_n \leqslant \bar{s}_n \leqslant M(b-a).$$

Si $f(x) \geqslant 0$, la última desigualdad tiene una interpretación geométrica simple (fig. 208), puesto que los productos $m(b-a)$ y $M(b-a)$ son numéricamente iguales a las áreas respectivas del rectángulo «inscrito» AL_1L_2B y del «circunscrito» $A\bar{L}_1\bar{L}_2B$.

§ 2. INTEGRAL DEFINIDA

Continuemos el examen del problema del párrafo anterior. En cada uno de los segmentos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$ elijamos un punto que designamos respectivamente por $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

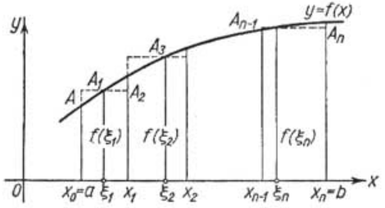

Fig. 209

(fig. 209):

$$x_0 < \xi_1 < x_1, \ x_1 < \xi_2 < x_2, \ \ldots, \ x_{n-1} < \xi_n < x_n.$$

En cada uno de estos puntos calculemos el valor de la función $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, $\ldots$, $f(\xi_n)$ y formemos la suma:

$$s_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad (1)$$

y todos los $\Delta x_i > 0$, entonces,

$$m_i \Delta x_i \leqslant f(\xi_i)\, \Delta x_i \leqslant M_i \Delta x_i.$$

Por consiguiente,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\, \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i\, \Delta x_i$$

ó

$$\underline{s}_n \leqslant s_n \leqslant \overline{s}_n. \qquad (2)$$

La interpretación geométrica de la última desigualdad es que, para $f(x) \geqslant 0$, la figura cuya área es igual a s_n, está limitada por una línea quebrada, comprendida entre las líneas quebradas «inscrita» y «circunscrita».

La suma s_n depende del modo de dividir el segmento $[a, b]$ en los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$, así como de la elección de los puntos ξ_i dentro de estos segmentos.

Designemos por máx $[x_{n-1}, x_i]$ la mayor longitud de los segmentos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, . . ., $[x_{n-1}, x_n]$. Examinemos diferentes divisiones del segmento $[a, b]$ en los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ tales que máx $[x_{i-1}, x_i] \to 0$.

Es evidente que, en el proceso de división, el número n de segmentos tiende al infinito. Eligiendo los valores correspondientes de ξ_i, se puede formar, para cada división, la suma integral

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)\, \Delta x_i,$$

de modo que se puede hablar de la división sucesiva y la secuencia respectiva de las sumas integrales. Supongamos que, para una sucesión de divisiones eligida, cuando máx $\Delta x_i \to 0$, esta suma*) tiende a un límite I.

Si para las divisiones arbitrarias del segmento $[a, b]$, tales que máx $\Delta x_i \to 0$, y la elección cualquiera de los puntos ξ_i, la suma $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i$ tiende a un mismo límite I, se dice que la función $f(x)$, que es un integrando, es *integrable* en el segmento $[a, b]$; el límite I se llama *integral definida* de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y se designa por: $\int\limits_a^b f(x)\, dx$. Entonces podemos escribir:

$$\lim_{\text{máx}\, \Delta x_j \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx.$$

* En el caso dado, la suma es una magnitud variable ordenada.

Los números a y b se llaman, respectivamente, *límite inferior* y *superior* de la integral. El segmento $[a, b]$ se llama *segmento de integración*, la letra x, *variable de integración.*

Notemos sin demostración que *si la función $y = f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, es integrable en el mismo segmento.*

Si para cierta sucesión de las divisiones, tales que máx $\Delta x_i \to 0$ estudiamos la secuencia de las sumas integrales inferiores $\underline{s}_n$ y las sumas integrales superiores $\overline{s}_n$ para una función continua $f(x)$, es evidente que estas sumas tenderán a un mismo límite I, es decir, a la integral definida de la función $f(x)$:

$$\lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Entre las funciones discontinuas hay funciones integrables y no integrables.

Si construimos la gráfica del integrando $y = f(x)$ entonces, en el caso de $f(x) \geqslant 0$, la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

será numéricamente igual al área de así llamado *trapecio curvilíneo* formado por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje Ox (fig. 210).

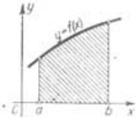

Fig. 210

Por consiguiente, el área Q de un trapecio curvilíneo comprendida entre la curva $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje Ox se calcula mediante la integral

$$Q = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Observación 1. Notemos que la integral definida depende sólo de la forma de la función $f(x)$ y de los límites de integración, pero no depende de la variable de integración. Esta última puede designarse por cualquiera letra. Por eso se puede, sin cambiar el valor de la integral definida sustituir la letra x por cualquiera otra.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \ldots = \int_a^b f(z)\,dz.$$

Al introducir el concepto de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ hemos supuesto que $a < b$. Si $b < a$, según la definición tenemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \quad (4)$$

Así, por ejemplo,

$$\int_5^0 x^2\,dx = -\int_0^5 x^2\,dx.$$

Finalmente, si $a = b$, según la definición, para toda función $f(x)$ tenemos:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \quad (5)$$

Esto es natural también desde el punto de vista geométrico. En efecto, la longitud de la base del trapecio curvilíneo es cero, por tanto, su área también es igual a cero.

Ejemplo 1. Hallar la integral $\int_a^b kx\,dx \; (b > a)$.

Solución. Desde el punto de vista geométrico el problema se reduce al cálculo del área Q de un trapecio, comprendida entre las líneas $y = kx$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (fig. 211).

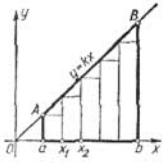

Fig. 211

La función $y = kx$, que se halla bajo el signo de integral, es continua. Por consiguiente, para calcular la integral definida se puede, como hemos indicado más arriba, dividir arbitrariamente el segmento $[a, b]$ y elegir cualesquiera puntos intermedios ξ_k. El resultado del cálculo de la integral definida no depende del método de formación de la suma integral; siendo que el paso de la división tienda al cero.

Dividamos el segmento $[a, b]$ en n partes iguales. La longitud Δx de cada segmento parcial es igual a:

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Este número se llama «paso» de la división. Las coordenadas de los puntos de división son:

$$a = x_0,\ x_1 = a + \Delta x,$$
$$x_2 = a + 2\Delta x,\ \ldots,\ x_n = a + n\Delta x.$$

Como puntos ξ_k tomemos los extremos izquierdos de cada segmento:

$$\xi_1 = a,\ \xi_2 = a + \Delta x,\ \ \xi_3 = a + 2\Delta x,\ \ldots,\ \ \xi_n = a + (n-1)\,\Delta x.$$

Formemos la suma integral (1). Siendo $f(\xi_i) = k\xi_i$, tenemos:

$$s_n = k\xi_1\Delta x + k\xi_2\Delta x + \ldots + k\xi_n\Delta x = ka\Delta x + [k(a+\Delta x)]\,\Delta x + \ldots +$$
$$+ \{k[a + (n-1)\,\Delta x]\}\,\Delta x = k\,\{a + (a+\Delta x) + (a + 2\Delta x) + \ldots +$$
$$+ [a + (n-1)\,\Delta x]\}\,\Delta x = k\,\{na + [\Delta x + 2\Delta x + \ldots + (n-1)\,\Delta x]\}\,\Delta x =$$
$$= k\,\{na + [1 + 2 + \ldots + (n-1)]\,\Delta x\}\,\Delta x,$$

donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Teniendo en cuenta que

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

(como suma de una progresión aritmética), tenemos:

$$s_n = k\left[na + \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{b-a}{n}\right]\frac{b-a}{n} = k\left[a + \frac{n-1}{n}\,\frac{b-a}{2}\right](b-a).$$

Puesto que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1,$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = Q = k\left[a + \frac{b-a}{2}\right](b-a) = k\,\frac{b^2-a^2}{2}.$$

Así,

$$\int_a^b kx\,dx = k\,\frac{b^2-a^2}{2}.$$

Es fácil calcular el área $ABba$ (fig. 211), usando los métodos de la geometría elemental. El resultado será el mismo.

Ejemplo 2. Calcular $\int_0^b x^2\,dx$.

Solución. La integral dada es igual al área Q del trapecio curvilíneo limitado por la parábola $y = x^2$, la ordenada $x = b$ y la recta $y = 0$ (fig. 212).

Dividamos el segmento $[a, b]$ en n partes iguales por medio de los puntos:

$$x_0 = 0,\ x_1 = \Delta x,\ x_2 = 2\Delta x,\ \ldots,\ x_n = b = n\Delta x,$$

$$\Delta x = \frac{b}{n}.$$

Como los puntos ξ_i tomemos los extremos derechos de cada segmento.

Formemos la suma integral

$$s_n = x_1^2\Delta x + x_2^2\Delta x + \ldots + x_n^2\Delta x =$$
$$= [(\Delta x)^2\,\Delta x + (2\Delta x)^2\,\Delta x + \ldots + (n\Delta x)^2\,\Delta x] = (\Delta x)^3\,[1^2 + 2^2 + \ldots + n^2].$$

Como es sabido:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6},$$

por esto:

$$s_n = \frac{b^3}{n^3}\,\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = Q = \int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}.$$

Fig. 212

Ejemplo 3. Calcular $\int_a^b m\,dx$ $(m = \mathbf{const})$.

Solución

$$\int_a^b m\,dx = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i\to 0} m\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i =$$
$$= m \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = m\,(b-a).$$

Aquí, $\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i$ es la suma de las longitudes de los segmentos parciales que componen el segmento $[a, b]$.

Cualquiera que sea el modo de la división, esta suma es igual a la longitud del segmento $b-a$.

Ejemplo 4. Calcular $\int_a^b e^x\,dx$.

Solución. Dividamos de nuevo el segmento $[a, b]$ en n partes iguales:

$$x_0=a,\ x_1=a+\Delta x,\ \ldots,\ x_n=a+n\Delta x;\ \Delta x=\frac{b-a}{n}.$$

Como puntos ξ tomemos los extremos izquierdos. Formemos la suma integral

$$S_n=e^a\Delta x+e^{a+\Delta x}\Delta x+\ldots+e^{a+(n-1)\Delta x}\Delta x=$$
$$=e^a(1+e^{\Delta x}+e^{2\Delta x}+\ldots+e^{(n-1)\Delta x})\,\Delta x.$$

La expresión comprendida entre paréntesis es una progresión geométrica cuya razón es $e^{\Delta x}$, y el primer término igual a 1; por esto:

$$S_n=e^a\frac{e^{n\Delta x}-1}{e^{\Delta x}-1}\,\Delta x=e^a(e^{n\Delta x}-1)\frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1}.$$

Luego tenemos:

$$n\Delta x=b-a;\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1}=1.$$

Según la regla de l'Hospital

$$\lim_{z=0}\frac{z}{e^z-1}=\lim_{z=0}\frac{1}{e^z}=1.$$

Así, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=Q=e^a(e^{b-a}-1)\cdot 1=e^b-e^a$, es decir: $\int_a^b e^x\,dx=e^b-e^a$.

Observación 2. Los ejemplos examinados muestran que el cálculo directo de las integrales definidas como límites de sumas integrales presenta grandes dificultades. Incluso, en los casos en que los integrandos son muy simples (kx, x^2, e^x), este método requiere cálculos laboriosos. El cálculo de las integrales definidas de las funciones complicadas es aún más difícil. Es natural que surge el problema de encontrar un método cómodo para el cálculo de las integrales definidas. Este método, descubierto por Newton y Leibniz, utiliza la relación lógica que existe entre la integración y la derivación.

Los párrafos ulteriores del presente capítulo se dedican a la exposición y argumentación del método mencionado.

§ 3. PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Propiedad 1. El *factor constante se puede sacar fuera del signo de la integral definida: si* $A = \text{const}$,

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

Demostración.

$$\int_a^b Af(x)\,dx = \lim_{\text{máx}\,\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} Af(\xi_i)\,\Delta x_i =$$

$$= A\lim_{\text{máx}\,\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = A\int_a^b f(x)\,dx.$$

Propiedad 2. La *integral definida de la suma algebraica de varias funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de los sumandos.* Por ejemplo, en el caso de dos sumandos:

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx. \tag{2}$$

Demostracion.

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]\,dx = \lim_{\text{máx}\,\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f_1(\xi_i)+f_2(\xi_i)]\,\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\text{máx}\,\Delta x\to 0}\left[\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\,\Delta x_i\right] =$$

$$= \lim_{\text{máx}\,\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\,\Delta x_i +$$

$$+ \lim_{\text{máx}\,\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\,\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

La demostración es válida para cualquier número de sumandos.

Las propiedades 1 y 2 demostradas para el caso en que $a < b$, son válidas también para el caso en que $a \geqslant b$.

Sin embargo, la propiedad siguiente es válida sólo cuando $a < b$.

Propiedad 3. Si *en el segmento* $[a, b]$, *donde* $a < b$, *las funciones* $f(x)$ y $\varphi(x)$ *satisfacen a la condición* $f(x) \leqslant \varphi(x)$, *entonces*:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{3}$$

Demostración. Examinemos la diferencia

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\,dx =$$

$$= \lim_{\text{máx}\,\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\varphi(\xi_i) - f(\xi_i)]\,\Delta x_i.$$

Aquí, cada diferencia $\varphi(\xi_i) - f(\xi_i) \geqslant 0$, $\Delta x_i \geqslant 0$. Por consiguiente, cada sumando de la suma no es negativo, igual que no es negativa toda la suma ni su límite, es decir,

$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\,dx \geqslant 0$$

ó

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0,$$

de donde se deduce la desigualdad (3).

Si $f(x) > 0$ y $\varphi(x) > 0$, la figura 213 da una ilustración geométrica de esta propiedad. Puesto que $\varphi(x) \geqslant f(x)$, el área del trapecio curvilíneo aA_1B_1b no es mayor que el área del trapecio curvilíneo aA_2B_2b.

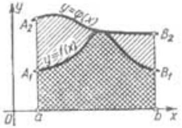

Fig. 213

Propiedad 4. *Si m y M son los valores mínimo y máximo respectivamente de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y $a \leqslant b$, entonces:*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{4}$$

Demostración. Según la hipótesis,

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

En virtud de la propiedad (3), tenemos:

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx. \tag{4'}$$

Pero

$$\int_a^b m\,dx = m\,(b-a), \quad \int_a^b M\,dx = M\cdot(b-a)$$

(véase el ejemplo 3, § 2, cap. XI). Sustituyendo estas expresiones en la desigualdad (4') obtenemos la desigualdad (4).

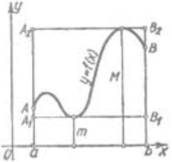

Fig. 214

Cuando $f(x) \geqslant 0$, la propiedad 4 se ilustra geométricamente en la fig. 214: el área del trapecio curvilíneo $aABb$ está comprendida entre las áreas de los rectángulos aA_1B_1b y aA_2B_2b.

Propiedad 5. (Teorema de la media)

Si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, existe en este segmento un punto ξ tal que se verifique la igualdad siguiente:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi)\,. \tag{5}$$

Demostración. Para precisar supongamos que $a < b$. Si m y M son valores mínimo y máximo, respectivamente, de la $f(x)$ en el segmento $[a, b]$, en virtud de la fórmula (4) tenemos:

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

De aquí:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \mu, \text{ donde } m \leqslant \mu \leqslant M.$$

Puesto que $f(x)$ es continua, esta función toma todos los valores intermedios comprendidos entre m y M. Por tanto, para cierto valor ξ $(a \leqslant \xi \leqslant b)$ será $\mu = f(\xi)$, es decir,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a).$$

Propiedad 6. *Para tres números arbitrarios a, b, c se verifica la igualdad:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \tag{6}$$

siempre que *estas tres integrales existen.*

Demostración. Supongamos al principio que $a < c < b$, y formemos la suma integral para la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$.

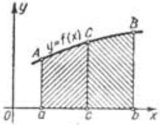

Fig. 215

Puesto que el límite de la suma integral no depende del modo de dividir el segmento $[a, b]$ en partes, lo dividimos en segmentos pequeños de tal manera que c sea el punto de división. Descompongamos luego la suma integral $\sum_a^b$ correspondiente al segmento $[a, b]$ en dos sumas: una $\sum_a^c$, que corresponde al segmento $[a, c]$ y la otra $\sum_c^b$ que es correspondiente al segmento $[c, b]$.

