N. PISKUNOV

# cálculo diferencial e integral

tomo II

Editorial Mir Moscú

ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР •

Н. С. ПИСКУНОВ

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

ТОМ

# II

Седьмое издание

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» МОСКВА

N. PISKUNOV

# CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

3ª edición

TOMO

II

EDITORIAL MIR · MOSCU

Traducido del ruso por el ingeniero
K. MEDKOV

(на испанском языке)

Impreso en la URSS

# INDICE

## CAPITULO XIII. ECUACIONES DIFERENCIALES

CAPITULO XIV. INTEGRALES MULTIPLES



CAPITULO XV. INTEGRALES CURVILINEAS E INTEGRALES DE SUPERFICIE



CAPITULO XVI. SERIES

## CAPITULO XVII. SERIES DE FOURIER



## CAPITULO XVIII. ECUACIONES DE LA FISICA MATEMATICA

CAPITULO XIII

# ECUACIONES DIFERENCIALES

## § 1. PLANTEO DEL PROBLEMA ECUACION DEL MOVIMIENTO DE UN CUERPO, SIENDO LA RESISTENCIA DEL MEDIO PROPORCIONAL A LA VELOCIDAD. ECUACION DE LA CATENARIA

Supongamos que la función $y = f(x)$ expresa cuantitativamente un fenómeno. Al estudiar este fenómeno es imposible establecer directamente el carácter de la dependencia entre $y$ y $x$; sin embargo, se puede establecer una dependencia entre las magnitudes $x$, $y$, y las derivadas de $y$ respecto a $x$: $y'$, $y''$, ... $y^{(n)}$, es decir, se puede escribir una ecuación diferencial.

De la dependencia obtenida entre $x$, $y$ y las derivadas es preciso deducir la dependencia directa entre $x$ e $y$, es decir, hallar $y = f(x)$, o, como suele decirse, **integrar una ecuación diferencial.**

Estudiemos dos ejemplos.

**Ejemplo 1.** Desde una cierta altura se ha arrojado un cuerpo de masa $m$. Determinar la ley según la cual cambia la velocidad de caída $v$, si sobre el cuerpo, además de la fuerza de gravedad, actúa la fuerza de resistencia del aire, proporcional a la velocidad $v$ (el coeficiente de proporcionalidad es $k$), es decir, es preciso encontrar $v = f(t)$.

**Solución.** En virtud de la segunda ley de Newton $m\frac{dv}{dt}=F$, donde, $\frac{dv}{dt}$ es la aceleración del cuerpo en movimiento (la derivada de la velocidad respecto al tiempo), y $F$ es una fuerza que actúa sobre el cuerpo en la dirección del movimiento. Esta última es resultante de dos fuerzas: la de gravedad, $mg$, y la de la resistencia del aire, $kv$ (se toma con signo menos, puesto que está dirigida en dirección opuesta a la velocidad).

Entonces

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv. \tag{1}$$

Hemos obtenido una relación entre una función desconocida $v$ y su derivada $\frac{dv}{dt}$, es decir, **una ecuación diferencial respecto a la función desconocida** $v$ (la ecuación del movimiento de paracaídas de ciertos tipos). Resolver esta ecuación diferencial significa encontrar una función $v = f(t)$ tal que satisfaga idénticamente a la ecuación diferencial dada. Existe una infinidad de funciones de este tipo. Es fácil comprobar que toda función del tipo

$$v=Ce^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k} \tag{2}$$

satisface la ecuación (1) cualquiera que sea el número constante $C$. ¿Pero, cuál de estas funciones dará la dependencia buscada entre $v$ y $t$? Para encontrarla, usemos una condición adicional: al arrojar el cuerpo, le damos una velocidad inicial $v_0$ (que, en particular, puede ser igual a cero); supongamos conocida esta velocidad inicial. Pero, en este caso, la función buscada $v = f(t)$ debe ser tal que para $t = 0$ (al principio del movimiento) se verifique la condición $v = v_0$. Poniendo $t = 0$, $v = v_0$ en la fórmula (2), obtenemos:

$$v_0 = C + \frac{mg}{k}, \quad \text{de donde:} \quad C = v_0 - \frac{mg}{k}.$$

De esta manera se determina la constante $C$. Por consiguiente, la dependencia buscada entre $v$ y $t$ es:

$$v = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}. \tag{2'}$$

De esta fórmula se deduce que si $t$ es suficientemente grande, la velocidad $v$ depende poco de $v_0$.

Notemos que si $k = 0$ (es decir, la resistencia del aire no existe o es tan pequeña que podemos despreciarla), obtenemos el resultado*) bien conocido en física:

$$v = v_0 + gt. \tag{2''}$$

Esta función satisface la ecuación diferencial (1) y la condición inicial: $v = v_0$ para $t = 0$.

**Ejemplo 2.** Un hilo flexible homogéneo está suspendido por sus dos extremos. Hallar la ecuación de la curva cuya forma va a tomar el hilo bajo su propio peso (esta forma es la que toman las cuerdas, cables y cadenas suspendidas).

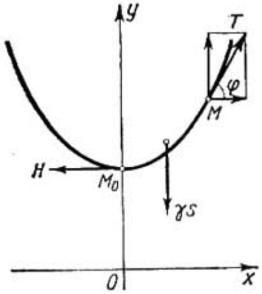


*Fig. 244*

**Solución.** Sea $M_0$ (0, $b$) el punto más bajo del hilo, y $M$, un punto arbitrario (fig. 244). Examinemos la parte $M_0M$ del hilo. Esta parte está equilibrada bajo la acción de tres fuerzas:

1) la tensión $T$, que actúa a lo largo de la tangente al punto $M$, y forma con el eje $Ox$ el ángulo $\varphi$;

2) la tensión $H$, en el punto $M_0$, que actúa horizontalmente;

3) el peso $\gamma s$ del hilo, dirigido verticalmente hacia abajo; donde $s$ es la longitud del arco $M_0M$, $\gamma$ es el peso específico lineal del hilo.

Descomponiendo $T$ en sus componentes horizontal y vertical, obtenemos las ecuaciones del equilibrio: $T \cos\varphi = H$, $T \operatorname{sen}\varphi = \gamma S$.

Dividiendo la segunda igualdad por la primera, obtenemos:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\gamma}{H} S. \tag{3}$$

---

*) La fórmula (2″) puede obtenerse de la (2′), pasando al límite:

$$\lim_{k \to 0} \left[ \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k} \right] = v_0 + gt.$$

Supongamos ahora que la ecuación de la curva buscada se puede escribir en la forma: $y = f(x)$. Aquí, $f(x)$ es la función que debemos encontrar. Notemos que

$$\operatorname{tg}\varphi = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} S, \tag{4}$$

donde por $a$ está designada la razón $\frac{H}{\gamma}$.

Derivemos respecto a $x$ ambos miembros de la igualdad (4):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{ds}{dx}. \tag{5}$$

Pero ya sabemos (véase § 1, cap. VI) que:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Poniendo esta expresión en la ecuación (5) obtenemos la ecuación diferencial de la curva buscada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{6}$$

Esta función expresa la relación entre derivadas primera y segunda de la función desconocida $y$.

Sin prestar atención a los métodos de resolución de ecuaciones, indiquemos que toda función de la forma

$$y = \frac{a}{2}\left[e^{+\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} + e^{-\left(\frac{x}{a} + C_1\right)}\right] + C_2 \tag{7}$$

satisface la ecuación (6), cualesquiera que sean los valores de las constantes $C_1$ y $C_2$. Esto es fácil comprobar, introduciendo las derivadas primera y segunda de la función mencionada en la ecuación (6). Indiquemos sin demostración que estas funciones (para diferentes $C_1$ y $C_2$) abarcan todas las soluciones posibles de la ecuación (6), lo que será demostrado más adelante (en el § 18).

Las gráficas de todas las funciones obtenidas de esta manera se llaman *catenarias*. Aclaremos, ahora, como se debe elegir las constantes $C_1$ y $C_2$ para obtener precisamente la catenaria en la que el punto inferior $M$ tenga las coordenadas $(0, b)$. Puesto que, para $x = 0$, el punto de la catenaria ocupa la posición más baja, la tangente a este punto es horizontal, es decir, $\frac{dy}{dx} = 0$. Además, según la hipótesis, en el punto indicado la ordenada es igual a $b$, es decir $y = b$.

De la ecuación (7) se deduce:

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a} + C_1} - e^{-\left(\frac{x}{a} + C_1\right)}\right).$$

Poniendo aquí $x = 0$, obtenemos: $0 = \frac{1}{2}\left(e^{C_1} - e^{-C_1}\right)$. Por tanto, $C_1 = 0$.

Si $b$ es la ordenada del punto $M_0$, entonces $y = b$ para $x = 0$.
Suponiendo que $x = 0$, $C_1 = 0$ de la ecuación (7) obtenemos $b = \frac{a}{2}(1 + 1) + C_2$, de donde: $C_2 = b - a$.

En definitiva encontramos:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) + b - a.$$

La ecuación (7) se simplifica considerablemente, si tomamos la ordenada del punto $M_0$ igual al número $a$. Entonces, la ecuación de la catenaria será:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

## § 2. DEFINICIONES

**Definición 1.** Una ecuación que establece una relación entre la variable independiente $x$, la función buscada $y = f(x)$ y sus derivadas $y'$, $y''$, . . . $y^{(n)}$ se llama *ecuación diferencial.*

Una ecuación diferencial se puede escribir simbólicamente en la forma siguiente:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

ó

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

Si la función buscada $y = f(x)$ es la de **una sola** variable independiente, la ecuación diferencial se llama *ordinaria.* Ocupémonos, por ahora, sólo de las ecuaciones diferenciales ordinarias*).

**Definición 2.** El orden de la derivada superior que entra en la ecuación se llama *orden* de la ecuación diferencial.

Por ejemplo, la ecuación

$$y' - 2xy^2 + 5 = 0$$

es de primer orden.

---

*) A la par con las ecuaciones diferenciales ordinarias, en el análisis matemático se estudian también las ecuaciones en derivadas parciales. Las ecuaciones que establecen una relación entre la función desconocida $z$, dependiente de dos o varias variables $x$, $y$, . . ., las propias variables $x$, $y$, . . ., y las derivadas parciales de $z$: $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, etc., se llaman *ecuaciones en derivadas parciales.*

Por ejemplo, la ecuación $x\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial y}$ será en derivadas parciales con la función desconocida $z(x, y)$.

Es fácil comprobar que la función $z = x^2y^2$ satisface la ecuación dada (así como infinidad de otras funciones). En el curso presente las ecuaciones en derivadas parciales se estudian en el capítulo XVIII, tomo II.

La ecuación

$$y'' + ky' - by - \text{sen } x = 0$$

es de segundo orden, etc.

La ecuación examinada en el ejemplo 1 del párrafo anterior es de primer orden, y la del ejemplo 2, de segundo orden.

**Definición 3.** Toda función $y = f(x)$ que, introducida en la ecuación, la transforma en una identidad, se llama *solución* o *integral* de una ecuación diferencial.

**Ejemplo 1.** Sea la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Las funciones $y = \text{sen } x$, $y = 2 \cos x$, $y = 3 \text{ sen } x - \cos x$, y, en general, toda función de la forma $y = C_1 \text{ sen } x$, $y = C_2 \cos x$,

ó

$$y = C_1 \text{ sen } x + C_2 \cos x$$

son soluciones de la ecuación dada cualesquiera que sean las constantes $C_1$ y $C_2$. Esto es fácil comprobar, al introducir las funciones mencionadas en la ecuación.

**Ejemplo 2.** Examinemos la ecuación:

$$y'x - x^2 - y = 0.$$

Sus soluciones son funciones de la forma:

$$y = x^2 + Cx,$$

donde $C$ es una constante arbitraria. En efecto, derivando la función $y = x^2 + Cx$, hallamos:

$$y' = 2x + C.$$

Sustituyendo las expresiones $y$ e $y'$ en la ecuación original, obtenemos la identidad:

$$(2x + C)\,x - x^2 - x^2 - Cx = 0.$$

Cada una de las ecuaciones examinadas en los ejemplos 1 y 2 tiene una infinidad de soluciones.

## § 3. ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN (GENERALIDADES)

1. La ecuación diferencial de **primer** orden tiene la forma:

$$F(x,\ y,\ y') = 0. \tag{1}$$

Si esta ecuación se resuelve respecto a $y'$, se puede escribirla en la forma:

$$y' = f(x,\ y). \tag{1'}$$

En este caso se dice que la ecuación diferencial está solucionada respecto a la derivada. Para tal ecuación es válido el siguiente teorema acerca de la existencia y la unicidad de la solución de una ecuación diferencial.

**Teorema.** *Si en la ecuación*

$$y' = f(x, y)$$

*la función* $f(x, y)$ *y su derivada parcial* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *respecto a* $y$ *son continuas en cierto dominio* $D$ *del plano* $Oxy$, *y si* $(x_0, y_0)$ *es un punto de este dominio, entonces existe la única solución de esta ecuación,* $y = \varphi(x)$, *que satisface la condición* $y = y_0$, *para* $x = x_0$.

El significado geométrico del teorema es que existe sólo la única función $y = \varphi(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $(x_0, y_0)$.

Del teorema anterior se deduce que la ecuación (1′) tiene una infinidad de soluciones diferentes [por ejemplo, la solución cuya gráfica pasa por el punto $(x_0, y_0)$, otra solución cuya gráfica pasa por el punto $(x_0, y_1)$, por el punto $(x_0, y_2)$ etc., siempre cuando estos puntos se encuentren en el dominio $D$].

La condición de que la función $y$ debe tomar valor del número dado $y_0$, para $x = x_0$, se llama *condición inicial.* Muy a menudo esta condición se escribe en la forma:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0.$$

**Definición 1.** Se llama *solución general* de una ecuación diferencial de primer orden a la función

$$y = \varphi(x, C), \tag{2}$$

que depende de una constante arbitraria $C$ y satisface las condiciones siguientes:

a) satisface la ecuación diferencial para cualquier valor concreto de la constante $C$;

b) cualquiera que sea la condición inicial $y = y_0$, para $x = x_0$, es decir $(y)_{x=x_0} = y_0$, se puede encontrar un valor $C = C_0$ tal, que la función $y = \varphi(x, C_0)$ satisfaga la condición inicial dada.

En este caso se supone que los valores $x_0$ e $y_0$ pertenecen al dominio de variación de las variables $x$ e $y$, en el que se verifican las condiciones del teorema sobre la existencia y la unicidad de la solución.

2. Durante la búsqueda de la solución general de una ecuación diferencial llegamos a menudo a una correlación de la forma:

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{2′}$$

no resuelta respecto a $y$. Al resolverla respecto a $y$, obtenemos la solución general. Sin embargo, no siempre es posible expresar $y$ a partir de la correlación (2′) mediante las funciones elementales. En tales casos la solución general se queda en forma implícita.

Una igualdad de la forma $\Phi(x, y, C) = 0$, que da la solución general en forma implícita, se llama *integral general* de la ecuación diferencial.

**Definición 2.** Toda función $y = \varphi(x, C_0)$ deducida de la solución general $y = \varphi(x, C)$, dando a la constante $C$ un valor determinado $C = C_0$, se llama *solución particular*. En este caso la correlación $\Phi(x, y, C_0) = 0$ se llama *integral particular* de la ecuación.

**Ejemplo 1.** La ecuación de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

tiene por solución general una familia de funciones $y = \frac{C}{x}$; esto se puede comprobar mediante una simple sustitución en la ecuación.

Hallemos una solución particular que satisfaga la siguiente condición inicial: $y_0 = 1$, para $x_0 = 2$. Poniendo estos valores en la fórmula $y = \frac{C}{x}$, obtenemos: $1 = \frac{C}{2}$ ó $C = 2$. Por consiguiente, la función $y = \frac{2}{x}$ es la solución particular buscada.

Desde un punto de vista geométrico, la integral general representa una familia de curvas en el plano de coordenadas, dependiente de una constante arbitraria $C$ (o, como se suele decir, de un parámetro $C$). Estas curvas se llaman *curvas integrales* de la ecuación diferencial dada.

Cada integral particular está representada por una curva de esta familia, que pasa por un punto dado del plano.

Así, en último ejemplo la integral general está representada geométricamente mediante la familia de hipérbolas $y = \frac{C}{x}$, y la integral particular, determinada por la condición inicial indicada, mediante una de estas hipérbolas que pasa por el punto $M_0$ (2,1). En la figura 245 están representadas las curvas de la familia que corresponden á ciertos valores del parámetro: $C = \frac{1}{2}$, $C = 1$, $C = 2$, $C = -1$, etc.

Con el objeto de ilustrar mejor nuestros razonamientos, llamaremos **solución de la ecuación** no sólo a la función $y = \varphi(x, C_0)$, que satisface la ecuación, sino también a la **curva integral** correspondiente. En relación con esto trataremos, por ejemplo, de la **solución que pasa por el punto** $(x_0, y_0)$.

**Observación:** La ecuación $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ no tiene solución que pase por un punto del eje $Oy$ (véase fig. 245). Esto se debe a que el segundo miembro de la ecuación no está definido para $x = 0$, y, por tanto, no es continuo.

**Solucionar** o, como se dice a menudo, **integrar** una ecuación diferencial significa:

a) encontrar su solución general o la integral general (si no están dadas las condiciones iniciales), o

b) hallar la solución particular de la ecuación que satisfaga las condiciones iniciales dadas (si éstas existen).

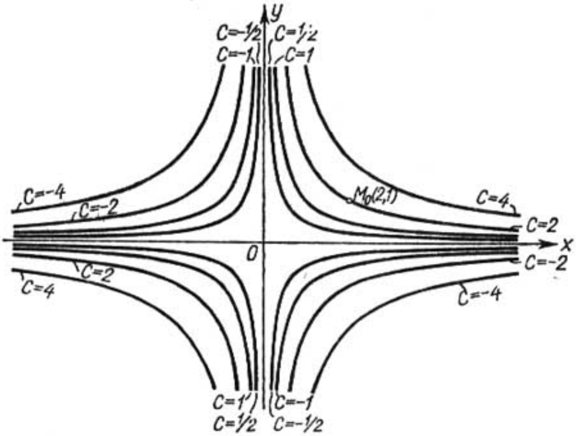


*Fig. 245*

3. Demos la interpretación geométrica de la ecuación diferencial de primer orden.

Sea una ecuación diferencial, resuelta respecto a la derivada:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y), \tag{1'}$$

y sea $y=\varphi(x,\ C)$ su solución general. Esta solución general determina toda la familia de curvas integrales en el plano $Oxy$.

Para todo punto $M$, de coordenadas $x$ e $y$, la ecuación (1′) determina un valor de la derivada $\frac{dy}{dx}$, es decir, el coeficiente angular de la tangente a la curva integral que pasa por este punto. Por consiguiente, la ecuación diferencial (1′) define un conjunto de direcciones o, como se dice, determina el *campo de direcciones* en el plano $Oxy$.

Desde el punto de vista geométrico el problema de la integración de una ecuación diferencial consiste en hallar las curvas, cuyas tangentes están orientadas de modo que su dirección coincida con la dirección del campo en estos puntos.

En la figura 246 se representa el campo de direcciones definido por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

4. Examinemos, ahora, el problema siguiente:

Sea una familia de funciones que depende sólo de un parámetro $C$:

$$y = \varphi(x, C) \tag{2}$$

de modo que por todo punto del plano (o de un dominio en el plano) pase sólo una curva de esta familia.

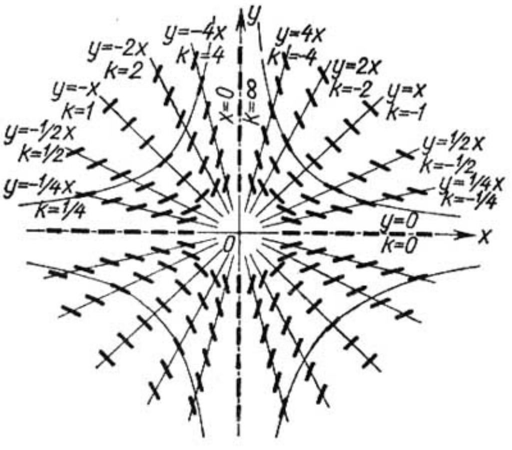


*Fig. 246*

¿Cuál es la ecuación diferencial que acepta esta familia de funciones como integral general?

Derivando respecto a $x$, encontramos de la relación (2):

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'_x(x, C). \tag{3}$$

Puesto que por todo punto del plano pasa una sola curva de la familia, para cada par de números $x$ e $y$ se determina un valor único $C$ de la ecuación (2). Introduciendo este valor $C$ en la correlación (3) hallamos $\frac{dy}{dx}$ como función de $x$ e $y$. Así obtenemos la ecuación diferencial satisfecha por toda función de la familia (2).

Por consiguiente, para establecer la relación entre $x$, $y$ y $\frac{dy}{dx}$, *es decir, para escribir la ecuación diferencial cuya integral general* se determina por la fórmula (2), es preciso eliminar $C$ de (2) y (3).

**Ejemplo 2.** Hallar la ecuación diferencial de la familia de parábolas $y = Cx^2$ (fig. 247).

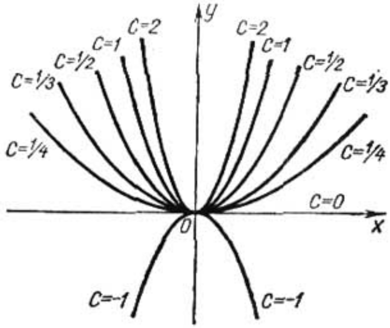


*Fig. 247*

Derivando la ecuación respecto a $x$, hallamos:

$$\frac{dy}{dx} = 2Cx.$$

Introduciendo en esta última el valor

$$C = \frac{y}{x^2},$$

definido por la ecuación de la familia, obtenemos una ecuación derivable de la familia dada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

Esta ecuación diferencial se verifica para $x \neq 0$, es decir, en todo dominio que no tenga puntos en el eje $Oy$.

## § 4. ECUACIONES CON VARIABLES SEPARADAS Y SEPARABLES. PROBLEMA DE LA DESINTEGRACION DEL RADIO

Estudiemos una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\, f_2(y), \tag{1}$$

donde el segundo miembro es el producto obtenido mediante la multiplicación de una función que depende sólo de $x$ por una función dependiente sólo de $y$. Suponiendo que $f_2(y) \neq 0$, transformemos (1) del modo siguiente:

$$\frac{1}{f_2(y)}\,dy = f_1(x)\,dx. \tag{1'}$$

Suponiendo que la función $y$ de $x$ es conocida, la ecuación (1') se puede considerar como igualdad de dos diferenciales, cuyas integrales indefinidas se diferenciarán en un sumando constante. Integrando el primer miembro respecto a $y$ y el segundo, respecto a $x$, obtenemos

$$\int \frac{1}{f_2(y)}\,dy = \int f_1(x)\,dx + C.$$

Hemos obtenido una correlación entre la solución $y$, la variable independiente $x$ y la constante arbitraria $C$, es decir, hemos obtenido la integral general de la ecuación (1).

1. La ecuación diferencial de la forma (1')

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0 \tag{2}$$

se llama ecuación con *variables separadas*. Según lo demostrado, su integral general es

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C.$$

**Ejemplo 1.** Sea la ecuación con variables separadas:

$$x\,dx + y\,dy = 0.$$

Integrando, obtenemos la integral general:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1.$$

Puesto que el primer miembro de la última ecuación no es negativo, lo mismo será el segundo miembro. Designemos $2C_1$ por $C^2$:

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

Esta es la ecuación de una familia de circunferencias concéntricas (fig. 248) de radio $C$ y centro en el origen de coordenadas.

2. La ecuación de la forma

$$M_1(x)\,N_1(y)\,dx + M_2(x)\,N_2(y)\,dy = 0 \tag{3}$$

se llama ecuación con *variables separables*. Esta puede ser reducida*)

---

*) Estas transformaciones son válidas sólo en un dominio donde tanto $N_1(y)$, como $M_2(x)$ no se anulan.

a una ecuación con variables separadas, dividiendo ambos miembros por la expresión $N_1(y)\,M_2(x)$:

$$\frac{M_1(x)\,N_1(y)}{N_1(y)\,M_2(x)}\,dx+\frac{M_2(x)\,N_2(y)}{N_1(y)\,M_2(x)}\,dy=0$$

o

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy=0,$$

**es decir, a una ecuación de la forma (2).**

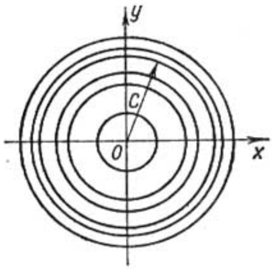


*Fig. 248*

**Ejemplo 2.** Sea la ecuación

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}\,.$$

Separemos las variables:

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}\,.$$

**Integrando, encontramos:**

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}+C,$$

**es decir,**

$$\ln|y|=-\ln|x|+\ln|C|^{*)}\quad ó\quad \ln|y|=\ln\left|\frac{C}{x}\right|\,;$$

**de donde obtenemos la solución general:** $y=\frac{C}{x}$ .

***) Teniendo en cuenta las transformaciones ulteriores, hemos designado la constante arbitraria mediante $\ln|C|$ lo que es admisible puesto que $\ln|C|$ (cuando $C\neq 0$) puede tomar cualquier valor en los límites de $-\infty$ hasta $+\infty$.**

**Ejemplo 3.** Sea la ecuación

$$(1+x)\,y\,dx+(1-y)\,x\,dy=0.$$

Separando las variables, encontramos:

$$\frac{1+x}{x}\,dx+\frac{1-y}{y}\,dy=0; \quad \left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=0.$$

Integrando, obtenemos:

$$\ln|x|+x+\ln|y|-y=C \quad \text{ó} \quad \ln|xy|+x-y=C;$$

la última relación es la integral general de la ecuación dada.

**Ejemplo 4.** Se ha establecido que la velocidad de la desintegración del radio es directamente proporcional a su masa en cada instante dado. Determinar la ley de variación de la masa del radio en función de tiempo, si para $t=0$ la masa del radio fue $m_0$.

La velocidad de la desintegración se determina del modo siguiente. Sea $m$ la masa al instante $t$ y $m+\Delta m$, al instante $t+\Delta t$. La masa desintegrada durante el tiempo $\Delta t$ es $\Delta m$. La razón $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ es la velocidad media de desintegración. El límite de esta razón para $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{dm}{dt}$$

es la *velocidad de desintegración* del radio al instante $t$.

Según la hipótesis:

$$\frac{dm}{dt}=-km, \tag{4}$$

donde $k$ es un coeficiente de proporcionalidad ($k>0$). Ponemos el signo menos, porque a medida que transcurre el tiempo la masa del radio disminuye y, por eso: $\frac{dm}{dt}<0$. La ecuación (4) es una ecuación con variables separables. Separemos las variables:

$$\frac{dm}{m}=-k\,dt.$$

Resolviendo la ecuación, obtenemos:

$$\ln m=-\mathrm{kt}+\ln C,$$

de donde

$$\ln\frac{m}{C}=-kt,$$

$$m=Ce^{-kt}. \tag{5}$$

Siendo dada la masa del radio igual a $m_0$ en el instante $t=0$, entonces $C$ debe satisfacer la correlación:

$$m_0=Ce^{-k\cdot 0}=C.$$

Introduciendo el valor de $C$ en la ecuación (5), obtenemos la dependencia buscada (véase la fig. 249) de la masa del radio en función del tiempo:

$$m=m_0e^{-kt}. \tag{6}$$

El coeficiente $k$ se determina experimentalmente de la manera siguiente. Sea $\alpha$ el % de la masa inicial del radio desintegrada durante el tiempo $t_0$. Por tanto se cumple la correlación:

$$\left(1-\frac{\alpha}{100}\right) m_0 - m_0 e^{-kt_0},$$

de donde:

$$-kt_0 = \ln\left(1-\frac{\alpha}{100}\right),$$

o

$$k = -\frac{1}{t_0}\ln\left(1-\frac{\alpha}{100}\right).$$

*De tal modo hemos establecido que para el radio* $k = 0{,}00044$ (la unidad de medida del tiempo es el año).

Poniendo este valor de $k$ en la fórmula (6), tenemos:

$$m = m_0 e^{-0{,}00044t}.$$

*Hallemos el período de semidesintegración del radio, o sea el intervalo* de tiempo durante el cual se desintegra la mitad de la masa inicial del radio.


*Fig. 249*

Sustituyendo $m$ en la última fórmula por el valor $\frac{m_0}{2}$, obtenemos la ecuación para determinar el período $T$ de semidesintegración:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-0{,}00044T},$$

de donde:

$$-0{,}00044T = -\ln 2,$$

o sea,

$$T = \frac{\ln 2}{0{,}00044} = 1590 \quad \text{años}.$$

Notemos que muchos otros problemas físicos y químicos desembocan en una ecuación de la forma (4).

**Observación.** La ecuación diferencial con variables separadas de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \text{ó} \quad dy = f(x)\,dx$$

es la más simple.

Su integral general tiene la forma:

$$y = \int f(x)\,dx + C.$$

A la solución de ecuaciones de este tipo está dedicado el capítulo X.

## § 5. ECUACIONES HOMOGENEAS DE PRIMER ORDEN

**Definición 1.** La función $f(x, y)$ se llama *homogénea de grado* $n$ respecto a las variables $x$ e $y$, si para todo $\lambda$ se verifica la identidad:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

**Ejemplo 1.** La función $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ es homogénea de primer grado, puesto que

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3} = \lambda \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \lambda f(x, y).$$

**Ejemplo 2.** $f(xy) = xy - y^2$ es una función homogénea de segundo grado puesto que $(\lambda x)(\lambda y) - (\lambda y)^2 = \lambda^2 [xy - y^2]$.

**Ejemplo 3.** $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$ es una función homogénea de grado cero puesto que $\dfrac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)} = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$, es decir,

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y) \quad \text{ó} \quad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y).$$

**Definición 2.** La ecuación de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

se llama *homogénea* respecto a $x$ e $y$, si la función $f(x, y)$ es homogénea de grado cero respecto a $x$ e $y$.

**Solución de una ecuación homogénea.** Según la hipótesis, $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. Haciendo $\lambda = \dfrac{1}{x}$, tenemos:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

es decir, la función homogénea de grado cero depende sólo de la razón de los argumentos.

En este caso, la ecuación (1) toma la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right). \tag{1'}$$

Efectuemos la sustitución: $u = \dfrac{y}{x}$, es decir, $y = ux$. Entonces tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx} x.$$

Sustituyendo este valor de la derivada en (1′) obtenemos:

$$u + x\frac{du}{dx} = f(1, u),$$

que es una ecuación con variables separables:

$$x\frac{du}{dx}=f(1,\ u)-u \quad \text{ó} \quad \frac{du}{f(1,\ u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Integrando, hallamos:

$$\int \frac{du}{f(1,\ u)-u}=\int \frac{dx}{x}+C.$$

Sustituyendo $u$ por la razón $\frac{y}{x}$, después de integrar, obtenemos la integral de la ecuación (1′).

**Ejemplo 4.** Sea la ecuación

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2-y^2}.$$

En el segundo miembro tenemos una función homogénea de grado cero. Por consiguiente, se trata de una ecuación homogénea. Realicemos la sustitución: de $\frac{y}{x}=u$; entonces

$$y=ux; \quad \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}; \quad u+x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1-u^2}; \quad x\frac{du}{dx}=\frac{u^3}{1-u^2}.$$

Separando las variables, resulta:

$$\frac{(1-u^2)\,du}{u^3}=\frac{dx}{x}; \quad \left(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u}\right)du=\frac{dx}{x};$$

de donde, después de integrar, encontramos:

$$-\frac{1}{2u^2}-\ln|u|=\ln|x|+\ln|C| \quad \text{ó} \quad -\frac{1}{2u^2}=\ln|uxC|.$$

Sustituyendo $u=\frac{y}{x}$ obtenemos la integral general de la ecuación inicial:

$$-\frac{x^2}{2y^2}=\ln|Cy|.$$

Es imposible en el caso dado expresar $y$ como función explícita de $x$ mediante las funciones elementales. Sin embargo, es fácil expresar $x$ en función de $y$:

$$x=y\sqrt{-2\ln|Cy|}.$$

**Observación.** La ecuación de la forma

$$M(x,\ y)\,dx+N(x,\ y)\,dy=0$$

será homogénea sólo en aquel único caso, en que $M(x,\ y)$ y $N(x,\ y)$ sean funciones *homogéneas de un mismo grado*. Esto se deduce del hecho de que la razón de dos funciones homogéneas de un mismo grado es una función homogénea de grado cero.

**Ejemplo 5.** Las ecuaciones

$$(2x+3y)\,dx+(x-2y)\,dy=0,$$
$$(x^2+y^2)\,dx-2xy\,dy=0$$

son homogéneas.

## § 6. ECUACIONES QUE SE REDUCEN A ECUACIONES HOMOGENEAS

Se reducen a ecuaciones homogéneas las ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}. \tag{1}$$

Si $c_1=c=0$, la ecuación (1) es, evidentemente, homogénea. Supongamos, ahora, que $c$ y $c_1$ (o uno de ellos) son diferentes de cero. Realicemos el cambio de variables:

$$x=x_1+h, \quad y=y_1+k.$$

Entonces,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx_1}. \tag{2}$$

Introduciendo en la ecuación (2) las expresiones de $x$, $y$ y $\frac{dy}{dx}$, tenemos:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+by_1+ah+bk+c}{a_1x_1+b_1y_1+a_1h_1+b_1k+c_1}. \tag{3}$$

Elijamos $h$ y $k$ de tal modo que se verifiquen las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} ah+bk+c=0,\\ a_1h+b_1k+c_1=0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

es decir, determinemos $h$ y $k$ como soluciones del sistema de ecuaciones (4). Bajo esta condición la ecuación (3) es homogénea:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+by_1}{a_1x_1+b_1y_1}.$$

Al solucionar esta ecuación, y pasando de nuevo a $x$ e $y$, según las fórmulas (2), obtenemos la solución de la ecuación (1).

El sistema (4) no tiene solución, si $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0$, es decir, si $ab_1=a_1b$. Pero en este caso $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$, es decir, $a_1=\lambda a$, $b_1=\lambda b$, y, por consiguiente, se puede transformar la ecuación (1) en la forma:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(ax+by)+c}{\lambda(ax+by)+c_1}. \tag{5}$$

Haciendo la sustitución

$$z=ax+by, \tag{6}$$

la ecuación se reduce a una ecuación con variables separables.

En efecto,

$$\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx},$$

de donde:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}. \tag{7}$$

Poniendo las expresiones (6) y (7) en la ecuación (5) obtenemos:

$$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}=\frac{z+c}{\lambda z+c_1},$$

que es una ecuación con variables separables.

El procedimiento utilizado para la integración de la ecuación (1) se aplica, también, a la integración la ecuación

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right),$$

donde, $f$ es una función continua arbitraria.

**Ejemplo 1.** Sea la ecuación

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-3}{x-y-1}.$$

Para *transformarla en una ecuación homogénea hacemos la sustitucion:* $x=x_1+h$; $y=y_1+k$. Entonces,

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+y_1+h+k-3}{x_1-y_1+h-k-1}.$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones

$$h+k-3=0; \quad h-k-1=0,$$

encontramos:

$$h=2, \quad k=1.$$

Como resultado obtenemos la ecuación homogénea

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+y_1}{x_1-y_1},$$

que resolvemos mediante la sustitución $\frac{y_1}{x_1}=u$; entonces,

$$y_1=ux_1,\ \frac{dy_1}{dx_1}=u+x_1\frac{du}{dx_1};\quad u+x_1\frac{du}{dx_1}=\frac{1+u}{1-u},$$

y obtenemos una ecuación con variables separables

$$x_1\frac{du}{dx_1}=\frac{1+u^2}{1-u}.$$

Separamos las variables:

$$\frac{1-u}{1+u^2}\,du=\frac{dx_1}{x_1}.$$

Integrando, hallamos:

$$\operatorname{arctg} u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln x_1+\ln C,$$

$$\operatorname{arctg} u=\ln\left(Cx_1\sqrt{1+u^2}\right)$$

o

$$Cx_1\sqrt{1+u^2}=e^{\operatorname{arctg} u}.$$

Sustituyendo $u$ por $\frac{y_1}{x_1}$ en la última igualdad, tenemos:

$$C\sqrt{x_1^2+y_1^2}=e^{\operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1}}.$$

Por fin pasando a las variables $x$ e $y$, obtenemos en definitiva:

$$C\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=e^{\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-2}}.$$

**Ejemplo 2.** La ecuación

$$y'=\frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$$

no se puede resolver mediante la sustitución $x=x_1+h$, $y=y_1+k$, puesto que en este caso el sistema de ecuaciones, que sirve para determinar $h$ y $k$, es irresoluble (aquí, el determinante $\begin{vmatrix}2&1\\4&2\end{vmatrix}$ de los coeficientes de las variables es igual a cero).

Se puede reducir esta ecuación a una ecuación con variables separables mediante la sustitución:

$$2x+y=z.$$

Entonces $y'=z'-2$ y la ecuación se reduce a la forma:

$$z'-2=\frac{z-1}{2z+5},$$

o sea,

$$z'=\frac{5z+9}{2z+5}$$

Resolviéndola, encontramos:

$$\frac{2}{5}z+\frac{7}{25}\ln|5z+9|=x+C.$$

Como $z=2x+y$, obtenemos la solución definitiva de la ecuación inicial en la forma:

$$\frac{2}{5}(2x+y)+\frac{7}{25}\ln|10x+5y+9|=x+C$$

ó

$$10y-5x+7\ln|10x+5y+9|=C_1,$$

es decir, en la forma de una función implícita $y$ de $x$.

## § 7. ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

**Difinición.** La ecuación que es lineal respecto a la función desconocida y su derivada, se llama *ecuación lineal de primer orden*. La ecuación tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x), \tag{1}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas dadas de $x$ (o constantes).

**Resolución de la ecuación lineal (1).** Busquemos la solución de la ecuación (1) en la forma de un producto de dos funciones de $x$:

$$y=u(x)\,v(x). \tag{2}$$

Se puede tomar arbitrariamente una de estas funciones, la otra se determinará entonces según la ecuación (1).

Derivando los dos miembros de la igualdad (2) encontramos:

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}.$$

Poniendo la expresión obtenida de la dervada $\frac{dy}{dx}$ en la ecuación (1), tenemos:

$$u\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}v+Puv=Q$$

ó

$$u\left(\frac{dv}{dx}+Pv\right)+v\frac{du}{dx}=Q. \tag{3}$$

Elijamos la función $v$ de tal manera que

$$\frac{dv}{dx}+Pv=0. \tag{4}$$

Separando las variables en esta ecuación diferencial respecto a la función $v$, encontramos:

$$\frac{dv}{v} = -P\,dx.$$

Integrando, obtenemos:

$$-\ln C_1 + \ln v = -\int P\,dx$$

ó

$$v = C_1 e^{-\int P\,dx}$$

Puesto que es suficiente tener una solución cualquiera, distinta de cero, de la ecuación (4), tomemos por la función $v(x)$:

$$vx = e^{-\int P\,dx}, \tag{5}$$

donde $\int P\,dx$ es una función primitiva cualquiera. Es evidente que $v(x) \neq 0$. Sustituyendo el valor encontrado de $v(x)$ en la ecuación (3), obtenemos $\left(\text{teniendo en cuenta que } \frac{dv}{dx} + Pv = 0\right)$

$$v(x)\frac{du}{dx} = Q(x),$$

o sea,

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)},$$

de donde:

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx + C.$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (2) obtenemos en definitiva:

$$y = v(x)\left[\int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx + C\right],$$

o

$$y = v(x)\int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx + Cv(x). \tag{6}$$

**Observación:** Es evidente que la expresión (6) no variará, si, en lugar de la función $v(x)$ determinada por la ecuación (5), tomamos alguna otra función $v_1(x) = \overline{C}v(x)$. En efecto, sustituyendo en (6)

$v(x)$ por $v_1(x)$, obtenemos:

$$y = \overline{C} v(x) \int \frac{Q(x)}{\overline{C} v(x)} dx + C\overline{C} v(x).$$

En el primer término se elimina $\overline{C}$, en el segundo término el producto $C\overline{C}$ es una constante arbitraria la que designemos por $C$ y regresamos de nuevo a la expresión (6). Si designamos:

$$\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx = \varphi(x)$$

la expresión (6) toma la forma

$$y = v(x)\, \varphi(x) + Cv(x). \tag{6'}$$

Es evidente que (6') es la integral general, puesto que se puede elegir $C$ de tal modo que se satisfaga la condición inicial $y = y_0$ para $x = x_0$.

El valor de $C$ se determina de la ecuación:

$$y_0 = v(x_0)\, \varphi(x_0) + Cv(x_0).$$

**Ejemplo.** Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^3.$$

**Solución.** Hagamos:

$$y = uv.$$

Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v.$$

Introduciendo la expresión $\frac{dy}{dx}$ en la ecuación inicial, tenemos:

$$u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v - \frac{2}{x+1} uv = (x+1)^3,$$

$$u \left( \frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1} v \right) + v \frac{du}{dx} = (x+1)^3. \tag{7}$$

Para determinar $v$, obtenemos la ecuación:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1} v = 0,$$

es decir,

$$\frac{dv}{v} = \frac{2\, dx}{x+1},$$

de donde:

$$\ln v = 2 \ln (x+1),$$

o sea

$$v=(x+1)^2.$$

Introduciendo la expresión de la función $v$ en la ecuación (7) obtenemos la ecuación para determinar $u$,

$$(x+1)^2\frac{du}{dx}=(x+1)^3$$

ó

$$\frac{du}{dx}=(x+1),$$

de donde:

$$u=\frac{(x+1)^2}{2}+C.$$

Por consiguiente, la integral general de la ecuación dada tendrá la forma:

$$y=\frac{(x+1)^4}{2}+C(x+1)^2.$$

La familia obtenida es la solución general. Cualquiera que sea la condición inicial $(x_0, y_0)$, donde $x_0 \neq -1$, siempre se puede elegir $C$ de tal manera que la solución particular correspondiente satisfaga la condición inicial dada. Por ejemplo, la solución particular que satisface la condición $y_0 = 3$ para $x_0 = 0$ se encuentra del modo siguiente:

$$3=\frac{(0+1)^4}{2}+C(0+1)^2; \quad C=\frac{5}{2}.$$

Por tanto, la solución particular buscada es:

$$y=\frac{(x+1)^4}{2}+\frac{5}{2}(x+1)^2.$$

Sin embargo, si se toma la condición inicial $(x_0, y_0)$ de modo tal que $x_0 = -1$, entonces no será posible encontrar una solución particular que satisfaga esta condición. Esto se explica por el hecho de que la función $P(x) = -\frac{2}{x+1}$ es discontinua en el punto $x_0 = -1$ y, por tanto, no se cumplen las condiciones del teorema de la existencia de la solución.

## § 8. ECUACION DE BERNOULLI

Estudiemos una ecuación de la forma*)

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x)\,y^n, \tag{1}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas de $x$ (o constantes), y, $n \neq 0$, $n \neq 1$ (en el caso contrario resulta una ecuación lineal).

---

*) Esta ecuación se reduce del problema sobre el movimiento de un cuerpo, si la resistencia $F$ del medio depende de la velocidad: $F=\lambda_1 v+\lambda_2 v^n$. La ecuación del movimiento será $m\frac{dv}{dt}=-\lambda_1 v-\lambda_2 v^n$, ó $\frac{dv}{dt}+\frac{\lambda_1}{m}v=-\frac{\lambda_2}{m}v^n$.

Esta ecuación, llamada *de Bernoulli*, se reduce a una ecuación lineal mediante la siguiente transformación:

Dividiendo todos los términos de la ecuación por $y^n$, obtenemos:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+Py^{-n+1}=Q. \tag{2}$$

Efectuemos ahora la sustitución:

$$z=y^{-n+1}.$$

Entonces,

$$\frac{dz}{dx}=(-n+1)\,y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (2), obtenemos una ecuación lineal:

$$\frac{dz}{dx}+(-n+1)\,Pz=(-n+1)\,Q.$$

Al encontrar su integral general, y sustituyendo $z$ por su expresión $y^{-n+1}$, obtenemos la integral general de la ecuación de Bernoulli.

**Ejemplo.** Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3. \tag{3}$$

**Solución.** Dividiendo todos los términos por $y^3$, tenemos:

$$y^{-3}y'+xy^{-2}=x^3. \tag{4}$$

Introduzcamos una nueva función:

$$z=y^{-2},$$

entonces,

$$\frac{dz}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (4), obtenemos la ecuación lineal:

$$\frac{dz}{dx}-2xz=-2x^3. \tag{5}$$

Hallemos ahora su integral general:

$$z=uv;\quad \frac{dz}{dx}=u\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}v.$$

Sustituyendo las expresiones de $z$ y $\frac{dz}{dx}$ en la ecuación (5), obtenemos:

$$u\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}v-2xuv=-2x^3$$

$$u\left(\frac{dv}{dx}-2xv\right)+v\frac{du}{dx}=-2x^3.$$

Igualemos a cero la expresión entre paréntesis:

$$\frac{dv}{dx}-2xv=0; \qquad \frac{dv}{v}=2x\,dx;$$

$$\ln v=x^2; \qquad v=e^{x^2}.$$

Para determinar $u$ obtengamos la ecuación:

$$e^{x^2}\frac{du}{dx}=-2x^3.$$

Separemos las variables:

$$du=-2e^{-x^2}x^3\,dx, \quad u=-2\int e^{-x^2}x^3\,dx+C.$$

Integrando por partes, encontramos:

$$u=x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+C; \qquad z=uv=x^2+1+Ce^{-x^2}.$$

Por consiguiente, la integral general de la ecuación dada es:

$$y^{-2}=x^2+1+Ce^{-x^2}, \quad \text{o sea:} \quad y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1+Ce^{-x^2}}}.$$

**Observación.** Análogamente a lo que hemos hecho en el caso de las ecuaciones lineales se puede demostrar que es posible buscar la solución de la ecuación de Bernoulli en la forma de producto de dos funciones:

$$y=u(x)\,v(x),$$

donde $v(x)$ es una función arbitraria distinta de cero, que satisface la ecuación $v'+Pv=0$.

## § 9. ECUACIONES EN DIFERENCIALES TOTALES

**Definición.** La ecuación

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0, \tag{1}$$

se llama *ecuación en diferenciales totales*, si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones continuas y derivables para las que se cumple la correlación:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}, \tag{2}$$

siendo $\frac{\partial M}{\partial y}$ y $\frac{\partial N}{\partial x}$ continuas en un cierto dominio.

**Integración de las ecuaciones en diferenciales totales.** Demostremos que si el primer miembro de la ecuación (1) es una diferencial total, se cumple la condición (2), y, viceversa, si se cumple la condición (2), entonces el primer miembro de la ecuación (1) es la diferencial total de cierta función $u(x, y)$, es decir, la ecuación (1) tiene la forma:

$$du(x, y) = 0 \tag{3}$$

y, por tanto, su integral general es $u(x, y) = C$.

Supongamos, primeramente, que el primer miembro de la ecuación (1) sea diferencial total de cierta función $u(x, y)$, es decir,

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy;$$

entonces:

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad N = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4}$$

Derivando la primera relación respecto a $y$, y la segunda, respecto a $x$, tenemos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}; \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}.$$

Suponiendo que las segundas derivadas son continuas, tenemos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

es decir, la igualdad (2) es condición necesaria para que el primer miembro de la ecuación (1) sea diferencial total de cierta función $u(x, y)$. Mostremos que esta condición será también **suficiente**, es decir, si se cumple la igualdad (2), el primer miembro de la ecuación (1) es diferencial total de cierta función $u(x, y)$.

De la relación

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$$

hallamos que:

$$u = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \varphi(y),$$

donde $x_0$ es la abscisa de un punto arbitrario en el dominio de existencia de la solución.

Integrando respecto a $x$, supongamos $y$ constante. Por eso, la constante arbitraria de integración puede depender de $y$. Eligamos la función $\varphi(y)$ de tal modo que se cumpla la segunda de las correlaciones (4). Para esto derivemos*) ambos miembros de la última igualdad respecto a $y$ e igualamos el resultado a $N(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}\,dx + \varphi'(y) = N(x, y);$$

Pero, como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, se puede escribir:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}\,dx + \varphi'(y) = N, \quad \text{es decir,} \quad N(x, y)\Big|_{x_0}^{x} + \varphi'(y) = N(x, y),$$

ó

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Por tanto,

$$\varphi'(y) = N(x_0, y),$$

ó

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy + C_1.$$

Así pues, la función $u(x, y)$ tomará la forma:

$$u = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy + C_1.$$

Aquí, $P(x_0, y_0)$ es un punto en cuya vecindad existe la solución de la ecuación diferencial (1).

Igualando esta expresión a una constante arbitraria $C$, obtenemos la integral general de la ecuación (1):

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy = C. \tag{5}$$

**Ejemplo.** Sea la ecuación

$$\frac{2x}{y^3}\,dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}\,dy = 0.$$

---

*) La integral $\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx$ depende de $y$. Para hallar la derivada de esta integral respecto a $y$, es preciso derivar respecto a $y$ el integrando:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}\,dx.$$

Ello se deduce del teorema de Leibniz sobre la derivación de una integral definida respecto a un parámetro. (Véase § 10, cap. XI, tomo I)

Averigüemos si esta ecuación está dada en diferenciales totales. Designemos:

$$M=\frac{2x}{y^3}; \quad N=\frac{y^2-3x^2}{y^4};$$

entonces,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{6x}{y^4}; \quad \frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{6x}{y^4}.$$

Para $y \neq 0$ se cumple la condición (2). Por tanto, el primer miembro de la ecuación dada es la diferencial total de cierta función desconocida $u(x, y)$. Hallamos esta función.

Puesto que $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{y^3}$, resulta:

$$u=\int \frac{2x}{y^3}\,dx+\varphi(y)=\frac{x^2}{y^3}+\varphi(y),$$

donde $\varphi(y)$ es una función de $y$, que es preciso determinar.

Derivando respecto a $y$ esta relación y tomando en cuenta que

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N=\frac{y^2-3x^2}{y^4},$$

hallamos:

$$-\frac{3x^2}{y^4}+\varphi'(y)=\frac{y^2-3x^2}{y^4};$$

Por consiguiente,

$$\varphi'(y)=\frac{1}{y^2}, \quad \varphi(y)=-\frac{1}{y}+C_1, \quad u(x, y)=\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}+C_1.$$

Así, la integral general de la ecuación inicial es:

$$\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C.$$

## § 10. FACTOR INTEGRANTE

Suponemos que el primer miembro de la ecuación

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

no es una diferencial total. Se logra a veces elegir una función $\mu(x, y)$ tal que, si multiplicamos todos los términos de la ecuación por esta función, el primer miembro se convierte en una diferencial total. La solución general de la ecuación así obtenida coincide con la solución general de la ecuación inicial; la función $\mu(x, y)$ se llama *factor integrante* de la ecuación (1).

Para hallar un factor integrante $\mu$ procedemos del modo siguiente: multipliquemos los dos miembros de la ecuación dada por el factor integrante $\mu$, por ahora desconocido:

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0.$$

Para que la última ecuación esté dada en diferenciales totales es necesario y suficiente que se cumpla la relación

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

es decir,

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial \mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial \mu}{\partial x},$$

o sea

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y}-N\frac{\partial \mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Al dividir por $\mu$ los dos miembros de la última ecuación, obtenemos:

$$M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y}-N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}. \tag{2}$$

Es evidente que toda función $\mu(x, y)$ que satisface la última ecuación es un factor integrante de la ecuación (1).

La ecuación (2) es una ecuación en derivadas parciales con una función desconocida $\mu$, dependiente de dos variables $x$ e $y$. Se puede demostrar que en ciertas condiciones la ecuación posee una infinidad de soluciones y, por tanto, la ecuación (1) tiene el factor integrante. Pero en el caso general el problema de la búsqueda de $\mu(x, y)$ de la ecuación (2) es más difícil que el de integrar la ecuación (1). Sólo en algunos casos particulares se logra determinar la función $\mu(x, y)$.

Supongamos, por ejemplo, que la ecuación (1) admita un factor integrante que **depende sólo** de $y$. Entonces,

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x}=0,$$

y para hallar $\mu$ obtenemos una ecuación diferencial **ordinaria:**

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y}=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M},$$

de la que se determina (por medio de una cuadratura) $\ln \mu$ y, por tanto, el propio $\mu$. Es evidente, que de esta manera se puede proceder sólo cuando la expresión $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ no depende de $x$.

Análogamente, si la expresión $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{N}$ no depende de $y$, sino exclusivamente de $x$, es fácil hallar el factor integrante que **depende solamente de $x$.**

**Ejemplo.** Hallar la solución de la ecuación

$$(y+xy^2)\,dx-x\,dy=0.$$

***Solución.*** Aquí: $M=y+xy^2$; $N=-x$;

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1+2xy;\quad \frac{\partial N}{\partial x}=-1;\quad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Por consiguiente, el primer miembro de la ecuación **no es** diferencial total. Examinemos si esta ecuación admite un factor integrante que depende sólo de $y$. Notemos que

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{-1-1-2xy}{y+xy^2}=-\frac{2}{y},$$

concluimos que la ecuación lo admite. Encontremos ahora este factor integrante:

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial y}=-\frac{2}{y};$$

de donde:

$$\ln\mu=-2\ln y,\quad \text{es decir}\quad \mu=\frac{1}{y^2}.$$

Después de multiplicar todos los términos de la ecuación dada por el factor integrante determinado $\mu$ obtenemos la ecuación $\left(\frac{1}{y}+x\right)dx-\frac{x}{y^2}\,dy=0$ en diferenciales totales $\left(\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}\right)$. Resolviéndola, encontramos su integral general:

$$\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}+C=0,$$

o

$$y=-\frac{2x}{x^2+2C}.$$

## § 11. ENVOLVENTE DE UNA FAMILIA DE CURVAS

Sea dada una ecuación de la forma

$$\Phi(x,\ y,\ C)=0, \tag{1}$$

donde $x$ e $y$ son las coordenadas variables de Descartes y $C$, un parámetro que pueda tomar diferentes valores fijados.

Para cada valor dado del parámetro $C$ la ecuación (1) determina cierta **curva** en el plano $Oxy$. Dando a $C$ todos los valores posibles obtenemos una **familia de curvas** que dependen de un solo parámetro, o, como suele decirse, una familia de curvas monoparamétrica. Así, la ecuación (1) es la ecuación de una **familia de curvas monoparamétrica** (puesto que contiene una sola constante arbitraria).

**Definición.** La línea $L$ se llama *envolvente* de una familia de curvas monoparamétrica, si en cada uno de sus puntos toca una u otra

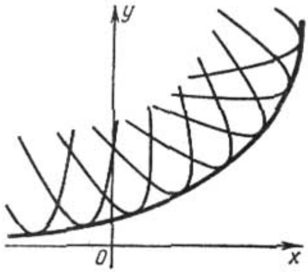


*Fig. 250*

curva de la familia, y también, diferentes curvas de la familia dada tocan la línea $L$ en distintos puntos (fig. 250).

**Ejemplo 1.** Examinemos la familia de curvas

$$(x-C)^2+y^2=R^2,$$

donde $R$ es una constante, y $C$, un parámetro.

Es la ecuación de una familia de circunferencias de radio $R$ y centros en el eje $Ox$. Es evidente que esta familia admite como envolventes las rectas $y=R$, $y=-R$ (fig. 251).

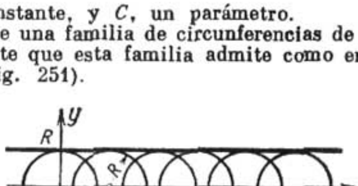


*Fig. 251*

**Búsqueda de la ecuación de la envolvente de una familia dada.** Sea la familia de curvas

$$\Phi(x, y, C)=0, \tag{1}$$

que dependen de un parámetro $C$.

Supongamos que esta familia tenga una envolvente cuya ecuación se puede escribir en la forma $y = \varphi(x)$, donde $\varphi(x)$ es una función continua y derivable de $x$. Examinemos un punto $M(x, y)$ que se halla en la envolvente. Este punto pertenece, también, a cierta curva de la familia (1). A esta curva corresponde un valor determinado del parámetro $C$, este valor para dadas $(x, y)$ se define de la ecuación (1) $C = C(x, y)$. Por tanto, para todos los puntos de la envolvente se verifica la igualdad

$$\Phi(x, y, C(x, y)) = 0. \tag{2}$$

Supongamos que $C(x, y)$ sea función derivable, no constante en ningún intervalo de los valores estudiados de $x$, $y$. Partiendo de la ecuación (2) de la envolvente, encontremos el coeficiente angular de la tangente a la envolvente en el punto $M(x, y)$. Derivemos la ecuación (2) respecto a $x$, considerando $y$ como función de $x$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial x} + \left[\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial y}\right] y' = 0$$

ó

$$\Phi'_x + \Phi'_y y' + \Phi'_C \left[\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y'\right] = 0. \tag{3}$$

Luego, el coeficiente angular de la tangente a la curva de la familia (1) en el punto $M(x, y)$ se deduce de la ecuación:

$$\Phi'_x + \Phi'_y y' = 0 \tag{4}$$

(en la curva dada $C$ es constante).

Supongamos que $\Phi'_y \neq 0$; en caso contrario consideremos $x$ como la función e $y$, como el argumento. Puesto que el coeficiente angular $k$ de la envolvente es igual al de la curva de la familia, de las ecuaciones (3) y (4) se deduce:

$$\Phi'_C \left[\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y'\right] = 0.$$

Pero como $C(x, y) \neq \text{const}$ en la envolvente, entonces:

$$\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \neq 0,$$

por lo que para sus puntos es válida la igualdad:

$$\Phi'_C(x, y, C) = 0. \tag{5}$$

Así, para determinar la envolvente sirven las dos ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(x,\ y,\ C)=0,\\ \Phi'_C(x,\ y,\ C)=0.\end{array}\right\} \qquad (6)$$

Si, eliminando $C$ de estas ecuaciones, obtenemos $y = \varphi(x)$, donde $\varphi(x)$ es una función derivable, siendo $C \neq$ const en esta curva, entonces $y = \varphi(x)$ es la ecuación de la envolvente.

**Observación 1.** Si una función $y = \varphi(x)$ es la ecuación del lugar geométrico de *puntos singulares* de la familia (1), es decir, de los puntos donde $\Phi'_x = 0$ y $\Phi'_y = 0$, entonces las coordenadas de estos puntos también satisfacen las ecuaciones (6).

En efecto, las coordenadas de los puntos singulares se pueden expresar en función del parámetro $C$ que entra en la ecuación (1):

$$x = \lambda(C), \quad y = \mu(C). \qquad (7)$$

Poniendo estas expresiones en la ecuación (1), obtenemos una identidad respecto a $C$:

$$\Phi[\lambda(C),\ \ \mu(C),\ C] = 0.$$

Derivando esta identidad respecto a $C$, obtenemos:

$$\Phi'_x\frac{d\lambda}{dC}+\Phi'_y\frac{d\mu}{dC}+\Phi'_C=0;$$

puesto que para los puntos cualesquiera se cumplen las igualdades $\Phi'_x = 0$, $\Phi'_y = 0$, para estos puntos se cumple, también, la ecuación $\Phi'_C = 0$.

De esta manera hemos demostrado que las coordenadas de los puntos singulares satisfacen las ecuaciones (6).

Así, las ecuaciones (6) definen la envolvente, o bien el lugar geométrico de los puntos singulares de la familia (1), o bien la combinación de ambas cosas. Por consiguiente, al obtener una curva que satisface las ecuaciones (6), hace falta realizar un estudio con el objeto de determinar, si esta curva es envolvente o lugar geométrico de los puntos singulares.

**Ejemplo 2.** Hallar la envolvente de la familia de circunferencias

$$(x - C)^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

que dependen de un solo parámetro $C$.

**Solución.** Derivando la ecuación de la familia respecto a $C$, tenemos:

$$2(x - C) = 0.$$

Eliminando $C$ de estas dos ecuaciones, obtenemos la ecuación:

$$y^2 - R^2 = 0 \text{ ó } y = \pm R.$$

De consideraciones geométricas resulta que el par de rectas obtenido es la **envolvente** (y no lugar geométrico de los puntos singulares, puesto que las circunferencias que integran la familia no tienen puntos singulares).

**Ejemplo 3.** Hallar la envolvente de la familia de las rectas:

$$x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha - p = 0 \tag{a}$$

donde, $\alpha$ es un parámetro.

**Solución.** Derivando respecto a $\alpha$ la ecuación dada de la familia, tenemos:

$$-x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha = 0. \tag{b}$$

Para eliminar el parámetro $\alpha$ de las ecuaciones (a) y (b), multipliquemos los términos de la primera ecuación por $\cos\alpha$ y los términos de la segunda,

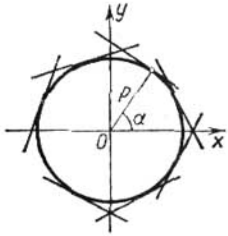


*Fig. 252*

por $\operatorname{sen}\alpha$. Luego restamos la segunda ecuación de la primera. En este caso *obtenemos:*

$$x = p \cos\alpha.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (b), hallamos:

$$y = p \operatorname{sen}\alpha.$$

Elevando al cuadrado los miembros de las dos últimas ecuaciones y sumándolas miembro a miembro obtenemos:

$$x^2 + y^2 = p^2.$$

Es la ecuación de una circunferencia que sirve de **envolvente** de la familia de rectas (y no lugar geométrico de los puntos singulares, puesto que las rectas no tienen estos puntos) (fig. 252).

**Ejemplo 4.** Hallar la envolvente de las trayectorias de los proyectiles lanzados, por una pieza de artillería, con velocidad $v_0$ bajo diferentes ángulos de inclinación del cañón respecto al horizonte. Supongamos que los proyectiles son lanzados desde el origen de coordenadas y que sus trayectorias se hallan en el plano $Oxy$ (despreciando la resistencia del aire).

**Solución.** Hallemos al principio la ecuación de la trayectoria de un proyectil lanzado bajo el ángulo $\alpha$ en la dirección positiva del eje $Ox$. Durante su *vuelo el proyectil participa simultáneamente en dos movimientos:* un movimiento uniforme en la dirección del lanzamiento, con velocidad $v_0$; y otro movimiento de caída por acción de la fuerza de gravedad.

De consideraciones geométricas resulta que el par de rectas obtenido es la **envolvente** (y no lugar geométrico de los puntos singulares, puesto que las circunferencias que integran la familia no tienen puntos singulares).

**Ejemplo 3.** Hallar la envolvente de la familia de las rectas:

$$x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - p = 0 \tag{a}$$

donde, $\alpha$ es un parámetro.

**Solución.** Derivando respecto a $\alpha$ la ecuación dada de la familia, tenemos:

$$-x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha = 0. \tag{b}$$

Para eliminar el parámetro $\alpha$ de las ecuaciones (a) y (b), multipliquemos los términos de la primera ecuación por $\cos \alpha$ y los términos de la segunda,

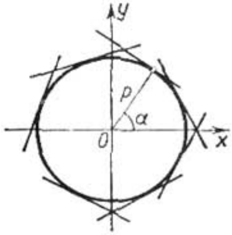


*Fig. 252*

por $\operatorname{sen} \alpha$. Luego restamos la segunda ecuación de la primera. En este caso obtenemos:

$$x = p \cos \alpha.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (b), hallamos:

$$y = p \operatorname{sen} \alpha.$$

Elevando al cuadrado los miembros de las dos últimas ecuaciones y sumándolas miembro a miembro obtenemos:

$$x^2 + y^2 = p^2.$$

Es la ecuación de una circunferencia que sirve de **envolvente** de la familia de rectas (*y no lugar geométrico de los puntos singulares, puesto que las* rectas no tienen estos puntos) (fig. 252).

**Ejemplo 4.** Hallar la envolvente de las trayectorias de los proyectiles lanzados, por una pieza de artillería, con velocidad $v_0$ bajo diferentes ángulos de inclinación del cañón respecto al horizonte. Supongamos que los proyectiles son lanzados desde el origen de coordenadas y que sus trayectorias se hallan en el plano $Oxy$ (despreciando la resistencia del aire).

**Solución.** Hallemos al principio la ecuación de la trayectoria de un proyectil lanzado bajo el ángulo $\alpha$ en la dirección positiva del eje $Ox$. Durante su vuelo el proyectil participa simultáneamente en dos movimientos: un movimiento uniforme en la dirección del lanzamiento, con velocidad $v_0$; y otro movimiento de caída por acción de la fuerza de gravedad.

Por eso, a cada instante $t$, la posición del proyectil $M$ (fig. 253) está definida por las ecuaciones:

$$x = v_0 t \cos\alpha,$$
$$y = v_0 t \operatorname{sen}\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Estas son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria (el parámetro es el tiempo $t$).

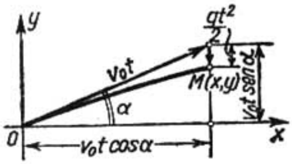


*Fig. 253*

Eliminando $t$, obtenemos la ecuación de la trayectoria en la siguiente forma:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha};$$

e introduciendo las designaciones: $\operatorname{tg}\alpha = k$, $\frac{g}{2v_0^2} = a$, obtenemos:

$$y = kx - ax^2(1 + k^2). \tag{8}$$

Esta ecuación define una parábola con el eje vertical, que pasa por el origen de coordenadas y las ramas dirigidas hacia abajo. Para distintos valores de $k$ obtenemos trayectorias diferentes. La ecuación (8), por consiguiente,

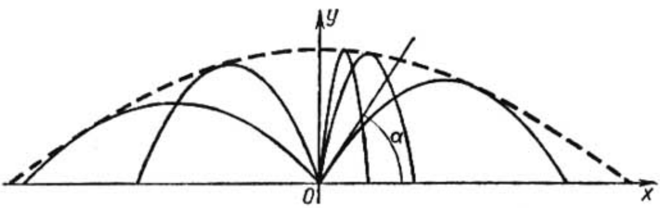


*Fig. 254*

es la ecuación de una familia monoparamétrica de parábolas que son las trayectorias del proyectil a diferentes ángulos $\alpha$, con una velocidad inicial dada $v_0$ (fig. 254).

Hallemos la envolvente de esta familia de parábolas.