Entonces:

$$\sum_a^b f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_a^c f(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum_c^b f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Tomando límites (en la última ecuación) para máx $\Delta x_i \to 0$ obtenemos la correlación (6).

Si $a < b < c$, en virtud de lo demostrado podemos escribir:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

ó

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx.$$

Pero, de acuerdo con la fórmula (4), § 2 tenemos:

$$\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx.$$

Por esto:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

De modo análogo se demuestra la propiedad 6 para cualquiera otra disposición de los puntos a, b y c.

La figura 215 ilustra geométricamente la propiedad 6 para el caso en que $f(x) > 0$, y $a < c < b$: el área del trapecio $aABb$ es igual a la suma de las áreas de los trapecios $aACc$ y $cCBb$.

§ 4. CALCULO DE LA INTEGRAL DEFINIDA. FORMULA DE NEWTON-LEIBNIZ

Supongamos que en la integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

el límite inferior a está fijado, mientras que el superior b varía. Es evidente que variará también el valor de la integral, es decir, la integral será una función de su límite superior.

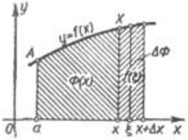

Fig. 216

Para utilizar las designaciones habituales, designemos el límite superior por x y para evitar toda confusión designemos la variable de integración por t (el valor de la integral no depende de la designación de la variable de integración). Obtenemos la integral $\int_a^x f(t)\,dt$. Siendo a constante, la integral será una función de su límite superior x. Designemos esta función por $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \qquad (1)$$

Si $f(t)$ es una función no negativa, el valor de $\Phi(x)$ será numéricamente igual al área del trapecio curvilíneo $aAXx$ (fig. 216). Evidentemente, este área varía en función del cambio de x. Hallemos la derivada de $\Phi(x)$ respecto a x, es decir, la derivada de la integral definida (1) respecto a su límite superior.

Teorema 1. *Si $f(x)$ es una función continua y $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, se verifica la igualdad*

$$\Phi'(x)=f(x).$$

En otras palabras, *la derivada de una integral definida respecto a su límite superior es igual al integrando en el que la variable de integración está sustituida por el valor del límite superior* (a condición de que el integrando sea continuo).

Demostración. Demos al argumento x un incremento arbitrario Δx, positivo o negativo; entonces, tomando en consideración la propiedad 6 de la integral definida, obtenemos.

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

El incremento de la función $\Phi(x)$ es igual a

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt,$$

es decir,

$$\Delta\Phi=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Apliquemos a esta integral el teorema de la media (propiedad 5 de la integral definida):

$$\Delta\Phi=f(\xi)(x+\Delta x-x)=f(\xi)\,\Delta x,$$

donde ξ se halla comprendido entre x y $x+\Delta x$.

Hallemos la razón del incremento de la función al incremento del argumento:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\frac{f(\xi)\,\Delta x}{\Delta x}=f(\xi).$$

Por tanto,

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi).$$

Pero, puesto que $\xi \to x$ cuando $\Delta x \to 0$, entonces:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = \lim_{\xi \to x} f(\xi)$$

y, como la función $f(x)$ es continua:

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x).$$

Así pues, $\Phi'(x) = f(x)$. El teorema está demostrado. El teorema dado se ilustra geométricamente de manera muy simple (fig. 216): el incremento $\Delta\Phi = f(\xi)\,\Delta x$ es igual al área del trapecio curvilíneo de base Δx; y la derivada $\Phi'(x) = f(x)$ es igual a la longitud del segmento xX.

Observación. Del teorema demostrado se deduce, en particular, que *cada función continua tiene una función primitiva.* En efecto, si la función $f(t)$ es continua en el segmento $[a, x]$ entonces, según lo indicado en el § 2, cap. XI, existe la integral definida $\int_a^x f(t)\,dt$, es decir, existe la función

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

que es, en virtud de lo demostrado, la función primitiva de $f(x)$.

Teorema 2. *Si $F(x)$ es una función primitiva de la función continua $f(x)$, la fórmula*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{2}$$

es válida.

Esta fórmula se llama *fórmula de Newton-Leibniz**).

Demostración. Sea $F(x)$ una función primitiva de $f(x)$. Según el teorema (1), la función $\int_a^x f(t)\,dt$ es también primitiva de $f(x)$. Pero dos primitivas arbitrarias de la función dada se diferencian por un sumando constante C^*
Por tanto, se puede escribir:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C^*. \tag{3}$$

*) Notemos que tal denominación de la formula (2) es convencional, puesto que ni Newton ni Leibniz dieron exactamente esta fórmula. Pero lo importante es que precisamente ellos establecieron por primera vez la relación entre la integración y la derivación, que permitió enunciar una regla de cálculo de las integrales definidas.

Con la elección correspondiente de C^*, esta igualdad es válida para todos los valores de x, o sea, es una identidad. Para determinar la constante C^* hagamos $x = a$; entonces:

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C^*,$$

ó

$$0 = F(a) + C^*,$$

de donde:

$$C^* = -F(a).$$

Por consiguiente,

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Haciendo $x = b$, obtenemos la fórmula de Newton — Leibniz:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

o, al sustituir la variable de integración por x:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Notemos que la diferencia $F(b) - F(a)$ no depende de la elección de la función primitiva F, puesto que todas las primitivas se diferencian en una magnitud constante, la que desaparece durante la sustracción.

Si introducimos la designación*).

$$F(b) - F(a) = F(x)\,|_a^b,$$

se puede escribir la fórmula (2) en la forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,|_a^b = F(b) - F(a).$$

---

*) La expresión $\Big|_a^b$ se llama símbolo de la sustitución doble. En los manuales de matemáticas se utilizan dos formas equivalentes de notación:

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b,$$

ó

$$F(b) - F(a) = F(x)\,\Big|_a^b.$$

En adelante utilizaremos ambas formas de notación.

La fórmula de Newton-Leibniz propone un método muy práctico para el cálculo de integrales definidas cuando se conoce la función primitiva del integrando. Exactamente, el descubrimiento de esta fórmula le dio a la integral definida la importancia que ésta tiene hoy día en las matemáticas.
Aunque las operaciones análogas al cálculo de la integral definida como límite de una suma integral, fueron conocidas incluso en la antigüedad (Arquímedes), las aplicaciones de este método se limitaban sólo a los casos más simples, cuando el límite de la suma integral podía ser calculado directamente.

La fórmula de Newton-Leibniz amplió considerablemente el campo de aplicación de la integral definida, puesto que los matemáticos obtuvieron un método general que permite solucionar diferentes problemas particulares. Esta fórmula amplió también la esfera de las aplicaciones de la integral definida en la técnica, mecánica, astronomía, etc.

Ejemplo 1. $\int\limits_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2}$.

Ejemplo 2. $\int\limits_a^b x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3}$.

Ejemplo 3. $\int\limits_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}\ (n \neq -1)$.

Ejemplo 4. $\int\limits_a^b e^x\,dx = e^x\Big|_a^b = e^b - e^a$.

Ejemplo 5. $\int\limits_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0$.

Ejemplo 6. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 = \sqrt{2}-1$.

§ 5. SUSTITUCION DE VARIABLE EN UNA INTEGRAL DEFINIDA

Teorema. *Supongamos que está dada la integral*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

donde la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$.

Introduzcamos una nueva variable t, por la fórmula:

$$x = \varphi(t).$$

Si

1) $\varphi(\alpha) = a$ y $\varphi(\beta) = b$,
2) $\varphi(t)$ y $\varphi'(t)$ *son continuas en el segmento* $[\alpha, \beta]$,
3) $f[\varphi(t)$ *está definida y es continua en el segmento* $[\alpha, \beta]$, *entonces:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{1}$$

Demostración. Si $F(x)$ es función primitiva de $f(x)$, podemos escribir las siguientes igualdades:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{2}$$

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)] + C. \tag{3}$$

La validez de la última igualdad se comprueba mediante la derivación de ambos miembros respecto a t (esta igualdad también se deduce de la fórmula (2) § 4, cap. X). De la igualdad (2) tenemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,\big|_a^b = F(b) - F(a).$$

De la igualdad (3):

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)]\,\big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

Los segundos miembros de las últimas expresiones son iguales, por tanto son iguales los primeros.

Observación. Notemos que al calcular la integral definida por la fórmula (1), no regresamos a la variable original. Si calculamos

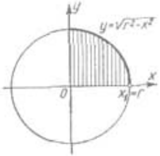

Fig. 217

la segunda integral definida de la igualdad (1), obtenemos un cierto número, la primera integral es igual a este número, es decir, los valores numéricos de dos integrales de la igualdad (1) son iguales.

Ejemplo. Calcular la integral

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx.$$

Solución. Efectuemos la sustitución de variable:

$$x=r\operatorname{sen} t,\ dx=r\cos t\,dt.$$

Determinemos los nuevos límites:

$$x=0 \text{ para } t=0$$

$$x=r \text{ para } t=\frac{\pi}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2-r^2\operatorname{sen}^2 t}\, r\cos t\,dt=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t\,dt=$$

$$=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=r^2\left[\frac{t}{2}+\frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi r^2}{4}.$$

Desde el punto de vista geométrico, la integral calculada es el área de una cuarta parte del círculo limitado por una circunferencia $x^2+y^2=r^2$ (fig. 217).

§ 6. INTEGRACION POR PARTES

Supongamos que u y v son funciones derivables de x. Entonces:

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

Integrando ambos miembros de la identidad entre los límites a y b obtenemos:

$$\int_a^b (uv)'\,dx=\int_a^b u'v\,dx+\int_a^b uv'\,dx. \qquad (1)$$

Puesto que $\int (u\,v)'\,dx=uv+C$, entonces: $\int_a^b (uv)'\,dx=uv\big|_a^b$; por esto la igualdad (1) puede ser escrita en la forma:

$$uv\big|_a^b=\int_a^b v\,du+\int_a^b u\,dv$$

o, en definitiva: $\int_a^b u\,dv=uv\big|_a^b-\int_a^b v\,du.$

Ejemplo. Calcular la integral

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx.$$

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\operatorname{sen}^{n-1} x}_{u}\,\underbrace{d\cos x}_{dv}=$$

$$=-\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x\cos x\cos x\,dx=$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x\cos^2 x\,dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x\,(1-\operatorname{sen}^2 x)\,dx=$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx.$$

En las designaciones elegidas se puede escribir la última igualdad en la forma:

$$I_n=(n-1)\,I_{n-2}-(n-1)\,I_n,$$

de donde

$$I_n=\frac{n-1}{n}\,I_{n-2}. \tag{2}$$

Usando el mismo procedimiento, encontramos:

$$I_{n-2}=\frac{n-3}{n-2}\,I_{n-4}$$

por esto:

$$I_n=\frac{n-1}{n}\,\frac{n-3}{n-2}\,I_{n-4}.$$

Continuando de la misma manera llegamos a obtener I_0 ó I_1 según sea par o impar el número n.

Examinemos dos casos:

1) n es par, $n=2m$:

$$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\,I_0;$$

2) n es impar, $n=2m+1$:

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\,I_1,$$

pero, puesto que

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^0 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\frac{\pi}{2}\,,\quad I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx=1,$$

entonces:

$$I_{2m}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2m} x\,dx=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\,,$$

$$I_{2m+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2m+1} x\,dx=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\,.$$

De estas fórmulas se deduce la fórmula de Wallis que expresa el número $\frac{\pi}{2}$ en forma de producto infinito.

En efecto, de las últimas dos igualdades, dividiéndolas término a término; encontramos:

$$\frac{\pi}{2}=\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\ \dots\ 2m}{3\cdot 5\ \dots\ (2m-1)}\right)^2\frac{1}{2m+1}\,\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}\,. \tag{3}$$

Demostremos ahora que

$$\lim_{m\to\infty}\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}=1.$$

Para todo x del intervalo $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ se verifican las desigualdades

$$\operatorname{sen}^{2m-1} x>\operatorname{sen}^{2m} x>\operatorname{sen}^{2m+1} x.$$

Integrando desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$, obtenemos:

$$I_{2m-1}\geqslant I_{2m}\geqslant I_{2m+1},$$

de donde:

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}}\geqslant\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}\geqslant 1. \tag{4}$$

De la igualdad (2) se deduce:

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}}=\frac{2m+1}{2m}\,.$$

Por tanto,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}}=\lim_{m\to\infty}\frac{2m+1}{2m}=1.$$

De la desigualdad (4) obtenemos:

$$\lim\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}=1.$$

Pasando al límite en la fórmula (3), obtenemos la *fórmula de Wallis*:

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{m\to\infty}\left[\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2m}{3\cdot 5\ldots(2m-1)}\right)^2\frac{1}{2m+1}\right].$$

Se puede escribir esta fórmula en la forma:

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1}\right).$$

§ 7. INTEGRALES IMPROPIAS

1. Integrales con límites infinitos. Sea $f(x)$ una función definida y continua para todos los valores de x tales que $a \leqslant x < +\infty$. Examinemos la integral

$$I(b)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Esta integral tiene significado, para cualquier $b > a$. Cuando b varía, la integral varía también, por esto la integral es una función

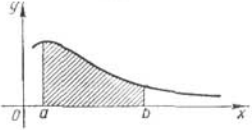

Fig. 218

continua de b (véase § 4). Examinemos cómo varía la integral cuando $b \to +\infty$ (fig. 218).

Definición. Si existe el límite finito

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx,$$

este límite se llama *integral impropia* de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, +\infty]$ y se designa por:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Por tanto, según la definición tenemos:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

En este caso suele decirse que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

existe o *converge*. Si la integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, para $b \to +\infty$, no tiene límite definito, se dice que $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *no existe* o *diverge*.

Es fácil definir el significado geométrico de la integral impropia para $f(x) \geqslant 0$: si la integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ representa el área de un

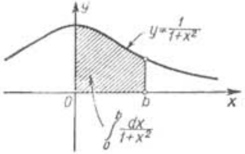

Fig. 219

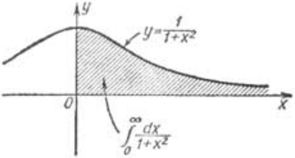

Fig. 220

dominio limitado por la curva $y = f(x)$, el eje de las abscisas y las ordenadas $x = a$, $x = b$, es natural considerar que la integral impropia $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ expresa el área de un dominio ilimitado (infinito), comprendido entre las líneas $y = f(x)$, $x = a$ y el eje de abscisas.

De modo análogo se determinan las integrales impropias en otros intervalos infinitos:

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_{a}^{a} f(x)\,dx,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

La última igualdad, se comprende así: si existe cada una de las integrales impropias del segundo miembro, entonces existe (converge), según la definición, la integral del primer miembro.

Ejemplo 1. Calcular la integral $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ (véase figs. 219 y 220).

Solución. Según la definición de integral impropia hallamos:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}.$$

La integral estudiada representa el área de un trapecio curvilíneo infinito. El área está rayada en la figura 220.

Ejemplo 2. Hallar los valores de α (fig. 221), para los cuales la integral $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge o diverge.

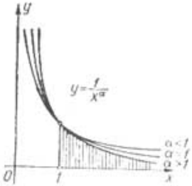

Fig. 221

Solución. Puesto que (para $\alpha \neq 1$)

$$\int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha} [b^{1-\alpha} - 1],$$

tenemos:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1).$$

Por tanto,

si $\alpha > 1$, tenemos $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$, es decir, la integral converge;

si $\alpha < 1$, tenemos $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \infty$, es decir, la integral diverge;

si $\alpha = 1$, tenemos $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{+\infty} = \infty$, es decir, la integral diverge.

Ejemplo 3. Calcular $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Solución.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

La segunda integral es igual a $\frac{\pi}{2}$ (véase el ejemplo 1). Calculemos la primera integral:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha \to -\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_{\alpha}^{0} = \lim_{\alpha \to -\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} \alpha) = \frac{\pi}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

En muchos casos es suficiente establecer si la integral dada converge o diverge, y determinar su valor. En tales circunstancias pueden ser útiles dos teoremas siguientes, que citamos aquí sin demostración. Demos, algunos ejemplos de su aplicación.

Teorema 1. *Si para todos x ($x \geqslant a$) se verifica la desigualdad*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x),$$

siendo $\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$, *convergente, entonces* $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ *también es convergente y*

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \int_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Ejemplo 4. Analizar la convergencia de la integral

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}.$$

Solución. Notemos que para $1 \leqslant x$

$$\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$$

Luego,

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{1}^{+\infty} = 1,$$

por tanto,

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

converge y su valor es inferior a la 1.

Teorema 2. *Si para todos x $(x \geqslant a)$ se verifica la desigualdad $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)$, siendo $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ divergente, entonces $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ también es divergente.*

Ejemplo 5. Analizar la convergencia de la integral

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx.$$

Notemos que

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Pero,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{x}\,\Big|_1^b = +\infty.$$

Por tanto, la integral dada es divergente.

En los dos últimos teoremas estudiamos las integrales impropias de las funciones no negativas. Para el caso de una función $f(x)$ que cambia de signo en un intervalo infinito, tenemos el teorema siguiente.

Teorema 3. *Si la integral $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge, entonces $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ también converge.* En este caso la última integral se llama *absolutamente convergente.*

Ejemplo 6. Analizar la convergencia de la integral

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\,dx.$$

Solución. Aquí el integrando es una función de signo variable. Notemos que

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\right| \leqslant \left|\frac{1}{x^3}\right|.$$

Pero, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}.$

Por tanto, la integral $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\right| dx$ es convergente, de lo que se deduce que es convergente también la integral dada.

2. Integral de una función discontinua. Sea $f(x)$ una función definida y continua para $a \leqslant x < c$. Pero en el punto $x = c$ la función, o bien, no está definida, o bien es discontinua. En este caso no se puede definir la integral $\int_a^c f(x)\,dx$ como límite de sumas integrales, puesto que la función $f(x)$ no es continua en el segmento $[a, c]$ y este límite puede no existir.

La integral $\int_a^c f(x)\,dx$ de la función $f(x)$, discontinua en el punto c, se determina del modo siguiente:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{b \to c-0} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Esta integral se llama integral impropia *convergente* si existe el límite del segundo miembro de la igualdad y se llama *divergente* en el caso contrario.

Si la función $f(x)$ es discontinua en el extremo izquierdo del segmento $[a, c]$ (es decir, cuando $x = a$), entonces, según la definición:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{b \to a+0} \int_b^c f(x)\,dx.$$

Si la función $f(x)$ es discontinua en un punto $x = x_0$, dentro del segmento $[a, c]$, entonces:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^c f(x)\,dx,$$

si existen ambas integrales impropias del segundo miembro.

Ejemplo 7. Calcular $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Solución.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b\to 1-0} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{b\to 1-0} 2\sqrt{1-x}\,\Big|_0^b =$$

$$= -\lim_{b\to 1-0} 2\left[\sqrt{1-b}-1\right] = 2.$$

Ejemplo 8. Calcular la integral $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Solución. Como dentro del segmento de integración existe un punto $x=0$, en el que el integrando es discontinuo, la integral debe ser representada como la suma de dos términos:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \to -0} \int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2}.$$

Calculemos por separado cada límite:

$$\lim_{\varepsilon_1 \to -0} \int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_1 \to -0} \frac{1}{x}\Big|_{-1}^{\varepsilon_1} = -\lim_{\varepsilon_1 \to -0} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{-1}\right) = \infty.$$

Por tanto, en el intervalo $[-1, 0]$ la integral diverge

$$\lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_2 \to +0} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = \infty.$$

Entonces en el intervalo $[0, 1]$ la integral también diverge.

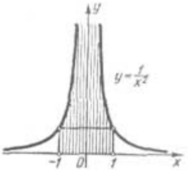

Fig. 222

Así, la integral dada diverge en todo el segmento $[-1, 1]$. Notemos que, si hubiéramos calculado la integral dada, sin tener en cuenta la discontinuidad del integrando en el punto $x = 0$, habríamos obtenido un resultado erróneo. En efecto,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{-1}\right) = -2,$$

lo que es imposible (fig. 222).

Observación. Si la función $f(x)$, definida en el segmento $[a, b]$, tiene dentro de este segmento un número finito de puntos de discontinuidad: $a_1, a_2, \ldots, a_n$, la integral de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ se determina del modo siguiente:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a_n}^{b} f(x)\,dx,$$

si cada una de las integrales impropias del segundo miembro converge. Si por lo menos una de las integrales diverge, entonces, $\int_a^b f(x)\,dx$ es también divergente.

Para determinar la convergencia de integrales impropias de las funciones discontinuas y calcular sus valores se pueden aplicar frecuentemente teoremas análogos a los teoremas de las integrales con límites infinitos.

Teorema I'. *Si las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son discontinuas en el punto c del segmento $[a, c]$, mientras que en todos los puntos de este segmento se cumplen las desigualdades*

$$\varphi(x) \geqslant f(x) \geqslant 0,$$

y $\int_a^c \varphi(x)\,dx$ es convergente, entonces $\int_a^c f(x)\,dx$ es también convergente.

Teorema II'. *Si las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son discontinuas en el punto c del segmento $[a, c]$, mientras que en todos los puntos de este segmento se cumplen las desigualdades $f(x) \geqslant \varphi(x) \geqslant 0$ y $\int_a^c \varphi(x)\,dx$ es divergente, entonces $\int_a^c f(x)\,dx$ es también divergente.*

Teorema III'. *Si $f(x)$ es una función de signo variable en el segmento $[a, c]$ y discontinua sólo en el punto c, mientras que la integral impropia $\int_a^c |f(x)|\,dx$ del valor absoluto de esta función es convergente, entonces la integral $\int_a^c f(x)\,dx$ de la misma función $f(x)$ es también convergente.*

A menudo se toma $\frac{1}{(c-x)^\alpha}$ como funciones de comparación, cómodas para comparar con las funciones que se encuentran bajo el signo de la integral impropia. Es fácil comprobar que $\int_a^c \frac{1}{a(c-x)^\alpha}\,dx$ converge para $\alpha < 1$ y diverge para $\alpha \geqslant 1$.

Lo mismo sucede con las integrales $\int_a^c \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx$.

Ejemplo 9. ¿Es convergente la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}\,dx?$$

Solución. El integrando es discontinuo en el extremo izquierdo del segmento $[0, 1]$. Comparándolo con la función $\frac{1}{\sqrt{x}}$, tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+4x^3} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

La integral impropia $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ existe. Por consiguiente, la integral impropia de la menor función, es decir, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}\,dx$, también existe.

§ 8. CALCULO APROXIMADO DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

En la parte final del capítulo X hemos indicado que no toda función continua tiene una primitiva expresada mediante funciones elementales. En estos casos el cálculo de las integrales definidas por la aplicación de la fórmula de Newton-Leibniz es difícil por lo que se utilizan otros métodos para un cálculo aproximado de las integrales definidas.

Expongamos algunos métodos de la integración aproximada, partiendo de la noción de integral definida como límite de una suma.

I. Fórmula de los rectángulos. Sea $y = f(x)$ una función continua en el segmento $[a, b]$. Calcular la integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dividamos el segmento $[a, b]$ por medio de los puntos $a = x_0$, $x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ en n partes iguales de longitud Δx:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Designemos por $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$ los valores de la función $f(x)$ en los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, es decir,

$$y_0 = f(x_0);\ y_1 = f(x_1);\ \ldots;\ y_n = f(x_n).$$

Formemos las sumas:

$$y_0\Delta x + y_1\Delta x + \ldots + y_{n-1}\Delta x,$$
$$y_1\Delta x + y_2\Delta x + \ldots + y_n\Delta x.$$

Cada una de estas sumas es una suma integral de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$, y por eso, expresa aproximadamente la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+\ \ldots\ +y_{n-1}), \tag{1}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\ \ldots\ +y_n). \tag{1'}$$

Estas son las *fórmulas de los rectángulos.* De la figura 223 se deduce que, si $f(x)$ es una función positiva y creciente, la fórmula (1) representa el área de una figura escalonada, compuesta por los

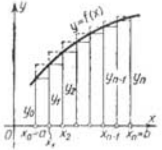

Fig. 223

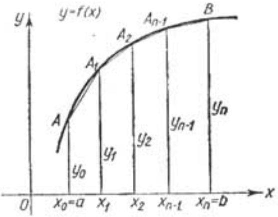

Fig. 224

rectángulos «interiores», y la fórmula (1'), el área de la figura escalonada, compuesta por los rectángulos «exteriores».

El error que se comete durante el cálculo de la integral por la fórmula de los rectángulos es tanto menor cuanto mayor sea el número n $\left(\text{es decir, cuanto menor sea el paso de la división } x=\frac{b-a}{n}\right)$.

II. Fórmula de los trapecios. Es natural esperar un valor más exacto de la integral definida, si cambiamos la curva dada $y=f(x)$ no por una línea escalonada que utilizamos para la fórmula de los rectángulos, sino por una línea quebrada inscrita (fig. 224).

En este caso, en vez del área del trapecio curvilíneo $aABb$ obtenemos la suma de las áreas de los trapecios rectangulares limitados por arriba por las cuerdas AA_1, A_1A_2, . . ., $A_{n-1}B$. Como las áreas de estos trapecios son respectivamente iguales a $\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x$, $\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x$, etc, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left(\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x + \ldots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x\right),$$

ó

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right). \qquad (2)$$

Esta es la *fórmula de los trapecios.*

El número n se elige arbitrariamente. Cuanto mayor sea este número n y, por tanto, cuanto menor sea el paso $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, con tanta mayor precisión la suma del segundo miembro de la igualdad aproximada (2) expresará el valor de la integral.

III. Fórmula de las parábolas (Fórmula de Simpson). Dividamos el segmento $[a, b]$ en un número par $n = 2m$ de partes iguales. El área del trapecio curvilíneo correspondiente a los dos primeros segmentos,

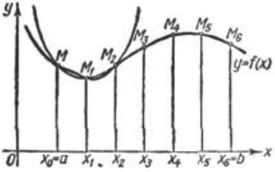

Fig. 225

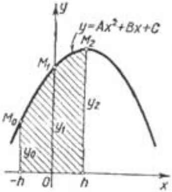

Fig. 226

$[x_0, x_1]$ y $[x_1, x_2]$ y limitado en su parte superior por la curva dada $y = f(x)$, se sustituye por el área de otro trapecio curvilíneo limitado por una **parábola de segundo grado** que pasa por los tres puntos:

$$M(x_0, y_0);\ M_1(x_1, y_1);\ M_2(x_2, y_2)$$

y tiene el eje paralelo al eje Oy (fig. 225). Tal trapecio curvilíneo es un trapecio *parabólico*.

La ecuación de una parábola con el eje paralelo a Oy es

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

Los coeficientes A, B, y C se determinan unívocamente de la condición de que la parábola pase por los tres puntos dados. Construimos también parábolas semejantes para otras pares de los segmentos. La suma de las áreas de los trapecios parabólicos da el valor aproximado de la integral.

Calculemos al principio el área de un trapecio parabólico.

Lema. *Si el trapecio curvilíneo está limitado por una parábola*

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

el eje Ox y dos ordenadas, la distancia entre las cuales es igual a $2h$, entonces su área es igual a

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2), \tag{3}$$

donde, y_0 e y_2 son ordenadas de los extremos e y_1 es ordenada de la curva en el punto medio del segmento.

Demostración. Dispongamos el sistema de coordenadas auxiliar del modo como se indica en la figura 226. Los coeficientes en la ecuación de la parábola $y = Ax^2 + Bx + C$ se determinan de las siguientes igualdades:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{si } x_0 = -h, \text{ entonces:} & y_0 = Ah^2 - Bh + C; \\ \text{si } x_1 = 0, \text{ entonces:} & y_1 = \qquad\qquad\quad C; \\ \text{si } x_2 = h, \text{ entonces:} & y_2 = Ah^2 + Bh + C. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Considerando que los coeficientes A, B, C son conocidos, determinemos el área del trapecio parabólico mediante la integral definida:

$$S = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} =$$

$$= \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C).$$

Pero, de las ecuaciones (4) se deduce que

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C.$$

Por consiguiente,

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

lo que se trataba de demostrar.

Regresemos a nuestro problema principal (véase fig. 225). Utilizando la fórmula (3) podemos escribir las siguientes igualdades aproximadas ($h = \Delta x$):

$$\int_{a=x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

. . . .

$$\int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}=b} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}).$$

Sumando miembro a miembro, obtenemos a la izquierda la integral buscada, y a la derecha, su valor aproximado:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots$$

$$\ldots + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}). \qquad (5)$$

ó

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6m}[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) +$$

$$+ 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1})].$$

La última es la *fórmula de Simpson*. Aquí el número $2m$ de los puntos de división es arbitrario; pero cuanto mayor sea este número tanto mayor es la precisión con la que la suma del segundo miembro de la igualdad (5) expresa el valor de la integral *).

Ejemplo. Calcular aproximadamente:

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

Solución. Dividamos el segmento $[1, 2]$ en 10 partes iguales (fig. 227). Haciendo

$$\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0,1,$$

*) Para determinar el número de puntos de división que se deben tomar para calcular la integral con un grado de precisión dado, se pueden utilizar las fórmulas de evaluación de los errores cometidos durante el cálculo aproximado de la integral. Aquí no se dan estas fórmulas de evaluación.

formamos la tabla de los valores del integrando:

x	$y=\frac{1}{x}$	x	$y=\frac{1}{x}$
$x_0=1,0$	$y_0=1,00000$	$x_6=1,6$	$y_6=0,62500$
$x_1=1,1$	$y_1=0,90909$	$x_7=1,7$	$y_7=0,58824$
$x_2=1,2$	$y_2=0,83333$	$x_8=1,8$	$y_8=0,55556$
$x_3=1,3$	$y_3=0,76923$	$x_9=1,9$	$y_9=0,52632$
$x_4=1,4$	$y_4=0,71429$	$x_{10}=2,0$	$y_{10}=0,50000$
$x_5=1,5$	$y_5=0,66667$		

I. Según la primera fórmula de los rectángulos (1) obtenemos:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1\,(y_0+y_1+\ldots+y_9)=0,1\cdot 7,18773=0,71877.$$

Según la segunda fórmula de los rectángulos (1′) obtenemos:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1\,(y_1+y_2+\ldots+y_{10})=0,1\cdot 6,68773=0,66877.$$

Directamente de la figura 227 se deduce que en el caso dado la primera fórmula da el valor de la integral por exceso y la segunda, por defecto.

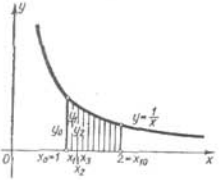

Fig. 227

II. Según la fórmula de los trapecios (2) obtenemos:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1\left(\frac{1+0,5}{2}+6,18773\right)=0,69377.$$

III. Según la fórmula de Simpson tenemos:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{0,1}{3}\,[y_0+y_{10}+2\,(y_2+y_4+y_6+y_8)+4\,(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)]=$$

$$=\frac{0,1}{3}\,(1+0,5+2\cdot 2,72818+4\cdot 3,45955)=0,69315.$$

En realidad $\ln 2=\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}=0{,}6931472$ (con precisión de hasta el séptimo dígito decimal).

Por consiguiente: al dividir el segmento [0, 1] en 10 partes iguales obtenemos:

— según la fórmula de Simpson, cinco dígitos correctos,
— según la fórmula de los trapecios, solamente tres dígitos correctos,
— según la fórmula de los rectángulos, podemos estar seguros de que solamente el primer dígito es correcto.

§ 9. FORMULA DE CHEBISHEV

En los cálculos técnicos se utiliza frecuentemente la fórmula de integración aproximada de Chébishev. Supongamos que es preciso calcular

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Sustituyamos el integrando por el polinomio de interpolación de Lagrange $P(x)$ (§ 9, cap. VII), tomando en el segmento $[a, b]$ n valores de la función: $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, donde $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ son los puntos arbitrarios del segmento $[a, b]$:

$$P(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}f(x_1)+$$

$$+\frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)}f(x_2)+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})}f(x_n). \qquad (1)$$

Obtenemos la siguiente fórmula aproximada de integración:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \int\limits_a^b P(x)\,dx, \qquad (2)$$

la que después de algunos cálculos toma la forma:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx C_1 f(x_1)+C_2 f(x_2)+\ \ldots\ +C_n f(x_n), \qquad (3)$$

donde los coeficientes C_i se calculan por las fórmulas:

$$C_i = \int_a^b \frac{(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}\,dx. \tag{4}$$

La fórmula (3) es complicada e incómoda para los cálculos, puesto que los coeficientes C_i se expresan mediante fracciones complejas.