Derivando respecto a $k$ ambos miembros de la ecuación (8), tenemos:

$$x - 2akx^2 = 0. \tag{9}$$

Eliminando $k$ de las ecuaciones (8) y (9), obtenemos:

$$y=\frac{1}{4a}-ax^2.$$

Es la ecuación de una parábola con el vértice en el punto $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$, cuyo eje coincide con el $Oy$. Esta ecuación no es un lugar geométrico de los puntos

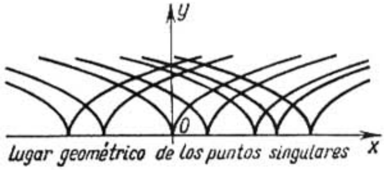


*Fig. 255*

singulares (puesto que las parábolas (8) no tiene puntos singulares). Así, la parábola

$$y=\frac{1}{4a}-ax^2$$

es envolvente para la familia de trayectorias. Se llama **parábola de seguridad**, puesto que ningun punto situado fuera de sus límites puede ser alcanzado por un proyectil lanzado de este cañón dado con la velocidad inicial $v_0$.

**Ejemplo 5.** Hallar la envolvente de la familia de parábolas semicúbicas

$$y^3-(x-C)^2=0.$$

**Solución.** Derivemos la ecuación dada de la familia respecto al parámetro $C$:

$$2(x-C)=0.$$

Eliminando el parámetro $C$ de ambas ecuaciones, obtenemos:

$$y=0.$$

El eje $Ox$ es un lugar geométrico de los puntos singulares: los de retroceso de primera especie (fig. 255). En efecto, hallemos los puntos singulares de la curva

$$y^3-(x-C)^2=0,$$

fijando el valor de $C$. Derivando respecto a $x$ e $y$, hallamos:

$$F'_x=-2(x-C)=0;$$
$$F'_y=3y^2=0.$$

Resolviendo simultáneamente las tres ecuaciones anteriores, hallamos las coordenadas de un punto singular: $x=C$, $y=0$. Por tanto, cada curva de la familia dada tiene un punto singular en el eje $Ox$. Si el parámetro $C$ varía continuamente, los puntos singulares llenan todo el eje $Ox$.

**Ejemplo 6.** Hallar la envolvente y el lugar geométrico de los puntos singulares de la familia:

$$(y-C)^2-\frac{2}{3}(x-C)^3=0. \tag{10}$$

**Solución.** Derivando respecto a $C$ ambos miembros de la ecuación (10), encontramos:

$$-2(y-C)+\frac{2}{3}3(x-C)^2=0$$

ó

$$y-C-(x-C)^2=0. \tag{11}$$

Eliminemos ahora el parámetro $C$ de las ecuaciones (10) y (11). Poniendo la expresión

$$y-C=(x-C)^2$$

en la ecuación (10), obtenemos:

$$(x-C)^4-\frac{2}{3}(x-C)^3=0,$$

ó

$$(x-C)^3\left[(x-C)-\frac{2}{3}\right]=0,$$

de donde obtenemos dos valores posibles de $C$ a los que corresponden dos soluciones del problema.

Primera solución:

$$C=x;$$

por eso, de la ecuación (11) encontramos:

$$y-x-(x-x)^2=0$$

ó

$$y=x$$

Segunda solución:

$$C=x-\frac{2}{3};$$

por eso, de la ecuación (11) encontramos:

$$y-x+\frac{2}{3}-\left[x-x+\frac{2}{3}\right]^2=0$$

ó

$$y=x-\frac{2}{9}.$$

Hemos obtenido dos rectas: $y=x$ e $y=x-\frac{2}{9}$. La primera de ellas es el lugar geométrico de los puntos singulares, la segunda es envolvente (fig. 256).

**Observación 2.** Hemos demostrado en el § 7, cap. VI, que las normales a una curva son las tangentes a la evoluta de esta curva. Por consiguiente, la familia de las normales a una curva dada es al mismo tiempo la familia de las tangentes a su evoluta. Así, la **evoluta de una curva es la envolvente de la familia de las normales a esta curva** (fig. 257).

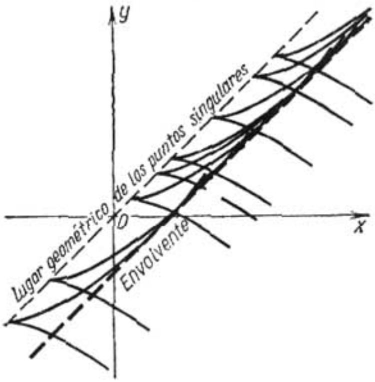


Fig. 256

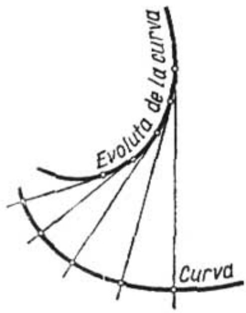


Fig. 257

La observación dada permite utilizar un método más para hallar la evoluta: para obtener la ecuación de la evoluta es preciso hallar al principio la familia de todas las normales a la curva dada y después *encontrar* la envolvente de esta familia.

## § 12. SOLUCIONES SINGULARES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Supongamos que la ecuación diferencial

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0 \tag{1}$$

tenga la integral general

$$\Phi\ (x,\ y,\ C)=0. \tag{2}$$

**Supongamos también que la familia de las curvas integrales, correspondiente a la ecuación (2), tiene una envolvente. Demostremos que esta envolvente es también una curva integral de la ecuación diferencial (1).**

**En efecto, la envolvente toca en cada uno de sus puntos a cierta curva de la familia, es decir, la envolvente tiene en este punto una tangente común con la curva. Por consiguiente, en cada punto común la envolvente y la curva de la familia tienen valores iguales de las magnitudes $x$, $y$, $y'$.**

**Pero, para la curva de la familia las magnitudes $x$, $y$, $y'$ satisfacen la ecuación (1). Por tanto, la abscisa, la ordenada y el coeficiente angular de cada punto de la envolvente satisfacen también la misma ecuación lo que significa que la envolvente es una curva**

integral y que su ecuación es una solución de la ecuación diferencial dada. Pero, como la envolvente no es en general una curva de la familia, su ecuación no se puede deducir de la integral general (2), cualquiera que sea el valor particular de $C$. La solución de la ecuación diferencial que no se obtiene de la integral general cualquiera que sea el valor de $C$, y que tiene como gráfica la envolvente de la familia de curvas integrales que entran en la solución general, se llama *solución singular* de la ecuación diferencial.

Suponemos conocida la integral general

$$\Phi(x, y, C) = 0;$$

eliminando $C$ de esta ecuación y de la ecuación $\Phi'_C(x, y, C) = 0$ obtenemos la ecuación $\psi(x, y) = 0$. Si esta función satisface la ecuación diferencial (y no pertenece a la familia (2)), entonces es *la integral singular.*

Notemos que por todo punto de la curva que represente la solución singular pasan por lo menos dos curvas integrales, es decir, **la unicidad de la solución se perturba en cada punto de una solución singular.**

**Ejemplo.** Hallar la solución singular de la ecuación

$$y^2(1 + y'^2) = R^2. \qquad (*)$$

**Solución.** Hallemos su integral general. Resolvamos la ecuación respecto a $y'$:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y}.$$

Separando las variables, obtenemos:

$$\frac{y\,dy}{\pm\sqrt{R^2 - y^2}} = dx.$$

De aquí, integrando, encontramos la integral general:

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2.$$

Es fácil ver que la familia de curvas integrales es la de circunferencias de radio $R$, con centros en el eje de las abscisas. La envolvente de esta familia de curvas está dada por las dos rectas $y = \pm R$.

Las funciones $y = \pm R$ satisfacen la ecuación diferencial (*), de donde se deduce que es la integral singular.

## § 13. ECUACION DE CLAIRAUT

Examinemos la ecuación

$$y = x\frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right), \qquad (1)$$

*llamada de Clairaut.*

Esta se integra introduciendo un parámetro auxiliar. Hagamos $\frac{dy}{dx}=p$, entonces la ecuación (1) toma la forma:

$$y = xp + \psi(p). \tag{1'}$$

Derivemos todos los términos de la última ecuación respecto *a $x$, teniendo en cuenta que $p=\frac{dy}{dx}$ es una función de $x$:*

$$p = x\frac{dp}{dx} + p + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

ó

$$[x+\psi'(p)]\frac{dp}{dx}=0.$$

Igualando a cero cada factor, obtenemos:

$$\frac{dp}{dx}=0, \tag{2}$$

y

$$x + \psi'(p) = 0. \tag{3}$$

1) La integración de la igualdad (2) da $p = C$ ($C$ = const.). Poniendo este valor de $p$ en la ecuación (1') encontramos su integral general:

$$y = xC + \psi(C), \tag{4}$$

que, desde el punto de vista geométrico, representa una **familia de rectas**.

2) De la ecuación (3) encontremos $p$ como función de $x$, y pongámoslo en la ecuación (1'), entonces obtenemos la función:

$$y = xp(x) + \psi[p(x)], \tag{1''}$$

la cual es una solución de la ecuación (1), lo que es muy fácil demostrar.

En efecto, en virtud de la igualdad (3) tenemos:

$$\frac{dy}{dx}=p+[x+\psi'(p)]\frac{dp}{dx}=p.$$

Por eso, introduciendo la función (1'') en la ecuación (1), obtenemos la identidad:

$$xp + \psi(p) = xp + \psi(p).$$

*La solución (1'') no se puede obtener a partir de la integral general* (4), cualquiera que sea el valor de $C$. Es una **solución singular** y se obtiene eliminando el parámetro $p$ de las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} y &= xp + \psi(p), \\ x &= \psi'(p) = 0, \end{aligned}\right\}$$

o, lo que es igual, eliminando $C$ de las ecuaciones

$$y = xC + \psi(C),$$
$$x + \psi'_C(C) = 0.$$

Por consiguiente, **la solución singular de la ecuación de Clairaut determina una envolvente de la familia de rectas, dadas por la integral general** (4).

**Ejemplo:** Hallar las integrales general y singular de la ecuación

$$y = x\frac{dy}{dx} + \frac{a\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

**Solución.** Sustituyendo $\frac{dy}{dx}$ por $C$ obtenemos la integral general:

$$y = xC + \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}.$$

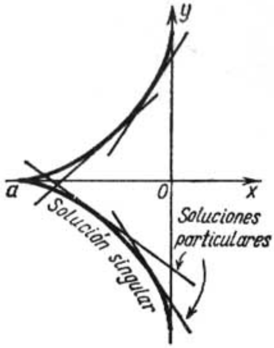


*Fig. 258*

Para obtener la solución singular derivamos la última ecuación respecto a $C$:

$$x + \frac{a}{(1+C^2)^{3/2}} = 0.$$

La solución singular (ecuación de la envolvente) se obtiene en la forma paramétrica (donde $C$ es el parámetro):

$$\begin{cases} x = -\dfrac{a}{(1+C^2)^{3/2}}, \\ y = \dfrac{aC^3}{(1+C^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Eliminando el parámetro $C$ podemos obtener la dependencia directa entre $x$ e $y$. Elevando ambos miembros de cada ecuación a la potenica $\frac{2}{3}$, y sumando miembro a miembro las ecuaciones obtenidas, hallamos la solución singular en la forma siguiente:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Es una astroide. Sin embargo, como envolvente de la familia de rectas (y, por tanto, como solución singular) se presenta no toda la astroide, sino sólo su mitad izquierda (puesto que de las ecuaciones paramétricas de la envolvente se deduce que $x \leqslant 0$) (fig. 258).

## § 14. ECUACION DE LAGRANGE

La ecuación de la forma

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \tag{1}$$

*donde* $\varphi$ y $\psi$ *son* funciones conocidas de $\frac{dy}{dx}$, se llama *ecuación de Lagrange*. Esta ecuación es lineal respecto a $y$ y $x$. La ecuación de Clairaut, examinada en el párrafo anterior, es un caso particular de la ecuación de Lagrange, cuando $\varphi(y') \equiv y'$. Lo mismo que en *el caso de la ecuación de* Clairaut, la ecuación de Lagrange se integra introduciendo un parámetro auxiliar $p$.

Hagamos:

$$y' = p;$$

entonces, la ecuación original toma la forma:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \tag{1'}$$

Derivando respecto a $x$, obtenemos:

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx},$$

ó

$$p - \varphi(p) = [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}. \tag{1''}$$

De esta ecuación se puede deducir inmediatamente ciertas soluciones, a saber: la ecuación se transforma en una identidad para todo valor constante $p = p_0$, que satisfaga la condición:

$$p_0 - \varphi(p_0) = 0.$$

En efecto, siendo $p$ constante, la derivada $\frac{dp}{dx} \equiv 0$ y ambos miembros de la ecuación (1″) se anulan. La solución que corresponde a cada valor de $p = p_0$, es decir, $\frac{dy}{dx} = p_0$, es una función **lineal** de $x$ $\left(\text{puesto que la derivada } \frac{dy}{dx} \text{ es constante sólo para las funciones lineales}\right)$. Para hallar esta función es suficiente sustituir en la ecuación (1′) el valor $p = p_0$:

$$y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0).$$

Si esta solución no se deduce de la solución general, cualquiera que sea el valor de la constante arbitraria, será, por tanto, una **solución singular**.

Encontremos, ahora, la **solución general**. Para esto escribamos la ecuación (1″) en la forma:

$$\frac{dx}{dp} - x\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}$$

considerando $x$ como función de $p$. La ecuación obtenida es entonces una ecuación diferencial lineal respecto a la función $x$ de $p$.

Resolviéndola, encontramos:

$$x = \omega\,(p,\ C). \tag{2}$$

Eliminando el parámetro $p$ de las ecuaciones (1′) y (2), obtenemos la **integral general** de la ecuación (1) en la siguiente forma:

$$\Phi\,(x,\ y,\ C) = 0.$$

**Ejemplo.** Sea la ecuación

$$y = xy'^2 + y'^2. \tag{I}$$

Haciendo $y' = p$, tenemos:

$$y = xp^2 + p^2. \tag{I′}$$

Derivando respecto a $x$, obtenemos:

$$p = p^2 + [2xp + 2p]\frac{dp}{dx}. \tag{I″}$$

Hallemos las **soluciones singulares**. Puesto que $p = p^2$, cuando $p_0 = 0$ y $p_1 = 1$, en calidad de soluciones se presentan las funciones lineales [véase (I′)]:

$$y = x \cdot 0^2 + 0^2, \text{ es decir, } y = 0,$$

e

$$y = x + 1.$$

Después de encontrar la integral general, veamos, si estas funciones son las soluciones particulares o singulares. Para hallar la integral general escribamos la ecuación (I″) en la forma:

$$\frac{dx}{dp} - x\frac{2p}{p-p^2} = \frac{2}{1-p}$$

considerando $x$ como función de la variable independiente $p$. Integrando la ecuación lineal (respecto a $x$) hallamos.

$$x = -1 + \frac{C^2}{(p-1)^2}. \tag{II}$$

Eliminando $p$ de las ecuaciones (I′) y (II), obtenemos la **integral general**:

$$y = (C + \sqrt{x+1})^2.$$

La **integral singular** de la ecuación original será:

$$y = 0,$$

puesto que esta solución no se deduce de la solución general cualquiera que sea el valor de $C$.

Sin embargo, la función $y = x + 1$ no es una solución singular, sino particular, y se deduce de la solución general, poniendo $C = 0$.

## § 15. TRAYECTORIAS ORTOGONALES E ISOGONALES

Sea una familia de curvas monoparamétrica

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{1}$$

Las líneas que cortan todas las curvas de la familia dada (1) bajo un ángulo constante se llaman *trayectorias isogonales*. Si este ángulo es recto, las trayectorias se llaman *ortogonales*.

**Trayectorias ortogonales.** Hallemos la ecuación de las trayectorias ortogonales. Escribamos la ecuación diferencial de la familia dada de curvas, eliminando $C$ de las ecuaciones:

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

y

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Sea $$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{1'}$$

una ecuación diferencial.

Aquí, $\frac{dy}{dx}$ es un coeficiente angular de la tangente a una curva de la familia en el punto $M(x, y)$. Puesto que la trayectoria ortogonal, que pasa por el punto $M(x, y)$, es perpendicular a la curva correspondiente de la familia, entonces el coeficiente angular $\frac{dy_T}{dx}$ de la tangente a esta curva está ligado con $\frac{dy}{dx}$ por la correlación (fig. 259)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy_T}{dx}}. \tag{2}$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (1′) y omitiendo el índice $T$, obtenemos una relación entre las coordenadas de un punto arbitrario $(x, y)$ y el coeficiente angular de la trayectoria ortogonal en este punto, es decir, la **ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales:**

$$F\left(x, y, -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right) = 0. \tag{3}$$

La integral general de esta ecuación

$$\Phi_1(x, y, C) = 0$$

da la **familia de trayectorias ortogonales.**

Las trayectorias ortogonales se encuentran, por ejemplo, cuando estudiamos una corriente plana de un líquido.

Supongamos que la corriente de un líquido en un plano sea tal que en cada punto del plano $Oxy$ esté determinado el vector $\boldsymbol{v}(x, y)$ de la velocidad del movimiento. Si este vector depende

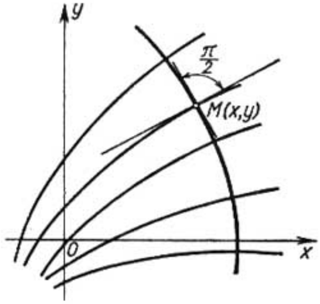


*Fig. 259*

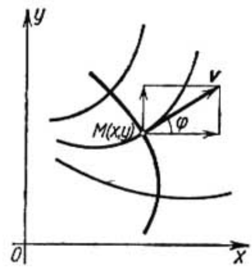


*Fig. 260*

sólo de la posición del punto en el plano y no depende del tiempo, entonces este movimiento se llama estacionario, o establecido. Examinemos, precisamente, un movimiento semejante. Admitamos, además, que existe un potencial de velocidades, es decir, una función $u(x, y)$ tal que las proyecciones del vector $\boldsymbol{v}(x, y)$ sobre los ejes de coordenadas $v_x(x, y)$ y $v_y(x, y)$, sean sus derivadas parciales respecto a $x$ e $y$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v_x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = v_y. \tag{4}$$

Las curvas de la familia

$$u(x, y) = C \tag{5}$$

se llaman *equipotenciales* (es decir, líneas de igual potencial).

Las curvas cuyas tangentes en cada punto coinciden en dirección con el vector $\boldsymbol{v}(x, y)$, se llaman *líneas de corriente* y representan las trayectorias de los puntos móviles.

Demostremos que las líneas de corriente son trayectorias ortogonales de la familia de líneas equipotenciales (fig. 260).

Sea $\varphi$ el ángulo formado por el vector de velocidad $\boldsymbol{v}$ con el eje $Ox$. En virtud de la correlación (4) tenemos:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = |\boldsymbol{v}| \cos\varphi; \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = |\boldsymbol{v}| \operatorname{sen}\varphi;$$

de aquí hallamos el coeficiente angular de la tangente a la línea de corriente

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y}}{\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x}}. \tag{6}$$

Derivando la relación (5) respecto a $x$, obtenemos el coeficiente angular de la tangente a la línea equipotencial:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

de donde:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}}. \tag{7}$$

Por consiguiente, el coeficiente angular de la tangente a la línea equipotencial es inverso, en magnitud y signo, al coeficiente angular de la tangente a la línea de corriente, de donde se deduce que las líneas equipotenciales y las de corriente son mutuamente ortogonales.

Si se trata de un campo eléctrico o magnético, las trayectorias ortogonales de la familia de líneas equipotenciales son las líneas de fuerza del campo correspondiente.

**Ejemplo 1.** Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de parábolas

$$y = Cx^2.$$

**Solución.** Escribamos la ecuación diferencial de la familia:

$$y' = 2Cx.$$

Eliminando $C$, obtenemos:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}.$$

Sustituyendo $y'$ por $-\frac{1}{y'}$, obtenemos la ecuación diferencial de la familia de trayectorias ortogonales:

$$-\frac{1}{yy'} = \frac{2}{x}$$

o sea

$$y\,dy = -\frac{x\,dx}{2}.$$

Su integral general es:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = C^2.$$

Por consiguiente, las trayectorias ortogonales de la familia dada de parábolas forma una familia de elipses con semiejes $a = 2C$, y $b = C\sqrt{2}$ (fig. 261).

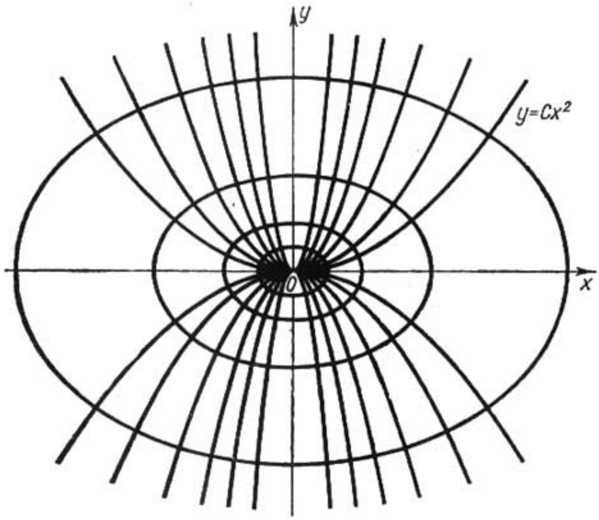


*Fig. 261*

**Trayectorias isogonales.** Supongamos que las trayectorias corten las curvas de una familia dada bajo el ángulo $\alpha$, siendo $\operatorname{tg}\alpha = k$. El coeficiente angular $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi$ (fig. 262) de la tangente a la curva de la familia, y el coeficiente angular $\frac{dy_T}{dx} = \operatorname{tg}\psi$ de la tangente a la trayectoria isogonal están ligados mediante la correlación:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\psi - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\psi},$$

es decir,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy_T}{dx}-k}{k\frac{dy_T}{dx}+1}. \tag{2'}$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (1') y quitando el índice $T$, obtenemos la ecuación diferencial de las trayectorias isogonales.

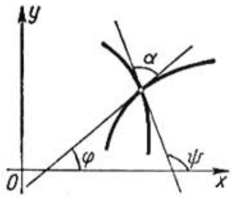


*Fig. 262*

**Ejemplo 2.** Hallar las trayectorias isogonales de la familia de rectas:

$$y = Cx, \tag{8}$$

que cortan las líneas de la familia dada bajo el ángulo $\alpha$, siendo $\operatorname{tg}\alpha = k$.

**Solución.** Escribamos la ecuación diferencial de la familia de rectas. Derivando la ecuación (8) respecto a $x$, hallemos:

$$\frac{dy}{dx}=C.$$

Por otra parte, de la misma ecuación se deduce:

$$C=\frac{y}{x}.$$

Por consiguiente, la ecuación diferencial de la familia dada tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.$$

Utilizando la relación (2') obtenemos la ecuación diferencial de las trayectorias isogonales:

$$\frac{\frac{dy_T}{dx}-k}{k\frac{dy_T}{dx}+1}=\frac{y}{x}.$$

De donde, quitando el índice $T$, encontramos:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{k+\frac{y}{x}}{1-k\frac{y}{x}}.$$

Integrando esta ecuación homogénea obtenemos la integral general:

$$\ln \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln C, \tag{9}$$

que determina la familia de las trayectorias isogonales. Para aclarar cuáles son las curvas de esta familia, pasemos a coordenadas polares:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi; \quad \sqrt{x^2+y^2} = \rho.$$

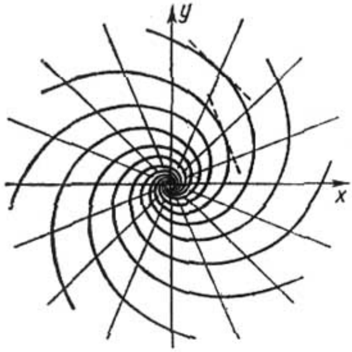


*Fig. 263*

Introduciendo estas expresiones en la igualdad (9), obtenemos:

$$\ln \rho = \frac{1}{k} \varphi + \ln C$$

ó

$$\rho = Ce^{\frac{\varphi}{k}}.$$

Por consiguiente, la familia de las trayectorias isogonales está compuesta por espirales logarítmicas (fig. 263).

## § 16. ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDENES SUPERIORES (GENERALIDADES)

Como hemos indicado más arriba (véase § 2), se puede escribir simbólicamente una ecuación diferencial de $n$-ésimo orden en la forma:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

o, si se puede resolverla respecto a la $n$-ésima derivada,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{1'}$$

En el capítulo presente estudiamos sólo las ecuaciones de órdenes superiores, que se resuelven respecto a la derivada del orden más alto. Para estas ecuaciones tiene lugar el teorema de existencia y unicidad de la solución, análogo al teorema correspondiente sobre la solución de las ecuaciones de primer orden.

**Teorema.** *Si en la ecuación*

$$y^{(n)}=f\left(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}\right)$$

*la función $f(x,\ y,\ y',\ \ldots\ y^{(n-1)})$ y sus derivadas parciales respecto a los argumentos $y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}$ son continuas en un cierto dominio que contiene los valores $x=x_0,\ y=y_0,\ y'=y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}=$ $=y_0^{(n-1)}$, existe solamente la solución única $y=y(x)$ de la ecuación que satisface las condiciones:*

$$\begin{aligned} y_{x=x_0} &= y_0, \\ y'_{x=x_0} &= y'_0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}_{x=x_0} &= y_0^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Estas condiciones se llaman *iniciales*. En la presente obra no se demuestra este teorema.

Si analizamos una ecuación de segundo orden $y''=f(x,\ y,\ y')$, las condiciones iniciales de la solución para $x=x_0$ serán:

$$y=y_0, \qquad y'=y'_0,$$

donde $x_0,\ y_0,\ y'_0$ son números dados. El significado geométrico de estas condiciones es el siguiente: por el punto dado de un plano $(x_0,\ y_0)$ pasa una sola curva cuya tangente del ángulo de inclinación de la línea tangente es $y'_0$. De aquí se deduce, además, que si damos diferentes valores a $y'_0$, conservando constantes $x_0$ e $y_0$, obtenemos una infinidad de curvas integrales con diferentes ángulos de inclinación que pasan por el punto dado.

Introduzcamos, ahora, la noción de solución general de una ecuación de $n$-ésimo orden.

**Definición.** Se llama *solución general* de una ecuación diferencial de $n$-ésimo orden una función

$$y=\varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n),$$

que depende de $n$ constantes arbitrarias $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ de tal modo que:

a) satisfaga la ecuación cualesquiera que sean los valores de las constantes $C_1,\ C_2,\ \ldots\ C_n$;

b) para las condiciones iniciales dadas:

$$y_{x=x_0}=y_0,$$
$$y'_{x=x_0}=y'_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n-1)}_{x=x_0}=y^{(n-1)}_0$$

se puede elegir las constantes $C_1, C_2 \ldots, C_n$ así que la función $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ satisfaga estas condiciones (suponiendo que los valores iniciales $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ pertenezcan al dominio de existencia de la solución).

Una correlación de la forma $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, que define la solución general de manera implícita se llama *integral general* de la ecuación diferencial.

Toda función que se obtiene de la solución general para valores concretos de las constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, se llama *solución particular*. La gráfica de una solución particular se llama *curva integral* de la ecuación diferencial dada.

Resolver (integrar) una ecuación diferencial de $n$-ésimo orden significa:

1) hallar su solución general (si no se han dado las condiciones iniciales), o:

2) hallar tal solución particular de la ecuación que satisfaga las condiciones iniciales dadas (si éstas existen).

En los párrafos siguientes veremos los métodos de resolver distintas ecuaciones de $n$-ésimo orden.

## § 17. ECUACION DE LA FORMA $y^{(n)}=f(x)$

La ecuación de la forma

$$y^{(n)}=f(x), \tag{1}$$

es la más simple de $n$-ésimo orden.

Hallemos su integral general.

Integrando ambos miembros de la ecuación respecto a $x$, y tomando en consideración que $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, obtenemos:

$$y^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_1,$$

donde $x_0$ es un valor arbitrario de $x$, y $C_1$ es una constante de integración.

Integrando una vez más tenemos:

$$y^{(n-2)}=\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\right)dx+C_1(x-x_0)+C_2.$$

*Procediendo de esta manera, obtendremos por fin,* después de $n$ integraciones, la expresión de la integral general:

$$y=\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\,\ldots\,dx+\frac{C_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+$$

$$+C_2\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots C_n.$$

Para hallar la solución particular que satisfaga las condiciones iniciales:

$$y_{x=x_0}=y_0;\quad y'_{x=x_0}=y'_0;\ \ldots;\ y^{(n-1)}_{x=x_0}=y_0^{(n-1)},$$

es suficiente hacer:

$$C_n=y_0,\ C_{n-1}=y'_0,\ \ldots,\ C_1=y_0^{n-1}.$$

**Ejemplo 1.** Hallar la integral general de la ecuación

$$y''=\operatorname{sen}(kx)$$

y la solución particular que satisfaga las condiciones iniciales:

$$y_{x=0}=0,\qquad y'_{x=0}=1.$$

**Solución:**

$$y'=\int_0^x \operatorname{sen} kx\,dx+C_1=-\frac{\cos kx-1}{k}+C_1,$$

$$y=-\int_0^x\left(\frac{\cos kx-1}{k}\right)dx+\int_0^x C_1dx+C_2$$

ó

$$y=-\frac{\operatorname{sen} kx}{k^2}+\frac{x}{k}+C_1x+C_2.$$

Esta es la integral general. Para hallar la solución particular que satisface las condiciones iniciales dadas es suficiente determinar los valores correspondientes de $C_1$ y $C_2$.

De la condición $y_{x=0}=0$ hallamos $C_2=0$.

De la condición $y'_{x=0}=1$ hallamos $C_1=1$.

Así, la solución particular buscada tiene la forma:

$$y=-\frac{\operatorname{sen} kx}{k^2}+x\left(\frac{1}{k}+1\right).$$

Ecuaciones diferenciales de este género se encuentran en la teoría de la flexión de vigas.

**Ejemplo 2.** Examinemos una viga prismática elástica sometida a la flexión por acción de fuerzas externas, tanto repartidas continuamente (peso, carga) como, concentradas. Dirijamos el eje $Ox$ horizontalmente, a lo largo del eje de la viga todavía no deformada y el eje $Oy$ verticalmente hacia abajo (fig. 264).

Toda fuerza aplicada a la viga (por ejemplo, la carga, reacción de los apoyos) tiene un momento respecto a cualquier sección transversal de la viga; este momento es igual al producto de la fuerza, por la distancia entre la sección dada y el punto de aplicación de la fuerza. La suma $M(x)$ de los momentos de todas las fuerzas aplicadas por un mismo lado de la sección de

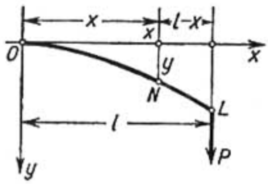


*Fig. 264*

abscisa $x$, se llama momento de flexión de la viga respecto a la sección dada. En el curso de «Resistencia de materiales» se demuestra que el momento de flexión de una viga es igual a: $\frac{EJ}{R}$, donde, $E$ es el módulo de elasticidad, que depende de material; $J$ es el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga respecto al eje horizontal que pasa por el centro de gravedad de esta sección; $R$ es el radio de curvatura del eje de la viga encorvada, que se expresa mediante la fórmula (§ 6, cap. VI):

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Así, la ecuación diferencial del eje de la viga encorvada tiene la forma:

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{EJ}. \qquad (2)$$

Si admitimos que las deformaciones son pequeñas y los ángulos entre las tangentes al eje de la viga encorvada y el eje $Ox$ son bastante pequeños, podemos despreciar la magnitud $y'^2$ que es el cuadrado de $y'$, y considerar:

$$R = \frac{1}{y''}.$$

La ecuación diferencial de la viga encorvada tomará entonces la forma:

$$y'' = \frac{M(x)}{EJ}, \qquad (2')$$

que es una ecuación de la forma (1).

**Ejemplo 3.** Una viga está encastrada por su extremo $O$ y sometida a la acción de una fuerza vertical concentrada $P$, aplicada al extremo libre $L$, a una distancia $l$ del punto de fijación (fig. 264). Despreciemos el peso de la viga.

Examinemos la sección en el punto $N(x)$. El momento de flexión respecto a la sección $N$ será

$$M(x) = (l - x) P.$$

La ecuación diferencial (2') tomará la forma:

$$y'' = \frac{P}{EJ}(l - x).$$

Las condiciones iniciales son: cuando $x = 0$, la flexión $y$ es igual a cero y la tangente al eje de la viga encorvada coincide con el eje $Ox$, es decir:

$$y_{x=0} = 0, \qquad y'_{x=0} = 0.$$

Integrando la ecuación encontramos:

$$y' = \frac{P}{EJ}\int_0^x (l - x)\,dx = \frac{P}{EJ}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right);$$

$$y = \frac{P}{2EJ}\left(lx^2 - \frac{x^3}{3}\right). \tag{3}$$

De la fórmula (3) se determina, en particular, la flexión $h$ en el extremo $L$ de la viga:

$$h = y_{x=l} = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

## § 18. ALGUNOS TIPOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN QUE SE REDUCEN A ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

**1. La ecuación de la forma**

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \tag{1}$$

**no contiene explícitamente la función desconocida $y$.**

**Solución.** Designemos por $p$ la derivada $\frac{dy}{dx}$, es decir, hagamos: $\frac{dy}{dx} = p$.

Entonces,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}.$$

Introduciendo estas expresiones de las derivadas en la ecuación (1) obtenemos una ecuación de primer orden

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

donde $p$ es la función desconocida de $x$. Al integrar esta ecuación, encontramos su solución general:

$$p = p(x, C_1),$$

y, luego, de la correlación $\frac{dy}{dx} = p$ obtenemos la integral general de la ecuación (1):

$$y = \int p(x, C_1)\,dx + C_2.$$

**Ejemplo 1.** Examinemos la ecuación diferencial de una **catenaria** (véase § 1).

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Hagamos:

$$\frac{dy}{dx} = p.$$

Entonces,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx},$$

y obtenemos una ecuación diferencial de primer orden respecto a la función auxiliar $p$ de $x$:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + p^2}.$$

Separando las variables, tenemos:

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dx}{a},$$

de donde:

$$\ln\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) = \frac{x}{a} + C_1,$$

$$p = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}+C_1} - e^{-\left(\frac{x}{a}+C_1\right)}\right).$$

Pero, como $p = \frac{dy}{dx}$ esta última correlación es una ecuación diferencial respecto a la función desconocida $y$. Integrándola, obtenemos la ecuación de la catenaria (véase § 1):

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}+C_1} + e^{-\left(\frac{x}{a}+C_1\right)}\right) + C_2.$$

Encontremos la solución particular que satisface las siguientes condiciones iniciales:

$$y_{x=0} = a,$$

$$y'_{x=0} = 0.$$

La primera condición da $C_2=0$; la segunda, $C_1=0$.
En definitiva tenemos:

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

**Observación.** De modo análogo se puede integrar la ecuación

$$y^{(n)}=f(x,\ y^{(n-1)}).$$

Poniendo $y^{(n-1)}=p$, obtenemos una ecuación de primer orden para determinar $p$:

$$\frac{dp}{dx}=f(x,\ p).$$

Determinando $p$ en función de $x$, se deduce $y$ de la correlación $y^{(n-1)}=p$ (véase § 17).

**II. La ecuación de la forma**

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(y,\ \frac{dy}{dx}\right) \tag{2}$$

**no contiene explícitamente la variable independiente $x$.** Para resolverla hagamos de nuevo:

$$\frac{dy}{dx}=p, \tag{3}$$

pero, ahora **consideremos $p$ como función de $y$** (y no de $x$, como antes). Entonces:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p.$$

Poniendo en la ecuación (2) las expresiones $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$, obtenemos una ecuación de primer orden respecto a la función auxiliar $p$:

$$p\frac{dp}{dy}=f(y,\ p). \tag{4}$$

Integrándola, hallamos $p$ en función de $y$ y de una constante arbitraria $C_1$:

$$p=p(y,\ C_1).$$

Introduciendo este valor en la correlación (3), obtenemos una ecuación diferencial de primer orden para la función $y$ de $x$:

$$\frac{dy}{dx}=p(y,\ C_1).$$

Separando variables, tenemos:

$$\frac{dy}{p(y,\ C_1)} = dx.$$

Integrando esta ecuación, obtenemos la integral general de la ecuación original:

$$\Phi(x,\ y,\ C_1,\ C_2) = 0.$$

**Ejemplo 2.** Hallar la integral general de la ecuación

$$3y'' = y^{-\frac{5}{3}}.$$

**Solución.** Hagamos $p = \frac{dy}{dx}$ considerando $p$ como función de $y$. Entonces, $y'' = p\frac{dp}{dy}$ y, por tanto, obtenemos una ecuación de primer orden para la función auxiliar $p$:

$$3p\frac{dp}{dy} = y^{-\frac{5}{3}}.$$

Integrando esta ecuación, hallamos:

$$p^2 = C_1 - y^{-\frac{2}{3}} \quad \text{ó} \quad p = \pm\sqrt{C_1 - y^{-\frac{2}{3}}}.$$

Pero $p = \frac{dy}{dx}$; por consiguiente, para determinar $y$ obtenemos la ecuación:

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^{-\frac{2}{3}}}} = dx \quad \text{ó} \quad \frac{y^{\frac{1}{3}}\,dy}{\pm\sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1}} = dx,$$

de donde:

$$x + C_2 = \pm\int\frac{y^{\frac{1}{3}}\,dy}{\sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1}}.$$

Para calcular la última integral hagamos la sustitución:

$$C_1 y^{2/3} - 1 = t^2.$$

Entonces:

$$y^{1/3} = (t^2+1)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{C_1^{1/2}};$$

$$dy = 3t\,(t^2+1)^{1/2}\frac{1}{C_1^{3/2}}\,dt.$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{y^{1/3}dy}{\sqrt{C_1y^{2/3}-1}}=\frac{1}{C_1^2}\int \frac{3t\,(t^2+1)}{t}\,dt=\frac{3}{C_1^2}\left(\frac{t^3}{3}+t\right)=$$

$$=\frac{1}{C_1^2}\sqrt{C_1y^{2/3}-1}\,(C_1y^{2/3}+2).$$

En la forma definitiva tenemos:

$$x+C_2=\pm\frac{1}{C_1^2}\sqrt{C_1y^{2/3}-1}\,(C_1y^{2/3}+2).$$

**Ejemplo 3.** Supongamos que un punto se mueve a lo largo del eje $Ox$ bajo la acción de una fuerza dependiente sólo de la posición del punto. La ecuación diferencial del movimiento será:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F\,(x).$$

Sea $x=x_0$, $\frac{dx}{dt}=v_0$ para $t=0$.

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación por $\frac{dx}{dt}\,dt$ e integrando entre los límites de 0 a $t$, obtenemos:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\int_{x_0}^{x}F\,(x)\,dx.$$

ó

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left[-\int_{x_0}^{x}F\,(x)\,dx\right]=\frac{1}{2}mv_0^2=\text{const.}$$

El primer término de la última ecuación representa la energía cinética y el segundo, la energía potencial del punto móvil. De la ecuación obtenida se deduce que la suma de las energías cinética y potencial permanece constante durante todo el tiempo de movimiento.

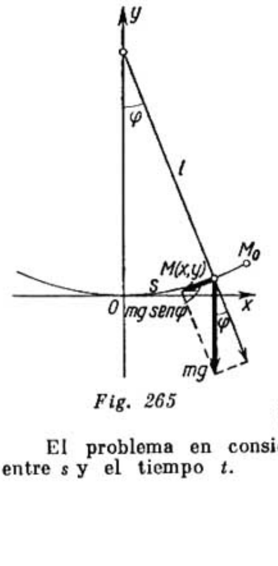

*Fig. 265*

**Problema de péndulo matemático.** Supongamos que un punto material de masa $m$ se mueve bajo la acción de la fuerza de gravedad por una circunferencia $L$ que se halla en un plano vertical. Hallemos la ecuación del movimiento del punto despreciando las fuerzas de resistencia (frotamiento, resistencia del aire, etc.).

Ubiquemos el origen de coordenadas en el punto inferior de la circunferencia, dirigiendo el eje $Ox$ a lo largo de la tangente a esta circunferencia (fig. 265).

Designemos por $l$ el radio de la circunferencia y por $s$, la longitud del arco a partir del origen $O$ hasta el punto variable $M$ donde se halla la masa $m$; al mismo tiempo tomemos la longitud mencionada con el signo correspondiente ($s>0$, si $M$ se encuentra a la derecha del origen $O$; $s<0$, si $M$ se encuentra a la izquierda del $O$).

El problema en consideración consiste en establecer la dependencia entre $s$ y el tiempo $t$.

Descompongamos la fuerza de gravedad mg en dos componentes: tangencial y normal. La primera, que es igual a $-mg$ sen $\varphi$, causa el movimiento, la segunda se elimina por la reacción de la curva descrita durante el movimiento de la masa $m$.

Así, la ecuación de movimiento tiene la forma:

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-mg\operatorname{sen}\varphi.$$

Puesto que para la circunferencia el ángulo $\varphi=\frac{s}{l}$; obtenemos la ecuación:

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g\operatorname{sen}\frac{s}{l}.$$

Es una ecuación diferencial del tipo II (por no contener explícitamente la variable independiente $t$).

Integrándola de la manera correspondiente tenemos:

$$\frac{ds}{dt}=p,\qquad \frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dp}{ds}p.$$

Por consiguiente,

$$p\frac{dp}{ds}=-g\operatorname{sen}\frac{s}{l},$$

o bien,

$$p\,dp=-g\operatorname{sen}\frac{s}{l}\,ds,$$

de donde:

$$p^2=2gl\cos\frac{s}{l}+C_1.$$

Designemos mediante $s_0$ la longitud máxima del arco descrito por el punto $M$. Cuando $s=s_0$, la velocidad del punto es igual a cero:

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{s=s_0}=p\,|_{s=s_0}=0.$$

Esto permite determinar $C_1$:

$$0=2gl\cos\frac{s_0}{l}+C_1,$$

de donde

$$C_1=-2gl\cos\frac{s_0}{l}.$$

Por tanto,

$$p^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=2gl\left(\cos\frac{s}{l}-\cos\frac{s_0}{l}\right),$$

o, aplicando a la última expresión la fórmula que determina la diferencia de cosenos:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=4gl\operatorname{sen}\frac{s+s_0}{2l}\operatorname{sen}\frac{s_0-s}{2l},\tag{5}$$

o bien *):

$$\frac{ds}{dt}=2\sqrt{gl}\sqrt{\operatorname{sen}\frac{s+s_0}{2l}\operatorname{sen}\frac{s_0-s}{2l}}. \tag{6}$$

Esta es una ecuación con variables separables. Separándolas, obtenemos:

$$\frac{ds}{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{s+s_0}{2l}\operatorname{sen}\frac{s_0-s}{2l}}}=2\sqrt{gl}\,dt. \tag{7}$$

Supongamos por ahora que $s\neq s_0$, entonces el denominador de la fracción es distinto de cero. Si suponemos que $s=0$ para $t=0$, de la igualdad (7) obtenemos:

$$\int_0^s\frac{ds}{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{s+s_0}{2l}\operatorname{sen}\frac{s_0-s}{2l}}}=2\sqrt{gl}\,t. \tag{8}$$

Esta igualdad expresa la dependencia entre $s$ y $t$. La integral del miembro izquierdo no se expresa mediante las funciones elementales; lo mismo ocurre con $s$ como función de $t$.

Examinemos del modo aproximado el problema planteado. Supongamos que los ángulos $\frac{s_0}{l}$ y $\frac{s}{l}$ son pequeños. Los ángulos $\frac{s+s_0}{2l}$ y $\frac{s_0-s}{2l}$ no son superiores a $\frac{s_0}{l}$. Sustituyamos en la ecuacion (6) los senos de ángulos por los ángulos:

$$\frac{ds}{dt}=2\sqrt{gl}\sqrt{\frac{s+s_0}{2l}\,\frac{s_0-s}{2l}},$$

o bien,

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{s_0^2-s^2}. \tag{6'}$$

Separando las variables, obtenemos (suponiendo provisionalmente que $s\neq s_0$):

$$\frac{ds}{\sqrt{s_0^2-s^2}}=\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt. \tag{7'}$$

Supongamos otra vez que $s=0$ para $t=0$. Integrando la última ecuacion, obtenemos:

$$\int_0^s\frac{ds}{\sqrt{s_0^2-s^2}}=\sqrt{\frac{g}{l}}\,t \tag{8'}$$

ó

$$\operatorname{arcsen}\frac{s}{s_0}=\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

*) Tomamos el signo más delante de la raíz. De la observación que se da al final del problema se deduce que no hay necesidad de examinar el caso cuando se toma el signo menos.

de donde:

$$s = s_0 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{g}{l}}\, t. \tag{9}$$

**Observación.** Al resolver el problema, hemos supuesto que $s \neq s_0$. Sin embargo, por medio de la sustitución directa nos convencemos de que la función (9) es solución de la ecuación (6′) para cualquier valor de $t$.

Recordemos que la solución (9) es aproximada para la ecuación (5), puesto que habíamos sustituido la ecuación (6) por la ecuación aproximada (6′).

La ecuación (9) muestra que el punto $M$, (que se puede considerar como el extremo del péndulo), efectúa oscilaciones armónicas de período $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Este período no depende de la amplitud de la oscilación $s_0$.

**Ejemplo 4.** Problema de la segunda velocidad cósmica (velocidad de escape).

Determinar la mínima velocidad con la cual se debe lanzar un cuerpo verticalmente hacia arriba para que éste no regrese a la tierra. La resistencia del aire se desprecia.

**Solución.** Designemos las masas de la Tierra y del cuerpo lanzado por $M$ y $m$, respectivamente. En virtud de la ley newtoniana de atracción, la fuerza $f$ que actúa en el cuerpo $m$, es:

$$f = k\frac{M \cdot m}{r^2},$$

donde, $r$ es la distancia entre el centro de la Tierra y el centro de gravedad del cuerpo lanzado;

$k$ es la constante de gravitación universal.

La ecuación diferencial de movimiento de este cuerpo de masa $m$ es:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -k\frac{M \cdot m}{r^2}$$

ó

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -k\frac{M}{r^2}. \tag{10}$$

Hemos tomado el signo menos puesto que la aceleración en el caso dado es negativa. La ecuación diferencial (10) es una ecuación de la forma (2). Resolvamos esta ecuación tomando las siguientes condiciones iniciales:

$$\text{cuando } t = 0,\ r = R \text{ y } \frac{dr}{dt} = v_0.$$

Aquí, $R$ es el radio de la Tierra, $v_0$ es la velocidad de lanzamiento. Introduzcamos las designaciones:

$$\frac{dr}{dt} = v, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = v\frac{dv}{dr},$$

donde $v$ es la velocidad del movimiento. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (10), tenemos:

$$v\frac{dv}{dr} = -k\frac{M}{r^2}.$$

Separando las variables, resulta:

$$v\,dv = -kM\frac{dr}{r^2}.$$

Integrando esta ecuación, encontramos:

$$\frac{v^2}{2} = +kM\frac{1}{r} + C_1. \tag{11}$$

Determinemos $C_1$ de la condición $v = v_0$, en la superficie de la Tierra $(r = R)$:

$$\frac{v_0^2}{2} = +kM\frac{1}{R} + C_1$$

ó

$$C_1 = -\frac{kM}{R} + \frac{v_0^2}{2}.$$

Sustituyendo el valor de $C_1$ en la igualdad (11):

$$\frac{v^2}{2} = +kM\frac{1}{r} - \frac{kM}{R} + \frac{v_0^2}{2}$$

ó

$$\frac{v^2}{2} = kM\frac{1}{r} + \left(\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R}\right). \tag{12}$$

Según la hipótesis, la velocidad del cuerpo debe ser constantemente positiva, por tanto: $\frac{v^2}{2} > 0$. Como la magnitud $\frac{kM}{r}$ se hace muy pequeña cuando $r$ crece indefinidamente, la condición $\frac{v^2}{2} > 0$ se cumple para todo $r$ sólo en el caso de que:

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R} \geqslant 0 \tag{13}$$

ó

$$v_0 \geqslant \sqrt{\frac{2kM}{R}}.$$

Por tanto, la velocidad mínima se define por la igualdad

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kM}{R}}, \tag{14}$$

donde

$$k = 6{,}66 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{cm}^3}{\text{grseg}^2},$$

$$R = 63 \cdot 10^7 \text{ cm}.$$

En la superficie de la Tierra, cuando $r = R$, la aceleración de la fuerza de gravedad es igual a $g$ $\left(g = 981\,\frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}\right)$. En virtud de lo último, obtenemos de la igualdad (10):

$$g = k\frac{M}{R^2}$$

ó

$$M = \frac{gR^2}{k}.$$

Poniendo este valor de $M$ en la fórmula (14), tenemos:

$$v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 981 \cdot 63 \cdot 10^7} \approx 11{,}2 \cdot 10^5 \frac{\text{cm}}{\text{seg}} = 11{,}2 \frac{\text{km}}{\text{seg}}.$$

## § 19. METODO GRAFICO DE LA INTEGRACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

Aclaremos cuál es la interpretación geométrica de una ecuación diferencial de segundo orden. Sea la ecuación

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{1}$$

designemos por $\varphi$ el ángulo formado por la tangente a la curva con la dirección positiva del eje $Ox$; entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi. \tag{2}$$

Para aclarar el significado geométrico de la segunda derivada recordemos la fórmula que determina el radio de curvatura de una curva en un punto dado*):

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

De donde tenemos:

$$y'' = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{R}.$$

Pero,

$$y' = \operatorname{tg} \varphi;\ 1 + y'^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \sec^2 \varphi;\ (1 + y'^2)^{3/2} =$$

$$= |\sec^3 \varphi| = \frac{1}{|\cos^3 \varphi|}.$$

Por eso:

$$y'' = \frac{1}{R\,|\cos^3 \varphi|}. \tag{3}$$

---

*) Hasta ahora siempre hemos considerado que el radio de curvatura es un número positivo. Pero, en este párrafo supongamos que el radio de curvatura pueda tomar valores tanto positivos como negativos: si la curva es convexa ($y'' < 0$), consideremos el radio de curvatura negativo ($R < 0$); si la curva es cóncava ($y'' > 0$), considerémoslo como positivo ($R > 0$).

Introduciendo, ahora, las expresiones obtenidas para $y$ e $y''$ en la ecuación (1), obtenemos:

$$\frac{1}{R\left|\cos^3\varphi\right|}=f(x,\ y,\ \operatorname{tg}\varphi),$$

ó

$$R=\frac{1}{\left|\cos^3\varphi\right|\cdot f(x,\ y,\ \operatorname{tg}\varphi)}. \tag{4}$$

Esto demuestra que la ecuación diferencial de segundo orden determina la magnitud del radio de curvatura de la curva integral,

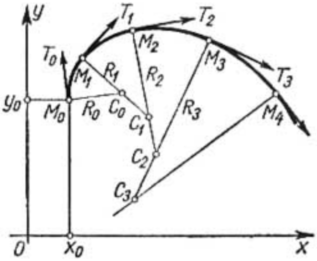


*Fig. 266*

si están dadas las coordenadas del punto y la dirección de la tangente en este punto.

De lo anterior se deduce el método de la construcción aproximada de una curva integral con ayuda de una curva lisa*); la curva está constituida por arcos de circunferencias.

Supongamos, por ejemplo, que es preciso hallar una solución de la ecuación (1), que satisfaga las siguientes condiciones iniciales:

$$y_{x=x_0}=y_0; \qquad y'_{x=x_0}=y'_0.$$

Tracemos por el punto $M_0(x_0,\ y_0)$ un rayo $M_0T_0$, cuyo coeficiente angular es $y'=\operatorname{tg}\varphi_0=y'_0$ (fig. 266). De la ecuación (4) encontramos la magnitud $R=R_0$. Pongamos un segmento $M_0C_0$ igual a $R_0$ en la perpendicular a la dirección $M_0T_0$ y tracemos (tomando el punto $C_0$ por centro) un arco pequeño $\overset{\frown}{M_0M_1}$ de radio $R_0$. Notemos que es preciso orientar el segmento $M_0C_0$ en la direc-

*) Es una curva que tiene en todos los puntos la tangente, cuyo ángulo de inclinación es una función continua de la longitud $s$ del arco.

ción conveniente para que el arco de la circunferencia sea convexo hacia arriba cuando $R_0 < 0$; y sea convexo abajo cuando $R_0 > 0$ (véase la nota en la página 67).

Sean $x_1$ e $y_1$ las coordenadas del punto $M_1$ en el arco construido y ubicado suficientemente próximo al punto $M_0$, y sea $\operatorname{tg} \varphi_1$, el coeficiente angular de la tangente $M_1T_1$ a la circunferencia trazada en el punto $M_1$. De la ecuación (4) hallamos el valor de $R = R_1$ correspondiente al punto $M_1$. Tracemos el segmento $M_1C_1$, igual a $R_1$ y perpendicular a $M_1T_1$; tomando el punto $C_1$ como centro, tracemos arco $\widehat{M_1M_2}$ de radio $R_1$. Tomemos luego en este arco un punto $M_2$ $(x_2, y_2)$, próximo a $M_1$, y continuemos nuestra construcción hasta obtener un tramo suficientemente grande de la curva, formado por los arcos de circunferencias. De lo anteriormente dicho se deduce que esta curva es aproximadamente una línea integral que pasa por el punto $M_0$. Es evidente que la curva construida tanto más se aproximará a la curva integral cuanto menores serán los arcos $\widehat{M_0M_1}$, $\widehat{M_1M_2}$, . . .

## § 20. ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS. DEFINICIONES Y PROPIEDADES GENERALES

**Definición 1.** Una ecuación diferencial de $n$-ésimo orden se llama *lineal* si es de primer orden respecto a la función desconocida $y$ y sus derivadas $y'$, . . ., $y^{(n-1)}$, $y^{(n)}$, es decir, si esta ecuación tiene la forma

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = f(x), \tag{1}$$

donde $a_0$, $a_1$, $a_2$, . . ., $a_n$ y $f(x)$ son funciones dadas de $x$ o constantes; además, $a_0 \neq 0$ para todos los valores de $x$, en el dominio de definición de la ecuación (1). En adelante supongamos que las funciones $a_0$, $a_1$, . . ., $a_n$ y $f(x)$ son continuas para todos los valores de $x$ y que el coeficiente $a_0 = 1$ (si $a_0$ es distinto de la unidad, es suficiente dividir por él todos los términos de la ecuación). La función $f(x)$, se llama *segundo miembro de la ecuación.*

Si $f(x) \not\equiv 0$, la ecuación se llama lineal *no homogénea*, o ecuación *con segundo miembro*. Si $f(x) \equiv 0$, la ecuación tiene la forma:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0 \tag{2}$$

y se llama lineal *homogénea*, o ecuación *sin segundo miembro* (el primer miembro de esta ecuación es una función homogénea de primer orden respecto a $y$, $y'$, $y''$, . . ., $y^{(n)}$).

Definamos algunas propiedades fundamentales de las ecuaciones lineales homogéneas, limitándonos a las demostraciones de las ecuaciones de segundo orden.

**Teorema 1.** *Si $y_1$ e $y_2$ son dos soluciones particulares de la ecuación lineal homogénea de segundo orden*

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0 \tag{3}$$

*entonces, $y_1 + y_2$ es también la solución de esta ecuación.*

**Demostración.** Si $y_1$ e $y_2$ son las soluciones de la ecuación, entonces:

$$\left.\begin{aligned} y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1 = 0 \\ y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Poniendo en la ecuación (3) la suma $y_1 + y_2$ y tomando en consideración las identidades (4), tenemos:

$$(y_1 + y_2)'' + a_1(y_1 + y_2)' + a_2(y_1 + y_2) =$$
$$= (y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + (y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2) = 0 + 0 = 0,$$

es decir, $y_1 + y_2$ es solución de la ecuación.

**Teorema 2.** *Si $y_1$ es una solución de la ecuación (3), y $C$ es una constante, el producto $Cy_1$ es, también, una solución de esta ecuación (3).*

**Demostración.** Introduciendo en la ecuación (3) la expresión $Cy_1$, obtenemos:

$$(Cy_1)'' + a_1(Cy_1)' + a_2(Cy_1) = C(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) = C\cdot 0 = 0;$$

y el teorema queda demostrado.

**Definición 2.** Dos soluciones $y_1$ e $y_2$ de la ecuación (3) se llaman *linealmente independientes en el segmento* $[a, b]$, si su razón en éste último no es constante, es decir, cuando

$$\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const.}$$

En caso contrario, las soluciones se llaman *linealmente dependientes*. En otras palabras, dos soluciones $y_1$ e $y_2$ se llaman *linealmente dependientes* en el segmento $[a, b]$, si existe un número **constante** $\lambda$ tal que $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$, cuando $a \leqslant x \leqslant b$. En este caso $y_1 = \lambda y_2$.

**Ejemplo 1.** Sea la ecuación $y'' - y = 0$, es fácil verificar que las funciones $e^x$, $e^{-x}$, $3e^x$, $5e^{-x}$ son soluciones de esta ecuación. Las funciones $e^x$ y $e^{-x}$ son linealmente independientes en todo segmento, puesto que la razon $\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$ no permanece constante cuando varía $x$. En cambio, las funciones $e^x$ y $3e^x$ son linealmente dependientes, puesto que $\frac{3e^x}{e^x} = 3 = \text{const.}$

**Definición 3.** Si $y_1$ e $y_2$ son las funciones de $x$, entonces el determinante

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

se llama *determinante de Wronski* o, simplemente, *Wronskiano* de las funciones dadas.

**Teorema 3.** *Si las funciones $y_1$ e $y_2$ son linealmente dependientes en el segmento $[a, b]$, el Wronskiano en este segmento es idénticamente igual a cero.*

En efecto, si $y_2 = \lambda y_1$, donde $\lambda =$ const, entonces $y_2' = \lambda y_1'$, y

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0.$$

**Teorema 4.** *Si el Wronskiano $W(y_1, y_2)$,* de las *soluciones $y_1$ e $y_2$ de la ecuación lineal homogénea (3) no se anula en un punto $x = x_0$ del segmento $[a, b]$, donde los coeficientes de la ecuación son continuos, entonces no se anula para cualquier valor de $x$ en este segmento.*

**Demostración.** Puesto que $y_1$ e $y_2$ son dos soluciones de la ecuación (3), tenemos:

$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0, \qquad y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0.$$

Multiplicando los términos de la primera igualdad, por $y_1$ y los términos de la segunda por $y_2$ y luego sumándolas, obtenemos:

$$(y_1 y_2'' - y_1'' y_2) + a_1 (y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0. \tag{5}$$

La diferencia encerrada entre segundo paréntesis es el Wronskiano $W(y_1\ y_2)$:

$$W(y_1 y_2) = (y_1 y_2' - y_1' y_2).$$

La diferencia encerrada entre el primer paréntesis es la derivada del determinante de Wronski

$$W(y_1 y_2)_x' = (y_1 y_2' - y_1' y_2) = y_1 y_2'' - y_1'' y_2.$$

Por consiguiente, la igualdad (5) asume la forma:

$$W' + a_1 W = 0 \tag{6}$$

Hallemos la solución de la última ecuación que satisfaga la condición inicial:

$$W\big|_{x=x_0} = W_0.$$

Hallemos al principio la solución general de la ecuación (6), suponiendo que $W \neq 0$.

Separando variables, en la ecuación (6), tenemos:

$$\frac{dW}{W} = -a_1\,dx\,.$$

Integrando, hallamos:

$$\ln W = -\int_{x_0}^{x} a_1\,dx + \ln C$$

ó

$$\ln\frac{W}{C} = -\int_{x_0}^{x} a_1\,dx,$$

de donde:

$$W = Ce^{-\int_{x_0}^{x} a_1\,dx}\,. \qquad (7)$$

Notemos que se podría escribir la función (7), de modo que esta función satisfaga la ecuación (6). Es fácil cerciorarse de esto mediante sustitución directa de esta función en la ecuación (6). La suposición $W \neq 0$ no es necesaria.

La fórmula (7) se llama *fórmula de Litsville.*

Determinemos $C$ de modo que se satisfaga la condición inicial. Poniendo $x = x_0$ en el primer y segundo miembros de la ecuación (7), obtenemos:

$$W_0 = C.$$

Por tanto, la solución que satisfaga las condiciones iniciales toma la forma:

$$W = W_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a_1\,dx} \qquad (7')$$

Según la hipótesis, $W_0 \neq 0$. Pues, de la ecuación (7′) se deduce que $W \neq 0$, cualquiera que sea el valor de $x$, puesto que la función exponencial no se reduce a cero para todos los valores finitos de la variable. El teorema queda demostrado.

**Observacion 1.** Si el Wronskiano es nulo para cierto valor de $x = x_0$, este determinante también es igual a cero para cualquier valor de $x$ en el segmento considerado.

Esto se deduce directamente de la fórmula (7): si $W = 0$ para $x = x_0$, entonces:

$$(W)_{x=x_0} = C = 0;$$

por consiguiente, $W \equiv 0$, cualquiera que sea el valor del límite superior de $x$ en la fórmula (7).

**Teorema 5.** *Si las soluciones $y_1$ e $y_2$ de la ecuación (3) son linealmente independientes en el segmento $[a, b]$, el Wronskiano $W$ formado para estas soluciones no se reduce a cero en ningún punto del segmento indicado.*

Indiquemos sólo la idea de demostración de este teorema, sin darla en forma completa.

Supongamos que $W = 0$ en cierto punto del segmento entonces, en virtud del teorema 3, el Wronskiano será nulo en todos los puntos del segmento $[a, b]$:

$$W = 0$$

ó

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = 0.$$

Examinemos al principio los intervalos dentro del segmento $[a, b]$ donde $y_1 \neq 0$. Entonces,

$$\frac{y_1y_2' - y_1'y_2}{y_1^2} = 0$$

ó

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0.$$

Por tanto, la razón $\frac{y_2}{y_1}$ es constante en cada uno de los intervalos mencionados:

$$\frac{y_2}{y_1} = \lambda = \text{const.}$$

Utilizando el teorema de existencia y unicidad, se puede mostrar que $y_2 = \lambda y_1$ para todos los puntos del segmento $[a, b]$, incluyendo los puntos donde $y_1 = 0$, lo que es imposible, puesto que, según la hipótesis $y_2$ e $y_1$ son linealmente independientes. Por consiguiente, el Wronskiano no se anula en ningún punto del segmento $[a, b]$.

**Teorema 6.** *Si $y_1$ e $y_2$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (3), entonces*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2, \tag{8}$$

*donde $C_1$ y $C_2$ son las constantes arbitrarias. Esta es la solución general de la ecuación (3).*

**Demostración.** De los teoremas 1 y 2 se deduce que la función

$$C_1y_1 + C_2y_2$$

es la solución de la ecuación (3) cualesquiera que sean las constantes $C_1$ y $C_2$.

Demostremos, ahora, que cualesquiera que sean las condiciones iniciales $y_{x=x_0} = y_0$, $y'_{x=x_0} = y'_0$, es posible elegir los valores de las constantes arbitrarias $C_1$ y $C_2$ de modo tal que la solución particular correspondiente $C_1y_1 + C_2y_2$ satisfaga las condiciones iniciales dadas.

Poniendo las condiciones iniciales en la igualdad (8), tenemos:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= C_1y_{10} + C_2y_{20}, \\ y'_0 &= C_1y'_{10} + C_2y'_{20}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

donde se pone:

$$(y_1)_{x=x_0} = y_{10};\ (y_2)_{x=x_0} = y_{20};\ (y'_1)_{x=x_0} = y'_{10};\ (y'_2)_{x=x_0} = y'_{20}.$$

Del sistema (9) se puede definir $C_1$ y $C_2$, puesto que el determinante de este sistema

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} = y_{10}y'_{20} - y'_{10}y_{20}$$

es el Wronskiano cuando $x = x_0$, y, por tanto, no es igual a cero (en virtud de la independencia lineal de las soluciones $y_1$ e $y_2$). La solución particular que se deduce de la familia (8), para los valores hallados de $C_1$ y $C_2$, satisface las condiciones iniciales dadas. De este modo el teorema queda demostrado.

**Ejemplo 2.** La ecuación

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' - \frac{1}{x^2}\,y = 0,$$

cuyos coeficientes $a_1 = \frac{1}{x}$ y $a_2 = -\frac{1}{x^2}$ son continuos en todo el segmento, que no contiene el punto $x=0$, admite las soluciones particulares:

$$y_1 = x,\quad y_2 = \frac{1}{x}$$

(lo que se verifica fácilmente, sustituyéndolas en la ecuación). Por tanto, su solución general tiene la forma:

$$y = C_1x + C_2\frac{1}{x}\ .$$

**Observación 2.** No existen métodos generales que permitan hallar en forma finita la solución general de una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables. Sin embargo, para las ecuaciones con coeficientes constantes tal método existe y será expuesto en el párrafo siguiente. En cuanto a las ecuaciones con coeficientes variables, en el capítulo XVI «Series» indicaremos algunos procedimientos para encontrar las soluciones aproximadas que satisfagan las condiciones iniciales.

Por ahora demostremos un teorema que permite hallar la solución general de una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes variables, si se conoce una de sus soluciones particulares. Este teorema puede ser útil en muchos casos, siempre y cuando se logre encontrar directamente o adivinar, por cualquier método, una solución particular.

**Teopema 7.** *Si se conoce una solución particular de una ecuación lineal homogénea de segundo orden, la búsqueda de la solución general se reduce a la integración de funciones.*

**Demostración.** Sea $y_1$ una solución particular conocida de la ecuación

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0.$$

Hallemos otra solución particular de la ecuación dada de modo que $y_1$ e $y_2$ sean linealmente independientes. Entonces, la solución general se expresará mediante la fórmula $y = C_1y_1 + C_2y_2$, donde $C_1$ y $C_2$ son constantes arbitrarias. En virtud de la fórmula (7) (véase la demostración del teorema 4) sa puede escribir:

$$y_2'y_1 - y_2y_1' = Ce^{-\int a_1\,dx}$$

Así, para determinar $y_2$ tenemos una ecuación lineal de primer orden. Integrémosla de la manera siguiente. Dividamos todos los términos por $y_1^2$:

$$\frac{y_2'y_1 - y_2y_1'}{y_1^2} = \frac{1}{y_1^2}Ce^{-\int a_1\,dx}$$

ó

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{1}{y_1^2}Ce^{-\int a_1\,dx};$$

de donde:

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{Ce^{-\int a_1\,dx}}{y_1^2}\,dx + C_2.$$

Puesto que buscamos una solución particular, poniendo $C_2 = 0$, $C = 1$, obtenemos:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1\,dx}}{y_1^2}\,dx. \tag{10}$$

Es evidente, que $y_1$ e $y_2$ son soluciones linealmente independientes, puesto que $\frac{y_2}{y_1} \neq$ const.

De tal modo, la solución general de la ecuación original tiene la forma:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int a_1\, dx}}{y_1^2}\, dx. \tag{11}$$

**Ejemplo 3.** Hallar la solución general de la ecuación:

$$(1-x^2)\, y'' - 2\,xy' + 2y = 0.$$

**Solución.** *Directamente se verifica que esta ecuación tiene una solución particular* $y_1 = x$. Hallemos la segunda solución particular $y_2$ tal que $y_1$ e $y_2$ sean linealmente independientes.

Notemos que en nuestro caso $a_1 = \frac{-2x}{1-x^2}$, en virtud de la fórmula (10) obtenemos:

$$y = x \int \frac{e^{\int \frac{2x\,dx}{1-x^2}}}{x^2}\, dx = x \int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2}\, dx = x \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} =$$

$$= x \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\right) dx = x\left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right].$$

Por tanto, la solución general tiene la forma:

$$y = C_1 x + C_2\left(\frac{1}{2}\, x \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 1\right).$$

## § 21. ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

Sea la ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{1}$$

donde, $p$ y $q$ son números constantes reales. Según hemos demostrado, para hallar la integral general de esta ecuación es suficiente encontrar dos soluciones particulares linealmente independientes.

Busquemos las soluciones particulares en la forma

$$y = e^{kx}, \qquad \text{donde } k = \text{const}; \tag{2}$$

entonces,

$$y' = ke^{kx}; \qquad y'' = k^2 e^{kx}.$$

Introduciendo las expresiones obtenidas de las derivadas en la ecuación (1), hallamos:

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Como $e^{kx} \neq 0$, resulta que

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{3}$$

Por consiguiente, si $k$ satisface a la ecuación (3), $e^{kx}$ será solución de la ecuación (1). La (3) se llama *ecuación característica* respecto a la ecuación (1).

La ecuación característica es una ecuación de segundo orden que tiene dos raíces, las cuales designamos por $k_1$ y $k_2$. Entonces

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Son posibles los casos siguientes:

I. $k_1$ y $k_2$ son números reales y distintos ($k_1 \neq k_2$);

II. $k_1$ y $k_2$ son números complejos;

III. $k_1$ y $k_2$ son números reales iguales ($k_1 = k_2$).

Examinemos cada caso por separado:

**1. Las raíces de la ecuación característica son reales y distintas:** $k_1 \neq k_2$. En este caso las soluciones particulares serán las funciones

$$y_1 = e^{k_1 x}; \qquad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Estas soluciones son linealmente independientes, puesto que

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq \text{const}.$$

Por tanto, la integral general tiene la forma

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

**Ejemplo 1.** Sea la ecuación

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

La ecuación característica tiene la forma:

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Hallemos las raíces de la ecuación característica:

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}; \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -2.$$

La integral general es

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}.$$

**II. Las raíces de la ecuación característica son complejas.** Puesto que las raíces complejas son conjugadas en pares, introduzcamos las designaciones:

$$k_1 = \alpha + i\beta; \quad k_2 = \alpha - i\beta,$$

donde:

$$\alpha = -\frac{p}{2}; \qquad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Las soluciones particulares se pueden escribir en la forma:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}; \qquad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} \tag{4}$$

Estas son funciones complejas de un argumento real que satisfacen la ecuación diferencial (1) (véase § 4, cap. VII).

Es evidente, que si alguna función compleja del argumento real

$$y = u(x) + iv(x) \tag{5}$$

satisface la ecuación (1), a esta ecuación satisfacen también las funciones $u(x)$ y $v(x)$.

En efecto, introduciendo la expresión (5) en la ecuación (1) tenemos:

$$[u(x) + iv(x)]'' + p[u(x) + iv(x)]' + q[u(x) + iv(x)] \equiv 0$$

ó

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) \equiv 0.$$

Pero una función compleja es nula solamente en el caso en que las partes real e imaginaria son iguales a cero, es decir,

$$u'' + pu' + qu = 0,$$

$$v'' + pv' + qv = 0.$$

Hemos demostrado que $u(x)$ y $v(x)$ son soluciones de la ecuación dada.

Escribamos las soluciones complejas (4) en la forma de una suma de las partes real e imaginaria:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,$$

$$y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x.$$

Según lo demostrado las funciones reales siguientes serán las soluciones particulares de la ecuación (1):

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \tag{6'}$$

$$\tilde{y}_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x. \tag{6''}$$

Las funciones $\tilde{y}_1$ e $\tilde{y}_2$ son linealmente independientes, puesto que:

$$\frac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_2} = \frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x} = \operatorname{cotg}\beta x \neq \text{const.}$$

Por tanto, la solución general de la ecuación (1) en el caso en que las raíces de la ecuación característica son complejas, toma la forma:

$$y = A\tilde{y}_1 + B\tilde{y}_2 = Ae^{\alpha x}\cos\beta x + Be^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$$

ó

$$y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\operatorname{sen}\beta x). \tag{7}$$

donde $A$ y $B$ son las constantes arbitrarias.

**Ejemplo 2.** Sea la ecuación

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Hallar la integral general y la solución particular que satisface las condiciones iniciales: $y_{x=0} = 0$, $y'_{x=0} = 1$.
Construir la gráfica.

**Solución:** 1) Escribamos la ecuación característica:

$$k^2 + 2k + 5 = 0,$$

y encontremos sus raíces:

$$k_1 = -1 + 2i,\ k_2 = -1 - 2i.$$

Por tanto, la integral general es:

$$y = e^{-x} (A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x).$$

2) Hallemos la solución particular que satisface las condiciones iniciales dadas y determinemos los valores correspondientes de $A$ y $B$. De la

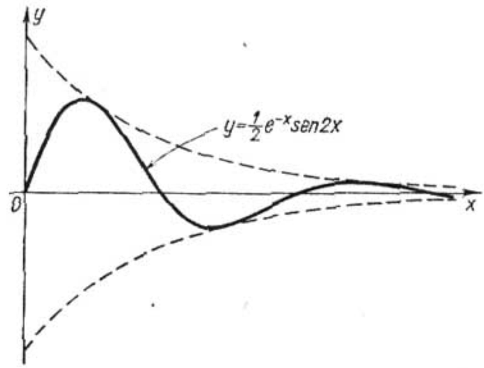


*Fig. 267*

primera condición se deduce:

$$0 = e^{-0} (A \cos 2 \cdot 0 + B \operatorname{sen} 2 \cdot 0),\ \text{de donde: } A = 0.$$

Notemos que $y' = e^{-x} 2B \cos 2x - e^{-x} B \operatorname{sen} 2x$. De la segunda condición se deduce: $1 = 2B$,

es decir, $B = \frac{1}{2}$.

Pues, la solución particular buscada es:

$$y = \frac{1}{2} e^{-x} \operatorname{sen} 2x.$$

La gráfica de la solución se muestra en la figura 267.

**III. Las raíces de la ecuación característica son reales e iguales,** es decir, $k_1 = k_2$. Una de las soluciones particulares, a saber, $y_1 = e^{k_1 x}$, se obtiene en virtud de los razonamientos precedentes. Es preciso encontrar la segunda solución particular, linealmente *independiente de la primera (la función $e^{k_2 x}$ es idénticamente igual a $e^{k_1 x}$, por lo que no puede considerarse como segunda solución particular).*

Busquemos la segunda solución particular en la forma:

$$y_2 = u(x)\, e^{k_1 x},$$

donde $u(x)$ es una función desconocida a determinar.

Derivando, encontramos:

$$y_2' = u' e^{k_1 x} + k_1 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(u' + k_1 u),$$

$$y_2'' = u'' e^{k_1 x} + 2k_1 u' e^{k_1 x} + k_1^2 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(u'' + 2k_1 u' + k_1^2 u).$$

Sustituyendo las expresiones de las derivadas en la ecuación (1), obtenemos:

$$e^{k_1 x}[u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + pk_1 + q)u] = 0.$$

Como $k_1$ es una raíz múltiple de la ecuación característica, tenemos:

$$k_1^2 + pk_1 + q = 0$$

Además, $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ ó $2k_1 = -p$, $2k_1 + p = 0$.

Por tanto, para hallar $u(x)$, hace falta resolver la ecuación $e^{k_1 x} u'' = 0$ ó $u'' = 0$. Integrando, obtenemos: $u = Ax + B$. En particular, se puede poner $A = 1$, $B = 0$; entonces, $u = x$. Así, en calidad de segunda solución particular se puede tomar:

$$y_2 = x e^{k_1 x}.$$

Esta ecuación es linealmente independiente de la primera, puesto que $\frac{y_2}{y_1} = x \neq \text{const}$.

Por tanto, como integral general se puede tomar la función:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x).$$

**Ejemplo 3.** Sea la ecuación

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

La ecuación característica es $k^2 - 4k + 4 = 0$. Encontremos sus raíces $k_1 = k_2 = 2$. La integral general es:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

## § 22. ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS DE $N$ — ESIMO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

*Examinemos una ecuación lineal homogénea de $n$-ésimo orden:*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0. \tag{1}$$

Supongamos que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son las constantes. Antes de indicar un método de resolver la ecuación (1) introduzcamos una definición que será útil más adelante.

**Definición 1.** Si para todos los $x$ del segmento $[a, b]$ se verifica la igualdad

$$\varphi_n(x) = A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + \ldots + A_{n-1}\varphi_{n-1}(x),$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son constantes, de las cuales por lo menos una no es igual a cero, suele decirse que $\varphi_n(x)$ *es una combinación lineal de las funciones* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$.

**Definición 2.** $n$ funciones $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x), \varphi_n(x)$ *se llaman linealmente independientes*, si ninguna de ellas puede ser representada como combinación lineal de las otras.

**Observación 1.** De estas definiciones se deduce que si las funciones $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ son linealmente dependientes, entonces existen las constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de las cuales por lo menos una no es igual a cero. Estas constantes son tales que para todos los $x$ del segmento $[a, b]$ se cumple la identidad:

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x) \equiv 0.$$

**Ejemplos:**

1. Las funciones $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = 3e^x$ son linealmente dependientes, puesto que para $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = -\frac{1}{3}$ se verifica la identidad:

$$C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3 3e^x \equiv 0.$$

2. Las funciones $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$ son linealmente independientes, puesto que no se puede anular la expresión

$$C_1 \cdot 1 + C_2x + C_3x^2$$

cualesquiera que sean $C_1, C_2, C_3$, siempre cuando no son simultáneamente iguales a cero.

3. Las funciones

$$y_1 = e^{k_1x}, \; y_2 = e^{k_2x}, \; \ldots, \; y_n = e^{k_nx}, \; \ldots, \text{ donde } k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$$

son números arbitrarios y linealmente independientes. (Demos esta afirmación sin demostración).

Pasemos, ahora, a la solución de la ecuación (1). Para esta ecuación es válido el teorema siguiente.

**Teorema.** *Si las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación (1), su solución general es:*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n, \tag{2}$$

donde $C_1, \ldots, C_n$ *son constantes arbitrarias.*

Si los coeficientes de la ecuación (1) son constantes, la solución general se halla del mismo modo como en el caso de la ecuación de segundo orden.

1) Formemos la ecuación característica:

$$k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

2) Hallemos las raíces de la ecuación característica:

$$k_1, k_2, \ldots, k_n.$$

3) Según el carácter de las raíces, escribamos las soluciones particulares, linealmente independientes, partiendo de lo siguiente:

a) a toda raíz real simple $k$ corresponde una solución particular $e^{kx}$;

b) a todo par de raíces complejas conjugadas $k^{(1)} = \alpha + i\beta$ y $k^{(2)} = \alpha - i\beta$, corresponden dos soluciones particulares: $e^{\alpha x} \cos \beta x$ y $e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$;

c) a toda raíz real $k$ de multiplicidad $r$ corresponden $r$ soluciones particulares linealmente independientes:

$$e^{kx},\ xe^{kx},\ \ldots,\ x^{r-1}e^{kx};$$

d) a todo par de raíces complejas conjugadas de multiplicidad $\mu$ : $k^{(1)} = \alpha + i\beta$, $k^{(2)} = \alpha - i\beta$, corresponden $2\mu$ soluciones particulares:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x,\ xe^{\alpha x} \cos \beta x,\ \ldots,\ x^{\mu-1}e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x,\ xe^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x,\ \ldots,\ x^{\mu-1}e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x.$$

El número de estas soluciones particulares es igual al grado de la ecuación característica (es decir, al orden de la ecuación diferencial dada). Se puede demostrar *que estas soluciones son linealmente independientes*.

4) Al encontrar $n$ soluciones particulares linealmente independientes $y_1, y_2, \ldots, y_n$, formemos la solución general de la ecuación lineal dada:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n,$$

donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son las constantes arbitrarias.

**Ejemplo 4.** Hallar la solución general de la ecuación

$$y^{IV} - y = 0.$$

**Solución.** Formemos la ecuación característica

$$k^4 - 1 = 0.$$

Hallemos las raíces de esta ecuación

$$k_1 = 1,\ k_2 = -1,\ k_3 = i,\ k_4 = -i.$$

La integral general es:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + A \cos x + B \operatorname{sen} x,$$

donde $C_1, C_2, A, B$ son constantes arbitrarias.

**Observación 2.** De lo expuesto se deduce que toda la dificultad para resolver una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes consiste en la resolución de la ecuación característica correspondiente.

## § 23. ECUACIONES LINEALES NO HOMOGENEAS DE SEGUNDO ORDEN

Sea una ecuación lineal no homogénea de segundo orden

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \tag{1}$$

La estructura de la solución general de tal ecuación (1) se determinará por el teorema siguiente:

**Teorema 1.** *La solución general de la ecuación no homogénea (1) se representa como suma de cualquier solución particular $y^*$ de esta ecuación y de la solución general $\bar{y}$ de la ecuación homogénea correspondiente*

$$\bar{y}'' + a_1 \bar{y}' + a_2 \bar{y} = 0. \tag{2}$$

**Demostración.** Es preciso demostrar que la suma

$$y = \bar{y} + y^* \tag{3}$$

es la **solución general** de la ecuación (1).

Demostremos primeramente que la función (3) es una solución de la ecucación (1).

Sustituyendo la suma $\bar{y} + y^*$ en la ecuación (1), en lugar de $y$, tenemos:

$$(\bar{y} + y^*)'' + a_1 (\bar{y} + y^*)' + a_2 (\bar{y} + y^*) = f(x)$$

ó

$$(\bar{y}'' + a_1 \bar{y}' + a_2 \bar{y}) + (y^{*''} + a_1 y^{*'} + a_2 y^*) = f(x). \tag{4}$$

Como $\bar{y}$ es una solución de la ecuación (2), la expresión encerrada en el primer paréntesis es idénticamente igual a cero. Como $y^*$ es una solución de la ecuación (1), la expresión encerrada en el segundo paréntesis es igual a $f(x)$. Por tanto, la igualdad (4) es una identidad, quedándose demostrada la primera parte del teorema.

Demostremos, ahora, que la expresión (3) es la solución general de la ecuación (1), es decir, que se pueden elegir las constantes arbitrarias que la integran de modo que se satisfagan las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{aligned} y_{x=x_0} &= y_0, \\ y_{x=x_0} &= y_0', \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

cualesquiera que sean $x_0$, $y_0$ e $y'_0$ (siempre y cuando $x_0$ se toma en el dominio donde las funciones $a_1$, $a_2$ y $f(x)$ son continuas).

Notemos que $\bar{y}$ se puede escribir en la forma:

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

donde $y_1$ e $y_2$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (2); y $C_1$, $C_2$ son constantes arbitrarias. La ecuación (3) se puede presentar en la forma:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*. \tag{3'}$$

En virtud de las condiciones (5), tenemos*):

$$C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + y_0^* = y_0,$$
$$C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} + y_0^{*\prime} = y'_0.$$

De este sistema de ecuaciones es preciso determinar $C_1$ y $C_2$. Escribamos el sistema en la forma:

$$\left.\begin{aligned} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} &= y_0 - y_0^*, \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} &= y'_0 - y_0^{*\prime}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Notemos que el determinante de este sistema es el Wronskiano de las funciones $y_1$ e $y_2$ en el punto $x = x_0$. Puesto que, según la hipótesis, estas funciones son linealmente independientes, el Wronskiano no puede ser nulo. Por consiguiente, el sistema (6) tiene una solución bien determinada, $C_1$ y $C_2$, es decir, existen los valores $C_1$ y $C_2$ tales que la fórmula (3) determina la solución de la ecuación (1) que satisface las condiciones iniciales dadas. El teorema queda completamente demostrado.

Se puede concluir, pues, que si se conoce la solución general $\bar{y}$ de la ecuación homogénea (2), la tarea principal durante la integración de una ecuación no homogénea (1) consiste en la búsqueda de una solución particular cualquiera $y^*$ de la última.

*Indiquemos un método general para hallar las soluciones particulares de una ecuación no homogénea.*

**Método de variación de constantes arbitrarias.** Escribamos la solución general de la ecuación homogénea (2):

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \tag{7}$$

Busquemos una solución particular de la ecuación no homogénea (1) en la forma (7), considerando $C_1$ y $C_2$ como **funciones de $x$, las que es preciso determinar.**

Derivemos la igualdad (7):

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + C'_1 y_1 + C'_2 y_2.$$

*) Aquí, $y_{10}$, $y_{20}$, $y_0^*$, $y'_{10}$, $y'_{20}$, $y_0^{*\prime}$ son los valores numéricos de las funciones $y_1$, $y_2$, $y^*$, $y'_1$, $y'_2$, $y^{*\prime}$ cuando $x = x_0$.

Elijamos las funciones $C_1$ y $C_2$ de modo que se verefique la igualdad

$$C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0. \tag{8}$$

Tomando en consideración esta condición adicional, la primera derivada $y'$ toma la forma:

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2.$$

Derivando esta expresión, hallamos $y''$:

$$y'' = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2.$$

Introduciendo $y$, $y'$, $y''$ en la ecuación (1), obtenemos:

$$C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + a_1 (C_1 y'_1 + C_1 y'_2) +$$
$$+ a_2 (C_1 y_1 + C_2 y_2) = f(x)$$

ó

$$C_1 (y''_1 + a_1 y'_1 + a_2 y_1) + C_2 (y''_2 + a_1 y'_2 + a_2 y_2) + C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x).$$

Las expresiones encerradas entre los dos primeros paréntesis se reducen a cero, puesto que $y_1$ e $y_2$ son las soluciones de la ecuación homogénea. Por consiguiente, la última ecuación toma la forma:

$$C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x). \tag{9}$$

Así, la función (7) es una solución de la ecuación (1), no homogénea, cuando las funciones $C_1$ y $C_2$ satisfacen al sistema de ecuaciones (8) y (9), es decir, si

$$C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0, \qquad C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x).$$

Como el determinante de este sistema es un Wronskiano de las funciones linealmente independientes $y_1$ e $y_2$, éste no es nulo; por tanto, resolviendo el sistema, hallemos $C'_1$ y $C'_2$ como funciones determinadas de $x$:

$$C'_1 = \varphi_1(x), \qquad C'_2 = \varphi_2(x).$$

Integrando tenemos:

$$C_1 = \int \varphi_1(x)\, dx + \bar{C}_1; \qquad C_2 = \int \varphi_2(x)\, dx + \bar{C}_2,$$

donde $\bar{C}_1$ y $\bar{C}_2$ son las constantes de integración.

Introduciendo las expresiones obtenidas de $C_1$ y $C_2$ en la igualdad (7) hallemos una integral dependiente de dos constantes arbitrarias $\bar{C}_1$ y $\bar{C}_2$, es decir, la solución general de la ecuación no homogénea*).

*) Al hacer $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = 0$, obtendremos una solución particular de la ecuación (1).

**Ejemplo.** Hallar la solución general de la ecuación

$$y''-\frac{y'}{x}=x.$$

**Solución.** Hallemos la solución general de la ecuación homogénea:

$$y''-\frac{y'}{x}=0.$$

Como $\frac{y''}{y'}=\frac{1}{x}$, tenemos $\ln y'=\ln x+\ln c$; $y'=cx$; así:

$$y=C_1x^2+C_2.$$

Para que esta expresión sea la solución de la ecuación dada, es preciso determinar $C_1$ y $C_2$ como funciones de $x$ del sistema

$$C_1'x^2+C_2'\cdot 1=0,\quad 2C_1'x+C_2'\cdot 0=x.$$

Resolviendo este sistema encontramos:

$$C_1'=\frac{1}{2},\quad C_2'=-\frac{1}{2}x^2,$$

de donde, por integración, obtenemos:

$$C_1=\frac{x}{2}+\overline{C}_1,\quad C_2=-\frac{x^3}{6}+\overline{C}_2.$$

Introduciendo las funciones halladas en la fórmula $y=C_1x^2+C_2$, obtenemos la solución general de una ecuación no homogénea:

$$y=\overline{C}_1x^2+\overline{C}_2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}$$

ó $y=\overline{C}_1x^2+\overline{C}_2+\frac{x^3}{3}$, donde $\overline{C}_1$ y $\overline{C}_2$ *son constantes arbitrarias.*

Para buscar las soluciones particulares, se puede utilizar el siguiente teorema.

**Teorema 2.** *Sea una ecuación no homogénea*

$$y''+a_1y'+a_2y=f_1(x)+f_2(x) \tag{10}$$

*tal que su segundo miembro es la suma de dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$. Si $y_1$ es una solución particular de la ecuación*

$$y''+a_1y'+a_2y=f_1(x), \tag{11}$$

*e $y_2$, una solución particular de la ecuación*

$$y''+a_1y'+a_2y=f_2(x), \tag{12}$$

*entonces, $y_1+y_2$ es una solución particular*) de la ecuación (10).*

---

*) Evidentemente, el teorema correspondiente es válido para cualquier número de sumandos del segundo miembro.

**Demostración.** Introduciendo la expresión $y_1 + y_2$ en la ecuación (10), obtenemos:

$$(y_1 + y_2)'' + a_1 (y_1 + y_2)' + a_2 (y_1 + y_2) = f_1 (x) + f_2 (x)$$

ó

$$(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = f_1 (x) + f_2 (x). \qquad (13)$$

De las igualdades (11) y (12) se deduce que (13) es una identidad. El teorema queda demostrado.

## § 24. ECUACIONES LINEALES NO HOMOGENEAS DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

Sea la ecuación diferencial

$$y'' + py' + qy = f (x), \qquad (1)$$

donde $p$ y $q$ son números reales.

En el párrafo anterior hemos dado un método general para hallar las soluciones de las ecuaciones no homogéneas. Si la ecuación tiene coeficientes constantes, a veces, es más fácil hallar una solución particular, sin recurrir a la integración. Examinemos algunas variantes que se utilizan para resolver la ecuación (1).

1. Supongamos que el segundo miembro de la ecuación (1) sea el producto de una función exponencial por un polinomio, que tiene la forma:

$$f (x) = P_n (x) e^{\alpha x}, \qquad (2)$$

donde $P_n (x)$ es un polinomio de $n$-ésimo grado. Entonces son posibles los siguientes casos particulares:

a) El número $\alpha$ **no es una raíz de** la ecuación característica

$$k^2 + pk + q = 0.$$

En este caso, es preciso hallar la solución particular en la forma:

$$y^* = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n) e^{\alpha x} = Q_n (x) e^{\alpha x}. \qquad (3)$$

En efecto, introduciendo $y^*$ en la ecuación (1), y reduciendo todos los términos por $e^{\alpha x}$, tenemos:

$$Q_n'' (x) + (2\alpha + p) Q_n' (x) + (\alpha^2 + p\alpha + q) Q_n (x) = P_n (x). \qquad (4)$$

$Q_n (x)$ es un polinomio de $n$-ésimo grado, $Q_n' (x)$ es un polinomio de $(n - 1)$-ésimo grado: $Q_n'' (x)$, es de $(n - 2)$-ésimo grado. Por consiguiente, a la derecha y a la izquierda del signo de igualdad se hallan polinomios de $n$-ésimo grado. Igualando los coeficientes de las mismas potencias de $x$ (el número de los coeficientes desconocidos es igual a $n + 1$), obtenemos un sistema de $n + 1$ ecuaciones para determinar los coeficientes $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$.

b) El número $\alpha$ es una **raíz simple** de la ecuación característica.

Si procuramos hallar una solución particular en la forma (3), obtenemos en el primer miembro de la igualdad (4) un polinomio de $(n-1)$ — ésimo grado, puesto que el coeficiente de $Q_n(x)$, es decir, $\alpha^2 + p\alpha + q$, es nulo y los polinomios $Q'_n(x)$ y $Q''_n(x)$ son de grados inferiores a $n$. Por consiguiente, la igualdad (4) no puede ser una identidad cualesquiera que sean $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Por esto, en el caso examinado busquemos la solución particular, en la forma de un polinomio de $(n+1)$-ésimo grado sin término absoluto (puesto que éste se elimina durante la derivación)*): $y^* = xQ_n(x)\,e^{\alpha x}$.

c) $\alpha$ es una **raíz doble de la** ecuación característica. Entonces, al ser sustituida la función $Q_n(x)\,e^{\alpha x}$ en la ecuación diferencial, el grado de polinomio disminuye en dos unidades. En efecto, si $\alpha$ es una raíz de la ecuación característica, tenemos: $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$; además, puesto que $\alpha$ es una raíz doble, tenemos $2\alpha = -p$ (según el teorema de álgebra elemental, la suma de las raíces de la ecuación de segundo grado reducida es igual al coeficiente del término desconocido de primero grado tomado con signo contrario). Por eso, $2\alpha + p = 0$.

Por consiguiente, en el primer miembro de la igualdad (4) queda $Q''_n(x)$, es decir, un polinomio de $(n-2)$-ésimo grado. Para obtener como resultado de la sustitución, un polinomio de $n$-ésimo grado, es preciso buscar una solución particular en la forma de producto de $e^{\alpha x}$ por un polinomio de $(n+2)$-ésimo grado. Entonces, el término absoluto de este polinomio y el término de primer grado se eliminan durante la derivación. Por esto, se pueden omitir en la solución particular.

Así, cuando $\alpha$ es una raíz doble de la ecuación característica, se puede tomar una solución particular en la forma:

$$y^* = x^2 Q_n(x)\,e^{\alpha x}.$$

**Ejemplo 1.** Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + 4y' + 3y = x.$$

**Solución.** La solución general de la ecuación homogénea correspondiente es:

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

Como el segundo miembro de la ecuación no homogénea tiene la forma $xe^{0x}$, [es decir, la forma $P_1(x)\,e^{0x}$], y 0 no es raíz de la ecuación característica $k^2 + 4k + 3 = 0$, busquemos una solución particular en la forma $y^* = Q_1(x)\,e^{0x}$, es decir, haremos:

$$y^* = A_0 x + A_1.$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación dada, tenemos:

$$4A_0 + 3(A_0 x + A_1) = x.$$

---

*) Notemos que todos los resultados expuestos arriba son válidos también cuando $\alpha$ es un número complejo (esto se deduce de las reglas de derivación de la función $e^{mx}$, donde $m$ es un número complejo arbitrario; véase § 4, cap. VII).

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de $x$, obtenemos:

$$3A_0 = 1,\ 4A_0 + 3A_1 = 0,$$

de donde:

$$A_0 = \frac{1}{3};\quad A_1 = -\frac{4}{9}.$$

Por consiguiente,

$$y^* = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}.$$

La solución general $y = \bar{y} + y^*$ será:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}.$$

**Ejemplo 2.** Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + 9y = (x^2 + 1)\, e^{3x}.$$

**Solución:** La solución general de la ecuación homogénea se halla fácilmente:

$$\bar{y} = C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x.$$

El segundo miembro de la ecuación dada, $(x^2 + 1)\, e^{3x}$ tiene la forma:

$$P_2(x)\, e^{3x}.$$

Como el coeficiente 3 en el exponente de potencia no es raíz de la ecuación característica, busquemos una solución particular de la forma:

$$y^* = Q_2(x)\, e^{3x} \quad ó \quad y^* = (Ax^2 + Bx + C)\, e^{3x}.$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación diferencial, tenemos:

$$[9(Ax^2 + Bx + C) + 6(2Ax + B) + 2A + 9(Ax^2 + Bx + C)]e^{3x} =$$
$$= (x^2 + 1)\, e^{3x}.$$

Reduciendo ambos miembros por $e^{3x}$ e igualando los coeficientes de las mismas potencias de $x$, obtenemos:

$$18A = 1,\ 12A + 18B = 0,\ 2A + 6B + 18C = 1,$$

de donde: $A = \frac{1}{18}$; $B = -\frac{1}{27}$; $C = \frac{5}{81}$. Por consiguiente, la solución particular es:

$$y^* = \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81}\right) e^{3x}$$

y la solución general,

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x + \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81}\right) e^{3x}.$$

**Ejemplo 3.** Hallar la solución de la ecuación:

$$y'' - 7y' + 6y = (x - 2)\, e^{x}.$$

**Solución.** El segundo miembro de la ecuación tiene la forma $P_1(x)\, e^{1\cdot x}$; donde el coeficiente 1 del exponente es raíz simple de un polinomio característico. Por tanto, busquemos una solución particular de la forma $y^* = xQ_1(x)\, e^x$ ó

$$y^* = x(Ax + B)\, e^x;$$

poniendo esta expresión en la ecuación, tenemos:

$$[(Ax^2+Bx)+(4Ax+2B)+2A-7(Ax^2+Bx)-7(2Ax+B)+$$
$$+6(Ax^2+Bx)]e^x=(x-2)e^x$$

ó

$$(-10Ax-5B+2A)e^x=(x-2)e^x.$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de $x$ obtenemos:

$$-10A=1,\ -5B+2A=2,$$

de donde: $A=-\frac{1}{10}$, $B=\frac{9}{25}$. Por tanto, la solución particular es:

$$y^*=x\left(-\frac{1}{10}x+\frac{9}{25}\right)e^x,$$

y la solución general:

$$y=C_1e^{6x}+C_2e^x+x\left(-\frac{1}{10}x+\frac{9}{25}\right)e^x.$$

II. Supongamos que el segundo miembro tiene la forma:

$$f(x)=P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+Q(x)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, \tag{5}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Se puede analizar este caso mediante el procedimiento usado anteriormente, pasando de las funciones trigonométricas a las exponenciales.

Sustituyendo $\cos\beta x$ y $\operatorname{sen}\beta x$ por sus funciones exponenciales, según las fórmulas de Euler (véase § 5 cap. VII) obtenemos:

$$f(x)=P(x)e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}+Q(x)e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i}$$

ó

$$f(x)=\left[\frac{1}{2}P(x)+\frac{1}{2i}Q(x)\right]e^{(\alpha+i\beta)x}+$$
$$+\left[\frac{1}{2}P(x)-\frac{1}{2i}Q(x)\right]e^{(\alpha-i\beta)x}. \tag{6}$$

Entre corchetes se encuentran los polinomios cuyos grados son iguales al grado superior de $P(x)$ y $Q(x)$. Resulta que hemos obtenido el segundo miembro de la forma tal, como en el caso I.

Es posible demostrar (aunque lo admitamos sin demostración) que se pueden hallar soluciones particulares que no contengan números complejos.

Por consiguiente, si el segundo miembro de la ecuación (1) tiene la forma

$$f(x)=P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+Q(x)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, \tag{7}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de $x$, la solución particular se determina así:

a) si número $\alpha + i\beta$ no es una raíz de la ecuación característica, es preciso buscar una solución particular de la ecuación (1) en la forma:

$$y^* = U(x)\,e^{\alpha x}\cos\beta x + V(x)\,e^{\alpha x}\,\text{sen}\,\beta x, \tag{8}$$

donde, $U(x)$ y $V(x)$ son polinomios cuyo grado es igual al grado superior de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$;

b) si el número $\alpha + i\beta$ es una raíz de la ecuación característica, una solución particular adquiere la forma:

$$y^* = x\,[U(x)\,e^{\alpha x}\cos\beta x + V(x)\,e^{\alpha x}\,\text{sen}\,\beta x]. \tag{9}$$

Para evitar errores eventuales notemos que las formas indicadas de las soluciones particulares (8) y (9) son válidas también, evidentemente, cuando en el segundo miembro de la ecuación (1) uno de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es idénticamente igual a cero, es decir, cuando el segundo miembro es de la forma:

$$P(x)\,e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{ó} \quad Q(x)\,e^{\alpha x}\,\text{sen}\,\beta x.$$

Consideremos, ahora, un importante caso particular. Supongamos que el segundo miembro de una ecuación lineal de segundo orden es:

$$f(x) = M\cos\beta x + N\,\text{sen}\,\beta x, \tag{7'}$$

donde, $M$ y $N$ son las constantes.

a) Si $\beta i$ no es una raíz de la ecuación característica, busquemos una solución particular de la forma:

$$y^* = A\cos\beta x + B\,\text{sen}\,\beta x. \tag{8'}$$

b) Si $\beta i$ es una raíz de la ecuación característica, busquemos una solución particular de la forma:

$$y^* = x\,(A\cos\beta x + B\,\text{sen}\,\beta x). \tag{9'}$$

Notemos que la función (7′) es un caso particular de la función (7) ($P(x) = M$, $Q(x) = N$, $\alpha = 0$); las funciones (8′) y (9′) son casos particulares de las funciones (8) y (9).

**Ejemplo 4.** Hallar la integral general de la ecuación lineal no homogénea

$$y'' + 2y' + 5y = 2\cos x.$$

**Solución.** La ecuación característica

$$k^2 + 2k + 5 = 0$$

tiene las raíces: $k_1 = -1 + 2i$; $k_2 = -1 - 2i$. Por eso, la integral general de la ecuación homogénea correspondiente es:

$$\bar{y} = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\,\text{sen}\,2x).$$

Busquemos una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma:

$$y^* = A \cos x + B \operatorname{sen} x,$$

donde, $A$ y $B$ son los coeficientes constantes a determinar. Introduciendo $y^*$ en la ecuación dada, tenemos:

$$-A \cos x - B \operatorname{sen} x + 2(-A \operatorname{sen} x + B \cos x) +$$
$$+5(A \cos x + B \operatorname{sen} x) = 2 \cos x.$$

Igualando los coeficientes de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$, obtenemos dos ecuaciones para determinar $A$ y $B$:

$$-A + 2B + 5A = 2; \quad -B - 2A + 5B = 0,$$

de donde

$$A = \frac{2}{5}; \quad B = \frac{1}{5}.$$

La solución general de la ecuación dada es: $y = \bar{y} + y^*$, es decir,

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x) + \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{10} \operatorname{sen} x.$$

**Ejemplo 5.** Hallar la solución de la ecuación

$$y'' + 4y = \cos 2x.$$

**Solución.** Las raíces de la ecuación característica son: $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$; por tanto, la solución general de la ecuación homogénea tiene la forma:

$$\bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x.$$

Busquemos una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma:

$$y^* = x(A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x).$$

Entonces,

$$y^{*\prime} = 2x(-A \operatorname{sen} 2x + B \cos 2x) + (A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x),$$
$$y^{*\prime\prime} = -4x(-A \cos 2x - B \operatorname{sen} 2x) + 4(-A \operatorname{sen} 2x + B \cos 2x).$$

Introduciendo estas expresiones de las derivadas en la ecuación dada e igualando los coeficientes de $\cos 2x$ y $\operatorname{sen} 2x$, obtenemos un sistema de ecuaciones para determinar $A$ y $B$:

$$4B = 1; \quad -4A = 0,$$

de donde $A = 0$; $B = \frac{1}{4}$. Pues, la integral general de la ecuación dada es:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4} x \operatorname{sen} 2x.$$

**Ejemplo 6.** Hallar la solución de la ecuación

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x.$$

**Solución.** El segundo miembro de la ecuación tiene la forma:

$$f(x) = e^{2x}(M \cos x + N \operatorname{sen} x),$$

siendo $M = 3$ y $N = 0$. Las raíces de la ecuación característica $k^2 - 1 = 0$ son: $k_1 = 1$, $k_2 = -1$. La solución general de la ecuación homogénea es:

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Como el número $\alpha + i\beta = 2 + i \cdot 1$ no es raíz de la ecuación característica, busquemos una solución particular de la forma: $y^* = e^{2x}(A\cos x + B \operatorname{sen} x)$.

Poniendo esta expresión en la ecuación y efectuando la reducción de los términos semejantes, obtenemos:

$$(2A + 4B)\, e^{2x} \cos x + (-4A + 2B)\, e^{2x} \operatorname{sen} x = 3e^{2x} \cos x.$$

Igualando los coeficientes de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$, tenemos:

$$2A + 4B = 3, \quad -4A + 2B = 0.$$

De donde: $A = \frac{3}{10}$; $B = \frac{3}{5}$. Por consiguiente, la solución particular es:

$$y^* = e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x + \frac{3}{5}\operatorname{sen} x\right),$$

y la general,

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x + \frac{3}{5}\operatorname{sen} x\right).$$

## § 25. ECUACIONES LINEALES NO HOMOGENEAS DE ORDENES SUPERIORES

Sea la ecuación

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \tag{1}$$

donde, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $f(x)$ son funciones continuas de $x$ (o constantes).

Supongamos que se conoce la solución general:

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \tag{2}$$

de la ecuación homogénea:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0. \tag{3}$$

Igual que en el caso de la ecuación de segundo orden, para la ecuación (1) es válido el siguiente teorema:

**Teorema.** *Si $\bar{y}$ es la solución general de la ecuación homogénea (3), e $y^*$ es una solución particular de la ecuación no homogénea (1), entonces*

$$Y = \bar{y} + y^*$$

*es la solución general de la ecuación no homogénea.*

Así, análogamente al caso de la ecuación de segundo orden, la integración de la ecuación (1) se reduce a la búsqueda de una solución particular de la ecuación no homogénea.

Igual que para la ecuación de segundo orden, se puede encontrar una solución particular de la ecuación (1) por el método de la variación de las constantes arbitrarias, suponiendo que en la expresión (2) $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son las funciones de $x$.

Formemos el sistema de ecuaciones (comparar § 23):

$$\left.\begin{array}{r} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \ldots + C'_n y_n = 0, \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \ldots + C'_n y'_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C'_1 y_1^{(n-2)} + C'_2 y_2^{(n-2)} + \ldots + C'_n y_n^{(n-2)} = 0, \\ C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C'_n y_n^{(n-1)} = f(x). \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Este sistema de ecuaciones, con funciones desconocidas $C'_1$, $C'_2$, . . . . . ., $C'_n$, tiene soluciones bien determinadas. (El determinante de los coeficientes de $C'_1$, $C'_2$, . . ., $C'_n$, es el Wronskiano compuesto por las soluciones particulares $y_1$, $y_2$, . . ., $y_n$ de la ecuación homogénea y como, según la hipótesis, estas soluciones particulares son linealmente independientes, el Wronskiano es distinto de cero).

Así, el sistema (4) puede ser resuelto respecto a las funciones $C'_1, C'_2$, . . ., $C'_n$. Después de hallar estas funciones e integrarlas, obtenemos:

$$C_1 = \int C'_1\,dx + \bar{C}_1;\ C_2 = \int C'_2\,dx + \bar{C}_2;\ \ldots;\ C_n = \int C'_n\,dx + \bar{C}_n,$$

donde $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, . . ., $\bar{C}_n$ son las constantes de integración.

Demostremos que en este caso la expresión

$$y^* = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \qquad (5)$$

es la solución general de la ecuación no homogénea (1).

Derivemos $n$ veces la expresión (5), tomando cada vez en consideración las igualdades (4); entonces tenemos:

$$\begin{array}{r} y^* = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y + \ldots + C_n y_n, \\ y^{*\prime} = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + C_3 y'_3 + \ldots + C_n y'_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{*(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}, \\ y^{*(n)} = C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)} + f(x). \end{array}$$

Multiplicando los términos de la primera ecuación por $a_n$, los de la segunda, por $a_{n-1}$, . . ., y, finalmente, los de la penúltima ecuación por $a_1$ y sumando, obtenemos:

$$y^{*(n)} + a_1 y^{*(n-1)} + \ldots + a_n y^* = f(x),$$

puesto que $y_1$, $y_2$, . . ., $y_n$ son las soluciones particulares de la ecuación homogénea y, por consiguiente, son nulas las sumas de los términos por columnas.

Por consiguiente, la función $y^* = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$ [donde $C_1$, . . ., $C_n$ son las funciones de $x$, determinadas de las ecuaciones (4)] es una solución de la ecuación no homogénea (1), y, como la solución depende de $n$ constantes arbitrarias $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n$, ésta es también la solución general.

El teorema queda demostrado.

A veces, se puede hallar más fácil las soluciones particulares de una ecuación no homogénea de orden superior con coeficientes constantes (§ 24). Se usan siguientes procedimientos:

1. Supongamos que el segundo miembro de la ecuación diferencial sea una función $f(x) = P(x)\, e^{\alpha x}$, donde $P(x)$ es un polinomio de $x$. Es preciso distinguir dos casos:

a) si $\alpha$ no es una raíz de la ecuación característica, busquemos una solución particular de la forma:

$$y^* = Q(x)\, e^{\alpha x},$$

donde $Q(x)$ es un polinomio del mismo grado que $P(x)$, pero con coeficientes indeterminados;

b) si $\alpha$ es una raíz de multiplicidad $\mu$ de la ecuación característica, busquemos una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma:

$$y^* = x^{\mu} Q(x)\, e^{\alpha x},$$

donde $Q(x)$ es un polinomio del mismo grado que $P(x)$.

II. Supongamos que el segundo miembro de la ecuación es de la forma:

$$f(x) = M \cos \beta x + N \operatorname{sen} \beta x,$$

donde $M$ y $N$ son números constantes. Entonces, la forma de la solución particular se define del modo siguiente:

a) si $\beta i$ no es una raíz de la ecuación característica, la solución particular es de la forma:

$$y^* = A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x,$$

donde $A$ y $B$ son coeficientes constantes indeterminados;

b) si $\beta i$ es una raíz de la ecuación característica de multiplicidad $\mu$, entonces:

$$y^* = x^{\mu} (A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x).$$

III. Sea

$$f(x) = P(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x,$$

donde, $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de $x$. Entonces:

a) si $\alpha + \beta i$ no es una raíz del polinomio característico, busquemos una solución particular de la forma:

$$y^* = U(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x,$$

donde $U(x)$ y $V(x)$ son polinomios cuyo grado es igual al grado superior de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$;

b) si $\alpha + \beta i$ es una raíz de multiplicidad $\mu$ del polinomio característico, busquemos una solución particular de la forma:

$$y^* = x^{\mu}\left[U(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x\right],$$

donde $U(x)$ y $V(x)$ tienen el mismo significado que en el caso a).

**Observación general respecto a los casos II y III.** Si en el segundo miembro de la ecuación se halla una expresión que contenga sólo *cos* $\beta x$ *ó sen* $\beta x$, es preciso buscar una solución de la forma indicada arriba, es decir, con un seno y un coseno. En otras palabras, del hecho de que el segundo miembro no contenga cos $\beta x$ ó sen $\beta x$ de ninguna manera se deduce que la solución particular de la ecuación no contiene estas funciones. Podemos convencernos de lo último, examinando los ejemplos 4, 5, 6 del párrafo anterior, así como el ejemplo 2 del párrafo presente.

**Ejemplo 1.** Hallar la solución general de la ecuación

$$y^{IV} - y = x^3 + 1.$$

**Solución.** Las raíces de la ecuación característica $k^4 - 1 = 0$ son:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = i, \; k_4 = -i.$$

Hallemos la solución general de la ecuación homogénea (véase el ejemplo 4 § 22):

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x.$$

Busquemos una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma:

$$y^* = A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3.$$

Derivando $y^*$ cuatro veces e introduciendo las expresiones obtenidas en la ecuación dada, tenemos:

$$-A_0 x^3 - A_1 x^2 - A_2 x - A_3 = x^3 + 1.$$

Igualemos los coeficientes de las mismas potencias de $x$:

$$-A_0 = 1; \quad -A_1 = 0; \quad -A_2 = 0; \quad -A_3 = 1.$$

Por tanto,

$$y^* = -x^3 - 1.$$

Hallemos la integral general de la ecuación no homogénea según la fórmula: $y = \bar{y} + y^*$, es decir,

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x - x^3 - 1.$$

**Ejemplo 2.** Hallar la solución de la ecuación

$$y^{IV} - y = 5 \cos x.$$

**Solución.** Las raíces de la ecuación característica $k^4 - 1 = 0$ son: $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = i$, $k_4 = -i$. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea correspondiente es:

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x.$$

Luego, el segundo miembro de la ecuación no homogénea dada tiene la forma:

$$f(x) = M \cos x + N \operatorname{sen} x,$$

donde $M = 5$, $N = 0$.

Como $i$ es una raíz simple de la ecuación característica, busquemos una solución particular de la forma:

$$y^* = x (A \cos x + B \operatorname{sen} x).$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación, hallamos:

$$4A \operatorname{sen} x - 4B \cos x = 5 \cos x,$$

de donde

$$4A = 0, \quad -4B = 5,$$

ó, $A = 0$, $B = -\frac{5}{4}$.

La solución particular de la ecuación diferencial dada es, entonces:

$$y^* = -\frac{5}{4} x \operatorname{sen} x,$$

y la solución general es:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x - \frac{5}{4} x \operatorname{sen} x.$$

## § 26. ECUACION DIFERENCIAL DE OSCILACIONES MECANICAS

El objeto del párrafo presente y de los siguientes es el estudio de un problema de la mecánica aplicada con ayuda de las ecuaciones diferenciales lineales.

Supongamos que una carga de masa $Q$ reposa sobre un resorte elástico (fig. 268). Designemos por $y$ la desviación de la carga de

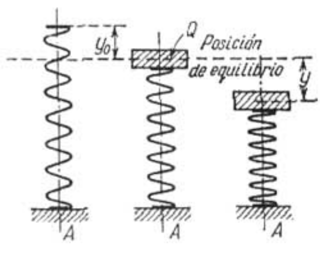


*Fig. 268*

su posición de equilibrio. Consideremos la desviación hacia abajo como positiva y hacia arriba, como negativa. En la posición de equilibrio la fuerza del peso es compensada por la elasticidad del resorte. Supongamos que la fuerza que tiende a volver la carga a la posición de equilibrio, llamada elástica, sea proporcional a la desviación, es decir, la fuerza elástica es igual a $-ky$, donde $k$ es una magnitud constante para el resorte dado (así llamada «rigidez del resorte»)*).

Supongamos que al movimiento de la carga $Q$ se opone una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad del movimiento de la

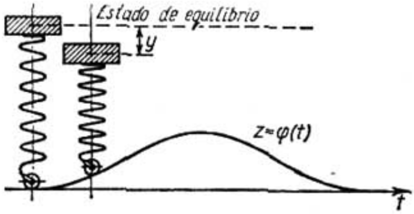


*Fig. 269*

carga respecto al punto más bajo del resorte, es decir: una fuerza $-\lambda v = -\lambda \frac{dy}{dt}$, donde $\lambda = \text{const} > 0$ (amortiguador). Formemos la ecuación diferencial del movimiento de la carga sobre el resorte. En virtud de la segunda ley de Newton tenemos:

$$Q \frac{d^2y}{dt^2} = -ky - \lambda \frac{dy}{dt} \tag{1}$$

(aquí, $k$ y $\lambda$ son números positivos). Hemos obtenido una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.

Escribámosla en la forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = 0, \tag{1'}$$

donde

$$p = \frac{\lambda}{Q}; \quad q = \frac{k}{Q}.$$

*Supongamos, ahora, que el punto inferior del resorte efectúa* movimientos verticales según la ley $z = \varphi(t)$. Este fenómeno puede tener lugar, por ejemplo, cuando el extremo inferior del resorte está fijado a un rodillo que junto con el resorte y la carga se mueve a lo largo de un camino de relieve desigual (fig. 269).

*) Los resortes cuya fuerza elástica es proporcional a la deformación se laman *resortes con «característica lineal»*.

En este caso la fuerza elástica no es igual a $-ky$, sino a $-k[y+\varphi(t)]$; la fuerza de resistencia será $-\lambda[y'+\varphi'(t)]$, y en lugar de la ecuación (1) obtenemos la ecuación:

$$Q\frac{d^2y}{dt^2}+\lambda\frac{dy}{dt}+ky=-k\varphi(t)-\lambda\varphi'(t) \tag{2}$$

ó

$$\frac{d^2y}{dt^2}+p\frac{dy}{dt}+qy=f(t), \tag{2'}$$

donde:

$$f(t)=-\frac{k\varphi(t)+\lambda\varphi'(t)}{Q}.$$

Hemos obtenido una ecuación diferencial no homogénea de segundo orden.

La ecuación (1′) se llama ecuación de las oscilaciones *libres*; la (2′), de las oscilaciones *forzadas*.

## § 27. OSCILACIONES LIBRES

Examinemos primero la ecuación de las oscilaciones libres

$$y''+py'+qy=0.$$

Escribamos la ecuación característica correspondiente:

$$k^2+pk+q=0,$$

y hallemos sus raíces:

$$k_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q};\qquad k_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

1) Sea $\frac{p^2}{4}>q$. En este caso las raíces $k_1$ y $k_2$ son números reales negativos. La solución general se expresa mediante funciones exponenciales:

$$y=C_1e^{k_1t}+C_2e^{k_2t}\qquad (k_1<0,\ k_2<0). \tag{1}$$

De esta fórmula se deduce que cualesquiera que sean las condiciones iniciales, la desviación $y$ tiende asintóticamente a cero, cuando $t\to\infty$. En el caso dado no habrán oscilaciones, puesto que las fuerzas de frenado son grandes en comparación con el coeficiente de rigidez $k$ del resorte.

2) Sea $\frac{p^2}{4}=q$; entonces la raíz $k_1$ equivale a $k_2$ y ambas son iguales al número negativo $-\frac{p}{2}$. Por tanto, la solución general es:

$$y=C_1e^{-\frac{p}{2}t}+C_2te^{-\frac{p}{2}t}=(C_1+C_2t)\,e^{-\frac{pt}{2}}. \tag{2}$$

Aquí la desviación también tiende a cero para $t\to\infty$, sin embargo, con menor velocidad que en el caso anterior (merced a la presencia del factor $C_1+C_2t$).

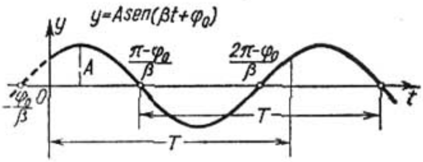


*Fig. 270*

3) Sea $p=0$, es decir, supongamos que no hay fuerza de frenado. La ecuación característica tiene la forma:

$$k^2+q=0,$$

y sus raíces son: $k_1=\beta i$; $k_2=-\beta i$, donde $\beta=\sqrt{q}$.

La solución general es:

$$y=C_1\cos\beta t+C_2\operatorname{sen}\beta t \tag{3}$$

Sustituyamos en la última fórmula las constantes arbitrarias $C_1$ y $C_2$ por otras $A$ y $\varphi_0$ ligadas con $C_1$ y $C_2$ por las relaciones:

$$C_1=A\operatorname{sen}\varphi_0,\quad C_2=A\cos\varphi_0.$$

Las constantes $A$ y $\varphi_0$ en función de $C_1$ y $C_2$ se determinan así:

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2},\qquad \varphi_0=\operatorname{arctg}\frac{C_1}{C_2}.$$

Introduciendo los valores de $C_1$ y $C_2$ en la fórmula (3), obtenemos:

$$y=A\operatorname{sen}\varphi_0\cos\beta t+A\cos\varphi_0\operatorname{sen}\beta t$$

ó

$$y=A\operatorname{sen}(\beta t+\varphi_0). \tag{3'}$$

Estas oscilaciones se llaman *armónicas*. Las curvas integrales son las sinusoides. El intervalo de tiempo $T$, durante el cual el argumento del seno varía en $2\pi$, se llama *período* de oscilaciones; en nuestro caso $T = \frac{2\pi}{\beta}$. El número de oscilaciones durante el tiempo $2\pi$ se llama *frecuencia* de oscilaciones. En el caso dado la frecuencia es igual a $\beta$. La constante $A$ que es la desviación máxima

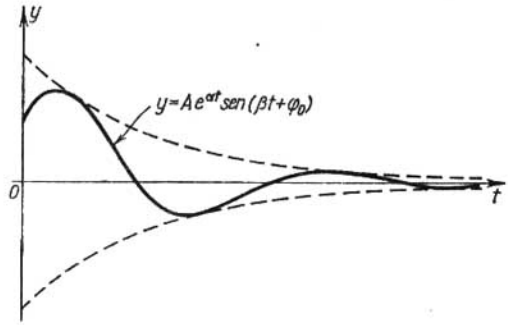


*Fig. 271*

a partir de la posición de equilibrio se llama *amplitud* de movimiento oscilatorio y $\varphi_0$ es la *fase inicial*. La gráfica de la función (3′) se da en la figura 270.

4) Sea $p \neq 0$ y $\frac{p^2}{4} < q$.

En este caso las raíces de la ecuación característica son los números complejos:

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta,$$

donde

$$\alpha = -\frac{p}{2} < 0, \qquad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

La integral general tiene la forma:

$$y = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t) \tag{4}$$

ó

$$y = Ae^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t + \varphi_0). \tag{4'}$$

Como amplitud estamos obligados a tomar la magnitud $Ae^{\alpha t}$ que depende del tiempo. Como $\alpha < 0$, la magnitud tiende a cero cuando $t \to \infty$, es decir, en este caso, se trata de *oscilaciones amortiguadas*. La gráfica de estas oscilaciones se da en la figura 271.

## § 28. OSCILACIONES FORZADAS

La ecuación de las oscilaciones forzadas tiene la forma:

$$y'' + py' + qy = f(t).$$

Analicemos el importante caso práctico, cuando la fuerza perturbadora externa está representada por la función periódica

$$f(t) = a \operatorname{sen} \omega t;$$

entonces, la ecuación toma la forma

$$y'' + py' + qy = a \operatorname{sen} \omega t. \tag{1}$$

1) Supongamos al principio que $p \neq 0$ y $\frac{p^2}{4} < q$, es decir, las raíces de la ecuación característica son los números complejos $\alpha \pm i\beta$. En este caso (véase fórmulas (4) y (4') § 27), la solución general de la ecuación homogénea tiene la forma:

$$\bar{y} = Ae^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t + \varphi_0). \tag{2}$$

Busquemos una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma:

$$y^* = M \cos \omega t + N \operatorname{sen} \omega t. \tag{3}$$

Introduciendo esta expresión de $y^*$ en la ecuación diferencial original, encontramos los valores de $M$ y $N$:

$$M = \frac{-p\omega a}{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}; \quad N = \frac{(q-\omega^2)\,a}{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}.$$

Antes de introducir los valores hallados de $M$ y $N$ en la igualdad (3), introduzcamos las nuevas constantes $A^*$ y $\varphi^*$, haciendo

$$M = A^* \operatorname{sen} \varphi^*, \quad N = A^* \cos \varphi^*,$$

es decir,

$$A^* = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}}, \qquad \operatorname{tg} \varphi^* = \frac{M}{N}.$$

Entonces, la solución particular de la ecuación no homogénea se puede escribir en la forma

$$y^* = A^* \operatorname{sen} \varphi^* \cos \omega t + A^* \cos \varphi^* \operatorname{sen} \omega t = A^* \operatorname{sen}(\omega t + \varphi^*),$$

o, en definitiva,

$$y^* = \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi^*).$$

La integral general de la ecuación (1) es igual a $y = \overline{y} + y^*$, es decir,

$$y = Ae^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}}\operatorname{sen}(\omega t + \varphi^*).$$

El primer término de la suma que se encuentra en el segundo miembro (la solución de la ecuación homogénea) representa las oscilaciones amortiguadas. Este término disminuye al crecer $t$, y, por tanto, dentro de cierto intervalo de tiempo, el segundo miembro adquiere el valor principal, que determina las oscilaciones forzadas. La frecuencia $\omega$ de estas oscilaciones es igual a la frecuencia de la fuerza externa $f(t)$; la amplitud de las oscilaciones forzadas es tanto mayor, cuanto menor es $p$ y cuanto más se acerque $\omega^2$ a $q$.

Analicemos más detalladamente cómo la amplitud de las oscilaciones forzadas depende de la frecuencia $\omega$, para diferentes valores de $p$. Designemos por $D(\omega)$ la amplitud de las oscilaciones forzadas:

$$D(\omega) = \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}}.$$

Hagamos $q = \beta_1^2$ (para $p = 0$; $\beta_1$ sería igual a la frecuencia de las oscilaciones propias). Entonces tenemos:

$$D(\omega) = \frac{a}{\sqrt{(\beta_1^2-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}} = \frac{a}{\beta_1^2\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\beta_1^2}\right)^2 + \frac{p^2}{\beta_1^2}\frac{\omega^2}{\beta_1^2}}}.$$

Introduzcamos las designaciones:

$$\frac{\omega}{\beta_1} = \lambda; \quad \frac{p}{\beta_1} = \gamma,$$

donde, $\lambda$ es la razón de la frecuencia de la fuerza perturbadora a la frecuencia de las oscilaciones libres del sistema; la constante $\lambda$ no depende de la fuerza perturbadora. La magnitud de la amplitud se expresa entonces por la fórmula:

$$\overline{D}(\lambda) = \frac{a}{\beta_1^2\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + \gamma^2\lambda^2}}. \tag{4}$$

Hallemos el máximo de esta función. Este corresponderá evidentemente al valor de $\lambda$, para el cual el cuadrado del denominador sea mínimo. Pero el mínimo de la función

$$\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + \gamma^2\lambda^2} \tag{5}$$

se alcanza cuando

$$\lambda = \sqrt{1-\frac{\gamma^2}{2}},$$

y es igual a

$$\gamma\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{4}}.$$

Por tanto, la magnitud máxima de la amplitud es igual a

$$\overline{D}_{\text{máx}} = \frac{a}{\beta_1^2\gamma\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{4}}}.$$

Las gráficas de la función $\overline{D}(\lambda)$ para diferentes valores de $\gamma$, se dan en la figura 272 (para concretar las ideas, al construir las

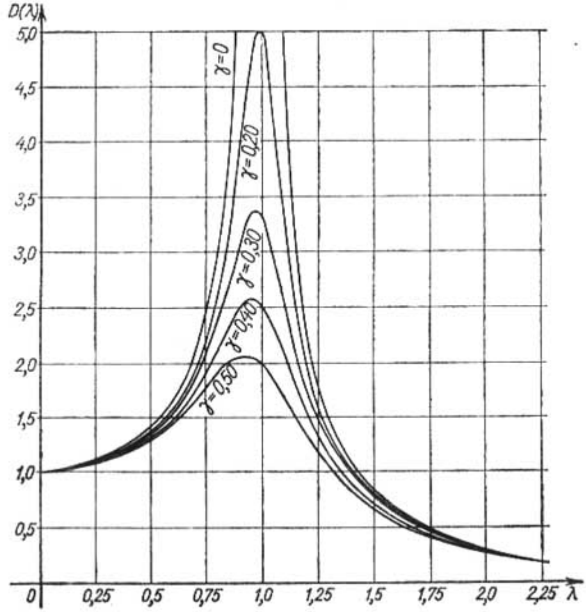


*Fig. 272*

gráficas, hagamos: $a = 1$, $\beta_1 = 1$). Estas curvas se llaman curvas de resonancia.

De la fórmula (5) se deduce que para $\gamma$ pequeñas el valor máximo de la amplitud se alcanza cuando los valores de $\lambda$ son próximos a la unidad, es decir, cuando la frecuencia de la fuerza externa es próxima a la de oscilaciones libres. Si $\gamma = 0$ (por tanto, $p = 0$), es decir, si no existe resistencia al movimiento, la amplitud de las oscilaciones forzadas crece indefinidamente cuando $\lambda \to 1$, es decir, para $\omega \to \beta_1 = \sqrt{q}$:

$$\lim_{\substack{\lambda \to 1 \\ (\gamma=0)}} \overline{D}(\lambda) = \infty.$$

Cuando $\omega^2 = q$, tiene lugar el fenómeno de resonancia.

2) Supongamos ahora que $p = 0$, es decir, examinemos la ecuación de oscilaciones elásticas sin resistencia, en presencia de una fuerza externa periódica:

$$y'' + qy = a \operatorname{sen} \omega t. \tag{6}$$

La solución general de la ecuación homogénea es:

$$\overline{y} = C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t \quad (\beta^2 = q).$$

Si $\beta \neq \omega$, es decir, si la frecuencia de la fuerza externa no es igual a la frecuencia de las oscilaciones propias la solución particular de la ecuación no homogénea se escribe en la forma:

$$y^* = M \cos \omega t + N \operatorname{sen} \omega t.$$

Poniendo esta expresión en la ecuación de partida, hallamos

$$M = 0, \qquad N = \frac{a}{q - \omega^2}.$$

La solución general es:

$$y = A \operatorname{sen} (\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{q - \omega^2} \operatorname{sen} \omega t.$$

Así, el movimiento se obtiene como resultado de la superposición de las oscilaciones propias de frecuencia $\beta$ y de las oscilaciones forzadas de frecuencia $\omega$.

Si $\beta = \omega$, es decir, la frecuencia de las oscilaciones propias coincide con la frecuencia de la fuerza externa, la función (3) no es solución de la ecuación (6). En este caso, en virtud de los resultados del § 24, busquemos una solución particular de la forma

$$y^* = t\,(M \cos \omega t + N \operatorname{sen} \omega t). \tag{7}$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación, encontremos $M$ y $N$:

$$M = -\frac{a}{2\omega}; \quad N = 0.$$

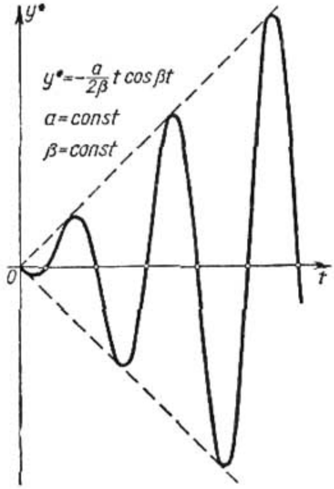


*Fig. 273*

Por tanto:

$$y^* = -\frac{a}{2\beta} t \cos \omega t.$$

La solución general es de la forma:

$$y = A \operatorname{sen}(\beta t + \varphi_0) - \frac{a}{2\omega} t \cos \beta t.$$

El segundo término del segundo miembro muestra que, en este caso, la amplitud de las oscilaciones *crece* indefinidamente cuando el tiempo $t$ crece de la misma manera ($t \to \infty$). Este fenómeno que tiene lugar cuando la frecuencia de las propias oscilaciones del sistema coincide con la frecuencia de la fuerza externa, se llama *resonancia*.

La gráfica de la función $y^*$ está dada en la figura 273.

## § 29. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Durante la resolución de un gran número de problemas se necesita hallar las funciones $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, . . . $y_n = y_n(x)$, que satisfagan a un sistema de ecuaciones diferenciales bajo la condición de que estas ecuaciones contienen el argumento $x$, las funciones desconocidas $y_1, y_2, \ldots, y_n$ y sus derivadas.

Examinemos el sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

donde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son las funciones desconocidas, y $x$ es el argumento.

Un sistema que tiene en los primeros miembros de las ecuaciones las derivadas de primer orden y en los segundos miembros no las tiene se llama *sistema normal*.

Integrar este sistema significa determinar las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$, que satisfagan al sistema (1) de ecuaciones y a las condiciones iniciales dadas:

$$(y_1)_{x=x_0} = y_{10}, \ (y_2)_{x=x_0} = y_{20}, \ \ldots, \ (y_n)_{x=x_0} = y_{n0}. \tag{2}$$

La integración del sistema de la forma (1) se realiza del modo siguiente.

Derivemos la primera de las ecuaciones (1) respecto a $x$:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

Sustituyendo las derivadas $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots \frac{dy_n}{dx}$ por sus expresiones respectivas $f_1, f_2, \ldots f_n$ de las ecuaciones (1) obtenemos:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Derivando la ecuación obtenida y procediendo de la misma manera hallamos:

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Continuando así, obtenemos en definitiva, una ecuación

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, \ldots, y_n).$$

De este modo hemos obtenido el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \dfrac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{array}\right\} \tag{3}$$

De las primeras $n-1$ ecuaciones determinemos $y_2, y_3 \dots y_n$, expresándolas en función de $x$, $y_1$ y las derivadas $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{d^2y_1}{dx^2}$, ...
..., $\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$:

$$\left.\begin{array}{l} y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}), \\ y_3 = \varphi_3(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}). \end{array}\right\} \tag{4}$$

Poniendo estas expresiones en la última ecuación del sistema (3), obtenemos una ecuación de $n$ — ésimo orden para hallar $y_1$:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}). \tag{5}$$

Resolviendo esta ecuación, determinemos $y_1$:

$$y_1 = \psi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \tag{6}$$

Derivando esta expresión $n-1$ veces hallemos las derivadas $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{d^2y_1}{dx^2}$, ..., $\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$ como funciones de $x$, $C_1, C_2, \dots, C_n$. Sustituyendo estas funciones en (4), determinemos $y_2, y_3, \dots, y_n$:

$$\left.\begin{array}{l} y_2 = \psi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \psi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{array}\right\} \tag{7}$$

Para que la solución obtenida satisfaga a las condiciones iniciales dadas (2), es suficiente determinar de las ecuaciones (6) y (7) los valores correspondientes de las constantes $C_1, C_2, \dots, C_n$ (como hemos hecho en el caso de una sola ecuación diferencial).

**Observación 1.** Si el sistema (1) es lineal respecto a las funciones desconocidas, la ecuación (5) será también lineal.

**Ejemplo 1.** Integrar el sistema:

$$\frac{dy}{dx} = y + z + x, \quad \frac{dz}{dx} = -4y - 3z + 2x \tag{a}$$

con las condiciones iniciales:

$$(y)_{x=0} = 1, \quad (z)_{x=0} = 0. \tag{b}$$

**Solución:**

1) Derivando la primera ecuación respecto a $x$, tenemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}+1.$$

Sustituyendo aquí las expresiones $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dz}{dx}$, tomadas de las ecuaciones (a), obtenemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(y+z+x)+(-4y-3z+2x)+1$$

ó

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-3y-2z+3x+1. \tag{c}$$

2) De la primera ecuación del sistema (a) hallamos:

$$z=\frac{dy}{dx}-y-x \tag{d}$$

y, haciendo la sustitución en la ecuación (c), obtenemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-3y-2\left(\frac{dy}{dx}-y-x\right)+3x+1$$

ó

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=5x+1. \tag{e}$$

La solución general de la última ecuación es:

$$y=(C_1+C_2x)\,e^{-x}+5x-9 \tag{f}$$

y en virtud de (d):

$$z=(C_2-2C_1-2C_2x)\,e^{-x}-6x+14. \tag{g}$$

Elijamos las constantes $C_1$ y $C_2$ de manera que se satisfagan las condiciones iniciales (b):

$$(y)_{x=0}=1,\quad (z)_{x=0}=0.$$

Entonces de las igualdades (f) y (g) se deduce:

$$1=C_1-9;\quad 0=C_2-2C_1+14,$$

de donde: $C_1=10$; $C_2=6$.