Chébishev planteó el problema inverso: dados en vez de las abscisas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ los coeficientes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, determinar las abscisas $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Los coeficientes C_i se dan de modo que la fórmula (3) sea la más simple posible para los cálculos. Es evidente que esto se logra cuando todos los coeficientes C_i son iguales entre sí:

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_n.$$

Designemos por C_n el valor común de los coeficientes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, entonces la fórmula (3) toma la forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx C_n [f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)]. \tag{5}$$

La fórmula (5) representa en general una igualdad **aproximada**, pero si $f(x)$ es un polinomio de grado no superior a $(n - 1)$ obtenemos entonces una igualdad **exacta**. Esta circunstancia permite determinar las magnitudes $C_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Para obtener una fórmula cómoda para todo intervalo de integración, transformemos el segmento de integración $[a, b]$ en el segmento $[-1, 1]$. Para esto hagamos

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t;$$

entonces para $t = -1$; $x = a$;

para $t = 1$, $x = b$.

Por consiguiente,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} \varphi(t)\,dt,$$

donde por $\varphi(t)$ está designada la función de t, que se halla bajo el signo de la integral. Así, la integración de una función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ siempre puede ser reducida a la integración de alguna otra función $\varphi(x)$ en el segmento $[-1, 1]$.

El problema se ha reducido a la elección de los números C_n, x_1, x_2, ..., x_n, en la fórmula

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = C_n[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)] \tag{6}$$

de modo que esta fórmula sea exacta para cualquier función $f(x)$ de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}. \tag{7}$$

Notemos que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1})\,dx =$$

$$= \begin{cases} 2\left(a_0 + \dfrac{a_2}{3} + \dfrac{a_4}{5} + \dfrac{a_6}{7} + \ldots + \dfrac{a_{n-1}}{n}\right), & \text{si } n \text{ es impar;} \\ 2\left(a_0 + \dfrac{a_2}{3} + \ldots + \dfrac{a_{n-2}}{n-1}\right), & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \tag{8}$$

Por otra parte, la suma del segundo miembro de la igualdad (6), en virtud de (7), es igual a

$$C_n[na_0 + a_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + a_2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1})]. \tag{9}$$

Igualando las expresiones (8) y (9), obtenemos la igualdad que debe ser válida para cualesquiera a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}.

$$2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \ldots\right) =$$

$$= C_n[na_0 + a_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + a_2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1})].$$

Igualando los coeficientes de $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ en los dos miembros de la igualdad, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} 2 = C_n n \quad \text{o} \quad C_n &= \frac{2}{n}; \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= 0; \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 &= \frac{2}{3C_n} = \frac{n}{3}; \\ x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 &= 0; \\ x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4 &= \frac{2}{5C_n} = \frac{n}{5}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Hallamos las abscisas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de las últimas n ecuaciones. Chébishev encontró estas soluciones para diferentes valores de n.

Número de ordenadas n	Coeficiente C_n	Valores de abscisas $x_1, x_2, \ldots, x_n$
3	$\frac{2}{3}$	$x_1 = -x_3 = 0,707107$ $x_2 = 0$
4	$\frac{1}{2}$	$x_1 = -x_4 = 0,794654$ $x_2 = -x_3 = 0,187592$
5	$\frac{2}{5}$	$x_1 = -x_5 = 0,832498$ $x_2 = -x_4 = 0,374541$ $x_3 = 0$
6	$\frac{1}{3}$	$x_1 = -x_6 = 0,866247$ $x_2 = -x_5 = 0,422519$ $x_3 = -x_4 = 0,266635$
7	$\frac{2}{7}$	$x_1 = -x_7 = 0,883862$ $x_2 = -x_6 = 0,529657$ $x_3 = -x_5 = 0,323912$ $x_4 = 0$
9	$\frac{2}{9}$	$x_1 = -x_9 = 0,911589$ $x_2 = -x_8 = 0,601019$ $x_3 = -x_7 = 0,528762$ $x_4 = -x_6 = 0,167906$ $x_5 = 0$

Abajo se dan las soluciones halladas por él para los casos en que el número n de puntos intermedios es igual a 3, 4, 5, 6, 7, 9.

Por consiguiente, el cálculo aproximado de la integral en el segmento $[-1, 1]$ se efectúa según la siguiente *fórmula de Chébishev*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)],$$

donde, n es uno de los números 3, 4, 5, 6, 7 ó 9, y $x_1, \ldots, x_n$, números representados en la tabla. No se puede tomar por n el número 8 u otros números superiores a 9, puesto que en este caso el sistema de ecuaciones (10) da las raíces imaginarias. Cuando los límites de integración de la integral dada son a y b, la fórmula de Chébishev toma la forma:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}[f(X_1) + f(X_2) + \ldots + f(X_n)],$$

donde $X_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, y los x_i tienen los valores indicados en la tabla.

Demos un ejemplo de cálculo de una integral con ayuda de la fórmula de Chébishev.

Ejemplo. Calcular $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x}$ $(= \ln 2)$.

Solución. Mediante la sustitución de variables, transformemos esta integral en otra que tiene -1 y 1 como *límites de integración*.

$$x = \frac{1+2}{2} + \frac{2-1}{2} t = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} = \frac{3+t}{2},$$

$$dx = \frac{dt}{2}.$$

Entonces,

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{3+t}.$$

Aplicando la fórmula de Chébishev calculemos la última integral, haciendo $n = 3$:

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \frac{2}{3}[f(0{,}707107) + f(0) + f(-0{,}707107)].$$

Puesto que

$$f(0,707107)=\frac{1}{3+0,707107}=\frac{1}{3,707107}=0,269752,$$

$$f(0)=\frac{1}{3+0}=0,333333,$$

$$f(-0,707107)=\frac{1}{3-0,707107}=\frac{1}{2,292893}=0,436130,$$

entonces:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dt}{3+t}=\frac{2}{3}(0,269752+0,333333+0,436130)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 1,039215=0,692810\approx 0,693.$$

Comparando este resultado con los resultados obtenidos según la fórmula de los rectángulos, de los trapecios y la de Simpson (véase el ejemplo del párrafo anterior), notamos que el resultado obtenido mediante la fórmula de Chébishev (con tres puntos intermedios) es más preciso y está más cerca del valor real de la integral que el resultado obtenido según la fórmula de los trapecios (con nueve puntos intermedios).

La teoría del cálculo aproximado de las integrales está desarrollada en las obras del académico A. N. Krilov (1863-1945).

§ 10. INTEGRALES DEPENDIENTES DE UN PARAMETRO

Derivación de las integrales dependientes de un parámetro.

Sea la integral

$$I(\alpha)=\int_{a}^{b} f(x,\ \alpha)\,dx, \tag{1}$$

en la que el integrando depende de un cierto parámetro α. Si el parámetro α varía, el valor de la integral definida variará también. Así, la integral definida es una función de α; por esto podemos designarla por $I(\alpha)$.

1. Supongamos que $f(x,\ \alpha)$ y $f'_\alpha(x,\ \alpha)$ son funciones continuas en las que

$$c\leqslant\alpha\leqslant d \text{ y } a\leqslant x\leqslant b. \tag{2}$$

Hallemos la derivada de la integral respecto al parámetro α:

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=I'_\alpha(\alpha).$$

Para hallar esta derivada notemos

$$I(\alpha+\Delta\alpha)=\int_{a}^{b} f(x,\ \alpha+\Delta\alpha)\,dx$$

y, por tanto,

$$I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)=\int_a^b f(x,\ \alpha+\Delta\alpha)\,dx-\int_a^b f(x,\ \alpha)\,dx=$$

$$=\int_a^b [f(x,\ \alpha+\Delta\alpha)-f(x,\ \alpha)]\,dx;$$

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b \frac{f(x,\ \alpha+\Delta\alpha)-f(x,\ \alpha)}{\Delta\alpha}\,dx.$$

Aplicando el teorema de Lagrange al integrando, tenemos:

$$\frac{f(x,\ \alpha+\Delta\alpha)-f(x,\ \alpha)}{\Delta\alpha}=f'_\alpha(x,\ \alpha+\theta\,\Delta\alpha),$$

donde $0<\theta<1$.

Puesto que $f'_\alpha(x,\ \alpha)$ es continua en el dominio cerrado (2), entonces:

$$f'_\alpha(x,\ \alpha+\theta\,\Delta\alpha)=f'_\alpha(x,\ \alpha)+\varepsilon,$$

donde la magnitud ε que depende de x, α, $\Delta\alpha$, tiende a cero, cuando $\Delta\alpha\to 0$.

De tal modo:

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b [f'_\alpha(x,\ \alpha)+\varepsilon]\,dx=\int_a^b f'_\alpha(x,\ \alpha)\,dx+\int_a^b \varepsilon\,dx.$$

Pasando al límite para $\Delta\alpha\to 0$, obtenemos *):

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=I'_\alpha(\alpha)=\int_a^b f'_\alpha(x,\ \alpha)\,dx$$

o

$$\left[\int_a^b f(x,\ \alpha)\,dx\right]'_\alpha=\int_a^b f'_\alpha(x,\ \alpha)\,dx.$$

La última fórmula se llama *fórmula de Leibniz.*

---

*) El integrando en la integral $\int_a^b \varepsilon d\alpha$ tiende a cero para $\Delta\alpha\to 0$. Del hecho de que el integrando tiende a cero en cada punto, no siempre se deduce que la integral también tiende a cero. Sin embargo, en el caso dado, $\int_a^b \varepsilon dx$ tiende a cero para $\Delta\alpha\to 0$, lo que admitimos aquí sin demostración.

2. **Supongamos ahora que en la integral (1) los límites de integración a y b son funciones de α:**

$$I(\alpha)=\Phi[\alpha,\ a(\alpha),\ b(\alpha)]=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\ \alpha)\,dx. \qquad (1')$$

$\Phi[\alpha,\ a(\alpha),\ b(\alpha)]$ es una función compleja de α, siendo a y b los argumentos intermedios. Para hallar la derivada de $I(\alpha)$, apliquemos la regla de derivación de una función compleja de varias variables (véase § 10, cap. VIII):

$$I'(\alpha)=\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial a}\frac{da}{d\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial b}\frac{db}{d\alpha}. \qquad (3)$$

En virtud del teorema sobre la derivación de una integral definida respecto a su límite superior variable (véase la fórmula (1) § 4), obtenemos:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b}=\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x,\ \alpha)\,dx=f[b(\alpha),\ \alpha],$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x,\ \alpha)\,dx=-\frac{\partial}{\partial a}\int_b^a f(x,\ \alpha)\,dx=-f[a(\alpha),\ \alpha].$$

Finalmente para calcular $\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}$ apliquemos la fórmula de Leibniz, obtenida anteriormente:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}=\int_a^b f'_\alpha(x,\ \alpha)\,dx.$$

Introduciendo en la fórmula (3) las expresiones obtenidas de las derivadas, tenemos:

$$I'_\alpha(\alpha)=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x,\ \alpha)\,dx+f[b(\alpha),\ \alpha]\frac{db}{d\alpha}-f[a(\alpha),\ \alpha]\frac{da}{d\alpha}. \qquad (4)$$

La fórmula de Leibniz permite calcular ciertas integrales definidas.

Ejemplo. Calcular la integral

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\,dx.$$

Solución. Notemos, que no se puede calcular directamente esta integral, puesto que la primitiva de la función $e^{-x}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}$ no se expresa mediante funciones elementales. Para calcular esta integral, considerémosla como función de un parámetro α:

$$I(\alpha)=\int_0^{\infty} e^{-x}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\,dx.$$

Entonces, su derivada respecto a α se halla según la fórmula de Leibniz*):

$$I'(\alpha)=\int_0^{\infty}\left[e^{-x}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\right]'_{\alpha}dx=\int_0^{\infty} e^{-x}\cos\alpha x\,dx.$$

La última integral se calcula fácilmente con ayuda de las funciones elementales y es igual a $\frac{1}{1+\alpha^2}$. Por eso

$$I'(\alpha)=\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Integrando la identidad obtenida, hallamos $I(\alpha)$:

$$I(\alpha)=\operatorname{arctg}\alpha+C. \tag{5}$$

Ahora falta determinar C. Para esto notemos que

$$I(0)=\int_0^{\infty} e^{-x}\frac{\operatorname{sen}0x}{x}\,dx=\int_0^{\infty}0\,dx=0.$$

Además, $\operatorname{arctg}0=0$.
Poniendo en la igualdad (5) $\alpha=0$, obtenemos:

$$I(0)=\operatorname{arctg}0+C,$$

de donde $C=0$. Por consiguiente, para todo valor de α se verifica la igualdad

$$I(\alpha)=\operatorname{arctg}\alpha,$$

es decir,

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\,dx=\operatorname{arctg}\alpha.$$

---

*) La fórmula de Leibniz se ha obtenido en la suposición de que los límites de integración a y b son finitos. En este caso la fórmula de Leibniz también es válida, aunque uno de los límites de integración es infinito.

§ 11. INTEGRACIÓN DE UNA FUNCIÓN COMPLEJA DE UNA VARIABLE REAL

En el § 4, cap. VII, hemos determinado una función compleja de la variable real x:

$$\tilde{f}(x) = u(x) + iv(x) \tag{1}$$

y su derivada:

$$\tilde{f}'(x) = u'(x) + iv'(x). \tag{2}$$

Definición. La función $\tilde{F}(x) = U(x) + iV(x)$ se llama primitiva de una función compleja de la variable real x, si

$$\tilde{F}'(x) = \tilde{f}(x), \tag{3}$$

es decir, si:

$$U'(x) + iV'(x) = u(x) + iv(x) \tag{4}$$

De la igualdad (4) se deduce:

$$U'(x) = u(x)$$
$$V'(x) = v(x),$$

es decir, $U(x)$ es la primitiva para $u(x)$, y $V(x)$ es la primitiva para $v(x)$.

De la definición y la última observación se deduce que, si $\tilde{F}(x) = U(x) + iV(x)$ es la primitiva para $\tilde{f}(x)$, entonces la primitiva cualquiera para $\tilde{f}(x)$ tiene la forma $\tilde{F}(x) + C$, donde C es una constante compleja arbitraria.

La expresión $\tilde{F}(x) + C$ se llama integral definida de una función compleja de la variable real y se escribe:

$$\int \tilde{f}(x)\,dx = \int u(x)\,dx + i\int v(x)\,dx = \tilde{F}(x) + C. \tag{5}$$

La integral definida de una función compleja de la variable real se determina del modo siguiente:

$$\text{si } \tilde{f}(x) = u(x) + iv(x),$$

entonces:

$$\int_a^b \tilde{f}(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx. \tag{6}$$

Esta definición no contradice, sino que concuerda con la definición de la integral definida como límite de una suma.

Ejercicios para el capítulo XI

1. Calcular las integrales definidas, considerándolas como límites de la suma integral s_n.

$$\int_a^b x^2\,dx.$$

Indicación: Divídase el segmento $[a, b]$ en n partes mediante los puntos $x_i = aq^i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$, donde $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$. *Respuesta:* $\frac{b^3 - a^3}{3}$. 2. $\int_a^b \frac{dx}{x}$, donde $0 < a < b$. *Respuesta:* $\ln\frac{b}{a}$.

Indicación. Dividir el segmento $[a, b]$ como en el ejemplo anterior.

3. $\int_a^b \sqrt{x}\,dx$. *Respuesta:* $\frac{2}{3}(b^{3/2} - a^{3/2})$.

Indicación: Véase el ejemplo anterior.

4. $\int_a^b \operatorname{sen} x\,dx$. *Respuesta:* $\cos a - \cos b$.

Indicación. Establézcase previamente la identidad siguiente: $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen}(a+h) + \operatorname{sen}(a+2h) + \ldots + \operatorname{sen}[a+(n-1)h] = \dfrac{\cos\left(a+\frac{h}{2}\right) - \cos\left(a+nh-\frac{h}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\frac{h}{2}}$, para esto es preciso multiplicar y dividir todos los términos del primer miembro por $\operatorname{sen}\frac{h}{2}$ y sustituir el producto de senos por la diferencia de cosenos.

5. $\int_a^b \cos x\,dx$. *Respuesta:* $\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a$.

Utilizando la fórmula de Newton-Leibniz, calcular las integrales definidas:

6. $\int_0^1 x^4\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{5}$. 7. $\int_0^1 e^x\,dx$. *Resp.* $e-1$. 8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx$. *Resp.* 1.

9. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. *Resp.* $\frac{\pi}{4}$. 10. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Resp.* $\frac{\pi}{4}$. 11. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\,dx$. *Resp.* $\ln 2$. 12. $\int_1^e \frac{dx}{x}$. *Resp.* 1. 13. $\int_1^x \frac{dx}{x}$. *Resp.* $\ln x$. 14. $\int_0^x \operatorname{sen} x\,dx$. *Resp.* $2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$.

15. $\int\limits_{\sqrt[3]{a}}^{x} x^2\,dx$. *Resp.* $\frac{x^3-a}{3}$. 16. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{2x-1}$. *Res.* $\ln(2z-1)$. 17. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$. *Resp.* $\frac{\pi}{4}$. 18. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\,dx$. *Resp.* $\frac{\pi}{4}$.

Calcular los valores de las integrales siguientes, empleando las sustituciones indicadas de variables:

19. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx$, $\cos x = t$. *Resp.* $\frac{1}{3}$. 20. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. *Resp.* $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. 21. $\int\limits_{1}^{4} \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}$, $2+4x=t^2$. *Resp.* $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 22. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, $x=\operatorname{tg} t$. *Resp.* $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$. 23. $\int\limits_{1}^{5} \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$, $x-1=t^2$. *Resp.* $2(2-\operatorname{arctg} 2)$. 24. $\int\limits_{3}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{z\sqrt{z^2+1}}$, $z=\frac{1}{x}$. *Resp.* $\ln\frac{3}{2}$. 25. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{6-5\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen}^2\varphi}$, $\operatorname{sen}\varphi=t$. *Resp.* $\ln\frac{4}{3}$.

Demostrar que 26. $\int\limits_{0}^{1} x^m(1-x)^n\,dx=\int\limits_{0}^{1} x^n(1-x)^m\,dx\ (m>0,\ n>0)$.

27. $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx=\int\limits_{a}^{b} f(a+b-x)\,dx$. 28. $\int\limits_{0}^{a} f(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{a} f(x^2)\,dx$.

Calcular las integrales impropias siguientes:

29. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Resp.* 1. 30. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx$. *Resp.* 1. 31. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}$. *Resp.* $\frac{\pi}{2a}\ (a>0)$. 32. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Resp.* $\frac{\pi}{2}$. 33. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^5}$. *Resp.* $\frac{1}{4}$. 34. $\int\limits_{0}^{1} \ln x\,dx$. *Resp.* -1. 35. $\int\limits_{0}^{\infty} x \operatorname{sen} x\,dx$. *Resp.* La integral diverge. 36. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. *Resp.* La integral diverge. 37. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$. *Resp.* π. 38. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. *Resp.* $\frac{3}{2}$. 39. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^3}$.

Resp. La integral diverge. 40. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. *Resp.* $\frac{\pi}{2}$. 41. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4}$. *Resp.* La integral diverge. 42. $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-ax}\operatorname{sen} bx\,dx\ (a>0)$. *Resp.* $\frac{b}{a^2-b^2}$. 43. $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx\ (a>0)$. *Resp.* $\frac{a}{a^2+b^2}$.

Calcular los valores aproximados de las integrales:

44. $\ln 5=\int\limits_{1}^{5}\frac{dx}{x}$, según la fórmula de los trapecios y la de Simpson ($n=12$). *Respuesta*: 1,6182 (según la fórmula de los trapecios); 1,6098 (según la fórmula de Simpson). 45. $\int\limits_{1}^{11}x^3\,dx$, según la fórmula de los trapecios y la de Simpson ($n=10$). *Respuesta*: 3690; 3660. 46. $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{1-x^3}\,dx$, según la fórmula de los trapecios ($n=6$). *Respuesta*: 0,8109. 47. $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{2x-1}$, según la fórmula de Simpson ($n=4$). *Respuesta*: 0,8111. 48. $\int\limits_{1}^{10}\log_{10}x\,dx$, según la fórmula de los trapecios y la de Simpson ($n=10$). *Respuesta*: 6,0656; 6,0896.

49. Calcular el valor de π, partiendo de la correlación $\frac{\pi}{4}=\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$ aplicando la fórmula de Simpson ($n=10$). *Respuesta*: 3,14159.

50. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$, según la fórmula de Simpson ($n=10$). *Respuesta*: 1,371.

51. Partiendo de la igualdad $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\alpha x}\,dx=\frac{1}{\alpha}$, donde $\alpha>0$, hallar el valor de la integral $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-x}x^n\,dx$, para $n>0$. *Respuesta*: $n!$

52. Partiendo de la igualdad $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}$, hallar el valor de la integral $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$. *Respuesta*: $\frac{\pi}{2}\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}$.

53. Calcular la integral $\int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}\,dx$. *Resp.* $\ln(1+\alpha)$ $(\alpha > -1)$.

54. Utilizando la igualdad $\int_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}$, calcular la integral $\int_0^1 x^{n-1}(\ln x)^k\,dx$. *Resp.*: $(-1)^k \frac{k!}{n^{k+1}}$.

CAPITULO XII

APLICACIONES GEOMETRICAS Y MECANICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

§ 1. CALCULO DE AREAS EN COORDENADAS RECTANGULARES

Si la función $f(x) \geqslant 0$ está en el segmento $[a, b]$, entonces, como ya es sabido (§ 2, cap. XI), el área del trapecio curvilíneo limitado por la curva $y = f(x)$, el eje Ox y las rectas $x = a$ y $x = b$ (fig. 210) es igual a:

$$Q = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Si $f(x) \leqslant 0$ en el segmento $[a, b]$, la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es también $\leqslant 0$. Su valor absoluto es igual al área Q del trapecio curvilíneo correspondiente:

$$-Q = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Si $f(x)$ cambia de signo un número finito de veces en el segmento $[a, b]$ entonces, podemos descomponer la integral a lo largo de todo

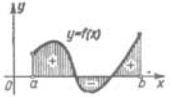

Fig. 228

el segmento $[a, b]$ en la suma de integrales en los segmentos parciales. La integral es positiva en los segmentos donde $f(x) \geqslant 0$, y negaeiva en los segmentos donde $f(x) \leqslant 0$. La integral a lo largo de todo tl segmento representa la diferencia de las áreas dispuestas por arriba y por debajo del eje Ox (fig. 228). Para obtener ordinariamente la suma de las áreas, es preciso hallar la suma de los valores absolutos de las integrales en los segmentos parciales indicados o calcular la integral:

$$Q=\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Ejemplo 1. Calcular el área Q, limitada por la sinusoide $y=\operatorname{sen} x$ y el eje Ox, para $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ (fig. 229).

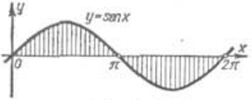

Fig. 229

Solución. Puesto que $\operatorname{sen} x\geqslant 0$ para $0\leqslant x\leqslant\pi$, y $\operatorname{sen} x\leqslant 0$ para $\pi<x\leqslant 2\pi$ entonces:

$$Q=\int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\,dx+\left|\int_{\pi}^{2\pi}\operatorname{sen} x\,dx\right|=\int_0^{2\pi}|\operatorname{sen} x|\,dx,$$

$$\int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(\cos\pi-\cos 0)=-(-1-1)=2,$$

$$\int_{\pi}^{2\pi}\operatorname{sen} x\,dx=-\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=-(\cos 2\pi-\cos\pi)=-2.$$

Por tanto,

$$Q=2+|-2|=4.$$

Si es preciso calcular el área limitada por las curvas $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ y las ordenadas $x=a$, $x=b$, a condición de que $f_1(x)\geqslant f_2(x)$ obtenemos (fig. 230):

$$Q=\int_a^b f_1(x)\,dx-\int_a^b f_2(x)\,dx=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,dx. \qquad (2)$$

Ejemplo 2. Calcular el área limitada por las curvas (fig. 231)

$$y=\sqrt{x} \text{ e } y=x^2.$$

Solución. Hallemos los puntos de intersección de las curvas: $\sqrt{x}=x^2$; $x=x^4$, de donde: $x_1=0$, $x_2=1$.

Por tanto,

$$Q=\int_0^1\sqrt{x}\,dx-\int_0^1 x^2dx=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Calculemos ahora el área de un trapecio curvilíneo limitada por la curva dada por ecuaciones paramétricas (fig. 232):

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{3}$$

donde:

$$\alpha \leqslant t \leqslant \beta, \quad \text{y} \quad \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b.$$

Supongamos que las ecuaciones (3) definen cierta función $y = f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y, por tanto, el área del trapecio cur-

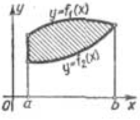

Fig. 230

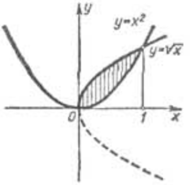

Fig. 231

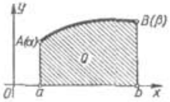

Fig. 232

vilíneo puede ser calculada según la fórmula:

$$Q = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b y\, dx.$$

Sustituyamos en esta integral la variable: $x = \varphi(t)$; $dx = \varphi'(t)\, dt$. En virtud de las ecuaciones (3) obtenemos: $y = f(x) = f[\varphi(t)] = \psi(t)$. Por consiguiente,

$$Q = \int_\alpha^\beta \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt. \tag{4}$$

Esta es la fórmula para calcular el área de un trapecio curvilíneo, limitada por una curva dada en coordenadas paramétricas.

Ejemplo 3. Calcular el área de un campo limitado por la elipse:

$$x = a\cos t, \quad y = b \operatorname{sen} t.$$

Solución. *Calculemos el área de la mitad superior de la elipse y dupliquémosla.* La variable x varía desde $-a$ hasta $+a$, por tanto, t varía desde π hasta 0, $Q = 2\int_\pi^0 (b \operatorname{sen} t)(-a \operatorname{sen} t\, dt) = -2ab\int_\pi^0 \operatorname{sen}^2 t\, dt =$

$$= 2ab\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 t\, dt = 2ab\int_0^\pi \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt = 2ab\left[\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right]_0^\pi = \pi ab.$$

Ejemplo 4. Calcular el área limitada por el eje Ox y un arco de la cicloide $x=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a(1-\cos t)$.

Solución. Puesto que t varía desde 0 hasta 2π, x varía desde 0 hasta $2\pi a$. Según la fórmula (4), tenemos:

$$Q=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=$$

$$=a^2\left[\int_0^{2\pi}dt-2\int_0^{2\pi}\cos t\,dt+\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt\right];$$

$$\int_0^{2\pi}dt=2\pi;\quad \int_0^{2\pi}\cos t\,dt=0;\quad \int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\pi.$$

Finalmente obtenemos

$$Q=a^2(2\pi+\pi)=3\pi a^2.$$

§ 2. AREA DE UN SECTOR CURVILINEO EN COORDENADAS POLARES

Sea $\rho=f(\theta)$ la ecuación de una curva en coordenadas polares, donde $f(\theta)$ es una función continua para $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$.

Determinemos el área del sector OAB, limitada por la curva $\rho=f(\theta)$ y los radios vectores $\theta=\alpha$ y $\theta=\beta$.

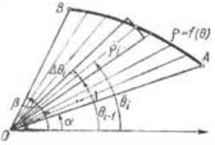

Fig. 233

Dividamos el área dada en n partes mediante los radios vectores $\theta_0=\alpha$, $\theta=\theta_1$, . . ., $\theta_n=\beta$. Designemos por $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$, . . ., $\Delta\theta_n$ los ángulos formados por los radios vectores trazados (fig. 233).

Sea $\bar\rho_i$ la longitud de un radio vector correspondiente a un ángulo $\bar\theta_i$ cualquiera, comprendido entre θ_{i-1} y θ_i.

Examinemos el sector circular de radio $\bar\rho_i$ y ángulo central $\Delta\theta_i$. Su área es igual a:

$$\Delta Q_i=\frac{1}{2}\bar\rho_i^2\,\Delta\theta_i.$$

La suma

$$Q_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i^2 \, \Delta\theta_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [f(\bar{\theta}_i)]^2 \, \Delta\theta_i$$

da el área del sector «escalonado». Puesto que la suma indicada es una suma integral para la función $\rho^2 = [f(\theta)]^2$ en el segmento $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$,

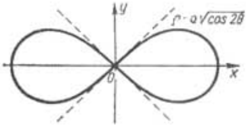

Fig. 234

su límite para máx $\Delta\theta_i \to 0$ es la integral definida

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 \, d\theta.$$

Esta integral no depende de un radio vector $\bar{\rho}_i$ elegido dentro del ángulo $\Delta\theta_i$. Es natural, considerar este límite como el área buscada de la figura *).

Así, el área del sector OAB es igual a:

$$Q = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 \, d\theta \tag{1}$$

ó

$$Q = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \, d\theta. \tag{1'}$$

Ejemplo. Calcular el área limitada por la lemniscata (fig. 234).

$$\rho = a \sqrt{\cos 2\theta}.$$

---

*) Se puede demostrar que esta definición del área no contradice a la dada anteriormente: en otras palabras, calculando el área del sector curvilíneo mediante los trapecios curvilíneos, obtenemos el mismo resultado.

Solución. El radio vector describe la cuarta parte del área buscada cuando θ varía desde 0 hasta $\pi/4$:

$$\frac{1}{4}Q=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4}\rho^2\,d\theta=\frac{1}{2}a^2\int_{0}^{\pi/4}\cos 2\theta\,d\theta=\frac{a^2}{2}\,\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\Big|_{0}^{\pi/4}=\frac{a^2}{2},$$

por tanto, $Q=a^2$.

§ 3. LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA

1. Longitud de un arco de curva en coordenadas rectangulares. Sea $y=f(x)$ la ecuación de una curva plana en coordenadas rectangulares.

Encontremos la longitud del arco AB de esta curva, comprendida entre las rectas verticales $x=a$ y $x=b$ (fig. 235).

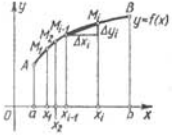

Fig. 235

En el capítulo VI (§ 1) hemos dado la definición de la longitud de un arco. Recordémosla. Tomemos en el arco AB los puntos A, M_1, M_2, ..., M_i, ..., B cuyas abscisas son, respectivamente, $x_0=a$, x_1, x_2, ..., x_i, ..., $b=x_n$. Tracemos las cuerdas AM_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}B$, cuyas longitudes designamos respectivamente por Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n. Obtenemos una línea quebrada AM_1M_2 ... ... $M_{n-1}B$ inscrita en el arco $\widehat{AB}$. La longitud de esta quebrada es igual a

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i.$$

El límite al cual tiende la longitud de la quebrada inscrita, cuando la longitud de su eslabón más grande tiende a cero, se llama *longitud s del arco AB*

$$s=\lim_{\text{máx}\,\Delta s_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i. \tag{1}$$

Demostremos, ahora, que si la función $f(x)$ y su derivada $f'(x)$ son continuas en el segmento $a\leqslant x\leqslant b$, este límite existe. Al mismo tiempo obtenemos el método para calcular la longitud de un arco.

Introduzcamos la designación:

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

Entonces:

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i.$$

Según el teorema de Lagrange tenemos:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),$$

donde $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Por consiguiente,

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i.$$

De este modo, la longitud de la línea quebrada inscrita es

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i.$$

Según la hipótesis $f'(x)$ es continua, por consiguiente, la función $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ también es continua. Por eso, la suma integral escrita tiene un límite igual a la integral definida:

$$s = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Así, hemos obtenido la fórmula para calcular la longitud de un arco:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \qquad (2)$$

Observación. Partiendo de la última fórmula, se puede obtener la derivada de la longitud del arco respecto a la abscisa. Considerando que el límite superior de integración es variable y designándolo por x (sin cambiar la variable de integración), obtenemos la longitud del arco s en función de x:

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Derivando esta integral respecto al límite superior, obtenemos:

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{3}$$

Hemos obtenido ya esta fórmula en el § 1, cap. VI, partiendo de otras hipótesis.