Por consiguiente, la solución que satisface a las ecuaciones iniciales dadas (b) toma la forma:

$$y=(10+6x)\,e^{\ x}+5x-9,\quad z=(-14-12x)\,e^{-x}-6x+14.$$

**Observación (2).** En los razonamientos expuestos hemos supuesto que es posible determinar las funciones $y_2$, $y_3$, . . . $y_n$ de las primeras $(n-1)$ ecuaciones del sistema (3). Pero, puede ocurrir que las variables $y_2$, . . . $y_n$ se eliminan del número menor que de $n$ ecuaciones. Entonces para determinar $y$ obtenemos una ecuación de orden inferior a $n$.

**Ejemplo 2.** Integrar el sistema:

$$\frac{dx}{dt}=y+z;\quad \frac{dy}{dt}=x+z;\quad \frac{dz}{dt}=x+y.$$

**Solución.** Derivando la primera ecuación respecto a $t$, hallamos:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}=(x+z)+(x+y),\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=2x+y+z.$$

Eliminando las variables $y$ y $z$ de las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt}=y+z;\quad \frac{d^2x}{dt^2}=2x+y+z,$$

obtenemos una ecuación de segundo orden respecto a $x$:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-2x=0.$$

Integrándo esta ecuación obtenemos su solución general:

$$x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}, \tag{$\alpha$}$$

de donde hallamos:

$$\frac{dx}{dt}=-C_1e^{-t}+2C_2e^{2t}\ \text{ y }\ y=\frac{dx}{dt}-z=-C_1e^{-t}+2C_2e^{2t}-z. \tag{$\beta$}$$

Poniendo las expresiones halladas para $x$ e $y$ en la tercera ecuación del sistema dado, obtenemos una ecuación que permite determinar $z$:

$$\frac{dz}{dt}+z=3C_2e^{2t}.$$

Integrando esta ecuación, hallamos

$$z=C_3e^{-t}+C_2e^{2t}. \tag{$\gamma$}$$

Pero, entonces, en virtud de las ecuaciones ($\beta$) obtenemos

$$y=-(C_1+C_3)\,e^{-t}+C_2e^{2t}. \tag{$\delta$}$$

Las ecuaciones ($\alpha$), ($\delta$) y ($\gamma$) dan la solución general del sistema propuesto.

Las ecuaciones diferenciales de un sistema pueden contener las derivadas de órdenes superiores. En este caso se forma el sistema de las ecuaciones diferenciales de órdenes superiores.

Así, por ejemplo, el problema del movimiento de un punto material bajo la acción de la fuerza $\boldsymbol{F}$ se reduce a un sistema de tres ecuaciones diferenciales de segundo orden. Sean $F_x$, $F_y$, $F_z$ las proyecciones de la fuerza $\boldsymbol{F}$ sobre los ejes de coordenadas. La posición del punto en cada instante $t$ se determina por sus coordenadas $x$, $y$, $z$. Por consiguiente, $x$, $y$, $z$, son funciones de $t$. Las proyecciones del vector de la velocidad del punto material sobre los ejes de coordenadas seran:

$$\frac{dx}{dt},\quad \frac{dy}{dt},\quad \frac{dz}{dt}.$$

Supongamos que la fuerza $\boldsymbol{F}$ y, por consiguiente, sus proyecciones $F_x$, $F_y$, $F_z$ dependen del tiempo $t$, las posiciones $x$, $y$, $z$ del punto y de la velocidad de su movimiento, es decir $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

Las funciones buscadas en este problema son:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Estas funciones se determinan a partir de las ecuaciones de la dinámica (ley de Newton):

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right), \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right), \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Hemos obtenido un sistema de tres ecuaciones diferenciales de segundo orden. Si el movimiento es plano, es decir, si la trayectoria es una curva plana (que yace, por ejemplo, en el plano $0xy$), obtenemos un sistema de dos ecuaciones para determinar las funciones $x(t)$ e $y(t)$:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x\left(t,\ x,\ y,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right), \tag{9}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y\left(t,\ x,\ y,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right). \tag{10}$$

Se puede resolver un sistema de ecuaciones diferenciales de órdenes superiores, reduciéndolo a un sistema de ecuaciones de primer orden. Utilizando, por ejemplo, las ecuaciones (9) y (10), mostremos el método de la resolución. Introduzcamos las designaciones:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v.$$

Entonces:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}.$$

El sistema de dos ecuaciones (9) y (10) de segundo orden con dos funciones $x(t)$ e $y(t)$ desconocidas se sustituye por un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden con cuatro funciones desconocidas $x$, $y$, $u$, $v$:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v,$$

$$m\frac{du}{dt} = F_x(t,\ x,\ y,\ u,\ v),$$

$$m\frac{dv}{dt} = F_y(t,\ x,\ y,\ u,\ v).$$

Notemos en conclusión, que este método general para solucionar los sistemas de ecuaciones diferenciales se puede reemplazar, en algunos casos concretos, por uno u otro procedimiento artificial que conduce más rápidamente al objetivo.

**Ejemplo 3.** Hallar la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = z, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = y.$$

**Solución.** Derivemos ambos miembros de la primera ecuación dos veces consecutivas respecto a $x$:

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Pero, $\frac{d^2z}{dx^2}=y$, por consiguiente, obtenemos la ecuación de cuarto orden:

$$\frac{d^4y}{dx^4}=y.$$

Integrando esta ecuación, obtenemos su solución general (véase § 22, ejemplo 4, cap. XIII, tomo II).

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\operatorname{sen} x.$$

Hallando de esta ecuación $\frac{d^2y}{dx^2}$ y sustituyendo esta expresión en la primera ecuación determinamos $z$:

$$z=C_1e^x+C_2e^{-x}-C_3\cos x-C_4\operatorname{sen} x.$$

## § 30. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \ldots\ +a_{1n}x_n,\\ \frac{dx_2}{dt}&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \ldots\ +a_{2n}x_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{dx_n}{dt}&=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ \ldots\ +a_{nn}x_n,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

donde los coeficientes $a_{ij}$ son constantes. Además, $t$ es el argumento; $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ son las funciones desconocidas. El sistema (1) se llama **sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes.**

Como hemos indicado en el párrafo anterior se puede resolver este sistema, reduciéndolo a una ecuación de orden $n$, la cual, en el caso concreto dado será lineal (véase la observación 1 del párrafo anterior). Sin embargo, se puede resolver el sistema (1) por otro método, sin reducirlo a la ecuación de $n$-ésimo orden. Este método permite analizar, de manera más ilustrativa, el caracter de las soluciones.

Busquemos una solución particular del sistema en la forma siguiente:

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt},\ x_2 = \alpha_2 e^{kt},\ \ldots,\ x_n = \alpha_n e^{kt}. \tag{2}$$

Es preciso determinar las constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y $k$ de modo que las funciones $\alpha_1 e^{kt}, \alpha_2 e^{kt}, \ldots, \alpha_n e^{kt}$ satisfagan el sistema de ecuaciones (1). Sustituyéndolas en el sistema (1), obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} k\alpha_1 e^{kt} = (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n)\, e^{kt}, \\ k\alpha_2 e^{kt} = (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n)\, e^{kt}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k\alpha_n e^{kt} = (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n)\, e^{kt}. \end{array}\right\}$$

Simplificamos por $e^{kt}$. Transponiendo todos los términos a un lado y reuniendo los coeficientes de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - k)\,\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\,\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - k)\,\alpha_n = 0. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Elijamos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y $k$ tales que se satisfaga el sistema (3). Es un sistema de las ecuaciones algebraicas lineales respecto a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Formemos el determinante del sistema (3):

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & (a_{nn} - k) \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Si $k$ es tal que el determinante $\Delta$ se diferencia de cero, el sistema (3) tiene sólo las soluciones nulas: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, y, por tanto, las fórmulas (2) nos dan solamente las soluciones triviales:

$$x_1(t) = x_2(t) = \ldots = x_n(t) \equiv 0.$$

Por consiguiente, obtenemos las soluciones no triviales (2) sólo para tales $k$ que reducen el determinante (4) a cero. Así llegamos a la ecuación de $n$-ésimo orden para determinar $k$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Esta ecuación se llama **ecuación característica** para el sistema (1), y sus raíces se llaman **raíces de la ecuación característica.**

Examinemos algunos casos eventuales:

**I. Las raíces de la ecuación característica son reales y diferentes.** Designamos por $k_1, k_2, \ldots, k_n$ las raíces de la ecuación característica. Escribimos el sistema (3) para cada raíz $k_i$ y determinamos los coeficientes.

$$\alpha_1^{(i)}, \quad \alpha_2^{(i)}, \; \ldots, \; \alpha_n^{(i)}.$$

Se puede demostrar que uno de los coeficientes es arbitrario; puede ser igual a 1. De este modo obtenemos:

para la ráiz $k_1$, la solución del sistema (1) es

$$x_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t}, \quad x_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t}, \; \ldots, \; x_n^{(1)} = \alpha_n^{(1)} e^{k_1 t};$$

para la raíz $k_2$, la solución del sistema (1) es

$$x_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t}, \quad x_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t}, \; \ldots, \; x_n^{(2)} = \alpha_n^{(2)} e^{k_2 t};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

para la raíz $k_n$ la solución del sistema (1) es

$$x_1^{(n)} = \alpha_1^{(n)} e^{k_n t}, \quad x_2^{(n)} = \alpha_2^{(n)} e^{k_n t}, \; \ldots, \; x_n^{(n)} = \alpha_n^{(n)} e^{k_n t}.$$

Mediante la sustitución directa en las ecuaciones convencemos de que el sistema de funciones

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= C_1\alpha_1^{(1)} e^{k_1 t} + C_2\alpha_1^{(2)} e^{k_2 t} + \ldots + C_n\alpha_1^{(n)} e^{k_n t}, \\ x_2 &= C_1\alpha_2^{(1)} e^{k_1 t} + C_2\alpha_2^{(2)} e^{k_2 t} + \ldots + C_n\alpha_2^{(n)} e^{k_n t}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= C_1\alpha_n^{(1)} e^{k_1 t} + C_2\alpha_n^{(2)} e^{k_2 t} + \ldots + C_n\alpha_n^{(n)} e^{k_n t}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias, también es la solución del sistema de ecuaciones diferenciales (1). Esta es la **solución general del sistema** (1).

Es fácil demostrar que se puede hallar tales valores de las constantes para los cuales la solución satisfaga a las condiciones iniciales dadas.

**Ejemplo 1.** Hallar la solución general del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 2x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2.$$

**Solución.** Formemos la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0,$$

ó $k^2-5k+4=0$. Hallamos sus raíces:

$$k_1=1, \quad k_2=4.$$

Buscamos la solución del sistema en la forma:

$$x_1^{(1)}=\alpha_1^{(1)}e^t, \qquad x_2^{(1)}=\alpha_2^{(1)}e^t$$

y

$$x_1^{(2)}=\alpha_1^{(2)}e^{4t}, \qquad x_2^{(2)}=\alpha_2^{(2)}e^{4t}.$$

Formemos el sistema (3) para la raíz $k_1=1$ y determinemos $\alpha_1^{(1)}$ y $\alpha_2^{(1)}$:

$$\left.\begin{array}{l}(2-1)\,\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0,\\ 1\alpha_1^{(1)}+(3-1)\,\alpha_2^{(1)}=0\end{array}\right\}$$

ó

$$\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0,$$
$$\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0,$$

de donde: $\alpha_2^{(1)}=-\frac{1}{2}\alpha_1^{(1)}$. Poniendo $\alpha_1^{(1)}=1$, obtenemos: $\alpha_2^{(1)}=-\frac{1}{2}$. Así hemos obtenido la solución del sistema:

$$x_1^{(1)}=e^t, \quad x_2^{(1)}=-\frac{1}{2}e^t.$$

Formemos, ahora, el sistema (3) para la raíz $k_2=4$ y determinemos $\alpha_1^{(2)}$ y $\alpha_2^{(2)}$:

$$-2\alpha_1^{(2)}+2\alpha_2^{(2)}=0,$$
$$\alpha_1^{(2)}-2\alpha_2^{(2)}=0,$$

de donde: $\alpha_1^{(2)}=\alpha_2^{(2)}$ y $\alpha_1^{(2)}=1$, $\alpha_2^{(2)}=1$. Obtenemos pues, la segunda solución del sistema:

$$x_1^{(2)}=e^{4t}, \quad x_2^{(2)}=e^{4t}.$$

La solución general del sistema será [véase (6)]:

$$x_1=C_1e^t+C_2e^{4t},$$
$$x_2=-\frac{1}{2}C_1e^t+C_2e^{4t}.$$

**II. Las raíces de la ecuación característica son distintas, pero incluyen raíces complejas.** Supongamos que entre las raíces de la ecuación característica hay dos raíces complejas conjugadas:

$$k_1=\alpha+i\beta, \qquad k_2=\alpha-i\beta.$$

A estas raíces corresponden las soluciones:

$$x_j^{(1)}=\alpha_j^{(1)}e^{(\alpha+i\beta)t} \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{7}$$

$$x_j^{(2)}=\alpha_j^{(2)}e^{(\alpha-i\beta)t} \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{8}$$

Los coeficientes $\alpha_j^{(1)}$ y $\alpha_j^{(2)}$ se determinan del sistema de ecuaciones (3).

Igual que en § 21 (cap. XIII), se puede mostrar que las partes real e imaginaria de la solución compleja son también soluciones. De esta manera obtenemos dos soluciones particulares:

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}_j^{(1)} &= e^{\alpha t}(\lambda_j^{(1)}\cos\beta x + \lambda_j^{(2)}\operatorname{sen}\beta x),\\ \bar{x}_j^{(2)} &= e^{\alpha t}(\bar{\lambda}_j^{(1)}\operatorname{sen}\beta x + \bar{\lambda}_j^{(2)}\cos\beta x),\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

donde $\lambda_j^{(1)}$, $\lambda_j^{(2)}$, $\overline{\lambda}_j^{(1)}$, $\overline{\lambda}_j^{(2)}$ son números reales, determinados mediante $\alpha_j^{(1)}$ y $\alpha_j^{(2)}$.

Las combinaciones correspondientes de las funciones (9) entran en la solución general del sistema.

**Ejemplo 2.** Hallar la solución general del sistema

$$\frac{dx_1}{dt} = -7x_1 + x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 5x_2.$$

**Solución.** Formemos la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} -7-k & 1 \\ -2 & -5-k \end{vmatrix} = 0$$

ó $k^2 + 12k + 37 = 0$ y encontremos sus raíces:

$$k_1 = -6 + i, \quad k_2 = -6 - i.$$

Sustituyendo $k_1 = -6 + i$ en el sistema (3), hallamos:

$$\alpha_1^{(1)} = 1, \quad \alpha_2^{(1)} = 1 + i.$$

Escribimos la solución (7):

$$x_1^{(1)} = 1e^{(-6+i)t}, \quad x_2^{(1)} = (1+i)\,e^{(-6+i)t}. \tag{7'}$$

Sustituyendo $k_2 = -6 - i$ en el sistema (3), hallamos:

$$\alpha_1^{(2)} = 1, \quad \alpha_2^{(2)} = 1 - i.$$

Obtengamos el segundo sistema de las soluciones (8):

$$x_1^{(2)} = e^{(-6-i)t}, \quad x_2^{(2)} = (1-i)\,e^{(-6-i)t}. \tag{8'}$$

Escribimos en otra forma la solución (7′):

$$x_1^{(1)} = e^{-6t}(\cos t + i\operatorname{sen} t), \quad x_2^{(1)} = (1+i)\,e^{-6t}(\cos t + i\operatorname{sen} t)$$

ó

$$x_1^{(1)} = e^{-6t}\cos t + ie^{-6t}\operatorname{sen} t,$$

$$x_2^{(1)} = e^{-6t}(\cos t - \operatorname{sen} t) + ie^{-6t}(\cos t + \operatorname{sen} t).$$

Escribimos en otra forma la solución (8′):

$$x_1^{(2)} = e^{-6t}\cos t - ie^{-6t}\operatorname{sen} t,$$

$$x_2^{(2)} = e^{-6t}(\cos t - \operatorname{sen} t) - ie^{-6t}(\cos t + \operatorname{sen} t).$$

Como los sistemas de las soluciones particulares podemos tomar las partes reales e imaginarias por separado

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{x}_1^{(1)} = e^{-6t}\cos t, & \bar{x}_2^{(1)} = e^{-6t}(\cos t - \operatorname{sen} t), \\ \bar{x}_1^{(2)} = e^{-6t}\operatorname{sen} t, & \bar{x}_2^{(2)} = e^{-6t}(\cos t + \operatorname{sen} t). \end{array}\right\} \qquad (9')$$

La solución general del sistema es:

$$x_1 = C_1 e^{-6t}\cos t + C_2 e^{-6t}\operatorname{sen} t,$$
$$x_2 = C_1 e^{-6t}(\cos t - \operatorname{sen} t) + C_2 e^{-6t}(\cos t + \operatorname{sen} t).$$

De modo análogo se puede hallar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales de órdenes superiores con coeficientes constantes.

En la mecánica y la teoría de circuitos eléctricos se estudia, por ejemplo, la solución del sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= a_{21}x + a_{22}y. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Luego buscamos la solución en la forma:

$$x = \alpha e^{kt}, \qquad y = \beta e^{kt}.$$

Introduciendo estas expresiones en el sistema (10) y simplificando por $e^{kt}$, obtenemos un sistema de ecuaciones para determinar $\alpha$, $\beta$ y $k$:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - k^2)\,\alpha + a_{12}\beta = 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k^2)\,\beta = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Siendo $\alpha$ y $\beta$ distintas de cero, se determinan solamente cuando el determinante del sistema es igual a cero:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (12)$$

Esta es la ecuación característica para el sistema (10). Es la ecuación de cuarto orden respecto a $k$. Sean $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$ sus raíces (supongamos que las raíces son diferentes). Para cada raíz $k_i$ del sistema (11) hallamos los valores de $\alpha$ y $\beta$. Igual que en el caso (6) la solución general tiene la forma:

$$x = C_1\alpha^{(1)}e^{k_1t} + C_2\alpha^{(2)}e^{k_2t} + C_3\alpha^{(3)}e^{k_3t} + C_4\alpha^{(4)}e^{k_4t},$$
$$y = C_1\beta^{(1)}e^{k_1t} + C_2\beta^{(2)}e^{k_2t} + C_3\beta^{(3)}e^{k_3t} + C_4\beta^{(4)}e^{k_4t}.$$

Si entre las raíces hay unas complejas, a cada par de raíces complejas en la solución general corresponden las expresiones de la forma (9).

**Ejemplo 3.** Hallar la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2x}{dt^2}=x-4y, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-x+y.$$

**Solución.** Escribamos la ecuación característica (12) y encontremos sus raíces:

$$\begin{vmatrix} 1-k^2 & -4 \\ -1 & 1-k^2 \end{vmatrix}=0,$$

$$k_1=i, \quad k_2=-i, \quad k_3=\sqrt{3}, \quad k_4=-\sqrt{3}.$$

Buscamos la solución en la forma:

$$x^{(1)}=\alpha^{(1)}e^{it}, \qquad y^{(1)}=\beta^{(1)}e^{it},$$

$$x^{(2)}=\alpha^{(2)}e^{-it}, \qquad y^{(2)}=\beta^{(2)}e^{-it},$$

$$x^{(3)}=\alpha^{(3)}e^{\sqrt{3}t}, \qquad y^{(3)}=\beta^{(3)}e^{\sqrt{3}t},$$

$$x^{(4)}=\alpha^{(4)}e^{-\sqrt{3}t}, \qquad y^{(4)}=\beta^{(4)}e^{-\sqrt{3}t}.$$

Del sistema (11) encontramos $\alpha^{(j)}$ y $\beta^{(j)}$:

$$\alpha^{(1)}=1, \qquad \beta^{(1)}=\frac{1}{2},$$

$$\alpha^{(2)}=1, \qquad \beta^{(2)}=\frac{1}{2},$$

$$\alpha^{(3)}=1, \qquad \beta^{(3)}=-\frac{1}{2},$$

$$\alpha^{(4)}=1, \qquad \beta^{(4)}=-\frac{1}{2}.$$

Escribimos las soluciones complejas:

$$x^{(1)}=e^{-it}=\cos t+i\operatorname{sen} t, \qquad y^{(1)}=\frac{1}{2}(\cos t+i\operatorname{sen} t),$$

$$x^{(2)}=e^{-it}=\cos t-i\operatorname{sen} t, \qquad y^{(2)}=\frac{1}{2}(\cos t-i\operatorname{sen} t).$$

Las partes real e imaginaria, tomadas por separado forman las soluciones:

$$\bar{x}^{(1)}=\cos t, \qquad \bar{y}^{(1)}=\frac{1}{2}\cos t,$$

$$\bar{x}^{(2)}=\operatorname{sen} t, \qquad \bar{y}^{(2)}=\frac{1}{2}\operatorname{sen} t.$$

Escribimos, ahora, la solución general:

$$x=C_1\cos t+C_2\operatorname{sen} t+C_3e^{\sqrt{3}t}+C_4e^{-\sqrt{3}t},$$

$$y=C_1\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}C_2\operatorname{sen} t-C_3\frac{1}{2}e^{\sqrt{3}t}-C_4\frac{1}{2}e^{-\sqrt{3}t}.$$

**Observación.** No hemos analizado aquí el caso de raíces múltiples de la ecuación característica que está fuera de las tareas del libro presente.

## § 31. NOCION SOBRE LA TEORIA DE LA ESTABILIDAD DE LIAPUNOV

Como las soluciones de la mayoría de las ecuaciones diferenciales y de los sistemas de ecuaciones no se expresan mediante funciones elementales o cuadraturas, en estos casos, para resolver las ecuaciones diferenciales concretas, se usan los métodos de integración aproximada. Ya hemos dado algunas nociones de estos métodos en el § 3 (capítulo XIII tomo II); otros métodos los analizaremos en los §§ 32-34 y también en el capítulo XVI.

La deficiencia de estos métodos es que ellos dan sólo una solución particular; para obtener otras soluciones particulares es preciso realizar de nuevo todos los cálculos. Conociendo una solución particular, no se puede juzgar sobre el carácter de las otras soluciones.

En muchos problemas de mecánica y técnica tiene importancia saber no los valores concretos de la solución correspondientes a los valores concretos dados del argumento, sino el carácter de variación de la solución cuando cambia el argumento y, en particular, cuando éste crece indefinidamente. Por ejemplo, tiene importancia saber, si las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas son periódicas, o si ellas tiendèn asintóticamente hacia una función conocida, etc. Estos problemas son de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales.

La cuestión de la estabilidad de una solución o de un movimiento es uno de los problemas fundamentales de la teoría cualitativa; este problema fue detalladamente analizado por el célebre matemático ruso A. M. Liapunov (1857-1918).

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(t,\ x,\ y), \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(t,\ x,\ y). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Sean $x = x(t)$ e $y = y(t)$ las soluciones de este sistema que satisfagan las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{aligned} x_{t=0} &= x_0, \\ y_{t=0} &= y_0. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Sean, además, $\bar{x} = \bar{x}(t)$ e $\bar{y} = \bar{y}(t)$ las soluciones del sistema (1) que satisfagan a las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}_{t=0} = \bar{x}_0, \\ \bar{y}_{t=0} = \bar{y}_0. \end{array}\right\} \qquad (1'')$$

**Definición.** Las soluciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$, que satisfagan las ecuaciones (1) y las condiciones iniciales (1'), se llaman *estables*, según Liapunov, cuando $t \to \infty$, si para todo $\varepsilon > 0$, por pequeño que sea, existe $\delta > 0$ tal que para todos los valores de $t > 0$ se verificarán las desigualdades

$$\left.\begin{array}{l} |\bar{x}(t) - x(t)| < \varepsilon, \\ |\bar{y}(t) - y(t)| < \varepsilon, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

si las condiciones iniciales satisfacen las desigualdades:

$$\left.\begin{array}{l} |\bar{x}_0 - x_0| < \delta, \\ |\bar{y}_0 - y_0| < \delta. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Aclaremos el significado de esta definición. De las desigualdades (2) y (3) se deduce que, si son pequeñas las variaciones de las condiciones iniciales, las soluciones correspondientes varían poco, cualesquiera que sean los valores positivos de $t$. Si el sistema de ecuaciones diferenciales describe cierto movimiento, entonces, siendo estables las soluciones, el carácter de movimiento varía poco cuando los cambios de las condiciones iniciales son pequeños.

Analicemos esto en el ejemplo de una ecuación de primer orden. Sea la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = -y + 1. \qquad (a)$$

Su solución general es la función

$$y = Ce^{-t} + 1. \qquad (b)$$

Hallemos la solución particular que satisface a la condición inicial

$$y_{t=0} = 1. \qquad (c)$$

Es evidente que esta solución, $y = 1$, se obtiene cuando $C = 0$ (fig. 274). Encontremos, ahora, la solución particular que satisfaga la condición inicial

$$\bar{y}_{t=0} = \bar{y}_0.$$

De la ecuación (b) hallemos el valor de $C$:

$$\bar{y}_0 = C + 1,$$

de donde:

$$C = \bar{y}_0 - 1.$$

Sustituyendo este valor de $C$ en la ecuación (b), obtenemos:

$$\bar{y} = (\bar{y}_0 - 1)\, e^{-t} + 1.$$

Es evidente que la solución $y = 1$ es estable. En efecto,

$$y - \bar{y} = [(\bar{y}_0 - 1)\, e^{-t} + 1] - 1 = (\bar{y}_0 - 1)\, e^{-t} \longrightarrow 0$$

cuando $t \longrightarrow \infty$.

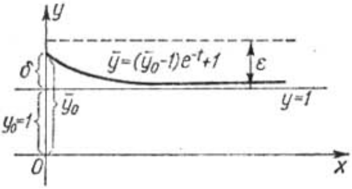


*Fig. 274*

Por consiguiente, la desigualdad (3) se verifica para $\varepsilon$ cualquiera, siempre cuando se cumple la desigualdad

$$(y_0 - 1) = \delta < \varepsilon.$$

Examinemos luego el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

suponiendo que los coeficientes $a$, $b$, $c$, $g$ son constantes y $g \neq 0$.

Aclaremos a qué condiciones deben satisfacer los coeficientes para que la solución $x = 0$, $y = 0$, del sistema (4) sea estable.

Derivando la ecuación primera y eliminando $y$, obtenemos una ecuación de segundo orden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = c\,\frac{dx}{dt} + g\,\frac{dy}{dt} = c\,\frac{dx}{dt} + g\,(ax + by) =$$

$$= c\,\frac{dx}{dt} + agx + b\left(\frac{dx}{dt} - cx\right)$$

ó

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (b + c)\,\frac{dx}{dt} - (ag - bc)\,x = 0. \tag{5}$$

Su ecuación característica tiene la forma:

$$\lambda^2 - (b + c)\lambda - (ag - bc) = 0. \tag{6}$$

Designemos las raíces de la ecuación característica por $\lambda_1$ y $\lambda_2$. Son posibles los casos siguientes.

1. Las raíces de la ecuación característica son reales, negativas y distintas:

$$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0,\ \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Entonces,

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

$$y = [C_1(\lambda_1 - c)e^{\lambda_1 t} + C_2(\lambda_2 - c)e^{\lambda_2 t}]\frac{1}{g}.$$

La solución que satisface a las condiciones iniciales

$$x\big|_{t=0} = x_0, \quad y\big|_{t=0} = y_0,$$

es:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0\lambda_1 - cx_0 - y_0 g}{\lambda_1 - \lambda_2}e^{\lambda_2 t},\\ y &= \frac{1}{g}\left[\frac{cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 - c)e^{\lambda_1 t} + \right.\\ &\qquad\qquad \left. + \frac{x_0\lambda_1 - cx_0 - y_0 g}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_2 - c)e^{\lambda_2 t}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

De las últimas fórmulas se deduce que para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede elegir $x_0$ e $y_0$ suficientemente pequeños de modo que para todos $t > 0$ tenemos:

$$|x(t)| < \varepsilon,\ |y(t)| < \varepsilon, \text{ puesto que } e^{\lambda_1 t} < 1 \text{ y } e^{\lambda_2 t} < 1.$$

Por tanto, en este caso la solución $x = 0$, $y = 0$ es **estable**.

2. Sean $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$. En este caso:

$$x = C_1 + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

$$y = \frac{1}{g}[C_2(\lambda_2 - c)e^{\lambda_2 t} - cC_1],$$

y, como en el caso anterior, la solución es **estable**.

3. Sea $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. En este caso:

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda_1 t},$$

$$y = \frac{1}{g}e^{\lambda_1 t}[C_1(\lambda_1 - c) + C_2(1 + \lambda_1 t - ct)].$$

Puesto que

$$te^{\lambda_1 t} \to 0, \quad e^{\lambda_1 t} \to 0, \quad \text{cuando } t \to \infty,$$

entonces, para $C_1$ y $C_2$ suficientemente pequeñas (es decir, cuando $x_0$ e $y_0$ son suficientemente pequeños) será:

$$|x(t)| < \varepsilon \text{ e } \; |y(t)| < \varepsilon \text{ para cualquier } t > 0.$$

La solución es **estable.**

4. Sea $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. En este caso tenemos:

$$x = C_1 + C_2 t,$$

$$y = \frac{1}{g}[-cC_1 + C_2 - cC_2 t].$$

Vemos que por pequeña que sea $C_2 \neq 0$, tanto $x$, como $y$ tienden al infinito (cuando $t \to \infty$), es decir, la solución es **inestable.**

5. Supongamos que por lo menos una de las raíces $\lambda_1$ y $\lambda_2$ sea positiva, por ejemplo, $\lambda_1 > 0$.

De la fórmula (7) se deduce que, por pequeños que sean $x^0$ e $y_0$, si

$$cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2 \neq 0,$$

es decir, si $C_1 \neq 0$, entonces $|x(t)| \to \infty$ cuando $t \to \infty$.

Por tanto, en este caso la solución también es **inestable.**

6. Las raíces de la ecuación característica son complejas con la parte real negativa:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha + i\beta \\ \lambda_2 &= \alpha - i\beta \end{aligned}\right\} \alpha < 0.$$

En este caso:

$$\left.\begin{aligned} x &= Ce^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t + \delta), \\ y &= \frac{1}{g}Ce^{\alpha t}[(\alpha - c)\operatorname{sen}(\beta t + \delta) + \beta\cos(\beta t + \delta)]. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Es evidente que para todo $\varepsilon > 0$ se puede elegir $x_0$ e $y_0$ de tal modo que sea $|C| < \varepsilon$ y $\frac{|\alpha - c| + |\beta|}{|d|} < \varepsilon$, y, por consiguiente,

$$|x(t)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |y(t)| < \varepsilon.$$

La solución es **estable.**

7. Las raíces de la ecuación característica son números puramente imaginarios:

$$\lambda_1 = \beta t, \; \lambda_2 = -\beta t.$$

En este caso:

$$x = C \operatorname{sen}(\beta t + \delta),$$

$$y = \frac{1}{g} C [\beta \cos(\beta t + \delta) - c \operatorname{sen}(\beta t + \delta)],$$

es decir, $x(t)$ e $y(t)$ son funciones periódicas de $t$. Como en el caso anterior verifiquemos que la solución es **estable.**

8. Las raíces de la ecuación característica son complejas con la parte real positiva ($\alpha > 0$).

De las fórmulas (8) se deduce que por pequeños que sean $x_0$ e $y_0$ (es decir, por pequeñas que sean $C \neq 0$), las magnitudes $|x(t)|$ e $|y(t)|$ pueden tomar los valores grandes cualesquiera que sean, cuando $t$ crece, puesto que $e^{\alpha t} \to \infty$ cuando $t \to \infty$. La solución es **inestable.**

Para dar un criterio general de la estabilidad de la solución del sistema (4), procedamos de la manera siguiente.

Escribamos las raíces de la ecuación característica en forma de los números complejos:

$$\lambda_1 = \lambda_1^* + i\lambda_1^{**}, \quad \lambda_2 = \lambda_2^* + i\lambda_2^{**}$$

(si las raíces son reales, $\lambda_1^{**} = 0$ y $\lambda_2^{**} = 0$).

Representemos las raíces de la ecuación característica mediante los puntos en el plano de la variable compleja $\lambda^*\lambda^{**}$. Entonces, partiendo de los ocho casos examinados, se puede formular la condición de estabilidad de la solución del sistema (4) en la forma siguiente:

*Si ninguna de las raíces $\lambda_1$, $\lambda_2$ de la ecuación característica (6) se encuentra a la derecha del eje imaginario y si por lo menos una de las raíces es distinta de cero, la solución es estable; si ambas raíces son nulas o por lo menos una de las raíces está a la derecha del eje imaginario, la solución es inestable.*

Examinemos ahora el sistema más general de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy + P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by + Q(x, y). \end{aligned}\right\} \qquad (4')$$

Aparte de los casos excepcionales, la solución de tal sistema no se expresa mediante las funciones elementales y las cuadraturas.

Para determinar que las soluciones de este sistema son estables o inestables, las comparan con las soluciones de un sistema lineal. Supongamos que cuando $x \to 0$ e $y \to 0$, las funciones $P(x, y)$

y $Q(x, y)$ también tienden a cero con mayor rapidez que $\rho$, donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; en otras palabras

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{P(x, y)}{\rho} = 0; \qquad \lim_{\rho\to 0} \frac{Q(x, y)}{\rho} = 0.$$

Entonces se puede demostrar que aparte de un caso excepcional, la solución del sistema (4′) es estable siempre y cuando lo es la solución del sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

y es inestable siempre y cuando es inestable la solución del sistema (4). La excepción es el caso, en que ambas raíces de la ecuación característica se encuentran en el eje imaginario. Entonces es mucho más difícil resolver el problema de la estabilidad o inestabilidad de la solución del sistema (4′).

A. M. Liapunov *) analizó el problema de la estabilidad de las soluciones de los sistemas de ecuaciones partiendo de las suposiciones bastante generales respecto a la forma de estas ecuaciones.

## § 32. SOLUCION APROXIMADA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN POR EL MÉTODO DE EULER

Examinemos aquí dos métodos de solución numérica de la ecuación diferencial de primer orden. En este párrafo analicemos el **método de Euler.**

Hallemos la solución aproximada de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

en el segmento $[x_0, b]$ que satisfaga la condición inicial: $y = y_0$ para $x = x_0$. Dividamos el segmento $[x_0, b]$ mediante los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ en $n$ partes iguales (aquí, $x_0 < x_1 < x_2, \ldots, < x_n$). Designemos: $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = b - x_{n-1} = \Delta x = h$, por tanto,

$$h = \frac{b - x_0}{n}$$

*) A. M. Liapunov. «Problema general de la estabilidad de movimiento», 1935.

Sea $y = \varphi(x)$ cierta solución aproximada de la ecuación (1), y

$$y_0 = \varphi(x),\ y_1 = \varphi(x_1),\ \ldots,\ y_n = \varphi(x_n).$$

Designemos:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,\quad \Delta y_1 = y_2 - y_1,\ \ldots,\ \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

En cada uno de los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en la ecuación (1) sustituyamos la derivada por la razón de diferencias finitas:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y), \tag{2}$$

$$\Delta y = f(x, y)\,\Delta x. \tag{2'}$$

Cuando $x = x_0$ tenemos:

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x} = f(x_0, y_0), \qquad \Delta y_0 = f(x_0, y_0)\,\Delta x$$

ó

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)\,h.$$

En esta igualdad $x_0$, $y_0$, $h$ son conocidos. Por tanto, hallamos:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)\,h.$$

Cuando $x = x_1$ la ecuación (2′) toma la forma:

$$\Delta y_1 = f(x_1, y_1)\,h$$

ó

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)\,h,\ y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\,h.$$

Aquí tenemos conocidos $x_1$, $y_1$, $h$ y determinamos $y_2$. De modo análogo encontramos:

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)\,h,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)\,h,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\,h.$$

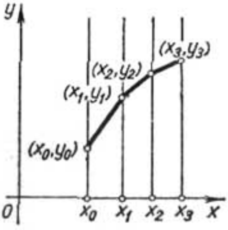


*Fig. 275*

Pues hemos hallado los valores aproximados de la solución en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Uniendo en el plano de coordenadas los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ mediante los segmentos de recta obtenemos una **línea quebrada** que es la representación aproximada de la línea integral (fig. 275). Esta línea se llama *línea quebrada de Euler*.

**Observación.** Designemos por $y = \varphi_h(x)$ la solución aproximada de la ecuación (1) que corresponde a la línea quebrada de Euler cuando $\Delta x = h$. Se puede demostrar que, si existe una solución única $y = \varphi^* (x)$ de la ecuación (1) que satisface a las condiciones iniciales y está definida en el segmento $[x_0, b]$, entonces $\lim\limits_{h \to 0} | \varphi_h (x) - \varphi^* (x) | = 0$ para todo $x$ del segmento $[x_0, b]$.

**Ejemplo.** Hallar el valor aproximado de la solución de la ecuación

$$y' = y + x,$$

para $x = 1$, que satisfaga a la condición inicial: $y_0 = 1$, cuando $x_0 = 0$.

**Solución.** Dividamos el segmento $[0, 1]$ en 10 partes mediante los puntos $x_0 = 0$; 0,1; 0,2; . . .; 1,0. Por tanto, $h = 0{,}1$. Determinemos los valores $y_1, y_2, \ldots, y_n$ por la fórmula (2'):

$$\Delta y_k = (y_k + x_k) h$$

ó

$$y_{k+1} = y_k + (y_k + x_k) h.$$

De este modo obtenemos:

$$y_1 = 1 + (1 + 0) \cdot 0{,}1 = 1 + 0{,}1 = 1{,}1,$$
$$y_2 = 1{,}1 + (1{,}1 + 0{,}1) \cdot 0{,}1 = 1{,}21,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Durante la solución formemos la tabla:

| $x_k$ | $y_k$ | $y_k + x_k$ | $\Delta y_k = (y_k + x_k) h$ |
|---|---|---|---|
| $x_0 = 0$ | 1,000 | 1,000 | 0,100 |
| $x_1 = 0{,}1$ | 1,100 | 1,200 | 0,120 |
| $x_2 = 0{,}2$ | 1,220 | 1,420 | 0,142 |
| $x_3 = 0{,}3$ | 1,362 | 1,620 | 0,162 |
| $x_4 = 0{,}4$ | 1,524 | 1,924 | 0,1924 |
| $x_5 = 0{,}5$ | 1,7164 | 2,2164 | 0,2216 |
| $x_6 = 0{,}6$ | 1,9380 | 2,5380 | 0,2538 |
| $x_7 = 0{,}7$ | 2,1918 | 2,8918 | 0,2812 |
| $x_8 = 0{,}8$ | 2,4730 | 3,2730 | 0,3273 |
| $x_9 = 0{,}9$ | 2,8003 | 3,7003 | 0,3700 |
| $x_{10} = 1{,}0$ | 3,1703 | | |

Hemos encontrado el valor aproximado $y|_{x=1} = 3{,}1703$. La solución precisa de la ecuación dada, que satisface las condiciones iniciales indicadas es:

$$y = 2e^x - x - 1.$$

Por consiguiente,

$$y|_{x=1} = 2(e - 1) = 3{,}4365.$$

El error absoluto es 0,2662, el error relativo es $\frac{0{,}2662}{3{,}4365} = 0{,}077 \approx 8\%$.

## § 33. SOLUCION APROXIMADA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES POR EL METODO DE DIFERENCIAS, BASADO EN EL EMPLEO DE LA FFRMULA DE TAYLOR. METODO DE ADAMS

Busquemos de nuevo la solución de la ecuación

$$y' = f(x,\ y) \tag{1}$$

en el segmento $[x_0, b]$ que satisface a la condición inicial: $y = y_0$, cuando $x = x_0$. Introduzcamos las designaciones necesarias para lo sucesivo. Los valores aproximados de la solución en los puntos

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

serán

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n.$$

Las primeras diferencias o las de primer orden son:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1,\ \ldots,\quad y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

Las segundas diferencias o las de segundo orden son:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0,$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}.$$

Las diferencias de las segundas diferencias se llaman diferencias de tercer orden, etc. Designemos los valores aproximados de las derivadas mediante $y'_0, y'_1, \ldots, y'_n$; los valores aproximados de las segundas derivadas, mediante $y''_0, y''_1, \ldots, y''_n$, etc. De modo análogo determinemos las primeras diferencias de las derivadas:

$$\Delta y'_0 = y'_1 - y'_0,\ \ \Delta y'_1 = y'_2 - y'_1,\ \ldots,\ \Delta y'_{n-1} = y'_n - y'_{n-1};$$

las segundas diferencias de las derivadas:

$$\Delta^2 y'_0 = \Delta y'_1 - \Delta y'_0,\ \ \Delta^2 y'_1 = \Delta y'_2 - \Delta y'_1,\ \ \ldots,\ \Delta^2 y'_{n-2} = \Delta y'_{n-1} - \Delta y'_{n-2}$$

etc.

Escribamos, ahora la fórmula de Taylor para solucionar la ecuación en la vecindad del punto $x = x_0$ (tomo I, cap. IV, § 6, fórmula (6)):

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1}\, y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{1\cdot 2}\, y''_0 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x - x_0)^m}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot m}\, y_0^{(m)} + R_m. \tag{2}$$

En esta fórmula $y_0$ está conocido y los valores de las derivadas $y'_0$, $y''_0$, . . . determinamos de la ecuación (1) del modo siguiente. Sustituyendo los valores iniciales $x_0$ e $y_0$ en el segundo miembro de la ecuación (1), hallamos $y'_0$:

$$y'_0 = f(x_0, y_0).$$

Derivando los términos de la ecuación (1) respecto a $x$, obtenemos:

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'. \tag{3}$$

Introduciendo en el segundo miembro los valores de $x_0$, $y_0$, $y'_0$, hallamos:

$$y''_0 = \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right)_{x=x_0,\ y=y_0;\ y'=y'_0}.$$

Derivando una vez más la igualdad (3) respecto a $x$ y sustituyendo los valores de $x_0$, $y_0$, $y'_0$, $y''_0$, encontramos $y'''_0$. Continuando de esta manera*), podemos hallar los valores de las derivadas de **cualquier orden** para $x = x_0$. En el segundo miembro de la fórmula (2) son conocidos todos los términos a excepción del término complementario $R_m$. De este modo, menospreciando el término complementario, podemos obtener los valores aproximados de la solución para cualquier valor de $x$; la precisión de los mismos depende de la magnitud $|x - x_0|$ y del número de los términos del desarrollo.

En el método dado abajo, determinemos por la fórmula (2) sólo unos cuantos primeros valores de $y$, cuando $|x - x_0|$ es pequeño. Determinemos los valores de $y_1$ e $y_2$ para $x_1 = x_0 + h$ y para $x_2 = x_0 + 2h$, tomando **cuatro** términos del desarrollo ($y_0$ está conocido de las condiciones iniciales):

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1} y'_0 + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y''_0 + \frac{h^3}{3!} y'''_0, \tag{4}$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1} y'_0 + \frac{(2h)^2}{1 \cdot 2} y''_0 + \frac{(2h)^3}{3!} y'''_0. \tag{4'}$$

Consideremos, pues, que son conocidos tres valores**) de la función: $y_0$, $y_1$, $y_2$. Basándonos en estos valores y utilizando la ecuación (1), determinamos:

$$y'_0 = f(x_0, y_0), \quad y'_1 = f(x_1, y_1), \quad y'_2 = f(x_2, y_2).$$

*) En adelante supongamos que la función $f(x, y)$ es tantas veces derivable respecto a $x$ e $y$, cuantas veces sea necesario en nuestros razonamientos.

**) Si tratamos de encontrar la solución con mayor exactitud, necesitamos calcular más que los primeros tres valores de $y$.

Conociendo $y'_0$, $y'_1$, $y'_2$, podemos determinar $\Delta y'_0$, $\Delta y'_1$, $\Delta^2 y'_0$. Los resultados del cálculo anotemos en la tabla:

| $x$ | $y$ | $y'$ | $\Delta y'$ | $\Delta^2 y'$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $y_0$ | $y'_0$ | | |
| | | | $\Delta y'_0$ | |
| $x_1 = x_0 + h$ | $y_1$ | $y'_1$ | | $\Delta^2 y'_0$ |
| | | | $\Delta y'_1$ | |
| $x_2 = x_0 + 2h$ | $y_2$ | $y'_2$ | | |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| $x_{k-2} = x_0 + (k-2)\,h$ | $y_{k-2}$ | $y'_{k-2}$ | | |
| | | | $\Delta y'_{k-2}$ | |
| $x_{k-1} = x_0 + (k-1)\,h$ | $y_{k-1}$ | $y'_{k-1}$ | | $\Delta^2 y'_{k-2}$ |
| | | | $\Delta y'_{k-1}$ | |
| $x_k = x_0 + kh$ | $y_k$ | $y'_k$ | | |

Supongamos, ahora, que conocemos los valores de la solución

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k.$$

A base de estos valores, utilizando la ecuación (1), podemos calcular los valores de las derivadas

$$y'_0,\ y'_1,\ y'_2,\ \ldots,\ y'_k,$$

y, por consiguiente,

$$\Delta y'_0,\ \Delta y'_1,\ \ldots,\ \Delta y'_{k-1}$$

y

$$\Delta^2 y'_0,\ \Delta^2 y'_1,\ \ldots,\ \Delta^2 y'_{k-2}.$$

Determinemos el valor de $y_{k+1}$ por la fórmula de Taylor, haciendo

$$a = x_k, \ x = x_{k+1} = x_k + h:$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h^2}{1\cdot 2} y''_k + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} y'''_k + \ldots + \frac{h^m}{m!} y_k^{(m)} + R_m.$$

Limitemos en nuestro caso con cuatro términos del desarrollo:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h^2}{1\cdot 2} y''_k + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} y'''_k. \tag{5}$$

En esta fórmula $y''_k$ e $y'''_k$ son desconocidos. Tratemos de hallarlos mediante las diferencias conocidas de primer y segundo órdenes.

Presentemos previamente $y'_{k-1}$ por la fórmula de Taylor, haciendo $a = x_k$, $x - a = -h$:

$$y'_{k-1} = y'_k + \frac{(-h)}{1} y''_k + \frac{(-h)^2}{1\cdot 2} y'''_k, \tag{6}$$

e $y'_{k-2}$, haciendo $a = x_k$, $x - a = -2h$:

$$y'_{k-2} = y'_k + \frac{(-2h)}{1} y''_k + \frac{(-2h)^2}{1\cdot 2} y'''_k. \tag{7}$$

De la igualdad (6) hallamos:

$$y'_k - y'_{k-1} = \Delta y'_{k-1} = \frac{h}{1} y''_k - \frac{h^2}{1\cdot 2} y'''_k. \tag{8}$$

Restando de los términos de la igualdad (6) los de la igualdad (7), obtenemos:

$$y'_{k-1} - y'_{k-2} = \Delta y'_{k-2} = \frac{h}{1} y''_k - \frac{3h^2}{2} y'''_k. \tag{9}$$

De las (8) y (9) hallamos:

$$\Delta y'_{k-1} - \Delta y'_{k-2} = \Delta^2 y'_{k-2} = h^2 y'''_k,$$

ó

$$y'''_k = \frac{1}{h^2} \Delta^2 y'_{k-1}. \tag{10}$$

Poniendo la expresión $y'''_k$ en la ecuación (8), tenemos:

$$y''_k = \frac{\Delta y'_{k-1}}{h} + \frac{\Delta^2 y'_{k-1}}{2h}. \tag{11}$$

Así, hemos hallado $y_k''$ e $y_k'''$. Poniendo las expresiones (10) y (11) en el desarrollo (5), obtenemos:

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{1}y_k'+\frac{h}{2}\Delta y_{k-1}'+\frac{5h}{12}\Delta^2 y_{k-2}'. \tag{12}$$

Esta es la llamada *fórmula de Adams* de cuatro términos. La fórmula (12) permite determinar $y_{k+1}$, conociendo $y_k$, $y_{k-1}$, $y_{k-2}$. Así, si conocemos $y_0$, $y_1$ e $y_2$, podemos hallar $y_3$ y luego $y_4$, $y_5$, . . .

**Observación 1.** Indiquemos sin demostración, si existe en el segmento $[x_0, b]$ una solución única de la ecuación (1), que satisface *las condiciones iniciales*, el *error de los valores aproximados* determinados por la fórmula (12), en su valor absoluto, no supera a $Mh^4$, donde $M$ es una constante, dependiente del largo del intervalo y la forma de la función $f(x, y)$ y no dependiente de la magnitud $h$.

**Observación 2.** Si queremos obtener una precisión mayor del cálculo, debemos tomar mayor número de términos que en el desarrollo (5); entonces la fórmula (12) cambiará del modo correspondiente. Por ejemplo, si en vez de la fórmula (5) tomamos la fórmula que contiene cinco términos en el segundo miembro, es decir, si añadimos un término de orden $h^4$, entonces, en lugar de la fórmula (12) obtenemos de modo semejante la que sigue

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{1}y_k'+\frac{h}{2}\Delta y_{k-1}'+\frac{5h}{12}\Delta^2 y_{k-2}'+\frac{3h}{8}\Delta^3 y_{k-3}'.$$

Aquí, $y_{k+1}$ se determina mediante los valores $y_k$, $y_{k-1}$, $y_{k-2}$ e $y_{k-3}$. Por consiguiente, para comenzar los cálculos, utilizando esta fórmula, es preciso conocer los primeros cuatro valores: $y_0$, $y_1$, $y_2$, $y_3$. Al calcular estos valores por las fórmulas de la forma (4), debemos tomar cinco primeros términos del desarrollo.

**Ejemplo 1.** Hallar los valores aproximados de la solución de la ecuación

$$y'=y+x,$$

que satisface la condición inicial:

$$y_0=1;\ \text{cuando}\ x_0=0.$$

Determinar los valores de la solución para $x=0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$; $0{,}4$.

**Solución.** Utilizando las fórmulas (4) y (4′), hallemos, al principio, $y_1$ e $y_2$. De la ecuación y los datos iniciales obtenemos

$$y_0'=(y+x)_{x=0}=y_0+0=1+0=1.$$

Derivando la ecuación dada, tenemos:

$$y''=y'+1.$$

Por tanto,

$$y_0''=(y'+1)_{x=0}=1+1=2.$$

Derivemos una vez más:

$$y''' = y''.$$

Por consiguiente,

$$y_0''' = y_0'' = 2.$$

Poniendo en la ecuación (4) los valores de $y_0$, $y_0'$, $y_0''$ y $h=0{,}1$, obtenemos:

$$y_1 = 1 + \frac{0{,}1}{1}\cdot 1 + \frac{(0{,}1)^2}{1\cdot 2}\cdot 2 + \frac{(0{,}1)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2 = 1{,}1103.$$

De modo análogo, para $h=0{,}2$ obtenemos:

$$y_2 = 1 + \frac{0{,}2}{1}\cdot 1 + \frac{(0{,}2)^2}{1\cdot 2}\cdot 2 + \frac{(0{,}2)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2 = 1{,}2426$$

Conociendo $y_0$, $y_1$, $y_2$ a base de la ecuación, hallamos:

$$y_0' = y_0 + 0 = 1;$$
$$y_1' = y_1 + 0{,}1 = 1{,}1103 + 0{,}1 = 1{,}2103;$$
$$y_2' = y_2 + 0{,}2 = 1{,}2426 + 0{,}2 = 1{,}4426;$$
$$\Delta y_0' = 0{,}2103;$$
$$\Delta y_1' = 0{,}2323;$$
$$\Delta^2 y_0' = 0{,}0220.$$

Los valores obtenidos anotemos en la tabla:

| $x$ | $y$ | $y'$ | $\Delta y'$ | $\Delta^2 y'$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0=0$ | $y_0=1{,}0000$ | $y_0'=1$ | | |
| | | | $\Delta y_0'=0{,}2103$ | |
| $x_1=0{,}1$ | $y_1=1{,}1103$ | $y_1'=1{,}2103$ | | $\Delta^2 y_0'=0{,}0220$ |
| | | | $\Delta y_1'=0{,}2323$ | |
| $x_2=0{,}2$ | $y_2=1{,}2426$ | $y_2'=1{,}4426$ | | $\Delta^2 y_1'=0{,}0228$ |
| | | | $\Delta y_2'=0{,}2551$ | |
| $x_3=0{,}3$ | $y_3=1{,}3977$ | $y_3'=1{,}6977$ | | |
| $x_4=0{,}4$ | $y_4=1{,}5812$ | | | |

Según la fórmula (12) encontramos $y_3$:

$$y_3 = 1{,}2426 + \frac{0{,}1}{1}\cdot 1{,}4426 + \frac{0{,}1}{2}\cdot 0{,}2323 + \frac{5\cdot(0{,}1)}{12}\cdot 0{,}0220 = 1{,}3977.$$

Encontremos ahora los valores de $y'_3$, $\Delta y'_2$, $\Delta^2 y'_1$. Usando de nuevo la fórmula (12), hallamos $y_4$:

$$y_4 = 1{,}3977 + \frac{0{,}1}{1}\cdot 1{,}6977 + \frac{0{,}1}{2}\cdot 0{,}2551 + \frac{5}{12}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}0228 = 1{,}5812.$$

La expresión exacta de la solución de la ecuación dada es:

$$y = 2e^x - x - 1.$$

Por consiguiente, $y_{x=0,4} = 2e^{0,4} - 0{,}4 - 1 = 1{,}5836$. El error absoluto es 0,0024; el error relativo es $\frac{0{,}0024}{1{,}5836} = 0{,}0015 \approx 0{,}15\%$. (El error absoluto del valor de $y_4$, calculado por el método de Euler, es 0,06; el error relativo es $0{,}038 \approx 3{,}8\%$).

**Ejemplo 2.** Hallar los valores aproximados de la solución de la ecuación

$$y' = y^2 + x^2,$$

que satisface a la condición inicial; $y_0 = 0$, cuando $x_0 = 0$. Determinar los valores de la solución para $x = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4$.

**Solución.** Hallemos:

$$y'_0 = 0^2 + 0^2 = 0, \qquad y''_{x=0} = (2yy' + 2x)_{x=0} = 0, \qquad y'''_{x=0} = (2y'^2 + 2yy'' + 2)_{x=0} = 2.$$

Según las fórmulas (4) y (4′) obtenemos:

$$y_1 = \frac{(0{,}1)^3}{3!}\cdot 2 = 0{,}0003, \qquad y_2 = \frac{(0{,}2)^3}{3!}\cdot 2 = 0{,}0026.$$

De la ecuación encontramos:

$$y'_0 = 0, \quad y'_1 = 0{,}0100, \quad y'_2 = 0{,}0400.$$

Basándonos en estos datos, formamos los primeros renglones de la tabla, luego, utilizando la fórmula (12), determinamos los valores de $y_3$ e $y_4$.

| $x$ | $y$ | $y'$ | $\Delta y'$ | $\Delta^2 y'$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0 = 0$ | $y_0 = 0$ | $y'_0 = 0$ | | |
| | | | $\Delta y'_0 = 0{,}0100$ | |
| $x_1 = 0{,}1$ | $y_1 = 0{,}0003$ | $y'_1 = 0{,}0100$ | | $\Delta^2 y'_0 = 0{,}0200$ |

| $x$ | $y$ | $y'$ | $\Delta y'$ | $\Delta^2 y'$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | $\Delta y'_1=0,0300$ | |
| $x_2=0,2$ | $y_2=0,0026$ | $y'_2=0,0400$ | | $\Delta^2 y'_1=0,0201$ |
| | | | $\Delta y'_2=0,0501$ | |
| $x_3=0,3$ | $y_3=0,0089$ | $y'_3=0,0901$ | | |
| $x_4=0,4$ | $y_4=0,0204$ | | | |

Así,

$$y_3=0,0026+\frac{0,1}{1}\cdot 0,0400+\frac{0,1}{2}\cdot 0,0300+\frac{5}{12}\cdot 0,1\cdot 0,0200=0,0089,$$

$$y_4=0,0089+\frac{0,1}{1}\cdot 0,0901+\frac{0,1}{2}\cdot 0,0501+\frac{5}{12}\cdot 0,1\cdot 0,0201=0,0204.$$

Notemos que las primeras cuatro cifras exactas en $y_4$ son: $y_4 = 0,0213$. (Este resultado podemos obtener usando otros métodos más exactos y la evaluación del error.)

## § 34. METODO APROXIMADO DE INTEGRACION DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Los métodos de integración aproximada de las ecuaciones diferenciales, analizados en los §§ 32 y 33, podemos aplicar también para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden. Examinemos aquí el método de diferencias usado para solucionar los sistemas de ecuaciones. Analicemos aquí el sistema de dos ecuaciones con dos funciones desconocidas.

Hallar las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x,\ y,\ z), \tag{1}$$

$$\frac{dz}{dx}=f_2(x,\ y,\ z), \tag{2}$$

que satisfagan a las condiciones iniciales $y = y_0$, $z = z_0$, cuando $x = x_0$.

Determinemos los valores de las funciones $y$ y $z$ para los valores del argumento: $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$. Sea, de nuevo,

$$x_{k+1}-x_k=\Delta x=h \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{3}$$

Designemos los valores aproximados de la función mediante

$$y_0, y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_n$$

y, respectivamente,

$$z_0, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_n.$$

Escribamos las fórmulas recurrentes de la forma (12) § 33:

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{1}y'_k+\frac{h}{2}\Delta y'_{k-1}+\frac{5}{12}h\Delta^2 y'_{k-2}, \tag{4}$$

$$z_{k+1}=z_k+\frac{h}{1}z'_k+\frac{h}{2}\Delta z'_{k-1}+\frac{5}{12}h\Delta^2 z'_{k-2}. \tag{5}$$

Para utilizar estas fórmulas, es preciso saber, aparte de los $y_0$ y $z_0$ dados, también $y_1, y_2; z_1, z_2$. Estos valores hallamos por las fórmulas de la forma (4) y (4') § 32:

$$y_1=y_0+\frac{h}{1}y'_0+\frac{h^2}{2}y''_0+\frac{h^3}{3!}y'''_0,$$

$$y_2=y_0+\frac{2h}{1}y'_0+\frac{(2h)^2}{2}y''_0+\frac{(2h)^3}{3!}y'''_0,$$

$$z_1=z_0+\frac{h}{1}z'_0+\frac{h^2}{2}z''_0+\frac{h^3}{3!}z'''_0,$$

$$z_2=z_0+\frac{2h}{1}z'_0+\frac{(2h)^2}{2}z''_0+\frac{(2h)^3}{3!}z'''_0.$$

Podemos aplicar estas fórmulas, cuando conocemos $y'_0$, $y''_0$, $y'''_0$, $z'_0$, $z''_0$, $z'''_0$ que debemos determinar. De las ecuaciones (1) y (2) hallamos:

$$y'_0=f_1(x_0, y_0, z_0), \quad z'_0=f_2(x_0, y_0, z_0).$$

Derivando las ecuaciones (1) y (2) y poniendo los valores de $x_0$, $y_0$, $z_0$, $y'_0$, $z'_0$, hallamos:

$$y''_0=(y'')_{x=x_0}=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}y'+\frac{\partial f_1}{\partial z}z'\right)_{x=x_0}.$$

$$z_0'' = (z'')_{x=x_0} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} y' + \frac{\partial f_2}{\partial z} z'\right)_{x=x_0}.$$

Derivando una vez más hallamos $y_0'''$ y $z_0'''$. Conociendo $y_1$, $y_2$, $z_1$, $z_2$, de las ecuaciones dadas (1) y (2) encontramos:

$$y_1',\ y_2',\ z_1',\ z_2',\ \Delta y_0',\ \Delta y_1',\ \Delta^2 y_0',\ \Delta z_0',\ \Delta z_1',\ \Delta^2 z_0',$$

después de lo cual podemos llenar los primeros cinco renglones de la tabla:

| $x$ | $y$ | $y'$ | $\Delta y'$ | $\Delta^2 y'$ | $z$ | $z'$ | $\Delta z'$ | $\Delta^2 z'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $y_0$ | $y_0'$ | | | $z_0$ | $z_0'$ | | |
| | | | $\Delta y_0'$ | | | | $\Delta z_0'$ | |
| $x_1$ | $y_1$ | $y_1'$ | | $\Delta^2 y_0'$ | $z_1$ | $z_1'$ | | $\Delta^2 z_0'$ |
| | | | $\Delta y_1'$ | | | | $\Delta z_1'$ | |
| $x_2$ | $y_2$ | $y_2'$ | | $\Delta^2 y_1'$ | $z_2$ | $z_2'$ | | $\Delta^2 z_1'$ |
| | | | $\Delta y_2'$ | | | | $\Delta z_2'$ | |
| $x_3$ | $y_3$ | $y_3'$ | | | $z_3$ | $z_3'$ | | |

De las fórmulas (4) y (5) hallemos $y_3$ y $z_3$ y de las ecuaciones (1) y (2) encontremos $y_3'$ y $z_3'$. Determinados $\Delta y_2'$, $\Delta^2 y_1'$, $\Delta z_2'$, $\Delta^2 z_1'$, otra vez de las fórmulas (4) y (5) hallamos $y_4$ e $y_5$, etc.

**Ejemplo.** Hallar los valores aproximados de las soluciones del sistema

$$y' = z,\quad z' = y,$$

si según las condiciones iniciales $z_0 = 1$, cuando $x = 0$ e $y_0 = 0$. Calcular los valores de las soluciones para $x = 0$; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4.

**Solución.** De las ecuaciones dadas encontramos:

$$y_0' = z_{x=0} = 1, \qquad z_0' = y_{x=0} = 0.$$

Derivando estas ecuaciones, hallamos:

$$y_0'' = (y'')_{x=0} = (z')_{x=0} = 0,$$
$$z_0'' = (z'')_{x=0} = (y')_{x=0} = 1,$$
$$y_0''' = (y''')_{x=0} = (z'')_{x=0} = 1,$$
$$z_0''' = (z''')_{x=0} = (y'')_{x=0} = 0.$$

Utilizando las fórmulas de la forma (4) y (5), encontramos:

$$y_1=0+\frac{0,1}{1}\cdot 1+\frac{(0,1)^2}{1\cdot 2}\cdot 0+\frac{(0,1)^3}{3!}\cdot 1=0,1002,$$

$$y_2=0+\frac{0,2}{1}\cdot 1+\frac{(0,2)^2}{1\cdot 2}\cdot 0+\frac{(0,2)^3}{3!}\cdot 1=0,2016,$$

$$z_1=1+\frac{0,1}{1}\cdot 0+\frac{(0,1)^2}{1\cdot 2}\cdot 1+\frac{(0,1)^3}{3!}\cdot 0=1,0050,$$

$$z_2=1+\frac{0,2}{1}\cdot 0+\frac{(0,2)^2}{2!}\cdot 1+\frac{(0,2)^3}{3!}\cdot 0=1,0200.$$

En virtud de las ecuaciones dadas, tenemos:

$$y_1'=1,0050, \qquad y_2'=1,0200,$$

$$z_1'=0,1002, \qquad z_2'=0,2016,$$

$$\Delta y_0'=0,0050, \qquad \Delta z_0'=0,1002,$$

$$\Delta y_1'=0,0150, \qquad \Delta z_1'=0,1014,$$

$$\Delta^2 y_0'=0,0100, \qquad \Delta^2 z_0'=0,0012.$$

Ahora llenemos primeros cinco renglones de la tabla:

| $x$ | $y$ | $y'$ | $\Delta y'$ | $\Delta^2 y'$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0=0$ | $y_0=0$ | $y_0'=1$ | | |
| | | | $\Delta y_0'=0,0050$ | |
| $x_1=0,1$ | $y_1=0,1002$ | $y_1'=1,0050$ | | $\Delta^2 y_0'=0,0100$ |
| | | | $\Delta y_1'=0,0150$ | |
| $x_2=0,2$ | $y_2=0,2016$ | $y_2'=1,0200$ | | $\Delta^2 y_1'=0,0109$ |
| | | | $\Delta y_2'=0,0259$ | |
| $x_3=0,3$ | $y_3=0,3049$ | $y_3'=1,0459$ | | |
| $x_4=0,4$ | $y_4=0,4117$ | | | |

| $x$ | $z$ | $z'$ | $\Delta z'$ | $\Delta^2 z'$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0=0$ | $z_0=1$ | $z'_0=0$ | | |
| | | | $\Delta z'_0=0,1002$ | |
| $x_1=0,1$ | $z_1=1,0050$ | $z'_1=0,1002$ | | $\Delta^2 z'_0=0,0012$ |
| | | | $\Delta z'_1=0,1014$ | |
| $x_2=0,2$ | $z_2=1,0200$ | $z'_2=0,2016$ | | $\Delta^2 z'_1=0,0019$ |
| | | | $\Delta z'_2=0,1033$ | |
| $x_3=0,3$ | $z_3=1,0459$ | $z'_3=0,3049$ | | |
| $x_4=0,4$ | $z_4=1,0817$ | | | |

De las fórmulas (4) y (5), hallamos:

$$y_3=0,2016+\frac{0,1}{1}\cdot 1,0200+\frac{0,1}{2!}\cdot 0,0150+\frac{5}{12}\cdot 0,1\cdot 0,0100=0,3049.$$

$$z_3=1,0200+\frac{0,1}{1}\cdot 1,2016+\frac{0,1}{2}\cdot 0,1014+\frac{5}{12}\cdot 0,1\cdot 0,0012=1,0459$$

y, análogamente:

$$y_4=0,3049+\frac{0,1}{1}\cdot 1,0459+\frac{0,1}{2}\cdot 0,0259+\frac{5}{12}\cdot 0,1\cdot 0,0109=0,4117,$$

$$z_4=1,0459+\frac{0,1}{1}\cdot 0,3049+\frac{0,1}{2}\cdot 0,1033+\frac{5}{12}\cdot 0,1\cdot 0,0019=1,0817.$$

Es evidente que las soluciones exactas del sistema dado de las ecuaciones, que satisfacen a las condiciones iniciales, serán:

$$y=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x}), \qquad z=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}).$$

Por eso, las primeras cuatro cifras exactas después de la coma de las soluciones son:

$$y_4=\frac{1}{2}(e^{0,4}-e^{-0,4})=0,4107, \qquad z_4=\frac{1}{2}(e^{0,4}+e^{-0,4})=1,0811.$$

**Observación.** Puesto que las ecuaciones de órdenes superiores y los sistemas de éstas se reducen en muchos casos al sistema de ecuaciones de primer orden, el método expuesto es aplicable también a la solución de los problemas semejantes.

## Ejercicios para el capítulo XIII

Demostrar que las funciones indicadas, dependientes de las constantes arbitrarias, satisfacen las ecuaciones diferenciales correspondientes:

| Funciones | Ecuaciones diferenciales |
|---|---|
| 1. $y=\operatorname{sen} x-1+Ce^{-\operatorname{sen} x}$. | $\frac{dy}{dx}+y\cos x=\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$. |
| 2. $y=Cx+C-C^2$. | $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}+y=0$. |
| 3. $y^2=2Cx+C^2$. | $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x\frac{dy}{dx}-y=0$. |
| 4. $y^2=Cx^2-\frac{a^2C}{1+C}$. | $xy\left[1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=(x^2-y^2-a^2)\frac{dy}{dx}$. |
| 5. $y=C_1x+\frac{C_2}{x}+C_3$. | $\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{3}{x}\frac{d^2y}{dx^2}=0$. |
| 6. $y=(C_1+C_2x)e^{kx}+\frac{e^x}{(k-1)^2}$. | $\frac{d^2y}{dx^2}-2k\frac{dy}{dx}+k^2y=e^x$. |
| 7. $y=C_1e^{a\operatorname{arcsen} x}+C_2e^{-a\operatorname{arcsen} x}$. | $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-a^2y=0$. |
| 8. $y=\frac{C_1}{x}+C_2$. | $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}=0$. |

**Integrar las ecuaciones diferenci con varalesiables separables** **9.** $y\,dx-x\,dy=0$. *Resp.* $y=Cx$. **10.** $(1+u)v\,du+(1-v)u\,dv=0$. *Resp.* $\ln uv+u-v=C$. **11.** $(1+y)\,dx-(1-x)\,dy=0$. *Resp.* $(1+y)(1-x)=C$. **12.** $(t^2-xt^2)\times\frac{dx}{dt}+x^2+tx^2=0$. *Resp.* $\frac{t+x}{tx}+\ln\frac{x}{t}=C$. **13.** $(y-a)\,dx+x^2\,dy=0$. *Resp.* $(y-a)=Ce^{\frac{1}{x}}$. **14.** $z\,dt-(t^2-a^2)\,dz=0$. *Resp.* $z^{2a}=C\frac{t-a}{t+a}$. **15.** $\frac{dx}{dy}=\frac{1+x^2}{1+y^2}$. *Resp.* $x=\frac{y+C}{1-Cy}$. **16.** $(1+s^2)\,dt-\sqrt{t}\,ds=0$. *Resp.* $2\sqrt{t}-\operatorname{arctg} s=C$. **17.** $d\rho+\rho\operatorname{tg}\theta\,d\theta=0$. *Resp.* $\rho=C\cos\theta$. **18.** $\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,d\theta-\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi=0$. *Resp.* $\cos\varphi=C\cos\theta$. **19.** $sc^2\theta\operatorname{tg}\varphi\,d\theta+sc^2\varphi\operatorname{tg}\theta\,d\varphi=0$. *Resp.* $\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi=C$. **20.** $sc^2\theta\operatorname{tg}\varphi\,d\varphi+sc^2\varphi\operatorname{tg}\theta\,d\theta=0$. *Resp.* $\operatorname{sen}^2\theta+\operatorname{sen}^2\varphi=C$. **21.** $(1+x^2)\,dy-\sqrt{1-y^2}\,dx=0$. *Resp.* $\operatorname{arcsen} y-\operatorname{arctg} x=C$. **22.** $\sqrt{1-x^2}\,dy-\sqrt{1-y^2}\times dx=0$. *Resp.* $y\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-y^2}=C$. **23.** $3e^x\operatorname{tg} y\,dx+(1-e^x)\,sc^2y\,dy=0$. *Resp.* $\operatorname{tg} y=C(1-e^x)^3$. **24.** $(x-y^2x)\,dx+(y-x^2y)\,dy=0$. *Resp.* $x^2+y^2=x^2y^2+C$.

### Problemas de la formación de ecuaciones diferenciales

**25.** Demostrar que la curva cuyo coeficiente angular de la tangente en cada punto es proporcional a la abscisa del punto de tangencia es una parábola. *Respuesta*: $y=ax^2+C$.

**26.** Hallar una curva que pase por el punto $(0, -2)$, de tal modo que el coeficiente angular de la tangente en cada punto sea igual a la ordenada correspondiente de este punto aumentada en tres unidades. *Respuesta*: $y=e^x-3$.

**27.** Hallar una curva que pase por el punto (1,1) de tal manera que el coeficiente angular de la tangente en cada punto sea proporcional al cuadrado de la ordenada de este punto. *Respuesta:* $k(x-1)y - y + 1 = 0$.

**28.** Hallar una curva para la cual el coeficiente angular de la tangente en cada punto sea $n$ veces mayor que la pendiente de la recta que une este punto con el origen de coordendas. *Respuesta:* $y = Cx^n$.

**29.** Trazar por el punto (2,1) una curva de tal manera que la tangente en cualquier punto coincida con la dirección del radio vector construido del origen de coordenadas a este punto. *Respuesta:* $y = \frac{1}{2}x$.

**30.** Hallar en coordenadas polares la ecuación de una curva tal que, en cada uno de sus puntos, la tangente del ángulo formado por el radio vector y la tangente a la curva sea igual a la magnitud inversa del radio vector, tomada con signo contrario. *Respuesta:* $r(\theta + C) = 1$.

**31.** Hallar en coordenadas polares la ecuación de una curva tal que, en cada uno de sus puntos, la tangente del ángulo formado por el radio vector y la tangente a la curva sea igual al cuadrado del radio vector. *Respuesta:* $r^2 = (\theta + C)^2$.

**32.** Demostrar que la curva cuya propiedad consiste en que todas sus normales pasan por un punto fijo es una circunferencia.

**33.** Hallar una curva de tal manera que en cada uno de sus puntos la longitud de la subtangente sea igual al doble valor de la abscisa. *Respuesta:* $y = C\sqrt{x}$.

**34.** Hallar una curva para la cual el radio vector sea igual a la longitud de la tangente comprendida entre el punto de tangencia y el eje $x$.

**Solución.** Según la hipótesis del problema $\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{x^2+y^2}$, de donde: $\frac{dy}{y} = \pm\frac{dx}{x}$.

Integrando obtenemos dos familias de curvas:

$$y = Cx \quad \text{e} \quad y = \frac{C}{x}.$$

**35.** En virtud de la ley de Newton la velocidad de enfriamiento de un cuerpo al aire libre es proporcional a la diferencia de las temperaturas entre el cuerpo y el medio ambiente.

Sea la temperatura del aire igual a 20° C; y el cuerpo se enfría de 100° C hasta 60° C durante 20 minutos. ¿Qué tiempo se necesita para que la temperatura del cuerpo baje hasta 30° C?

**Solución.** La ecuación diferencial del problema es: $\frac{dT}{dt} = k(T-20)$. Integrando, encontramos: $T - 20 = Ce^{kt}$; $T = 100$ para $t = 0$; $T = 60$ para $t = 20$; entonces, $C = 80$; $40 = Ce^{20k}$, $e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/20}$, por tanto, $T = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$. Haciendo $T = 30$, encontramos $t = 60$ min.

**36.** ¿Qué tiempo $T$ se necesita para que se desagüe el embudo cónico de 10 cm de altura y ángulo al vértice $d = 60°$ por un orificio de 0,5 cm² en el fondo del embudo?

**Solución.** Calculemos mediante dos métodos diferentes el volumen del agua que se desagua entre los instantes $t$ y $t + \Delta t$. Siendo constante la velocidad $v$ del chorro, durante un segundo se derrama un cilindro de agua de altura $v$ y base 0,5 cm². Durante el tiempo $\Delta t$ se desagua un volumen $dv$ de agua igual a $-dv = -0{,}5v\,dt = -0{,}3\sqrt{2gh}\,dt$*).

Por otra parte, a consecuencia de la salida, la altura del agua adquiere un «incremento» negativo $dh$, y la diferencial del volumen de agua derramada es igual a:

$$-dv = \pi r^2\,dh = \frac{\pi}{3}(h+0{,}7)^2\,dh.$$

Así,

$$\frac{\pi}{3}(h+0{,}7)^2\,dh = -0{,}3\sqrt{2gh}\,dt,$$

de donde

$$t = 0{,}0315\,(10^{5/2} - h^{5/2}) + 0{,}0732\,(10^{3/2} - h^{3/2}) + 0{,}078\,(\sqrt{10} - \sqrt{h}).$$

Haciendo $h = 0$, obtenemos el tiempo $T$ de derrame: $T = 12{,}5$ seg.

**37.** La acción de la fricción sobre un disco que gira dentro de un líquido es proporcional a la velocidad angular de rotación $\omega$. Hallar la dependencia entre la velocidad angular y el tiempo, si se conoce que la velocidad del disco baja de 100 rev/min a 60 rev/min, al pasar 1 min.

*Respuesta:* $\omega = 100\left(\frac{3}{5}\right)^t$ rev/min.

**38.** Supongamos que la presión de una columna de aire en un nivel dado está acondicionada por la presión de las capas superiores de la atmósfera. Hallar la dependencia entre la presión y la altura, si se sabe, que al nivel del mar la presión es igual a 1 kg/cm², mientras que a 500 m de altura, es 0,92 kg/cm².

**Indicación:** Utilicemos la ley de Boyle-Marriotte que nos dice que la densidad de un gas es proporcional a su presión. La ecuación diferencial del problema es: $dp = -kp\,dh$, de donde $p = e^{-0{,}00017h}$. *Respuesta:* $p = e^{-0{,}00017h}$.

**Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:**

**39.** $(y-x)\,dx + (y+x)\,dy = 0$. *Respuesta:* $y^2 + 2xy - x^2 = C$. **40.** $(x+y)\,dx + x\,dy = 0$. *Respuesta:* $x^2 + 2xy = C$. **41.** $(x+y)\,dx + (y-x)\,dy = 0$. *Respuesta:* $\ln(x^2+y^2)^{1/2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C$. **42.** $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$. *Respuesta:* $1 + 2Cy - C^2x^2 = 0$. **43.** $(8y+10x)\,dx + (5y+7x)\,dy = 0$. *Respuesta:* $(x+y)^2 \times (2x+y)^3 = C$. **44.** $(2\sqrt{st} - s)\,dt + t\,ds = 0$. *Respuesta:* $te^{\sqrt{\frac{s}{t}}} = C$ ó $s = t\ln^2\frac{C}{t}$. **45.** $(t-s)\,dt + t\,ds = 0$. *Respuesta:* $te^{\frac{s}{t}} = C$ ó $s = t\ln\frac{C}{t}$. **46.** $xy^2\,dy = (x^3+y^3)\,dx$. *Respuesta:* $y = x\sqrt[3]{3\ln Cx}$. **47.** $x\cos\frac{y}{x}(y\,dx + x\,dy) = y\operatorname{sen}\frac{y}{x}(x\,dy - y\,dx)$. *Respuesta:* $xy\cos\frac{y}{x} = C$.

**Integrar las ecuaciones diferenciales reducibles a las homogéneas:**

**48.** $(3y-7x+7)\,dx - (3x-7y-3)\,dy = 0$. *Respuesta* $(x+y-1)^5(x-y-1)^2 = C$. **49.** $(x+2y+1)\,dx - (2x+4y+3)\,dy = 0$. *Respuesta:* $\ln(4x+8y+5) + 8y - 4x = C$. **50.** $(x+2y+1)\,dx - (2x-3)\,dy = 0$. *Respuesta:* $\ln(2x-3) - \frac{4y+5}{2x-3} = C$.

---

*) La velocidad $v$ del chorro de agua a través du un orificio que se encuentra a la distancia $h$ de una superficie libre, se da por la fórmula: $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$; donde, $g$ es la aceleración de la fuerza de gravedad.

**51.** Determinar la curva cuya subnormal es la media aritmética de la abscisa y la ordenada del punto de esta curva. *Respuesta*: $(x-y)^2(x+2y)=C$.

**52.** Determinar la curva en la que la razón del segmento separado por la tangente en el eje $Oy$, respecto al radio vector, es una constante.

**Solución.** Según la hipótesis del problema $\dfrac{y-x\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}}=m$, de donde: $\left(\dfrac{x}{C}\right)^m-\left(\dfrac{C}{x}\right)^m=\dfrac{2y}{x}$.

**53.** Determinar la curva en la que la razón del segmento separado por la normal en el eje $Ox$ respecto al radio vector sea una constante.

**Solución.** Según la hipótesis $\dfrac{x+y\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}}=m$, de donde: $x^2+y^2=m^2(x-C)^2$.

**54.** Determinar la curva en la que el segmento separado por la tangente en el eje $Oy$ es igual a $a$ sc $\theta$, donde $\theta$ es el ángulo formado por el radio vector y el eje $Ox$.

**Solución.** Como $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{y}{x}$, y, según la hipótesis $y-x\dfrac{dy}{dx}=a\operatorname{sc}\theta$, tenemos $y-x\dfrac{dy}{dx}=a\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$, de donde:

$$y=\frac{x}{2}\left[e^{\frac{a}{x}+b}-e^{-\left(\frac{a}{x}+b\right)}\right].$$

**55.** Determinar la curva en la que el segmento separado en el eje de ordenadas por la normal trazada en algún punto de la curva es igual a la distancia entre el mismo punto y el origen de coordenadas.

**Solución.** El segmento separado por la normal en el eje $Oy$ es igual a $y+\dfrac{x}{y'}$, y, según la hipótesis, tenemos:

$$y+\frac{x}{y'}=\sqrt{x^2-y^2},\ \text{de donde}\ x^2=C\,(2y+C).$$

**56.** Hallar la forma de un espejo tal que refleje paralelamente a la dirección dada todos los rayos que salen de un mismo punto 0.

**Solución.** Hagamos coincidir la dirección dada con el eje $Ox$. Sea $OM$ el rayo incidente, $MP$ el rayo reflejado y $MQ$ la normal a la curva buscada:

$$\alpha=\beta;\ OM=OQ,\ NM=y,$$

$$NQ=NO+OQ=-x+\sqrt{x^2+y^2}=y\operatorname{cotg}\beta=y\frac{dy}{dx},$$

de donde: $y\,dy=\left(-x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx$; integrando, tenemos: $y^2=C^2+2Cx$.

**Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:**

**57.** $y'-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^3$. *Respuesta*: $2y=(x+1)^4+C\,(x+1)^2$

**58.** $y'-a\dfrac{y}{x}=\dfrac{x+1}{x}$. *Respuesta*: $y=Cx^a+\dfrac{x}{1-a}-\dfrac{1}{a}$.

**59.** $(x-x^2)\,y'+(2x^2-1)\,y-ax^3=0$. *Respuesta*: $y=ax+Cx\sqrt{1-x^2}$

**60.** $\dfrac{ds}{dt}\cos t+s\operatorname{sen}t=1$ *Respuesta*: $s=\operatorname{sen}t+C\cos t$.

61. $\frac{ds}{dt}+s\cos t=\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$. *Respuesta*: $s=\operatorname{sen} t-1+Ce^{-\operatorname{sen} t}$.

62. $y'-\frac{n}{x}y=e^x x^n$. *Respuesta*: $y=x^n(e^x+C)$.

63. $y'+\frac{n}{x}y=\frac{a}{x^n}$. *Respuesta*: $x^n y=ax+C$.

64. $y'+y=\frac{1}{e^x}$. *Respuesta*: $e^x y=x+C$.

65. $y'+\frac{1-2x}{x^2}y-1=0$. *Respuesta*: $y=x^2\left(1+Ce^{\frac{1}{x}}\right)$

**Integrar las ecuaciones de Bernoulli:**

66. $y'+xy=x^3y^3$. *Respuesta*: $y^2(x^2+1+Ce^{x^2})=1$. **67.** $(1-x^2)y'-xy-axy^2=0$. *Respuesta*: $(C\sqrt{1-x^2}-a)y=1$. **68.** $3y^2y'-ay^3-x-1=0$. *Respuesta*: $a^2y^3=Ce^{ax}-a(x+1)-1$. **69.** $y'(x^2y^3+xy)=1$. *Respuesta*: $x\left[(2-y^2)e^{\frac{1}{2}y^2}+C\right]=e^{\frac{1}{2}y^2}$. **70.** $(y\ln x-2)y\,dx=x\,dy$. *Respuesta*: $y(Cx+\ln x+1)=1$. **71.** $y-y'\cos x=y^2\cos x(1-\operatorname{sen} x)$. *Respuesta*: $y=\frac{\operatorname{tg} x+\sec x}{\operatorname{sen} x+C}$.

**Integrar las siguientes ecuaciones en diferenciales totales:**

72. $(x^2+y)\,dx+(x-2y)\,dy=0$. *Resp.* $\frac{x^3}{3}+yx-y^2=C$. **73.** $(y-3x^2)\,dx-(4y-x)\,dy=0$. *Resp.* $2y^2-xy+x^3=C$. **74.** $(y^3-x)y'=y$. *Resp.* $y^4=4xy+C$. **75.** $\left[\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x}\right]dx+\left[\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy=0$. *Resp.* $\ln\frac{y}{x}-\frac{xy}{x-y}=C$. **76.** $2(3xy^2+2x^3)\,dx+3(2x^2y+y^2)\,dy=0$. *Resp.* $x^4+3x^2y^2+y^3=C$. **77.** $\frac{x\,dx+(2x+y)\,dy}{(x+y)^2}=0$. *Resp.* $\ln(x+y)-\frac{x}{x+y}=C$. **78.** $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)dx=\frac{2y\,dy}{x^3}$. *Resp.* $x^2+y^2=Cx^3$. **79.** $\frac{x^2\,dy-y^2\,dx}{(x-y)^2}=0$. *Resp.* $\frac{xy}{x-y}=C$. **80.** $x\,dx+y\,dy=\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$. *Resp.* $x^2+y^2-2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=C$.

**81.** Hallar la curva cuya propiedad consiste en que el producto del cuadrado de la distancia, entre cualquiera de sus puntos y el origen de coordenadas, por el segmento, separado en el eje de las abscisas por la normal al punto mencionado, es igual al cubo de la abscisa de este punto. *Respuesta*: $y^2(2x^2+y^2)=C$.

**82.** Hallar la envolvente de las siguientes familias de curvas:

a) $y=Cx+C^2$. *Resp.* $x^2+4y=0$. b) $y=\frac{x}{C}+C^2$. *Resp.* $27x^2=4y^3$. c) $\frac{x}{C}-\frac{y}{C^3}=2$. *Resp.* $27y=x^3$. d) $C^2x+Cy-1=0$. *Resp.* $y^2+4x=0$. e) $(x-C)^3+(y-C)^2=C^2$. *Resp.* $x=0$; $y=0$. f) $(x-C)^2+y^2=4C$. *Resp.* $y^2=4x+4$. g) $(x-C)^2+(y-C)^2=4$. *Resp.* $(x-y)^2=8$. h) $Cx^2+C^2y=1$. *Resp.* $x^4+4y=0$.

**83.** Una recta se desplaza de tal modo que la suma de los segmentos separados por ella en los ejes de coordenadas es igual a una constante $a$. Escribir la ecuación de la envolvente de esta familia de rectas. *Respuesta*: $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$ (parábola).

**84.** Hallar la envolvente de una familia de rectas tales que los ejes de coordenadas separan sobre estas rectas un segmento de longitud constante $a$. *Respuesta*: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

**85.** Hallar la envolvente de una familia de circunferencias cuyos diámetros son el doble de las ordenadas de la parábola $y^2=2px$. *Respuesta*: $y^2=$ $=2p\left(x+\frac{p}{2}\right)$.

**86.** Hallar la envolvente de una familia de circunferencias que tienen sus centros en la parábola $y^2=2px$ y pasan por el vértice de esta parábola. *Respuesta*: la cisoide $x^3+y^2(x+2p)=0$.

**87.** Hallar la envolvente de una familia de circunferencias cuyos diámetros son cuerdas de la elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, perpendiculares al eje $Ox$. *Respuesta*: $\frac{x^2}{a^2+b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

**88.** Hallar la evoluta de la elipse $x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$ como envolvente de sus normales. *Respuesta*: $(ax)^{2/3}+(by)^{2/3}=(a^2-b^2)^{2/3}$.

**Integrar las siguientes ecuaciones (de Lagrange):**

**89.** $y=2xy'+y'^2$. *Respuesta*: $x=\frac{C}{3p^2}-\frac{2}{3}p$; $\quad y=\frac{2C-p^3}{3p}$.

**90.** $y=xy'^2+y'^2$. *Respuesta*: $y=(\sqrt{x+1}+C)^2$. La solución singular: $y=0$.

**91.** $y=x(1+y')+(y')^2$. *Respuesta*: $x=Ce^{-p}-2p+2$; $y=C(p+1)e^{-p}-$ $-p^2+2$.

**92.** $y=yy'^2+2xy'$. *Respuesta*: $4Cx=4C^2-y^2$.

**93.** Hallar una curva de normal constante. *Respuesta*: $(x-C)^2+y^2=a^2$. Solución singular: $y=\pm a$.

**Integrar las ecuaciones de Clairaut:**

**94.** $y=xy'+y'-y'^2$. *Respuesta*: $y=Cx+C-C^2$. Solución singular: $4y=(x+1)^2$.

**95.** $y=xy'+\sqrt{1-y'^2}$. *Respuesta*: $y=Cx+\sqrt{1-C^2}$. Solución singular: $y^2-x^2=1$.

**96.** $y=xy'+y'$. *Respuesta*: $y=Cx+C$.

**97.** $y=xy'+\frac{1}{y'}$. *Respuesta*: $y=Cx+\frac{1}{C}$. Solución singular: $y^2=4x$.

**98.** $y=xy'-\frac{1}{y'^2}$. *Respuesta*: $y=Cx-\frac{1}{C^2}$. Solución singular: $y^3=$ $=-\frac{27}{4}x^2$.

**99.** El área de un triángulo, formado por la tangente a una curva buscada y los ejes de coordenadas, es una magnitud constante. Hallar esta curva. *Respuesta*: la hipérbola equilátera $4xy=\pm a^2$. Además, cualquier recta de la familia $y=Cx\pm a\sqrt{C}$.

**100.** Hallar una curva tal que el segmento de su tangente comprendido entre los ejes de coordenadas tenga una longitud constante $a$. Respuesta: $y=Cx\pm\frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}$. Solución singular: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

**101.** Hallar una curva tal que la suma de los segmentos separados por sus tangentes en los ejes de coordenadas sea igual a $2a$. *Respuesta*: $y=Cx-$ $-\frac{2aC}{1-C}$. Solución singular: $(y-x-2a)^2=8ax$.

**102.** Hallar las curvas tales que el producto de las distancias, desde una tangente cualquiera hasta dos puntos dados, sea constante. *Respuesta*: las elipses y las hipérbolas (trayectorias ortogonales e isogonales).

**103.** Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $y = ax^n$. *Respuesta*: $x^2 + ny^2 = C$.

**104.** Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de parábolas $y^2 = 2p(x - \alpha)$ ($\alpha$ es el parámetro de la familia). *Respuesta*: $y = Ce^{-\frac{x}{p}}$.

**105.** Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $x^2 - y^2 = \alpha$ ($\alpha$ es el parámetro). *Respuesta*: $y = \frac{C}{x}$.

**106.** Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = 2ax$. *Respuesta*: las circunferencias $y = C(x^2 + y^2)$.

**107.** Hallar las trayectorias ortogonales de parábolas iguales, cuyas vértices se encuentran en una recta dada. *Respuesta*: si $2p$ es el parámetro de las parábolas y $Oy$ es la recta dada, la ecuación de las trayectorias será $y + C = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{p}}\,x^{3/2}$.

**108.** Hallar las trayectorias ortogonales de las cisoides $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$. *Respuesta*: $(x^2 + y^2)^2 = C(y^2 + 2x^2)$.

**109.** Hallar las trayectorias ortogonales de las lemniscatas $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)\,a^2$. *Respuesta*: $(x^2 + y^2)^2 = Cxy$.

**110.** Hallar las trayectorias isogonales de la familia de curvas: $x^2 = 2a(y - x\sqrt{3})$, donde $a$ es un parámetro variable, si el ángulo constante $\omega$ formado por las curvas de la familia y sus trayectorias es igual a 60°.

**Solución.** Hallamos la ecuación diferencial de la familia de curvas $y' = \frac{2y}{x} - \sqrt{3}$ y sustituimos $y'$ por la expresión

$$q = \frac{y' - \operatorname{tg}\omega}{1 + y'\operatorname{tg}\omega}. \text{ Si } \omega = 60°, \text{ tenemos } q = \frac{y' - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}y'} \text{ y}$$

obtenemos la ecuación diferencial: $\frac{y' - \sqrt{3}}{1 + y'\sqrt{3}} = \frac{2y}{x} - \sqrt{3}$. La integral general $y^2 = C(x - y\sqrt{3})$ da la familia buscada de trayectorias.

**111.** Hallar las trayectorias isogonales de la familia de parábolas $y^2 = 4Cx$, cuando $\omega = 45°$. *Respuesta*: $y^2 - xy + 2x^2 = Ce^{\frac{6}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2y - x}{x\sqrt{7}}}$.

**112.** Hallar las trayectorias isogonales de la familia de rectas, $y = Cx$, cuando $\omega = 30°, 45°$. *Respuesta*: las espirales logarítmicas $\begin{cases} x^2 + y^2 = e^{2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}; \\ x^2 + y^2 = e^{2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}. \end{cases}$

**113.** $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$. Eliminar $C_1$ y $C_2$. *Respuesta*: $y'' - y = 0$.

**114.** Escribir la ecuación diferencial de todas las circunferencias dispuestas en un mismo plano. *Respuesta*: $(1 + y'^2)\,y''' - 3y'y''^2 = 0$.

**115.** Escribir la ecuación diferencial de todas las curvas centrales de segundo orden, cuyos ejes principales coinciden con los $Ox$, $Oy$. *Respuesta*: $x(yy'' + y'^2) - y'y = 0$.

**116.** Sea la ecuación diferencial $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ y su solución general $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x}$.

1) Verificar que la familia dada de curvas es realmente la solución general;
2) hallar la solución particular, si para $x=0$ tenemos: $y=1$, $y'=0$, $y''=-1$. *Respuesta*: $y=\frac{1}{6}(9e^x+e^{-x}-4e^{2x})$.

**117.** Sea la ecuación diferencial $y''=\frac{1}{2y'}$ y su solución general $y= \pm\frac{2}{3}(x+C_1)^{3/2}+C_2$.

1) Verificar que la familia dada de curvas es realmente la solución general;
2) hallar la curva integral que pasa por el punto (1, 2), si la tangente en este punto forma con la dirección positiva del eje $Ox$ un ángulo de 45°. *Respuesta*: $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{4}{3}$.

Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales simples de segundo orden que se reducen a las ecuaciones de primer orden.

**118.** $xy'''=2$. *Respuesta*: $y=x^2\ln x+C_1x^2+C_2x+C_3$; escribir la solución particular que satisfaga las siguientes condiciones iniciales: $x=1$; $y=1$; $y'=1$; $y''=3$. **119.** $y^{(n)}=x^{(m)}$. *Respuesta*: $y=\frac{m!\,x^{m+n}}{(m+n)!}+C_1x^{n-1}+\ldots+C_{n-1}x+C_n$.
**120.** $y''=a^2y$. *Respuesta*: $ax=\ln\left(ay+\sqrt{a^2y^2+C_1}\right)+C_2$ ó $y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}$.
**121.** $y''=\frac{a}{y^3}$. *Respuesta*: $(C_1x+C_2)^2=C_1y^2-a$.

En los ejemplos 122-125 escribir la solución particular que satisfaga las siguientes condiciones iniciales: $x=0$, $y=-1$; $y'=0$. **122.** $xy''-y'=x^2e^x$. *Respuesta*: $y=e^x(x-1)+C_1x^2+C_2$. Solución particular: $y=e^x(x-1)$. **123.** $yy''-(y')^2+(y')^3=0$. *Respuesta*: $y+C_1\ln y=x+C_2$. Solución particular: $y=-1$. **124.** $y''+y'\operatorname{tg}x=\operatorname{sen}2x$. *Respuesta*: $y=C_2+C_1\operatorname{sen}x-x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x$. Solución particular: $y=2\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}x\cos x-x-1$. **125.** $(y'')^2+(y')^2=a^2$. *Respuesta*: $y=C_2-a\cos(x+C_1)$. Solución particular: $y=a-1-a\cos x$; $y=a\cos x-(a+1)$. (Indicación. Forma paramétrica $y''=a\cos t$, $y'=a\operatorname{sen}t$).
**126.** $y''=\frac{1}{2y'}$. *Respuesta*: $y=\pm\frac{2}{3}(x+C_1)^{3/2}+C_2$. **127.** $y'''=y''^2$. *Respuesta*: $y=(C_1-x)[\ln(C_1-x)-1]+C_2x+C_3$. **128.** $y'y'''-3y''^2=0$. *Respuesta*: $x=C_1y^2+C_2y+C_3$.

Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes: **129.** $y''=9y$. *Respuesta*: $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$. **130.** $y''+y=0$. *Respuesta*: $y=A\cos x+B\operatorname{sen}x$. **131.** $y''-y'=0$. *Respuesta*: $y=C_1+C_2e^x$. **132.** $y''+12y=7y'$. *Respuesta*: $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$. **133.** $y''-4y'+4y=0$. *Respuesta*: $y=(C_1+C_2x)\,e^{2x}$. **134.** $y''+2y'+10y=0$. *Respuesta*: $y=e^{-x}(A\cos 3x+B\operatorname{sen}3x)$.
**135.** $y''+3y'-2y=0$. *Respuesta*: $y=C_1e^{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}x}+C_2e^{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}x}$. **136.** $4y''-12y'+9y=0$. *Respuesta*: $y=(C_1+C_2x)\,e^{3/2x}$. **137.** $y''+y'+y=0$. *Respuesta*: $y=e^{-\frac{1}{2}x}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+B\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$.

**138.** Dos cargas iguales están suspendidas al extremo de un muelle. Hallar el movimiento que adquiere una de las cargas si la otra se desata. *Respuesta*:

$x = a\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\, t\right)$, donde $a$ es el alargamiento del muelle bajo la acción de una carga en el estado de equilibrio.

**139.** Un punto material de masa $m$ es atraido por cada uno de dos centros con fuerzas proporcionales a la distancia. El factor de proporcionalidad es igual a $k$. La distancia entre dos centros es $2c$. El punto se halla en el instante inicial en la línea que une los centros a la distancia $a$ de su medio. La velocidad inicial es cero. Hallar la ley de movimiento del punto. *Respuesta*: $x = a\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\, t\right)$.

**140.** $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$. *Resp.* $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$. **141.** $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$. *Resp.* $y = C_1e^{2x} + C_2e^{x} + C_3e^{-x}$. **142.** $y''' - 3ay'' + 3a^2y' - a^3y = 0$. *Resp.* $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)\, e^{ax}$. **143.** $y^{V} - 4y''' = 0$. *Resp.* $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{2x} + C_5e^{-2x}$. **144.** $y^{IV} + 2y'' + 9y = 0$. *Resp.* $y = (C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\operatorname{sen}\sqrt{2}x)\, e^{-x} + (C_3\cos\sqrt{2}x + C_4\operatorname{sen}\sqrt{2}x)\, e^{x}$. **145.** $y^{IV} - 8y'' + 16y = 0$. *Resp.* $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3xe^{2x} + C_4xe^{-2x}$. **146.** $y^{IV} + y = 0$. *Resp.* $y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_2\operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_4\operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

**147.** $y^{IV} - a^4y = 0$. Hallar la solución general y la solución particular que satisfaga las condiciones iniciales para $x_0 = 0$, $y = 1$, $y' = 0$, $y'' = -a^2$, $y''' = 0$.

*Respuesta*: solución general: $y = C_1e^{ax} + C_2e^{-ax} + C_3\cos ax + C_4\operatorname{sen} ax$. Solución particular: $y_0 = \cos ax$.

Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas (hallar la solución general):

**148.** $y'' - 7y' + 12y = x$. *Resp.* $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} + \frac{12x + 7}{144}$. **149.** $s'' - a^2s = t + 1$. *Resp.* $s = C_1e^{at} + C_2e^{-at} - \frac{t+1}{a^2}$. **150.** $y'' + y' - 2y = 8\operatorname{sen} 2x$. *Resp.* $y = C_1e^{x} + C_2e^{-2x} - \frac{1}{5}(6\operatorname{sen} 2x + 2\cos 2x)$. **151.** $y'' - y = 5x + 2$. *Resp.* $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} - 5x - 2$. **152.** $s'' - 2as' + a^2s = e^{t}$ $(a \neq 1)$. *Resp.* $s = C_1e^{at} + C_2te^{at} + \frac{e^{t}}{(a-1)^2}$. **153.** $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$. *Resp.* $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-5x} + \frac{1}{21}e^{2x}$. **154.** $y'' + 9y = 6e^{3x}$. *Resp.* $y = C_1\cos 3x + C_2\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{3}e^{3x}$. **155.** $y'' - 3y' = 2 - 6x$. *Resp.* $y = C_1 + C_2e^{3x} + x^2$. **156.** $y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$. *Resp.* $y = e^{x}(A\cos\sqrt{2}x + B\operatorname{sen}\sqrt{2}x) + \frac{e^{-x}}{41}(5\cos x - 4\operatorname{sen} x)$. **157.** $y'' + 4y = 2\operatorname{sen} 2x$. *Resp.* $y = A\operatorname{sen} 2x + B\cos 2x - \frac{x}{2}\cos 2x$. **158.** $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$. *Resp.* $y = (C_1 + C_2x)\, e^{x} + C_3e^{2x} - x - 4$. **159.** $y^{IV} - a^4y = 5a^4e^{ax}\operatorname{sen} ax$. *Resp.* $y = (C_1 - \operatorname{sen} ax)\, e^{ax} + C_2e^{-ax} + C_3\cos ax + C_4\operatorname{sen} ax$. **160.** $y^{IV} + 2a^2y'' + a^4y = 8\cos ax$. *Resp.* $y = (C_1 + C_2x)\cos ax + (C_3 + C_4x)\operatorname{sen} ax - \frac{x^2}{a^2}\cos ax$.

**161.** Hallar una curva integral de la ecuación $y''+k^2y=0$, que pasa por el punto $M(x_0, y_0)$ y toca en este punto a la recta $y=ax$. *Respuesta*: $y=y_0\cos k(x-x_0)+\frac{a}{k}\operatorname{sen} k(x-x_0)$.

**162.** Hallar la solución de la ecuación $y''+2hy'+n^2y=0$ que satisfaga las condiciones iniciales $y=a$, $y'=C$ para $x=0$. *Respuesta*: para $h<n$, $y=e^{-hx}\left(a\cos\sqrt{n^2-h^2}\,x+\frac{C+ah}{\sqrt{n^2-h^2}}\operatorname{sen}\sqrt{n^2-h^2}\,x\right)$;

para $h=n$, $y=e^{-hx}[(C+ah)x+a]$; para $h>n$, $y=\frac{C+a(h+\sqrt{h^2-n^2})}{2\sqrt{h^2-n^2}}\times$
$\times e^{-(h-\sqrt{h^2-n^2})x}-\frac{C+a(h-\sqrt{h^2-n^2})}{2\sqrt{h^2-n^2}}e^{-(h+\sqrt{h^2-n^2})x}$.

**163.** Hallar las soluciones de la ecuación $y''+n^2y=h\operatorname{sen} px$ $(p\neq n)$, que satisfagan las condiciones: $y=a$, $y'=C$ para $x=0$. *Respuesta*: $y=a\cos nx+$ $+\frac{C(n^2-p^2)-hp}{n(n^2-p^2)}\operatorname{sen} nx+\frac{h}{n^2-p^2}\operatorname{sen} px$.

**164.** Un peso de 4 kg está suspendido en un muelle, aumentando la longitud de este a 1 cm. Hallar la ley del movimiento de este peso suponiendo que el extremo superior del muelle efectúa oscilaciones armónicas según la ley $y=$ $=\operatorname{sen}\sqrt{100g}\,t$, donde $y$ es el alargamiento por la vertical.

**Solución.** Sea $x$ la coordenada vertical del peso, medida a partir de la posición de reposo, tenemos:

$$\frac{4}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=-k(x-y-l),$$

donde $l$ es la longitud del muelle en estado libre; $k=400$, lo que se deduce fácilmente de las condiciones iniciales. De aquí:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+100gx=100g\operatorname{sen}\sqrt{100g}\,t+100lg.$$

Busquemos una integral particular de esta ecuación de la forma:

$$t(C_1\cos\sqrt{100g}\,t+C_2\operatorname{sen}\sqrt{100g}\,t)+g,$$

debido a que el primer término del segundo miembro de la ecuación entra en la solución de la ecuación homogénea.

**165.** Según la hipótesis del problema 139, la velocidad inicial es igual a $v_0$ y su dirección es perpendicular a la recta que une los centros. Hallar las trayectorias.

**Solución.** Tomando por el origen de coordenadas el punto medio del segmento entre los centros, las ecuaciones diferenciales del movimiento se escriben en la forma:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=k(C-x)-k(C+x)=-2kx,\qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=-2ky.$$

Las condiciones iniciales para $t=0$ son:

$$x=a;\quad \frac{dx}{dt}=0;\quad y=0;\quad \frac{dy}{dt}=v_0.$$

Integrando, hallamos:

$$x=a\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right),\quad y=v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right).$$

De donde: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2 2k}{mv_0^2}=1$ (elipse).

**166.** Un tubo horizontal gira alrededor de un eje vertical con una velocidad angular $\omega$ constante. Dentro del tubo está colocada una bola que se desliza por él sin fricción. Hallar la ley del movimiento de la bola, si en el instante inicial ésta se encuentra en el eje de rotación y tiene velocidad inicial $v_0$ (a lo largo del tubo).

**Indicación.** La ecuación diferencial del movimiento es $\frac{d^2r}{dt^2}=\omega^2 r$.

Las condiciones iniciales: $r=0$, $\frac{dr}{dt}=v_0$ para $t=0$.

Integrando, hallamos: $r=\frac{v_0}{2\omega}[e^{\omega t}+e^{-\omega t}]$.

Aplicando el método de la variación de las constantes arbitrarias, integrar las siguientes ecuaciones diferenciales:

**167.** $y''-7y'+6y=\operatorname{sen} x$. *Resp.* $y=C_1e^x+C_2e^{6x}+\frac{5\operatorname{sen}x+7\cos x}{74}$.

**168.** $y''+y=\operatorname{sc} x$. *Resp.* $y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen}x+x\operatorname{sen}x+\cos x\ln\cos x$.

**169.** $y''+y=\frac{1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$. *Resp.* $y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen}x-\sqrt{\cos 2x}$.

**Integrar los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:**

**170.** $yy''=y'^2+1$. *Resp.* $y=\frac{1}{2C_1}[e^{C_1(x-C_2)}+e^{-C_1(x-C_2)}]$. **171.** $\frac{x^2\,dy-y^2\,dx}{(x-y)^2}=0$. *Resp.* $\frac{xy}{x-y}=C$. **172** $y=xy'^2+y'^2$ *Resp.* $y=(\sqrt{x+1}+C)^2$. Soluciones singulares: $y=0$; $x+1=0$. **173.** $y''+y=\operatorname{sc}x$. *Resp.* $y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen}x+x\operatorname{sen}x+\cos x\ln\cos x$. **174.** $(1+x^2)\,y'-xy-a=0$. *Resp.* $y=ax+C\sqrt{1+x^2}$. 175. $x\cos\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=y\cos\frac{y}{x}-x$. *Resp.* $xe^{\operatorname{sen}\frac{y}{x}}=C$. **176.** $y''-4y=e^{2x}\operatorname{sen}2x$. *Resp.* $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-\frac{e^{2x}}{20}(\operatorname{sen}2x+2\cos 2x)$. **177.** $xy'+y-y^2\ln x=0$. *Resp.* $(\ln x+1+Cx)\,y=1$. **178.** $(2x+2y-1)\,dx+(x+y-2)\,dy=0$. *Resp.* $2x+y-3\ln(x+y+1)=C$. **179.** $3e^x\operatorname{tg}y\,dx+(1-e^x)\operatorname{sc}^2 y\,dy=0$. *Resp.* $\operatorname{tg}y=C(1-e^x)^3$.

**Integrar los siguientes sistemas de ecuaciones:**

**180.** $\frac{dx}{dy}=y+1$, $\frac{dy}{dt}=x+1$. Indicar las soluciones particulares que satisfacen a las condiciones: iniciales $x=-2$, $y=0$, cuando $t=0$. *Respuesta:* $y=C_1\cos t+C_2\operatorname{sen}t$, $x=(C_1+C_2)\cos t+(C_2-C_1)\operatorname{sen}t$. Solución particular: $x^*=\cos t-\operatorname{sen}t$, $y^*=\cos t$.

181. $\frac{dx}{dt}=x-2y$, $\frac{dy}{dt}=x-y$. **Indicar las soluciones particulares que satisfacen las condiciones iniciales:** $x=1$, $y=1$, **cuando** $t=0$, ***Respuesta***: $y=C_1\cos t+C_2\operatorname{sen} t$, $x=(C_1+C_2)\cos t+(C_2-C_1)\operatorname{sen} t$. **Solución particular:** $x^*=\cos t-\operatorname{sen} t$, $y^*=\cos t$.

182. $$\begin{cases} 4\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}+3x=\operatorname{sen} t, \\ \frac{dx}{dt}+y=\cos t. \end{cases}$$ *Respuesta*: $x=C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}$, $y=C_1e^{-t}+3C_2e^{-3t}+\cos t$.

183. $$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2}=x, \\ \frac{d^2x}{dt^2}=y. \end{cases}$$ *Respuesta*: $x=C_1e^{t}+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\operatorname{sen} t$, $y=C_1e^{t}+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\operatorname{sen} t$.

184. $$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+x=e^{t}, \\ \frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}=1. \end{cases}$$ *Respuesta*: $x=C_1+C_2t+C_3t^2-\frac{1}{6}t^3+e^{t}$, $y=C_4-(C_1+2C_3)\,t-$ $-\frac{1}{2}(C_2-1)\,t^2-\frac{1}{3}C_3t^3+\frac{1}{24}t^4-e^{t}$

185. $$\begin{cases} \frac{dy}{dx}=z-y, \\ \frac{dz}{dx}=-y-3z. \end{cases}$$ *Respuesta*: $y=(C_1+C_2x)\,e^{-2x}$, $z=(C_2-C_1-C_2x)\,e^{-2x}$.

186. $$\begin{cases} \frac{dy}{dx}+z=0, \\ \frac{dz}{dx}+4y=0. \end{cases}$$ *Respuesta*: $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$, $z=-2\,(C_1e^{2x}-C_2e^{-2x})$.

187. $$\begin{cases} \frac{dy}{dx}+2y+z=\operatorname{sen} x, \\ \frac{dz}{dx}-4y-2z=\cos x. \end{cases}$$ *Respuesta*: $y=C_1+C_2x+2\operatorname{sen} x$, $z=-2C_1-C_2\,(2x+1)-$ $-3\operatorname{sen} x-2\cos x$.

188. $$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=y+z, \\ \frac{dy}{dt}=x+z, \\ \frac{dz}{dt}=x+y. \end{cases}$$ *Respuesta*: $x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}$, $y=C_3e^{-t}+C_2e^{2t}$, $z=-(C_1+C_3)\,e^{-t}+C_2e^{2t}$.

189. $$\begin{cases} \frac{dy}{dx}=1-\frac{1}{z}, \\ \frac{dz}{dx}=\frac{1}{y-x}. \end{cases}$$ *Respuesta*: $z=C_2e^{C_1x}$, $y=x+\frac{1}{C_1C_2}\,e^{-C_1x}$.

190. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{yz}, \\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{x}{y^2}. \end{cases}$ *Respuesta*: $\dfrac{z}{y}=C_1$, $zy^2-\dfrac{3}{2}x^2=C_2$.

Analizar la estabilidad de la solución $x=0$, $y=0$ para los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

191. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x-3y, \\ \dfrac{dy}{dt}=5x+6y. \end{cases}$ *Respuesta*: Inestable.

192. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-4x-10y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x-2y. \end{cases}$ *Respuesta*: Estable.

193. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=12x+18y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-8x-12y. \end{cases}$ *Respuesta*: Inestable.

**194.** Hallar los valores aproximados de la solución de la ecuación $y'=y^2+x$, que satisface a la condición inicial $y=1$, cuando $x=0$. Hallar los valores de la solución para los siguientes valores de $x$ iguales a 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. *Respuesta*: $y_{x=0,5}=2,114$.

**195.** Hallar el valor aproximado $y_{x=1,4}$ de la solución de la ecuación $y'+\dfrac{1}{x}y=e^x$, que satisface a las condiciones iniciales $y=1$ cuando $x=1$. Comparar el resultado obtenido con la solución exacta.

**196.** Hallar los valores aproximados $x_{t=1,4}$ e $y_{t=1,4}$ de las soluciones del sistema de ecuaciones $\dfrac{dx}{dt}=y-x$, $\dfrac{dy}{dt}=-x-3y$, que satisfacen a las condiciones iniciales $y=1$, cuando $t=1$ y $x=0$. Comparar los valores obtenidos con los exactos.

CAPITULO XIV

# INTEGRALES MULTIPLES

## § 1. INTEGRAL DOBLE

Sea en el plano $Oxy$ un dominio cerrado*) $D$, limitado por una curva L.

Sea dada en el dominio $D$ una función continua

$$z = f(x, y).$$

Dividamos el dominio $D$ mediante curvas arbitrarias en $n$ partes:

$$\Delta s_1, \ \Delta s_2, \ \Delta s_3, \ \ldots, \ \Delta s_n$$

(fig. 276) las que llamaremos dominios parciales o elementos. Para no introducir nuevos símbolos designemos por $\Delta s_1, \ldots, \Delta s_n$ no sólo a los propios elementos, sino también sus áreas. En cada $\Delta s_i$ (en su interior o en la frontera), elijamos un punto $P_i$; entonces obtenemos $n$ puntos:

$$P_1, \ P_2, \ \ldots, \ P_n.$$

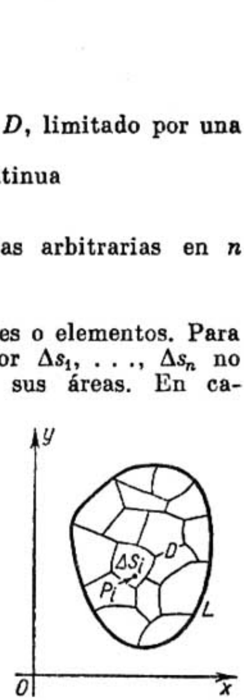

*Fig. 276*

Sean $f(P_1), f(P_2), \ldots, f(P_n)$ los valores de la función en los puntos elegidos; formemos la suma de productos de la forma $f(P_i)\Delta s_i$:

$$V_n = f(P_1)\Delta s_1 + f(P_2)\Delta s_2 + \ldots + f(P_n)\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i, \qquad (1)$$

que se llama *suma integral* de la función $f(x, y)$ en el dominio $D$.

Si $f \geqslant 0$ en el dominio $D$, entonces cada sumando $f(P_i)\Delta s_i$ se puede representar geométricamente como el volumen de un cilindro elemental de base $\Delta s_i$ y de altura $f(P_i)$.

*) Un dominio $D$ se llama *cerrado*, si está limitado por una curva cerrada y se considera que los puntos, ubicados en la frontera, pertenecen al dominio $D$.

Así, $V_n$ es la suma de los volúmenes de los cilindros elementales indicados, es decir, el volumen de un cierto cuerpo «escalonado» (fig. 277).

Examinemos una sucesión arbitraria de las sumas integrales, formadas con ayuda de la función $f(x, y)$ en el dominio dado $D$:

$$V_{n_1}, V_{n_2}, \ldots, V_{n_k}, \ldots \tag{2}$$

para diferentes métodos de división del dominio $D$ en las partes $\Delta s_i$. Supongamos que el diámetro máximo de los elementos $\Delta s_i$ tiende a cero, cuando $n_k \to \infty$. En este caso resulta válido el siguiente teorema que citemos aquí sin demostración.

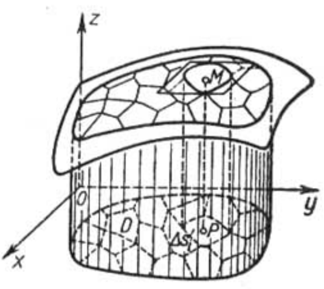


*Fig. 277*

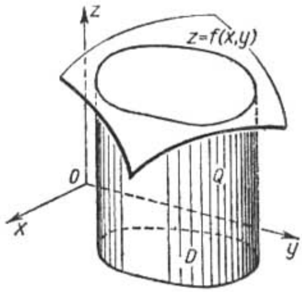


*Fig. 278*

**Teorema 1.** *Siendo $f(x, y)$ una finción continua en el dominio cerrado $D$, la sucesión (2) de las sumas integrales (1) tiene un límite, si el diámetro máximo de $\Delta s_i$ tiende a cero, mientras que $n \to \infty$. Este límite siempre es el mismo para cualquier sucesión de la forma (2), es decir, no depende del modo de división del dominio en los elementos $\Delta s_i$ ni de la elección del punto $P_i$ dentro del dominio parcial $\Delta s_i$.*

Este límite se llama *integral doble* de la función $f(x, y)$ extendida por el dominio $D$ y se designa así:

$$\iint_D f(P)\,ds \quad \text{ó} \quad \iint_D f(x, y)\,dx\,dy,$$

es decir,

$$\lim_{\text{diám}\,\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta s_i = \iint_D (x, y)\,dx\,dy.$$

Aquí $D$ se llama *dominio de integración*.

Si es $f(x, y) \geqslant 0$, la integral doble de $f(x, y)$ extendida por el dominio $D$ es igual al volumen $Q$ de un cuerpo limitado por la superficie $z = f(x, y)$, el plano $z = 0$ y la superficie cilíndrica, cuyas generatrices son paralelas al eje $Oz$ y la directriz es la frontera del dominio $D$ (fig. 278).

Examinemos ahora los siguientes teoremas acerca de la integral doble.

**Teorema 2.** *La integral doble de la suma de dos funciones* $\varphi(x, y) + \psi(x, y)$, *extendida por un dominio D es igual a la suma de las integrales dobles extendidas por este dominio D de cada una de las dos funciones por separado*:

$$\iint_D [\varphi(x, y) + \psi(x, y)]\, ds = \iint_D \varphi(x, y)\, ds + \iint_D \psi(x, y)\, ds.$$

**Teorema 3.** *El factor constante se puede sacar fuera del signo de la integral doble*:

*si* $a = \text{const}$, *tenemos*:

$$\iint_D a\varphi(x, y)\, ds = a \iint_D \varphi(x, y)\, ds.$$

La demostración de estos dos teoremas se efectúa de modo análogo al que hemos practicado para demostrar teoremas correspondientes de la integral definida (véase tomo I, § 3, cap, XI).

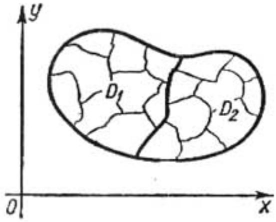


*Fig. 279*

**Teorema 4.** *Si el dominio D está dividido en dos dominios parciales* $D_1$ *y* $D_2$, *sin poseer puntos interiores comunes, y la función* $f(x, y)$ *es continua en todos los puntos del dominio D, entonces*:

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint_{D_2} f(x, y)\, dx\, dy. \qquad (3)$$

**Demostración:** La suma integral por el dominio $D$ se puede representar en la forma (fig. 279)

$$\sum_D f(P_i)\, \Delta s_i = \sum_{D_1} f(P_i)\, \Delta s_i + \sum_{D_2} f(P_i)\, \Delta s_i, \qquad (4)$$

donde la primera suma contiene términos correspondientes a los elementos del dominio $D_1$, y la segunda, términos correspondientes a los elementos del dominio $D_2$. En efecto, como la integral doble no depende del modo de dividír el dominio $D$, dividámoslo de manera que la frontera común de $D_1$ y $D_2$ sea también una frontera de los elemetos $\Delta s_i$. Pasando en la igualdad (4) al límite, cuando $\Delta s_i \to 0$, obtenemos la igualdad (3). Es evidente que este teorema es válida para cualquier número de sumandos.

## § 2. CALCULO DE LA INTEGRAL DOBLE

Sea un dominio $D$ del plano $Oxy$ tal que toda recta paralela a uno de los ejes de coordenadas (por ejemplo, al eje $Oy$) y que pasa por un punto **interior*)** del dominio, corta su frontera en dos puntos $N_1$ y $N_2$ (fig. 280).

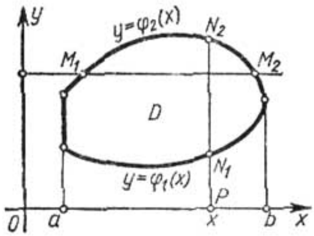


*Fig. 280*

Supongamos que en el caso examinado el dominio $D$ está limitado por las curvas: $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ y las rectas, $x = a$, $x = b$; que

$$\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x), \quad a < b;$$

y además las funciones $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ son continuas en el segmento $[a, b]$. Convengamos llamar tal dominio *regular en la dirección del eje Oy*. De modo semejante se determina el dominio *regular en la dirección del eje Ox*.

Un dominio regular en las direcciones de ambos ejes de coordenadas llamemos simplemente *dominio regular*. La figura 280 da un ejemplo de dominio regular $D$.

Sea $f(x, y)$ una función continua en el dominio $D$.

Examinemos la expresión

$$I_D = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx,$$

la que llamaremos integral *iterada* de segundo orden de la función $f(x, y)$, extendida por el dominio $D$. En esta expresión al principio se calcula la integral entre paréntesis. La integración se realiza respecto a $y$, considerando $x$ constante. Como resultado de la integración obtenemos una función continua**) de $x$:

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

*) El punto interior es un punto del dominio que no se encuentra en su frontera.

**) Aquí no se demuestra que la función $\Phi(x)$ es continua.

Integramos la última función respecto a $x$ entre los límites desde $a$ hasta $b$:

$$I_D = \int_a^b \Phi(x)\,dx.$$

En definitiva obtenemos un número constante.

**Ejemplo 1.** Hallar la integral iterada de segundo orden

$$I_D = \int_0^1 \left( \int_0^{x^2} (x^2+y^2)\,dy \right) dx.$$

**Solución.** Calculemos al principio la integral interior, (entre paréntesis):

$$\Phi(x) = \int_0^{x^2} (x^2+y^2)\,dy = \left( x^2y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{x^2} = x^2x^2 + \frac{(x^2)^3}{3} = x^4 + \frac{x^6}{3}.$$

Integrando la función obtenida desde 0 hasta 1 hallamos:

$$\int_0^1 \left( x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \left( \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{3 \cdot 7} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{21} = \frac{26}{105}.$$

Determinemos el dominio $D$. En el caso dado $D$ es un dominio limitado por las líneas (fig. 281):

$$y=0, \quad x=0, \quad y=x^2, \quad x=1.$$

A veces puede ocurrir que el dominio $D$ es tal que una de las funciones $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ no puede ser dada por una sola expre-

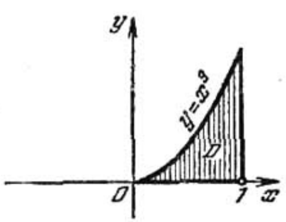


*Fig. 281*

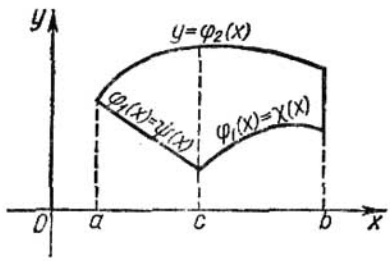


*Fig. 282*

sión analítica en todo el intervalo de la variación de $x$ (desde $x = a$ hasta $x = b$). Sea, por ejemplo, $a < c < b$, y

$\varphi_1(x) = \psi(x)$ en el segmento $[a, c]$,

$\varphi_1(x) = \chi(x)$ en el segmento $[c, b]$,

donde $\psi(x)$ y $\chi(x)$ son funciones dadas analíticamente (fig. 282).

En este caso escribamos la integral iterada de la manera siguiente:

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\right)dx =$$

$$= \int_a^c \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\right)dx + \int_c^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\right)dx =$$

$$= \int_a^c \left(\int_{\psi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\right)dx + \int_c^b \left(\int_{\chi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\right)dx.$$

La primera de estas igualdades está escrita en virtud de la propiedad conocida de la integral definida y la segunda, por que en el segmento $[a,\ c]$ tenemos $\varphi_1(x) \equiv \psi(x)$ y en el segmento $[c,\ b]$, $\varphi_1(x) \equiv \chi(x)$.

Si la función $\varphi_2(x)$ es dada por diferentes expresiones analíticas en varias partes del segmento $[a,\ b]$, la inscripción de la integral iterada de segundo orden será análoga.

Determinemos ciertas propiedades de la integral iterada de segundo orden.

**Propiedad 1.** *Si un dominio $D$ regular en la dirección del eje $Oy$ lo dividimos en dos dominios $D_1$ y $D_2$, mediante una recta paralela al eje $Oy$ o al eje $Ox$, la integral iterada de segundo orden $I_D$ extendida por el dominio $D$ será igual a la suma de integrales semejantes extendidas por los dominios $D_1$ y $D_2$, es decir,*

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}. \tag{1}$$

**Demostración.** a) Supongamos que la recta $x = c$ $(a < c < b)$ divide el dominio $D$ en dos dominios*) $D_1$ y $D_2$ regulares en la dirección del eje $Oy$. Entonces

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\right)dx = \int_a^b \Phi(x)\,dx = \int_a^c \Phi(x)\,dx + \int_c^b \Phi(x)\,dx =$$

$$= \int_a^c \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\right)dx + \int_c^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\right)dx = I_{D_1} + I_{D_2}.$$

b) Supongamos que la recta $y = h$ divide el dominio $D$ en dos dominios $D_1$ y $D_2$ regulares en dirección del eje $Oy$, de modo tal como se expone en la figura 283. Designemos por $M_1$ y $M_2$ los puntos de intersección de la recta $y = h$ con la frontera $L$ de $D$. Designemos las abscisas de estos puntos por $a_1$ y $b_1$.

---

*) El hecho de que una parte de la frontera de $D_1$ (también del dominio $D_2$) es un tramo de recta vertical no impide que este dominio sea regular en la dirección del eje $Oy$. En efecto, para que un dominio sea regular, es preciso sólo que cada recta vertical pasante por un punto interior de éste, tenga no más de dos puntos comunes con la frontera.

El dominio $D_1$ está limitado por las curvas continuas:

1) $y = \varphi_1(x)$;

2) la curva $A_1M_1M_2B$, cuya ecuación escribimos convencionalmente en la forma

$$y = \varphi_1^*(x),$$

teniendo en cuenta que $\varphi_1^*(x) = \varphi_2(x)$ cuando $a \leqslant x \leqslant a_1$ y $b_1 \leqslant \leqslant x \leqslant b$, y que

$$\varphi_1^*(x) = h, \quad \text{cuando} \quad a_1 \leqslant x \leqslant b_1;$$

3) las rectas $x = a$, $x = b$.

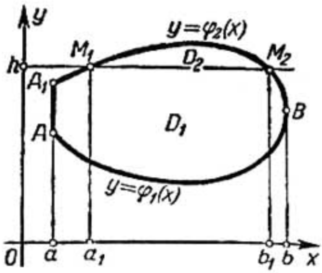


*Fig. 283*

El dominio $D_2$ está limitado por las curvas

$$y = \varphi_1^*(x), \; y = \varphi_2(x), \quad \text{donde} \quad a_1 \leqslant x \leqslant b_1.$$

Aplicando a la integral interior el teorema sobre la descomposición del intervalo de integración, escribamos la identidad siguiente:

$$I_D = \int_a^b \Big( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \Big) dx =$$

$$= \int_a^b \Big( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x, y)\, dy + \int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \Big) dx =$$

$$= \int_a^b \Big( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x, y)\, dy \Big) dx + \int_a^b \Big( \int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \Big) dx.$$

Descompongamos la última integral en tres integrales aplicando el mismo teorema a la integral exterior:

$$\int_a^b \Big(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\Big)dx = \int_a^{a_1} \Big(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\Big)dx + \int_{a_1}^{b_1} \Big(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\Big)dx + \int_{b_1}^{b} \Big(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\Big)dx;$$

como $\varphi_1^*(x) = \varphi_2(x)$ en los segmentos $[a,\ a_1]$ y $[b_1,\ b]$, las integrales primera y tercera son idénticamente iguales a cero. Por eso:

$$I_D = \int_a^b \Big(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x,\ y)\,dy\Big)dx + \int_{a_1}^{b_1} \Big(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\Big)dx.$$

Aquí la primera integral es una integral iterada de segundo orden por el dominio $D_1$ y la segunda, por el dominio $D_2$. Por consiguiente,

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}.$$

La demostración será semejante cualquiera que sea la posición de la secante $M_1M_2$. Si la recta $M_1M_2$ divide a $D$ en tres o, incluso, en mayor número de dominios, obtenemos una relación, análoga a la (1) con el número correspondiente de los sumandos en el segundo miembro.

**Corolario.** Cada uno de los dominios obtenidos podemos dividir de nuevo en dominios regulares en la dirección del eje $Oy$ mediante

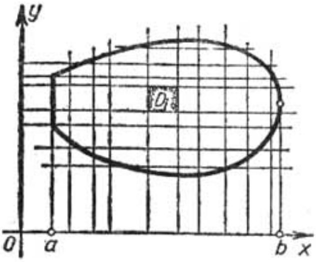


*Fig. 284*

una paralela a $Oy$ o a $Ox$, y aplicar a éstos la igualdad (1). Por consiguiente, se puede dividir $D$ en cualquier número de dominios regulares mediante paralelas a los ejes de coordenadas

$$D_1,\ D_2,\ D_3,\ \ldots\ D_i,$$

en este caso también será válida la afirmación de que la integral iterada de segundo orden extendida por el dominio $D$ es igual a la suma de estas integrales extendidas por los dominios parciales, es decir (fig. 284):

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2} + I_{D_3} + \ldots + I_{D_l}. \tag{2}$$

**Propiedad 2. (Evaluación de la integral iterada de segundo orden).** *Sean $m$ y $M$ los valores mínimo y máximo de la función $f(x, y)$ en el dominio $D$. Designemos por $S$ el área del dominio $D$. En este caso tenemos la correlación*

$$mS \leqslant \int_a^b \Big( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \Big) dx \leqslant MS. \tag{3}$$

**Demostración.** Evaluemos la integral interior, designándola por $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \leqslant \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} M\, dy = M[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)].$$

Obtenemos:

$$I_D = \int_a^b \Big( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \Big) dx \leqslant \int_a^b M[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\, dx = MS,$$

es decir

$$I_D \leqslant MS. \tag{3'}$$

Análogamente tenemos:

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \geqslant \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} m\, dx = m[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)],$$

$$I_D = \int_a^b \Phi(x)\, dx \geqslant \int_a^b m[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\, dx = mS,$$

es decir,

$$I_D \geqslant mS. \tag{3''}$$

De las desigualdades (3′) y (3″) se deduce la correlación (3):

$$mS \leqslant I_D \leqslant MS.$$

En el párrafo siguiente aclaremos el significado geométrico de este teorema.

**Propiedad 3 (Teorema de la media).** *La integral iterada de segundo orden $I_D$ de una función continua $f(x, y)$, extendida por un dominio $D$ del área $S$ es igual al producto de $S$ por el valor de la función en cierto punto $P$ del dominio $D$, es decir.*

$$\int_a^b \Big( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \Big) dx = f(P)\, S. \tag{4}$$

**Demostración.** De la correlación (3) obtenemos:

$$m \leqslant \frac{1}{S} I_D \leqslant M.$$

El número $\frac{1}{S} I_D$ está comprendido entre las valores máximo y mínimo de la función $f(x, y)$ en el dominio $D$. En virtud de la continuidad de la función $f(x, y)$, ésta toma en cierto punto $P$ del dominio $D$ el valor igual a $\frac{1}{S} I_D$, es decir.

$$\frac{1}{S} I_D = f(P),$$

de donde:

$$I_D = f(P)\,S. \tag{5}$$

## § 3. CALCULO DE LA INTEGRAL DOBLE (CONTINUACION)

**Teorema.** *La integral doble de una función continua $f(x, y)$, extendida por un dominio regular $D$, es igual a la integral iterada de segundo orden de esta función extendida por $D$, es decir,**)

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \Big) dx.$$

**Demostración.** Dividamos el dominio $D$ por las paralelas a los ejes de coordenadas en $n$ dominios regulares (rectangulares):

$$\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ \ldots,\ \Delta s_n.$$

En virtud de la propiedad 1 [fórmula (2)] del párrafo anterior tenemos:

$$I_D = I_{\Delta s_1} + I_{\Delta s_2} + \ldots + I_{\Delta s_n} = \sum_{i=1}^{n} I_{\Delta s_i}. \tag{1}$$

Transformemos cada sumando del segundo miembro utilizando el teorema de la media para la integral iterada de segundo orden:

$$I_{\Delta s_i} = f(P_i)\,\Delta s_i.$$

Entonces, la igualdad (1) toma la forma

$$I_D = f(P_1)\,\Delta s_1 + f(P_2)\,\Delta s_2 + \ldots + f(P_n)\,\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta s_i, \tag{2}$$

*) De nuevo suponemos que el dominio $D$ es regular en la dirección del eje $Oy$ y limitado por las curvas $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$.

donde $P_i$ es un punto en $\Delta s_i$. A la derecha tenemos una suma integral para la función $f(x, y)$ extendida por el dominio $D$. Del teorema sobre la existencia de la integral doble se deduce que el límite de esta suma existe y es igual a la integral doble de la función

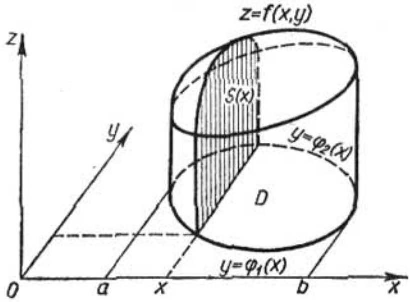


*Fig. 285*

$f(x, y)$ por $D$, cuando $n \to \infty$ y el diámetro máximo de los dominios parciales $\Delta s_i$ tiende a cero.

El valor numérico de la integral iterada de segundo orden $I_D$ del primer miembro de la igualdad (2) no depende de $n$. Por tanto, pasando al límite en la igualdad (2), obtenemos:

$$I_D = \lim_{\text{diám } \Delta s_i \to 0} \sum f(P_i) \Delta s_i = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy$$

ó

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = I_D. \tag{3}$$

Esrcibiendo la expresión de la integral iterada de segundo orden $I_D$ en forma más detallada, en definitiva obtenemos:

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx. \tag{4}$$

**Observación 1.** Cuando $f(x, y) \geqslant 0$, la fórmula (4) toma una interpretación geométrica ilustrativa. Analicemos un cuerpo limitado por la superficie $z = f(x, y)$, el plano $z = 0$ y la superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al eje $Oz$ y la directriz sigue la frontera del dominio $D$ (fig. 285). Calculemos el volumen $V$ de este cuerpo. Hemos indicado ya que el volumen de este cuerpo es igual a la integral doble de la función $f(x, y)$ extendida por el dominio $D$:

$$V = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy. \tag{5}$$

Calculemos ahora el volumen de este cuerpo utilizando los resultados del § 4, cap. XII, tomo I sobre el cálculo del volumen de un cuerpo según las áreas de secciones paralelas. Tracemos el plano secante $x =$ const ($a < x < b$), que corta el cuerpo. Calculemos el área $S(x)$ de la figura obtenida en la sección $x =$ const. Esta

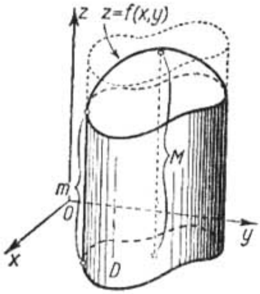


Fig. 286

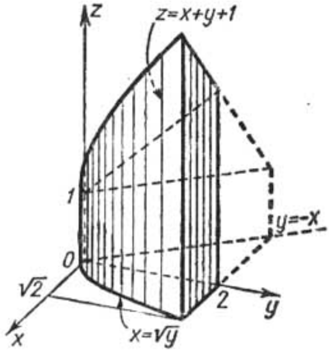


Fig. 287

figura es un trapecio curvilíneo limitado por las líneas $z = f(x, y)$ ($x =$ const), $z = 0$, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$. Por consiguiente, esta área se expresará mediante la integral

$$S(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy. \qquad (6)$$

Conociendo las áreas de las secciones paralelas, es fácil hallar el volumen del cuerpo:

$$V = \int\limits_a^b S(x)\, dx,$$

o, sustituyendo $S(x)$ en esta fórmula por su expresión de (6), tenemos:

$$V = \int\limits_a^b \left( \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx. \qquad (7)$$

Los primeros miembros de las fórmulas (5) y (7) son iguales por tanto son iguales también sus segundos miembros:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_a^b \left( \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

No es difícil aclarar ahora el significado geométrico del teorema sobre la evaluación de la integral iterada de segundo orden (la propiedad 2 del párrafo anterior): el volumen $V$ de un cuerpo limitado por la superficie $z = f(x, y)$, el plano $z = 0$ y la superficie cilíndrica, cuya directriz sigue la frontera del dominio $D$ es superior que el volumen de un cilindro de base $S$ y altura $m$ e inferior que el volumen de un cilindro de base $S$ y altura $M$ ($m$ y $M$ son los valores mínimo y máximo de la función $z = f(x, y)$ en el dominio $D$ (fig. 286). Esto se deduce de que la integral iterada de segundo orden $I_D$ es igual al volumen $V$ de este cuerpo.

**Ejemplo 1.** Calcular la integral doble $\iint\limits_D (4 - x^2 - y^2)\, dx\, dy$, si el dominio $D$ está limitado por las rectas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = \frac{3}{2}$.

**Solución.** En virtud de la fórmula, tenemos:

$$V = \int_0^{3/2} \left[ \int_0^1 (4 - x^2 - y^2)\, dx \right] dy = \int_0^{3/2} \left[ 4x - y^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 dy =$$

$$= \int_0^{3/2} \left( 4 - y^2 - \frac{1}{3} \right) dy = \left( 4y - \frac{y^3}{3} - \frac{1}{3} y \right) \Bigg|_0^{3/2} = \frac{35}{8}.$$

**Ejemplo 2.** Calcular la integral doble de la función $f(x, y) = 1 + x + y$, extendida por el dominio limitado por las líneas: $y = -x$, $x = \sqrt{y}$, $y = 2$, $z = 0$ (fig. 287).

**Solución.**

$$V = \int_0^2 \left[ \int_{-y}^{\sqrt{y}} (1 + x + y)\, dx \right] dy = \int_0^2 \left[ x + xy + \frac{x^2}{2} \right]_{-y}^{\sqrt{y}} dy =$$

$$= \int_0^2 \left[ \left( \sqrt{y} + y\sqrt{y} + \frac{y}{2} \right) - \left( -y - y^2 + \frac{y^2}{2} \right) \right] dy =$$

$$= \int_0^2 \left[ \sqrt{y} + \frac{3y}{2} + y\sqrt{y} - \frac{y^2}{2} \right] dy =$$

$$= \left[ \frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{3y^2}{4} + \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{y^3}{6} \right]_0^2 = \frac{44}{15}\sqrt{2} + \frac{5}{3}.$$

**Observación 2.** Supongamos que el dominio $D$ regular en la dirección del eje $Ox$ está limitado por las líneas

$$x = \psi_1(y), \quad x = \psi_2(y), \quad y = c, \quad y = d,$$

siendo $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ (fig. 288).

Es evidente, que en este caso tenemos:

$$\iint_D (x,\ y)\,dx\,dy = \int_c^d \Big( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)\,dx \Big) dy. \qquad (8)$$

Para calcular una integral doble es preciso representarla en forma de una integral iterada de segundo orden. Esto se puede hacer

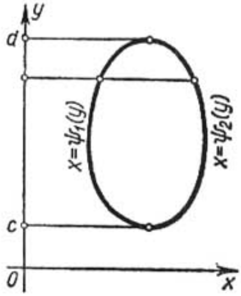


*Fig. 288*

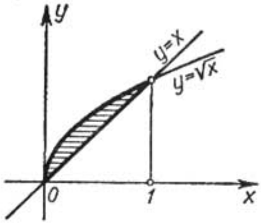


*Fig. 289*

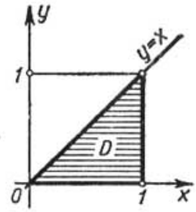


*Fig. 290*

por dos procedimientos, utilizando la fórmula (4) o la (8). En cada caso concreto, para calcular la integral doble elijamos una u otra fórmula según la forma del dominio $D$ o del integrando.

**Ejemplo 3.** Cambiar el orden de integración en la integral

$$I = \int_0^1 \left( \int_x^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy \right) dx.$$

**Solución.** El dominio de integración está limitado por la recta $y=x$ y la parábola $y=\sqrt{x}$ (fig. 289).

Toda paralela al eje $Ox$ corta la frontera del dominio no más que en dos puntos. Por tanto, se puede calcular la integral según la fórmula (8) poniendo

$$\psi_1(y) = y^2, \quad \psi_2(y) = y, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1;$$

entonces:

$$I = \int_0^1 \Big( \int_{y^2}^{y} f(x, y)\,dx \Big)\,dy.$$

**Ejemplo 4.** Calcular $\iint_D e^{\frac{y}{x}}\,ds$, si el dominio $D$ es un triángulo limitado por las rectas $y=x$, $y=0$, $x=1$ (fig. 290).

**Solución.** Sustituyamos la integral doble dada por una integral iterada de segundo orden, utilizando la fórmula (4). (Si usáramos la fórmula (8), tendríamos que integrar la función $e^{\frac{y}{x}}$ respecto a $x$; pero esta integral no se expresa mediante las funciones elementales):

$$\iint_D e^{\frac{y}{x}}\, ds = \int_0^1 \left( \int_0^x e^{\frac{y}{x}}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left( x e^{\frac{y}{x}} \right)_0^x dx =$$

$$= \int_0^1 x(e-1)\, dx = (e-1) \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{e-1}{2} = 0{,}859 \ldots$$

**Observación 3.** Si el dominio $D$ no es regular en la dirección del eje $Ox$, ni en la del eje $Oy$ (es decir, si existen rectas verticales y horizontales que pasan por los puntos interiores del dominio y cortan la frontera del dominio en más dos puntos), entonces no

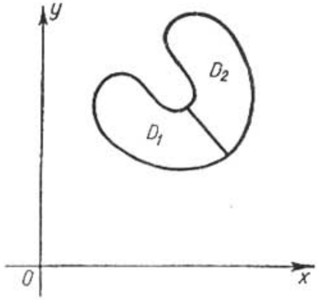


*Fig. 291*

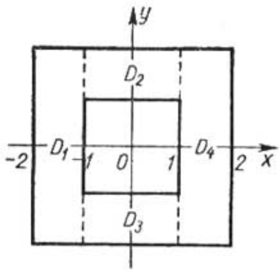


*Fig. 292*

podemos presentar la integral doble extendida por este dominio en la forma de una integral iterada de segundo orden. Si logramos dividir el dominio irregular $D$ en un número finito de dominios regulares $D_1, D_2, \ldots, D_n$ en dirección del eje $Ox$ ó $Oy$ entonces, al calcular la integral doble por cada uno de estos dominios parciales (con ayuda de la integral iterada de segundo orden) y al sumar los resultados, obtenemos la integral buscada extendida por el dominio $D$.

En la figura 291 se muestra el modo de dividir el dominio irregular $D$ en dos dominios regulares $D_1$ y $D_2$.

**Ejemplo 5.** Calcular la integral doble

$$\iint_D e^{x+y}\, ds$$

extendida por el dominio $D$, encerrado entre dos cuadrados con el centro en el origen de coordenadas y los lados paralelos a los ejes de coordenadas, si cada lado del cuadrado interior es igual a 2 y el del exterior a 4 (fig. 292).

**Solución.** El dominio $D$ es irregular. Sin embargo, las rectas $x = -1$ y $x = 1$ lo dividen en cuatro dominios regulares $D_1, D_2, D_3, D_4$. Por eso:

$$\iint_D e^{x+y}\,ds = \iint_{D_1} e^{x+y}\,ds + \iint_{D_2} e^{x+y}\,ds + \iint_{D_3} e^{x+y}\,ds + \iint_{D_4} e^{x+y}\,ds.$$

Representando cada una de estas integrales en forma de una integral iterada de segundo orden, hallamos:

$$\iint_D e^{x+y}\,ds = \int_{-2}^{-1}\Big(\int_{-2}^{2} e^{x+y}\,dy\Big)\,dx + \int_{-1}^{1}\Big(\int_{1}^{2} e^{x+y}\,dy\Big)\,dx +$$
$$+ \int_{-1}^{1}\Big(\int_{-2}^{-1} e^{x+y}\,dy\Big)\,dx + \int_{1}^{2}\Big(\int_{-2}^{2} e^{x+y}\,dy\Big)\,dx =$$
$$= (e^2 - e^{-2})(e^{-1} - e^{-2}) + (e^2 - e)(e - e^{-1}) + (e^{-1} - e^{-2})(e - e^{-1}) +$$
$$+ (e^2 - e^{-2})(e^2 - e) = (e^3 - e^{-3})(e - e^{-1}) = 4 \operatorname{senh} 3 \operatorname{senh} 1.$$

**Observación 4.** En adelante escribamos la integral iterada de segundo orden

$$I_D = \int_a^b \Big(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\Big)\,dx,$$

omitiendo los paréntesis de la integral interior, es decir, en la forma:

$$I_D = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\,dx.$$

Aquí, (igual que en el caso, en que se ponen los paréntesis) convengamos que la primera integración se realiza respecto a la variable, cuya diferencial está escrita primera y después, respecto a la otra variable, cuya diferencial está escrita en el segundo lugar. Notemos, sin embargo, que esta regla no está generalmente aceptada. En algunas obras está adoptado el procedimiento contrario: al principio, la integración se realiza respecto a la variable, cuya diferencial ocupa el último lugar*).

## § 4. CALCULO DE AREAS Y VOLUMENES CON AYUDA DE INTEGRALES DOBLES

**1. Volumen.** Como hemos visto en § 1, el volumen $V$ de un cuerpo, limitado por una superficie $z = f(x, y)$, donde $f(x, y)$ es una función no negativa, el plano $z = 0$ y la superficie cilíndrica,

*) A veces se utiliza también la anotación siguiente:

$$I_D = \int_a^b \Big(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x,\ y)\,dy\Big)\,dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x,\ y)\,dy.$$

cuyas generatrices son paralelas al eje $Oz$, y la directriz sigue la frontera del dominio $D$, es igual a la integral doble de la función $f(x, y)$ extendida por $D$:

$$V = \iint_D f(x, y)\, ds.$$

**Ejemplo 1.** Calcular el volumen de un cuerpo limitado por las superficies $x=0$, $y=0$, $x+y+z=1$, $z=0$ (fig. 293).

**Solución.**

$$V = \iint_D (1-x-y)\, dy\, dx,$$

donde $D$ (rayado en la figura 293) es el dominio en forma triangular del plano $Oxy$ limitado por las rectas $x=0$, $y=0$, $x+y=1$.

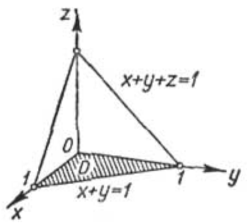


*Fig. 293*

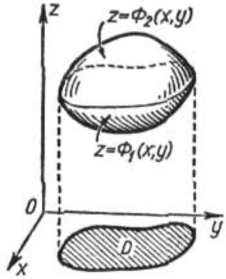


*Fig. 294*

Poniendo los límites en la integral doble, calculemos el volumen:

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[ (1-x)\, y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} (1-x)^2\, dx = \frac{1}{6}.$$

Así, $V = \frac{1}{6}$ unidades cúbicas.

**Observación 1.** Si el cuerpo, cuyo volumen se busca, está limitado por arriba y por debajo por las superficies $z = \Phi_2(x, y) \geqslant 0$ y $z = \Phi_1(x, y) \geqslant 0$, respectivamente, siendo $D$ la proyección de ambas superficies sobre el plano $Oxy$, entonces, el volumen $V$ de este cuerpo es igual a la diferencia entre los volúmenes de dos cuerpos «cilíndricos», el primero de los cuales tiene $D$ como base inferior y la superficie $z = \Phi_2(x, y)$, como base superior, y el segundo tiene $D$ también como base inferior y la superficie $z = \Phi_1(x, y)$, como base superior (fig. 294).

Por eso, el volumen $V$ es igual a la diferencia de dos integrales dobles:

$$V = \iint_D \Phi_2(x, y)\, ds - \iint_D \Phi_1(x, y)\, ds,$$

ó

$$V = \iint_D [\Phi_2(x, y) - \Phi_1(x, y)]\, ds. \tag{1}$$

Es fácil demostrar que la fórmula (1) es válida no sólo cuando $\Phi_1(x, y)$ y $\Phi_2(x, y)$ son funciones no negativas, sino también, cuando $\Phi_1(x, y)$ y $\Phi_2(x, y)$ son funciones continuas arbitrarias que satisfacen la correlación:

$$\Phi_2(x, y) \geqslant \Phi_1(x, y).$$

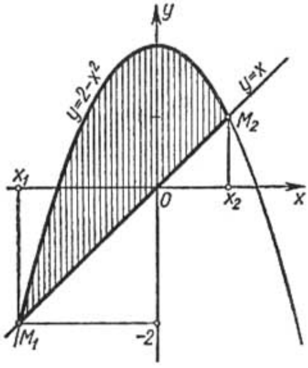


*Fig. 295*

**Observación 2.** Si la función $f(x, y)$ cambia de signo en el dominio $D$, dividamos a éste en dos dominios: 1) dominio $D_1$, donde $f(x, y) \geqslant 0$; 2) dominio $D_2$, donde $f(x, y) \leqslant 0$. Supongamos que $D_1$ y $D_2$ son tales que por estos dominios existen las integrales dobles. En este caso la integral por el dominio $D_1$ será positiva e igual al volumen del cuerpo dispuesto por encima del plano $Oxy$. La integral extendida por $D_2$ será negativa e igual por su valor absoluto al volumen del cuerpo dispuesto por debajo del plano $Oxy$. Por consiguiente, la integral extendida por el dominio $D$ expresará la diferencia de los volúmenes correspondientes.

**2. Cálculo del área de un dominio plano.** Si formamos una suma integral para la función $f(x, y) \equiv 1$ por el dominio $D$, obtenemos el área

$$S = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta s_i,$$

cualquiera que sea la división. Pasando al límite en el segundo miembro de la igualdad, obtenemos:

$$S = \iint_D dx\, dy.$$

Si el dominio $D$ es regular (véase, por ejemplo, fig. 280), el área $S$ se expresará mediante la integral interada de segundo orden

$$S = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right) dx.$$

Después de la integración de la integral entre paréntesis, tenemos:

$$S = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\ dx.$$

(véase § 1, cap. XII, tomo I).

**Ejemplo 2.** Calcular el área de un dominio limitado por las curvas

$$y = 2 - x^2, \quad y = x.$$

**Solución.** Determinemos los puntos de intersección de las curvas dadas (fig. 295). Las ordenadas de dos curvas son iguales en el punto de intersección, es decir,

$$x = 2 - x^2,$$

de donde: $x^2 + x - 2 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.
Hemos obtenido dos puntos de intersección:

$$M_1(-2,\ -2),\ M_2(1,\ 1).$$

Por tanto, el área buscada es:

$$S = \int_{-2}^{1} \left( \int_{x}^{2-x^2} dy \right) dx = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\, dx = \left[ 2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^{1} = \frac{27}{6}.$$

## § 5. INTEGRAL DOBLE EN COORDENADAS POLARES

Sea dado en el sistema de coordenadas polares $\theta$, $\rho$, un dominio $D$ tal, que todo rayo*) pasante por un punto interior de $D$ corta la frontera del dominio no más que en dos puntos. Supongamos también que el dominio $D$ está limitado por las curvas $\rho = \Phi_1(\theta)$, $\rho = \Phi_2(\theta)$ y los rayos $\theta = \alpha$, y $\theta = \beta$, siendo $\Phi_1(\theta) \leqslant \Phi_2(\theta)$ y $\alpha < \beta$ (fig. 296). Diremos que un dominio tal es *regular*.

Sea dada en el dominio $D$ una función continua de las coordenadas $\theta$ y $\rho$:

$$z = F(\theta,\ \rho).$$

Dividamos arbitrariamente $D$ en los dominios parciales $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$.

Formemos la suma integral:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} F(P_k)\, \Delta s_k, \tag{1}$$

donde $P_k$ es un punto en $\Delta s_k$.

Del teorema sobre la existencia de la integral doble se deduce que cuando el diámetro máximo de $\Delta s_k$ tiende a cero, la suma inte-

*) Llamemos *rayo* a toda semirrecta que parte del origen de coordenadas, es decir, del polo $P$.

gral (1) tiene un límite $V$. Según la definición, este límite $V$ es la integral doble de la función $F(\theta, \rho)$ extendida por el dominio $D$:

$$V = \iint_D F(\theta, \rho)\, ds. \tag{2}$$

Calculemos aquí esta integral doble.

Como el límite de la suma integral no depende del modo de dividir $D$ en los dominios parciales $\Delta s_k$, podemos dividirlo, para la comodidad, mediante rayos $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$, ..., ..., $\theta = \theta_n$ (donde $\theta_0 = \alpha$, $\theta_n = \beta$, $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n$) y las circunferencias concéntricas $\rho = \rho_0$, $\rho = \rho_1$, ..., $\rho = \rho_m$, [*donde* $\rho_0$ *es igual al valor mínimo* de la función $\Phi_1(\theta)$ y $\rho_m$, al valor máximo de $\Phi_2(\theta)$ en el intervalo $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$; $\rho_0 < \rho_1 < \ldots < \rho_m$].

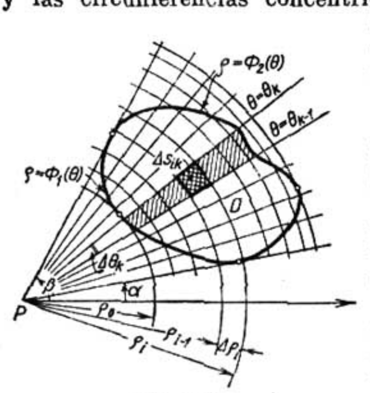


*Fig. 296*

Designemos por $\Delta s_{ik}$ el dominio parcial limitado por las líneas $\rho = \rho_{i-1}$, $\rho = \rho_i$, $\theta = \theta_{k-1}$, $\theta = \theta_k$.

*Sean aquí tres tipos de los dominios parciales* $\Delta s_{ik}$: 1) los que no se cortan por la frontera y se sitúan dentro del dominio $D$; 2) los que no se cortan por la frontera y se sitúan fuera del dominio $D$; 3) los que se cortan por la frontera del dominio $D$.

La suma de los términos, correspondientes a los dominios parciales cortados, tiene por límite cero, cuando $\Delta\theta_k \to 0$ y $\Delta\rho_i \to 0$, por lo que estos sumandos no se toman en cuenta. Los dominios parciales $\Delta s_{ik}$ que se encuentran fuera de $D$ y no entran en la suma integral no nos interesan. Por consiguiente, se puede escribir la suma integral en la forma:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_i F(P_{ik})\, \Delta s_{ik}\right],$$

donde $P_{ik}$ es un punto arbitrario de $\Delta s_{ik}$.

El signo de suma doble significa aquí, que al principio sumamos por el índice $i$, considerando $k$ constante (es decir, sumamos todos los términos que corresponden a los dominios parciales comprendidos entre dos rayos vecinos*). El signo de suma externo significa

*) Observemos que al sumar por el índice $i$, éste no tomará obligatoriamente todos los valores de 1 a $m$, puesto que no todos los dominios parciales situados entre los rayos $\theta = \theta_k$ y $\theta = \theta_{k+1}$ pertenecen a $D$.

que nosotros unimos todas las sumas obtenidas durante la primera adición (es decir, sumamos por el índice $k$).

Hallemos la expresión del área del dominio parcial $\Delta s_{ik}$, que no se corta por la frontera de $D$. El área es igual a la diferencia de las áreas de dos sectores:

$$\Delta s_{ik} = \frac{1}{2}(\rho_i + \Delta\rho_i)^2 \Delta\theta_k - \frac{1}{2}\rho_i^2 \Delta\theta_k = \left(\rho_i + \frac{\Delta\rho_i}{2}\right)\Delta\rho_i \Delta\theta_k$$

ó

$$\Delta s_{ik} = \rho_i^* \Delta\rho_i \Delta\theta_k, \quad \text{donde} \quad \rho_i < \rho_i^* < \rho_i + \Delta\rho_i.$$

Así, la suma integral tiene la forma*)

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_i F(\theta_k^*, \rho_i^*)\, \rho_i^* \Delta\rho_i \Delta\theta_k\right],$$

donde $P(\theta_k^*, \rho_i^*)$ es un punto de $\Delta s_{ik}$. Saquemos el factor $\Delta\theta_k$ fuera del signo de la suma interior (esto se permite, puesto que es un factor común para todos los términos de esta suma):

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_i F(\theta_k^*, \rho_i^*)\, \rho_i^* \Delta\rho_i\right] \Delta\theta_k.$$

Supongamos que $\Delta\rho_i \to 0$ y $\Delta\theta_k$ queda constante. En este caso, la expresión entre paréntesis tenderá a la integral

$$\int_{\Phi_1(\theta_k^*)}^{\Phi_2(\theta_k^*)} F(\theta_k^*, \rho)\, \rho\, d\rho.$$

Suponiendo ahora que $\Delta\theta_k \to 0$, en definitiva, obtenemos**):

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} F(\theta, \rho)\, \rho\, d\rho \right) d\theta. \tag{3}$$

---

*) Podemos analizar la suma integral en esta forma, puesto que el límite de la suma no depende de la posición del punto dentro del dominio parcial.

**) Nuestra deducción de la fórmula (3) no es rigurosa, al obtenerla, al principio, hemos téndido $\Delta\rho_i$ a cero, conservando $\Delta\theta_k$ invariable y sólo después hemos tendido $\Delta\theta_k$ a cero. Esto no corresponde completamente a la definición de integral doble la que consideramos como el límite de una suma integral, cuando los diámetros máximos de los dominios parciales tienden a cero (es decir, cuando $\Delta\theta_k$ y $\Delta\rho_i$ tienden simultáneamente a cero). Sin embargo, a pesar de la falta de rigurosidad en la demostración, el resultado es justo (es decir, la fórmula (3) es válida). La demostración rigurosa podría ser efectuada mediante el método utilizado para el examen de la integral doble en las coordenadas rectangulares. Notemos, que esta fórmula será deducida también en § 6, partiendo de otras consideraciones (como caso particular de la fórmula más general para transformar las coordenadas dentro de la integral doble).

La fórmula (3) sirve para calcular integrales dobles en las coordenadas polares.

Si la primera integración se realiza por $\theta$, y la segunda, por $\rho$, obtenemos la fórmula (fig. 297):

$$V=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\Big(\int_{\omega_1(\rho)}^{\omega_2(\rho)} F(\theta,\ \rho)\,d\theta\Big)\rho\,d\rho. \qquad (3')$$

Supongamos que es preciso calcular la integral doble de la función $f(x,\ y)$, dada en coordenadas rectangulares y extendida por el dominio $D$:

$$\iint_D f(x,\ y)\ dx\ dy.$$

Si $D$ es un dominio regular en coordenadas polares $\theta$, $\rho$, el cálculo de la integral dada se puede reducir a la determinación de una inte-

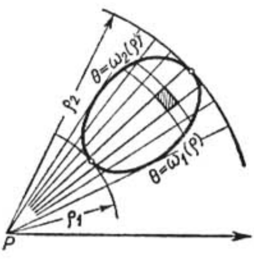


*Fig. 297*

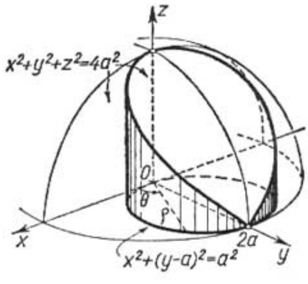


*Fig. 298*

gral iterada de segundo orden en coordenadas polares.

En efecto, puesto que

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\ \mathrm{sen}\ \theta,$$
$$f(x,\ y)=f[\rho\cos\theta,\ \rho\ \mathrm{sen}\ \theta]=F(\theta,\ \rho),$$

por tanto, tenemos

$$\iint_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\int_{\alpha}^{\beta}\Big(\int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} f[\rho\cos\theta,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\theta]\,\rho\,d\rho\Big)\,d\theta. \qquad (4)$$

**Ejemplo 1.** Calcular el volumen $V$ del cuerpo limitado por la superficie esférica

$$x^2+y^2+z^2=4a^2$$

y el cilindro

$$x^2+y^2-2ay=0.$$

**Solución.** Como el dominio de integración se puede tomar, en este ejemplo, la base de un cilindro $x^2+y^2-2ay=0$, es decir, un círculo de radio $a$ y centro en el punto $(0,a)$. La ecuación de este círculo se puede escribir en la forma: $x^2+(y-a)^2=a^2$ (fig. 298). Calculemos la cuarta parte del volumen

$V$, es decir, la parte dispuesta en el primer octante. Entonces, en calidad del dominio de integración debemos tomar un semicírculo, cuyas fronteras son determinadas por las ecuaciones:

$$x=\varphi_1(y)=0, \quad x=\varphi_2(y)=\sqrt{2ay-y^2},$$
$$y=0, \quad y=2a.$$

El integrando es

$$z=f(x, y)=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{4}V=\int_0^{2a}\left(\int_0^{\sqrt{2ay-y^2}}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dx\right)dy.$$

Transformemos la integral obtenida para las coordenadas polares $\theta$, $\rho$:

$$x=\rho\cos\theta, \quad y=\rho\operatorname{sen}\theta.$$

Determinemos los límites de integración. Para esto escribamos la ecuación de circunferencia dada en coordenadas polares: puesto que

$$x^2+y^2=\rho^2,$$
$$y=\rho\operatorname{sen}\theta,$$

tenemos:

$$\rho^2-2a\rho\operatorname{sen}\theta=0$$

ó

$$\rho=2a\operatorname{sen}\theta.$$

Por consiguiente, las fronteras del dominio en coordenadas polares (fig. 299) se determinan por las ecuaciones:

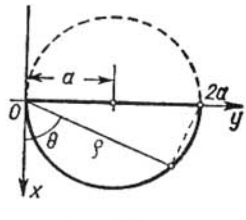


*Fig. 299*

$$\rho=\Phi_1(\theta)=0, \quad \rho=\Phi_2(\theta)=2a\operatorname{sen}\theta, \quad \alpha=0, \quad \beta=\frac{\pi}{2},$$

el integrando tiene la forma

$$F(\theta, \rho)=\sqrt{4a^2-\rho^2}.$$

Por consiguiente, obtenemos:

$$\frac{V}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2a\operatorname{sen}\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{(4a^2-\rho^2)^{3/2}}{3}\right]_0^{2a\operatorname{sen}\theta}d\theta=$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(4a^2-4a^2\operatorname{sen}^2\theta)^{3/2}-(4a^2)^{3/2}]\,d\theta=$$

$$=\frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\theta)\,d\theta=\frac{4}{9}a^3(3\pi-4).$$

**Ejemplo 2.** Calcular la integral de Poisson:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

**Solución:** Calculemos al principio la integral $I_R=\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$, donde el dominio de integración $D$ es un círculo

$$x^2+y^2=R^2$$

(fig. 300).

Pasando a las coordenadas polares $\theta$, $\rho$, tenemos:

$$I_R=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\right)d\theta=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-\rho^2}\Big|_0^R d\theta=\pi\left(1-e^{-R^2}\right).$$

Si hacemos que el radio $R$ tienda al infinito (es decir, si ampliamos indefinidamente el dominio de integración), obtenemos la así llamada inte-

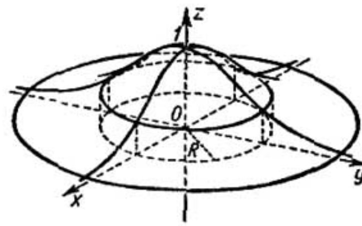


*Fig. 300*

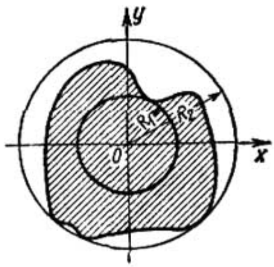


*Fig. 301*

gral múltiple impropia:

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\right)d\theta=\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\right)d\theta=\lim_{R\to\infty}\pi\left(1-e^{-R^2}\right)=\pi.$$

Demostremos, que la integral $\iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$ tiende al límite $\pi$, cuando el dominio $D'$ de forma arbitraria se amplía de modo tal, que todo punto del plano se encuentre, por fin, en $D'$ y permanezca en él (anotemos convencionalmente esta ampliación del dominio $D'$ por la correlación $D'\to\infty$).

Sean $R_1$ y $R_2$ las distancias mínima y máxima de la frontera del dominio $D'$ a partir del origen de coordenadas (fig. 301).

Como la función $e^{-x^2-y^2}>0$ por dondequiera, las desigualdades

$$I_{R_1}\leqslant\iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy\leqslant I_{R_2}$$

ó

$$\pi\left(1-e^{-R_1^2}\right)\leqslant\iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy\leqslant\pi\left(1-e^{-R_2^2}\right)$$

son válidas.

Como $D' \to \infty$, es evidente que $R_1 \to \infty$ y $R_2 \to \infty$ y los miembros extremos de la desigualdad tienden a un mismo límite $\pi$. Por consiguiente, a este límite tiende también el miembro medio, es decir,

$$\lim_{D' \to \infty} \iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \pi. \tag{5}$$

Supongamos, en particular, que el dominio $D'$ es un cuadrado de lado igual a $2a$ y centro en el origen de coordenadas; entonces:

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-x^2}e^{-y^2}\, dx\, dy =$$
$$= \int_{-a}^{a}\Big(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}e^{-y^2}\, dx\Big)\, dy.$$

Saquemos ahora el factor $e^{-y^2}$ fuera del signo de la integral interior (podemos hacerlo, puesto que $e^{-y^2}$ no depende de la variable de integración $x$). Entonces

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \int_{-a}^{a} e^{-y^2}\Big(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx\Big)\, dy.$$

Pongamos $\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx = B_a$. Este es un número constante (dependiente sólo de $a$); por esto

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \int_{-a}^{a} e^{-y^2}B_a\, dy = B_a \int_{-a}^{a} e^{-y^2}\, dy.$$

Pero, la última integral es también igual a $B_a$ $\Big($puesto que $\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx = \int_{-a}^{a} e^{-y^2}\, dy\Big)$; por consiguiente,

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = B_a B_a = B_a^2.$$

Pasemos en esta ecuación al límite, haciendo que $a$ tienda al infinito (en este caso $D'$ se amplía indefinidamente):

$$\lim_{D' \to \infty} \iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \lim_{a \to \infty} B_a^2 = \lim_{a \to \infty}\Big[\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx\Big]^2 = \Big[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\Big]^2.$$

Pero, según lo demostrado (véase (5)),

$$\lim_{D' \to \infty} \iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \pi.$$

Por tanto:

$$\Big[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\Big]^2 = \pi$$

ó

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Esta integral se encuentra a menudo en la teoría de probabilidades y en la estadística. Notemos, que es imposible calcular esta integral directamente (con ayuda de la integral indefinida), puesto que la primitiva de $e^{-x^2}$ no se expresa mediante las funciones elementales.

## § 6. SUSTITUCION DE VARIABLES EN UNA INTEGRAL DOBLE (CASO GENERAL)

Sea dado en el plano $Oxy$ un dominio $D$ limitado por la curva $L$. Supongamos también que las coordenadas $x$ e $y$ son las funciones de las nuevas variables $u$ y $v$:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \tag{1}$$

donde las funciones $\varphi(u, v)$ y $\psi(u, v)$ son uniformes, continuas

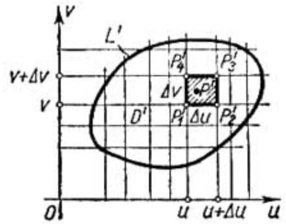


Fig. 302

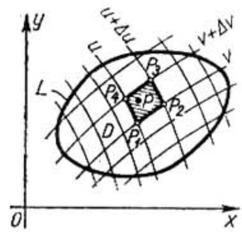


Fig. 303

y tienen las derivadas continuas en cierto dominio $D'$ que será definido abajo. En este caso, según la fórmula (1), a cada par de valores $u$ y $v$ corresponde un solo par de valores $x$ e $y$. Supongamos, ahora, que las funciones $\varphi$ y $\psi$ son tales que, si damos a $x$ e $y$ los valores determinados en el dominio $D$, entonces, según las fórmulas (1) determinemos los valores definidos de $u$ y $v$.

Analicemos el sistema de coordenadas rectangulares $Ouv$ (fig. 302). De lo expuesto arriba se deduce, que a todo punto $P(x, y)$ en el plano $Oxy$ (fig. 303) corresponde uniformemente un punto $P'(u, v)$ del plano $Ouv$ de coordenadas $u$, $v$ definidas por las fórmulas (1). Los números $u$ y $v$ se llaman coordenadas *curvilíneas* del punto $P$.

Si un punto describe en el plano $Oxy$ la curva cerrada $L$ que limita el dominio $D$, entonces en el plano $Ouv$ el punto correspondiente describirá una curva cerrada $L'$ que limita un cierto dominio $D'$; además, a cada punto de $D'$ le corresponde un punto de $D$.

Por consiguiente, las fórmulas (1) establecen una ***correspondencia biunívoca entre los puntos de los dominios $D$ y $D'$, o, como se dice también, representan biunívocamente a $D$ en $D'$.***

Analicemos en $D'$ una recta $u = \text{const}$. En general, por las fórmulas (1) hallemos que en el plano $Oxy$ le corresponde una cierta curva. Del modo igual a toda recta $v = \text{const}$ del plano $Ouv$ le corresponde una cierta curva en el plano $Oxy$.

Mediante rectas $u = \text{const}$ y $v = \text{const}$ dividamos el dominio $D'$ en los dominios parciales rectangulares (no tomamos en consideración los rectángulos que tocan la frontera de $D'$). Las curvas correspondientes dividen el dominio $D$ en ciertos cuadriláteros curvilíneos (fig. 303).

Analicemos en el plano $Ouv$ un rectángulo $\Delta s'$, limitado por las rectas $u = \text{const}$, $u + \Delta u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $v + \Delta v = \text{const}$ y el cuadrilátero curvilíneo $\Delta s$ que le corresponde en el plano $Oxy$. Las áreas de estos dominios parciales designémoslas por $\Delta s'$ y $\Delta s$, respectivamente. Es evidente, que:

$$\Delta s' = \Delta u \Delta v.$$

Hablando en general, las áreas $\Delta s$ y $\Delta s'$ son diferentes.

Sea dada una función continua

$$z = f(x, y)$$

en un dominio $D$.

A todo valor de la función $z = f(x, y)$ del dominio $D$, corresponde un mismo valor de la función $z = F(u, v)$ en $D'$, donde

$$F(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)].$$

Examinemos las sumas integrales de la función $z$ extendidas por el dominio $D$. Evidentemente, se verifica la igualdad siguiente:

$$\Sigma f(x, y)\Delta s = \Sigma F(u, v)\Delta s. \tag{2}$$

Calculemos $\Delta s$, es decir, el área del cuadrilátero curvilíneo $P_1P_2P_3P_4$ en el plano $Oxy$ (véase fig. 303).

Determinemos las coordenadas de sus vértices:

$$\left.\begin{array}{lll} P_1(x_1, y_1), & x_1 = \varphi(u, v), & y_1 = \psi(u, v), \\ P_2(x_2, y_2), & x_2 = \varphi(u + \Delta u, v), & y_2 = \psi(u + \Delta u, v), \\ P_3(x_3, y_3), & x_3 = \varphi(u + \Delta u, v + \Delta v), & y_3 = \psi(u + \Delta u, v + \Delta v), \\ P_4(x_4, y_4), & x_4 = \varphi(u, v + \Delta v), & y_4 = \psi(u, v + \Delta v). \end{array}\right\} \tag{3}$$

Al calcular el área del cuadrilátero curvilíneo $P_1P_2P_3P_4$, consideremos que las líneas $P_1P_2$, $P_2P_3$, $P_3P_4$, $P_4P_1$ son, por pares, rectas paralelas; además, sustituyamos los incrementos de las funciones por sus diferenciales correspondientes. De este modo, menospreciemos las infinitesimales de orden superior en comparación con las $\Delta u$, $\Delta v$. En este caso, las fórmulas (3) toman la forma:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \varphi(u, v), & y_1 &= \psi(u, v),\\
x_2 &= \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u, & y_2 &= \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u,\\
x_3 &= \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v, & y_3 &= \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v,\\
x_4 &= \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v, & y_4 &= \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v.
\end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

Hechas las suposiciones mencionadas, podemos considerar el cuadrilátero curvilíneo $P_1P_2P_3P_4$ como un paralelógramo. Su área $\Delta s$ es aproximadamente igual al área duplicada del triángulo $P_1P_2P_3$, y se determina mediante la aplicación de la fórmula correspondiente de la geometría analítica:

$$\Delta s \approx \left| (x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1) \right| =$$

$$= \left| \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v \right) \frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v \left( \frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta u\Delta v - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u\Delta v \right| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} \right| \Delta u\Delta v =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial \psi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{matrix} \right\| \Delta u\Delta v.$$

Las líneas verticales secundarias exteriores de la determinante significan que ésta se toma por su valor absoluto. Introduzcamos la designación:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial \psi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = I.$$

Por consiguiente,

$$\Delta s \approx |I|\,\Delta s'. \tag{4}$$

La determinante $I$ se llama *determinante funcional* o *jacobiano* (por el nombre del matemático alemán Jacobi) de las funciones $\varphi(u, v)$ y $\psi(u, v)$.

La igualdad (4) es sólo aproximada, puesto que, al calcular el área de $\Delta s$, hemos menospreciado las infinitesimales de orden superior. Sin embargo, cuanto menores son las dimensiones de los domi-

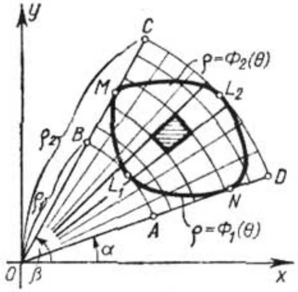


*Fig. 304*

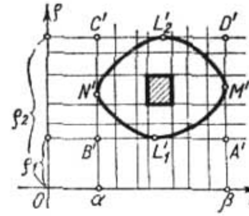


*Fig. 305*

nios parcialas $\Delta s$ y $\Delta s'$, tanto más precisa será la igualdad. Pasando al límite, la igualdad comienza a ser precisa, cuando los diámetros de los dominios parciales $\Delta s$ y $\Delta s'$ tienden a cero:

$$|I| = \lim_{\text{diám}\,\Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta s'}.$$

Apliquemos ahora la igualdad obtenida al cálculo de la integral doble. *En virtud de la igualdad* (2), *podemos escribir:*

$$\sum f(x, y)\,\Delta s \approx \sum F(u, v)\,|I|\,\Delta s'$$

(la suma integral del segundo miembro se extiende por el dominio $D'$). Pasando al límite, cuando diám $\Delta s' \to 0$, obtenemos la igualdad exacta:

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} F(u, v)\,|I|\,du\,dv. \qquad (5)$$

Esta es *la fórmula de transformación de las coordenadas dentro de la integral doble*. Ella permite reducir el cálculo de una integral doble extendida por el dominio $D$ al cálculo de una integral doble extendida por el dominio $D'$, lo que puede simplificar el problema.

La primera demostración rigurosa de esta fórmula pertenece al distinguido matemático ruso M. V. Ostrogradski.

**Observación.** El paso de las coordenadas rectangulares a las polares, examinado en el párrafo anterior, es un caso particular del cambio de variables en una integral doble. Aquí tenemos $u = \theta$, $v = \rho$:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta.$$

El arco $AB$ ($\rho = \rho_1$) del plano $Oxy$ (fig. 304) está representado por la recta $A'B'$ en el plano $O\theta\rho$ (fig. 305); el arco $DC$ ($\rho = \rho_2$) del plano $Oxy$, por la recta $D'C'$ en el plano $O\theta\rho$.

Las rectas $AD$ y $BC$ del plano $Oxy$ están representadas por las rectas $A'D'$ y $B'C'$ en el plano $O\theta\rho$. Las curvas $L_1$ y $L_2$ se representan por las curvas $L_1'$ y $L_2'$.

Calculemos el jacobiano de la transformación de las coordenadas cartesianas $x$ e $y$ en las polares $\theta$ y $\rho$:

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \rho} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ \rho\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} = -\rho \operatorname{sen}^2\theta - \rho\cos^2\theta = -\rho.$$

Por consiguiente, $|I| = \rho$, entonces

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big( \int\limits_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} F(\theta, \rho)\, \rho\, d\rho \Big) d\theta.$$

Esta es la fórmula obtenida en el párrafo anterior.

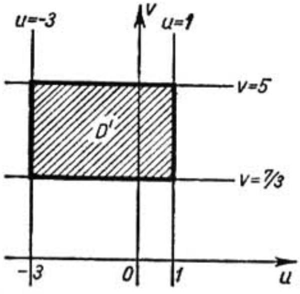


*Fig. 306*

**Ejemplo.** Calcular la integral doble

$$\iint\limits_D (y - x)\, dx\, dy$$

donde $D$ es el dominio del plano $Oxy$ limitado por las rectas

$$y = x + 1, \quad y = x - 3, \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{9},$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 5.$$

El cálculo directo de esta integral doble sería una tarea dificultosa, pero un cambio simple de variables permite reducirla a la integral por un rectángulo, cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas.

Pongamos

$$u = y - x, \quad v = y + \frac{1}{3}x. \tag{6}$$

Entonces, las rectas $y = x + 1$, $y = x - 3$ serán representadas respectivamente por las rectas $u = 1$, $u = -3$ en el plano $Ouv$; las rectas $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x + 5$, por las $v = \frac{7}{3}$, $v = 5$.

Por tanto, el dominio dado $D$ será representado por el dominio rectangular $D'$ expuesto en la fig. 306. Nos queda calcular el jacobiano de transformación. Con este fin expresemos $x$ e $y$ en función de $u$ y $v$. Resolviendo el sistema de ecuaciones (6), obtenemos:

$$x=-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}v;\quad y=\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v.$$

Por consiguiente,

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{3}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{vmatrix}=-\frac{9}{16}-\frac{3}{16}=-\frac{3}{4},$$

y el valor absoluto de jacobiano es $|I|=\frac{3}{4}$. Por eso,

$$\iint\limits_{D}(y-x)\,dx\,dy=\iint\limits_{D'}\left[\left(+\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v\right)-\left(-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}v\right)\right]\frac{3}{4}\,du\,dv=$$

$$=\iint\limits_{D_1}\frac{3}{4}u\,du\,dv=\int\limits_{\frac{7}{3}}^{5}\int\limits_{-3}^{1}\frac{3}{4}u\,du\,dv=-18.$$

## § 7. CALCULO DE LAS AREAS DE SUPERFICIES

Supongamos que es preciso calcular el área de una superficie limitada por una curva $\Gamma$ (fig. 307); sea dada la superficie por una

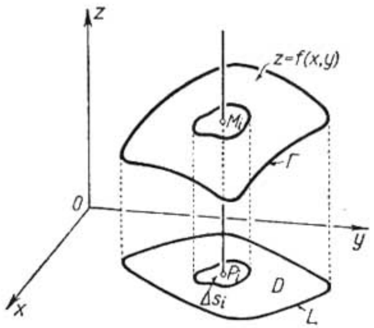


*Fig. 307*

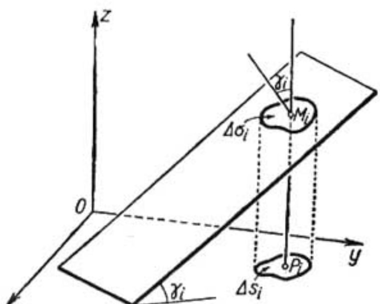


*Fig. 308*

ecuación $z=f(x, y)$, donde la función $f(x, y)$ es continua y tiene las derivadas parciales continuas.

Sea $L$ la proyección de la curva $\Gamma$ sobre el plano $Oxy$. Designemos por $D$ el dominio del plano $Oxy$, limitado por $L$.

Dividamos arbitrariamente el dominio $D$ en $n$ dominios parciales o elementales $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. Tomemos en cada dominio parcial $\Delta s_i$ un punto arbitrario $P_i$ $(\xi_i, \eta_i)$. Al punto $P_i$ corresponderá un punto en la superficie

$$M_i[\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)].$$

Por el punto $M_i$ tracemos un plano tangente a la superficie. Su ecuación será:

$$z - z_i = f'_x(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + f'_y(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i) \qquad (1)$$

(véase § 6, cap. IX, tomo I). En este plano elijamos un dominio parcial $\Delta\sigma_i$ tal que se proyecta sobre el plano $Oxy$ en forma del dominio elemental $\Delta s_i$. Consideremos la suma de todos los dominios elementales $\Delta\sigma_i$:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i.$$

El límite $\sigma$ de esta suma, cuando el máximo de los diámetros de $\Delta\sigma_i$ tiende a cero, llamemos *área de la superficie*, es decir, según la definición, pongamos:

$$\sigma = \lim_{\text{diám}\,\Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i. \qquad (2)$$

Calculemos ahora el área de la superficie. Designemos por $\gamma_i$ el ángulo formado por el plano tangente y el plano $Oxy$. Basándonos en la fórmula conocida de la geometría analítica, podemos escribir (fig. 308):

$$\Delta s_i = \Delta\sigma_i \cos\gamma_i$$

ó

$$\Delta\sigma_i = \frac{\Delta s_i}{\cos\gamma_i}. \qquad (3)$$

El ángulo $\gamma_i$ también está formado por el eje $Oz$ y la normal al plano (1). Por eso, en virtud de la ecuación (1) y de la fórmula correspondiente de la geometría analítica tenemos:

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(\xi_i, \eta_i) + f'^2_y(\xi_i, \eta_i)}}.$$

Por consiguiente,

$$\Delta\sigma_i = \sqrt{1 + f'^2_x(\xi_i, \eta_i) + f'^2_y(\xi_i, \eta_i)}\,\Delta s_i.$$

Poniendo esta expresión en la fórmula (2), obtenemos:

$$\sigma = \lim_{\text{diám}\,\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2_x(\xi_i, \eta_i) + f'^2_y(\xi_i, \eta_i)}\,\Delta s_i.$$

Como el límite de la suma integral del segundo miembro de esta última igualdad es, según la definición, la integral doble

$$\iint\limits_{D} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

en difinitiva, tenemos:

$$\sigma=\iint\limits_{D} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy. \qquad (4)$$

Esta es la fórmula que permite calcular el área de la superficie $z=f(x, y)$.

Si la ecuación de la superficie es dada en la forma

$x=\mu(y, z)$ o en la forma $y=\chi(x, z)$,

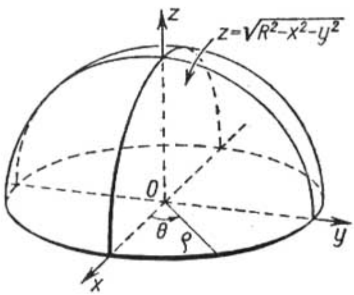


*Fig. 309*

entonces las fórmulas correspondientes, para calcular las superficies, tienen la forma:

$$\sigma=\iint\limits_{D'} \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dy\, dz, \qquad (3')$$

$$\sigma=\iint\limits_{D''} \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dz, \qquad (3'')$$

donde $D'$ y $D''$ son los dominios de los planos $Oyz$ y $Oxz$ en los cuales se proyecta la superficie dada.

**Ejemplo 1.** Calcular la superficie $\sigma$ de la esfera

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

**Solución.** Calculemos la superficie de la mitad superior de la esfera

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

(fig. 309). En este caso tenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Por tanto,

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

El dominio de integración está determinado por la condición

$$x^2+y^2\leqslant R^2.$$

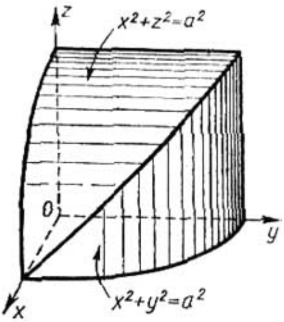


*Fig. 310*

Así, en virtud de la fórmula (4), tenemos:

$$\frac{1}{2}\sigma=\int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dy\right)dx.$$

Para calcular la integral doble obtenida, pasemos a las coordenadas polares. En estas coordenadas la ecuación de la frontera del dominio de integración es $\rho=R$. Por consiguiente,

$$\sigma=2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\,\rho\,d\rho\right)d\theta=$$

$$=2R\int_0^{2\pi}\left[-\sqrt{R^2-\rho^2}\right]_0^R d\theta=2R\int_0^{2\pi}R\,d\theta=4\pi R^2.$$

**Ejemplo 2.** Hallar el área de la parte de la superficie del cilindro

$$x^2+y^2=a^2$$

la cual se recorta por otro cilindro

$$x^2+z^2=a^2.$$

**Solución.** En la figura 310 está expuesta la parte octava de la superficie buscada. La ecuación de la superficie es $y=\sqrt{a^2-x^2}$; por eso,

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}};\quad \frac{\partial y}{\partial z}=0;$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

El dominio de integración es una cuarta parte del círculo, es decir, se determina por las condiciones siguientes:

$$x^2+z^2\leqslant a^2,\quad x\geqslant 0,\quad z\geqslant 0.$$

Por consiguiente,

$$\frac{1}{8}\sigma=\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dz\right)dx=a\int_0^a\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2}}\Bigg|_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a\int_0^a dx=a^2,$$

$$\sigma=8a^2.$$

## § 8. DENSIDAD DE DISTRIBUCION DE LA MATERIA Y LA INTEGRAL DOBLE

Supongamos que cierta materia está distribuida en el dominio $D$ de modo que cada unidad del área $D$ contiene una cantidad determinada de ésta. Se trata aquí de la distribución de la masa, aunque nuestros razonamientos siguen en vigor cuando hablemos de la distribución de carga eléctrica, cantidad de calor, etc.

Examinemos un dominio parcial arbitrario $\Delta s$ de $D$. Sea $\Delta m$ la masa de la materia distribuida en este dominio parcial. Entonces, la razón $\frac{\Delta m}{\Delta s}$ se llama densidad superficial media de la materia en $\Delta s$.

Suponemos ahora que el dominio parcial $\Delta s$ disminuye, reduciéndose, finalmente, al punto $P(x, y)$. Examinemos el límite $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta s}$. Si este límite existe, él dependerá, en caso general, de la posición del punto $P$, es decir, de sus coordenadas $x$ e $y$, representando en sí cierta función $f(P)$ del punto $P$. Este límite lo llamaremos *densidad superficial* de la materia en el punto $P$:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta s} = f(P) = f(x, y). \tag{1}$$

Así, la densidad superficial es una función $f(x, y)$ de las coordenadas del punto examinado en el dominio.

Supongamos, ahora, inversamente que en el dominio $D$ está dada la densidad superficial de cierta materia como una función continua $f(P) = f(x, y)$; es preciso determinar la cantidad total de la materia $M$ que se contiene en $D$. Dividamos el dominio en los dominios parciales $\Delta s_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, y en cada de ellos tomemos un punto $P_i$. Entonces, $f(P_i)$ es la densidad superficial en el punto $P_i$.

El producto $f(P_i)\,\Delta s_i$ nos da la cantidad de la materia contenida en $\Delta s_i$ (con la precisión de hasta las infinitesimales de orden superior), mientras que la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta s_i$$

expresa aproximadamente la cantidad total de la substancia distribuida en el dominio D. Pero ésta es la suma integral para la función $f(P)$ en $D$. El valor preciso lo obtenemos pasando al límite, cuando $\Delta s_i \to 0$.

Por consiguiente*),

$$M = \lim_{\Delta s_i = 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta s_i = \iint_D f(P)\,ds = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy, \qquad (2)$$

es decir, la cantidad total de materia en el dominio $D$ es igual a la integral doble por $D$ de la densidad $f(P) = f(x, y)$ de esta substancia.

**Ejemplo.** Determinar la masa de una placa redonda de radio $R$, si la densidad superficial $f(x, y)$ del material en cada punto $P(x, y)$ es proporcional a la distancia del punto $(x, y)$ al centro de la placa, es decir, si

$$f(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

**Solución.** Según la fórmula (2), tenemos

$$M = \iint_D k\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

donde el dominio de integración $D$ es el círculo $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

Pasando a las coordenadas polares, obtenemos

$$M = k\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \rho\rho\,d\rho\right)d\theta = k\,2\pi\frac{R^3}{3}\Bigg|_0^R = \frac{2}{3}k\pi R^3.$$

## § 9. MOMENTO DE INERCIA DEL AREA DE UNA FIGURA PLANA

Se llama momento de inercia $I$ de un punto material $M$ de masa $m$ respecto a un cierto punto $O$ al producto de la masa $m$ por el cuadrado de la distancia $r$ entre los puntos $M$ y $O$:

$$I = mr^2.$$

El momento de inercia de un sistema de puntos materiales $m_1, m_2, \ldots, m_n$ respecto al punto $O$ es la suma de los momentos de inercia de los diversos puntos del sistema:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

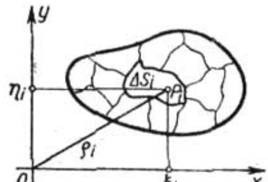


*Fig. 311*

Determinemos, ahora, el momento de inercia de una figura material plana $D$.

Supongamos que la figura $D$ está situada en el plano de coordenadas $Oxy$. Determinemos el momento de inercia de esta figura respecto al origen de coordenadas, suponiendo que la densidad superficial es por dondequiera igual a la unidad.

Dividamos $D$ en los dominios parciales $\Delta S_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (fig. 311). En cada dominio parcial tomemos un punto $P_i$ de coor-

*) La expresión $\Delta s_i \to 0$ significa aquí que el diámetro de $\Delta s_i$ tiende a cero.

denadas $\xi_i$, $\eta_i$. El producto de la masa del dominio parcial $\Delta S_i$ por el cuadrado de la distancia $r_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2$, se llama momento elemental de inercia $\Delta I_i$ de $\Delta S_i$:

$$\Delta I = (\xi_i^2 + \eta_i^2)\,\Delta S_i.$$

Formemos la suma de estos momentos:

$$\sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \eta_i^2)\,\Delta S_i,$$

la que es, al mismo tiempo, una suma integral para la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ por el dominio $D$.

Determinemos el momento de inercia de la figura $D$ como el límite de esta suma integral, cuando el diámetro de cada $\Delta S_i$ tiende a cero:

$$I_0 = \lim_{\text{diám}\,\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \eta_i^2)\,\Delta S_i.$$

Pero, el límite de esta suma es la integral doble $\iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$. Por consiguiente, el momento de inercia de la figura $D$ respecto al origen de coordenadas es igual a:

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy, \tag{1}$$

donde $D$ es el dominio coincidente con la figura plana dada.

Las integrales

$$I_{xx} = \iint\limits_D y^2\,dx\,dy, \tag{2}$$

$$I_{yy} = \iint\limits_D x^2\,dx\,dy \tag{3}$$

se llaman, respectivamente, los momentos de inercia de la figura $D$ respecto a los ejes $Ox$ y $Oy$.

**Ejemplo 1.** Calcular el momento de inercia del área de círculo $D$ de radio $R$, respecto al centro $O$.

**Solución:** Según la fórmula (1), tenemos:

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

Para calcular esta integral, pasaremos a las coordenadas polares $\theta$, $\rho$.

La ecuación de la circunferencia en coordenadas polares es $\rho = R$. Por eso,

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{R} \rho^2 \rho\,d\rho \right) d\theta = \frac{\pi R^4}{2}.$$

**Observación.** Si la densidad superficial $\gamma$ no es igual a 1 y es una cierta función de $x$ e $y$, es decir, $\gamma = \gamma(x, y)$, entonces la masa del dominio parcial $\Delta S_i$ será igual a $\gamma(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i$ (con precisión de hasta las infinitesimales de orden superior) y por esto, el momento de inercia de una figura plana respecto al origen de coordenadas, será:

$$I_0 = \iint_D \gamma(x, y)(x^2 + y^2)\,dx\,dy. \qquad (1')$$

**Ejemplo 2.** Calcular el momento de inercia de la figura material plana $D$ limitada por las líneas $y^2 = 1 - x$; $x = 0$, $y = 0$, respecto al eje $Oy$, si la densidad superficial en cada punto es igual a $y$ (fig. 312).

**Solución.**

$$I_{yy} = \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x}} yx^2\,dy \right) dx = \int_0^1 \frac{x^2y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-x}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x)\,dx = \frac{1}{24}.$$

**Elipse de inercia.** Determinemos el momento de inercia de una figura plana $D$ respecto a cierto eje $OL$ que pasa por un punto $O$ tomado por el origen de coordenadas.

Sea $\varphi$ el ángulo formado por la recta $OL$ con la dirección positiva del eje $Ox$ (fig. 313).

La ecuación normal de la recta $OL$ es

$$x \operatorname{sen} \varphi - y \cos \varphi = 0.$$

La distancia $r$ de un punto cualquiera $M(x, y)$ a esta recta es igual a $r = |x \operatorname{sen} \varphi - y \cos \varphi|$. El momento de inercia $I$ del

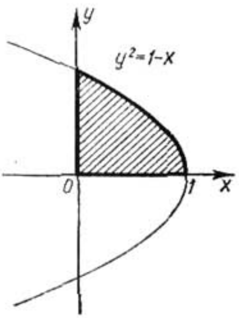


Fig. 312

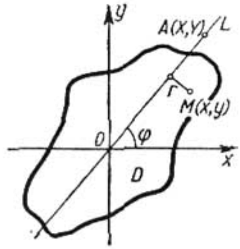


Fig. 313

área $D$ en relación a la recta $OL$, según la definición, se expresa mediante la integral

$$I = \iint_D r^2\,dx\,dy = \iint_D (x \operatorname{sen} \varphi - y \cos \varphi)^2\,dx\,dy =$$

$$= \operatorname{sen}^2 \varphi \iint_D x^2\,dx\,dy - 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \iint_D xy\,dx\,dy + \cos^2 \varphi \iint_D y^2\,dx\,dy.$$

Por tanto,

$$I = I_{yy} \operatorname{sen}^2 \varphi - 2I_{xy} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + I_{xx} \cos^2 \varphi, \tag{4}$$

ponde $I_{yy} = \iint\limits_D x^2\,dx\,dy$ es el momento de inercia de la figura respecto al eje $y$; $I_{xx} = \iint\limits_D y^2\,dx\,dy$ es el momento de inercia de la misma respecto al eje $x$, y, además:

$$I_{xy} = \iint\limits_D xy\,dx\,dy.$$

Dividiendo todos los términos de la última ecuación (4) por $I$ obtenemos:

$$1 = I_{xx}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{I}}\right)^2 - 2I_{xy}\left(\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{I}}\right)\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{I}}\right) + I_{yy}\left(\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{I}}\right)^2. \tag{5}$$

Tomemos en la recta $OL$ un punto $A\ (X,\ Y)$ tal, que sea

$$OA = \frac{1}{\sqrt{I}}.$$

Distintos valores de $I$ y diferentes puntos $A$ corresponden a varias direcciones del eje $OL$, es decir, a diferentes valores del ángulo $\varphi$. Hallemos el lugar geométrico de los puntos $A$. Es evidente, que

$$X = \frac{1}{\sqrt{I}} \cos\varphi, \qquad Y = \frac{1}{\sqrt{I}} \operatorname{sen}\varphi.$$

En virtud de la igualdad (5), las magnitudes $X$ e $Y$ están entrelazadas por la correlación

$$1 = I_{xx}X^2 - 2I_{xy}XY + I_{yy}Y^2. \tag{6}$$

De este modo, el lugar geométrico de los puntos $A\ (X,\ Y)$ es la curva de segundo grado (6). Demostremos que esta curva es una elipse. Tenemos la siguiente desigualdad, llamada de Buniakovski*) (mate-

---

*) Para demostrar la desigualdad de Buniakovski examinemos la siguiente desigualdad evidente:

$$\iint\limits_D [f(x,\ y) - \lambda\varphi(x,\ y)]^2\,dx\,dy \geqslant 0,$$

donde $\lambda$ es una constante. El signo de igualdad puede tener lugar sólo en el caso, en que $f(x,\ y) - \lambda\varphi(x,\ y) \equiv 0$, es decir, cuando $f(x,\ y) = \lambda\varphi(x,\ y)$. Si suponemos que $\dfrac{f(x,\ y)}{\varphi(x,\ y)} \neq \text{const} = \lambda$, siempre tendrá lugar el signo de desigualdad. Así, abriendo los paréntesis bajo el signo de integral, obtenemos:

$$\iint\limits_D f^2(x,\ y)\,dx\,dy - 2\lambda\iint\limits_D f(x,\ y)\,\varphi(x,\ y)\,dx\,dy + \lambda^2\iint\limits_D \varphi^2(x,\ y)\,dx\,dy > 0.$$

Analicemos la expresión del primer miembro como una función de $\lambda$. Es un polinomio de segundo grado que nunca se anula. Por tanto, sus raíces son complemático ruso):

$$(\iint_D xy\,dx\,dy)^2 < (\iint_D x^2\,dx\,dy) \iint_D y^2\,dx\,dy)$$

ó

$$I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2 > 0.$$

Así, el discriminante de la curva (6) es positivo y, por consiguiente, ésta es una elipse (fig. 314). Esta elipse se llama **elipse de inercia.** La noción de elipse de inercia tiene gran importancia en mecánica.

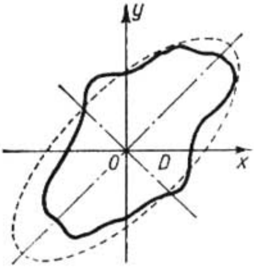

Fig. 314

Notemos que las longitudes de los ejes de la elipse de inercia y su posición en el plano dependen de la forma de la figura plana dada. Como la distancia entre el origen de coordenadas y un punto arbitrario $A$ de la elipse es igual a $\frac{1}{\sqrt{I}}$, donde $I$ es el momento de inercia de la figura respecto al eje $OA$, por tanto, al construir la elipse, es fácil calcular el momento de inercia de la figura $D$ respecto a una recta cualquiera, que pasa por el origen de coordenadas. En particular, es fácil ver que el momento de inercia de la figura es máximo respecto al eje pequeño de esta elipse, y mínimo, respecto a su eje grande.

## § 10. COORDENADAS DEL CENTRO DE GRAVEDAD DEL AREA DE UNA FIGURA PLANA

Hemos indicado en el § 8 del capítulo XII (tomo I), que las coordenadas del centro de gravedad de un sistema de puntos materiales $P_1, P_2, \ldots, P_n$ (de masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$, respectivamente)

jos, lo que puede tener lugar sólo en el caso cuando el discriminante, formado de los coeficientes del polinomio cuadrático sea negativo, es decir:

$$(\iint_D f\varphi\,dy)^2 - \iint_D f^2\,dx\,dy \iint_D \varphi^2\,dx\,dy < 0$$

ó

$$(\iint_D f\varphi\,dx\,dy)^2 < \iint_D f^2\,dx\,dy \iint_D \varphi^2\,dx\,dy.$$

Esta es la desigualdad de Buniakovski. En nuestro caso $f(x, y) = x$, $\varphi(x, y) = y$, $\frac{x}{y} \neq \text{const}$.

La desigualdad de Buniakovski siempre se usa en diferentes ramas de las matemáticas. En varias obras esta desigualdad erróneamente se llama desigualdad de Schwarz. Buniakovski la publicó (junto con otras desigualdades importantes) en el año 1859, mientras que Schwarz lo hizo 16 años después.

se determinan por las fórmulas:

$$x_c = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}; \qquad y_c = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}. \tag{1}$$

Determinemos, ahora, las coordenadas del centro de gravedad de una figura plana $D$. Dividámosla en los dominios parciales $\Delta S_i$ muy pequeños. Si suponemos que la densidad superficial es igual a 1, la masa del dominio parcial será igual a su área. Si convencionalmente suponemos que toda la masa de $\Delta S_i$ está concentrada en alguno de sus puntos $P_i\ (\xi_i,\ \eta_i)$, podemos considerar la figura $D$ como un **sistema de puntos materiales.** En este caso, en virtud de las fórmulas (1), las coordenadas del centro de gravedad de esta figura serán determinadas, **aproximadamente**, por las igualdades:

$$x_c \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} \xi_i\, \Delta S_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} \Delta S_i}; \qquad y_c \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} \eta_i\, \Delta S_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} \Delta S_i}.$$

Pasando al límite, cuando $\Delta S_i \to 0$, las sumas integrales en los numeradores y los denominadores de las fracciones se transforman en las integrales dobles, con lo que obtenemos las fórmulas exactas para calcular las coordenadas del centro de gravedad de una figura plana:

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy}; \qquad y_c = \frac{\iint\limits_D y\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy}. \tag{2}$$

Estas fórmulas deducidas para una figura plana de densidad superficial igual a 1 son válidas, también, para cada figura, que tiene otra densidad $\gamma$ cualquiera, constante en todos los puntos.

Si la densidad superficial es variable:

$$\gamma = \gamma\,(x,\ y),$$

las fórmulas correspondientes toman, entonces, la forma:

$$x_c = \frac{\iint\limits_D \gamma\,(x,\ y)\,x\,dx\,dy}{\iint\limits_D \gamma\,(x,\ y)\,dx\,dy}; \qquad y_c = \frac{\iint\limits_D \gamma\,(x,\ y)\,y\,dx\,dy}{\iint\limits_D \gamma\,(x,\ y)\,dx\,dy}.$$

Las expresiones

$$M_y = \iint\limits_D \gamma\,(x,\ y)\,x\,dx\,dy \quad \text{y} \quad M_x = \iint\limits_D \gamma\,(x,\ y)\,y\,dx\,dy$$

se llaman *momentos estáticos* de la figura plana $D$ respecto a los ejes $Oy$ y $Ox$.

La integral $\iint \gamma(x, y)\,dx\,dy$ expresa la magnitud de la **masa** de la figura examinada.

**Ejemplo.** Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la cuarta parte de la elipse (fig. 315)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

suponiendo, que la densidad superficial en todos los puntos es igual a 1.

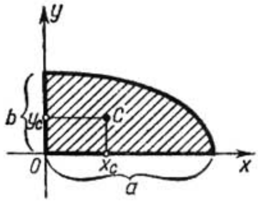

*Fig. 315*

**Solución.** Según las fórmulas (2), obtenemos:

$$x_c=\frac{\int\limits_0^a\left(\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} x\,dy\right)dx}{\int\limits_0^a\left(\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy\right)dx}=\frac{\frac{b}{a}\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,x\,dx}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{-\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{3}\left(a^2-x^2\right)^{3/2}\Big|_0^a}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{4a}{3\pi},$$

$$y_c=\frac{\int\limits_0^a\left(\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy\right)dx}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{4b}{3\pi}.$$

## § 11. INTEGRAL TRIPLE

Sea dado en el espacio cierto dominio $V$, limitado por una superficie cerrada $S$. Supongamos que en el dominio $V$ y en su frontera está definida una función continua $f(x, y, z)$, donde $x, y, z$ son las coordenadas rectangulares de un punto del dominio. Para precisar las ideas en el caso, en que $f(x, y, z) \geqslant 0$, podemos suponer que ésta representa la densidad de distribución de cierta materia en el dominio $V$.

Dividamos el dominio $V$ arbitrariamente en dominios parciales $\Delta v_i$, designando con el símbolo $\Delta v_i$ no sólo el dominio elemental, sino también su volumen. En cada $\Delta v_i$ tomemos un punto arbitrario $P_i$ y designemos por $f(P_i)$ el valor de la función $f$ en este punto. Formemos la suma integral

$$\sum f(P_i)\,\Delta v_i \tag{1}$$

y aumentemos indefinidamente el número de los dominios parciales de modo que el diámetro máximo de $\Delta v_i$ tienda a cero*). Si la función $f(x, y, z)$ es continua, existe el límite de las sumas integrales de la forma (1), donde al límite se le da el mismo significado, que hemos dado durante la determinación de la integral doble**). Este límite, que no depende del modo de dividir el dominio $V$, ni de la manera de elegir los puntos $P_i$, se designa por el símbolo $\iiint\limits_V f(P)\,dv$ y se llama *integral triple*. Así, según la definición, tenemos:

$$\lim_{\text{diám}\,\Delta v_i \to 0} \sum f(P_i)\,\Delta v_i = \iiint\limits_V f(P)\,dv$$

ó

$$\iiint\limits_V f(P)\,\Delta v = \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz. \tag{2}$$

Si consideramos $f(x, y, z)$ como la densidad volumétrica de la distribución de una materia en un dominio $V$, la integral (2) nos dará la masa de toda la substancia contenida en el volumen $V$.

## § 12. CALCULO DE LA INTEGRAL TRIPLE

Supóngase que un dominio espacial (tridimensional) $V$, limitado por una superficie cerrada $S$, tiene las siguientes propiedades:

1) toda recta paralela al eje $Oz$, trazada por un punto interior del dominio $V$ (es decir, por un punto que no pertenece a la frontera $S$) corta la superficie $S$ en dos puntos;

2) todo dominio $V$ se proyecta sobre el plano $Oxy$ en forma de un dominio regular (de dos dimensiones) $D$;

3) toda parte del dominio $V$, separada por un plano paralelo a un plano de coordenadas cualquiera ($Oxy$, $Oxz$, $Oyz$), también posee las propiedades 1) y 2).

Un dominio $V$ que tiene las propiedades indicadas se llama dominio *regular* tridimensional.

---

*) Se llama diámetro del dominio parcial $\Delta v_i$ la distancia máxima entre los puntos de su frontera.

**) Admitamos sin demostración este teorema sobre la existencia del límite de las sumas integrales (es decir, la existencia de la integral triple) que tiene lugar para toda función continua en un dominio cerrado $V$, incluyendo la frontera.

Estos dominios tridimensionales regulares son, por ejemplo, un elipsoide, un paralelepípedo rectangular, un tetráedro, etc. En la figura 316 se da un ejemplo del dominio tridimensional irregular. En este párrafo examinemos sólo los dominios regulares.

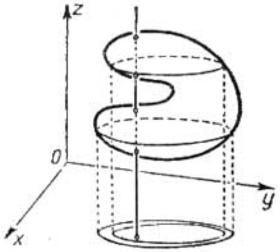


*Fig. 316*

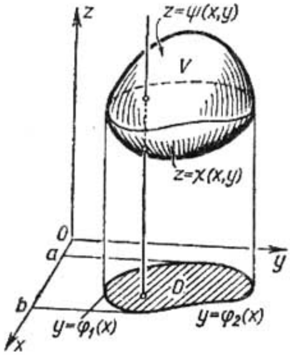


*Fig. 317*

Sea $z = \chi(x, y)$ la ecuación de una superficie que limita el dominio $V$ por debajo, y $z = \psi(x, y)$, la de una superficie que limita $V$ por arriba (fig. 317).

Introduzcamos la noción de una *integral iterada* de tercer orden $I_V$, extendida por el dominio $V$, de una función de tres variables $f(x, y, z)$ definida y continua en $V$. Supongamos que la proyección del dominio $V$ sobre el plano $Oxy$ es el dominio $D$ que está limitado por las líneas:

$$y = \varphi_1(x), \quad y = \varphi_2(x), \quad x = a, \quad x = b.$$

En este caso, la integral iterada de tercer orden de la función $f(x, y, z)$ por el dominio $V$ se determina así:

$$I_V = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[ \int_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dy \right\} dx. \qquad (1)$$

Notemos que, como el resultado de la integración respecto a $z$, y la sustitución de los límites en las llaves, obtenemos una función de $x$ e $y$. Luego, se puede calcular una integral doble de esta función extendida por el dominio $D$, como lo hemos hecho anteriormente.

Demos un ejemplo del cálculo de una integral iterada de tercer orden.

**Ejemplo 1.** Calcular la integral iterada de tercer orden de la función $f(x, y, z) = xyz$, extendida por el dominio $V$ limitado por los planos

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 1.$$

**Solución.** Este dominio es regular: puesto que está limitado por encima y por debajo por los planos $z = 0$, $z = 1 - x - y$, respectivamente y, además, su proyección sobre el plano $Oxy$ representa un dominio regular plano $D$ que es un triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $y = 1 - x$ (fig. 318). Por eso, la integral iterada de tercer orden se calcula de la manera siguiente:

$$I_V = \iint_D \left[ \int_0^{1-x-y} xyz\,dz \right] d\sigma.$$

Poniendo los límites en la integral iterada de segundo orden extendida por el dominio $D$, obtenemos:

$$I_V = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[ \int_0^{1-x-y} xyz\,dz \right] dy \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \frac{xyz^2}{2} \Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right\} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} xy(1-x-y)^2\,dy \right\} dx = \int_0^1 \frac{x}{24}(1-x)^4\,dx = \frac{1}{720}.$$

Analicemos, ahora, algunas propiedades de la integral iterada de tercer orden.

**Propiedad 1.** *Si el dominio $V$ está dividido en dos dominios $V_1$ y $V_2$ mediante un plano paralelo a cualquiera de los planos de coordenadas, la integral iterada de tercer orden extendida por el dominio $V$ es igual a la suma de integrales iteradas de tercer orden extendidas por los dominios $V_1$ y $V_2$.*

No hace falta repetir aquí la demostración de esta propiedad, pues, es idéntica en todos los puntos a la aplicada en el caso de la integral iterada de segundo orden.

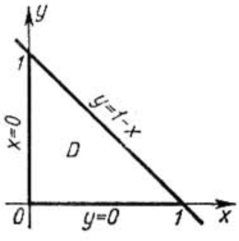


*Fig. 318*

**Corolario.** Cualquiera que sea el modo de dividir el dominio $V$ en un número finito de dominios $V_1, \ldots, V_n$ mediante planos paralelos a los planos de coordenadas, se verifica la igualdad:

$$I_V = I_{V_1} + I_{V_2} + \ldots + I_{V_n}.$$

**Propiedad 2 (Teorema sobre la evaluación de una integral iterada de tercer orden).** *Si $m$ y $M$ son valores mínimo y máximo, respectivamente, de la función $f(x, y, z)$ en el dominio $V$, se verifica la desigualdad:*

$$mV \leqslant I_V \leqslant MV,$$

*donde $V$ es el volumen del dominio dado y $I_V$, la integral iterada de tercer orden de la función $f(x, y, z)$, extendida por $V$.*

**Demostración.** Evaluemos al principio la integral interior que forma parte de la integral iterada de tercer orden $I_V =$

$$= \iint_D \left[ \int_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} f(x,\,y,\,z)\,dz \right] d\sigma:$$

$$\int_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} f(x,\,y,\,z)\,dz \leqslant \int_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} M\,dz = M \int_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} dz =$$

$$= Mz \Big|_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} = M\left[\psi(x,\,y) - \chi(x,\,y)\right].$$

Así, la integral interior no supera a la expresión $M\,[\psi(x,\,y) - \chi(x,\,y)]$. Por consiguiente, en virtud del teorema del § 1 sobre las integrales dobles, designando por $D$ la proyección del dominio $V$ sobre el plano $Oxy$, obtenemos:

$$I_V = \iint_D \left[ \int_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} f(x,\,y,\,z)\,dz \right] d\sigma \leqslant \iint_D M\left[\psi(x,\,y) - \chi(x,\,y)\right] d\sigma =$$

$$= M \iint_D \left[\psi(x,\,y) - \chi(x,\,y)\right] d\sigma.$$

Pero, la última integral iterada de segundo orden es igual a la integral doble de la función $\psi(x,\,y) - \chi(x,\,y)$ y, por tanto, al volumen del dominio comprendido entre las superficies $z = \chi(x,\,y)$ y $z = \psi(x,\,y)$, es decir, al volumen del dominio $V$. Por consiguiente,

$$I_V \leqslant MV.$$

De modo análogo demostremos que $I_V \geqslant mV$. La propiedad 2 queda así demostrada.

**Propiedad 3 (Teorema de la media).** *La integral iterada de tercer orden $I_V$ de una función continua $f(x,\,y,\,z)$ extendida por el dominio $V$ es igual al producto de su volumen $V$ por el valor de la función en un cierto punto $P$ del dominio $V$, es decir,*

$$I_V = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[ \int_{\chi(x,\,y)}^{\psi(x,\,y)} f(x,\,y,\,z)\,dz \right] dy \right\} dx = f(P)\,V. \qquad (2)$$

La demostración de esta propiedad es análoga a la que hemos dado durante la demostración de semejante propiedad para la integral doble (véase § 2, propiedad 3, fórmula (4)). Ahora podremos demostrar el teorema sobre el cálculo de la integral triple.

**Teorema.** *La integral triple de una función $f(x,\,y,\,z)$,* extendida por un dominio regular $V$ es igual a la integral iterada de tercer orden extendida por el mismo dominio, es decir,

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv = \int\limits_a^b \{ \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} [ \int\limits_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z)\,dz\,]dy\}\,dx.$$

**Demostración.** Dividamos el dominio $V$ mediante planos paralelos a los planos de coordenadas en $n$ dominios regulares:

$$\Delta v_1 + \Delta v_2 + \ldots + \Delta v_n.$$

Designemos con $I_V$, como hemos hecho anteriormente, la integral iterada de tercer orden de la función $f(x, y, z)$ extendida por el dominio $V$ y con $I_{\Delta V_i}$, la integral iterada de tercer orden extendida por $\Delta v_i$. En virtud del corolario de la propiedad 1 se puede escribir la igualdad:

$$I_V = I_{\Delta V_1} + I_{\Delta V_2} + \ldots + I_{\Delta V_n}. \tag{3}$$

Transformemos cada sumando del segundo miembro de esta ecuación según la fórmula (2):

$$I_V = f(P_1)\,\Delta v_1 + f(P_2)\,\Delta v_2 + \ldots + f(P_n)\,\Delta v_n, \tag{4}$$

donde $P_i$ es cierto punto de $\Delta v_i$.

En el segundo miembro de la igualdad (4) tenemos una suma integral. Según la hipótesis, la función $f(x, y, z)$ es continua en el dominio $V$, por lo cual, cuando el diámetro máximo de $\Delta v_i$ tiende a cero; el límite de esta suma existe y es igual a la integral triple de la función $f(x, y, z)$ extendida por el dominio $V$. Así, pasando al límite en la igualdad (4), para diám $\Delta v_i \to 0$, obtenemos:

$$I_V = \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv,$$

o, en definitiva, cambiando de lugar las expresiones del primer y segundo miembros, tenemos:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv = \int\limits_a^b \{ \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} [ \int\limits_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z)\,dz\,]dy\}\,dx.$$

El teorema queda demostrado.

Aquí, $z = \chi(x, y)$ y $z = \psi(x, y)$ son ecuaciones de las superficies que limitan el dominio regular $V$ por debajo y por arriba. Las líneas $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$, limitan el dominio $D$ que es la proyección de $V$ sobre el plano $Oxy$.

**Observación.** Igual que en el caso de la integral iterada de segundo orden, si la forma del dominio $V$ lo permite, se puede formar la integral iterada de tercer orden con otra sucesión de la integración respecto a las variables y con otros límites.

**Cálculo del volumen de un cuerpo mediante la integral iterada de tercer orden.**

Si el integrando $f(x, y, z) = 1$, la integral iterada de tercer orden extendida por el dominio $V$ expresa el **volumen V de este**

**dominio:**

$$V = \iiint\limits_{V} dx\, dy\, dz. \tag{5}$$

**Ejemplo 2.** Calcular el volumen de un elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

**Solución.** El elipsoide (fig. 319), está limitado por debajo, con la superficie $z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ y por encima, con la $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$.

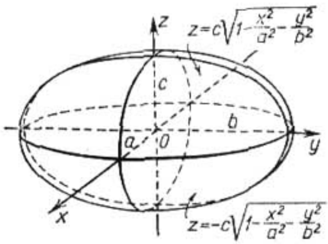


*Fig. 319*

La proyección de este elipsoide sobre el plano $Oxy$ (dominio $D$) es la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Por consiguiente, reduciendo a la integral iterada de tercer orden, obtenemos:

$$V \int_{-a}^{a} \left[ \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \left( \int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz \right) dy \right] dx =$$

$$= 2c \int_{-a}^{a} \left[ \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dy \right] dx.$$

Durante el cálculo de la integral interior consideremos $x$ constante. Hagamos sustitución:

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \operatorname{sen} t, \quad dy = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cos t\, dt.$$

La variable $y$ varía desde $-b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ hasta $b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, por lo que $t$

varía desde $-\frac{\pi}{2}$ hasta $\frac{\pi}{2}$. Poniendo los nuevos límites en la integral, obtenemos:

$$V=2c\int_{-a}^{a}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\operatorname{sen}^2 t}\; b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cos t\, dt\right]dx=$$

$$=2cb\int_{-a}^{a}\left[\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\, dt\right]dx=\frac{cb\pi}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{4\pi abc}{3}.$$

Así, $V=\frac{4}{3}\pi abc$. Si $a=b=c$, obtenemos el volumen de una esfera:

$$V=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

## § 13. CAMBIO DE VARIABLES EN UNA INTEGRAL TRIPLE

**1. Integral triple en coordenadas cilíndricas.** En las así llamadas coordenadas cilíndricas la posición del punto $P$ en el espacio se determina mediante tres números $\theta$, $\rho$, $z$, donde $\theta$ *y* $\rho$ son las coordenadas polares de la proyección del punto $P$ sobre el plano $Oxy$,

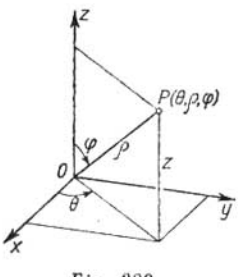


*Fig. 320*

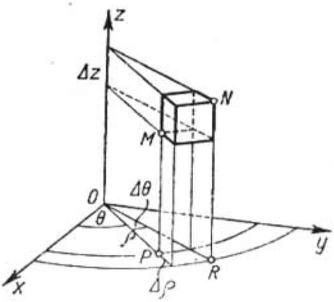


*Fig. 321*

y $z$ es la cota del mismo punto $P$, es decir, su distancia hasta el plano $Oxy$; la última tiene el signo «más», si el punto se encuentra encima del plano $Oxy$ y el signo «menos», en el caso contrario (fig. 320).

Dividamos el dominio tridimensional dado $V$ en volúmenes elementales mediante las superficies de coordenadas $\theta=\theta_i$, $\rho=\rho_j$,

$z = z_k$ las que son, respectivamente, semiplanos que contienen el eje $Oz$, cilindros circulares cuyo eje coincide con el $Oz$, planos perpendiculares al eje $Oz$. El volumen elemental es, entonces, un prisma curvilíneo representado el la fig. 321. El área de la base de este prisma, con la precisión de hasta infinitesimales de orden superior, es igual a $\rho\,\Delta\theta\,\Delta\rho$, su altura es $\Delta z$. Para simplificar la inscripción omitamos los índices $i$, $j$, $k$. Por tanto, $\Delta v = \rho\,\Delta\theta\,\Delta\rho\,\Delta z$. La integral triple de la función $F(\theta, \rho, z)$, por el dominio $V$ tiene la forma

$$I = \iiint_V F(\theta,\ \rho,\ z)\,\rho\,d\theta\,d\rho\,dz. \tag{1}$$

Los límites de integración son determinados por la forma del dominio $V$.

Si la integral triple de la función $f(x, y, z)$ está dada en coordenadas rectangulares, es fácil transformarla en la integral triple en coordenadas cilíndricas. En efecto, al notar que

$x = \rho\cos\theta,\quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta,\quad z = z,$ obtenemos:

$$\iiint_V f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_V F(\theta,\ \rho,\ z)\,\rho\,d\theta\,d\rho\,dz,$$

donde

$$f(\rho\cos\theta,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z) = F(\theta,\ \rho,\ z).$$

**Ejemplo.** Determinar la masa $M$ de una semiesfera de radio $R$ y centro en el origen de las coordenadas, si la densidad $F$ de su material en cada punto $(x, y, z)$ es proporcional a la distancia entre este punto y la base, es decir, $F = kz$.

**Solución.** La ecuación de la semiesfera superior

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

en las coordenadas cilíndricas tiene la forma

$$z = \sqrt{R^2 - \rho^2}.$$

Por tanto:

$$M = \iiint_V kz\rho\,d\theta\,d\rho\,dz = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\left(\int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} kz\,dz\right)\rho\,d\rho\right]d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^R \frac{kz^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{R^2-\rho}} \rho\,d\rho\right]d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^R \frac{k}{2}(R^2-\rho^2)\rho\,d\rho\right]d\theta =$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right]d\theta = \frac{k}{2}\,\frac{R^4}{4}\,2\pi = \frac{k\pi R^4}{4}.$$

**2. Integral triple en coordenadas esféricas.** En coordenadas esféricas la posición de un punto $P$ en el espacio la determinan tres números $\theta$, $r$, $\varphi$, donde $r$ es la distancia del punto al origen de coordenadas, así llamado radio vector del punto; $\varphi$ es el ángulo entre el radio vector y el eje $Oz$, $\theta$ es el ángulo entre la proyección del radio vector sobre el plano $Oxy$ y el eje $Ox$. El último ángulo lo tomamos a partir del eje $Ox$, en la dirección positiva (es decir, contra el movimiento de las agujas del reloj) (fig. 322). Para todo punto del espacio tenemos:

$$0 \leqslant r < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Dividamos el dominio dado $V$ en los volúmenes elementales $\Delta v$ mediante las superficies de coordenadas $r =$ const (esferas), $\varphi =$

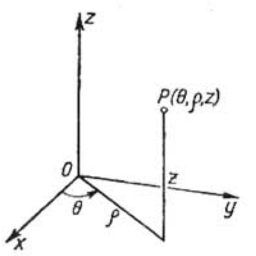


*Fig. 322*

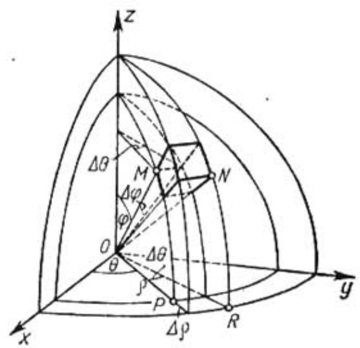


*Fig. 323*

$=$ const (superficies cónicas con los vértices en el origen de coordenadas), $\theta =$ const (semiplanos que pasan por el eje $Oz$). Con la precisión de hasta infinitesimales de orden superior, podemos considerar el volumen elemental $\Delta v$ como paralelepípedo de las aristas de longitudes $\Delta r$, $r\,\Delta\varphi$, $r$ sen $\varphi\,\Delta\theta$. Entonces el volumen elemental es igual a (véase fig. 323):

$$\Delta v = r^2 \operatorname{sen} \varphi\, \Delta r\, \Delta\theta\, \Delta\varphi.$$

La integral triple de la función $F(\theta, r, \varphi)$, por el dominio $V$, tiene la forma

$$I = \iiint_V F(\theta, r, \varphi)\, r^2 \operatorname{sen} \varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi. \qquad (1')$$

Los límites de la integración son determinados por la forma del dominio $V$. De la figura 322 se deducen fácilmente las expresiones de las coordenadas cartesianas en función de la esféricas:

$$x = r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \quad z = r \cos \varphi.$$

Por eso, la fórmula de transformación de una integral triple en coordenadas cartesianas a la de coordenadas esféricas tiene la forma:

$$\iiint_V f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_V f[r\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ r\cos\varphi]\,r^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

**3. Sustitución general de variables en una integral triple.** Los pasos de una integral triple en coordenadas cartesianas a la en coordenadas cilíndricas o esféricas son casos particulares de la transformación general de coordenadas en el espacio.

Supongamos que las funciones

$$x = \varphi\,(u,\ t,\ w),\ \ y = \psi\,(u,\ t,\ w),\ \ z = \chi\,(u,\ t,\ w)$$

representan una relación biunívoca entre el dominio $V$ en las coordenadas cartesianas $x,\ y,\ z$ y el dominio $V'$ en las coordenadas curvilíneas $u,\ t,\ w$. Supongamos que el dominio elemental o elemento de volumen $\Delta v$ de $V$ se transforma en el elemento $\Delta v'$ del dominio $V'$ y que

$$\lim_{\Delta v' \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta v'} = |\,I\,|.$$

Entonces:

$$\iiint_{V'} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{V'} f[\varphi\,(u,\ t,\ w),\ \psi\,(u,\ t,\ w),\ \chi\,(u,\ t,\ w)]\,|\,I\,|\,du\,dt\,dw.$$

Como en el caso de la integral doble aquí, también $I$ se llama *jacobiano*. Aquí, de modo idéntico, como lo hemos hecho para las integrales dobles, se puede demostrar que el jacobiano es numéricamente igual a la determinante de tercer orden:

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial t} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Así, cuando se trata de coordenadas cilíndricas, tenemos:

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z = z \quad (\rho = u,\ \theta = t,\ z = w)$$

$$I=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta & 0\\ \mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho.$$

En el caso de coordenadas esféricas tenemos:

$x=r$ sen $\varphi$ cos $\theta$, $y=r$ sen $\varphi$ sen $\theta$, $z=r$ cos $\varphi$ $(r=u, \varphi=t, \theta=w)$;

$$I=\begin{vmatrix}\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta\\ \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta & r\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta & r\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -r\,\mathrm{sen}\,\varphi & 0\end{vmatrix}=r^2\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

## § 14. MOMENTO DE INERCIA DE UN CUERPO Y COORDENADAS DE SU CENTRO DE GRAVEDAD

**1. Momento de inercia de un cuerpo.** Los momentos de inercia de un **punto** material $M(x, y, z)$ de masa $m$, respecto a los ejes de coordenadas $Ox$, $Oy$, $Oz$ (fig. 324) se expresan, correspondientemente, por medio de las fórmulas:

$$I_{xx}=(y^2+z^2)\,m,$$
$$I_{yy}=(x^2+z^2)\,m,\quad I_{zz}=(x^2+y^2)\,m.$$

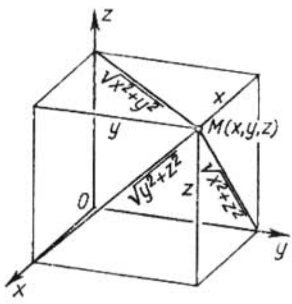


*Fig. 324*

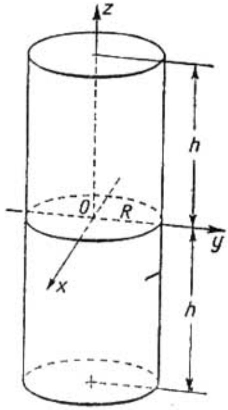


*Fig. 325*

Los momentos de inercia de un **cuerpo** se expresan por las integrales correspondientes. Así, por ejemplo, el momento de inercia de un cuerpo respecto al eje $Oz$, se expresa por la integral $I_{zz}=\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$, donde $\gamma(x, y, z)$ es la densidad de la materia.

**Ejemplo 1.** Calcular el momento de inercia de un cilindro recto circular de radio $R$ y altura $2h$ respecto al diámetro de su sección media, la densidad es constante e igual a $\gamma_0$.

**Solución.** Elijamos un sistema de coordenadas del modo siguiente: dirijamos el eje $Oz$ a lo largo del eje del cilindro y coloquemos el origen de coordenadas en su centro de simetría (fig. 325).

El problema se reduce al cálculo del momento de inercia del cilindro respecto al eje $Ox$:

$$I_{xx} = \iiint\limits_V (y^2+z^2)\,\gamma_0 dx\,dy\,dz.$$

Pasando a las coordenadas cilíndricas, obtenemos:

$$I_{xx} = \gamma_0 \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_0^R \left[ \int\limits_0^h (z^2+\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta)\,dz \right] \rho\,d\rho \right\} d\theta =$$

$$= \gamma_0 \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_0^R \left[ \frac{2h^3}{3} + 2h\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta \right] \rho\,d\rho \right\} d\theta =$$

$$= \gamma_0 \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \frac{2h^3}{3}\,\frac{R^2}{2} + \frac{2hR^4}{4} \operatorname{sen}^2\theta \right\} d\theta =$$

$$= \gamma_0 \left[ \frac{2h^3R^2}{6}\,2\pi + \frac{2hR^4}{4}\,\pi \right]^0 = \gamma_0 \pi h R^2 \left[ \frac{2}{3}\,h^2 + \frac{R^2}{2} \right].$$

**2. Coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo.** Análogamente a lo expuesto en el § 8, cap. XII (tomo I) para las figuras planas, las coordenadas del centro de gravedad de un cuepro se expresan por las fórmulas:

$$x_c = \frac{\iiint\limits_V x\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}; \qquad y_c = \frac{\iiint\limits_V y\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz};$$

$$z_c = \frac{\iiint\limits_V z\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz},$$

donde $\gamma(x, y, z)$ es la densidad.

**Ejemplo 2.** Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la mitad superior de una esfera de radio $R$ y centro en el origen de coordenadas; la densidad $\gamma_0$ es constante.

**Solución.** La semiesfera está limitada por las superficies

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad z = 0.$$

La cota de su centro de gravedad se determina por la fórmula:

$$z_c = \frac{\iiint\limits_V z\gamma_0\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \gamma_0\,dx\,dy\,dz}.$$

Pasando a las coordenadas esféricas, obtenemos:

$$z_c = \frac{\gamma_0 \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int\limits_0^{R} r \cos \varphi r^2 \operatorname{sen} \varphi \, dr \right] d\varphi \right\} d\theta}{\gamma_0 \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int\limits_0^{R} r^2 \operatorname{sen} \varphi \, dr \right] d\varphi \right\} d\theta} = \frac{2\pi \frac{R^4}{4} \frac{1}{2}}{\frac{4}{6} \pi R^3} = \frac{3}{8} R.$$

En virtud de la simetría de la semiesfera, evidentemente tenemos

$$x_c = y_c = 0.$$

## § 15. CALCULO DE LAS INTEGRALES DEPENDIENTES DE UN PARAMETRO

Examinemos una integral que depende de un parámetro $\alpha$:

$$I(\alpha) = \int\limits_a^b f(x, \alpha) \, dx.$$

(Las integrales de este tipo ya las hemos considerado en el § 10, cap. XI, tomo I). Indiquemos sin demostración que si la función $f(x, \alpha)$ es continua respecto a $x$ en el segmento $(a, b)$, y respecto a $\alpha$ en el segmento $[\alpha_1, \alpha_2]$, la función

$$I(\alpha) = \int\limits_a^b f(x, \alpha) \, dx$$

es continua en el segmento $[\alpha_1, \alpha_2]$. Por tanto, podemos integrar la función $I(\alpha)$ respecto a $\alpha$ en el segmento $[\alpha_1, \alpha_2]$:

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} I(\alpha) \, d\alpha = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left( \int\limits_a^b f(x, \alpha) \, dx \right) d\alpha.$$

La expresión del segundo miembro es la integral iterada de segundo orden de la función $f(x, \alpha)$, por el rectángulo correspondiente al plano $Ox\alpha$. En esta integral se puede invertir el orden de la integración:

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left( \int\limits_a^b f(x, \alpha) \, dx \right) d\alpha = \int\limits_a^b \left( \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) \, d\alpha \right) dx.$$

Esta fórmula muestra que para la integración de una integral dependiente de un parámetro $\alpha$ es suficiente integrar el elemento de integración respecto a este parámetro $\alpha$. Esta fórmula suele ser útil también, al calcular ciertas integrales definidas.

Ejemplo. Calcular la integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx.$$

Esta integral indefinida del integrando no se puede calcular mediante las funciones elementales. Para resolver el problema, examinemos otra integral que se calcula fácilmente:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx=\frac{1}{\alpha}\ (\alpha>0).$$

Integrando esta igualdad entre los límites desde $\alpha=a$ hasta $\alpha=b$, obtenemos:

$$\int_a^b\left(\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx\right)d\alpha=\int_a^b\frac{d\alpha}{\alpha}=\ln\frac{b}{a}.$$

Cambiando el orden de integración en la primera integral, escribamos esta igualdad en la forma siguiente:

$$\int_0^\infty\left[\int_a^b e^{-\alpha x}d\alpha\right]dx=\ln\frac{b}{a},$$

de donde, calculando la integral interior, obtenemos:

$$\int_0^\infty\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx=\ln\frac{b}{a}.$$

## Ejercicios para el capítulo XIV

Calcular las integrales*): **1.** $\int_0^1\int_1^2(x^2+y^2)\,dx\,dy$. *Respuesta*: $\frac{8}{3}$.

**2.** $\int_3^4\int_1^2\frac{dy\,dx}{(x+y)^2}$. *Respuesta*: $\ln\frac{25}{24}$. **3.** $\int_1^2\int_x^{x\sqrt{3}} xy\,dx\,dy$. *Respuesta*: $\frac{15}{4}$.

---

*) Como hemos indicado anteriormente, si la integral está escrita en la forma: $\int_M^N\int_K^L f(x,y)\,dx\,dy$, entonces consideremos que la primera integración se efectúa respecto a la variable, cuya diferencial ocupa el primer lugar, es decir:

$$\int_M^N\int_K^L f(x,y)\,dx\,dy=\int_M^N\left(\int_K^L f(x,y)\,dx\right)dy.$$

4. $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{a\,\mathrm{sen}\,\theta}^{a} r\,dr\,d\theta$. *Respuesta:* $\frac{1}{2}\pi a^2$. 5. $\int\limits_0^{a}\int\limits_{\frac{x}{a}}^{x}\frac{x\,dy\,dx}{x^2+y^2}$. *Respuesta:* $\frac{\pi a}{4}-$ $-a\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{a}$. 6. $\int\limits_0^{a}\int\limits_{y-a}^{2y} xy\,dx\,dy$. *Respuesta:* $\frac{11a^4}{24}$. 7. $\int\limits_{\frac{b}{2}}^{b}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\rho\,d\theta\,d\rho$. *Respuesta:* $\frac{3}{16}\pi b^2$.

Determinar los límites de integración para la integral $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$, donde el dominio de integración está limitado por las líneas: 8. $x=2$, $x=3$, $y=-1$, $y=5$. *Respuesta:* $\int\limits_2^{3}\int\limits_{-1}^{5} f(x,\ y)\,dy\,dx$. 9. $y=0$, $y=1-x^2$. *Respuesta:* $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_0^{1-x^2} f(x,\ y)\,dy\,dx$. 10. $x^2+y^2=a^2$. *Respuesta:* $\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,\ y)\,dy\,dx$.

11. $y=\frac{2}{1+x^2}$, $y=x^2$. *Respuesta:* $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{x^2}^{\frac{2}{1+x^2}} f(x,\ y)\,dy\,dx$. 12. $y=0$, $y=a$, $y=x$, $y=x-2a$. *Respuesta:* $\int\limits_0^{a}\int\limits_y^{y+2a} f(x,\ y)\,dx\,dy$.

Invertir el orden de integración en las integrales:

13. $\int\limits_1^{2}\int\limits_3^{4} f(x,\ y)\,dy\,dx$. *Respuesta:* $\int\limits_3^{4}\int\limits_1^{2} f(x,\ y)\,dx\,dy$. 14. $\int\limits_0^{1}\int\limits_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,\ y)\,dy\,dx$. *Respuesta:* $\int\limits_0^{1}\int\limits_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x,\ y)\,dx\,dy$. 15. $\int\limits_0^{a}\int\limits_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x,\ y)\,dx\,dy$. *Respuesta:* $\int\limits_0^{a}\int\limits_{a-\sqrt{a^2-x^2}}^{a} f(x,\ y)\,dy\,dx$. 16. $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,\ y)\,dy\,dx$. *Respuesta:* $\int\limits_0^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,\ y)\,dx\,dy$. 17. $\int\limits_0^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy$. *Respuesta:* $\int\limits_{-1}^{0}\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,\ y)\,dy\,dx+\int\limits_0^{1}\int\limits_0^{1-x} f(x,\ y)\,dy\,dx$.

Pasando a las coordenadas polares, calcular las integrales siguientes:

**18.** $\int\limits_0^a \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy\,dx$. *Respuesta*: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^a \sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{\pi}{6}a^3$.

**19.** $\int\limits_0^a \int\limits_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy$. *Respuesta*: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^a \rho^3 d\rho\,d\theta = \frac{\pi a^4}{8}$.

**20.** $\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$. *Respuesta*: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^\infty e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{\pi}{4}$.

**21.** $\int\limits_0^{2a} \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dy\,dx$. *Respuesta*: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2a\cos\theta} \rho\,d\rho\,d\theta = \frac{\pi a^2}{2}$.

Transformar las integrales dobles, introduciendo nuevas variables $u$ y $v$, ligadas con $x$ e $y$ mediante las fórmulas $x=u-uv$, $y=uv$:

**22.** $\int\limits_0^c \int\limits_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y)\,dy\,dx$.

*Respuesta*: $\int\limits_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1+\beta}} \int\limits_0^{\frac{c}{1-v}} f(u-uv, uv)\,u\,du\,dv$. **23.** $\int\limits_0^c \int\limits_0^b f(x, y)\,dy\,dx$.

*Respuesta*: $\int\limits_0^{\frac{b}{b+c}} \int\limits_0^{\frac{c}{1-v}} f(u-uv, uv)\,u\,du\,dv + \int\limits_{\frac{b}{b+c}}^1 \int\limits_0^{\frac{b}{v}} f(u-uv, uv)\,u\,du\,dv$.

### Aplicación de la integral doble para el cálculo de áreas

**24.** Calcular el área de la figura, limitada por la parábola $y^2=2x$ y la recta $y=x$. *Respuesta*: $\frac{2}{3}$.

**25.** Calcular el área de la figura, limitada por las líneas $y^2=4ax$, $x+y=3a$, $y=0$. *Respuesta*: $\frac{10}{3}a^2$.

**26.** Calcular el área de la figura, limitada por las líneas $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$, $x+y=a$. *Respuesta*: $\frac{a^2}{3}$.

**27.** Calcular el área de la figura, limitada por las líneas $y=\operatorname{sen} x$, $y=\cos x$, $x=0$. *Respuesta*: $\sqrt{2}-1$.

**28.** Calcular el área de un lazo de la curva $\rho=a\operatorname{sen} 2\theta$. *Respuesta*: $\frac{\pi a^2}{8}$.

29. Calcular toda el área, limitada por la lemniscata $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$. *Respuesta*: $a^2$.

30. Calcular el área de un lazo de la curva $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{2xy}{c^2}$.

**Indicación:** pasar a las nuevas variables $x = \rho a \cos\theta$ e $y = \rho b \operatorname{sen}\theta$. *Respuesta*: $\frac{a^2b^2}{c^2}$.

**Cálculo de volúmenes**

31. Calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$. *Respuesta*: $\frac{abc}{b}$. **32.** $z=0$, $x^2+y^2=1$, $x+y+z=3$. *Respuesta*: $3\pi$. **33.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $xy=z$, $z=0$. *Respuesta*: $\pi$. **34.** $x^2+y^2-2ax=0$, $z=0$, $x^2+y^2=z^2$. *Respuesta*: $\frac{32}{9}a^3$. **35.** $y=x^2$, $x=y^2$, $z=0$, $z=12+y-x^2$ *Respuesta*: $\frac{549}{140}$.

36. Por los planos de coordenadas, el plano $2x+3y-12=0$ y el cilindro $z=\frac{1}{2}y^2$. *Respuesta*: 16.

37. Por el cilindro circular de radio $a$ y eje que coincide con el eje $Oz$, los planos de coordenadas y el plano $\frac{x}{a}+\frac{z}{a}=1$. *Respuesta*: $a^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)$.

38. Por los cilindros $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$. *Respuesta*: $\frac{16}{3}a^3$. **39.** $y^2+z^2=x$, $x=y$, $z=0$. *Respuesta*: $\frac{\pi}{64}$. **40.** $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=R^3$, $a>R$. *Respuesta*: $\frac{4}{3}\pi\left[a^3-(\sqrt{a^2-R^2})^3\right]$. **41.** $az=x^2+y^2$, $z=0$, $x^2+y^2=2ax$. *Respuesta*: $\frac{3}{2}\pi a^3$. **42.** $\rho^2=a^2\cos 2\theta$, $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z=0$. (Calcular el volumen interior respecto al cilindro). *Respuesta*: $\frac{1}{9}a^3(3\pi+20-16\sqrt{2})$.

**Cálculo del área de una superficie**

43. Calcular el área de la parte de la superficie del cono $x^2+y^2=z^2$, separada por el cilindro $x^2+y^2=2ax$. *Respuesta*: $2\pi a^2\sqrt{2}$.

44. Calcular el área de la parte del plano $x+y+z=2a$, que se encuentra en el primer octante y está limitada por el cilindro $x^2+y^2=a^2$. *Respuesta*: $\frac{\pi a^2}{4}\sqrt{3}$.

45. Calcular el área de la superficie de un segmento esférico (del menor), si el radio de la esfera es igual a $a$ y el radio de la base del segmento es igual a $b$. *Respuesta*: $2\pi(a^2-a\sqrt{a^2-b^2})$.

46. Hallar el área de la parte de la superficie de una esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ separada por la superficie del cilindro $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$. *Respuesta*: $4\pi a^2-8a^2-\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

**47.** Hallar el área de la superficie de un cuerpo formado por la intersección de dos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$. *Respuesta*: $16a^2$.

**48.** Calcular el área de la parte de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 2ax$ comprendida entre el plano $z = 0$ y el cono $x^2 + y^2 = z^2$. *Respuesta*: $8a^2$.

**49.** Calcular el área de la parte de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = a^2$ comprendida entre los planos $z = mx$ y $z = 0$. *Respuesta*: $2ma^2$.

**50.** Calcular el área de la parte de la superficie de un paraboloide $y^2 + z^2 = 2ax$ comprendida entre el cilindro parabólico $y^2 = ax$ y el plano $x = a$. *Respuesta*: $\frac{1}{3}\pi a^2 (3\sqrt{3} - 1)$.

## Cálculo de la masa, de las coordenadas del centro de gravedad y del momento de inercia de figuras planas

(En los problemas 51-62, y 64 supongamos que la densidad superficial es constante e igual a 1).

**51.** Determinar la masa de un disco circular de radio $a$, si la densidad en cualquier punto $P$ es inversamente proporcional a la distancia entre $P$ y el centro (el coeficiente de proporcionalidad es igual a $K$). *Respuesta*: $\pi aK$.

**52.** Calcular las coordenadas del centro de gravedad de un triángulo equilátero, tomando el eje $Ox$ por su altura, y el origen de coordenadas, por su vértice. *Respuesta*: $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $y = 0$.

**53.** Determinar las coordenadas del centro de gravedad de un sector circular de radio $a$, tomando el eje $Ox$ por la bisectriz de su ángulo. El ángulo de abertura del sector es igual a $2\alpha$. *Respuesta*: $x_c = \frac{2a \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$, $y_c = 0$.

**54.** Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la mitad superior del círculo $x^2 + y^2 = a^2$. *Respuesta*: $x_c = 0$, $y_c = \frac{4a}{3\pi}$.

**55.** Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la superficie de un arco de cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$. *Respuesta*: $x_c = a\pi$, $y_c = \frac{5a}{6}$.

**56.** Hallar las coordenadas del centro de gravedad del área limitada por un lazo de la curva $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$. *Respuesta*: $x_c = \frac{\pi a\sqrt{2}}{8}$, $y_c = 0$.

**57.** Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la superficie de la cardioide $\rho = a(1 + \cos\theta)$. *Respuesta*: $x_c = \frac{5a}{6}$, $y_c = 0$.

**58.** Calcular el momento de inercia del área de un rectángulo, limitado por las rectas $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, respecto al origen de coordenadas. *Respuesta*: $\frac{ab(a^2 + b^2)}{3}$.

**59.** Calcular el momento de inercia de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

a) respecto al eje $Oy$; b) respecto al origen de coordenadas. *Respuesta*: a) $\frac{\pi a^3 b}{4}$; b) $\frac{\pi ab}{4}(a^2 + b^2)$.

**60.** Calcular el momento de inercia del área del círculo $\rho = 2a\cos\theta$ respecto al polo. *Respuesta*: $\frac{3}{2}\pi a^4$.

**61.** Calcular el momento de inercia del área de la cardioide $\rho = a(1-\cos\theta)$ respesto al polo. *Respuesta*: $\frac{35\pi a^4}{16}$.

**62.** Calcular el momento de inercia del área del círculo $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 2a^2$, respecto al eje $Oy$. *Respuesta*: $3\pi a^4$.

**63.** Se da una placa cuadrada de lado $a$. La densidad en cada punto de esta placa es proporcional a la distancia desde este punto hasta uno de los vértices del cuadrado. Calcular el momento de inercia de la placa respecto a un lado que pasa por este vértice. *Respuesta*: $\frac{1}{40} ka^5 [7\sqrt{2} + 3\ln \times$ $\times (\sqrt{2}+1)]$, donde $k$ es el factor de proporcionalidad.

**64.** Calcular el momento de inercia del área de la figura limitada por la parábola $y^2 = ax$ y la recta $x = a$ respecto a la recta $y = -a$. *Respuesta*: $\frac{8}{5} a^4$.

**Integrales triples**

**65.** Calcular $\int\int\int \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$, si el dominio de integración está limitado por los planos de coordenadas y el plano $x+y+z=1$. *Respuesta*: $\frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}$.

**66.** Calcular $\int\limits_0^a \left\{ \int\limits_0^x \left[ \int\limits_0^y xyz\,dz \right] dy \right\} dx$. *Respuesta*: $\frac{a^6}{48}$.

**67.** Calcular el volumen de un cuerpo limitado por la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ y la superficie del paraboloide $x^2+y^2=3z$. *Respuesta*: $\frac{19}{6}\pi$.

**68.** *) Calcular las coordenadas del centro de gravedad y los momentos de inercia de la pirámide limitada por los planos: $x=0$, $y=0$, $z=0$; $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. *Respuesta*: $x_C = \frac{a}{4}$, $y_C = \frac{b}{4}$, $z_C = \frac{c}{4}$; $I_x = \frac{a^3bc}{60}$, $I_y = \frac{b^3ac}{60}$, $I_z = \frac{c^3ab}{60}$, $I_0 = \frac{abc}{60}(a^2+b^2+c^2)$.

**69.** Calcular el momento de inercia de un cono recto circular respecto a su eje. *Respuesta*: $\frac{1}{10}\pi hr^4$, donde $h$ es la altura del cono y $r$, el radio de su base.

**70.** Calcular el volumen de un cuerpo limitado por la superficie de la ecuación $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3x$. *Respuesta*: $\frac{1}{3}\pi a^3$.

**71.** Calcular el momento de inercia de un cono circular respecto al diámetro de su base. *Respuesta*: $\frac{\pi hr^2}{60}(2h^2+3r^2)$.

**72.** Calcular las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo limitado por una esfera de radio $a$ y una superficie cónica, de ángulo en el vértice $2\alpha$, si el vértice del cono coincide con el centro de la esfera. *Respuesta*: $x_C = 0$,

---

*) En los problemas 68-69, 71-73 supongamos que la densidad es constante e igual a 1.

$y_c = 0$, $z_c = \frac{3}{8} a (1 + \cos\alpha)$ (el eje $Oz$ coincide con el del cono y el vértice, con el origen de coordenadas).

**73.** Calcular las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo limitado por una esfera de radio $a$ y por dos planos, que pasan por el centro de la esfera y forman entre sí el ángulo de 60°. *Respuesta*: $\rho = \frac{9}{16} a$, $\theta = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (el eje $Oz$ se toma por la línea de intersección de los planos; el centro de la esfera, por el origen de coordenadas; $\rho$, $\theta$, $\varphi$ son las coordenadas esféricas).

**74.** Utilizando la igualdad $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-\alpha^2 x}\, d\alpha$ $(\alpha > 0)$, calcular las integrales $\int\limits_0^\infty \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{x}}$ y $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\sqrt{x}}$. *Respuesta*: $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

CAPITULO XV

# INTEGRALES CURVILINEAS E INTEGRALES DE SUPERFICIE

## § 1. INTEGRAL CURVILINEA

Supongamos que el punto $P(x, y)$ se desplaza a lo largo de una curva plana $L$ de un punto $M$ a un punto $N$. Al punto $P$ está aplicada la fuerza $F$ que varía en magnitud y dirección cuando $P$ se desplaza, es decir, la fuerza es una función de las coordenadas del punto $P$:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(P).$$

Calculemos el trabajo $A$ de la fuerza $\boldsymbol{F}$ cuando el punto $P$ se desplaza de $M$ a $N$ (fig. 326). Dividamos, para esto, la curva $MN$ en $n$ segmentos arbitrarios por los puntos $M_0 = M$, $M_1$, $M_2$, . . . , $M_n = N$, partiendo de $M$ a $N$, y designemos por $\Delta \boldsymbol{s}_i$ el vector $\overline{M_i M_{i+1}}$. Designemos por $\boldsymbol{F}_i$ la magnitud de la fuerza $\boldsymbol{F}$ en el punto $M_i$. En este caso, el producto escalar $\boldsymbol{F}_i \Delta \boldsymbol{s}_i$ podemos considerarlo como la expresión aproximada del trabajo de $\boldsymbol{F}$ a lo largo del arco $\overset{\frown}{M_i M_{i+1}}$:

$$A_i \approx \boldsymbol{F}_i \Delta \boldsymbol{s}_i.$$

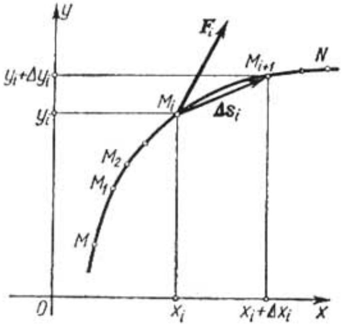


*Fig. 326*

Sea:

$$\boldsymbol{F} = X(x, y)\,\boldsymbol{i} + Y(x, y)\,\boldsymbol{j},$$

donde $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ son proyecciones del vector $\boldsymbol{F}$ sobre los ejes $Ox$ y $Oy$. Designando por $\Delta x_i$ y $\Delta y_i$ los incrementos de las coordenadas $x_i$ e $y_i$ durante el paso de $M_i$ a $M_{i+1}$, obtenemos:

$$\Delta \boldsymbol{s}_i = \Delta x_i \boldsymbol{i} + \Delta y_i \boldsymbol{j}.$$

Por consiguiente,

$$\boldsymbol{F}_i \Delta \boldsymbol{s}_i = X(x_i, y_i)\,\Delta x_i + Y(x_i, y_i)\,\Delta y_i.$$

El valor aproximado de trabajo $A$ de la fuerza $\boldsymbol{F}$ en toda la curva $MN$ es:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \Delta \boldsymbol{s}_i = \sum_{i=1}^{n} [X(x_i, y_i) \Delta x_i + Y(x_i, y_i) \Delta y_i]. \qquad (1)$$

Sin hacer las definiciones rigurosas indiquemos mientras tanto que, si el límite de la expresión del segundo miembro de la igualdad existe cuando $\Delta \boldsymbol{s}_i \to 0$ (es evidente que $\Delta x_i \to 0$ y $\Delta y_i \to 0$), entonces, este límite expresa el trabajo de la fuerza $F$ a lo largo de la curva $L$ entre los puntos $M$ y $N$:

$$A = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} [X(x_i, y_i) \Delta x_i + Y(x_i, y_i) \Delta y_i]. \qquad (2)$$

El límite *) del segundo miembro se llama *integral curvilínea* de $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ a lo largo de la curva $L$, y se designa así:

$$A = \int_L X(x, y)\, dx + Y(x, y)\, dy \qquad (3)$$

ó

$$A = \int_{(M)}^{(N)} X(x, y)\, dx + Y(x, y)\, dy. \qquad (3')$$

Los límites de las sumas de la forma (2) se encuentran a menudo en matemáticas y física, $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ se consideran como funciones de dos variables en un cierto dominio $D$.

Pongamos las letras $M$ y $N$, que reemplazan los límites de integración en la integral (3′), entre paréntesis, para indicar que ellas no son números, sino designaciones de los extremos de la curva por la que se toma la integral curvilínea. La dirección a lo largo de la curva $L$ de $M$ a $N$ se llama sentido de integración.

Si la curva $L$ es la del espacio, la integral curvilínea de las tres funciones $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$ $Z(x, y, z)$ se determina de una manera análoga:

$$\int_L X(x, y, z)\, dx + Y(x, y, z)\, dy + Z(x, y, z)\, dz =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x_k \to 0 \\ \Delta y_k \to 0 \\ \Delta z_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} X(x_k, y_k, z_k) \Delta x_k + Y(x_k, y_k, z_k) \Delta y_k + Z(x_k, y_k, z_k) \Delta z_k.$$

La letra $L$ por debajo del signo de la integral indica que la integración se efectúa a lo largo de la curva $L$.

Indiquemos dos propiedades de la integral curvilínea.

*) Aquí, el límite de la suma integral se entiende en el mismo sentido que en el caso de la integral definida (véase § 2, cap. XI, tomo I).

**Propiedad 1.** Una integral curvilínea se determina por el elemento de integración, la forma de la curva de integración y el sentido de integración.

La integral curvilínea cambia de signo simultáneamente con el cambio del sentido de integración, puesto que en este caso el vector $\Delta s$, y, por tanto, sus proyecciones $\Delta x$ y $\Delta y$ cambian de signo.

**Propiedad 2.** Dividamos la curva $L$ por el punto $K$ en dos partes $L_1$ y $L_2$ de modo que $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{MK} + \overset{\frown}{KN}$ (fig. 327). Entonces de la fórmula (1) directamente se deduce:

$$\int_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy = \int_{(M)}^{(K)} X\,dx + Y\,dy + \int_{(K)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy.$$

Esta correlación es válida para cualquier número de sumandos. Indiquemos más que la definición de integral curvilínea es válida también cuando la curva $L$ es cerrada.

En este caso el origen y el extremo de la curva coinciden.

Por eso, cuando tenemos una curva cerrada no podemos escribir $\int_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy$, sino sólo $\int_L X\,dx + Y\,dy$, indicando obligatoriamente el sentido del recorrido a lo largo de la curva cerrada $L$. Para designar la integral curvilínea a lo largo del contorno cerrado $L$ frecuentemente se usa también el símbolo $\oint_L X\,dx + Y\,dy$.

**Observación.** Hemos llegado a la noción de la integral curvilínea, considerando el problema sobre el trabajo de una fuerza $\boldsymbol{F}$ en un segmento curvilíneo $L$.

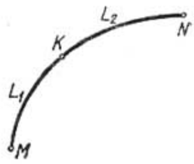

*Fig. 327*

En este caso supongamos que en todos los puntos de la curva $L$ está dada la fuerza $\boldsymbol{F}$ como una función vectorial de las coordenadas del punto de aplicación $(x, y)$; las proyecciones del vector variable $\boldsymbol{F}$ sobre los ejes de coordenadas son iguales a las funciones escalares (es decir, a las numéricas) $X\,(x, y)$ e $Y\,(x, y)$. Por esto, una integral curvilínea de la forma $\int_L X\,dx + Y\,dy$ podemos considerarla como la integral de la función vectorial $F$ dada por sus proyecciones $X$ y $Y$.

La integral de la función vectorial $\boldsymbol{F}$ a lo largo de la curva $L$ se designa por el símbolo

$$\int_L \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{S}.$$

Si el vector $\boldsymbol{F}$ se determina por sus proyecciones $X$, $Y$, $Z$, entonces, esta integral es igual a la integral curvilínea

$$\int_L X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

En particular, si el vector $\boldsymbol{F}$ se encuentra en el plano $Oxy$, la integral de este vector es igual a:

$$\int_L X\,dx + Y\,dy.$$

Cuando la integral curvilínea de una función vectorial $\boldsymbol{F}$ se toma a lo largo de una curva cerrada $L$, esta integral curvilínea se llama *circulación* del vector $\boldsymbol{F}$ a lo largo del contorno cerrado $L$.

## § 2. CALCULO DE LA INTEGRAL CURVILINEA

En este párrafo propongamos precisar la noción del límite de la suma (1), § 1, y, en relación con esto, precisar la noción de la integral curvilínea e indicar el procedimiento de su cálculo.

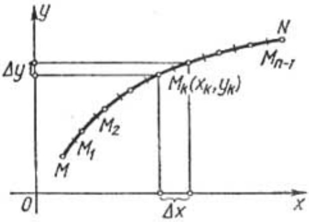


*Fig. 328*

Supongamos que la curva $L$ está dada por las ecuaciones en forma paramétrica:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t).$$

Analicemos el arco $MN$ de esta curva (fig. 328). Sean $\alpha$ y $\beta$ los valores del parámetro correspondientes a los puntos $M$ y $N$. Dividamos el arco $MN$ en elementos parciales $\Delta s_i$, por los puntos $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, . . ., $M_n(x_n, y_n)$, haciendo

$$x_i = \varphi(t_i), \quad y_i = \psi(t_i).$$

Examinemos la integral curvilínea

$$\int_L X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy, \tag{1}$$

definida en el párrafo anterior. Demos aquí sin demostración un **teorema sobre la existencia de la integral curvilínea.** *Si funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son continuas y tienen derivadas continuas $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$*

*sobre el segmento* $[\alpha, \beta]$ *y si, además, las funciones* $X[\varphi(t), \psi(t)]$ *e* $Y[\varphi(t), \psi(t)]$ *son continuas como funciones de* $t$ *en este segmento entonces existen los límites*

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta x_i = \int X(x, y)\,dx, \\ \lim_{\Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Y(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta y_i = \int Y(x, y)\,dy, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

*donde* $\overline{x}_i$ *e* $\overline{y}_i$ *son las coordenadas de cierto punto del arco* $\Delta s_i$. *Estos límites no dependen del modo de dividir la curva* $L$ *en arcos parciales* $\Delta s_i$, *cuando* $\Delta s_i \to 0$, *ni de la elección del punto* $M_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$ *en el arco* $\Delta s_i$. Estos límites se llaman *integrales curvilíneas* y se representan así:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta x_i = \int_L X(x, y)\,dx,$$

$$\lim_{\Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Y(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta y_i = \int_L Y(x, y)\,dy.$$

**Observación.** Del teorema citado se deduce que hacia un mismo límite (es decir, hacia la integral curvilínea) tienden las sumas, definidas en el párrafo anterior donde los puntos $\overline{M}_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$ son los extremos del arco $\Delta s_i$, siendo arbitrario el sistema de división de $L$ en los arcos parciales $\Delta s_i$.

El teorema formulado da la posibilidad de obtener el método para calcular las integrales curvilíneas.

Así, según la definición, tenemos:

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y)\,dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta x_i, \tag{3}$$

donde

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}).$$

Transformemos la última diferencia según la fórmula de Lagrange:

$$\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)\,\Delta t_i,$$

donde $\tau_i$ es cierto valor de $t$ comprendido entre los valores $t_{i-1}$ y $t_i$. Puesto que el punto $\overline{x}_i, \overline{y}_i$ en el arco $\Delta s_i$ es arbitrario, elijámoslo de modo que sus coordenadas correspondan al valor del parámetro $\tau_i$:

$$\bar{x}_i = \varphi(\tau_1), \quad \bar{y}_i = \psi(\tau_i).$$

Poniendo en la fórmula (3) los valores obtenidos de $\overline{x}_i$, $\overline{y}_i$ y $\Delta x_i$, obtenemos:

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x,\ y)\,dx = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X[\varphi(\tau_i)\,\psi(\tau_i)]\ \varphi'(\tau_i)\,\Delta t_i.$$

El segundo miembro es el límite de una suma integral para la función continua de una sola variable $X[\varphi(t),$ $\psi(t)]\,\varphi'(t)$ en el segmento $[\alpha,\ \beta]$.

Por consiguiente, este límite es igual a la integral definida de esta función:

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x,\ y)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} X[\varphi(t),\ \psi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Análogamente, obtenemos la fórmula:

$$\int_{(M)}^{(N)} Y(x,\ y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} Y[\varphi(t),\ \psi(t)]\ \psi'(t)\,dt.$$

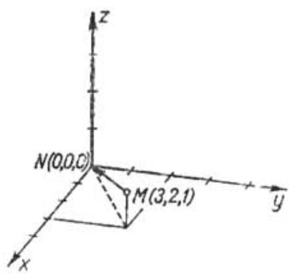


Fig. 329

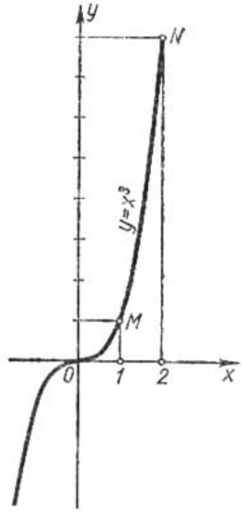


Fig. 330

Sumando miembro a miembro estas igualdades, obtenemos:

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x,\ y)\,dx + Y(x,\ y)\,dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{X[\varphi(t),\ \psi(t)]\ \varphi'(t) + Y[\varphi(t),\ \psi(t)]\,\psi'(t)\}\,dt. \quad (4)$$

Esta es la fórmula buscada para calcular una integral curvilínea.

De manera análoga se calcula la integral curvilínea

$$\int X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

a lo largo de una curva en el espacio, dada por las ecuaciones $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t)$.

**Ejemplo 1.** Calcular la integral curvilínea de una terna de funciones: $x^3$; $3zy^2$; $-x^2y$ (o, que es lo mismo, de la función vectorial $x^3i + 3zy^2j - x^2yk$) a lo largo de un segmento de la recta que parte del punto $M$ (3,2,1) al punto $N$ (0, 0, 0) (fig. 329).

**Solución.** Para hallar las ecuaciones paramétricas de la línea $MN$ a lo largo de la cual se debe realizar la integración, escribamos la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados:

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1};$$

designando por $t$ el valor común de todas estas razones, obtenemos las ecuaciones de la recta en forma paramétrica:

$$x=3t,\ y=2t,\ z=t.$$

Es evidente, que al origen del segmento $MN$ corresponde el valor del parámetro $t=1$ y al extremo, el valor de $t=0$. No es difícil hallar las derivadas de $x$, $y$, $z$ respecto al parámetro $t$ (las que necesitaremos para calcular la integral curvilínea):

$$x'_t=3,\ y'_t=2,\ z'_t=1.$$

Ahora podemos calcular la integral curvilínea buscada con ayuda de la fórmula (4):

$$\int\limits_{(M)}^{(N)} x^3\,dx+3zy^2\,dy-x^2y\,dz=$$

$$=\int\limits_1^0 [(3t)^3\cdot 3+3t\,(2t)^2\cdot 2-(3t)^2\cdot 2t\cdot 1]\,dt=\int\limits_1^0 87t^3\,dt=-\frac{87}{4}.$$

**Ejemplo 2.** Calcular la integral curvilínea de un par de funciones: $6x^2y$; $10\,xy^2$, a lo largo de la curva plana $y=x^3$ entre los puntos $M\ (1,\ 1)$ y $N\ (2,\ 8)$ (fig. 330).

**Solución.** Para calcular la integral buscada

$$\int\limits_{(M)}^{(N)} 6x^2y\,dx+10xy^2\,dy$$

hacen falta las ecuaciones paramétricas de la curva dada. Pero, la ecuación de la curva $y=x^3$ dada explícitamente, es un caso particular de la ecuación paramétrica: aquí, la abscisa $x$ del punto de la curva sirve de parámetro y las ecuaciones paramétricas de la curva son:

$$x=x,\ y=x^3.$$

El parámetro $x$ varía de $x_1=1$ a $x_2=2$. Es fácil calcular las derivadas respecto al parámetro:

$$x'_x=1,\ y'_x=3x^2.$$

Por consiguiente,

$$\int\limits_{(M)}^{(N)} 6x^2y\,dx+10xy^2\,dy=\int\limits_1^2 [6x^2x^3\cdot 1+10xx^6\cdot 3x^2]\,dx=$$

$$=\int\limits_1^2 (6x^5+30x^9)\,dx=[x^6+3x^{10}]_1^2=1084.$$

Mostremos, ahora, algunas aplicaciones de la integral curvilínea.

**1. La expresión del área de un dominio, limitado por una curva limitada, en función de una integral curvilínea.**

Sea dado en el plano $Oxy$ un dominio $D$ limitado por un contorno $L$ tal que toda paralela a uno cualquiera de los ejes de coordenadas y que pasa por algún punto interior del dominio, corte la frontera $L$ no más que en dos puntos (es decir, el dominio $D$ es regular) (fig. 331).

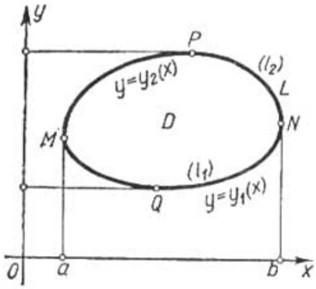


*Fig. 331*

Supongamos que el segmento $[a, b]$ es la proyección del dominio $D$ sobre el eje $Ox$; abajo $D$ está limitado por la curva $(l_1)$:

$$y = y_1(x)$$

y encima, por la $(l_2)$:

$$y = y_2(x), \quad [y_1(x) \leqslant y_2(x)].$$

Entonces, el área del dominio $D$ es igual a:

$$S = \int_a^b y_2(x)\,dx - \int_a^b y_1(x)\,dx.$$

Pero, la primera integral es una integral curvilínea a lo largo de la curva $l_2$ $(\widehat{MPN})$ puesto que $y = y_2(x)$ es la ecuación de esta curva; por tanto:

$$\int_a^b y_2(x)\,dx = \int_{MPN} y\,dx.$$

La segunda integral es una integral curvilínea a lo largo de la curva $l_1$ $(\widehat{MQN})$, es decir:

$$\int_a^b y_1(x)\,dx = \int_{MQN} y\,dx.$$

En virtud de la propiedad 1 de la integral curvilínea, tenemos:

$$\int_{MPN} y\,dx = -\int_{NPM} y\,dx.$$

Por consiguiente,

$$S = -\int_{NPM} y\,dx - \int_{MQN} y\,dx = -\int_L y\,dx. \qquad (5)$$

Tengamos en cuenta que la curva $L$ se recorre **en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.**

Si una parte de la frontera $L$ constituye un segmento $M_1M$, paralelo al eje $Oy$, entonces $\int_{(M_1)}^{(M)} y\,dx = 0$, y la igualdad (5) es válida también para este caso (fig. 332).

De modo semejante podemos demostrar que

$$S = \int_L x\,dy. \tag{6}$$

Sumando miembro a miembro las igualdades (5) y (6) y dividiendo por dos, obtenemos una fórmula más para calcular el área $S$:

$$S = \frac{1}{2}\int_L x\,dy - y\,dx. \tag{7}$$

**Ejemplo 3.** Calcular el área de la elipse

$$x = a\cos t,\ y = b \operatorname{sen} t.$$

**Solución.** Según la fórmula (7) hallamos:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [a\cos t\, b\cos t - b \operatorname{sen} t\,(-a \operatorname{sen} t)]\,dt = \pi ab.$$

Notemos que la fórmula (7), así como las fórmulas (5) y (6), son válidas también para las áreas de dominios cuyas fronteras se cortan por las paralelas a los ejes de coordenadas en más de dos puntos (fig. 333). Para demostrarlo, dividamos el dominio dado (fig. 333) en dos dominios regulares mediante la línea $l^*$. La fórmula (7) es válida en cada dominio.

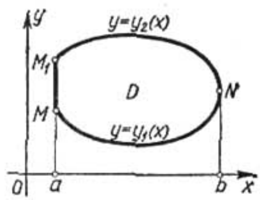


*Fig. 332*

Sumando miembro a miembro, obtenemos en el primer miembro el área del dominio dado y en el segundo, la integral curvilínea $\left(\text{con el coeficiente } \frac{1}{2}\right)$ tomada a lo largo de toda la frontera, puesto que la integral indicada a lo largo de la línea de división $l^*$ se toma dos veces: una vez en el sentido directo, y otra, en el sentido inverso, por lo cual es igual a cero.

**2. Cálculo del trabajo producido por una fuerza variable $F$ en una trayectoria curvilínea L.**

Ya hemos indicado al principio del § 1 que el trabajo de una fuerza $\boldsymbol{F} = X(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Y(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + Z(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$ a lo largo de una curva $L = MN$ es igual a la integral curvilínea:

$$A = \int_{(M)}^{(N)} X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dy + Z(x, y, z)\,dz.$$

Analicemos un ejemplo concreto del cálculo del trabajo de una fuerza.

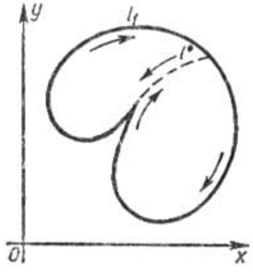


Fig. 333

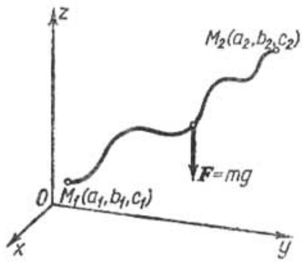


Fig. 334

**Ejemplo 4.** Calcular el trabajo $A$ de la fuerza de gravedad $F$ durante el desplazamiento de masa $m$ del punto $M_1$ $(a_1, b_1, c_1)$ al punto $M_2$ $(a_2, b_2, c_2)$ a lo largo de una trayectoria arbitraria $L$ (fig. 334).

**Solución.** Las proyecciones de la fuerza de gravedad $F$ sobre los ejes de coordenadas son:

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = -mg.$$

Por tanto, el trabajo buscado es:

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int_{c_1}^{c_2} (-mg)\,dz = mg\,(c_1 - c_2).$$

Como se ve, en este caso la integral curvilínea no depende de la trayectoria de integración, sino solamente de las posiciones de los puntos inicial y final. Hablando con mayor precisión, el trabajo de la fuerza de gravedad depende sólo de la diferencia en alturas ocupadas por el punto inicial y por el final.

## § 3. FORMULA DE GREEN

Determinemos la relación entre la integral doble extendida por un dominio plano $D$ y la integral curvilínea a lo largo de la frontera $L$ de este dominio.

Supongamos que en el plano $Oxy$ está dado un dominio $D$ regular tanto en la dirección de $Ox$, como $Oy$, limitado por un contorno cerrado $L$ (fig. 331). Sea este dominio limitado abajo por la curva $y = y_1(x)$ y encima, por la curva $y = y_2(x)$, $y_1(x) \leqslant y_2(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$.

En conjunto estas dos curvas forman el contorno cerrado $L$. Sean dadas en el dominio $D$ dos funciones continuas $X(x, y)$ y $Y(x, y)$, que tienen derivadas parciales continuas. Examinemos la integral

$$\iint_D \frac{\partial X(x, y)}{\partial y}\,dx\,dy.$$

Representándola en la forma de la integral iterada de segundo orden, obtenemos:

$$\iint_D \frac{dX}{dy}\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{dX}{dy}\,dy\right) dx = \int_a^b X(x,\ y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx =$$

$$= \int_a^b [X(x,\ y_2(x)) - X(x,\ y_1(x))]\,dx. \quad (1)$$

Notemos que la integral

$$\int_a^b X(x,\ y_2(x,)\,dx$$

es numéricamente igual a la integral curvilínea

$$\int_{(MPN)} X(x,\ y)\,dx,$$

a lo largo de la curva $MPN$, cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = x, \quad y = y_2(x),$$

donde $x$ es el parámetro.
De este modo,

$$\int_a^b X(x,\ y_2(x))\,dx = \int_{MPN} X(x,\ y)\,dx. \quad (2)$$

Análogamente, la integral

$$\int_a^b X(x,\ y_1(x))\,dx$$

es numéricamente igual a la integral curvilínea a lo largo del arco $MQN$

$$\int_a^b X(x,\ y_1(x))\,dx = \int_{(MQN)} X(x,\ y)\,dx. \quad (3)$$

Sustituyendo las expresiones (2) y (3) en la fórmula (1), obtenemos:

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{MPN} X(x,\ y)\,dx - \int_{MQN} X(x,\ y)\,dx. \quad (4)$$

Pero,

$$\int_{MQN} X(x,\ y)\,dx = -\int_{NQM} X(x,\ y)\,dx$$

(véase § 1, propiedad 1). Por consiguiente, podemos escribir la fórmula (4) en la forma:

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{MPN} X(x,\ y)\,dx + \int_{MQN} X(x,\ y)\,dx.$$

Pero, la suma de las integrales curvilíneas del segundo miembro es igual a la integral curvilínea a lo largo de toda la curva cerrada $L$ en sentido del movimiento de las agujas del reloj. Por tanto, la última igualdad puede ser reducida a la forma:

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{L\ (\text{según las agujas del reloj})} X(x,\ y)\,dx. \qquad (5)$$

Si una parte de la frontera está representada por un segmento $l_3$, paralelo al eje $Oy$, entonces tenemos $\int_{l_3} X(x,\ y)\,dx = 0$ y la ecuación (5) permanece válida también para este caso.

De manera igual hallamos:

$$\iint_D \frac{\partial Y}{\partial x}\,dx\,dy = -\int_{L\ (\text{según las agujas del reloj})} Y(x,\ y)\,dy \qquad (6)$$

Restando (6) de (5), obtenemos:

$$\iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dx\,dy = \int_{L\ (\text{según las agujas del reloj})} X\,dx + Y\,dy.$$

Si el sentido del recorrido del contorno $L$ es inverso al movimiento de las agujas de un reloj, tenemos *):

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_L X\,dx + Y\,dy.$$

Esta es así llamada *fórmula de Green* por nombre de físico y matemático inglés D. Green (1793—1841) **).

*) Si en una integral curvilínea por un contorno cerrado $L$ no está indicado el sentido del recorrido, se supone que esto se efectúa a la dirección contraria al movimiento de las agujas del reloj. Se hacen referencias especiales, si el recorrido está realizado en el sentido de las agujas del reloj.

**) Esta fórmula es un caso particular de una fórmula más general, obteda por el matemático ruso M. V. Ostrogradski.

Hemos supuesto que el dominio $D$ es regular. Pero, igual que en el problema del área (véase § 2) se puede demostrar que esta fórmula es válida para cualquier dominio que podemos dividir en los dominios regulares.

## § 4. CONDICIONES PARA QUE UNA INTEGRAL CURVILINEA NO DEPENDA DE LA TRAYECTORIA DE INTEGRACION

Examinemos la integral curvilínea

$$\int_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy,$$

a lo largo de una curva plana $L$ que une los puntos $M$ y $N$. Supongamos que las funciones $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ tienen derivadas parciales continuas en el dominio examinado $D$. Aclaremos las condiciones en las cuales la integral curvilínea no depende de la forma de la curva $L$, sino de la posición de los puntos $M$ y $N$. Analicemos dos curvas arbitrarias, $MPN$ y $MQN$ del dominio examinando $D$ que unen los puntos $M$ y $N$ (fig. 335).

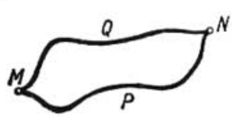

*Fig. 335*

Sea:

$$\int_{MPN} X\,dx + Y\,dy = \int_{MQN} X\,dx + Y\,dy, \tag{1}$$

es decir,

$$\int_{MPN} X\,dx + Y\,dy - \int_{MQN} X\,dx + Y\,dy = 0.$$

Luego, en virtud de las propiedades 1 y 2 de las integrales curvilíneas (§ 1) tenemos:

$$\int_{MPN} X\,dx + Y\,dy + \int_{NQM} X\,dx + Y\,dy = 0,$$

es decir, la integral curvilínea a lo largo del contorno cerrado $L$ es:

$$\int_{L} X\,dx + Y\,dy = 0.$$

En esta última fórmula la integral curvilínea está tomada a lo largo de un contorno cerrado $L$, compuesto de las curvas $MPN$ y y $NQM$. Es evidente que podemos considerar este contorno $L$ como arbitrario.

Por consiguiente, si tenemos la condición de que la integral curvilínea no depende de la forma de la curva que une los dos puntos arbitrarios $M$ y $N$, sino de la posición de éstos, resulta que esta integral a lo largo del contorno cerrado cualquiera es nula.

La conclusión recíproca también es válida: *si la integral curvilínea a lo largo de cualquier contorno cerrado es nula, ésta no depende de la forma de la curva que une los dos puntos arbitrarios, sino sólo de la posición de estos puntos.* En efecto, de la igualdad (2) se deduce la (1).

En el ejemplo 4, § 2, la integral curvilínea no depende de la trayectoria de integración. En cambio, en el ejemplo 3 la integral curvilínea depende de la trayectoria de integración, puesto que la integral a lo largo del contorno cerrado no es nula, sino da el área limitada por este contorno.

En los ejemplos 1 y 2 las integrales curvilíneas también dependen de la trayectoria de integración.

Naturalmente surge la pregunta: a qué condiciones deben satisfacer las funciones $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ para que la integral curvilínea $\int X\,dx + Y\,dy$ a lo largo de cualquier contorno cerrado sea nula. El teorema siguiente da la respuesta:

**Teorema.** *Sean $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ las dos funciones continuas en todos los puntos de cierto dominio $D$, igual que sus derivadas parciales, $\frac{\partial X(x, y)}{\partial y}$ y $\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x}$. Para que la integral curvilínea a lo largo de un contorno $L$ cerrado cualquiera de este dominio sea nula, es decir, para que*

$$\int_L X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy = 0 \tag{2}$$

*es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad*

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \tag{3}$$

*en todos los puntos del dominio $D$.*

**Demostración.** Examinemos un contorno cerrado arbitrario $L$ en el dominio $D$ y escribamos la fórmula de Green correspondiente a este contorno:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_L X\,dx + Y\,dy.$$

Si la condición (3) se cumple, la integral doble del primer miembro es idénticamente igual a cero y, por consiguiente:

$$\int_L X\,dx + Y\,dy = 0.$$

Queda así demostrado que la condición (3) es **suficiente.**

Demostremos ahora que esta condición es también **necesaria**, o sea, si la igualdad (2) se cumple para cualquier curva cerrada $L$ de $D$, entonces la condición (3) se satisface obligatoriamente en cada punto de este dominio.

Supongamos lo contrario: que se cumple la igualdad (2)

$$\int_L X\,dx + Y\,dy = 0,$$

y no se cumple la condición (3), es decir:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \neq 0,$$

aunque sea en un solo punto. Sea, por ejemplo, la desigualdad en cierto punto $P(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} > 0.$$

Como la función en el primer miembro es continua, ella es positiva y mayor que cierto número $\delta > 0$ en todos los puntos de un dominio $D'$, suficientemente pequeño que contiene el punto $P(x_0, y_0)$. Tomemos la integral doble de la diferencia

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y},$$

por este dominio $D'$. Por supuesto, ella es positiva. En efecto:

$$\iint_{D'} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy > \iint_{D'} \delta\,dx\,dy = \delta \iint_{D'} dx\,dy = \delta D' > 0.$$

Pero, según la fórmula de Green, el primer miembro de la última desigualdad es igual a la integral curvilínea a lo largo de la frontera $L'$ del dominio $D'$, esta integral, según la hipótesis, es nula. Por consiguiente, la última desigualdad contradice a la condición (2) y la suposición, de que la diferencia $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ sea distinta de cero, aunque en un solo punto, es falsa. De aqui se deduce que

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0$$

en todos los puntos del dominio dado $D$.

El teorema queda, pues, completamente demostrado.

En el § 9, cap. XIII (tomo II) hemos demostrado que el cumplimiento de la condición

$$\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial X(x, y)}{\partial y}$$

significa que la expresión $X\,dx + Y\,dy$ es **la diferencial total de cierta función** $u(x, y)$, es decir:

$$X\,dx + Y\,dy = du(x, y),$$

siendo:

$$X(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Y(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Pero, en este caso el vector

$$\boldsymbol{F} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

es el gradiente de la función $u(x, y)$; la función $u(x, y)$, cuyo gradiente es igual al vector $X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j}$, se llama *potencial* de este vector.

Demostremos que *en este caso la integral curvilínea* $I = \int\limits_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy$ *a lo largo de cualquier curva* $L$, *que une los puntos* $M$ y $N$, *es igual a la diferencia de los valores de la función* $u$ *en estos puntos*:

$$\int\limits_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy = \int\limits_{(M)}^{(N)} du(x, y) = u(N) - u(M).$$

**Demostración.** Si $X\,dx + Y\,dy$ es la diferencial total de la función $u(x, y)$, entonces $X = \frac{\partial u}{\partial x}$; $Y = \frac{\partial u}{\partial y}$ y la integral curvilínea toma la forma:

$$I = \int\limits_{(M)}^{(N)} \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy.$$

Para calcular esta integral escribamos las ecuaciones paramétricas de la curva $L$ que une los puntos $M$ y $N$:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Supongamos que al valor $t = t_0$ del parámetro corresponde el punto $M$ y al valor $t = T$, el punto $N$. Luego, la integral curvilínea se reduce a la siguiente integral definida:

$$I = \int\limits_{t_0}^{T} \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right] dt.$$

La expresión entre los corchetes es una función de $t$, al mismo tiempo esta función es la derivada total de la función $u[\varphi(t), \psi(t)]$ respecto a $t$. Por consiguiente:

$$I=\int_{t_0}^{T}\frac{\partial u}{\partial t}\,dt=u[\varphi(t),\ \psi(t)]\Big|_{t_0}^{T}=$$

$$=u[\varphi(t),\ \psi(t)]-u[\varphi(t_0),\ \psi(t_0)]=u(N)-u(M).$$

Como vemos, **la integral curvilínea de una diferencial total no depende de la forma de la curva, a la largo de la cual se efectúa la integración.**

La integral curvilínea a lo largo de una curva en el espacio tiene las mismas propiedades (véase § 7 de este capítulo).

**Observación.** A veces tenemos que analizar las integrales curvilíneas de una cierta función $X(x, y)$ a lo largo de la longitud del arco $L$:

$$\int_L X(x,\ y)\,ds=\lim_{\Delta s_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}X(x_i,\ y_i)\,\Delta s_i, \tag{4}$$

donde $ds$ es la diferencial del arco. Tales integrales se calculan de un modo análogo al usado para las integrales curvilíneas examinadas arriba. Supongamos que la curva $L$ está dada por las ecuaciones paramétricas:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),$$

donde $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ son las funciones continuas de $t$.

Sean $\alpha$ y $\beta$ los valores del parámetro $t$, correspondientes al origen y al extremo final del arco $L$.

Como es

$$ds=\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt,$$

obtenemos fórmula para calcular la integral (4):

$$\int_L X(x,\ y)\,ds=\int_{\alpha}^{\beta}X[\varphi(t),\ \psi(t)]\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt.$$

Podemos examinar la integral curvilínea a lo largo del arco de una curva en el espacio $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$:

$$\int_L X(x,\ y,\ z)\,ds=\int_{\alpha}^{\beta}X[\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)]\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2+\chi'(t)^2}\,dt.$$

Con ayuda de las integrales curvilíneas a lo largo del arco podemos determinar, por ejemplo, las coordenadas de los centros de gravedad de diferentes líneas.

Razonando análogamente que en el § 8, cap. XII (tomo I) obtenemos la fórmula para calcular las coordenadas del centro de gravedad de una curva en el espacio:

$$x_c = \frac{\int\limits_L x\,ds}{\int\limits_L ds}, \quad y_c = \frac{\int\limits_L y\,ds}{\int\limits_L ds}, \quad z_c = \frac{\int\limits_L z\,ds}{\int\limits_L ds}. \tag{5}$$

**Ejemplo.** Hallar las coordenadas del centro de gravedad de una espira de un hélice

$$x = a\cos t, \quad y = a\,\mathrm{sen}\,t, \quad z = bt \quad (0 \leqslant t < 2\pi),$$

si su densidad lineal es constante.

**Solución.** Aplicando la fórmula (5), encontramos:

$$x_c = \frac{\int\limits_0^{2\pi} a\cos t\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\,t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt}{\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\,t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt} = \frac{\int\limits_0^{2\pi} a\cos t\sqrt{a^2+b^2}\,dt}{\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}\,dt} =$$

$$= \frac{a\sqrt{a^2+b^2}\cdot 0}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}} = 0.$$

Análogamente, $y_c = 0$,

$$z_c = \frac{\int\limits_0^{2\pi} bt\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\,t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b\cdot 4\pi^2\sqrt{a^2+b^2}}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}} = \pi b.$$

Así, las coordenadas del centro de gravedad de una espira del hélice son:

$$x_c = 0, \quad y_c = 0, \quad z_c = \pi b.$$

## § 5. INTEGRAL DE SUPERFICIE

Sea dado en el sistema de coordenadas rectangulares $Oxyz$ un dominio $V$ y sea $\sigma$ una superficie limitada por una curva $\lambda$ en el espacio.

Respecto a la superficie $\sigma$, supongamos que en cada su punto $P$ la dirección positiva de la normal se determina por el vector unitario $\boldsymbol{n}(P)$, cuyos cosenos directores son funciones continuas de las coordenadas de los puntos de la superficie.

Supongamos que en cada punto de la superficie está determinado un vector

$$\boldsymbol{F} = X(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Y(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + Z(x, y, z)\,\boldsymbol{k},$$

donde $X$, $Y$, $Z$, son las funciones continuas de las coordenadas. Dividamos arbitrariamente la superficie en los dominios o áreas elementales $\Delta\sigma_i$. En cada una de estas áreas tomemos un punto arbitrario $P_i$ y formemos la suma

$$\sum_i (F(P_i)\, n(P_i))\, \Delta\sigma_i, \tag{1}$$

donde:

$F(P_i)$ es el valor del vector $F$ en el punto $P_i$ del área elemental $\Delta\sigma_i$, $n(P_i)$ es el vector unitario de la normal en este punto; $Fn$ es el producto escalar de estos vectores.

El límite de la suma (1), extendida por todas las áreas $\Delta\sigma_i$, cuando los diámetros de todas estas áreas tienden a cero, se llama *integral de superficie* y se designa por el símbolo

$$\iint_\sigma Fn\, d\sigma.$$

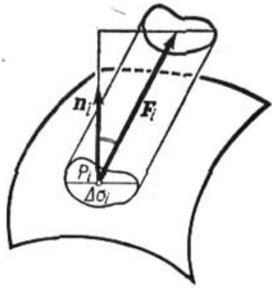


*Fig. 336*

Así, según la definición *) tenemos:

$$\lim_{\text{diám}\, \Delta\sigma_i \to 0} \sum F_i n_i \Delta\sigma_i = \iint_\sigma Fn\, d\sigma. \tag{2}$$

Cada término de la suma (1):

$$F_i n_i\, \Delta\sigma_i = F_i\, \Delta\sigma_i \cos(n_i, F_i) \tag{3}$$

tiene la siguiente interpretación mecánica: este producto es igual al volumen de un cilindro de base $\Delta\sigma_i$ y altura $F_i \cos(n_i, F_i)$. Si el vector $F$ es la velocidad de un líquido que corre por la siperficie $\sigma$, el producto (3) es igual a la cantidad del líquido que pasa por $\Delta\sigma_i$ en una unidad de tiempo, en la dirección del vector $n_i$ (fig. 336).

Sí $F$ es el vector de velocidad del líquido en un punto dado, la expresión $\iint_\sigma Fn\, d\sigma$ designa la cantidad total de líquido que corre por la superficie $\sigma$ en la dirección positiva en una unidad de tiempo. Por eso, la integral de superficie (2) se llama, también, *flujo del campo vectorial $F$ a través de la superficie $\sigma$*.

De la definición de integral de superficie se deduce que si dividimos la superficie $\sigma$ en las partes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ obtenemos:

$$\iint_\sigma Fn\, d\sigma = \iint_{\sigma_1} Fn\, d\sigma + \iint_{\sigma_2} Fn\, d\sigma + \ldots + \iint_{\sigma_k} Fn\, d\sigma.$$

Representemos el vector unitario $n$ mediante sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas:

$$n = \cos(n, x)\, i + \cos(n, y)\, j + \cos(n, z)\, k.$$

*) Si la superficie $\sigma$ es tal que en cada uno de sus puntos un plano tangente varía continuamente su posición en función del desplazamiento del punto $P$ por la superficie, y si la función vectorial $F$ es continua en esta superficie, entonces este límite existe (admitamos sin demostración este teorema de la existencia de las integrales de superficie).

Poniendo en la integral (2) expresiones de los vectores de $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{n}$ en función de sus proyecciones, obtenemos:

$$\iint_\sigma \boldsymbol{F}\boldsymbol{n}\,d\sigma = \iint_\sigma [X\cos(n,\ x) + Y\cos(n,\ y) + Z\cos(n,\ z)]\,d\sigma. \quad (2')$$

El producto $\Delta\sigma\cos(n,\ z)$ es la proyección del área elemental $\Delta\sigma$ sobre el plano $Oxy$ (fig. 337); afirmación análoga es válida también para otros productos

$$\Delta\sigma\cos(n,\ x) = \Delta\sigma_{yz},\quad \Delta\sigma\cos(n,\ y) = \Delta\sigma_{xz},\quad \Delta\sigma\cos(n,\ z) = \Delta\sigma_{xy}, \quad (4)$$

donde $\Delta\sigma_{yz}$, $\Delta\sigma_{xz}$, $\Delta\sigma_{xy}$ son las proyecciones de área elemental $\Delta\sigma$ sobre los planos de coordenadas correspondientes.

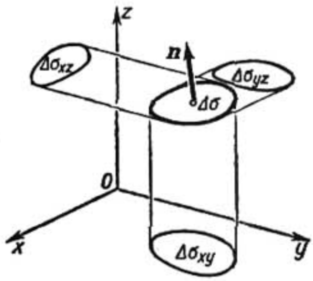


*Fig. 337*

En virtud de lo expuesto, la integral (2′) podemos escribir también en la forma:

$$\iint_\sigma \boldsymbol{F}\boldsymbol{n}\,d\sigma = \iint_\sigma [X\cos(n,\ x) + Y\cos(n,\ y) + Z\cos(n,\ z)]\,d\sigma =$$
$$= \iint_\sigma X\,dy\,dz + Y\,dz\,dx + Z\,dx\,dy. \quad (2'')$$

## § 6. CALCULO DE LA INTEGRAL DE SUPERFICIE

El cálculo de una integral por una superficie curvada se reduce al cálculo de una integral doble por un dominio plano.

Indiquemos, por ejemplo, un procedimiento del cálculo de la integral

$$\iint_\sigma Z\cos(n,\ z)\,d\sigma.$$

Supongamos que la superficie $\sigma$ es tal que toda paralela al eje $Oz$ la corta en un solo punto. Por tanto, podemos escribir la ecuación de la superficie en la forma:

$$z = f(x, y).$$

Designando por $D$ la proyección de la superficie $\sigma$ sobre el plano $Oxy$, obtenemos (en virtud de la definición de la integral de superficie):

$$\iint\limits_{\sigma} Z(x, y, z)\cos(n, z)\,d\delta = \lim_{\text{diám}\,\Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Z(x_i, y_i, z_i)\cos(n_i, z)\Delta\sigma_i.$$

Tomando en cuenta la última de las fórmulas (4) § 5, obtenemos:

$$\iint\limits_{\sigma} Z\cos(n, z)\,d\sigma = \lim_{\text{diám}\,\Delta\sigma_{xy} \to 0} \sum_{i=1}^{n} Z(x_i, y_i, f(x_i, y_i)(\Delta\sigma_{xy})_i =$$

$$= \pm \lim_{\text{diám}\,\Delta\sigma \to 0} \sum_{i=1}^{n} Z(x_i, y_i, f(x_i, y_i))\,|\Delta\sigma_{xy}|_i,$$

la última expresión es una suma integral para la integral doble de la función $Z(x, y, f(x, y))$ por el dominio $D$. Por consiguiente:

$$\iint\limits_{\sigma} Z\cos(n, z)\,d\sigma = \pm\iint\limits_{D} Z(x, y, f(x, y))\,dx\,dy.$$

El signo «más» delante de la integral doble se pone, cuando $\cos(n, z) \geqslant 0$, y el signo «menos», cuando $\cos(n, z) \leqslant 0$.

Si la superficie $\sigma$ no satisface a la condición indicada al principio de este párrafo, entonces, es preciso dividirla en partes, que le satisfagan a está condición, y calcular la integral por cada parte separadamente.

De modo análogo calculamos las integrales

$$\iint\limits_{\sigma} X\cos(n, x)\,d\sigma; \qquad \iint\limits_{\sigma} Y\cos(n, y)\,d\sigma.$$

Lo demostrado anteriormente justifica la expresión de una integral de superficie en la forma (2″) § 5. El segundo miembro de la igualdad (2″) se puede considerar como una suma de integrales dobles por las proyecciones correspondientes del dominio $\sigma$. Los signos de estas integrales dobles (o sea, los signos de los productos $dy\,dz$, $dx\,dz$, $dx\,dy$) se toman de acuerdo con la regla indicada arriba.

**Ejemplo 1.** Sea $\sigma$ una superficie cerrada tal que toda paralela al eje $Oz$ la corta no más que en dos puntos.

Examinemos la integral

$$\iint\limits_{\sigma} z\cos(n, z)\,d\sigma.$$

Tomemos la normal exterior por la dirección positiva de la normal. En el caso dado podemos dividir la superficie en dos partes, inferior y superior, de ecuaciones correspondientes:

$$z = f_1(x, y) \text{ y } z = f_2(x, y).$$

Designemos por $D$ la proyección de $\sigma$ sobre el plano $Oxy$ (fig. 338); entonces:

$$\iint_\sigma z \cos(n, z)\, d\sigma = \iint_D f_2(x, y)\, dx\, dy - \iint_D f_1(x, y)\, dx\, dy.$$

La segunda integral tiene el signo «menos» puesto que en la integral de superficie el signo del producto $dx\, dy$ en la superficie $z = f_1(x, y)$ debe tomarse negativo, siendo negativo $\cos(n, z)$ para esta superficie.

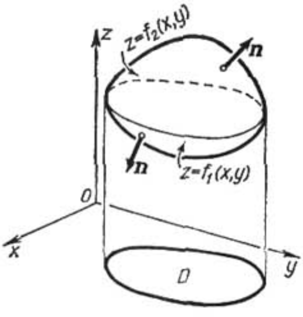


*Fig. 338*

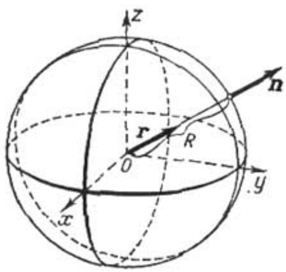


*Fig. 339*

Pero, la diferencia de las integrales del segundo miembro de la última fórmula representa el volumen limitado por la superficie $\sigma$. Entonces el volumen de un cuerpo, limitado por la superficie cerrada $\sigma$, es igual a la siguiente integral de superficie:

$$V = \iint_\sigma z \cos(n, z)\, d\sigma.$$

**Ejemplo 2.** Una carga eléctrica positiva $e$, colocada en el origen de coordenadas, genera un campo vectorial tal que, según la ley de Coulomb, en cada punto del espacio se determina el vector $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{F} = k\frac{e}{r^2}\boldsymbol{r},$$

donde $r$ es la distancia del punto examinado al origen de coordenadas; $\boldsymbol{r}$ es el vector unitario dirigido a lo largo del radio vector del punto dado (fig. 339); $k$ es un factor constante.

Determinar el flujo del campo vectorial a través de una esfera de radio $R$ y centro en el origen de coordenadas.

**Solución.** Tomando en cuenta que $r = R = \text{const}$, tenemos:

$$\iint_\sigma k\frac{e}{r^2}\boldsymbol{rn}\, d\sigma = \frac{ke}{R^2}\iint_\sigma \boldsymbol{rn}\, d\sigma.$$

Pero, la última integral es igual al área de la superficie $\sigma$. En efecto, según a definición de integral (teniendo en cuenta que $\boldsymbol{rn}=1$), obtenemos:

$$\iint_{\sigma} \boldsymbol{rn}\, d\sigma = \lim_{\Delta\sigma_k \to 0} \sum \boldsymbol{r}_k \boldsymbol{n}_k \Delta\sigma_k = \lim_{\Delta\sigma_k \to 0} \sum \Delta\sigma_k = \sigma.$$

Por tanto, el flujo buscado es $\frac{ke}{R^2}\sigma = \frac{ke}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = 4\pi ke$.

## § 7. FORMULA DE STOKES

Supongamos que tenemos superficie $\sigma$ tal, que toda paralela al eje $Oz$ la corta en un solo punto. Designemos por $\lambda$ la frontera de $\sigma$. Tomemos la dirección positiva de la normal $\boldsymbol{n}$ de modo tal que ésta forme con la dirección positiva del eje $Oz$ un ángulo agudo (fig. 340).

Sea $z = f(x, y)$ la ecuación de la superficie. Los cosenos directores de la normal se expresan mediante las fórmulas (véase § 6, cap. IX, tomo I):

$$\left.\begin{aligned} \cos(n, x) &= \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}; \\ \cos(n, y) &= \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}; \\ \cos(n, z) &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Supongamos que todos los puntos de $\sigma$ pertenecen a un cierto dominio $V$. Sea dada en el dominio $V$ una función continua $X(x, y, z)$, siendo continuas, también, sus derivadas parciales de primer orden, examinemos la integral curvilínea a lo largo de la curva $\lambda$

$$\int_{\lambda} X(x, y, z)\, dx.$$

En la curva $\lambda$ tenemos la igualdad $z = f(x, y)$, donde $x$ e $y$ son las coordenadas de los puntos de la línea $L$ que es la proyección de $\lambda$ sobre el plano $Oxy$ (fig. 340). Por consiguiente, podemos escribir la igualdad

$$\int_{\lambda} X(x, y, z)\, dx = \int_{L} X(x, y, f(x, y))\, dx. \qquad (2)$$

La última integral es curvilínea a lo largo de $L$. Transformémosla según la fórmula de Green, haciendo:

$$X(x,\ y,\ f(x,\ y)) = \overline{X}(x,\ y), \qquad 0 = \overline{Y}(x,\ y).$$

Sustituyendo en la fórmula de Green $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ por sus expresiones. obtenemos:

$$-\iint\limits_D \frac{\partial X(x,\ y,\ f(x,\ y))}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_L X(x,\ y,\ f(x,\ y))\,dx, \qquad (3)$$

donde el dominio $D$ está limitado por la curva $L$. A base de la derivada de la función compuesta $X(x,\ y,\ f(x,\ y))$ en la que $y$ entra tanto directamente, como mediante la función $z = f(x,\ y)$, hallemos:

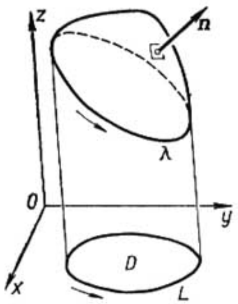

*Fig. 340*

$$\frac{\partial X(x,\ y,\ f(x,\ y))}{\partial y} = \frac{\partial X(x,\ y,\ z)}{\partial y} + $$

$$+\frac{\partial X(x,\ y,\ z)}{\partial z}\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}. \qquad (4)$$

Sustituyendo la expresión (4) en el primer miembro de (3), obtenemos:

$$-\iint\limits_D \left[\frac{\partial X(x,\ y,\ z)}{\partial y} + \frac{\partial X(x,\ y,\ z)}{\partial z}\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\right] dx\,dy =$$

$$= \int\limits_L X(x,\ y,\ f(x,\ y))\,dx.$$

Tomando en cuenta la igualdad (2), se puede escribir la última ecuación en la forma:

$$\int\limits_\lambda X(x,\ y,\ z)\,dx = -\iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy - \iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy. \qquad (5)$$

Las dos últimas integrales se transforman en las integrales de superficie. Efectivamente, de la fórmula (2″), § 5 se deduce que, si tenemos una cierta función $A(x,\ y,\ z)$, se verifica la igualdad:

$$\iint\limits_\sigma A(x,\ y,\ z)\cos(n,\ z)\,d\sigma = \iint\limits_D A\,dx\,dy.$$

En virtud de esta igualdad, las integrales del segundo miembro de la igualdad (5) se transforman del modo siguiente:

$$\left.\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy &= \iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial y}\cos(n,\ z)\,d\sigma,\\ \iint_D \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy &= \iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\cos(n,\ z)\,d\sigma.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Transformemos la última integral empleando las fórmulas (1) del párrafo presente: dividiendo miembro a miembro la segunda de estas igualdades por la tercera, hallamos:

$$\frac{\cos(n,\ y)}{\cos(n,\ z)} = -\frac{\partial f}{\partial y},$$

o sea,

$$\frac{\partial f}{\partial y}\cos(n,\ z) = -\cos(n,\ y).$$

Por consiguiente,

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy = -\iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial z}\cos(n,\ y)\,d\sigma. \tag{7}$$

Poniendo las expresiones (6) y (7) en la ecuación (5), obtenemos:

$$\int_\lambda X(x,\ y,\ z)\,dx = -\iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial y}\cos(n,\ z)\,d\sigma + \iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial z}\cos(n,\ y)\,d\sigma. \tag{8}$$

El sentido del recorrido del contorno $\lambda$ debe ser acordado con la dirección elegida de la normal positiva $n$. Es decir, si un observador mira desde el extremo de la normal, él ve que el recorrido a lo largo de $\lambda$ se realiza contra el movimiento de las agujas del reloj.

La fórmula (8) es válida para toda superficie, siempre y cuando puede dividirse en partes, cuyas ecuaciones tengan la forma $z = f(x,\ y)$.

Análogamente, podemos escribir las fórmulas:

$$\int_\lambda Y(x,\ y,\ z)\,dy = \iint_\sigma \left[-\frac{\partial Y}{\partial z}\cos(n,\ x) + \frac{\partial Y}{\partial x}\cos(n,\ z)\right] d\sigma, \tag{8'}$$

$$\int_\lambda Z(x,\ y,\ z)\,dz = \iint_\sigma \left[-\frac{\partial Z}{\partial x}\cos(n,\ y) + \frac{\partial Z}{\partial y}\cos(n,\ x)\right] d\sigma. \tag{8''}$$

Sumando miembro a miembro las igualdades (8), (8'), (8"), obtenemos la fórmula:

$$\int X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \iint\limits_{\sigma} \left[ \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos(n, z) + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos(n, y) \right] d\sigma. \quad (9)$$

Esta es así llamada *fórmula de Stokes* [físico y matemático inglés D. Stokes (1819—1903)].

Esta fórmula establece la dependencia entre la integral de superficie $\sigma$ y la integral curvilínea a lo largo de la frontera $\lambda$ de $\sigma$, siendo recorrida $\lambda$ según la regla indicada arriba.

El vector $B$ determinado por las proyecciones

$$B_x = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}; \quad B_y = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}; \quad B = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y},$$

se llama *rotacional* de la función vectorial $\boldsymbol{F} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$ y se designa por el símbolo rot $\boldsymbol{F}$.

Por tanto, en fórmula **vectorial** la fórmula (9) toma la forma:

$$\int\limits_{\lambda} \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{s} = \iint\limits_{\sigma} \boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{F}\,d\sigma, \quad (9')$$

y podemos enunciar el teorema de Stokes así.

*La circulación de un vector a lo largo de un contorno cerrado que limita una superficie es igual al flujo de su rotacional a través de esta superficie.*

**Observación.** Si la superficie $\sigma$ es una parte del plano, paralelo al $Oxy$, entonces $\Delta z = 0$, y obtenemos ya la fórmula de Green, como caso particular de la de Stokes.

De la fórmula (9) se deduce que si

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

la integral curvilínea a lo largo de toda curva cerrada $\lambda$ en el espacio es nula:

$$\int\limits_{\lambda} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0. \quad (11)$$

Entonces, podemos decir que aquí la integral curvilínea no depende de la forma de la curva de integración.

Igual que en el caso de una curva plana podemos mostrar que, para el cumplimiento de la igualdad (11), las condiciones (10) no sólo son suficientes, sino también necesarias.

Después de satisfacer estas condiciones, el elemento de integración es la diferencial total de cierta función $u(x, y, z)$:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = du(x, y, z)$$

y, por tanto,

$$\int_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int_{(M)}^{(N)} du = u(N) - u(M).$$

Esto se demuestra igual que la fórmula correspondiente para una función de dos variables (véase § 4).

**Ejemplo 1.** Escribamos las ecuaciones fundamentales de la dinámica de un punto material:

$$m\frac{dv_x}{dt} = X;\quad m\frac{dv_y}{dt} = Y;\quad m\frac{dv_z}{dt} = Z.$$

Aquí, $m$ es la masa del punto; $X$, $Y$, $Z$ son proyecciones sobre los ejes de coordenadas de la fuerza aplicada al punto;

$$v_x = \frac{dx}{dt},\quad v_y = \frac{dy}{dt},\quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

son proyecciones de la velocidad $v$ sobre los ejes de coordenadas. Multipliquemos los dos miembros de las ecuaciones escritas por las expresiones

$$v_x\,dt = dx,\quad v_y\,dt = dy,\quad v_z\,dt = dz.$$

Al sumar las igualdades miembro a miembro, obtenemos:

$$m(v_x\,dv_x + v_y\,dv_y + v_z\,dv_z) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz;$$

$$m\frac{1}{2}\,d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Puesto que $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$, podemos escribir:

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Calculemos la integral a lo largo de la trayectoria que une los puntos $M_1$ y $M_2$:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{(M_1)}^{(M_2)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

donde $v_1$ y $v_2$ son las velocidades en los puntos $M_1$ y $M_2$.

La última igualdad expresa el teorema de las fuerzas vivas: el incremento de la energía cinética durante el paso de un punto al otro es igual al trabajo de la fuerza que actúa sobre la masa $m$.

**Ejemplo 2.** Determinar el trabajo de la fuerza de atracción newtoniana hacia un centro inmóvil de una masa $m$ durante el desplazamiento de una masa unitaria desde la posición $M_1(a_1, b_1, c_1)$ a la $M_2(a_2, b_2, c_2)$.

**Solución.** Supongamos que el origen de coordenadas se encuentra en el centro inmóvil de atracción. Designemos por $r$ el radio vector del punto $M$

(fig. 341) que corresponde a una posición arbitraria de la masa unitaria, y por $r^0$, el vector unitario orientado a lo largo del vector $r$. Entonces

$$F = -\frac{km}{r^2} r^0,$$

donde $k$ es la constante universal de gravitación. Las proyecciones de la fuerza $F$ sobre los ejes de coordenadas son:

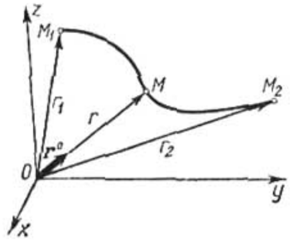


*Fig. 341*

$$X = -km \frac{1}{r^2} \frac{x}{r}; \; Y = -km \frac{1}{r^2} \frac{y}{r},$$

$$Z = -km \frac{1}{r^2} \frac{z}{r}.$$

Luego el trabajo de la fuerza $F$ en la trayectoria $M_1M_2$ es igual a:

$$A = -km \int_{(M_1)}^{(M_2)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{r^3} =$$

$$= -km \int_{(M_1)}^{(M_2)} \frac{r\,dr}{r^3} = km \int_{(M_1)}^{(M_2)} d\left(\frac{1}{r}\right),$$

(puesto que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; $r\,dr = x\,dx + y\,dy + z\,dz$). Designando por $r_1$ y $r_2$ las longitudes de radios vectores de los puntos $M_1$ y $M_2$, obtenemos:

$$A = km\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

De modo que, en este caso, la integral curvilínea tampoco depende de la forma de la curva de integración, sino de las posiciones de los puntos inicial y final. La función $u = \frac{km}{r}$ se llama *potencial* del campo de atracción, generado por la masa $m$. En el caso dado

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \; Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \; Z = \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$A = u(M_2) - u(M_1),$$

es decir, el trabajo para desplazar la masa unitaria es igual a la diferencia entre los valores de la potencial en los puntos inicial y final.

## § 8. FORMULA DE OSTROGRADSKI

Sea dado en el espacio un dominio regular tridimensional $V$, limitado por una superficie cerrada $\sigma$; la proyección de $V$ sobre el plano $Oxy$ da el dominio bidimensional regular $D$. Supongamos que se puede dividir la superficie $\sigma$ en tres partes $\sigma_1$, $\sigma_2$ y $\sigma_3$ de modo que las ecuaciones de las dos primeras tengan la forma:

$$z = f_1(x, y) \quad \text{y} \quad z = f_2(x, y),$$

donde $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$ son las funciones continuas en el dominio $D$, y la tercera parte, $\sigma_3$, es una superficie cilíndrica con la generatriz paralela al eje $Oz$.

Examinemos la integral

$$I = \iiint\limits_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z}\, dx\, dy\, dz.$$

Al principio, integremos respecto a $z$:

$$I = \iint\limits_D \left( \int\limits_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} \frac{\partial Z}{\partial z}\, dz \right) dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_D Z(x, y, f_2(x, y))\, dx\, dy - \iint\limits_D Z(x, y, f_1(x, y))\, dx\, dy. \quad (1)$$

Definamos en la normal a la superficie la dirección determinada, a saber, la dirección que coincide con la de la normal exterior a la superficie $\sigma$. Entonces, $\cos(n, z)$ en la superficie $\sigma_2$ es positivo, en la $\sigma_1$ es negativo y en la superficie $\sigma_3$ es nulo.

Las integrales dobles del segundo miembro de la igualdad (1) son iguales a las integrales correspondientes de superficie

$$\iint\limits_D Z(x, y, f_2(x, y))\, dx\, dy = \iint\limits_{\sigma_2} Z(x, y, z) \cos(n, z)\, d\sigma, \quad (2')$$

$$\iint\limits_D Z(x, y, f_1(x, y))\, dx\, dy = \iint\limits_{\sigma_1} Z(x, y, z)(-\cos(n, z))\, d\sigma.$$

En la última integral hemos puesto $(-\cos(n, z))$ por que los elementos de las superficies $\sigma_1$ y $\sigma_2$ y el elemento del área $\Delta s$ del dominio $D$ están ligados por la correlación $\Delta s = \Delta\sigma\,[-\cos(n, z)]$, puesto que el ángulo $(n, z)$ es obtuso.

Así,

$$\iint\limits_D Z(x, y, f_1(x, y))\, dx\, dy = -\iint\limits_{\sigma_1} Z(x, y, f_1(x, y)) \cos(n, z)\, d\sigma. \quad (2'')$$

Sustituyendo (2′) y (2″) en la igualdad (1), tenemos:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint\limits_{\sigma_2} Z(x, y, z) \cos(n, z)\, d\sigma + \iint\limits_{\sigma_1} Z(x, y, z) \cos(n, z)\, d\sigma.$$

Para comodidad de los cálculos ulteriores, escribamos la última ecuación en la forma (sumado $\iint\limits_{\sigma_3} Z(x, y, z) \cos nz\, d\sigma = 0$, puesto que en la superficie $\sigma_3$ se verifica la igualdad $\cos nz = 0$):

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_{\sigma_2} Z\cos(n, z)\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma_1} Z\cos(n, z)\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma_3} Z\cos(n, z)\,d\sigma.$$

Pero, la suma de las integrales del segundo miembro de la última igualdad es igual a la integral extendida por toda la superficie cerrada $\sigma$, por consiguiente:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\sigma} Z(x, y, z)\cos(n, z)\,d\sigma.$$

De un modo semejante, obtenemos las correlaciones:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Y}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\sigma} Y(x, y, z)\cos(n, y)\,d\sigma,$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\sigma} X(x, y, z)\cos(n, x)\,d\sigma.$$

Sumando miembro a miembro las tres últimas ecuaciones, obtenemos *la fórmula de Ostrogradski* *):

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_{\sigma} (X\cos(n, x) + Y\cos(n, y) + Z\cos(n, z))\,d\sigma. \qquad (2)$$

La expresión $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ se llama *divergencia* del vector (o sea, divergencia de la función vectorial)

$$\boldsymbol{F} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$$

y se designa por el símbolo div $\boldsymbol{F}$:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

---

*) Esta fórmula (llamada también de Ostrogradski — Gauss) fue obtenida por el célebre matemático ruso M. V. Ostrogradski (1801—1861) y publicada por él en 1828 en el artículo «Notas sobre la teoría del calor».

Indiquemos que esta fórmula es válida para todo dominio que puede ser dividido en dominios parciales que satisfacen a las condiciones expuestas al principio del párrafo corriente.

Demos una interpretación hidromecánica de la fórmula obtenida.

Supongamos que $\boldsymbol{F} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$ es el vector de velocidad de un líquido que corre a través del dominio $V$. En este caso, la integral de superficie en la fórmula (2) es la integral de la proyección del vector $\boldsymbol{F}$ sobre la normal exterior $\boldsymbol{n}$; esta integral da la cantidad del líquido que sale de $V$ a través de la superficie $\sigma$ en una unidad de tiempo (o que entra en el dominio $V$, si la integral es negativa). Esta cantidad se expresa mediante la integral triple de div $\boldsymbol{F}$.

Si div $\boldsymbol{F} \equiv 0$, la integral doble extendida por toda la superficie cerrada es nula, es decir, la cantidad del líquido que sale (o entra) a través de toda la superficie cerrada $\sigma$ es igual a cero (no hay fuentes). Hablando con mayor precisión, la cantidad del líquido que entra en el interior del dominio es igual a la que sale de éste.

En forma vectorial la fórmula de Ostrogradski se escribe así:

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dv = \iint\limits_\sigma \boldsymbol{F}\boldsymbol{n}\, ds \tag{1'}$$

y se anuncia diciendo: *la integral de la divergencia de un campo vectorial $\boldsymbol{F}$, extendida por cierto volumen, es igual al flujo del vector a través de la superficie que limita este volumen.*

## § 9. OPERADOR DE HAMILTON Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES

Sea una función $u = u(x, y, z)$. En cada punto del dominio donde está definida y derivada la función $u(x, y, z)$ se determina el gradiente:

$$\operatorname{grad} u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}. \tag{1}$$

El gradiente de la función $u(x, y, z)$ se designa, a veces, de la manera siguiente:

$$\nabla u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}; \tag{2}$$

el signo $\nabla$ es una delta invertida y se llama «nabla».

1) Es cómodo escribir la ecuación (2) en la forma simbólica:

$$\nabla u = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) u \tag{2'}$$

y considerar el símbolo

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3}$$

como un «vector simbólico». Este vector simbólico se llama *hamiltoniano* u *operador de Hamilton*, o, simplemente, nabla ($\nabla$ — operador). De las fórmulas (2) y (2′) se deduce que, al «multiplicar» el vector simbólico $\nabla$ por la función escalar $u$, obtenemos el gradiente de esta función:

$$\nabla u = \operatorname{grad} u. \tag{4}$$

2) Podemos formar un producto escalar del vector simbólico $\nabla$ por el vector $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z$:

$$\nabla \boldsymbol{F} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}X + \frac{\partial}{\partial y}Y + \frac{\partial}{\partial z}Z = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \operatorname{div} \boldsymbol{F}$$

(véase el § 8). Así,

$$\nabla \boldsymbol{F} = \operatorname{div} \boldsymbol{F}. \tag{5}$$

3) Formemos un producto escalar del vector simbólico $\nabla$ por el vector $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z$:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z) =$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Y & Z \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Z \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ X & Y \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) - \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) =$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = \operatorname{rot} \boldsymbol{F}$$

(véase el § 7). Así,

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \operatorname{rot} \boldsymbol{F}. \tag{6}$$

De lo expuesto se deduce que el uso del vector simbólico $\nabla$ nos permite expresar las operaciones vectoriales de una manera muy breve. Examinemos unas cuantas fórmulas más.

4) El campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z$ se llama *campo vectorial potencial*, si el vector $\boldsymbol{F}$ es el gradiente de cierta

función escalar $u\ (x,\ y,\ z)$:

$$\boldsymbol{F} = \text{grad } u,$$

o sea,

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

En este caso, las proyecciones del vector $\boldsymbol{F}$ son:

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

De estas igualdades se deduce (véase § 12, cap. VIII, tomo I):

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}$$

ó

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0.$$

Por consiguiente, para el vector examinado $\boldsymbol{F}$ tenemos:

$$\text{rot } \boldsymbol{F} = 0.$$

Así, obtenemos:

$$\text{rot (grad } u) = 0. \tag{7}$$

Aplicando $\nabla$ — operador, en virtud de las fórmulas (4) y (6), podemos escribir la igualdad (7) así:

$$(\nabla \times \nabla u) = 0. \tag{7'}$$

Usando la propiedad de que, para multiplicar un producto vectorial por un escalar es suficiente multiplicar esta magnitud escalar por uno de los factores, escribamos:

$$(\nabla \times \nabla)\, u = 0. \tag{7''}$$

Aquí, el operador $\nabla$ de nuevo tiene las propiedades de un vector ordinario: el producto vectorial de un vector por sí mismo es nulo.

El campo vectorial $\boldsymbol{F}\ (x,\ y,\ z)$ para que rot $\boldsymbol{F} = 0$ se llama *irrotacional*. De la igualdad (7) se deduce que todo campo potencial es irrotacional.

La conclusión inversa también es válida: si algún campo vectorial $\boldsymbol{F}$ es irrotacional, es también potencial. Esta afirmación es correcta, lo que se deduce de los razonamientos dados en el final del § 7.

5) El campo vectorial $\boldsymbol{F}\ (x,\ y,\ z)$, para que div $\boldsymbol{F} = 0$, es decir, el campo vectorial que no tiene fuentes (véase el § 8) se llama *solenoidal*.

Demostremos que

$$\text{div (rot } \boldsymbol{F}) = 0, \tag{8}$$

es decir, que el campo de rotacionales es libre de fuentes.

En efecto, si $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z$, entonces:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

y por esto:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0.$$

Aplicado el $\nabla$ — operador, escribamos la igualdad (8) en la forma:

$$\nabla (\nabla \times \boldsymbol{F}) = 0. \tag{8'}$$

El primer miembro de esta igualdad lo podemos considerar como un producto vectorial y escalar (mixto) de los tres vectores: $\nabla$, $\nabla$, $\boldsymbol{F}$, dos de los cuales son iguales. Es evidente que este producto es nulo.

6) Sea un campo escalar $u = u(x, y, z)$. Determinemos el campo de gradientes:

$$\operatorname{grad} u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Ahora hallemos:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

ó

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{9}$$

El segundo miembro de esta expresión se llama *operador de Laplace* de la función $u$ y se designa

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{10}$$

Por consiguiente, podemos escribir la igualdad (9) en la forma:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u. \tag{11}$$

Con ayuda del $\nabla$ — operador escribamos la ecuación (11):

$$(\nabla \nabla u) = \Delta u. \tag{11'}$$

Notemos que la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{12}$$

ó

$$\Delta u = 0 \tag{12'}$$

se llama *ecuación de Laplace*. La función que satisface a esta ecuación se llama *función armónica*.

## Ejercicios para el capítulo XV

Calcular las integrales curvilíneas siguientes:

1. $\int y^2\,dx+2xy\,dy$ a lo largo de la circunferencia $x=a\cos t$, $y=a\operatorname{sen} t$. *Respuesta*: 0.

2. $\int y\,dx-x\,dy$ a lo largo del arco del elipse $x=a\cos t$, $y=b\operatorname{sen} t$. *Respuesta*: $-2\pi ab$.

3. $\int \frac{x}{x^2+y^2}\,dx-\frac{y}{x^2+y^2}\,dy$ a lo largo de la circunferencia con el centro en el origen de coordenadas. *Respuesta*: 0.

4. $\int \frac{y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}$ a lo largo de un segmento de la recta $y=x$, desde $x=1$ hasta $x=2$. *Respuesta*: $\ln 2$.

5. $\int yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$ a lo largo del hélice $x=a\cos t$, $y=a\operatorname{sen} t$, $z=kt$, cuando $t$ varía desde 0 hasta $2\pi$. *Respuesta*: 0.

6. $\int x\,dy-y\,dx$ a lo largo del arco de hipocicloide $x=a\cos^3 t$, $y=a\operatorname{sen}^3 t$. *Respuesta*: $\frac{3}{4}\pi a^2$ (área duplicada de la hipocicloide).

7. $\int x\,dy-y\,dx$ a lo largo del lazo del folio de Descartes $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$. *Respuesta*: $\frac{3}{2}a^2$ (área duplicada del dominio limitado por este lazo).

8. $\int x\,dy-y\,dx$ a lo largo de la curva $x=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$. *Respuesta*: $-6\pi a^2$ (área duplicada del dominio limitado por un arco de la cicloide y el eje $Ox$).

Demostrar que:

9. $\operatorname{grad}(c\varphi)=c\operatorname{grad}\varphi$, donde $c$ es constante.

10. $\operatorname{grad}(c_1\varphi+c_2\psi)=c_1\operatorname{grad}\varphi+c_2\operatorname{grad}\psi$, donde $c$ es constante.

11. $\operatorname{grad}(\varphi\psi)=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi$.

12. Hallar $\operatorname{grad} r$, $\operatorname{grad} r^2$, $\operatorname{grad}\frac{1}{r}$, $\operatorname{grad} f(r)$, donde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. *Respuesta*: $\frac{\boldsymbol{r}}{r}$; $2\boldsymbol{r}$; $-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$; $f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$.

13. Demostrar que $\operatorname{div}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\operatorname{div}\boldsymbol{A}+\operatorname{div}\boldsymbol{B}$.

14. Calcular $\operatorname{div}\boldsymbol{r}$, donde $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. *Respuesta*: 3.

15. Calcular $\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\varphi)$, donde $\boldsymbol{A}$ es una función vectorial, y $\varphi$ s una función escalar. *Respuesta*: $\varphi\operatorname{div}\boldsymbol{A}+(\operatorname{grad}\varphi\boldsymbol{A})$.

**16.** Calcular div $(\boldsymbol{r}.\boldsymbol{c}.)$, donde $\boldsymbol{c}$ es un vector constante. *Respuesta*: $\frac{(\boldsymbol{cr})}{r}$.

**17.** Calcular div $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{rA})$. *Respuesta* $\boldsymbol{AB}$.

Demostrar que:

**18.** $\operatorname{rot}(c_1\boldsymbol{A}_1+c_2\boldsymbol{A}_2)=c_1 \operatorname{rot}\boldsymbol{A}_1+c_2\operatorname{rot}\boldsymbol{A}_2$, donde $c_1$ y $c_2$ son constantes.

**19.** $\operatorname{rot}(A\boldsymbol{c})=\operatorname{grad}A\times\boldsymbol{c}$, donde $\boldsymbol{c}$ es un vector constante.

**20.** $\operatorname{rot}\ \operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A}-\Delta\boldsymbol{A}$.

**21.** $\boldsymbol{A}\times\operatorname{grad}\varphi=\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{A})$.

**Integrales de superficie**

**22.** Demostrar que $\iint \cos(nz)\,d\sigma=0$, si $\sigma$ es una superficie cerrada y $n$ es su normal.

**23.** Hallar el momento de inercia, respecto al eje $Oz$, de la superficie de un segmento de la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=R^2$ separado por el plano $z=H$. *Respuesta*: $\frac{2\pi R}{3}(2R^3-3R^2H+H^3)$.

**24.** Hallar el momento de inercia, respecto al eje $Oz$, de una parte de la superficie del paraboloide de revolución $x^2+y^2=2cz$, separada por el plano $z=c$. *Respuesta*: $\frac{16}{3}c^5$.

**25.** Calcular las coordenadas del centro de gravedad de una parte de la superficie del cono $x^2+y^2=\frac{R^2}{H^2}z^2$, separada por el plano $z=H$. *Respuesta*: $0;\ 0;\ \frac{2}{3}H$.

**26.** Calcular las coordenadas del centro de gravedad de un segmento de la superficie de la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$, separado por el plano $z=H$. *Respuesta*: $\left(0,\ 0,\ \frac{R+H}{2}\right)$.

**27.** Hallar $\iint\limits_{\sigma}[x\cos(nx)+y\cos(ny)+z\cos(nz)]\,d\sigma$, donde $\sigma$ es una superficie cerrada. *Respuesta*: $3\ V$, donde $V$ es el volumen del cuerpo limitado por $\sigma$.

**28.** Hallar $\iint\limits_{S} z\,dx\,dy$, donde $S$ es la superficie exterior de la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$. *Respuesta*: $\frac{4}{3}\pi R^3$.

**29.** Hallar $\iint\limits_{S} x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$, donde $S$ es la superficie exterior de la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$. *Respuesta*: $\pi R^4$.

**30.** Hallar $\iint\limits_{S}\sqrt{x^2+y^2}\,ds$, donde $S$ es la superficie lateral del cono $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0,\ 0\leqslant z\leqslant b$. *Respuesta*: $\frac{2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{3}$.

**31.** Transformar, según la fórmula de Stokes, la integral $\int\limits_{L} y\,dx+z\,dy+x\,dz$. *Respuesta*: $-\iint\limits_{S}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\,ds$.

Hallar las integrales curvilíneas directamente y con ayuda de la fórmula de Stokes:

32. $\int\limits_L (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$, donde $L$ es una circunferencia $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$. *Respuesta*: 0.

33. $\int\limits_L x^2y^3\,dx+dy+z\,dz$, donde $L$ es una circunferencia $x^2+y^2=R^2$, $z=0$. *Respuesta*: $-\frac{\pi R^6}{8}$.

Utilizando la fórmula de Ostrogradski, transformar las integrales de superficie en las de volumen:

34. $\iint\limits_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,ds$. *Respuesta*: $\iiint\limits_V 3dx\,dy\,dz$.

35. $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,(dy\,dz+dx\,dz+dx\,dy)$. *Respuesta*:

$$2\iiint\limits_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz.$$

36. $\iint\limits_S xy\,dx\,dy+yz\,dy\,dz+zx\,dz\,dx$. *Respuesta*: 0.

37. $\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\,dz+\frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dz+\frac{\partial u}{\partial z}\,dx\,dy$. *Respuesta*:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz.$$

Usando la fórmula de Ostrogradski, calcular las siguientes integrales:

38. $\iint\limits_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,ds$, donde $S$ es la superficie de un elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. *Respuesta*: $4\pi abc$.

39. $\iint\limits_S (x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)\,ds$, donde $S$ es la superficie de una esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$. *Respuesta*: $\frac{12}{5}\pi R^5$.

40. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$, donde $S$ es la superficie de un cono $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ $(0\leqslant z\leqslant b)$. *Respuesta*: $\frac{\pi a^2b^2}{2}$.

41. $\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy$, donde $S$ es la superficie de un cilindro $x^2+y^2=a^2$, $-H\leqslant z\leqslant H$. *Respuesta*: $3\pi a^2H$.

42. Demostrar la identidad $\iint\limits_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dx\,dy=\int\limits_C \frac{\partial u}{\partial n}\,ds$, donde $C$ es un contorno que limita el dominio $D$, y $\frac{\partial u}{\partial n}$, una derivada siguiendo la normal exterior.

**Solución.**

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dx\,dy=\int\limits_C -Y\,dx+X\,dy=\int\limits_C [-Y\cos(s,\,x)+X\,\mathrm{sen}\,(s,\,x)]\,ds,$$

donde $(s,\,x)$ es el ángulo formado por la tangente al contorno $C$ y el eje $Ox$. Si designamos por $(n,\,x)$ el ángulo formado por la normal y el eje $Ox$, entonces $\operatorname{sen}(s, x) = \cos(n, x)$, $\cos(s, x) = -\operatorname{sen}(n, x)$. Por consiguiente, $\iint\limits_D \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_C [X \cos(n, x) + Y \operatorname{sen}(n, x)]\, ds$. Poniendo $X = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial u}{\partial y}$, obtenemos:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\, dy = \int\limits_C \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \operatorname{sen}(n, x)\right) ds$$

ó

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\, dy = \int\limits_C \frac{\partial u}{\partial n}\, ds.$$

La expresión $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ se llama *operador de Laplace*.

43. Demostrar la identidad (así llamada *fórmula de Green*)

$$\iiint\limits_V (v\Delta u - u\Delta v)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_\sigma \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma,$$

donde $u$ y $v$ son funciones continuas que tienen derivadas continuas hasta el segundo orden en el dominio $D$.

Los símbolos $\Delta u$ y $\Delta v$ significan:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Estas expresiones se llaman *operadores de Laplace* en el espacio.

**Solución.** En la fórmula

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \iint\limits_\sigma [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z)]\, d\sigma$$

pongamos que

$$X = vu'_x - uv'_x,$$
$$Y = vu'_y - uv'_y,$$
$$Z = vu'_z - uv'_z.$$

Entonces

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = v\,(u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}) - u\,(v''_{xx} + v''_{yy} + v''_{zz}) = v\Delta u - u\Delta v,$$

$$X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z) =$$
$$= v\,(u'_x \cos nx + u'_y \cos ny + u'_z \cos nz) - u\,(v'_x \cos nx + v'_y \cos ny + v'_z \cos nz) =$$
$$= v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}.$$

Por tanto,

$$\iiint\limits_V (v\Delta u - u\Delta v)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_\sigma \left(v \frac{\partial u}{\partial u} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma.$$

**44.** Demostrar la identidad

$$\iiint_V \Delta u \, dx \, dy \, dz = \iint_\sigma \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma,$$

donde $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ (operador de Laplace).

**Solución.** En la fórmula de Green deducida en el ejemplo anterior pongamos $v=1$. Entonces $\Delta v = 0$ y obtenemos la identidad mencionada.

**45.** Si $u(x, y, z)$ es una función armónica en cierto dominio, es decir, una función tal que en cualquier punto de este dominio satisface a la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

entonces

$$\iint_\sigma \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = 0,$$

donde $\sigma$ es una superficie cerrada.

**Solución.** Se infiere directamente de la fórmula dada en el problema 44.

**46.** Sea $u(x, y, z)$ una función armónica en cierto dominio $V$ y supongamos que en el dominio $V$ se encuentra una esfera $\overline{\sigma}$ con el centro en el punto $M(x_1, y_1, z_1)$ y el radio $R$. Demostrar que

$$u(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\overline{\sigma}} u \, d\sigma.$$

**Solución.** Examinemos el dominio $\Omega$ limitado por dos esferas $\underline{\sigma}$, $\overline{\sigma}$ de radios $R$ y $\rho$ $(\rho < R)$ con centros en el punto $M(x_1, y_1, z_1)$. Apliquemos a este dominio la fórmula de Green deducida en el problema 43, designando con $u$ la función arriba indicada y con $v$, la función

$$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}.$$

Realizando la derivación directa y sustitución nos convencemos que $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$. Por consiguiente,

$$\iint_{\underline{\sigma}+\overline{\sigma}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) d\sigma = 0,$$

$$\iint_{\underline{\sigma}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} \right) d\sigma + \iint_{\overline{\sigma}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} \right) d\sigma = 0.$$

En las superficies $\overline{\sigma}$ y $\underline{\sigma}$ la magnitud $\frac{1}{r}$ es constante $\left(\frac{1}{R} \text{ y } \frac{1}{\rho}\right)$ y por eso puede ser sacada fuera del signo de la integral. En virtud de la respuesta obtenida en el problema 45, tenemos:

$$\frac{1}{R}\iint_{\underline{\sigma}} \frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma=0; \qquad \frac{1}{\rho}\iint_{\bar{\sigma}} \frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma=0.$$

Por tanto,

$$-\iint_{\underline{\sigma}} u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\,d\sigma+\iint_{\bar{\sigma}} u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\,d\sigma=0,$$

pero,

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}=-\frac{1}{r^2}.$$

Por eso

$$+\iint_{\underline{\sigma}} u\frac{1}{r^2}\,d\sigma-\iint_{\bar{\sigma}} u\frac{1}{r^2}\,d\sigma=0$$

ó

$$\frac{1}{\rho^2}\iint_{\underline{\sigma}} u\,d\sigma=\frac{1}{R^2}\iint_{\bar{\sigma}} u\,d\sigma. \tag{1}$$

Apliquemos el teorema de la media a la integral del segundo miembro:

$$\frac{1}{\rho^2}\iint_{\underline{\sigma}} u\,d\sigma=\frac{u(\xi,\ \eta,\ \zeta)}{\rho^2}\iint_{\bar{\sigma}} d\sigma, \tag{2}$$

donde $u(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ es el punto sobre la superficie de una esfera de radio $\rho$ y centro en el punto $M(x_1,\ y_1,\ z_1)$.

Hagamos que $\rho$ tienda a cero; entonces $u(\xi,\ \eta,\ \zeta)\to u(x_1,\ y_1,\ z_1)$:

$$\frac{1}{\rho^2}\iint_{\bar{\sigma}} d\sigma=\frac{4\pi\rho^2}{\rho^2}=4\pi.$$

Por consiguiente, cuando $\rho\to 0$, obtenemos:

$$\frac{1}{\rho^2}\iint_{\bar{\sigma}} u\,d\sigma\to u(x_1,\ y_1,\ z_1)\,4\pi.$$

Luego, puesto que el primer miembro de la igualdad (1) no depende de $\rho$, entonces para $\rho\to 0$, obtenemos definitivamente:

$$\frac{1}{R^2}\iint_{\bar{\sigma}} u\,d\sigma=4\pi u(x_1,\ y_1,\ z_1)$$

ó

$$u(x_1,\ y_1,\ z_1)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\bar{\sigma}} u\,d\sigma.$$