Ejemplo 1. Hallar la longitud de la circunferencia

$$x^2+y^2=r^2.$$

Solución. Calculemos primero la longitud de la cuarta parte de la circunferencia situada en el primer cuadrante. La ecuación del arco AB es:

$$y=\sqrt{r^2-x^2}, \text{ de donde: } \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{4}s=\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=r\arcsen\frac{x}{r}\Big|_0^r=r\frac{\pi}{2}.$$

La longitud de toda la circunferencia es $s=2\pi r$.

Hallemos ahora la longitud de un arco de curva, en el caso en que la curva está dada por ecuaciones paramétricas:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta), \tag{4}$$

donde, $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son funciones continuas que tienen derivadas continuas, sin que $\varphi'(t)$ se anula en el segmento dado.

En este caso, las ecuaciones (4) determinan cierta función $y=f(x)$ continua, que tiene también derivada continua:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Sea $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$. Realicemos la sustitución en la integral (2)

$$x=\varphi(t),\quad dx=\varphi'(t)\,dt,$$

obtenemos:

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2}\,\varphi'(t)\,dt,$$

o, en definitiva:

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt. \tag{5}$$

Observación 2. Se puede demostrar que la fórmula (5) conserva su validez también para las curvas que son cortadas por rectas verticales en más de un punto (en particular, para las curvas cerradas) a condición de que ambas derivadas $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$ sean continuas en todos los puntos de la curva.

Ejemplo 2. Calcular la longitud de la hipocicloide (astroide):

$$x=a\cos^3 t, \quad y=a\,\mathrm{sen}^3\, t.$$

Solución. Puesto que la curva es simétrica respecto a los dos ejes de coordenadas, calculemos, al principio, la longitud del segmento de esta curva dispuesta en el primer cuadrante. Hallamos:

$$\frac{dx}{dt}=-3a\cos^2 t\,\mathrm{sen}\, t, \quad \frac{dy}{dt}=3a\,\mathrm{sen}^2\, t\cos t.$$

El parámetro t variará desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$.

Por tanto,

$$\frac{1}{4}s=\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\cos^4 t\,\mathrm{sen}^2\, t+9a^2\,\mathrm{sen}^4\, t\cos^2 t}\,dt=3a\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^2 t\,\mathrm{sen}^2\, t}\,dt=$$

$$=3a\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}\, t\cos t\,dt=3a\left.\frac{\mathrm{sen}^2\, t}{2}\right|_0^{\pi/2}=\frac{3a}{2}; \quad s=6a.$$

Observación 3. Si tenemos una curva en el espacio, dada por ecuaciones paramétricas

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t), \tag{6}$$

donde, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ (véase § 1, cap. IX), la longitud de su arco se determina (igual que para un arco plano) como el límite al cual tiende la longitud de la línea quebrada inscrita, cuando la longitud de su eslabón más grande tienda a cero. Si las funciones $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ son continuas y tienen derivadas continuas en el segmento $[\alpha, \beta]$, entonces la curva tiene una longitud determinada (es decir, existe el límite indicado arriba para esta curva) que se calcula según la fórmula:

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,dt. \tag{7}$$

Admitamos el último resultado sin demostración.

Ejemplo 3. Calcular la longitud del arco de hélice $x=a\cos t$, $y=a\,\mathrm{sen}\, t$, $z=amt$, al variar t desde 0 hasta 2π.

Solución. De las ecuaciones dadas, hallamos:

$$dx=-a\,\mathrm{sen}\, t\,dt, \quad dy=a\cos t\,dt, \quad dz=am\,dt.$$

Poniendo estas expresiones en la fórmula (7), obtenemos:

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t+a^2\cos^2 t+a^2m^2}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+m^2}\,dt=2\pi a\sqrt{1+m^2}.$$

2. La longitud de un arco de curva en coordenadas polares. Sea

$$\rho=f(\theta) \tag{8}$$

la ecuación de una curva dada en coordenadas polares, donde ρ es el radio polar y θ es el ángulo polar.

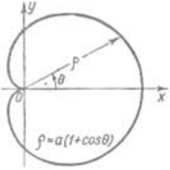

Fig. 236

Escribamos las fórmulas para pasar de coordenadas polares a cartesianas

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\operatorname{sen}\theta.$$

Al sustituir ρ por su expresión (8), en función de θ obtenemos las ecuaciones:

$$x=f(\theta)\cos\theta,\quad y=f(\theta)\operatorname{sen}\theta.$$

Estas ecuaciones se pueden considerar como las ecuaciones paramétricas de la curva y aplicar la fórmula (5) para el cálculo de la longitud del arco.

Hallemos, para esto, las derivadas de x e y respecto al parámetro θ:

$$\frac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\operatorname{sen}\theta;\qquad \frac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\operatorname{sen}\theta+f(\theta)\cos\theta.$$

Entonces,

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=[f'(\theta)]^2+[f(\theta)]^2=\rho'^2+\rho^2.$$

Por consiguiente,

$$s=\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\theta.$$

Ejemplo 4. Hallar la longitud de la cardioide

$$\rho = a(1+\cos\theta) \text{ (fig. 236)}.$$

Al variar el ángulo θ desde 0 hasta π, obtenemos la mitad de la longitud buscada. Aquí $\rho' = -a \operatorname{sen}\theta$. Por tanto,

$$s = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta =$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}\, d\theta = 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8a \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

Ejemplo 5. Calcular la longitud de la elipse

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\operatorname{sen} t \end{aligned}\right\} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

suponiendo que $a > b$.

Solución. Para el cálculo utilicemos la fórmula (5). Calculemos al principio la cuarta parte del arco, es decir, la longitud del arco que corresponde al cambio del parámetro desde $t = 0$ hasta $t = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{s}{4} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(1-\cos^2 t) + b^2\cos^2 t}\, dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2-b^2)\cos^2 t}\, dt =$$

$$= a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2 t}\, dt = a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\cos^2 t}\, dt,$$

donde, $k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} < 1$. Por lo tanto,

$$s = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\cos^2 t}\, dt.$$

Ahora nos queda solamente calcular la última integral. Pero como se sabe, esta integral no se expresa mediante las funciones elementales (véase § 16, cap. X) y se puede calcularla únicamente por medio de los métodos aproximados (por ejemplo, según la fórmula de Simpson).

En particular, si el semieje mayor de la elipse es igual a 5, y el semieje menor es igual a 4, entonces, $k = 3/5$; y la longitud de la elipse será $s = 4\cdot 5\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2\cos^2 t}\, dt.$

Calculando la última integral según la fórmula de Simpson $\left(\text{dividiendo el segmento } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ en cuatro partes}\right)$, obtenemos el valor aproximado de la integral:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{3}{5}\cos^2 t\, dt} \approx 1,298,$$

y, por consiguiente, la longitud del arco de toda la elipse es aproximadamente igual a:

$$s = \approx 25,96 \text{ unidades de longitud.}$$

§ 4. CALCULO DEL VOLUMEN DE UN CUERPO EN FUNCION DE LAS AREAS DE SECCIONES PARALELAS

Dado un cuerpo T, supongamos que se conoce el área de toda sección arbitraria de este cuerpo por un plano perpendicular al eje Ox (fig. 237). Este área depende de la posición del plano secante, es decir, es función de x:

$$Q = Q(x).$$

Supongamos que $Q(x)$ es una función continua de x, y determinemos el volumen del cuerpo dado.

Tracemos los planos $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2$, . . ., $x = x_n = b$.

Estos planos dividen el cuerpo en capas. En cada intervalo parcial $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$, elijamos un punto arbitrario ξ_i y para cada valor

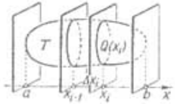

Fig. 237

de $i = 1, 2, \ldots, n$ construyamos un cuerpo cilíndrico cuya generatriz sea paralela al eje Ox, y la directriz represente el contorno de la sección del cuerpo T por el plano $x = \xi_i$.

El volumen de tal cilindro elemental, con el área de la base igual a $Q(\xi_i)$ $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$, y la altura Δx_i es igual a $Q(\xi_i)\,\Delta x_i$. El volumen de todos los cilindros es:

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\,\Delta x.$$

El límite de esta suma (si este límite existe), cuando máx $\Delta x_i \to \to 0$, se llama volumen del cuerpo dado:

$$v = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\, \Delta x_i.$$

Puesto que v_n representa, evidentemente, la suma integral para una función continua $Q(x)$ en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$, entonces el

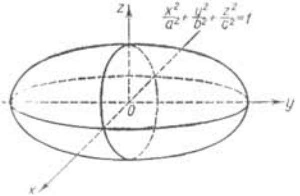

Fig. 238

límite indicado existe y se expresa por la integral definida:

$$v = \int_a^b Q(x)\, dx. \tag{1}$$

Ejemplo. Calcular el volumen de un elipsoide de tres ejes (fig. 238)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Solución. La sección del elipsoide cortado por un plano paralelo al plano Oyz que se encuentra a la distancia x de este último da una elipse

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}, \qquad \frac{y^2}{\left[b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2} + \frac{z^2}{\left[c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2} = 1,$$

sus semiejes son:

$$b_1 = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}; \quad c_1 = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Pero el área de tal elipse es igual a $\pi b_1 c_1$ (véase el ejemplo 3 § 2).

Por eso,

$$Q(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

De donde el volumen del elipsoide es igual a:

$$v = \pi bc \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

En particular, si $a = b = c$, el elipsoide se transforma en una esfera, y en este caso, obtenemos:

$$v = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

§ 5. VOLUMEN DE UN CUERPO DE REVOLUCION

Estudiemos el cuerpo de revolución engendrado por la rotación del trapecio curvilíneo $aABb$ alrededor del eje Ox. El trapecio está limitado por la curva $y = f(x)$, el eje Ox y las rectas $x = a$, $x = b$.

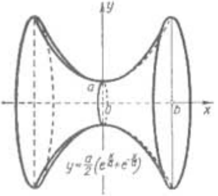

Fig. 239

En este caso, toda sección arbitraria del cuerpo, cortado por un plano perpendicular al eje de abscisas, es un círculo cuyo área es:

$$Q = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2.$$

Aplicando la fórmula general para el cálculo de los volúmenes [(1), § 4], obtenemos la fórmula para calcular el volumen del **cuerpo de revolución**:

$$v = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx.$$

Ejemplo. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la revolución de una catenaria

$$y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$$

alrededor del eje Ox, en el intervalo desde $x = 0$ hasta $x = b$ (fig. 239).

Solución.

$$v=\pi\frac{a^2}{4}\int_0^b\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2dx=\frac{\pi a^2}{4}\int_0^b\left(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}}\right)dx=$$

$$=\frac{\pi a^2}{4}\left[\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right]_0^b=\frac{\pi a^3}{8}\left(e^{\frac{2b}{a}}-e^{-\frac{2b}{a}}\right)+\frac{\pi a^2 b}{2}.$$

§ 6. AREA DE UN CUERPO DE REVOLUCION

Sea una superficie engendrada por la revolución de la curva $y=f(x)$ alrededor del eje Ox; hallemos el área de esta superficie en el intervalo $a\leqslant x\leqslant b$. Supongamos que la función $f(x)$ es continua y tiene derivada continua en todos los puntos del segmento $[a, b]$.

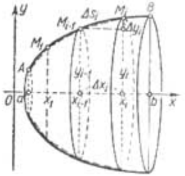

Fig. 240

Igual que en el § 3, tracemos las cuerdas AM_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}B$, cuyas longitudes designamos por Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n (fig. 240).

En su rotación cada cuerda de longitud Δs_i ($i=1, 2, \ldots n$) describe un cono truncado, cuya superficie ΔP_i es igual a

$$\Delta P_i=2\pi\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta s_i.$$

Pero,

$$\Delta s_i=\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i.$$

Aplicando el teorema de Lagrange, obtenemos:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=f'(\xi_i),\ \text{donde}\ x_{i-1}<\xi_i<x_i;$$

por consiguiente,

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i,$$

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i.$$

La superficie descrita por la línea quebrada es igual a la suma

$$P_n = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i,$$

o a la suma

$$P_n = \pi \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i, \tag{1}$$

que se extiende a todos los eslabones de la línea quebrada. El límite de esta suma, cuando el eslabón más grande de la línea quebrada Δs_i tiende a cero se *llama área de la superficie de revolución*.

La suma (1) no es una suma integral para la función

$$2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}, \tag{2}$$

puesto que en el sumando, correspondiente al segmento $[x_{i-1}, x_i]$, figuran unos cuantos puntos de este segmento: x_{i-1}, x_i, ξ_i. Sin embargo, se puede demostrar que el límite de la suma (1) es igual al de la suma integral para la función (2), es decir,

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i$$

ó

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \tag{3}$$

Ejemplo. Determinar la superficie del paraboloide, engendrada por la revolución alrededor del eje Ox de un arco de la parábola $y^2 = 2px$, correspondiente a la variación de x desde $x = 0$ hasta $x = a$:

$$y = \sqrt{2px}, \quad y' = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{2p}{4x}} = \sqrt{\frac{2x + p}{2x}}.$$

Solución. *Según la fórmula (3) obtenemos:*

$$P=2\pi\int_0^a\sqrt{2px}\sqrt{\frac{2x+p}{2x}}\,dx=2\pi\sqrt{p}\int_0^a\sqrt{2x+p}\,dx=$$

$$=2\pi\sqrt{p}\,\frac{2}{3}(2x+p)^{3/2}\frac{1}{2}\Big|_0^a=\frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2a+p)^{3/2}-p^{3/2}\right].$$

§ 7. CALCULO DEL TRABAJO CON AYUDA DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Supongamos que, bajo el efecto de una fuerza F, el punto material M se desplaza a lo largo de la recta Os, y la dirección de la fuerza coincide con la del movimiento. Es preciso determinar el trabajo producido por la fuerza F, para desplazar el punto M de la posición $s=a$ a la posición $s=b$.

1) Si la fuerza F es constante, el trabajo A se expresará como el producto de la fuerza F por el camino recorrido:

$$A=F(b-a).$$

2) Supongamos que la fuerza F varía continuamente en función de la posición del punto material, es decir, representa una función $F(s)$, continua en el segmento $a\leqslant s\leqslant b$.

Dividamos el segmento $[a, b]$ en n partes arbitrarias de longitudes

$$\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ \ldots,\ \Delta s_n.$$

Elijamos, ahora, en cada segmento parcial $[s_{i-1}, s_i]$ un punto arbitrario ξ_i, y sustituyamos el trabajo de la fuerza $F(s)$ en el camino Δs_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ por el producto

$$F(\xi_i)\,\Delta s_i.$$

Esto significa que dentro de los límites de cada segmento parcial admitimos la fuerza F como constante es decir, $F=F(\xi_i)$. En tal caso la expresión $F(\xi_i)\,\Delta s_i$, para Δs_i suficientemente pequeño, dará un valor aproximado del trabajo de la fuerza F en el camino Δs_i, y la suma

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}F(\xi_i)\,\Delta s_i$$

será la expresión aproximada del trabajo de la fuerza F en todo el segmento $[a, b]$.

Es evidente que A_n representa una suma integral formada para la función $F=F(s)$ en el segmento $[a, b]$. El límite de esta suma, para máx $(\Delta s_i)\to 0$, existe y expresa el trabajo de la fuerza $F(s)$

en el camino desde el punto $s = a$ hasta el $s = b$:

$$A = \int_a^b F(s)\, ds \tag{1}$$

Ejemplo 1. La compresión S de un muelle helicoidal es proporcional a la fuerza aplicada F. Calcular el trabajo de la fuerza F al comprimir el muelle 5 cm, si es preciso aplicar una fuerza de 1 kg para comprimirlo 1 cm (fig. 241).

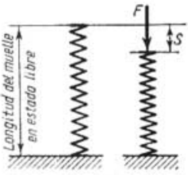

Fig. 241

Solución. Según la hipótesis, la fuerza F y el desplazamiento S están ligados por la dependencia $F = kS$, donde k es una constante. Expresemos S en metros, y F en kilogramos. Si $S = 0{,}01$ entonces $F = 1$, es decir, $1 = k \cdot 0{,}01$, de donde: $k = 100$, $F = 100S$.

En virtud de la fórmula (1) tenemos:

$$A = \int_0^{0,05} 100S\, dS = 100 \frac{S^2}{2} \Big|_0^{0,05} = 0{,}125 \text{ kgm}.$$

Ejemplo 2. La fuerza F, de repulsión entre dos cargas eléctricas e_1 y e_2 del mismo signo, dispuestas a una distancia r, se expresa mediante la fórmula

$$F = k \frac{e_1 e_2}{r^2}$$

donde k es una constante.

Determinar el trabajo de la fuerza F para desplazar la carga e_2 desde el punto A_1, que se encuentra a la distancia r_1 de la carga e_1, al punto A_2 que se halla a la distancia r_2 de e_1. Supongamos que la carga e_1 se encuentra en el punto A_0, tomado por origen.

Solución. Según la fórmula (1) tenemos:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} k \frac{e_1 e_2}{r^2}\, dr = -k e_1 e_2 \frac{1}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = k e_1 e_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Para $r_2 = \infty$, obtenemos:

$$A = \int_{r_1}^{\infty} \frac{k e_1 e_2}{r^2}\, dr = \frac{k e_1 e_2}{r_1}.$$

Para $e_2 = 1$, tenemos $A = k \frac{e_1}{r}$. La última magnitud se llama *potencial del campo* creado por la carga e_1.

§ 8. COORDENADAS DEL CENTRO DE GRAVEDAD

Sea dado en el plano Oxy un sistema de los puntos materiales

$$P_1(x_1, y_1);\quad P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n),$$

cuyas masas son $m_1, m_2, \ldots, m_n$, respectivamente.

Los productos $x_i m_i$ e $y_i m_i$ se llaman *momentos estáticos* de la masa m_1 respecto a los ejes Oy y Ox.

Designemos por x_c e y_c las coordenadas del centro de gravedad del sistema dado. Como es sabido por el curso de mecánica, las coordenadas del centro de gravedad del dicho sistema de puntos materiales se determinan por las fórmulas:

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \tag{1}$$

$$y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \ldots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \tag{2}$$

Utilicemos estas fórmulas, para buscar los centros de gravedad de diversos cuerpos y figuras.

1. Centro de gravedad de una curva plana. Supongamos que la ecuación $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ define una curva material AB.

Sea γ la densidad *) lineal de esta curva material. Dividamos la curva en n partes de longitudes $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. Las masas de estas partes serán iguales a los productos de sus longitudes por la densidad (constante): $\Delta m_i = \gamma\,\Delta s_i$. Tomemos un punto arbitrario de abscisa ξ_i en cada parte de la curva Δs_i. Representando cada parte de la curva Δs_i como un punto material $P_i\,[\xi_i, f(\xi_i)]$ de masa $\gamma\,\Delta s_i$, y, sustituyendo en las fórmulas (1) y (2) x_i e y_i respectivamente por los valores ξ_i y $f(\xi_i)$ así como m_i por el valor $\gamma\,\Delta s_i$ (la masa de la parte Δs_i), obtenemos las fórmulas aproximadas para determinar el centro de gravedad de la curva:

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \gamma \Delta s_i}{\sum \gamma \Delta s_i}, \qquad y_c \approx \frac{\sum f(\xi_i)\,\gamma \Delta s_i}{\sum \gamma \Delta s_i}.$$

---

*) Por densidad lineal se entiende la masa de la unidad de longitud de la curva dada. Suponemos que la densidad lineal es igual en todos los puntos de la curva.

Si la función $y = f(x)$ es continua igual que su derivada, las sumas del numerador y del denominador de cada fracción, para máx $\Delta s_i \to 0$, tienen sus límites iguales a los límites de las sumas integrales correspondientes. De este modo, las coordenadas del centro de gravedad de la curva se expresan por las integrales definidas:

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x\,ds}{\int\limits_a^b ds} = \frac{\int\limits_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}, \tag{1'}$$

$$y_c = \frac{\int\limits_a^b f(x)\,ds}{\int\limits_a^b ds} = \frac{\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}. \tag{2'}$$

Ejemplo 1. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, dispuesta por arriba del eje Ox.

Solución. Hallemos la abscisa del centro de gravedad:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

$$ds = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx, \quad x_c = \frac{a\int\limits_{-a}^{a} \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a\int\limits_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}} = \frac{-a\sqrt{a^2-x^2}\,\Big|_{-a}^{a}}{a \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}\Big|_{-a}^{a}} = \frac{0}{\pi a} = 0.$$

Determinemos, ahora, la ordenada del centro de gravedad:

$$y_c = \frac{\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx}{\pi a} = \frac{a\int\limits_{-a}^{a} dx}{\pi a} = \frac{2a^2}{\pi a} = \frac{2a}{\pi}.$$

2. Centro de gravedad de una figura plana. Supongamos que la figura dada, limitada por las curvas $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$, represente una figura plana material. Consideremos que la densidad superficial (es decir, la masa de una unidad de área de la superficie) es constante e igual a δ en toda la figura.

Dividamos la figura dada, mediante las líneas rectas $x = a$, $x = x_1, \ldots, x = x_n = b$ en bandas paralelas cuyas anchuras son $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.

La masa de cada banda será igual al producto de su área por la densidad δ. Al cambiar cada banda por un rectángulo (fig. 242) de base Δx_i, y altura $f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)$, donde $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, la masa de esta banda será, aproximadamente igual a:

$$\Delta m_i = \delta\,[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\,\Delta x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

El centro de gravedad de esta banda se encuentra, aproximadamente, en el centro del rectángulo correspondiente:

$$(x_i)_c = \xi_i; \ (y_i)_c = \frac{f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)}{2}.$$

Sustituyendo, ahora, cada banda por un punto material y localizando la masa de cada banda en su centro de gravedad encontremos

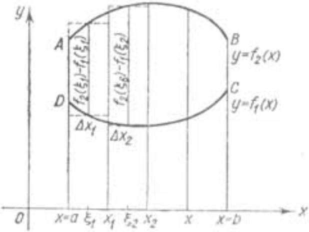

Fig. 242

el valor aproximado de las coordenadas del centro de gravedad de toda la figura (en virtud de las fórmulas (1) y (2)):

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \delta\,[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\,\Delta x_i}{\sum \delta\,[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\,\Delta x_i},$$

$$y_c \approx \frac{\frac{1}{2} \sum [f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)]\,\delta\,[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\,\Delta x_i}{\sum \delta\,[f_2(e_i) - f_1(e_i)]\,\Delta x_i}.$$

Pasando al límite para $\Delta x_i \to 0$, obtenemos las coordenadas exactas del centro de gravedad de la figura dada:

$$x_c = \frac{\int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)]\,dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx}; \quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f_2(x) + f_1(x)][f_2(x) - f_1(x)]\,dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx}.$$

Estas fórmulas se verifican para toda figura plana homogénea (es decir, aquélla que tiene densidad constante en todos los puntos).

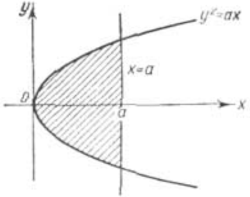

Fig. 243

Como vemos, las coordenadas del centro de gravedad no dependen de la densidad δ de la figura (δ se ha eliminado en el proceso de cálculo).

Ejemplo 2. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de un segmento de parábola $y^2 = ax$, cortada por la recta $x = a$ (fig. 243).

Solución. En el caso dado: $f_2(x) = \sqrt{ax}$, $f_1(x) = -\sqrt{ax}$; entonces:

$$x_c = \frac{2\int_0^a x\sqrt{ax}\,dx}{2\int_0^a \sqrt{ax}\,dx} = \frac{\frac{2}{5}\,2\sqrt{a}x^{5/2}\Big|_0^a}{2\sqrt{a}\,\frac{2}{3}\,x^{3/2}\Big|_0^a} = \frac{\frac{4}{5}\,a^3}{\frac{4}{3}\,a^2} = \frac{3}{5}\,a,$$

$y_c = 0$ (puesto que el segmento es simétrico respecto al eje Ox).

§ 9. CALCULO DEL MOMENTO DE INERCIA DE UNA LINEA, DE UN CIRCULO Y DE UN CILINDRO MEDIANTE LA INTEGRAL DEFINIDA

Sea dado en el plano XOY un sistema de puntos materiales

$$P_1(x_1, y_1),\ P_2(x_2, y_2),\ \ldots,\ P_n(x_n, y_n)$$

cuyas masas son $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Como es sabido por el curso de la mecánica, el momento de inercia del sistema de puntos materiales respecto al punto O se determina del modo siguiente:

$$I_0=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2)\,m_i \tag{1}$$

ó

$$I_0=\sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i, \tag{1'}$$

donde:

$$r_i=\sqrt{x_i^2+y_i^2}.$$

Igual que en § 8 la curva AB está dada por la ecuación $y=f(x)$ $a\leqslant x\leqslant l$.

Supongamos que esta curva AB es una línea material y que su densidad lineal es igual a γ. Dividamos otra vez más la línea en n partes de longitudes $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$ donde $\Delta s_i \sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}$. Las masas de estas partes son iguales a los productos de sus longitudes por la densidad:

$$\Delta m_i=\gamma\,(\Delta s_i,\ \Delta s_2,\ \ldots,\ \Delta s_n).$$

Tomemos un punto arbitrario de abscisa ξ_i en cada parte de la curva. La ordenada de este punto será $\eta_i=f(\xi_i)$.

El momento de inercia de la curva respecto al punto O, en virtud de la fórmula (1), aproximadamente será

$$I_0=\sum_{i=1}^{n}(\xi_i^2+\eta_i^2)\ \gamma\Delta s_i. \tag{2}$$

Si la función $y=f(x)$ y su derivada $f'(x)$ son continuas, entonces, para $\Delta s_i\to 0$, la suma (2) tiene límite. Este último, que se expresa mediante la integral definida, determina el momento de inercia de la línea material:

$$I_0=\gamma\int_0^{a}[x^2+f(x)^2]\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx. \tag{3}$$

Momento de inercia de una barra homogénea de longitud l respecto a su extremo. Hagamos coincidir la barra con el segmento del eje Ox $(0 \leqslant x \leqslant l)$ (fig. 243').

En este caso

$$\Delta s_i = \Delta x_i.$$

$$\Delta m_i = \gamma \Delta x_i, \qquad r_i^2 = x_i^2.$$

La fórmula (3) toma la forma:

$$I_{0l} = \gamma \int_0^l x^2\,dx = \gamma \frac{l^3}{3}. \tag{4}$$

Dada la masa M de la barra, entonces $\gamma = \frac{M}{l}$, y la fórmula (4) toma la forma:

$$I_{0l} = \frac{1}{3} M l^2. \tag{5}$$

Momento de inercia de un anillo de radio r respecto al centro. Puesto que los puntos del anillo se encuentran a la distancia r del

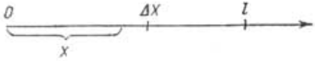

Fig. 243'

centro a, y la masa del anillo $m = 2\pi r\gamma$, el momento de inercia del anillo será:

$$I_{0a} = mr^2 = \gamma 2\pi r \cdot r^2 = \gamma 2\pi r^3. \tag{6}$$

Momento de inercia del círculo homogéneo de radio R respecto al centro. Sea δ la masa de una unidad del área del círculo. Dividamos el círculo en n anillos (fig. 243").

Examinemos uno de los anillos. Sea r_i su radio interior y $r_i + \Delta r_i$ el radio exterior. La masa Δm_i de este anillo, calculada con exactitud hasta infinitesimales de orden superior respecto a Δr_i será:

$$\Delta m_i = \delta \cdot 2\pi r_i \Delta r_i.$$

En virtud de la fórmula (6) el momento de inercia de su masa respecto al centro será, aproximadamente, igual a

$$(\Delta J_0)_i \approx \delta 2\pi r_i\, \Delta r_i \cdot r_i^2 = \delta 2\pi r_i^3\, \Delta r_i.$$

El momento de inercia de todo el círculo, como el sistema de anillos, se expresará mediante la fórmula:

$$J_0 \approx \sum_{i=1}^{n} \delta 2\pi r_i^3 \cdot \Delta r_i. \tag{7}$$

Pasando al límite, para máx $\Delta r_i \to 0$, obtendremos el momento

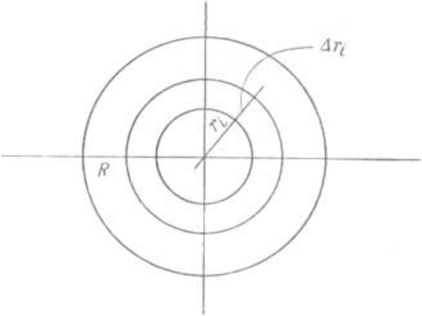

Fig. 243

de inercia del área del círculo respecto a su centro:

$$J_0 = \delta 2\pi \int_0^R r^3\,dr = \pi\delta \frac{R^4}{2}. \tag{8}$$

Dada la masa M del círculo, la densidad superficial δ es

$$\delta = \frac{M}{\pi R^2}.$$

Introduciendo este valor en (8), obtenemos en definitiva:

$$I_0 = M \frac{R^2}{2}. \tag{9}$$

Es evidente que si tenemos un cilindro recto de radio R y masa M, entonces su momento de inercia respecto al eje se expresará por la fórmula (9).

Ejercicios para el capítulo XII

Cálculo de áreas

1. Hallar el área de la figura limitada por las curvas $y^2=9x$, $y=3x$. *Respuesta*: $\frac{1}{2}$.
2. Hallar el área de la figura limitada por la hipérbola equilátera $xy=a^2$, eje Ox y rectas $x=a$, $b=2a$. *Respuesta*: $a^2 \ln 2$.
3. Hallar el área de la figura comprendida entre la curva $y=4-x^2$ y el eje Ox. *Respuesta*: $10\frac{2}{3}$.
4. Hallar el área de la figura limitada por la hipocicloide $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. *Respuesta*: $\frac{3}{8}\pi a^2$.
5. Hallar el área de la figura limitada por la catenaria $y=\frac{a}{2}\times$ $\times(e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{-x}{a}})$, ejes Ox y Oy, y la recta $x=a$. *Respuesta*: $\frac{a^2}{2e}(e^2-1)$.
6. Hallar el área de la figura limitada por la curva $y=x^3$, la recta $y=8$, y el eje Oy. *Respuesta*: 12.
7. Hallar el área del campo limitado por una semionda de la senoide y el eje de abscisas. *Respuesta*: 2.
8. Hallar el área del campo comprendido entre las parábolas $y^2=2px$, $x^2=2py$. *Respuesta*: $\frac{4}{3}p^2$.
9. Hallar el área total de la figura limitada por las curvas: $y=x^3$, $y=2x$, $y=x$. *Respuesta*: $\frac{3}{2}$.
10. Hallar el área del campo limitado por un arco de la cicloide $x=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a(1-\cos t)$, y el eje de abscisas. *Respuesta*: $3\pi a^2$.
11. Hallar el área de la figura limitada por la hipocicloide: $x=a\cos^3 t$, $y=a\operatorname{sen}^3 t$. *Respuesta*: $\frac{3}{8}\pi a^2$.
12. Hallar el área total del campo limitado por la lemniscata $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$. *Respuesta*: a^2.
13. Calcular el área del campo limitado por un lazo de la curva $\rho=a\operatorname{sen} 2\varphi$. *Respuesta*: $\frac{1}{8}\pi a^2$.
14. Calcular el área total del campo limitado por la cardioide $\rho=a(1-\cos\varphi)$. *Respuesta*: $\frac{3}{2}\pi a^2$.
15. Hallar el área del campo limitado por la curva $\rho=a\cos\varphi$. *Respuesta*: $\frac{\pi a^2}{4}$.
16. Hallar el área del campo limitado por la curva $\rho=a\cos 2\varphi$. *Respuesta*: $\frac{\pi a^2}{2}$.
17. Hallar el área del campo limitado por la curva $\rho=\cos 3\varphi$. *Respuesta*: $\frac{\pi}{4}$.

18. Hallar el área del campo limitado por la curva $\rho = \cos 4\varphi$. *Respuesta*: $\frac{\pi a^2}{2}$.

Cálculo de volúmenes

19. La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gira alrededor del eje Ox. Hallar el volumen del cuerpo de revolución. *Respuesta*: $\frac{4}{3}\pi ab^2$.

20. El segmento de la recta que une el origen de coordenadas con el punto (a, b) gira alrededor del eje Oy. Hallar el volumen del cono obtenido. *Respuesta*: $\frac{1}{3}\pi a^2 b$.

21. Hallar el volumen de un toro engendrado por la revolución del círculo $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ alrededor del eje Ox (suponer que $b \geqslant a$). *Respuesta*: $2\pi^2 a^2 b$.

22. El área limitada por las líneas $y^2 = 2px$, y $x = a$ gira alrededor del eje Ox. Hallar el volumen del cuerpo de revolución. *Respuesta*: $\pi p a^2$.

23. La figura limitada por la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ gira alrededor del eje Ox. Hallar el volumen del cuerpo de revolución. *Respuesta*: $\frac{32\pi a^3}{105}$.

24. La figura limitada por un arco de la senoide $y = \operatorname{sen} x$, y el eje Ox gira alrededor del eje Ox. Hallar el volumen del cuerpo de revolución. *Respuesta*: $\frac{\pi^2}{2}$.

25. La figura, limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x = 4$, gira alrededor del eje Ox. Hallar el volumen del cuerpo de revolución. *Respuesta*: 32π.

26. La figura, limitada por la curva $y = xe^x$ y las rectas $y = 0$, $x = 1$, gira alrededor del eje Ox. Hallar el volumen del cuerpo de revolución. *Respuesta*: $\frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$.

27. La figura, limitada por un arco de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ y el eje Ox, gira alrededor del eje Ox. Hallar el volumen del cuerpo de revolución. *Respuesta*: $5\pi^2 a^3$.

28. La misma figura (del problema 27) gira alrededor del eje Oy. Hallar el volumen del cuerpo de revolución. *Respuesta*: $6\pi^3 a^3$.

29. La misma figura (del problema 27) gira alrededor de una recta que es paralela al eje Oy y pasa por el vértice de la cicloide. Hallar el volumen del cuerpo de revolución. *Respuesta*: $\frac{\pi a^3}{6}(9\pi^2 - 16)$.

30. La misma figura (del problema 27) gira alrededor de una recta paralela al eje Ox y que pasa por el vértice de la cicloide. Hallar el volumen del cuerpo de revolución. *Respuesta*: $7\pi^2 a^3$.

31. Un cilindro de radio R está cortado por un plano que pasa por un diámetro de la base bajo el ángulo α respecto al plano de la base. Hallar el volumen de la parte separada. *Respuesta*: $\frac{2}{3}R^3 \operatorname{tg}\alpha$.

32. Hallar el volumen común para dos cilindros: $x^2 + y^2 = R^2$, $y^2 + z^2 = R^2$. *Respuesta*: $\frac{16}{3}R^3$.

33. El punto de intersección de las diagonales de un cuadrado se desplaza a lo largo del diámetro de un círculo de radio a; el plano del cuadrado permanece siempre perpendicular al plano del círculo, mientras que dos vértices opuestos del cuadrado se desplazan por una circunferencia (es evidente que durante el movimiento la magnitud del cuadrado cambia).

Hallar el volumen del cuerpo engendrado por este cuadrado movible. *Respuesta:* $\frac{8}{3}a^3$.

34. Calcular el volumen del segmento cortado de un parabaloide elíptico $\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}=x$ por el plano $x=a$. *Respuesta:* $\pi a^2\sqrt{pq}$.

35. Calcular el volumen del cuerpo limitado por los planos $z=0$, $y=0$, superficies cilíndricas $x^2=2py$, $z^2=2px$, y el plano $x=a$. *Respuesta:* $\frac{a^3\sqrt{2a}}{7\sqrt{p}}$ (en el primer octante).

36. Una recta se mueve paralelamente al plano Oyz cortando dos elipses: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, que se disponen en los planos Oxy y Oxz. Calcular el volumen del cuerpo obtenido. *Respuesta:* $\frac{8}{3}abc$.

Cálculo de longitudes de arcos

37. Hallar la longitud total de la hipocicloide $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. *Respuesta:* $6a$.

38. Calcular la longitud del arco de una parábola semicúbica $ay^2=x^3$, a partir del origen de coordenadas hasta el punto de abscisa $x=5a$. *Respuesta:* $\frac{335}{27}a$.

39. Hallar la longitud del arco de una catenaria $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ del origen de coordenadas hasta el punto (x, y). *Respuesta:* $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)=\sqrt{y^2-a^2}$.

40. Hallar la longitud de un arco de la cicloide $x=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a\times$ $\times(1-\cos t)$. *Respuesta* $8a$.

41. Hallar la longitud del arco de la curva $y=\ln x$ en los límites: de $x=\sqrt{3}$ hasta $x=\sqrt{8}$. *Respuesta:* $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

42. Hallar la longitud del arco de la curva $y=1-\ln\cos x$ entre los límites de $x=0$ a $x=\frac{\pi}{4}$. *Respuesta:* $\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$.

43. Hallar la longitud de la espiral de Arquímedes $\rho=a\varphi$, a partir del polo hasta el fin del primer rizo. *Respuesta:* $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+$ $+\sqrt{1+4\pi^2})$.

44. Hallar la longitud de la espiral $\rho=e^{\alpha\varphi}$ del polo al punto (ρ, φ). *Respuesta:* $\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}e^{\alpha\varphi}=\frac{\rho}{\alpha}\sqrt{1+\alpha^2}$.

45. Hallar la longitud total de la curva $\rho=a\operatorname{sen}^3\frac{\varphi}{3}$. *Respuesta:* $\frac{3}{2}\pi a$.

46. Hallar la longitud de la evoluta de la elipse $x=\frac{c^2}{2}\cos^3 t$; $y=\frac{c^2}{b}\operatorname{sen}^3 t$. *Respuesta:* $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$.

47. Hallar la longitud de la cardioide $\rho=a(1+\cos\varphi)$. *Respuesta:* $8a$.

48. Hallar la longitud del arco de la evolvente del círculo $x=a(\cos\varphi+$ $+\varphi\operatorname{sen}\varphi)$, $y=a(\operatorname{sen}\varphi-\varphi\cos\varphi)$, desde $\varphi=0$ hasta $\varphi=\varphi_1$. *Respuesta:* $\frac{1}{2}a\varphi_1^2$.

Cálculo de las áreas de superficies de los cuerpos de revolución

49. Hallar el área de la superficie, obtenida por la revolución de la parábola $y^2=4ax$ alrededor del eje Ox, desde el origen O hasta el punto de abscisa $x=3a$. *Respuesta:* $\frac{56}{3}\pi a^2$.

50. Hallar el área de la superficie del cono engendrado por la revolución de un segmento de la recta $y=2x$ limitada por $x=0$, $x=2$:

a) alrededor del eje Ox. *Respuesta:* $8\pi\sqrt{5}$;

b) alrededor del eje Oy. *Respuesta:* $4\pi\sqrt{5}$.

51. Hallar la superficie del toro obtenido por la revolución del círculo x^2+ $+(y-b)^2=a^2$ alrededor del eje Ox. *Respuesta:* $4\pi^2ab$.

52. Hallar el área de la superficie del cuerpo engendrado por la revolución de una cardioide alrededor del eje Ox. Las ecuaciones paramétricas de la cardioide son: $x=a(2\cos\varphi-\cos 2\varphi)$, $y=a(2\operatorname{sen}\varphi-\operatorname{sen}2\varphi)$. *Respuesta:* $\frac{128}{5}\pi a^2$.

53. Hallar el área de la superficie del cuerpo obtenido por la revolución de un arco de cicloide $x=a(t-\operatorname{sen}t)$; $y=a(1-\cos t)$ alrededor del eje Ox. *Respuesta:* $\frac{64\pi a^2}{3}$.

54. El arco de la cicloide (véase el problema 53) gira alrededor del eje Oy. Hallar la superficie del cuerpo de revolución. *Respuesta:* $16\pi^2a^2$.

55. El arco de la cicloide (véase el problema 53) gira alrededor de la tangente paralela al eje Ox que pasa por el vértice. Hallar la superficie del cuerpo de revolución. *Respuesta* $\frac{32\pi a^2}{3}$.

56. La astroide $x=a\operatorname{sen}^3 t$, $y=a\cos^3 t$ gira alrededor del eje Ox. Hallar la superficie del cuerpo de revolución. *Respuesta:* $\frac{12\pi a^2}{5}$.

57. El arco de la sinusoide $y=\operatorname{sen}x$, desde $x=0$ hasta $x=2\pi$, gira alrededor del eje Ox. Hallar la superficie del cuerpo de revolución. *Respuesta:* $4\pi[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$.

58. La elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ gira alrededor del eje Ox. Hallar la superficie del cuerpo de revolución. *Respuesta:* $2\pi b^2+2\pi ab\,\frac{\operatorname{arcsen}e}{e}$, donde $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

Diferentes aplicaciones de la integral definida

59. Hallar el centro de gravedad del área de una cuarta parte de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$. *Respuesta:* $\frac{4a}{3\pi}$; $\frac{4b}{3\pi}$.

60. Hallar el centro de gravedad de la figura limitada por la parábola $x^2+4y-16=0$ y el eje Ox. *Respuesta:* $\left(0,\ \frac{8}{5}\right)$.

61. Hallar el centro de gravedad del volumen de la semiesfera. *Respuesta*: en el eje de simetría, a la distancia $\frac{3}{8}R$ de la base.

62. Hallar el centro de gravedad de la superficie de la semiesfera. *Respuesta*: en el eje de simetría a la distancia $\frac{R}{2}$ de la base.

63. Hallar el centro de gravedad de la superficie del cono recto circular que tiene radio de la base R y altura h. *Respuesta*: en el eje de simetría, a la dislínlas $\frac{h}{3}$ de la base.

64. Hallar el centro de gravedad de la superficie de la figura limitada por las líneas $y = \operatorname{sen} x \ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$, $y = 0$. *Respuesta*: $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$.

65. Hallar el centro de gravedad del área de la figura limitada por las parábolas $y^2 = 20x$, $x^2 = 20y$. *Respuesta*: (9; 9).

66. Hallar el centro de gravedad del área de un sector circular que tiene ángulo central 2α y radio R. *Respuesta*: en el eje de simetría, a la distancia $\frac{2}{3}R\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$ del vértice del sector.

67. Hallar la presión que se ejerce sobre un rectángulo sumergido verticalmente en agua, si se conoce que su base es 8 m, altura 12 m. La base superior es paralela a la superficie libre del agua y se encuentra a una profundidad de 5 m. *Respuesta*: 1056 toneladas.

68. El borde superior de una esclusa que tiene forma de cuadrado, de lado igual a 8 m, se halla en la superficie del agua. Determinar la presión que se ejerce sobre cada uno de los triángulos de la esclusa. Los triángulos se obtienen mediante la división del cuadrado por una de sus diagonales. *Respuesta*: 85 333,33 kg, 170 666,67 kg.

69. Calcular el trabajo necesario para bombear el agua de un recipiente semiesférico cuyo diámetro es igual a 20 m. *Respuesta*: $2{,}5 \cdot 10^6\ \pi$kgm.

70. Un cuerpo se encuentra en movimiento rectilíneo según la ley $x = ct^3$, donde, x es la distancia recorrida durante el tiempo t, c = const. La resistencia del medio es proporcional al cuadrado de la velocidad, siendo k el coeficiente de proporcionalidad. Hallar el trabajo de la resistencia al desplazarse el cuerpo del punto $x = 0$ hasta el $x = a$. *Respuesta*: $\frac{27}{7}k\sqrt[3]{c^2a^7}$.

71. Calcular el trabajo que es preciso gastar para bombear el líquido de densidad γ, desde un recipiente que tiene forma de cono con vértice dirigido hacia abajo. H es la altura del cono, R es el radio de su base. *Respuesta*: $\frac{\pi\gamma R^2H^2}{12}$.

72. Una boya de madera que tiene forma cilíndrica flota sobre la superficie del agua. Se conoce que la altura H es 50 cm, el área de su base S es igual a 4000 cm^2. ¿Qué trabajo se necesita para sacar la boya del agua? (El peso específico de la madera es 0,8). *Respuesta*: $\frac{\gamma^2H^2S}{2} = 32$ kgm.

73. Calcular la fuerza total que ejerce el agua sobre una presa en forma del trapecio equilátero cuya base superior es $a = 6{,}4$ m y la inferior, $b = 4{,}2$ m. La altura H es igual a 3m. *Respuesta*: 22,2 t.

74. Hallar la componente axial P (kg) de la presión total del vapor que se ejerce sobre el fondo esférico de una caldera. El diámetro de la parte cilíndrica de la caldera es D mm. La presión del vapor en la caldera es P kg/cm^2. *Respuesta*: $P = \frac{\pi PD^2}{400}$.

75. El extremo de un árbol vertical de radio r se apoya sobre un tejuelo plano. El peso P del árbol se distribuye uniformemente por toda la superficie del apoyo. Calcular el trabajo total de las fuerzas de fricción durante una revolución del árbol. El coeficiente de fricción es μ. *Respuesta*: $\frac{4}{3}\pi\mu Pr$.

76. Un árbol vertical termina en una rangua en forma del cono truncado. La presión específica de la rangua sobre el tejuelo es constante e igual a P. El diámetro superior de la rangua es D, el inferior, d. El ángulo al vértice del cono es 2α. El coeficiente de fricción, μ.

Hallar el trabajo de las fuerzas de fricción en una revolución del árbol. *Respuesta*: $\frac{\pi^2 P\mu}{6 \operatorname{sen} \alpha}(D^3-d^3)$.

77. Una varilla prismática de longitud l es estirada con una fuerza que aumenta lentamente desde 0 hasta P, de modo tal que a cada instante la fuerza se equilibra por las fuerzas de elasticidad de la varilla. Calcúlese el trabajo A de la fuerza de tensión, suponiendo que el estiramiento se haya realizado en los límites de elasticidad. El área de la sección transversal de la varilla es F. El módulo de elasticidad del material es igual a E.

Indicación. Si x es el alargamiento de la varilla, y f, la fuerza aplicada correspondiente, tenemos: $f=\frac{FE}{l}x$. El alargamiento bajo el efecto de la fuerza P es $\Delta l=\frac{Pl}{EF}$. *Respuesta*: $A=\frac{P\Delta l}{2}=\frac{P^2 l}{2EF}$.

78. A una barra prismática suspendida verticalmente se le aplica una fuerza de tensión P en su extremo inferior. Calcular el alargamiento de la barra bajo la acción de su propio peso y la fuerza P, si se conocen el largo l de la barra en reposo, el área de la sección transversal F, el peso de la barra Q y el módulo de elasticidad E del material. *Respuesta*: $\Delta l=\frac{(Q+2P)\,l}{2EF}$.

79. Determinar el tiempo durante el cual se verterá el líquido de un recipiente prismático lleno hasta la altura H. El área de la sección transversal del recipiente es igual a F, el área del orificio es f. La velocidad del derrame se determina según la fórmula $v=\mu\sqrt{2gh}$, donde μ es el coeficiente de viscocidad, g es la aceleración por la fuerza de gravedad, h es la distancia del orificio al nivel de líquido. *Respuesta*: $T=\frac{2FH}{\mu f\sqrt{2gH}}=\frac{F}{\mu f}\sqrt{\frac{2H}{g}}$.

80. Determinar el gasto Q del agua (cantidad de agua que se derrama por unidad de tiempo) a través de un vertedero de sección rectangular. La altura del vertedero es h, el ancho es b. *Respuesta*: $Q=\frac{2}{3}\mu bh\sqrt{2gh}$.

81. Determinar el gasto de agua Q, que se derrama por un orificio rectangular lateral, de altura a y ancho b, si la altura de la superficie libre del agua, por arriba del borde inferior del orificio, es H. *Respuesta*: $Q=\frac{2b\mu\sqrt{2g}}{3}[H^{3/2}-(H-a)^{3/2}]$.

INDICE ALFABETICO DE MATERIAS

INDICE

CAPITULO III. DERIVADA Y DIFERENCIAL

CAPITULO IV. TEOREMAS SOBRE LAS FUNCIONES DERIVABLES

CAPITULO V. ANALISIS DE LA VARIACION DE LAS FUNCIONES

CAPITULO VI. CURVATURA DE UNA CURVA

CAPITULO VII. NUMEROS COMPLEJOS. POLINOMIOS

CAPITULO VIII. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

CAPITULO IX. APLICACIONES DEL CALCULO DIFERENCIAL A LA GEOMETRIA DEL ESPACIO

CAPITULO X. INTEGRAL INDEFINIDA

CAPITULO XI. INTEGRAL DEFINIDA

CAPITULO XII. APLICACIONES GEOMETRICAS Y MECANICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA