CAPITULO XVI

SERIES

§ 1. SERIE. SUMA DE UNA SERIE

Definición 1. Sea dada una sucesión infinita de números *)

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

La expresión

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

se llama *serie númerica*. Los números $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ se llaman *términos de la serie.*

Definición 2. La suma del número finito de los n primeros términos de la serie se llama *n — ésima suma parcial de la serie*:

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Examinemos las sumas parciales:

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1, \\ s_2 &= u_1 + u_2, \\ s_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n. \end{aligned}$$

Si existe un límite finito

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

entonces, éste se llama *suma de la serie* (1) y se dice que la *serie converge.*

Si $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ no existe (por ejemplo, $s_n \to \infty$ para $n \to \infty$), entonces se dice que *la serie* (1) *diverge y no tiene suma.*

Ejemplo. Examinemos la serie

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \tag{2}$$

*) Una sucesión se considera dada, cuando se conoce la ley que permite calcular cualquier su término u_n para n dado.

Es una progresión geométrica con primer término a y razón q ($a \neq 0$).
La suma de los n primeros términos de la progresión geométrica (para $q \neq 1$) es igual a:

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1-q}$$

ó

$$s_n = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

1) Si $|q| < 1$, entonces $q^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y, por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}.$$

Esto significa, que si $|q| < 1$, la serie (2) converge y su suma es

$$s = \frac{a}{1-q}.$$

2) Si $|q| > 1$, entonces $|q^n| \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y, por tanto, $\frac{a - aq^n}{1-q} \to \pm\infty$, cuando $n \to \infty$, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ no existe. De este modo, cuando $|q| > 1$, la serie (2) diverge.

3) Si $q = 1$, la serie (2) tiene la forma

$$a + a + a + \ldots$$

En este caso $s_n = na$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, es decir, la serie diverge.

4) Si $q = -1$, la serie (2) toma la forma

$$a - a + a - a + \ldots$$

En este caso

$$s_n = \begin{cases} 0, & \text{cuando } n \text{ es par} \\ a, & \text{cuando } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por consiguiente, s_n no tiene límite, la serie diverge.

De este modo, la progresión geométrica (con el primer término diferente de cero) converge solamente cuando el valor absoluto de la razón de la progresión es menor que 1.

Teorema 1. *Si converge la serie, obtenida mediante la supresión en* (1) *de algunos de sus términos, entonces converge también la serie dada. Inversamente, si converge la serie dada, entonces converge también la serie obtenida mediante la supresión de algunos de sus términos. En otras palabras, en la convergencia de la serie no influye la supresión de un número finito de sus términos.*

Demostración. Sean s_n la suma de los n primeros términos de la serie (1); c_k, la suma de los k términos suprimidos (notemos, que cuando n es suficientemente grande, todos los términos suprimidos se contienen en la suma s_n); σ_{n-k}, la suma de los términos de la serie que entran en la suma s_n, pero no entran en la c_k. Entonces tenemos:

$$s_n = c_k + \sigma_{n-k},$$

donde c_k es un número constante que no depende de n.

De la última relación se deduce que si existe $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{n-k}$, entonces existe también $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$; si existe $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, entonces existe también $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{n-k}$ y queda así demostrado el teorema.

Concluyendo el párrafo, indiquemos dos propiedades elementales de las series.

Teorema 2. *Si la serie*

$$a_1 + a_2 + \ldots \tag{3}$$

converge y su suma es igual a s, entonces la serie

$$ca_1 + ca_2 + \ldots, \tag{4}$$

donde c es un número arbitrario fijo, también converge y su suma es igual a cs.

Demostración. Designemos por s_n la n — ésima suma parcial de la serie (3) y por σ_n, la suma parcial de la serie (4).

Entonces:

$$\sigma_n = ca_1 + \ldots + ca_n = c\,(a_1 + \ldots + a_n) = cs_n.$$

De aquí es evidente que el límite de la n-ésima suma parcial de la serie (4) existe, puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (cs_n) = c \lim_{n\to\infty} s_n = cs.$$

Por tanto, la serie (4) converge y su suma es igual a cs.

Teorema 3. *Si las series*

$$a_1 + a_2 + \ldots \tag{5}$$

y

$$b_1 + b_2 + \ldots \tag{6}$$

convergen y sus sumas son iguales a $\bar{s}$ y $\bar{\bar{s}}$, respectivamente, entonces las series

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots \tag{7}$$

y

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots \tag{8}$$

también convergen, y sus sumas son iguales a $\bar{s} + \bar{\bar{s}}$ y $\bar{s} - \bar{\bar{s}}$, respectivamente.

Demostración. Demostremos la convergencia de la serie (7). Designemos su n-ésima suma parcial por σ_n, y las n-ésimas sumas parciales de las series (5) y (6) por $\bar{s}_n$ y $\bar{\bar{s}}_n$, respectivamente, y obtenemos:

$$\sigma_n = (a_1 + b_1) + \ldots + (a_n + b_n) =$$

$$= (a_1 + \ldots + a_n) + (b_1 + \ldots + b_n) = \bar{s}_n + \bar{\bar{s}}_n.$$

Pasando en esta igualdad al límite, cuando $n \to \infty$, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (\bar{s}_n + \bar{\bar{s}}_n) = \lim_{n\to\infty} \bar{s}_n + \lim_{n\to\infty} \bar{\bar{s}}_n = \bar{s} + \bar{\bar{s}}.$$

De este modo, la serie (7) converge y su suma es igual a $\bar{s} + \bar{\bar{s}}$.

De una manera semejante se demuestra que la serie (8) también converge y su suma es igual a $\bar{s} - \bar{\bar{s}}$.

Se dice que las series (7) y (8) son obtenidas mediante la adición o la sustracción, respectivamente, término a término, de las series (5) y (6).

§ 2. CONDICION NECESARIA DE CONVERGENCIA DE UNA SERIE

En el estudio de las series, uno de los problemas principales es el de la convergencia o de la divergencia de la serie dada. A continuación establezcamos los criterios suficientes. a base de los cuales se puede resolver este problema. Ahora examinemos un criterio necesario para la convergencia de una serie, es decir, establezcamos la condición, cuyo incumplimiento significa que la serie diverge.

Teorema. *Si una serie converge, entonces su n-ésimo término tiende a cero, cuando n crece indefinidamente.*

Demostración. Sea la serie $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ convergente, es decir, tiene lugar la igualdad $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, donde s es la suma de la serie (o sea, un número finito fijo), pero entonces tenemos la igualdad $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = s$, puesto que cuando $n \to \infty$, también $(n-1) \to \infty$. Sustrayendo término a término la segunda igualdad de la primera, obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0$$

ó

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = 0.$$

Pero,

$$s_n - s_{n-1} = u_n.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

lo que se trataba de demostrar.

Corolario. *Si el n-ésimo término de la serie no tiende a cero, cuando $n \to \infty$, la serie diverge.*

Ejemplo. La serie

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\ldots+\frac{n}{2n+1}+\ldots$$

diverge, puesto que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Subrayemos que el criterio analizado es sólo **indispensable**, pero no es suficiente, es decir, de lo que *n-ésimo término tiende a cero no se deduce obligatoriamente que la serie converge (la serie puede ser también divergente).*

Por ejemplo, la llamada *serie armónica* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ $\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ diverge, aunque $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

Para demostrarlo, escribamos más detalladamente la serie armónica:

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+$$
$$+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}}+\ \ldots \quad (1)$$

Escribimos, luego, una serie auxiliar:

$$1+\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\overbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+$$
$$+\overbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}+\overbrace{\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{32}}^{16\text{ sumandos}}+\ldots$$

(2)

La serie (2) se forma de modo siguiente: su primer término es igual a 1; el segundo, a 1/2; el tercer y cuarto son iguales a 1/4; los términos a partir del quinto hasta el octavo son iguales a 1/8; los términos desde el noveno hasta el 16 son iguales a 1/16; los términos desde el 17 hasta el 32 son iguales a 1/32, etc.

Designemos por $s_n^{(1)}$ la suma de los n primeros términos de la serie armónica (1) y por $s_n^{(2)}$, la suma de los n primeros términos de la serie (2).

Puesto que cada término de la serie (1) es mayor que el correspondiente término de la serie (2) o es igual a éste, entonces, para $n > 2$, tenemos

$$s_n^{(1)} > s_n^{(2)}. \tag{3}$$

Calculemos las sumas parciales de la serie (2) para los valores de n, iguales a 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5:

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ sumandos}} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ sumandos}} = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_{32} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ sumandos}} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ sumandos}} + \underbrace{\left(\frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{32}\right)}_{16 \text{ sumandos}} = 1 + 5 \cdot \frac{1}{2};$$

del mismo modo se calcula que $s_{2^6} = 1 + 6 \cdot 1/2$, $s_{2^7} = 1 + 7 \cdot 1/2$, y, en general, $s_{2^k} = 1 + k \cdot 1/2$.

Por consiguiente, las sumas parciales de la serie (2), para k suficientemente grande, pueden ser mayores que cualquier número positivo, es decir,

$$\lim_{n \to \infty} s_n^{(2)} = \infty,$$

pero, entonces, de la relación (3) se deduce que también

$$\lim_{n \to \infty} s_n^{(1)} = \infty,$$

es decir, la serie armónica (1) diverge.

§ 3. COMPARACION DE LAS SERIES CON TERMINOS POSITIVOS

Sean dos series con términos positivos:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{1}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots \tag{2}$$

Para éstas son válidas las siguientes **afirmaciones.**

Teorema 1. *Si los términos de la serie* (1) *no son mayores que los términos correspondientes de la serie* (2), *es decir,*

$$u_n \leqslant v_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

y la serie (2) *converge, entonces la serie* (1) *también converge.*

Demostración. Designemos por s_n y σ_n, respectivamente, las sumas parciales de las series primera y segunda:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i, \qquad \sigma_n = \sum_{i=1}^{n} v_i.$$

De la condición (3) se deduce que

$$s_n \leqslant \sigma_n. \tag{4}$$

Puesto que la serie (2) converge, entonces existe el limite σ de su suma parcial

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \sigma.$$

Puesto que los términos de las series (1) y (2) son positivos, tenemos $\sigma_n < \sigma$; entonces, en virtud de la desigualdad (4)

$$s_n < \sigma.$$

Así, hemos demostrado que las sumas parciales s_n están limitadas. Notemos que cuando n crece, la suma parcial s_n también crece; al mismo tiempo, del hecho de que la sucesión de las sumas parciales está limitada y crece se deduce que ésta tiene un límite *)

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s,$$

y es evidente que

$$s \leqslant \sigma.$$

Basándose en el teorema 1, se puede juzgar sobre la convergencia de algunas series.

Ejemplo 1. La serie

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$$

---

*) Para convencerse de que la variable s_n tiene un límite, recordemos un criterio de existencia del límite de una sucesión (véase § 5, cap. II, tomo I): «si la variable es creciente y acotada, entonces ella tiene un límite». En el caso dado, la sucesión de las sumas s_n está limitada y crece, por consiguiente, ella tiene un límite, es decir, la serie converge.

converge, puesto que sus términos son menores que los términos correspondientes de la serie

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Pero, la última serie converge puesto que sus términos, a partir del segundo, forman una progresión geométrica de razón $1/2$. La suma de esta serie es igual a $1\frac{1}{2}$. Por consiguiente, en virtud del teorema 1, la serie dada también converge y su suma no supera a $1\frac{1}{2}$.

Teorema 2. *Si los términos de la serie (1) no son menores que los términos respectivos de la serie (2), es decir*

$$u_n \geqslant v_n, \tag{5}$$

y la serie (2) diverge, entonces la serie (1) también diverge.

Demostración. De la condición (5) se deduce que

$$s_n \geqslant \sigma_n. \tag{6}$$

Como los términos de la serie (2) son positivos, entonces su suma parcial σ_n crece, al aumentar n, y como la serie diverge, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty.$$

Pero, en virtud de la desigualdad (6)

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty,$$

es decir, la serie (1) diverge.

Ejemplo 2. La serie

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

diverge puesto que sus términos (a partir del segundo) son mayores que los términos correspondientes de la serie armónica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

la cual, como es sabido, diverge.

Observación: Los dos criterios demostrados (teoremas 1 y 2) son válidos solamente para las series con términos positivos. Ellos quedan en vigor también para el caso, en que algunos términos de la primera o segunda serie son iguales a cero. Sin embargo, estos criterios dejan de ser válidos, si entre los términos de la serie hay números negativos.

§ 4. CRITERIO DE D'ALEMBERT

Teorema (Criterio de d'Alembert). *Si en una serie con términos positivos*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

la relación de $(n+1)$-ésimo término respecto al n-ésimo cuando

$n \to \infty$, *tiene un límite (finito)* l, *o sea*,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, \tag{2}$$

entonces:

1) *la serie converge cuando* $l < 1$,

2) *la serie diverge cuando* $l > 1$.

(Cuando $l = 1$, el teorema no da la respuesta sobre la convergencia o divergencia de la serie).

Demostración. 1) Sea $l < 1$. Examinemos el número q que satisface a la correlación $l < q < 1$ (fig. 342).

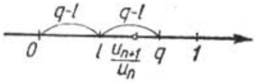

Fig. 342

De la definición del límite y de la relación (2) se deduce que para todos los valores n, a partir de cierto número N, o sea, para $n \geqslant N$, tiene lugar la desigualdad

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q. \tag{2'}$$

En efecto, como la magnitud $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tiende al límite l, la diferencia entre la magnitud $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ y el número l (a partir de cierto número N) se puede hacer menor, en valor absoluto, que cualquier número positivo, en particular, menor que $q - l$, es decir,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < q - l.$$

De la última desigualdad se deduce la desigualdad (2'). Escribiendo esta desigualdad para diferentes valores de n, a partir del número N, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} u_{N+1} < qu_N, \\ u_{N+2} < qu_{N+1} < q^2u_N, \\ u_{N+3} < qu_{N+2} < q^3u_N, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \tag{3}$$

Examinemos ahora dos series:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \dots, \tag{1}$$

$$u_N + qu_N + q^2u_N + \dots \tag{1'}$$

La serie (1') es una progresión geométrica con razón positiva $q < 1$. Por consiguiente, esta serie converge. Los términos de la serie (1), a partir de u_{N+1}, son menores que los términos de la serie (1'). Según el teorema 1, § 3 y el teorema 1, § 1, deducimos que la serie (1) converge.

2) Sea $l > 1$.

Entonces, de la igualdad $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ (donde $l > 1$) se deduce que a partir de cierto numero N, o sea, para $n \geqslant N$, tiene lugar

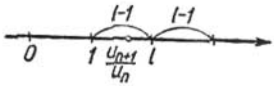

Fig. 343

la desigualdad $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ (fig. 343), ó $u_{n+1} > u_n$ para todos los $n \geqslant N$. Pero esto significa que los términos de la serie crecen, a partir del número $N+1$, y, por eso, el término común de la serie no tiende a cero. Por consiguiente, la serie diverge.

Observación 1. La serie divergirá también, cuando $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$. Esto se deduce de que si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$, entonces, a partir de cierto número $n = N$, tendrá lugar la desigualdad $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, ó $u_{n+1} > u_n$.

Ejemplo 1. Estudiar la convergencia de la serie

$$1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots \cdot n} + \ldots$$

Solución. Aquí tenemos:

$$u_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} = \frac{1}{n!}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n\,(n+1)} = \frac{1}{(n+1)!};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

La serie converge.

Ejemplo 2. Estudiar la convergencia de la serie

$$\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \ldots + \frac{2^n}{n} + \ldots$$

Solución. Aquí tenemos: $u_n=\frac{2^n}{n}$; $u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{n+1}$; $\frac{u_{n+1}}{u_n}=2\,\frac{n}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}2\,\frac{n}{n+1}=2>1$.

La serie diverge y su término común u_n tiende al infinito.

Observación 2. El criterio de d'Alembert da la respuesta de que una serie positiva dada converge o no, sólo en el caso en que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe y difiere de 1. Si este límite no existe o existe, pero $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ es igual a 1, entonces el criterio de d'Alembert no permite establecer que la serie converge o diverge, puesto que, en este caso, la serie puede resultar tanto convergente, como divergente. Para solucionar el problema sobre la convergencia de semejantes series es preciso aplicar otro criterio.

Notemos, sin embargo, que si $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ y la razón $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ para todos los números n, a partir de cierto número, es mayor que 1, la serie diverge. En efecto, si $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, entonces $u_{n+1}>u_n$ y el término común no tiende a cero, cuando $n\to\infty$.

Estudiemos los ejemplos que ilustran lo enunciado más arriba.

Ejemplo 3. Analizar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}+\ldots$$

Solución. Aquí $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=1$. En el caso dado la serie diverge, puesto que $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ para todos los n: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}>1$.

Ejemplo 4. Aplicando el criterio de d'Alembert para la serie armónica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

notemos que $u_n=\frac{1}{n}$, $u_{n+1}=\frac{1}{n+1}$, y, por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

Así, basándose en el criterio de d'Alembert, no podemos determinar, si la serie dada converge o diverge. Pero antes hemos definido por otro procedimiento, que la serie armónica diverge.

Ejemplo 5. Analizar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

Solución. Aquí,

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)},\ u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1.$$

Basándose en el criterio de d'Alembert no podemos determinar nada respecto a la convergencia de esta serie, pero, partiendo de otras consideraciones, se puede definir que la serie converge. Al notar que

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

podemos escribir la serie dada en la forma siguiente:

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots$$

Después de abrir los paréntesis y hacer la reducción, la suma parcial de los n primeros términos será igual a

$$s_n=1-\frac{1}{n+1}.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

es decir, la serie converge y su suma es igual a 1.

§ 5. CRITERIO DE CAUCHY

Teorema (Criterio de Cauchy). *Si para la serie con términos positivos*

$$u_1+u_2+u_3+\ \ldots\ +u_n+\ \ldots \tag{1}$$

la magnitud $\sqrt[n]{u_n}$ *tiene un límite finito* l *cuando* $n\to\infty$, *es decir,*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l,$$

entonces:

1) *si* $l<1$, *la serie converge;*
2) *si* $l>1$, *la serie diverge.*

Demostración. 1) Sea $l < 1$. Examinemos el número q que satisface a la desigualdad $l < q < 1$.

A partir de cierto número $n = N$, tiene lugar la relación

$$|\sqrt[n]{u_n} - l| < q - l;$$

de donde se deduce que

$$\sqrt[n]{u_n} < q$$

ó

$$u_n < q^n$$

para todos los $n \geqslant N$.

Ahora examinemos dos series:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \ldots, \tag{1}$$

$$q^N + q^{N+1} + q^{N+2} + \ldots \tag{1'}$$

La serie (1′) converge puesto que sus términos forman una progresión geométrica decreciente. Los términos de la serie (1), a partir de u_N, son menores que los términos respectivos de la serie (1′). Por consiguiente, la serie (1) converge.

2) Sea $l > 1$. Entonces, a partir de cierto número $n = N$, tenemos:

$$\sqrt[n]{u_n} > 1$$

ó

$$u_n > 1.$$

Pero, si todos los términos de la serie examinada, a partir de u_N, son mayores que 1, la serie diverge, puesto que su término común no tiende a cero.

Ejemplo. Estudiar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \ldots$$

Solución. Apliquemos el criterio de Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

La serie converge.

Observación. Igual que en el criterio de d'Alembert, el caso de

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l = 1$$

exige un estudio adicional. Entre las series que satisfacen a esta condición, pueden encontrarse tanto convergentes, como divergentes. Así, para la serie armónica (que, como es sabido, diverge) tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Para asegurarse de esto, demostremos que $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 0$. Efectivamente,

$$\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln n}{n}.$$

Aquí el numerador y el denominador de la fracción tienden al infinito. Aplicando la regla de l'Hospital, hallamos:

$$\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n}}{1} = 0.$$

Pues, $\ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 0$, pero entonces: $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Para la serie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

también tiene lugar la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}\, \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1;$$

pero esta serie converge, puesto que, si suprimimos el primer término, los términos de la serie obtenida serán menores que los correspondientes términos de la serie convergente

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

(véase el ejemplo 5, § 4).

§ 6. CRITERIO INTEGRAL DE CONVERGENCIA DE LA SERIE

Teorema. *Sean los términos de la serie*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

positivos y no crecientes, es decir,

$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant \ldots,$$

y sea $f(x)$ una función continua no creciente tal que

$$f(1) = u_1; \quad f(2) = u_2; \ \ldots; \ f(n) = u_n. \tag{2}$$

En este caso son válidas las siguientes afirmaciones:

1) *si la integral impropia*

$$\int_1^{\infty} f(x)\, dx$$

converge (véase § 7, capítulo XI, tomo I), *es convergente también la serie* (1):

2) *si esta integral diverge, es divergente también la serie* (1).

Demostración. Representemos los términos de la serie geométricamente, marcando en el eje de abscisas los números de los térmi-

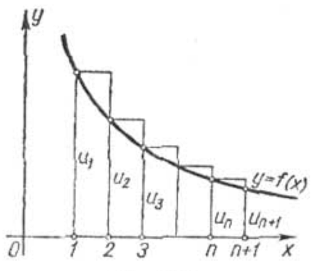

Fig. 344

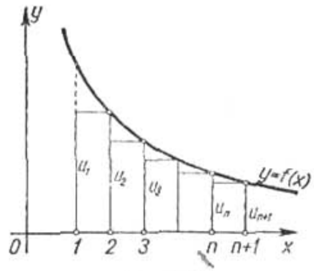

Fig. 345

nos de la serie 1, 2, 3 . . . n, $n+1$, . . ., y en el eje de ordenadas, los valores correspondientes de los términos de la serie u_1, u_2, ... u_n, . . ., (fig. 344).

Tracemos en la misma figura la gráfica de la función continua no creciente

$$y = f(x),$$

que satisface a la condición (2).

Examinando la figura 344, notamos que el primer de los rectángulos construidos tiene la base igual a 1, y la altura $f(1) = u_1$. Por consiguiente, el área de este rectángulo es u_1. El área del segundo rectángulo es u_2, etc.; por fin, el área del último (n-ésimo) de los rectángulos construidos es u_n. La suma de las áreas de los rectángulos construidos es igual a la suma s_n de los n primeros términos de la serie. Por otra parte, la figura escalonada formada por estos rectángulos comprende un dominio limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = 1$, $x = n + 1$, $y = 0$; el área de este dominio es igual a $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$. Por consiguiente

$$s_n > \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Analicemos ahora la figura 345. Aquí, el primer (izquierdo) de los rectángulos construidos tiene la altura u_2; por tanto, su área es también u_2. El área del segundo rectángulo es u_3, etc. El área del último de los rectángulos construidos es u_{n+1}. Por consiguiente, la suma de las áreas de todos los rectángulos construidos es igual a la suma de todos los términos de la serie, a partir del segundo hasta el $(n + 1)$ — ésimo, es decir, es igual a $s_{n+1} - u_1$. Por otra parte, como es fácil ver, la figura escalonada formada por estos rectángulos, está comprendida en el interior de la figura curvilínea limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = 1$, $x = n + 1$, $y = 0$. El área de esta figura curvilínea es igual a $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$. Por consiguiente,

$$s_{n+1} - u_1 < \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx,$$

de donde

$$s_{n+1} < \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx + u_1. \tag{4}$$

Ahora analicemos ambos casos.

1. Supongamos que la integral $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge, es decir, tiene un valor finito.

Puesto que

$$\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx < \int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx,$$

entonces, en virtud de la desigualdad (4) tenemos:

$$s_n < s_{n+1} < \int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx + u_1,$$

es decir, la suma parcial s_n queda limitada para todos los valores de n. Pero, al aumentar n, ésta crece, puesto que todos los términos u_n son positivos. Por consiguiente, cuando $n \to \infty$, s_n tiene un límite finito:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s,$$

es decir, la serie converge.

2. Supongamos, también, que $\int_1^\infty f(x)\,dx = \infty$. Esto significa que $\int_1^{n+1} f(x)\,dx$ crece indefinidamente al aumentar n. Pero entonces, en virtud de la desigualdad (3), s_n también crece indefinidamente al aumentar n, es decir, la serie diverge.

De este modo, el teorema queda completamente demostrado.

Ejemplo. Analizar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

Solución. Apliquemos el criterio integral, poniendo $f(x)=\frac{1}{x^p}$. Esta función satisface a todas las condiciones del teorema. Analicemos la integral

$$\int_1^N \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p}\, x^{1-p}\Big|_1^N = \frac{1}{1-p}\,(N^{1-p}-1) & \text{para } p \neq 1, \\ \ln x\Big|_1^N = \ln N & \text{para } p=1. \end{cases}$$

Hagamos que N tienda al infinito y estudiemos la convergencia de la integral impropia en diferentes casos. Partiendo de esto, podemos juzgar de la convergencia o divergencia de la serie para diferentes valores de p.

Si $p>1$, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}=\frac{1}{p-1}$, es decir, la integral es finita y, por consiguiente, la serie converge; si $p<1$, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}=\infty$, la integral es infinita, la serie diverge; si $p=1$, $\int_1^\infty \frac{dx}{x}=\infty$, la integral es infinita, la serie diverge.

Señalemos que ni el criterio de d'Alembert, ni el de Cauchy, examinados más arriba, resuelven la cuestión respecto a la convergencia de esta serie, puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^p = 1^p = 1.$$

§ 7. SERIES ALTERNANTES. TEOREMA DE LEIBNIZ

Hasta ahora hemos estudiado las series cuyos términos son positivos. En el párrafo presente examinemos las series cuyos términos son alternativamente positivos y negativos, es decir, las series de la forma

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots,$$

donde $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ son positivos.

Teorema de Leibniz. *Si una serie alternante*

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots \quad (u_n > 0) \tag{1}$$

es tal que sus términos

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots \tag{2}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \tag{3}$$

entonces, la serie (1) *converge, su suma es positiva y no supera el primer término.*

Demostración. Analicemos la suma de los $n = 2m$ primeros términos de la serie (1):

$$s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

De la condición (2) se deduce que las expresiones entre los paréntesis son positivas. Por consiguiente, la suma s_{2m} es positiva, $s_{2m} > 0$, y crece, con el aumento de m.

Escribamos ahora esta misma suma de modo siguiente:

$$s_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

En virtud de la condición (2), cada una de las expresiones entre paréntesis es positiva. Por eso, al restar del número u_1 las magnitudes encerradas entre paréntesis, obtenemos un número menor que u_1, es decir,

$$s_{2m} < u_1.$$

Por consiguiente, hemos determinado que, al aumentar m, s_{2m} crece y está limitada por arriba. De esto se deduce que s_{2m} tiene un límite s:

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m} = s,$$

siendo

$$0 < s < u_1.$$

Sin embargo, la convergencia de la serie todavía no está demostrada; hemos demostrado solamente que la sucesión de las sumas parciales «pares» tiene como límite el número s. Ahora demostremos que las sumas parciales «impares» también tienden al límite s.

Examinemos, para esto, la suma de los $n = 2m + 1$ primeros términos de la serie (1):

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}.$$

Como, según la condición (3), $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$, tenemos

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} s_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} s_{2m} = s.$$

De este modo hemos demostrado que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ tanto con n par, como con n impar. Por consiguiente, la serie (1) converge.

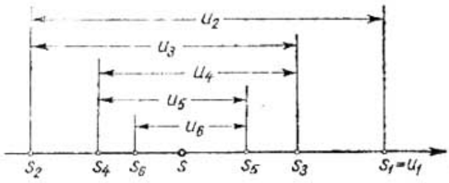

Fig. 346

Observación 1. El teorema de Leibniz se puede ilustrar geométricamente de modo siguiente. Marcaremos en una recta numérica las sumas parciales (fig. 346):

$s_1 = u_1$, $s_2 = u_1 - u_2 = s_1 - u_2$, $s_3 = s_2 + u_3$, $s_4 = s_3 - u_4$, $s_5 = s_4 + u_5$, etc.

Los puntos que corresponden a las sumas parciales, tienden a cierto punto s que representa la suma de la serie. Al mismo tiempo los puntos que corresponden a las sumas parciales pares, se encuentran a la izquierda de s y los que corresponden a sumas impares, a la derecha de s.

Observación 2. Si la serie alternante satisface a la condición del teoremá de Leibniz, no es difícil evaluar el error que se comete, si se sustituye su suma s por una suma parcial s_n. Al efectuar tal sustitución, suprimimos todos los términos de la serie a partir de u_{n+1}. Pero, estos números forman una serie alternante, cuya suma, en valor absoluto, es menor que el primer término de esta serie (es decir, es menor que u_{n+1}). Por lo tanto, el error que se comete al sustituir s por s_n, no supera, en valor absoluto, el primer de los términos suprimidos.

Ejemplo 1. La serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

converge, puesto que

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} \ldots;$

2) $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

La suma de los n primeros términos de esta serie

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

difiere de la suma s de la serie en una magnitud menor que $\frac{1}{n+1}$.

Ejemplo 2. La serie

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots$$

converge, en virtud del teorema de Leibniz.

§ 8. SERIES CON TERMINOS POSITIVOS Y NEGATIVOS. CONVERGENCIA ABSOLUTA Y CONDICIONAL

Una serie cuyos términos pueden ser tanto positivos como negativos se llama serie *con términos positivos y negativos.*

Las series alternantes, examinadas en el párrafo anterior, son, evidentemente, un caso particular de las series con términos positivos y negativos.

Analicemos algunas propiedades de las series con términos positivos y negativos.

Pero, a diferencia de lo aceptado en el párrafo anterior, supongamos ahora que los números $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ pueden ser tanto positivos, como negativos.

Demos, ante todo, un criterio suficiente, muy importante, de convergencia de una serie con términos positivos y negativos.

Teorema 1. *Si la serie con términos positivos y negativos*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

es tal que la serie compuesta de valores absolutos de sus términos

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots, \tag{2}$$

converge, entonces la serie dada con términos positivos y negativos también converge.

Demostración. Sean s_n y σ_n las sumas de los n primeros términos de las series (1) y (2).

Sean, además, s'_n la suma de todos los términos positivos y s''_n, la suma de los valores absolutos de todos los términos negativos comprendidos entre los n primeros términos de la serie dada; entonces:

$$s_n = s'_n - s''_n; \quad \sigma_n = s'_n + s''_n.$$

Según la hipótesis, σ_n tiene por límite σ; s'_n y s''_n son las magnitudes positivas crecientes, menores que σ. Por consiguiente, ellos tienen los límites s' y s''. De la correlación $s_n = s'_n - s''_n$ se deduce que también s_n tiene un límite que es igual a $s' - s''$, es decir, la serie con términos positivos y negativos (1) converge.

El teorema demostrado permite juzgar de la convergencia de ciertas series con términos positivos y negativos. El estudio del problema sobre la convergencia de una serie con términos positivos y negativos se reduce, en este caso, al análisis de una serie con términos positivos.

Examinamos dos ejemplos.

Ejemplo 1. Analizar la convergencia de la serie

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{1^2} + \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2^2} + \frac{\operatorname{sen} 3\alpha}{3^2} + \ldots + \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{n^2} + \ldots, \tag{3}$$

donde α es un número cualquiera.

Solución. Examinemos junto con la serie dada, las series

$$\left|\frac{\operatorname{sen} \alpha}{1^2}\right| + \left|\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2^2}\right| + \left|\frac{\operatorname{sen} 3\alpha}{3^2}\right| + \ldots + \left|\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{n^2}\right| + \ldots \tag{4}$$

y

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \tag{5}$$

La serie (5) converge (véase § 6). Los términos de la serie (4) no son mayores que los términos correspondientes de la serie (5), por consiguiente, la serie (4) también converge. Pero, entonces, en virtud del teorema demostrado, la serie dada con términos positivos y negativos (3) también converge.

Ejemplo 2. Analizar la convergencia de la serie

$$\frac{\cos \frac{\pi}{4}}{3} + \frac{\cos 3\,\frac{\pi}{4}}{3^2} + \frac{\cos 5\,\frac{\pi}{4}}{3^3} + \ldots + \frac{\cos (2n-1)\,\frac{\pi}{4}}{3^n} + \ldots \tag{6}$$

Solución. Examinemos, junto con la serie dada, la serie

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots \tag{7}$$

Esta serie converge, puesto que es una progresión geométrica decreciente de razón 1/3. Pero, en este caso, converge también la serie dada (6), puesto que sus términos, en valores absolutos, son menores que los términos correspondientes de la serie (7).

Notemos que el criterio de convergencia, demostrado más arriba, es sólo suficiente para una serie alternante, pero no es necesario: existen las series con términos positivos y negativos tales que convergen, mientras que las series formadas de valores absolutos de sus términos divergen. Es útil, por esto, introducir las nociones de convergencia absoluta y condicional de una serie con términos positivos y negativos, y, basándose en estas nociones, clasificar estas series.

Definición. La serie con términos positivos y negativos

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

se llama *absolutamente convergente*, si converge la serie formada de valores absolutos de sus términos:

$$| u_1 | + | u_2 | + | u_3 | + \ldots + | u_n | + \ldots \tag{2}$$

Si la serie con términos positivos y negativos (1) converge y la serie (2), formada de valores absolutos de sus términos, diverge, entonces la serie dada (1) se llama *condicionalmente convergente.*

Ejemplo 3. La serie con términos positivos y negativos

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

es condicionalmente convergente, puesto que la serie formada de valores absolutos de sus términos es la serie armónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots,$$

que diverge. Pero, la misma serie converge, lo que es fácil comprobar con ayuda del criterio de Leibniz.

Ejemplo 4. La serie con términos positivos y negativos

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots$$

es absolutamente convergente puesto que la serie formada de valores absolutos de sus términos:

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots,$$

converge, como fue establecido en § 4.

Utilizando la noción de convergencia absoluta, podemos formular el teorema 1 de modo siguiente: *toda serie absolutamente convergente es una serie convergente.*

En conclusión indiquemos (sin demostración) las siguientes propiedades de las series absolutamente convergentes y condicionalmente convergentes.

Teorema 2. *Si una serie es absolutamente convergente, ella queda absolutamente convergente con cualquier cambio del orden de sus términos. En este caso, la suma de una serie tal no depende del orden de sus términos.*

Esta propiedad no es propia de las series condicionalmente convergentes.

Teorema 3. *Si una serie converge condicionalmente, entonces, se puede cambiar el orden de los términos de esta serie de modo tal que la suma de la nueva serie obtenida sea exactamente igual a un número arbitrario A dado de antemano. Más aún, se puede cambiar el orden de los términos de la serie condicionalmente convergente de modo tal que la nueva serie sea divergente.*

La demostración de estos teoremas sale fuera de los marcos del presente curso.

Para ilustrar la afirmación de que la suma de una serie condicionalmente convergente puede variarse al cambiar el orden de sus términos, examinemos el ejemplo siguiente.

Ejemplo 5. La serie con términos positivos y negativos

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots \tag{8}$$

no converge absolutamente. Designemos su suma por s. Es evidente, que $s>0$. Cambiemos el orden de los términos de la serie (8) de modo que después de un término positivo vayan dos términos negativos:

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}+\dots+\underbrace{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}}+\dots \tag{9}$$

Demostremos que la serie obtenida converge, pero su suma s' es dos veces menor que la suma de la serie (8), es decir, es igual a $\frac{1}{2}s$. Designemos por s_n y s'_n las sumas parciales de las series (8) y (9). Examinemos la suma $3k$ de términos de la serie (9):

$$s'_{3k}=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\dots+\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}s_{2k}.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{k\to\infty}s'_{3k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}s_{2k}=\frac{1}{2}s.$$

Luego,

$$\lim_{k\to\infty}s'_{3k+1}=\lim_{k\to\infty}\left(s'_{3k}+\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2}s,$$

$$\lim_{k\to\infty}s'_{3k+2}=\lim_{k\to\infty}\left(s'_{3k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{4k+2}\right)=\frac{1}{2}s.$$

De este modo, obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} s'_n = s' = \frac{1}{2}s.$$

Pues, en este caso la suma de la serie se ha cambiado después de la permutación de sus términos (se ha reducido en doble).

§ 9. SERIES DE FUNCIONES

La serie $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ se llama *serie de funciones*, si sus términos son funciones de x.

Examinemos una serie de funciones:

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

Dando a x determinados valores numéricos, obtenemos diferentes series numéricas que pueden ser tanto convergentes, como divergentes.

El conjunto de los valores de x, para los cuales la serie de funciones converge, se llama *dominio de convergencia* de esta serie.

Es evidente, que en el dominio de convergencia de una serie de funciones su suma es cierta función de x. Por eso, la suma de la serie de funciones se designa por $s(x)$.

Ejemplo. Examinemos la serie de funciones

$$1 + x + x^2 \ \ldots + x^n + \ldots$$

Esta serie converge para todos los valores de x en el intervalo $(-1, 1)$, es decir, para todos los valores x que satisfacen a la condición $|x| < 1$. Para todo valor de x en el intervalo $(-1, 1)$ la suma de la serie es igual a $\frac{1}{1-x}$ (la suma de una progresión geométrica decreciente con razón x). Por consiguiente, en el intervalo $(-1, 1)$ la serie dada determina la función

$$s(x) = \frac{1}{1-x},$$

que es la suma de la serie, es decir,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Designemos por $s_n(x)$ la suma de los n primeros términos de la serie (1). Si esta serie converge y su suma es igual a $s(x)$, entonces $s(x) = s_n(x) + r_n(x)$, donde $r_n(x)$ es la suma de la serie $u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$, o sea,

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$$

En este caso la magnitud $r_n(x)$ se llama *resto de la serie* (1). Para todos los valores de x en el dominio de convergencia de la serie tiene lugar la correlación $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$, por eso:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} [s(x) - s_n(x)] = 0,$$

es decir, **el resto $r_n(x)$ de una serie convergente tiende a cero, cuando $n \to \infty$.**

§ 10. SERIES MAYORANTES

Definición. La serie de funciones

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{1}$$

se llama *mayorante* en cierto dominio de variación de x, si existe una serie numérica convergente

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n + \ldots \tag{2}$$

con términos positivos tal que para todos los valores de x del dominio dado se cumplan las correlaciones

$$|u_1(x)| \leqslant \alpha_1, \ |u_2(x)| \leqslant \alpha_2, \ \ldots, \ |u_n(x)| \leqslant \alpha_n, \ldots \tag{3}$$

En otras palabras, una serie se llama *mayorante*, si cada uno de sus términos no es mayor, en valor absoluto, que el término correspondiente de cierta serie numérica convergente con términos positivos.

Por ejemplo, la serie

$$\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots$$

es mayorante en todo el eje Ox. Efectivamente, para todos los valores de x se cumple la correlación

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad (n = 1, 2, \ \ldots),$$

y la serie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots,$$

como es sabido, converge.

Directamente de la definición se deduce que una serie mayorante en cierto dominio converge absolutamente en todos los puntos de este último (véase § 8). Además, una serie mayorante posee la siguiente propiedad importante

Teorema. *Supongamos que la serie de funciones*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

es mayorante en el segmento $[a, b]$. *Sean* $s(x)$ *la suma de esta serie;* $s_n(x)$, *la suma de los* n *primeros términos de esta serie. Entonces a cada número* $\varepsilon > 0$ *arbitrariamente pequeño corresponde un número positivo* N *tal, que para todos* $n \geqslant N$ *se cumpla la desigualdad*

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon,$$

cualquiera que sea el valor de x *en el segmento* $[a, b]$.

Demostración. Designemos por σ la suma de la serie (2):

$$\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n + \alpha_{+n1} + \ldots,$$

entonces

$$\sigma = \sigma_n + \varepsilon_n,$$

donde σ_n es la suma de los n primeros términos de la serie (2), y ε_n, la suma de todos los demás términos de esta serie, es decir

$$\varepsilon_n = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots$$

Como esta serie converge, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

Representemos ahora la suma de la serie de funciones (1) en la forma:

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x),$$

donde

$$s_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x),$$

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + u_{n+3}(x) + \ldots$$

De la condición (3) se deduce que

$$|u_{n+1}(x)| \leqslant \alpha_{n+1}, \quad |u_{n+2}(x)| \leqslant \alpha_{n+2}, \ldots,$$

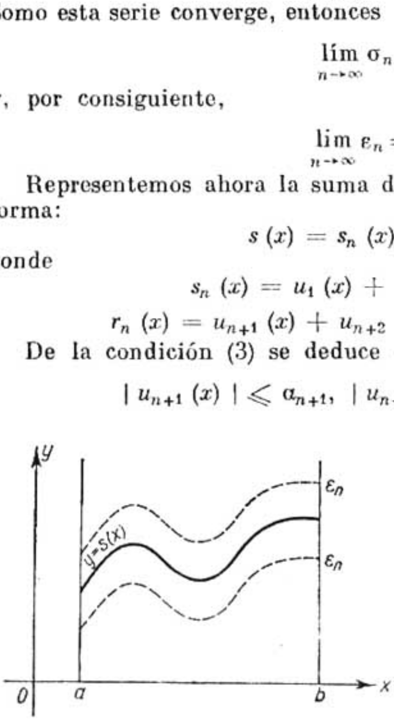

Fig. 347

y por eso $|r_n(x)| \leqslant \varepsilon_n$ para todos los x del dominio examinado.

De este modo,

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon_n$$

para todos los x del segmento $[a, b]$, donde $\varepsilon_n \to 0$, cuando $n \to \infty$.

Observación 1. El resultado obtenido podemos ilustrarlo geométricamente del modo siguiente.

Examinemos la gráfica de la función $y = s(x)$. Tracemos junto a esta curva una faja de ancho $2\varepsilon_n$, es decir, tracemos las curvas $y = s(x) + \varepsilon_n$ e $y = s(x) - \varepsilon_n$ (fig. 347). En este caso para todo ε_n, la gráfica de la función $s_n(x)$ será comprendida integramente en la faja examinada. En esta misma faja se hallarán también las gráficas de todas las sumas parciales posteriores.

Observación 2. No toda serie de funciones convergente en el segmento $[a, b]$ posee sin falta la propiedad indicada en el teorema demostrado. Pero existen también series no mayorantes que poseen dicha propiedad. Toda serie que tiene la propiedad indicada se llama *serie uniformemente convergente en el segmento* $[a, b]$.

Pues, *la serie de funciones* $u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ *se llama uniformemente convergente en el segmento* $[a, b]$, *si a todo número positivo* $\varepsilon > 0$ *arbitrariamente pequeño corresponde un número* N *tal que para todos los* $n \geqslant N$ *se cumpla la desigualdad*

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$

para cualquier x *del segmento* $[a, b]$.

Del teorema demostrado se deduce que una serie mayorante es una serie uniformemente convergente.

§ 11. CONTINUIDAD DE LA SUMA DE UNA SERIE

Sea una serie de funciones continuas

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

convergente en cierto segmento $[a, b]$.

En el capítulo II (tomo I) hemos demostrado un teorema de que la suma de un número finito de funciones continuas es una función continua. Esta propiedad no se conserva para la suma de una serie (integrada por un número infinito de sumandos). Algunas series de funciones con términos continuos tienen por suma una función continua, otras series de funciones con términos continuos tienen por suma una función discontinua.

Ejemplo. Examinemos la serie

$$\left(x^{\frac{1}{3}} - x\right) + \left(x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}\right) + \left(x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{5}}\right) + \ldots + \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right) + \ldots$$

Los términos de esta serie (cada uno está entre paréntesis) son funciones continuas para todos los valores de x. Demostremos que esta serie converge y su suma es una función discontinua.

Hallemos la suma de los n primeros términos de esta serie:

$$s_n = x^{\frac{1}{2n+1}} - x.$$

Hallemos la suma de la serie: si $x > 0$, tenemos:

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n(x) = \lim_{n \to \infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x\right) = 1 - x,$$

si $x < 0$, tenemos: $s = \lim\limits_{n \to \infty} s_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(-|x|^{\frac{1}{2n+1}} - x\right) = -1 - x,$

si $x = 0$, entonces $s_n = 0$, por eso $s = \lim\limits_{n \to \infty} s_n = 0$.

De este modo tenemos:

$$s(x) = 1 - x \text{ para } x > 0,$$
$$s(x) = -1 - x \text{ para } x < 0,$$
$$s(x) = 0 \text{ para } x = 0.$$

Así, la suma de la serie estudiada es una función discontinua, su gráfica está representada en la fig. 348, donde se dan también las gráficas de las sumas parciales $s_1(x)$, $s_2(x)$ y $s_3(x)$.

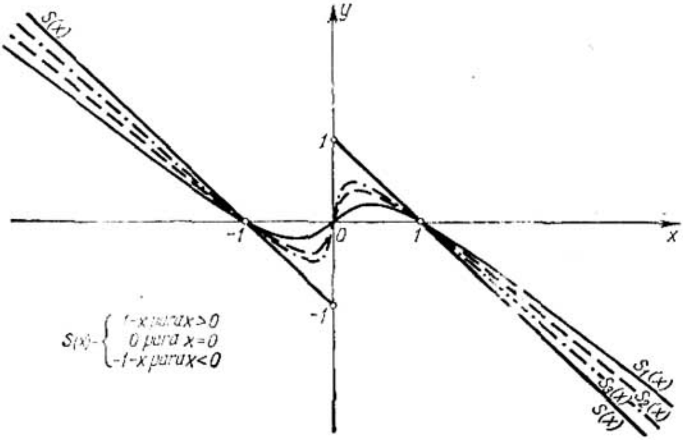

Fig. 348

Para las series mayorantes es válido el siguiente teorema.

Teorema. *La suma de una serie de funciones continuas, mayorante en un cierto segmento $[a, b]$ es una función continua en este segmento.*

Demostración. Supongamos que tenemos una serie de funciones continuas, mayorante en el segmento $[a, b]$:

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots \tag{1}$$

Escribamos su suma en la forma:

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x),$$

donde

$$s_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x),$$

y

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$$

Tomemos en el segmento $[a, b]$ un valor arbitrario del argumento x y le asignamos un incremento Δx tal que el punto $x + \Delta x$ se halle también en el segmento $[a, b]$.

Introduzcamos las designaciones:

$$\Delta s = s(x + \Delta x) - s(x);$$
$$\Delta s_n = s_n(x + \Delta x) - s_n(x);$$

entonces,

$$\Delta s = \Delta s_n + r_n(x + \Delta x) - r_n(x),$$

de donde

$$|\Delta s| \leqslant |\Delta s_n| + |r_n(x + \Delta x)| + |r_n(x)|. \tag{2}$$

Esta desigualdad es válida para cualquier número n.

Para demostrar la continuidad de $s(x)$, es preciso mostrar que para cualquier número dado de antemano $\varepsilon > 0$, arbitrariamente pequeño, existe un número $\delta > 0$ tal que para todos los $|\Delta x| < \delta$ sea $|\Delta s| < \varepsilon$.

Puesto que la serie dada (1) es mayorante, entonces, a cualquier $\varepsilon > 0$ dado de antemano corresponde un número N tal que para todos los $n \geqslant N$, y, en particular, para $n = N$, se cumpla la desigualdad

$$|r_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$

cualquier que sea x en el segmento $[a, b]$. El valor de $x + \Delta x$ se halla en el segmento $[a, b]$ y por eso se cumple la desigualdad

$$|r_N(x + \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3'}$$

Luego, para N elegido, la suma parcial $s_N(x)$ es una función continua (la suma de un número finito de funciones continuas), y, por consiguiente, se puede elegir un número positivo δ tal que para todo Δx que satisface a la condición $|\Delta x| < \delta$ se cumple la desigualdad

$$|\Delta s_N| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

En virtud de las desigualdades (2), (3), (3′) y (4) tenemos:

$$|\Delta s| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

es decir,

$$|\Delta s| < \varepsilon \text{ para } |\Delta x| < \delta,$$

lo que significa que $s(x)$ es una función continua en el punto x (y, por consiguiente, en todo punto del segmento $[a, b]$).

Observación. Del teorema demostrado se deduce que si la suma de una serie en cierto segmento $[a, b]$ es discontinua, la serie no es mayorante en este segmento. En particular, no es mayorante (en cualquier segmento que contenga el punto $x = 0$, es decir, el punto de discontinuidad de la suma de la serie) la serie estudiada en el ejemplo.

Notemos, por fin, que la suposición inversa no es correcta: existen series no mayorantes en un segmento, pero que son, sin embargo, convergentes en este segmento hacia una función continua. En particular, toda serie uniformemente convergente en el segmento $[a, b]$ (incluso, si ésta no es mayorante) tiene por su suma una función continua (naturalmente, si todos los términos de la serie son continuos).

§ 12. INTEGRACION Y DERIVACION DE LAS SERIES

Teopema 1. *Sea una serie de funciones continuas*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots, \tag{1}$$

mayorante en el segmento $[a, b]$ y sea $s(x)$ la suma de esta serie. Entonces, la integral de $s(x)$ entre los límites desde α hasta x, pertenecientes al segmento $[a, b]$ es igual a la suma de semejantes integrales de los términos de la serie dada, es decir

$$\int_\alpha^x s(x)\,dx = \int_\alpha^x u_1(x)\,dx + \int_\alpha^x u_2(x)\,dx + \ldots + \int_\alpha^x u_n(x)\,dx + \ldots$$

Demostración. Podemos representar la función $s(x)$ en la forma

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x)$$

ó

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + r_n(x).$$

Entonces:

$$\int_\alpha^x s(x)\,dx = \int_\alpha^x u_1(x)\,dx + \int_\alpha^x u_2(x) + \ldots$$

$$\ldots + \int_\alpha^x u_n(x)\,dx + \int_\alpha^x r_n(x)\,dx \tag{2}$$

(la integral de la suma de un número **finito** de sumandos es igual a la suma de los integrales de estos términos).

Como la serie inicial (1) es mayorante, entonces para cualquier x tenemos: $|r_n(x)| < \varepsilon_n$, donde $\varepsilon_n \to 0$, cuando $n \to \infty$; por eso

$$\left|\int_\alpha^x r_n(x)\,dx\right| \leqslant \int_\alpha^x |r_n(x)|\,dx < \int_\alpha^x \varepsilon_n\,dx = \varepsilon_n(x-\alpha) \leqslant \varepsilon_n(b-a).$$

Puesto que $\varepsilon_n \to 0$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^x r_n(x)\,dx = 0.$$

Pero de la igualdad (2) obtenemos:

$$\int_{\alpha}^{x} r_n(x)\,dx = \int_{\alpha}^{x} s(x)\,dx - \left[\int_{\alpha}^{x} u_1(x)\,dx + \ldots + \int_{\alpha}^{x} u_n(x)\,dx\right].$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\int_{\alpha}^{x} s(x)\,dx - \left[\int_{\alpha}^{x} u_1(x)\,dx + \ldots + \int_{\alpha}^{x} u_n(x)\,dx\right]\right\} = 0,$$

o sea,

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_{\alpha}^{x} u_1(x)\,dx + \ldots + \int_{\alpha}^{x} u_n(x)\,dx\right] = \int_{\alpha}^{x} s(x)\,dx. \qquad (3)$$

La suma entre corchetes es una suma parcial de la serie

$$\int_{\alpha}^{x} u_1(x)\,dx + \ldots + \int_{\alpha}^{x} u_n(x)\,dx + \ldots \qquad (4)$$

Como las sumas parciales de esta serie tienen un límite, dicha serie converge y su suma, en virtud de la igualdad (3), es igual a $\int_{\alpha}^{x} s(x)dx$, es decir,

$$\int_{\alpha}^{x} s(x)\,dx = \int_{\alpha}^{x} u_1(x)\,dx + \int_{\alpha}^{x} u_2(x)\,dx + \ldots + \int_{\alpha}^{x} u_n(x)\,dx + \ldots$$

Esta es la igualdad que se trataba de demostrar.

Observación 1. Si la serie no es mayorante, no siempre es posible la integración de la serie, término a término, es decir, la integral $\int_{\alpha}^{x} s(x)\,dx$ de la suma de la serie (1) no siempre es igual a la suma de las integrales de sus términos (es decir, a la suma de la serie (4)).

Teorema 2. *Si la serie*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots, \qquad (5)$$

formada de funciones que tienen derivadas continuas en el segmento $[a, b]$, *converge en este segmento hacia la suma* $s(x)$ *y la serie*

$$u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots, \qquad (6)$$

formada de las derivadas de sus términos, es mayorante en este segmento, entonces la suma de la serie de las derivadas es igual a la derivada de la suma de la serie inicial, es decir,

$$s'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots$$

Demostración. Designemos por $F(x)$ la suma de la serie (6):

$$F(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots,$$

y demostremos que

$$F(x) = s'(x).$$

Como la serie (6) es mayorante, entonces, en virtud del teorema anterior, tenemos:

$$\int_{\alpha}^{x} F(x)\,dx = \int_{\alpha}^{x} u_1'(x)\,dx + \int_{\alpha}^{x} u_2'(x)\,dx + \ldots + \int_{\alpha}^{x} u_n'(x)\,dx + \ldots$$

Efectuando la integración en el segundo miembro, obtenemos:

$$\int_{\alpha}^{x} F(x)\,dx = [u_1(x) - u_1(\alpha)] + [u_2(x) - u_2(\alpha)] + \ldots$$

$$+ [u_n(x) - u_n(\alpha)] + \ldots$$

Pero, según la condición,

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$
$$s(\alpha) = u_1(\alpha) + u_2(\alpha) + \ldots + u_n(\alpha) + \ldots,$$

cualesquiera que sean los números x y α en el segmento $[a, b]$. Por eso

$$\int_{\alpha}^{x} F(x)\,dx = s(x) - s(\alpha).$$

Derivando respecto a x ambos miembros de la última igualdad obtenemos:

$$F(x) = s'(x).$$

De este modo, hemos demostrado que, satisfechas las condiciones del teorema, la derivada de la suma de una serie es igual a la suma de las derivadas de los términos de la serie.

Observación 2. Es muy importante que la serie de derivadas sea mayorante; en el caso contrario puede pasar a ser imposible la derivación, término a término, de la serie. Para confirmarlo, citemos un ejemplo de la serie mayorante que no permite la derivación, término a término.

Examinemos la serie

$$\frac{\operatorname{sen} 1^4x}{1^2} + \frac{\operatorname{sen} 2^4x}{2^2} + \frac{\operatorname{sen} 3^4x}{3^2} + \ldots + \frac{\operatorname{sen} n^4x}{n^2} + \ldots$$

Esta serie converge hacia una función continua, puesto que es mayorante. Efectivamente, para cualquier x, sus términos son menores, en valores absolutos, que los términos positivos de la serie numérica convergente:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

Escribamos una serie formada de las derivadas de los términos de la serie inicial:

$$\cos x + 2^2 \cos 2^4x + \ldots + n^2 \cos n^4x + \ldots$$

Esta serie diverge. Así, por ejemplo, cuando $x = 0$, ésta se convierte en la serie

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + \ldots$$

(Se puede demostrar que esta serie diverge no sólo cuando $x = 0$).

§ 13. SERIES DE POTENCIAS. INTERVALO DE CONVERGENCIA

Definición 1. Se llama *serie de potencia* a una serie de funciones de la forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \tag{1}$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ son números constantes llamados coeficientes de la serie.

El dominio de convergencia de una serie de potencias siempre es cierto intervalo que puede, en particular, reducirse a un punto. Para cerciorarse de esto, demostremos, primero, el teorema siguiente, muy importante para toda la teoría de las series de potencias.

Teorema 1. (Teorema de Abel). 1) *Si una serie de potencias converge, para un cierto valor de x_0 no igual a cero, entonces ésta converge absolutamente para todo valor de x, para el cual*

$$|x| < |x_0|;$$

2) *si la serie diverge para cierto valor de x_0', entonces ésta diverge para todo valor x, para el cual*

$$|x| > |x_0'|.$$

Demostración. 1) Puesto que, según la hipótesis, la serie numérica

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n + \ldots \tag{1'}$$

converge, su término general $a_nx_0^n \to 0$, cuando $n \to \infty$; pero esto significa que existe un número positivo M tal, que todos los términos de la serie sean menores, en valor absoluto, que M.

Escribamos la serie (1) en la forma:

$$a_0 + a_1x_0\left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2x_0^2\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + a_nx_0^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \ldots \tag{1a}$$

y analicemos la serie de los valores absolutos de sus términos:

$$|a_0| + |a_1x_0|\left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2x_0^2|\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots$$

$$\ldots + |a_nx_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \tag{2}$$

Los términos de esta serie son menores que los términos correspondientes de la serie

$$M+M\left|\frac{x}{x_0}\right|+M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2+\ldots+M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n+\ldots \tag{3}$$

Cuando $|x|<|x_0|$, la última serie es una progresión geométrica con razón $\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$, y, por consiguiente, ella converge. Puesto que los términos de la serie (2) son menores que los términos correspondientes de la serie (3), la serie (2) también converge, pero esto significa que la serie (1a) ó (1) converge absolutamente.

2) *Ahora no es difícil demostrar la segunda parte del teorema:* supongamos que la serie (1) diverge en cierto punto x_0'. Entonces esta serie divergerá también en todo punto x que satisfaga a la condición $|x|>|x_0'|$. En efecto, si la serie converge en un cierto punto x que satisface a esta condición, entonces, en virtud de la *primera parte del teorema recién demostrado, debería converger* también en el punto x_0', puesto que $|x_0'|<|x|$. Pero esto contradice a la hipótesis de que la serie diverge en el punto x_0'. Por consiguiente, la serie diverge también en el punto x. De este modo, el teorema queda demostrado por completo.

El teorema de Abel permite juzgar sobre la disposición de los puntos de convergencia y divergencia de una serie de potencias. En efecto, si x_0 es un punto de convergencia, entonces todos los puntos del intervalo $(-|x_0|, |x_0|)$ son los puntos de convergencia absoluta. Si x_0' es un punto de divergencia, entonces toda la semirrecta *infinita a la derecha del punto* $|x_0'|$, *y toda la semirrecta* a la izquierda del punto $-|x_0'|$ son compuestas de puntos de divergencia.

Esto permite concluir que existe un número R tal, que, para $|x|<R$, tenemos los puntos de convergencia absoluta y, para $|x|>R$, *los puntos de divergencia.*

De este modo, existe un teorema siguiente sobre la estructura del dominio de convergencia de una serie de potencias:

Teorema 2. *El dominio de convergencia de una serie de potencias es un intervalo con centro en el origen de las coordenadas.*

Definición 2. Un intervalo desde $-R$ hasta $+R$ tal que, para todo punto x, comprendido dentro de los límites de este intervalo, la serie converge absolutamente, y para los puntos x que se encuentran fuera del mismo, la serie diverge, se llama *intervalo de convergencia* de una serie de potencias (fig. 349). El número R se llama *radio de convergencia* de la serie de potencias.

En los extremos del intervalo (es decir, en los puntos $x = R$ y $x = -R$) la cuestión de la convergencia o divergencia de cada serie concreta dada se resuelve individualmente.

Notemos que en algunas series el intervalo de convergencia se reduce a un punto ($R = 0$), y en otras, abarca todo el eje Ox ($R=\infty$).

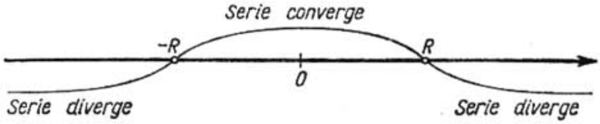

Fig. 349

Indiquemos el modo de determinación del radio de convergencia de una serie de potencias.

Sea una serie

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \tag{1}$$

Examinemos la serie formada de los valores absolutos de sus términos:

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + |a_3||x|^3 + \\ + |a_4||x|^4 + \dots + |a_n||x|^n + \dots \tag{4}$$

Para determinar la convergencia de esta última serie (con términos positivos) apliquemos el criterio de d'Alembert.

Supongamos que existe el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = L|x|.$$

Entonces, según el criterio de d'Alembert, la serie (4) converge, cuando $L|x| < 1$, es decir, si $|x| < \frac{1}{L}$, y diverge, cuando $L|x| > 1$, es decir, si $|x| > \frac{1}{L}$.

Por consiguiente, la serie (1) converge absolutamente para $|x| < \frac{1}{L}$. Pero, si $|x| > \frac{1}{L}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |x|L > 1$ y la serie (4) diverge, mientras su término general no tiende a cero*). En este caso el término general de la serie de potencias dada (1) tampoco tiende a cero y esto significa, en virtud del criterio necesario

*) Acordemos que, al demostrar el criterio de d'Alembert (véase el § 4), hemos revelado que si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, entonces el término general de la serie crece y, por consiguiente, no tiende a cero.

de convergencia, que esta serie de potencias diverge $\left(\text{cuando } |x| > \frac{1}{L}\right)$.

De lo expuesto anteriormente se deduce que el intervalo $\left(-\frac{1}{L}, \frac{1}{L}\right)$ es el intervalo de convergencia de la serie de potencias (1), es decir,

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

De manera semejante, para determinar el intervalo de convergencia se puede aplicar el criterio de Cauchy, entonces:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Ejemplo 1. Determinar el intervalo de convergencia de la serie:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

Solución. Aplicando directamente el criterio de d'Alembert, obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = |x|$$

Por consiguiente, la serie converge para $|x| < 1$ y diverge para $|x| > 1$. El estudio de la serie en los extremos del intervalo $(-1, 1)$ mediante el criterio de d'Alembert es imposible. Sin embargo, se puede ver directamente que la serie diverge, cuando $x = -1$ y $x = 1$.

Ejemplo 2. Determinar el intervalo de convergencia de la serie:

$$\frac{2x}{1} - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \ldots$$

Solución. Aplicamos el criterio de d'Alembert

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(2x)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(2x)^n}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| |2x| = |2x|.$$

La serie converge, cuando $|2x| < 1$, es decir, si $|x| < \frac{1}{2}$; la serie converge, cuando $x = \frac{1}{2}$; la serie diverge, cuando $x = -\frac{1}{2}$.

Ejemplo 3. Determinar el intervalo de convergencia de la serie

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Solución. Aplicando el criterio de d'Alembert, obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1} n!}{x^n (n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1.$$

Como el límite no depende de x y es menor que la unidad, la serie converge para todos los valores de x.

Ejemplo 4. La serie $1 + x + (2x)^2 + (3x)^3 + \ldots + (nx)^n + \ldots$ diverge para todos los valores de x, excepto $x = 0$, puesto que $(nx)^n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, cualquiera que sea el valor de x, diferente de cero.

Teorema 3. *Una serie de potencias*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad (1)$$

es mayorante en todo el segmento $[-\rho, \rho]$ *íntegramente dispuesto en el interior del intervalo de convergencia.*

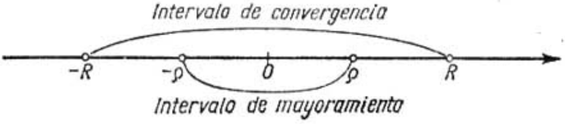

Fig. 350

Demostración. Según la hipótesis, $\rho < R$ (fig. 350), por eso la serie numérica (con términos positivos)

$$|a_0| + |a_1|\rho + |a_2|\rho^2 + \ldots + |a_n|\rho^n \qquad (5)$$

converge. Pero cuando $|x| < \rho$, los términos de la serie (1) no son mayores, en valor absoluto, que los términos correspondientes de la serie (5). Por consiguiente, la serie (1) es mayorante en el segmento $[-\rho, \rho]$.

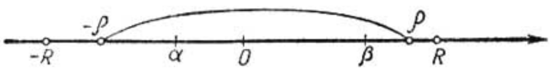

Fig. 351

Corolario 1. *La suma de una serie de potencias es una función continua en todo segmento íntegramente dispuesto en el interior del intervalo de convergencia.* Efectivamente, la serie es mayorante en este segmento y sus términos son las funciones continuas de x. Por consiguiente, en virtud del teorema 1, § 11, la suma de esta serie es una función continua.

Corolario 2. *Si los límites de integración α, β se encuentran en el interior del intervalo de convergencia de una serie de potencias, la integral de la suma de la serie es igual a la suma de las integrales de los términos de la serie*, puesto que el dominio de integración se le puede encerrar dentro del segmento $[-\rho, \rho]$ donde la serie es mayorante (fig. 351) (véase el teorema 2, § 12 sobre la posibilidad de integración, término a término, de la serie mayorante).

§ 14. DERIVACION DE LAS SERIES DE POTENCIAS

Teorema 1. *Si la serie de potencias*

$$s(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{1}$$

tiene un intervalo de convergencia $(-R, R)$, *entonces la serie*

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots, \tag{2}$$

obtenida por la derivación término a término de la serie (1) tiene el mismo intervalo de convergencia $(-R, R)$; *siendo* $\varphi(x) = s'(x)$, *cuando* $|x| < R$, *es decir, dentro del intervalo de convergencia la derivada de la suma de la serie de potencias (1) es igual a la suma de la serie obtenida por la derivación término a término de la serie (1).*

Demostración. Demostremos que la serie (2) es mayorante en todo segmento $[-\rho, \rho]$ íntegramente dispuesto en el interior del intervalo de convergencia.

Fig. 352

Tomemos un punto ξ tal que $\rho < \xi < R$ (fig. 352). En este punto la serie (1) converge, por consiguiente, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\xi^n = 0$, y por eso, se puede indicar un número constante M tal, que

$$|a_n\xi^n| < M \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Si, $|x| \leqslant \rho$, entonces:

$$|na_nx^{n-1}| \leqslant |na_n\rho^{n-1}| = n|a_n\xi^{n-1}| \left|\frac{\rho}{\xi}\right|^{n-1} < n\frac{M}{\xi}q^{n-1},$$

donde

$$q = \frac{\rho}{\xi} < 1.$$

De este modo, cuando $|x| \leqslant \rho$, los términos de la serie (2), en valor absoluto, son menores que los términos de la serie numérica positiva con términos constantes:

$$\frac{M}{\xi}(1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} + \ldots).$$

Pero, como muestra el uso del criterio de d'Alembert, la última serie converge:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nq^{n-1}}{(n-1)\,q^{n-2}} = q < 1.$$

Por consiguiente, la serie (2) es mayorante en el segmento $[-\rho, \rho]$, y, en virtud del teorema 2, § 12, su suma es la derivada de la suma de la serie dada en el segmento $[-\rho, \rho]$, es decir,

$$\varphi(x) = s'(x).$$

Como todo punto interior del intervalo $(-R, R)$ se puede incluir en cierto segmento $[-\rho, \rho]$, de ahí se deduce que la serie (2) converge *en cualquier punto interior del intervalo* $(-R, R)$.

Demostremos que la serie (2) fuera del intervalo $(-R, R)$, diverge. Supongamos que la serie (2) converge para $x_1 > R$. Integrándola término a término en el intervalo $(0, x_2)$, donde $R < x_2 < x_1$, obtenemos la serie (1) que converge en el punto x_2, pero esto contradice a las condiciones del teorema. De este modo, el intervalo $(-R, R)$ es el intervalo de convergencia de la serie (2). El teorema es plenamente demostrado.

Se puede de nuevo derivar la serie (2) término a término y continuarlo tantas veces cuanto se quiera. De este modo, obtenemos la deducción:

Teorema 2. *Si una serie de potencias converge en intervalo* $(-R, R)$, *su suma representa una función que tiene en el interior del intervalo de convergencia las derivadas de cualquier orden, cada una de las cuales es la suma de la serie obtenida por derivación de término a término de la serie dada unas veces correspondientes; en este caso el intervalo de convergencia de cada serie obtenida por derivación, es el mismo intervalo* $(-R, R)$.

§ 15. SERIES DE POTENCIAS DE $x - a$

Una serie de funciones de la forma

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots, \quad (1)$$

se llama *serie de potencias.*

Aquí las constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ se llaman también los coeficientes de la serie. Esta serie está dispuesta según las potencias crecientes del binomio $x - a$.

Cuando $a = 0$, obtenemos una serie de potencias de x que es, por consiguiente, un caso particular de la serie (1).

Para determinar el dominio de convergencia de la serie (1), sustituyamos en ésta la variable

$$x - a = X.$$

Después de la sustitución la serie (1) toma el aspecto

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n + \ldots, \quad (2)$$

es decir, hemos obtenido la serie de potencias de X.

Sea $-R < X < R$ el intervalo de convergencia de la serie (2) (fig. 353, α). De ahí se deduce que la serie (1) convergerá para los valores de x que satisfagan a la desigualdad $-R < x - a < R$, o bien $a - R < x < a + R$. Puesto que la serie (2) diverge para

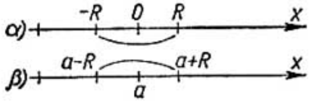

Fig. 353

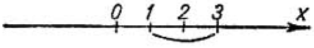

Fig. 354

$|X| > R$, entonces la serie (1) divergerá para $|x - a| > R$, es decir, divergerá fuera del intervalo $a - R < x < a + R$ (fig. 353, β).

Por consiguiente, el intervalo de convergencia de la serie (1) es el intervalo $(a - R, a + R)$ con centro en el punto a. Todas las propiedades de la serie de potencias de x en el interior del intervalo de convergencia $(-R, +R)$ se conservan completamente para una serie de potencias de $x - a$ en el interior del intervalo de convergencia $(a - R, a + R)$. Así, por ejemplo, efectuada la integración término a término de la serie de potencias (1), si los límites de integración se hallan en el interior del intervalo de convergencia $(a - R, a + R)$, obtenemos una serie cuya suma es igual a la integral correspondiente de la suma de la serie dada (1). Durante la derivación, término a término, de la serie de potencias (1), para todos los valores de x que se hallan en el interior del intervalo de convergencia $(a - R, a + R)$, obtenemos una serie cuya suma es igual a la derivada de la suma de la serie dada (1).

Ejemplo. Hallar el dominio de convergencia de la serie

$$(x-2) + (x-2)^2 + (x-2)^3 + \ldots + (x-2)^n + \ldots$$

Solución. Poniendo $x - 2 = X$, obtenemos la serie

$$X + X^2 + X^3 + \ldots + X^n + \ldots$$

Esta serie converge para $-1 < X < +1$. Por consiguiente, la serie dada converge para todos los valores de x, para los cuales $-1 < x - 2 < 1$, es decir, cuando $1 < x < 3$ (fig. 354).

§ 16. SERIES DE TAYLOR Y DE MACLAURIN

En el § 6 del capítulo IV (tomo I) mostramos que para una función $f(x)$ que tiene todas las derivadas hasta $(n+1)$-ésimo orden inclusive, en la vecindad del punto $x = a$ (es decir, en cierto intervalo que contiene el punto $x = a$) es válida la fórmula de Taylor:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) +$$

$$+ \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x), \qquad (1)$$

donde así llamado término complementario $R_n(x)$ se calcula según la fórmula

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)], \qquad 0 < \theta < 1.$$

Si la función $f(x)$ tiene las derivadas de todos los órdenes en la vecindad del punto $x = a$, entonces podemos tomar n arbitrariamente grande en la fórmula de Taylor. Supongamos que en la vecindad considerada el término complementario R_n tiende a cero, cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0.$$

Entonces, pasando en la fórmula (1) al límite, cuando $n \to \infty$, obtenemos a la derecha una serie infinita que se llama *serie de Taylor*:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots \qquad (2)$$

La última igualdad se verifica sólo en el caso, si $R_n(x) \to 0$, cuando $n \to \infty$. En este caso la serie de segundo miembro converge y su suma es igual a la función dada $f(x)$. Demostremos que esto es efectivamente así:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

donde

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Puesto que, según la condición, $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, entonces:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} P_n(x).$$

Pero $P_n(x)$ es n-ésima suma parcial de la serie (2); su límite es igual a la suma de la serie del segundo miembro de la igualdad (2). Por consiguiente, la igualdad (2) es válida:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(a)+\ \dots$$

$$\dots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ \dots$$

De lo expuesto se deduce que *la serie de Taylor representa la función dada* $f(x)$ *sólo cuando* $\lim R_n(x)=0$. Si $\lim R_n(x)\neq 0$, la serie no representa la función dada, aunque puede converger (hacia otra función).

Si en la serie de Taylor ponemos $a=0$, obtenemos un caso particular de ésta, que se llama *serie de Maclaurin*:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ \dots\ +\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ \dots \tag{3}$$

Si escribimos formalmente la serie de Taylor de una función, entonces, para demostrar que la serie escrita efectivamente representa la función dada, es preciso demostrar que el término complementario tiende a cero, o convencerse, de una u otra manera, de que la serie escrita converge hacia la función dada.

Notemos que para cada una de las funciones elementales determinadas en § 8, capítulo 1 (tomo I) existen a y R tales que en el intervalo $(a-R,\ a+R)$ ésta se desarrolla en la serie de Taylor, o (si $a=0$) de Maclaurin.

§ 17. EJEMPLOS DE DESARROLLO DE LAS FUNCIONES EN SERIES

1. Desarrollo de la función $f(x)=\operatorname{sen} x$ en la serie de Maclaurin. En § 7, capítulo IV (tomo I) hemos obtenido la fórmula

$$\operatorname{sen} x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ \dots\ +(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_{2n}(x).$$

Como hemos demostrado que $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n}(x)=0$, entonces, en virtud de lo expuesto en el párrafo anterior, obtenemos el desarrollo de sen x en la serie de Maclaurin:

$$\operatorname{sen} x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ \dots\ +(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ \dots \tag{1}$$

Puesto que el término complementario tiende a cero para cualquier x, la serie dada converge y tiene por suma la función de sen x para cualquier x.

En la fig. 355 se representan las gráficas de la función sen x y de las primeras tres sumas parciales de la serie (1).

Esta serie se emplea para calcular los valores de sen x para diferentes valores de x.

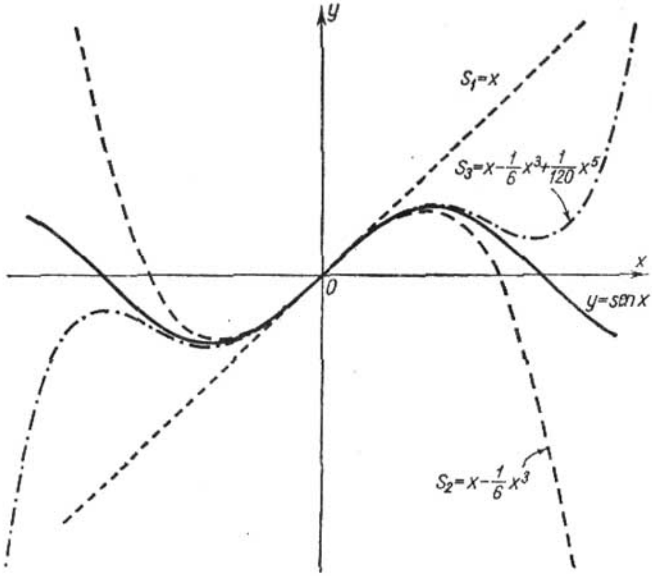

Fig. 355

Calculemos, por ejemplo, sen 10° con precisión de hasta 10^{-5}. Puesto que $10° = \frac{\pi}{18} = 0{,}174533$, entonces:

$$\operatorname{sen} 10° = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^7 + \dots$$

Limitemos con los dos primeros términos y obtenemos la siguiente igualdad aproximada:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3;$$

el error cometido δ es menor, en valor absoluto, que el primero de los términos suprimidos, es decir,

$$\delta < \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 < \frac{1}{120}(0,2)^5 < 4\cdot 10^{-6}.$$

Si calculamos cada sumando en la expresión de sen $\frac{\pi}{18}$ con seis cifras decimales, obtenemos: sen $\frac{\pi}{18} = 0,173647$.

Se puede garantizar que las primeras cuatro cifras son exactas.

2. Desarrollo de la función $f(x) = e^x$ en la serie de Maclaurin.

En virtud del § 7, capítulo IV (tomo I), tenemos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \tag{2}$$

puesto que hemos demostrado que $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para cualquier x. Por consiguiente, la serie converge para todos los valores de x y representa la función e^x.

3. Desarrollo de la función $f(x) = \cos x$ en la serie de Maclaurin.

En virtud del § 7, capítulo IV (tomo I), tenemos:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots; \tag{3}$$

para todos los valores de x la serie converge y representa la función $\cos x$.

§ 18. FORMULA DE EULER

Hasta ahora hemos considerado solamente las series con términos reales, sin tocar las series con términos complejos. Sin exponer la teoría completa de las series con términos complejos que sale fuera de los límites de la obra presente, examinemos sólo un ejemplo importante de este campo.

En el capítulo VII (tomo I) hemos determinado la función e^{x+iy} por la igualdad

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Para $x = 0$, obtenemos la fórmula de Euler:

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y.$$

Si definimos la función exponencial e^{iy} con exponente imaginario mediante la fórmula (2) § 17, que representa la función e^x en forma de la serie de potencias, obtenemos la misma igualdad de Euler. En efecto, determinemos e^{iy}, sustituyendo en la igualdad (2) § 17 x por la expresión iy:

$$e^{iy}=1+\frac{iy}{1!}+\frac{(iy)^2}{2!}+\frac{(iy)^3}{3!}+\ldots+\frac{(iy)^n}{n!}+\ldots \qquad (1)$$

Tomando en consideración que $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, $i^6=-1$, etc., transformemos la fórmula (1) del modo siguiente:

$$e^{iy}=1+\frac{iy}{1!}-\frac{y^2}{2!}-\frac{iy^3}{2!}+\frac{y^4}{4!}+\frac{iy^5}{5!}-\ldots$$

Separando en esta serie las partes real e imaginaria, hallamos:

$$e^{iy}=\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\ \ldots\right)+i\left(\frac{y}{1!}-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\ \ldots\right).$$

Las expresiones entre los paréntesis son las series de potencias cuyas sumas son iguales, respectivamente, a $\cos y$ y $\operatorname{sen} y$ (véase las fórmulas (3) y (1) del párrafo anterior). Por consiguiente,

$$e^{iy}=\cos y+i\operatorname{sen} y.$$

De este modo, hemos llegado de nuevo a la fórmula de Euler.

§ 19. SERIE BINOMIAL

1. Desarrollemos en la serie de Maclaurin la función

$$f(x)=(1+x)^m,$$

donde m es un número constante arbitrario.

Aquí la evaluación del término complementario representa ciertas dificultades, por eso, para desarrollar la función dada, procedemos de un modo algo diferente.

Notemos que la función $f(x)=(1+x)^m$ satisface a la ecuación diferencial

$$(1+x)f'(x)=mf(x) \qquad (1)$$

y a la condición

$$f(0)=1,$$

hallemos una serie de potencias, cuya suma $s(x)$ satisface a la ecuación (1) y a la condición $s(0)=1$:

$$s(x)=1+a_1x-a_2x^2+\ \ldots\ +a_nx^n+\ \ldots^{*)}. \qquad (2)$$

Poniéndola en la ecuación (1), tenemos:

$$(1+x)(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ \ldots\ +na_nx^{n-1}+\ \ldots)=$$
$$=m(1+a_1x+a_2x^2+\ \ldots\ +a_nx^n+\ \ldots).$$

*) Hemos aceptado que el término absoluto es igual a la unidad en virtud de la condición inicial $s(0)=1$.

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de x en ambos miembros de la igualdad, hallamos:

$$a_1 = m;\ a_1 + 2a_2 = ma_1;\ \ldots;\ na_n + (n+1)\,a_{n+1} = ma_n;\ \ldots$$

De ahí obtenemos para los coeficientes de la serie las expresiones:

$$a_0 = 1;\quad a_1 = m;\quad a_2 = \frac{a_1(m-1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2};$$

$$a_3 = \frac{a_2(m-2)}{3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3};\ \ldots;$$

$$a_n = \frac{m(m-1)\ \ldots\ [m-n+1]}{1\cdot 2\ \ldots\ n};\ \ldots$$

Estos son los coeficientes binomiales.

Sustituyéndolos en la fórmula (2), obtenemos:

$$s(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ \ldots$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ \ldots\ [m-(n-1)]}{1\cdot 2\ \ldots\ n}x^n + \ \ldots \tag{3}$$

Si m es un número positivo entero, entonces, a partir del término que contiene x^{m+1}, todos los coeficientes son iguales a cero, y la serie se convierte en un polinomio. Si m es fraccionario o un número negativo entero, tenemos una serie infinita.

Determinemos el radio de convergencia de la serie (3):

$$u_{n+1} = \frac{m(m-1)\ldots[m-n+1]}{n!}x^n,$$

$$u_n = \frac{m(m-1)\ldots[m-n+2]}{(n-1)!}x^{n-1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(n-1)!}{m(m-1)\ldots(m-n+2)\,n!}x\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n+1}{n}\right||x| = |x|.$$

De este modo, la serie (3) converge, cuando $|x| < 1$.

En el intervalo $(-1, 1)$ la serie (3) representa una función $s(x)$ que satisface a la ecuación diferencial (1) y a la condición

$$s(0) = 1.$$

Puesto que solamente la única función satisface a la ecuación diferencial (1) y a la condición inicial $s(0) = 1$, entonces, la suma de la serie (3) es idénticamente igual a la función $(1 + x)^m$, obtenemos el desarrollo:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \dots \quad (3')$$

En particular, para $m = -1$, tenemos:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (4)$$

Si $m = {}^1/_2$, será:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \dots \quad (5)$$

Cuando $m = -{}^1/_2$ tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \dots \quad (6)$$

2. Apliquemos el desarrollo del binomio para desarrollar otras funciones. Desarrollemos en la serie de Maclaurin la función

$$f(x) = \operatorname{arcsen} x.$$

Sustituyendo en la igualdad (6) x por la expresión $-x^2$, obtenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \dots$$

$$\dots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2n}x^{2n} + \dots$$

Basándonos en el teorema sobre la integración de las series de potencias, obtenemos, para $|x| < 1$:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\dots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Esta serie converge en el intervalo $(-1, 1)$. Podemos demostrar que la serie converge también cuando $x = \pm 1$ y que la suma de la serie correspondiente a estos valores también es igual a $\operatorname{arcsen} x$.

Entonces, poniendo $x = 1$, obtenemos la fórmula para calcular π:

$$\operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7} + \ldots$$

§ 20. DESARROLLO DE LA FUNCION $\ln(1+x)$ EN UNA SERIE DE POTENCIAS. CALCULO DE LOGARITMOS

Integrando la igualdad (4) § 19 en los límites desde 0 hasta x (para $|x| < 1$), tenemos:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots)\, dx$$

ó

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad (1)$$

Esta igualdad es válida en el intervalo $(-1, 1)$.

Si en la fórmula citada sustituyemos x por $-x$, obtenemos la serie

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots, \quad (2)$$

que converge en el intervalo $(-1, 1)$.

Por medio de las series (1) y (2) podemos calcular los logaritmos de los números comprendidos entre el cero y dos. Indiquemos, sin demostración, que, para $x = 1$, el desarrollo (1) es también válido.

Demos una fórmula para calcular los logaritmos naturales de los números enteros arbitrarios.

Puesto que durante la sustracción término a término de dos series convergentes obtenemos una serie convergente (véase § 1, teorema 3), entonces sustrayendo término a término la igualdad (2) de la (1) hallamos:

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right].$$

Pongamos además, $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$; entonces: $x = \frac{1}{2n+1}$. Para todo $n > 0$, tenemos: $0 < x < 1$, por eso

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln\frac{n+1}{n} = 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \ldots\right],$$

de donde

$$\ln (n+1) - \ln n = 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3\,(2n+1)^3} + \frac{1}{5\,(2n+1)^5} + \ldots\right]. \quad (3)$$

Cuando $n = 1$ obtenemos:

$$\ln 2 = 2\left[\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \ldots\right].$$

Para calcular ln 2 con el grado de precisión dado δ, es preciso calcular la suma parcial s_p, eligiendo un número p de sus términos de modo que la suma de los términos suprimidos (es decir, el error R_p cometido durante la sustitución de s por s_p) sea menor que el error admisible δ. Para eso evaluemos el error R_p:

$$R_p = 2\left[\frac{1}{(2p+1)\,3^{2p+1}} + \frac{1}{(2p+3)\,3^{2p+3}} + \frac{1}{(2p+5)\,3^{2p+5}} + \ldots\right].$$

Puesto que los números $2p+3$, $2p+5$, ... son mayores que $2p+1$, entonces, sustituyéndolos por $2p+1$, aumentamos cada fracción. Por eso

$$R_p < 2\left[\frac{1}{(2p+1)\,3^{2p+1}} + \frac{1}{(2p+1)\,3^{2p+3}} + \frac{1}{(2p+1)\,3^{2p+5}} + \ldots\right],$$

ó

$$R_p < \frac{2}{2p+1}\left[\frac{1}{3^{2p+1}} + \frac{1}{3^{2p+3}} + \frac{1}{3^{2p+5}} + \ldots\right].$$

La serie entre corchetes es una progresión geométrica de razón 1/9. Calculando la suma de esta progresión, hallamos:

$$R_p < \frac{2}{2p+1}\,\frac{\frac{1}{3^{2p+1}}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{(2p+1)\,3^{2p-1}4}. \quad (4)$$

Ahora, si queremos calcular ln 2, por ejemplo, con precisión de hasta 0,0000001, es preciso elegir p de modo que sea $R_p < 0{,}0000001$. Esto se puede lograr, eligiendo p de modo que el segundo miembro de la desigualdad (4) sea menor que 0,0000001. Mediante la simple elección hallamos que es suficiente tomar $p = 8$. Pues, con la precisión de hasta 0,0000001 tenemos:

$$\ln 2 \approx s_8 = 2\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}+\frac{1}{11\cdot 3^{11}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{13\cdot 3^{13}}+\frac{1}{15\cdot 3^{15}}\right]=0,6931471.$$

La respuesta con siete cifras exactas es $\ln 2 = 0,6931471$.

Poniendo en la fórmula (3) $n = 2$, tenemos:

$$\ln 3 = \ln 2 + 2\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}+\ \ldots\right] = 1,098612, \text{ etc.}$$

De este modo, podemos obtener los logaritmos **naturales** para números enteros cualesquiera.

Para obtener los logaritmos **decimales** de los números, es preciso usar (véase § 8, capítulo II, tomo I) la correlación:

$$\log N = M \ln N,$$

donde $M = 0,434294$. Entonces, por ejemplo, obtenemos $\ln 2 = 0,6931472$, $\log 2 = 0,30103$.

§ 21. APLICACION DE LAS SERIES AL CALCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS

En los capítulos X y XI (tomo I) hemos indicado que existen las integrales definidas las que, siendo funciones del límite superior, no se expresan en forma definitiva mediante las funciones elementales. A veces tales integrales es cómodo calcularlas con ayuda de series.

Examinemos aquí algunos ejemplos.

1. Supongamos que es necesario calcular la integral

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx.$$

Aquí, la función primitiva de e^{-x^2} no es una función elemental. Para calcular esta integral desarrollemos el integrando en una serie, sustituyendo en el desarrollo de e^x (véase la fórmula (2), § 17) x por $-x^2$:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ \ldots\ + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ \ldots$$

Integrando ambos miembros de esta igualdad en los límites de 0 a a, obtenemos:

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx=\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1!\cdot 3}+\frac{x^5}{2!\cdot 5}-\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\ \dots\right)\Bigg|_0^a=\frac{a}{1}-\frac{a^3}{1!\cdot 3}+\frac{a^5}{2!\cdot 5}-$$

$$-\frac{a^7}{3!\cdot 7}+\dots$$

Esta igualdad permite calcular la integral dada, para toda a, con cualquier grado de precisión.

2. Calcular la integral

$$\int_0^a \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$$

Desarrollemos el integrando en una serie: de la igualdad

$$\operatorname{sen} x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ \dots$$

obtenemos:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ \dots;$$

esta última serie converge para todos los valores de x. Integrando término a término, obtenemos:

$$\int_0^a \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx=a-\frac{a^3}{3!\cdot 3}+\frac{a^5}{5!\cdot 5}-\frac{a^7}{7!\cdot 7}+\ \dots$$

Es fácil calcular la suma de la serie con cualquier grado de precisión para toda a.

3. Calcular la integral elíptica.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi \qquad (k<1).$$

Desarrollemos el integrando en una serie binomial, poniendo $m=1/2$, $x=-k^2\operatorname{sen}^2\varphi$ (véase la fórmula (5), § 19):

$$\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}=1-\frac{1}{2}k^2\operatorname{sen}^2\varphi-\frac{1}{2}\frac{1}{4}k^4\operatorname{sen}^4\varphi-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}k^6\operatorname{sen}^6\varphi-\ \dots$$

Esta serie converge para todos los valores de φ y permite la integración término a término, puesto que es mayorante en todo intervalo.

20—536

Por eso

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi = \varphi - \frac{1}{2}k^2\int_0^{\varphi}\operatorname{sen}^2\varphi\,d\varphi -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{4}k^4\int_0^{\varphi}\operatorname{sen}^4\varphi\,d\varphi - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}k^6\int_0^{\varphi}\operatorname{sen}^6\varphi\,d\varphi - \ldots$$

Las integrales del segundo miembro se calculan simplemente. Para $\varphi = \frac{\pi}{2}$ tenemos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}\varphi\,d\varphi = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2}$$

(véase § 6, capítulo XI, tomo I), y por consiguiente,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{k^6}{5} - \ldots\right].$$

§ 22. APLICACION DE LAS SERIES A LA INTEGRACION DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Si la integración de una ecuación diferencial no se reduce a las cuadraturas, se puede recurrir a los métodos aproximados de integración de la ecuación. Uno de estos métodos consiste en representar la solución de la ecuación en forma de la serie de Taylor; la suma de un número finito de términos de esta serie será aproximadamente igual a la solución particular buscada.

Por ejemplo, sea necesario hallar la solución de una ecuación diferencial de segundo orden:

$$y'' = F(x, y, y'), \tag{1}$$

que satisface a las condiciones iniciales

$$(y)_{x=x_0} = y_0, \qquad (y')_{x=x_0} = y'_0. \tag{2}$$

Supongamos que la solución $y = f(x)$ existe y puede ser representada en la forma de la serie de Taylor (no nos detendremos en la cuestión en qué condiciones esto tiene lugar):

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} f''(x_0) + \ldots \qquad (3)$$

Tenemos que hallar $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, . . ., es decir, los valores de las derivadas de la solución particular para $x = x_0$. Esto se puede hacer mediante la ecuación (1) y las condiciones (2).

Efectivamente, de las condiciones (2) se deduce:

$$f(x_0) = y_0, \qquad f'(x_0) = y'_0;$$

de la ecuación (1) obtenemos:

$$f''(x_0) = (y'')_{x=x_0} = F(x_0, y_0, y'_0).$$

Derivando ambos miembros de la ecuación (1) respecto a x, tenemos:

$$y''' = F'_x(x, y, y') + F'_y(x, y, y')\, y' + F'_{y'}(x, y, y')\, y'' \qquad (4)$$

y poniendo los valores $x = x_0$ en el segundo miembro, hallamos:

$$f'''(x_0) = (y''')_{x=x_0}$$

Derivando la correlación (4) una vez más, hallamos:

$$f^{\mathrm{IV}}(x_0) = (y^{\mathrm{IV}})_{x=x_0},$$

etc.

Los valores hallados de las derivadas ponemos en la igualdad (3). Esta serie representa la solución de la ecuación dada para los valores de x para los cuales la serie converge.

Ejemplo 1. Hallar la solución de la ecuación

$$y'' = -yx^2,$$

que satisface a las condiciones iniciales

$$(y)_{x=0} = 1, \quad (y')_{x=0} = 0.$$

Solución. Tenemos:

$$f(0) = y_0 = 1; \qquad f'(0) = y'_0 = 0.$$

De la ecuación dada hallamos $(y'')_{x=0} = f''(0) = 0$; luego

$$y''' = -y'x^2 + 2xy, \qquad (y''')_{x=0} f'''(0) = 0,$$

$$y^{\mathrm{IV}} = -x^2y'' - 4xy' - 2y, \quad (y^{\mathrm{IV}})_{x=0} = -2$$

y el general, derivando k veces ambos miembros de la ecuación según la fórmula de Leibniz, hallamos (§ 22, capítulo III, tomo I):

$$y^{(k+2)} = -y^{(k)}x^2 - 2ky^{(k-1)}x - k(k-1)\, y^{(k-2)}.$$

Poniendo $x = 0$, tenemos:

$$y_0^{(k+2)} = -k(k-1)\, y_0^{k-2}$$

o, poniendo $k + 2 = n$:

$$y_0^n = -(n-3)(n-2)\, y_0^{(n-4)}.$$

20*

De ahí:

$$y_0^{IV}=-1\cdot 2,\ y_0^{(8)}=-5\cdot 6\, y_0^{IV}=(-1)^2(1\cdot 2)(5\cdot 6),$$
$$y_0^{(12)}=-9\cdot 10 y_0^{(8)}=(-1)^3(1\cdot 2)(5\cdot 6)\cdot(9\cdot 10),$$
$$y_0^{4k}=(-1)^k(1\cdot 2)(5\cdot 6)(9\cdot 10)\ \dots\ [(4k-3)(4k-2)].$$

Además,

$$y_0^{(5)}=0,\quad y_0^{(9)}=0,\ \dots,\ y_0^{(4k+1)}=0,$$
$$y_0^{(6)}=0,\quad y_0^{(10)}=0,\ \dots,\ y_0^{(4k+2)}=0,$$
$$y_0^{(7)}=0,\quad y_0^{(11)}=0,\ \dots,\ y_0^{(4k+3)}=0.$$

De este modo, solamente las derivadas, cuyo orden es múltiple a 4, no se reducen a cero.

Sustituyendo los valores hallados de las derivadas en la serie de Maclaurin, obtenemos la solución de la ecuación

$$y=1-\frac{x^4}{4!}1\cdot 2+\frac{x^8}{8!}(1\cdot 2)(5\cdot 6)-\frac{x^{12}}{12!}(1\cdot 2)(5\cdot 6)(9\cdot 10)+\dots$$
$$\dots+(-1)^k\frac{x^{4k}}{(4k)!}(1\cdot 2)(5\cdot 6)\ \dots\ [(4k-3)(4k-2)]+\dots$$

Mediante el criterio de d'Alembert se puede comprobar que esta serie converge para todos los valores de x; por eso, ella es la solución de la ecuación.

Si la ecuación es lineal, es más cómodo buscar los coeficientes del desarrollo de una solución particular por el método de coeficientes indefinidos. Para eso «sustituimos» directamente la serie

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ \dots\ +a_nx^n+\ \dots$$

en la ecuación diferencial e igualamos los coeficientes de iguales potencias de x que se hallan en ambos miembros de la ecuación.

Ejemplo 2. Hallar la solución de la ecuación

$$y''=2xy'+4y,$$

que satisface a las condiciones iniciales

$$(y)_{x=0}=0,\qquad (y')_{x=0}=1.$$

Solución. Ponemos

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots+a_nx^n+\dots$$

Según las condiciones iniciales hallamos:

$$a_0=0,\qquad a_1=1.$$

Por consiguiente,

$$y=x+a_2x^2+a_3x^3+\dots+a_nx^n+\dots,$$
$$y'=1+2a_2x+3a_3x^2+\dots+na_nx^{n-1}+\dots,$$
$$y''=2a_2+3\cdot 2a_3x+\dots+n(n-1)\,a_nx^{n-2}+\dots$$

Sustituyendo las expresiones escritas en la ecuación dada e igualando los coeficientes de iguales potencias de x, obtenemos:

$$2a_2=0,\qquad \text{de donde } a_2=0;$$
$$3\cdot 2a_3=2+4,\qquad \text{de donde } a_3=1;$$

$$4\cdot 3a_4=4a_2+4a_2, \quad \text{de donde } a_4=0;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$n(n-1)\,a_n=(n-2)\,2a_{n-2}+4a_{n-2}, \quad \text{de donde } a_n=\frac{2a_{n-2}}{n-1}.$$

Por consiguiente,

$$a_5=\frac{2\cdot 1}{4}=\frac{1}{2!}; \qquad a_7=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{6}=\frac{1}{3!}; \qquad a_9=\frac{1}{4!};$$

$$a_{2k+1}=\frac{2\cdot\frac{1}{(k-1)!}}{2k}=\frac{1}{k!}; \qquad a_4=0; \quad a_6=0; \quad a_{2k}=0.$$

Poniendo los coeficientes hallados, obtenemos la solución buscada:

$$y=x+\frac{x^3}{1}+\frac{x^5}{2!}+\frac{x^7}{3!}+\dots+\frac{x^{2k+1}}{k!}+\dots$$

La serie obtenida converge para todos los valores de x.

Notemos que la solución particular hallada se puede expresar mediante las funciones elementales: sacando x fuera del paréntesis, obtenemos entre paréntesis el desarrollo de la función e^{x^2}. Por consiguiente,

$$y=xe^{x^2}.$$

§ 23. ECUACION DE BESSEL

La ecuación diferencial de la forma

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)\,y=0 \qquad (p=\text{const}) \tag{1}$$

se llama *ecuación de Bessel*.

Es conveniente buscar la solución de esta ecuación, igual que las soluciones de algunas otras ecuaciones con coeficientes variables, no en forma de una serie de potencias, sino en forma de un producto de cierta potencia de x por una serie de potencias:

$$y=x^r\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k. \tag{2}$$

El coeficiente a_0 podemos considerar distinto de cero a causa de la indeterminación del exponente r.

Escribamos la expresión (2) en la forma:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{r+k}$$

y hallemos sus derivadas:

$$y'=\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)\,a_kx^{r+k-1}; \qquad y''=\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)(r+k-1)\,a_kx^{r+k-2}.$$

Pongamos estas expresiones en la ecuación (1):

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1)\, a_k x^{r+k-2} +$$

$$+ x \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)\, a_k x^{r+k-1} + (x^2 - p^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k} = 0.$$

Igualando a cero los coeficientes de x en la potencia r, $r+1$, $r+2$, . . ., $r+k$, obtenemos un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{lr}
[r(r-1)+r-p^2]\, a_0 = 0 \text{ ó } & [r^2-p^2)]\, a_0 = 0, \\
[(r+1)\, r+(r+1)-p^2]\, a_1 = 0 \text{ ó } & [(r+1)^2-p^2]\, a_1 = 0, \\
[(r+2)(r+1)+(r+2)-p^2]\, a_2+a_0 = 0 \text{ ó } & [(r+2)^2-p^2]\, a_2+a_0 = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
[(r+k)(r+k-1)+(r+k)-p^2]\, a_k+a_{k-2} = 0 \text{ ó } & [(r+k)^2-p^2]\, a_k+a_{k-2} = 0.
\end{array}\right\} \quad (3)$$

Examinemos la última igualdad:

$$[(r+k)^2 - p^2]\, a_k + a_{k-2} = 0. \qquad (3')$$

Podemos escribirla de modo siguiente:

$$[(r+k-p)(r+k+p)]\, a_k + a_{k-2} = 0.$$

Según la condición $a_0 \neq 0$; por consiguiente,

$$r^2 - p^2 = 0,$$

por eso $r_1 = p$ ó $r_2 = -p$.

Consideremos primeramente la solución correspondiente a $r_1 = p > 0$.

Del sistema de ecuaciones (3) se determinan sucesivamente todos los coeficientes a_1, a_2, . . .; a_0 queda arbitrario. Ponemos, por ejemplo, $a_0 = 1$. Entonces:

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2p+k)}.$$

Atribuyendo a k diferentes valores, hallemos:

$$\left.\begin{array}{l}
a_1 = 0, \quad a_3 = 0, \qquad \text{en general, } a_{2m+1} = 0; \\
a_2 = -\dfrac{1}{2(2p+2)}; \quad a_4 = \dfrac{1}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)}; \ldots; \\
a_{2\nu} = (-1)^{\nu+1} \dfrac{1}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2\nu\, (2p+2)(2p+4)\ldots(2p+2\nu)}.
\end{array}\right\} \quad (4)$$

Introduciendo los coeficientes hallados en la fórmula (2), obtenemos.

$$y_1 = x^p \left[1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^4}{2 \cdot 4 (2p+2)(2p+4)} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 (2p+2)(2p+4)(2p+6)} + \ldots \right]. \quad (5)$$

Todos los coeficientes $a_{2\nu}$ se determinan, puesto que, para todo k, el coeficiente de a_k en la ecuación (3)

$$(r_1 + k)^2 - p^2$$

es distinto de cero.

De este modo, y_1 es una solución particular de la ecuación (1).

Determinemos ahora en que condiciones, con la segunda raíz $r_2 = -p$, se determinan todos los coeficientes a_k. Esto tiene lugar en el caso en que, para cualquier número $k > 0$ entero y par se cumplen las desigualdades

$$(r_2 + k)^2 - p^2 \neq 0 \quad (6)$$

ó

$$r_2 + k \neq p.$$

Pero, $p = r_1$, por consiguiente,

$$r_2 + k \neq r_1.$$

De este modo, en el caso dado la condición (6) es equivalente a la siguiente:

$$r_1 - r_2 \neq k,$$

donde k es un número par positivo entero. Pero,

$$r_1 = p, \; r_2 = -p,$$

por consiguiente,

$$r_1 - r_2 = 2p.$$

Por tanto, si p no es igual a un número entero, se puede escribir la segunda solución particular que se obtiene de la expresión (5) sustituyendo p por $-p$:

$$y_2 = x^{-p} \left[1 - \frac{x^2}{2(-2p+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 (-2p+2)(-2p+4)} - \right.$$

$$\left. - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 (-2p+2)(-2p+4)(-2p+6)} + \ldots \right]. \quad (5')$$

Las series de potencias (5) y (5′) convergen para todos los valores de x, lo que es fácil determinar, aplicando el criterio de d'Alembert

También es evidente, que y_1 e y_2 son linealmente independientes *).

La solución y_1 multiplicada por cierto factor constante, se llama *función de Bessel de primera especie de orden p*, y se designa por el símbolo J_p. La solución y_2 se designa por el símbolo J_{-p}.

De este modo, para p no igual a un número entero, la solución general de la ecuación (1) tiene la forma

$$y = C_1 J_p + C_2 J_{-p}.$$

Así, por ejemplo, para $p = 1/2$ la serie (5) se escribe así:

$$x^{\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 5} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right].$$

Esta solución multiplicada por el factor constante $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ se llama función de Bessel $J_{\frac{1}{2}}$; notemos que la expresión entre paréntesis es la serie cuya suma es igual a $\operatorname{sen} x$. Por consiguiente,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x.$$

Igualmente, aplicando la fórmula (5′), obtenemos:

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

La integral general de la ecuación (1) para $p = 1/2$, es:

$$y = C_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + C_2 J_{-\frac{1}{2}}(x).$$

Sea, ahora, p un número entero que designemos por n ($n \geqslant 0$). La solución (5) en este caso tiene razón y es la primera solución particular de la ecuación (1).

---

*) La independencia lineal de las funciones se comprueba de modo siguiente. Examinemos la correlación

$$\frac{y_2}{y_1} = x^{-2p}\,\frac{1 - \dfrac{x^2}{2(-2p+2)} + \dfrac{x^4}{2\cdot 4(-2p+2)(-2p+4)} - \ldots}{1 - \dfrac{x^2}{2(2p+2)} + \dfrac{x^4}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)} - \ldots}.$$

Esta correlación no es constante puesto que, cuando $x \to 0$, ésta tiende al infinito. Por consiguiente, las funciones y_1 e y_2 son linealmente independientes.

Pero, la solución (5') no tiene razón, puesto que uno de los factores del denominador en el desarrollo se anula.

Para $p = n$ entero positivo, la función de Bessel J_n se determina por la serie (5) multiplicada por el factor constante $\frac{1}{2^n n!}$ (y cuando $n = 0$, multiplicado por 1):

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!}\left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \right.$$

$$\left. - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \ldots\right]$$

ó

$$J_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(n+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu}. \tag{7}$$

Se puede mostrar que en este caso es preciso buscar la segunda solución particular en la forma

$$K_n(x) = J_n(x)\ln x + x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Poniendo esta expresión en la ecuación (1), determinamos los coeficientes b_k.

La función $K_n(x)$, con los coeficientes determinados de este modo, multiplicada por cierto factor constante, se llama *función de Bessel de segunda especie de orden n.*

Esta es la segunda solución de la ecuación (1) que, junto con la primera, forma un sistema linealmente independiente.

La integral general toma la forma

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 K_n(x). \tag{8}$$

Notemos que

$$\lim_{x\to 0} K_n(x) = \infty.$$

Por consiguiente, si queremos examinar las soluciones finitas para $x = 0$, entonces, debemos poner $C_2 = 0$ en la fórmula (8).

Ejemplo. Hallar la solución de la ecuación de Bessel para $p=0$

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0,$$

que satisface a las condiciones iniciales: para $x=0$

$$y = 2, \quad y' = 0.$$

Solución. Basándonos en la fórmula (7), hallamos una solución particular:

$$J_0(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{(\nu!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu}=1-\frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\ldots$$

Aplicando esta solución, podemos escribir la solución que satisface a las condiciones iniciales dadas, es decir:

$$y=2J_0(x).$$

Observación. Si debemos hallar la integral general de la ecuación dada, tenemos que buscar la segunda solución particular en la forma

$$K_0(x)=J_0\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k.$$

Sin citar todos los cálculos, indiquemos que la segunda solución particular que designemos por $K_0(x)$, tiene la forma:

$$K_0(x)=J_0(x)\ln x+\frac{x^2}{2^2}-\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4\left(1+\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\ldots$$

Esta función, multiplicada por cierto factor constante, se llama *función de Bessel de segunda especie de orden cero.*

Ejercicios para el capítulo XVI

Escribir unos cuantos primeros términos de la serie según el término general dado:

1. $u_n=\frac{1}{n(n+1)}$. **2.** $u_n=\frac{n^3}{n+1}$. **3.** $u_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$. **4.** $u_n=(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^k}$.

5. $u_n=\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2+1}$.

Estudiar la convergencia de las siguientes series:

6. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$ *Respuesta*: Converge. **7.** $\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{20}}+$ $+\frac{1}{\sqrt{30}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{10n}}+\ldots$ *Respuesta*: Diverge. **8.** $2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\ldots$ $\ldots+\frac{n+1}{n}+\ldots$ *Respuesta*: Diverge. 9. $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}+\frac{1}{\sqrt[3]{8}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n+6}}+\ldots$ *Respuesta*: Diverge. **10.** $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{3}{4}\right)^9+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}+\ldots$ *Respuesta*: Converge. **11.** $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\ldots+\frac{n}{n^2+1}+\ldots$ *Respuesta*: Diverge.

12. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{1+n^2}+\ldots$ *Respuesta*: Converge.

Estudiar la convergencia de las series con términos generales dados:

13. $u_n=\frac{1}{n^3}$. *Respuesta*: Converge. **14.** $u_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. *Respuesta*: Diverge.

15. $u_n=\frac{2}{5n+1}$. *Respuesta*: Diverge. **16.** $u_n=\frac{1+n}{3+n^2}$. *Respuesta*: Diverge. **17.** $u_n=\frac{1}{n^2+2n+3}$. *Respuesta*: Converge. **18.** $u_{n-1}=\frac{1}{n\ln n}$. *Respuesta*: Diverge.

19. Demostrar la desigualdad

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}.$$

20. ¿Es aplicable o no el teorema de Leibniz a la serie

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\ldots+\frac{n}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\ldots?$$

Respuesta. No es aplicable, puesto que los términos de la serie no decrecen monótonamente en valor absoluto. La serie diverge.

Cuántos primeros términos hay que tomar en las series siguientes para que su suma difiera no más que en $1/10^6$ de la suma de la serie correspondiente:

21. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}+\ldots$ *Respuesta*: $n=20$. **22.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots$ *Respuesta*: $n=10^6$. **23.** $\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n^2}+\ldots$ *Respuesta*: $n=10^3$. **24.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}+\ldots$ *Respuesta*: $n=10$.

Determinar cuáles de las series siguientes convergen absolutamente:

25. $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$ *Respuesta*: Converge absolutamente. **26.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots$ *Respuesta*: Converge absolutamente. **27.** $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\ldots(-1)^n\times\frac{1}{\ln n}+\ldots$ *Respuesta*: Converge condicionalmente. **28.** $-1+\frac{1}{\sqrt[5]{2}}-\frac{1}{\sqrt[5]{3}}+\frac{1}{\sqrt[5]{4}}+\ldots(-1)^n\frac{1}{\sqrt[5]{n}}+\ldots$ *Respuesta*: Converge condicionalmente.

Hallar la suma de la serie:

29. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$ *Respuesta*: $1/4$. Para que valores de x convergen las series: **30.** $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots$ *Respuesta*: $-2<x<2$. **31.** $x-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\frac{x^4}{4^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}+\ldots$ *Respuesta*: $-1\leqslant x\leqslant 1$. **32.** $3x+3^4x^4+3^9x^9+\ldots+3^{n^2}x^{n^2}+\ldots$ *Respuesta*: $|x|<\frac{1}{3}$. **33.** $1+\frac{100x}{1\cdot 3}+\frac{10\,000x^2}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1\,000\,000x^3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\ldots$ *Respuesta*: $-\infty<x<\infty$.

34. $\operatorname{sen} x+2\operatorname{sen}\frac{x}{3}+4\operatorname{sen}\frac{x}{9}+\ldots+2^n\operatorname{sen}\frac{x}{3^n}+\ldots$ *Respuesta*: $-\infty<x<\infty$. **35.** $\frac{x}{1+\sqrt{1}}+\frac{x^2}{2+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}+\ldots$ *Respuesta*: $-1\leqslant x<1$. **36.** $x+\frac{2^k}{2!}x^2+\frac{3^k}{3!}x^3+\ldots+\frac{n^k}{n!}x^n+\ldots+$ *Respuesta*: $-\infty<x<\infty$. **37.** $x+\frac{2!}{2^2}x^2+\frac{3!}{3^3}x^3+\ldots+\frac{n!}{n^n}x^n+\ldots$ *Respuesta*: $-e<x<e$. **38.** $x+\frac{2^2}{4!}x^2+\frac{(1\cdot2\cdot3)^2}{6!}x^3+\ldots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n+\ldots$ *Respuesta*: $-4<x<4$. **39.** Hallar la suma de la serie $x+2x^2+\ldots+nx^n+\ldots$ ($|x|<1$).

Indicación. Escribir la serie en la forma

$$\begin{array}{l} x+x^2+x^3+x^4+\ldots \\ \quad x^2+x^3+x^4+\ldots \\ \qquad x^3+x^4+\ldots \\ \qquad\quad x^4+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Respuesta: $\frac{x}{(1-x)^2}$.

Determinar cuáles de las series siguientes son mayorantes en los segmentos indicados;

40. $1+\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots$ $(0\leqslant x\leqslant1)$. *Respuesta*: Mayorante. **41.** $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$ $(0\leqslant x\leqslant1)$. *Respuesta*: No mayorante. **42.** $\frac{\operatorname{sen} x}{1^2}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{2^2}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3^2}+\ldots+\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}+\ldots$ $[0, 2\pi]$. *Respuesta*: Mayorante.

Desarrollo de las funciones en series

43. Desarrollar $\frac{1}{10+x}$ según las potencias de x y determinar el intervalo de convergencia. *Respuesta*: Converge para $-10<x<10$. **44.** Desarrollar $\cos x$ según las potencias de $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. *Respuesta*: $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\times\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\ldots$ **45.** Desarrollar e^{-x} según las potencias de x. *Respuesta*: $1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots$ **46.** Desarrollar e^x según las potencias de $(x-2)$. *Respuesta*: $e^2+e^2(x-2)+\frac{e^2}{2!}(x-2)^2+\frac{e^2}{3!}(x-2)^3+\ldots$ **47.** Desarrollar x^3-2x^2+5x-7 según las potencias de $(x-1)$. *Respuesta*: $-3+4(x-1)+(x-1)^2+(x-1)^3$.

48. Desarrollar el polinomio $x^{10}+2x^9-3x^7-6x^6+3x^4+6x^3-x-2$ en la serie de Taylor según las potencias de $x-1$; convencerse de que este polinomio tiene el número 1 como raíz triple. *Respuesta*:

$f(x)=81(x-1)^3+270(x-1)^4+342(x-1)^5+330(x-1)^6+186(x-1)^7+$
$+63(x-1)^8+12(x-1)^9+(x-1)^{10}$.

49. Desarrollar $\cos(x+a)$ según las potencias de x. *Respuesta*:

$$\cos a-x\,\mathrm{sen}\,a-\frac{x^2}{2!}\cos a+\frac{x^3}{3!}\,\mathrm{sen}\,a+\frac{x^4}{4!}\cos a-\ldots$$

50. Desarrollar $\ln x$ según las potencias de $(x-1)$. *Respuesta*:

$$(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\ldots$$

51. Desarrollar e^x en la serie según las potencias de $(x+2)$. *Respuesta*:

$$e^{-2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right].$$

52. Desarrollar $\cos^2 x$ en la serie según las potencias de $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; *Respuesta*:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{4^{n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}\quad(|x|<\infty).$$

53. Desarrollar $\frac{1}{x^2}$ en la serie según las potencias de $(x+1)$. *Respuesta*:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n\quad(-2<x<0).$$

54. Desarrollar $\mathrm{tg}\,x$ en la serie según las potencias de $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. *Respuesta*:

$$1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\ldots$$

Escribir los primeros cuatro términos del desarrollo en la serie según las potencias de x de las funciones:

55. $\mathrm{tg}\,x$. *Respuesta*: $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$ **56.** $e^{\cos x}$. *Respuesta*: $e\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{4x^4}{4!}-\frac{31x^6}{720}-\ldots\right)$ **57.** $e^{\mathrm{arctg}\,x}$. *Respuesta*: $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{7x^4}{24}+\ldots$ **58.** $\ln(1+e^x)$. *Respuesta*: $\ln 2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{7x^4}{384}+\ldots$ **59.** $e^{\mathrm{sen}\,x}$. *Respuesta*: $1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\ldots$ **60.** $(1+x)^x$. *Respuesta*: $1+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{5}{6}x^4-\ldots$ **61.** $sc\,x$. *Respuesta*: $1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\ldots$ **62.** $\ln\cos x$. *Respuesta*: $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}-\ldots$ **63.** Desarrollar $\mathrm{sen}\,kx$ según las potencias de x. *Respuesta*: $kx-\frac{(kx)^3}{3!}+\frac{(kx)^5}{5!}-\frac{(kx)^7}{7!}+\ldots$ **64.** Desarrollar $\mathrm{sen}^2 x$

según las potencias de x y determinar el intervalo de convergencia. *Respuesta*: $\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+\frac{2^5x^6}{6!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$ La serie converge para todos los valores de x. **65.** Desarrollar $\frac{1}{1+x^2}$ en la serie según las potencias de x. *Respuesta*: $1-x^2+x^4-x^6+\ldots$ **66.** Desarrollar $\operatorname{arctg} x$ en la serie según las potencias de x. **Indicación.** Aprovechar la fórmula $\operatorname{arctg} x=\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$.

Respuesta: $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$. **67.** Desarrollar $\frac{1}{(1+x)^2}$ en la serie según las potencias de x. *Respuesta*: $1-2x+3x^2-4x^3+\ldots$ $(-1<x<1)$.

Aprovechando las fórmulas del desarrollo en serie de potencias de las funciones e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$ y aplicando diferentes procedimientos, desarrollar en series de potencias las funciones y determinar los intervalos de convergencia:

68. $\operatorname{senh} x$. *Respuesta*: $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$. **69.** $\cosh x$. *Respuesta*: $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$. **70.** $\cos^2 x$. *Respuesta*: $1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$ **71.** $(1+x)\ln(1+x)$. *Respuesta*: $x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(n-1)n}$ $(|x|\leqslant 1)$. **72.** $(1+x)e^{-x}$. *Respuesta*: $1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!}x^n$ $(-\infty<x<\infty)$ **73.** $\frac{1}{4-x^4}$. *Respuesta*: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{4^{n+1}}$ $(|x|<\sqrt{2})$. **74.** $\frac{e^x-1}{x}$. *Respuesta*: $1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$. **75.** $\frac{1}{(1-x)^2}$ *Respuesta*: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ $(|x|<1)$. **76.** $e^x\operatorname{sen} x$. *Respuesta*: $x+x^2+\frac{2x^3}{3!}-\frac{4x^5}{5!}+\ldots+\sqrt{2^n}\times\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\frac{x^n}{n!}+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$. **77.** $x+\sqrt{1+x^2}$. *Respuesta*: $x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

78. $\int_0^x \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$. *Respuesta*: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$ $(|x|\leqslant 1)$.

79. $\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$. *Respuesta:* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

80. $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$. *Respuesta:* $C+\ln|x|+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)(2n)!}$

$(-\infty<x<0$ y $0<x<\infty)$. 81. $\int\limits_0^x \frac{dx}{1-x^9}$. *Respuesta:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{9n-8}}{9n-8}$.

82. Demostrar las igualdades:

$$\operatorname{sen}(a+x)=\operatorname{sen} a\cos x+\cos a\operatorname{sen} x,$$

$$\cos(a+x)=\cos a\cos x-\operatorname{sen} a\operatorname{sen} x,$$

desarrollando los primeros miembros según las potencias de x.

Aprovechando las series correspondientes, calcular:

83. cos 10° con precisión de hasta 0,0001. *Respuesta*: 0,9848.
84. sen 1° con precisión de hasta 0,0001. *Respuesta*: 0,0175.
85. sen 18° con precisión de hasta 0,001. *Respuesta*: 0,3090.
86. sen $\frac{\pi}{4}$ con precisión de hasta 0,0001. *Respuesta*: 0,7071.
87. arctg 1/5 con precisión de hasta 0,0001. *Respuesta* 0,1973.
88. ln 5 con precisión de hasta 0,001. *Respuesta*: 1,609.
89. $\log_{10} 5$ con precisión de hasta 0,001. *Respuesta*: 0,699.
90. arcsen 1 con precisión de hasta 0,0001. *Respuesta*: 1,5708.
91. $\sqrt{e}$ con precisión de hasta 0,0001. *Respuesta*: 1,6487.
92. log e con precisión de hasta 0,00001. *Respuesta*: 0,43429.
93. cos 1 con precisión de hasta 0,00001. *Respuesta*: 0,5403.

Desarrollando en la serie de Maclaurin la función $f(x)=\sqrt[n]{a^n+x}$, calcular con precisión de hasta 0,001: **94.** $\sqrt[3]{30}$. *Respuesta*: 3,107. **95.** $\sqrt{70}$. *Respuesta*: 4,121. **96.** $\sqrt[3]{500}$. *Respuesta*: 7,937. **97.** $\sqrt[5]{250}$. *Respuesta*: 3,017. **98.** $\sqrt{84}$. *Respuesta*: 9,165. **99.** $\sqrt[3]{2}$. *Respuesta*: 1,2598.

Desarrollando el integrando en la serie, calcular las integrales:

100. $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ con precisión de hasta 10^{-5}. *Respuesta*: 0,94608.

101. $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$ con precisión de hasta 0,0001. *Respuesta*: 0,7468.

102. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ con precisión de hasta 0,0001. *Respuesta*: 0,1571.

103. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{x}}\,dx$ con precisión de hasta 0,01. *Respuesta*: 0,81.

104. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$ con precisión de hasta 0,001. *Respuesta*: 0,487.

105. $\int\limits_0^{1} \cos\sqrt{x}\,dx$ con precisión de hasta 0,001. *Respuesta*: 0,764.

106. $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \ln(1+\sqrt{x})\,dx$ con precisión de hasta 0,001. *Respuesta*: 0,071.

107. $\int\limits_0^{1} e^{-\frac{x^2}{4}}\,dx$ con precisión de hasta 0,0001. *Respuesta*: 0,9226.

108. $\int\limits_0^{\frac{1}{5}} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x}}\,dx$ · con precisión de hasta 0,0001. *Respuesta*: 0,0214.

109. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$ con precisión de hasta 0,001. *Respuesta*: 0,494.

110. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$. *Respuesta*: $\frac{\pi^2}{12}$.

Indicación. Al resolver este ejemplo y los dos siguientes es útil tener en cuenta las igualdades:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

que serán obtenidas en § 2, capítulo XVII.

111. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx$. *Respuesta*: $\frac{\pi^2}{6}$. **112.** $\int\limits_0^{1} \ln\frac{1+x}{1-x}\,\frac{dx}{x}$. *Respuesta*: $\frac{\pi^2}{4}$.

Integración de las ecuaciones diferenciales por medio de las series

113. Hallar la solución de la ecuación $y''=xy$ que satisface a las condiciones iniciales: para $x=0$ e $y=1$, $y'=0$.

Indicación: Buscar la solución en la forma de una serie.

Respuesta: $1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\ldots+\frac{x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\ldots(3k-1)\,3k}+\ldots$

114. Hallar la solución de la ecuación $y''+xy'+y=0$ que satisface a las ondiciones iniciales: para $x=0$ e $y=0$, $y'=1$.

Respuesta: $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{1\cdot3\cdot5}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}$.

115. Hallar la solución general de la ecuación

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0.$$

Indicación. Buscar la solución en la forma

$$y=x^p(A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots).$$

Respuesta:

$$C_1x^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots\right]+C_2x^{-\frac{1}{2}}\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right]=$$

$$=C_1\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{x}}+C_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

116. Hallar la solución de la ecuación $xy''+y'+xy=0$ que satisface a las condiciones iniciales: para $x=0$, $y=1$, $y'=0$.

Respuesta: $1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{(1\cdot2)^2\,2^4}-\frac{x^6}{(1\cdot2\cdot3)^2\,2^6}+\ldots(-1)^k\frac{x^{2k}}{(k!)^2\,2^{2k}}+\ldots$

Observación. Las dos últimas ecuaciones diferenciales son los casos particulares de la ecuación de Bessel

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$$

para $n=1/2$ y $n=0$.

117. Hallar la solución general de la ecuación $4xy''+2y'+y=0$.

Indicación. Buscar la solución en forma de una serie

$$x^p(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots).$$

Respuesta: $C_1\cos\sqrt{x}+C_2\operatorname{sen}\sqrt{x}$.

118. Hallar la solución de la ecuación $(1-x^2)y''-xy'=0$, que satisface a las condiciones iniciales: para $x=0$ e $y=0$, $y'=1$.

Respuesta: $x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7}+\ldots$

119. Hallar la solución de la ecuación $(1+x^2)y''+2xy'=0$, que satisface a las condiciones iniciales: para $x=0$ e $y=0$, $y'=1$.

Respuesta: $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$

120. Hallar la solución de la ecuación $y''=xyy'$, que satisface a las condiciones iniciales: para $x=0$ e $y=1$, $y'=1$.

Respuesta: $1+x+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+\frac{3x^5}{5!}+\ldots$

121. Hallar la solución de la ecuación $(1-x)y'=1+x-y$, que satisface a las condiciones iniciales: para $x=0$ e $y=0$, indicando el intervalo de convergencia de la serie obtenida.

Respuesta: $x+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^3}{2\cdot3}+\frac{x^4}{3\cdot4}+\ldots\ (-1\leqslant x\leqslant1)$.

122. Hallar la solución de la ecuación $xy''+y=0$, que satisface a las condiciones iniciales: para $x=0$ e $y=0$, $y'=1$, indicando el intervalo de convergencia.

Respuesta: $x-\frac{x^2}{(1!)^2\,2}+\frac{x^3}{(2!)^3\,3}-\frac{x^4}{(3!)^4\,4}+\ldots\ (-\infty<x<\infty)$.

123. Hallar la solución de la ecuación $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$, que satisface a las condiciones iniciales: para $x=0$ e $y=1$, $y'=1$.

Respuesta: $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

124. Hallar la solución de la ecuación $y''+\frac{1}{x}y'+y=0$, que satisface a las condiciones iniciales: para $x=0$ e $y=1$, $y'=0$, indicando el intervalo de convergencia de la serie obtenida.

Respuesta: $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{2^2 . 4^2}-\frac{x^6}{2^2 . 4^2 . 6^2}+\ldots\ (|x|<\infty)$.

Hallar los primeros tres términos del desarrollo en una serie de potencias de las soluciones de las ecuaciones diferenciales siguientes cuando se verifican las condiciones iniciales indicadas:

125. $y'=x^2+y^2$, para $x=0$ e $y=1$. *Respuesta*: $1+x+x^2+\frac{4x^3}{3}+\ldots$

126. $y''=e^y+x$, para $x=0$ e $y=1$, $y'=0$. *Respuesta*: $1+\frac{ex^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots$

127. $y'=\operatorname{sen} y-\operatorname{sen} x$; para $x=0$ e $y=0$. *Respuesta*: $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\ldots$

Hallar unos cuantos términos del desarrollo en una serie de potencias de las soluciones de las ecuaciones diferenciales cuando se verifican las condiciones iniciales indicadas:

128. $y''=yy'-x^2$; para $x=0$ e $y=0$, $y'=0$.

Respuesta: $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{2x^3}{3!}+\frac{8x^4}{4!}+\frac{14x^5}{5!}+\ldots$

129. $y'=y^2+x^3$; para $x=0$ e $y=1/2$.

Respuesta: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\frac{9}{32}x^4+\ldots$

130. $y'=x^2-y^2$; para $x=0$ e $y=0$.

Respuesta: $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7\cdot 9}x^7+\frac{2}{7\cdot 11\cdot 27}x^{11}-\ldots$

131. $y'=x^2y^2-1$; para $x=0$ e $y=1$.

Respuesta: $1-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{5}-\ldots$

132. $y'=e^y+xy$; para $x=0$ e $y=0$.

Respuesta: $x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{11x^4}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$

CAPITULO XVII

SERIES DE FOURIER

§ 1. DEFINICION. PLANTEO DEL PROBLEMA

La serie de funciones de la forma

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots,$$

o, de modo más conciso, la serie de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx), \tag{1}$$

se llama *serie trigonométrica*. Los números constantes a_0, a_n y b_n ($n = 1, 2, \ldots$) se llaman *coeficientes de la serie trigonométrica*.

Si la serie (1) converge, su suma es una función periódica $f(x)$ de período 2π, puesto que sen nx y cos nx son funciones periódicas de período 2π.

De este modo,

$$f(x) = f(x + 2\pi).$$

Planteemos el problema siguiente.

Sea dada una función periódica $f(x)$ de período 2π. **¿En qué condiciones se puede hallar para $f(x)$ la serie trigonométrica que converge hacia la función dada?**

En el presente capítulo resolvemos este problema.

Determinación de los coeficientes de la serie mediante las fórmulas de Fourier.

Supongamos que una función periódica $f(x)$ de período 2π es tal que se puede representarla como serie trigonométrica que converge hacia la función dada en el intervalo $(-\pi, \pi)$, es decir, es la suma de esta serie:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx). \tag{2}$$

Supongamos que la integral de la función de primer miembro de esta igualdad, es igual a la suma de las integrales de los términos de la serie (2). Esto tendrá lugar, por ejemplo, si suponemos que la serie numérica formada de los coeficientes de la serie trigonométrica dada converge absolutamente, es decir, converge la serie numérica positiva siguiente:

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| + |a_1| + |b_1| + |a_2| + |b_2| + \ldots + |a_n| + |b_n| + \ldots \tag{3}$$

Entonces, la serie (1) es mayorante y, por consiguiente, podemos integrarla término a término en el intervalo de $-\pi$ a π. Aprovechamos esto para calcular el coeficiente a_0.

Integramos ambos miembros de la igualdad (2) dentro de los límites de $-\pi$ a $+\pi$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen} nx\,dx\right).$$

Calculemos por separado cada integral del segundo miembro:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx = \pi a_0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\,dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \frac{a_n \operatorname{sen} nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen} nx\,dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx = b_n \frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Por consiguiente,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0,$$

de donde

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{4}$$

Para calcular los demás coeficientes de la serie necesitamos ciertas integrales definidas las que examinaremos preliminarmente.

Si n y k son números enteros, se verifican las siguientes igualdades: si $n \neq k$, tenemos:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\, dx = 0;\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} kx\, dx = 0;\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} kx\, dx = 0;
\end{aligned}\right\} \tag{I}$$

pero, si $n = k$, entonces:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\, dx = \pi;\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx \cos kx\, dx = 0;\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 kx\, dx = \pi.
\end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Calculemos, por ejemplo, la primera integral del grupo (I). Puesto que

$$\cos nx \cos kx = \frac{1}{2}\left[\cos (n + k)\, x + \cos (n - k)\, x\right],$$

entonces:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos (n + k)\, x\, dx + \\ + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos (n - k)\, x\, dx = 0.$$

De modo semejante es posible obtener también las demás fórmulas (I) *). Las integrales del grupo (II) se calculan directamente (véase capítulo X, tomo I).

Ahora podemos calcular los coeficientes a_k y b_k de la serie (2).

Para hallar el coeficiente a_k cuando $k \neq 0$ tiene cierto valor determinado, multipliquemos ambos miembros de la igualdad (2)

---

*) Mediante las fórmulas

$$\cos nx \operatorname{sen} kx = {}^1/_2 \left[\operatorname{sen} (n + k)\, x - \operatorname{sen} (n - k)\, x\right],$$
$$\operatorname{sen} nx \operatorname{sen} kx = {}^1/_2 \left[- \cos (n + k)\, x + \cos (n - k)\, x\right].$$

por $\cos kx$:

$$f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \cos kx + b_n \cos nx \cos kx). \quad (2')$$

La serie del segundo miembro de la igualdad es mayorante, puesto que sus términos no superan en valor absoluto a los términos de la serie convergente positiva (3). Por eso, podemos integrarla término a término en cualquier segmento.

Integremos la igualdad (2') dentro de los límites de $-\pi$ a π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} nx\cos kx\,dx\right).$$

Tomando en consideración las fórmulas (II) y (I), notamos que todas las integrales del segundo miembro se anulan, a excepción de la integral con coeficiente a_k.

Por consiguiente,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx = a_k\pi,$$

de donde

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx. \quad (5)$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad (2) por $\operatorname{sen} kx$ e integrando de nuevo de $-\pi$ a π, hallemos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx = b_k\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^2 kx\,dx = b_k\pi,$$

de donde:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx. \quad (6)$$

Los coeficientes determinados por las fórmulas (4), (5) y (6), se llaman *coeficientes de Fourier* de la función $f(x)$, y la serie trigonométrica (1) formada con tales coeficientes se llama *serie de Fourier* de la función $f(x)$.

Ahora regresemos al problema planteado al principio de este párrafo: ¿cuáles propiedades ha de poseer la función $f(x)$ para que su serie de Fourier converja y para que la suma de la serie de Fourier formada sea igual a los valores de la función dada en los puntos correspondientes?

Formulemos el teorema que ofrece condiciones suficientes para representar la función $f(x)$ por la serie de Fourier.

Definición. Una función $f(x)$ se llama *monótona por trozos* en el segmento $[a, b]$, si este último se puede dividir por los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ en un número finito de intervalos (a, x_1) (x_1, x_2). . . . . . $(x_{n-1} b)$ de modo que la función sea monótona en cada uno de los intervalos, es decir, que ella sea o bien no creciente, o bien no decreciente.

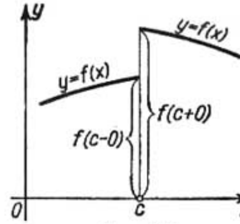

Fig. 356

De la definición se deduce, que si la función $f(x)$ es monótona por trozos y acotada en el segmento $[a, b]$, entonces puede tener sólo puntos de discontinuidad de primera especie. Efectivamente, si $x = c$ es un punto de discontinuidad de la función $f(x)$, entonces, en virtud de la monotonía de la función existen los límites:

$$\lim_{x \to c-0} f(x) = f(c-0), \qquad \lim_{x \to c+0} f(x) = f(c+0),$$

es decir, el punto c es punto de discontinuidad de primera especie (fig. 356).

Formulemos ahora el siguiente teorema.

Teorema. *Si la función periódica $f(x)$ de período 2π es monótona por trozos y acotada en el segmento $(-\pi, \pi)$, entonces la serie de Fourier, formada para esta función, converge en todos los puntos. La suma de la serie obtenida $s(x)$ es igual al valor de la función $f(x)$ en los puntos de continuidad de la función. En los puntos de discontinuidad de la función $f(x)$ la suma de la serie es igual al medio aritmético de los límites de la función $f(x)$ a la derecha y a la izquierda, es decir, si $x = c$ es un punto de discontinuidad de la función $f(x)$, entonces tenemos:*

$$s(x)_{x=c} = \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}.$$

De este teorema se deduce que la clase de las funciones que pueden ser representadas por las series de Fourier, es bastante amplia. Por eso las series de Fourier han encontrado una amplia aplicación en diferentes ramas de las matemáticas. Con particular éxito las series de Fourier se emplean en la física matemática y en sus aplicaciones a los problemas concretos de mecánica y física (véase el capítulo XVIII).

Demos el teorema citado sin demostración. En los párrafos 8-10 demostremos otro criterio suficiente para que una función sea desarrollable en la serie de Fourier. Este criterio se refiere, en cierto sentido, a la clase más estrecha de funciones.

§ 2. EJEMPLOS DE DESARROLLO DE LAS FUNCIONES EN SERIES DE FOURIER

Demos los ejemplos de desarrollo de las funciones en series de Fourier.

Ejemplo 1. Sea una función periódica $f(x)$ de período 2π definida de modo siguiente:

$$f(x)=x, \quad -\pi<x\leqslant\pi.$$

Es una función monótona por trozos y acotada (fig. 357). Por consiguiente, permite el desarrollo en la serie de Fourier.

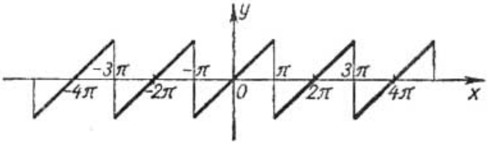

Fig. 357

Según la fórmula (4) § 1, hallamos:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

Aplicando la fórmula (5) § 1 e integrando por partes, obtenemos:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[x\frac{\operatorname{sen}kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}kx\,dx\right]=0.$$

Según la fórmula (6) § 1, hallamos:

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\operatorname{sen}kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx\right]=(-1)^{k+1}\frac{2}{k}.$$

De este modo, obtenemos la serie

$$f(x)=2\left[\frac{\operatorname{sen}x}{1}-\frac{\operatorname{sen}2x}{2}+\frac{\operatorname{sen}3x}{3}-\ldots(-1)^{k+1}\frac{\operatorname{sen}kx}{k}+\ldots\right].$$

Esta igualdad tiene lugar en todos los puntos, excepto los de discontinuidad. En cada punto de discontinuidad la suma de la serie es igual al medio aritmético de los límites de la función a la derecha y a la izquierda, es decir, es cero.

Ejemplo 2. Sea una función periódica $f(x)$ de período 2π definida de modo siguiente:

$$f(x) = -x \text{ para } -\pi \leqslant x \leqslant 0,$$
$$f(x) = x \text{ para } 0 < x \leqslant \pi$$

(es decir, $f(x) = |x|$) (fig. 358). Esta función es también monótona por trozos y acotada en el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

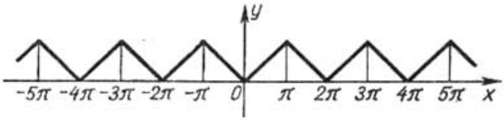

Fig. 358

Determinemos sus coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right] = \pi,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos kx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cos kx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x \operatorname{sen} kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\operatorname{sen} kx\,dx + \frac{x\operatorname{sen} kx}{k}\Big|_{0}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen} kx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi k}\left[-\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}(\cos k\pi - 1) = \begin{cases} 0 & \text{para } k \text{ par,} \\ -\dfrac{4}{\pi k^2} & \text{para } k \text{ impar;}\end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\operatorname{sen} kx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\operatorname{sen} kx\,dx\right] = 0.$$

De este modo, obtenemos la serie

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots + \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2} + \ldots\right].$$

Esta serie converge en todos los puntos y su suma es igual a la función dada.

Ejemplo 3. Sea una función periódica $f(x)$ de período 2π definida de modo siguiente:

$$f(x) = -1 \quad \text{para} \quad -\pi < x < 0,$$
$$f(x) = 1 \quad \text{para} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

Esta función (fig. 359) es monótona por trozos y acotada en el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

Calculemos sus coeficientes de Fourier:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{0}(-1)\,dx+\int_{0}^{\pi}dx\right]=0;$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos kx\,dx+\int_{0}^{\pi}\cos kx\,dx\right]=-1\cdot\frac{\operatorname{sen} kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{\operatorname{sen} kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}=0;$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\operatorname{sen} kx\,dx+\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen} kx\,dx\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi k}\,[1-\cos\pi k]=\begin{cases}0 & \text{para } k \text{ par},\\ \dfrac{4}{\pi k} & \text{para } k \text{ impar}.\end{cases}$$

Por consiguiente, la serie de Fourier de la función examinada tiene la forma

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{1}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3}+\frac{\operatorname{sen} 5x}{5}+\ldots+\frac{\operatorname{sen}(2p+1)\,x}{2p+1}+\ldots\right].$$

Esta igualdad es válida en todos los puntos, excepto los de discontinuidad

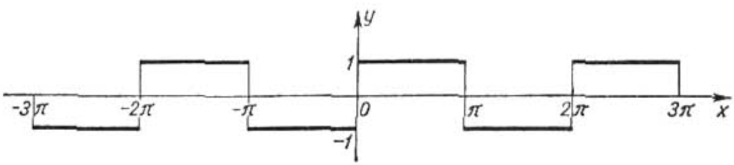

Fig. 359

En la fig. 360 se indica claramente, como las sumas parciales s_n de la serie representan cada vez más exactamente la función $f(x)$, al aumentar n.

Ejemplo 4. Sea una función periódica $f(x)$ de período 2π definida de modo siguiente:

$$f(x)=x^2,\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi \text{ (fig. 361)}.$$

Calculemos sus coeficientes de Fourier:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\frac{1}{\pi}\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2\operatorname{sen} kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi}x\operatorname{sen} kx\,dx\right]=$$

$$= -\frac{2}{\pi k}\left[-\frac{x\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx\right] = \frac{4}{\pi k^2}[\pi\cos k\pi] =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{k^2} \text{ para } k \text{ par,} \\ -\dfrac{4}{k^2} \text{ para } k \text{ impar;} \end{cases}$$

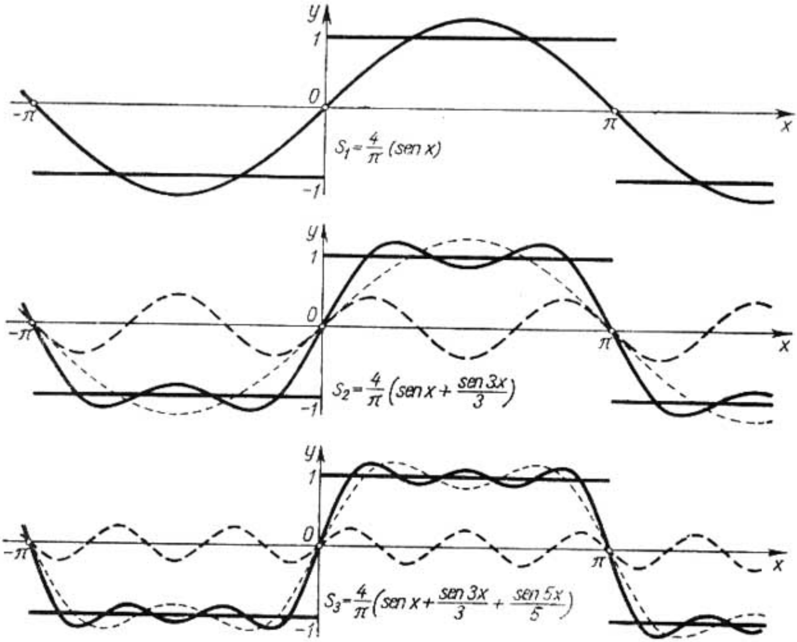

Fig. 360

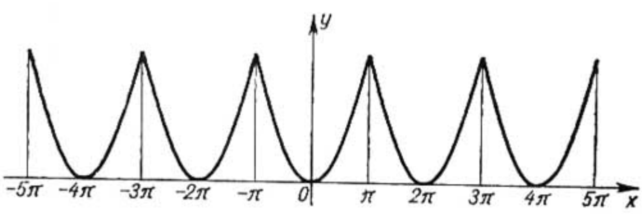

Fig. 361

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{sen} kx\,dx=+\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\,dx\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi k}\left[\frac{x\operatorname{sen} kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} kx\,dx\right]=0.$$

Pues, la serie de Fourier de la función dada tiene la forma

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\dots\right).$$

Puesto que la función es monótona por trozos, acotada y continua, esta igualdad se cumple en todos los puntos.

Poniendo en la igualdad obtenida $x=\pi$, obtenemos:

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Ejemplo 5. Sea una función periódica $f(x)$ de período 2π definida de modo siguiente:

$$f(x)=0 \quad \text{para} \quad -\pi\leqslant x\leqslant 0,$$
$$f(x)=x \quad \text{para} \quad 0<x\leqslant\pi \text{ (fig. 362).}$$

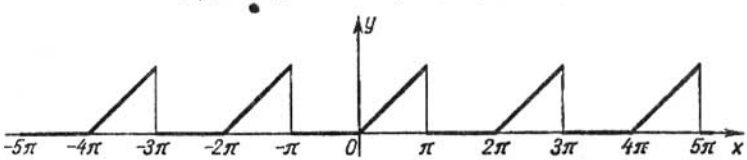

Fig. 362

Determinemos los coeficientes de Fourier:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}0\cdot dx+\int_{0}^{\pi}x\,dx\right]=\frac{1}{\pi}\,\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi}{2};$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\operatorname{sen} kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen} kx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi k}\,\frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}=\begin{cases}-\dfrac{2}{\pi k^2} & \text{para } k \text{ impar,}\\ 0 & \text{para } k \text{ par;}\end{cases}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\operatorname{sen} kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}+\frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\cos kx\,dx\right]=$$

$$=-\frac{\pi}{\pi k}\cos k\pi=\begin{cases}\dfrac{1}{k} & \text{para } k \text{ impar,}\\ -\dfrac{1}{k} & \text{para } k \text{ par.}\end{cases}$$

De este modo, la serie de Fourier toma la forma:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots\right)+\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3}-\dots\right).$$

En los puntos de discontinuidad de la función $f(x)$ la suma de la serie es igual al medio aritmético de los límites de la función a la derecha y a la izquierda $\left(\text{o sea, en el caso dado, al número } \frac{\pi}{2}\right)$.

Poniendo en la igualdad obtenida $x=0$, tenemos:

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

§ 3. UNA OBSERVACION SOBRE EL DESARROLLO DE LA FUNCION PERIODICA EN LA SERIE DE FOURIER

Indiquemos la siguiente propiedad de una función $\psi(x)$ periódica de período 2π:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\,dx=\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi}\psi(x)\,dx,$$

cualquiera que sea el número λ.

En efecto, como

$$\psi(\xi-2\pi)=\psi(\xi),$$

entonces, poniendo $x=\xi-2\pi$, podemos escribir, para cualesquiera c y d:

$$\int_{c}^{d}\psi(x)\,dx=\int_{c+2\pi}^{d+2\pi}\psi(\xi-2\pi)\,d\xi=\int_{c+2\pi}^{d+2\pi}\psi(\xi)\,d\xi=\int_{c+2\pi}^{d+2\pi}\psi(x)\,dx.$$

En particular, poniendo $c=-\pi$, $d=\lambda$, obtenemos:

$$\int_{-\pi}^{\lambda}\psi(x)\,dx=\int_{\pi}^{\lambda+2\pi}\psi(x)\,dx,$$

por eso

$$\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi}\psi(x)\,dx=\int_{\lambda}^{-\pi}\psi(x)\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\,dx+\int_{\pi}^{\lambda+2\pi}\psi(x)\,dx=$$

$$=\int_{\lambda}^{-\pi}\psi(x)\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\,dx+\int_{-\pi}^{\lambda}\psi(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\,dx.$$

La propiedad indicada significa que la *integral de una función periódica $\psi(x)$ en un segmento arbitrario de longitud igual al período, siempre tiene un mismo valor*. Es fácil ilustrarlo geométricamente: las áreas rayadas en la fig. 363, son iguales.

De la propiedad demostrada se deduce que, al calcular los coeficientes de Fourier, podemos sustituir el intervalo de integración

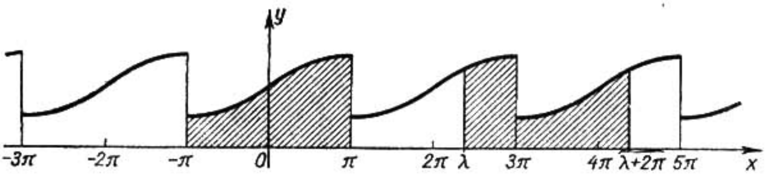

Fig. 363

$(-\pi, \pi)$ por otro $(\lambda, \lambda + 2\pi)$, es decir, podemos poner:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \\ b_n &\;\; \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

donde λ es un número arbitrario.

Esto se deduce de que la función $f(x)$ es, según la hipótesis, periódica de período 2π; por consiguiente, las funciones $f(x)\cos nx$ y $f(x)\,\mathrm{sen}\,nx$ son también las funciones periódicas de período 2π. Mostremos con un ejemplo cómo en algunos casos la propiedad demostrada simplifica el proceso de cálculo de los coeficientes.

Ejemplo. Supongamos que se necesita desarrollar en la serie de Fourier la función $f(x)$ de período 2π, que, en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, está dada por la igualdad

$$f(x) = x.$$

La gráfica de la función $f(x)$ se representa en la fig. 364. Esta función está dada en el segmento $[-\pi, \pi]$, por dos fórmulas: $f(x) = x + 2\pi$ en el seg-

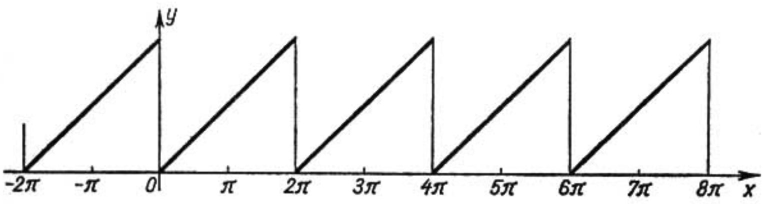

Fig. 364

mento $[-\pi, 0]$, y $f(x) = x$, en el segmento $[0, \pi]$. Al mismo tiempo en el segmento $[0, 2\pi]$ esta función está dada de modo más simple por una fórmula $f(x) = x$. Por eso, para desarrollar esta función en la serie de Fourier es más provechoso utilizar las fórmulas (1), poniendo $\lambda = 0$;

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = 2\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\,\mathrm{sen}\,nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{2\pi} = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,\mathrm{sen}\,nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\mathrm{sen}\,nx}{n^2}\right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{n}.$$

Por consiguiente,

$$f(x) = \pi - 2\,\mathrm{sen}\,x - \frac{2}{2}\,\mathrm{sen}\,2x - \frac{2}{3}\,\mathrm{sen}\,3x - \frac{2}{4}\,\mathrm{sen}\,4x - \frac{2}{5}\,\mathrm{sen}\,5x - \ldots$$

Esta serie representa la función dada en todos los puntos, excepto en los de discontinuidad (es decir, excepto los puntos $x = 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ \ldots$). En estos puntos la suma de la serie es igual a la mitad de la suma de valores límites de la función $f(x)$ a la derecha y a la izquierda (es decir, en el caso dado, al número π).

§ 4. SERIES DE FOURIER PARA LAS FUNCIONES PARES E IMPARES

De la definición de las funciones pares e impares se deduce que si $\psi(x)$ es una función par, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx = 2\int_0^{\pi} \psi(x)\,dx.$$

Efectivamente,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} \psi(x)\,dx + \int_0^{\pi} \psi(x)\,dx = \int_0^{\pi} \psi(-x)\,dx + \int_0^{\pi} \psi(x)\,dx =$$
$$= \int_0^{\pi} \psi(x)\,dx + \int_0^{\pi} \psi(x)\,dx = 2\int_0^{\pi} \psi(x)\,dx,$$

puesto que, según la definición de una función par $\psi(-x) = \psi(x)$.

Análogamente se puede demostrar que si $\varphi(x)$ es una función impar, entonces:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,dx = \int_0^{\pi} \varphi(-x)\,dx + \int_0^{\pi} \varphi(x)\,dx = -\int_0^{\pi} \varphi(x)\,dx + \int_0^{\pi} \varphi(x)\,dx = 0.$$

Si una función impar $f(x)$ se desarrolla en la serie de Fourier, el producto $f(x)\cos kx$ es también una función impar, y $f(x)\,\mathrm{sen}\,kx$

es una función par; por consiguiente,

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0; \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = 0, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

es decir, la serie de Fourier de una función impar contiene «solamente senos» (véase el ejemplo 1, § 2).

Si una función par se desarrolla en la serie de Fourier, un producto $f(x)$ sen kx es una función impar y $f(x)$ cos kx es una función par; por consiguiente

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx, \\ a_k &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

es decir, la serie de Fourier de la función par contiene «solamente cosenos» (véase el ejemplo 2, § 2).

Las fórmulas obtenidas permiten simplificar los cálculos de los coeficientes de Fourier, cuando la función dada es par o impar. Es evidente que no toda función periódica es par o impar (véase el ejemplo 5, § 2).

Ejemplo. Supongamos que es necesario desarrollar en la serie de Fourier la función par $f(x)$ de período 2π definida en el segmento $[0, \pi]$ por la igualdad

$$y = x.$$

Ya hemos desarrollado esta función en la serie de Fourier en el ejemplo 2, § 2 (véase fig. 358). Calculemos de nuevo los coeficientes de Fourier de esta función, aprovechando la paridad de esta función.

En virtud de las fórmulas (2), $b_k = 0$ para cualquier k;

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi, \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\,\operatorname{sen} kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}[(-1)^k - 1] = \begin{cases} 0 & \text{para } k \text{ par,} \\ -\dfrac{4}{\pi k^2} & \text{para } k \text{ impar.} \end{cases}$$

Hemos obtenido los mismos coeficientes que en el ejemplo 2, § 2, pero de modo más breve.

§ 5. SERIE DE FOURIER PARA LA FUNCION DE PERIODO $2l$

Sea $f(x)$ una función periódica de período $2l$, distinto, hablando en general, de 2π. Desarrollémosla en la serie de Fourier.

Sustituyamos la variable según la fórmula:

$$x = \frac{l}{\pi} t.$$

Entonces, la función $f\left(\frac{l}{\pi} t\right)$ es una función periódica de t, de período 2π. Podemos desarrollarla en la serie de Fourier en el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$;

$$f\left(\frac{l}{\pi} t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \operatorname{sen} kt), \tag{1}$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right)\cos kt\,dt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right)\operatorname{sen} kt\,dt.$$

Ahora regresemos a la variable anterior x:

$$x = \frac{l}{\pi} t, \qquad t = x\frac{\pi}{l}, \qquad dt = \frac{\pi}{l}\,dx.$$

Entonces tendremos:

$$\left.\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \qquad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos k\frac{\pi}{l}x\,dx, \\ b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\operatorname{sen} k\frac{\pi}{l}x\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

La fórmula (1) toma la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x + b_k\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}x\right), \tag{3}$$

donde los coeficientes a_0, a_k, b_k se calculan según las fórmulas (2). Esta es precisamente la serie de Fourier de una función periódica de período $2l$.

Notemos que todos los teoremas que han tenido lugar para las series de Fourier de las funciones periódicas de período 2π, son válidos también para las series de Fourier de las funciones periódicas de cualquier otro período $2l$. En particular, queda en vigor el criterio suficiente del desarrollo de una función en la serie de Fourier (véase el fin de § 1): la observación sobre la posibilidad de calcular los coeficientes de la serie, integrando en un segmento arbitrario de longitud igual al período (véase § 3), así como la observación sobre la posibilidad de simplificar el cálculo de los coeficientes de la serie, cuando la función es par o impar (§ 4).

Ejemplo. Desarrollar en la serie de Fourier la función periódica $f(x)$ de período $2l$, definida en el segmento $[-l, l]$ por la igualdad $f(x) = |x|$ (fig. 365).

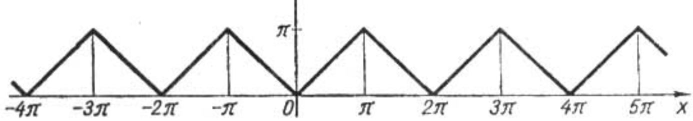

Fig. 365

Solución. Puesto que la función examinada es par, tenemos:

$$b_k = 0; \quad a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l x\,dx = l,$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{2l}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{para } k \text{ par}, \\ -\dfrac{4l}{\pi^2 k^2} & \text{para } k \text{ impar}. \end{cases}$$

Por consiguiente, el desarrollo tiene la forma:

$$|x|=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{l}x}{1}+\frac{\cos\frac{3\pi}{l}x}{3^2}+\ldots+\frac{\cos\frac{(2p+1)\pi}{l}x}{(2p+1)^2}+\ldots\right].$$

§ 6. DESARROLLO DE UNA FUNCION NO PERIODICA EN LA SERIE DE FOURIER

Supongamos que en cierto segmento $[a, b]$ está dada una función monótona por trozos $f(x)$ (fig. 366). Mostremos que podemos representar esta función $f(x)$ en los puntos de su continuidad por una

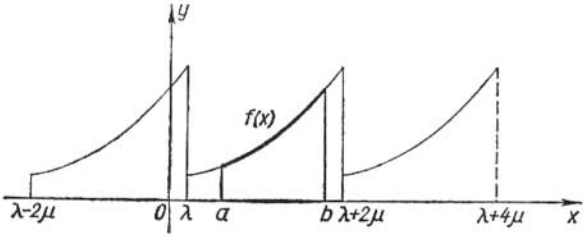

Fig. 366

suma de la serie de Fourier. Para eso examinemos una función arbitraria periódica monótona por trozos $f_1(x)$ de período $2\mu \geqslant |b-a|$, que coincide con la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$. (Hemos completado la definición de la función $f(x)$).

Desarrollemos la función $f_1(x)$ en la serie de Fourier. La suma de esta serie en todos los puntos del segmento $[a, b]$ (excepto los de discontinuidad) coincide con la función dada $f(x)$, lo que significa que hemos desarrollado $f(x)$ en la serie de Fourier en el segmento $[a, b]$.

Examinemos ahora el siguiente caso importante. Sea $f(x)$ una función dada en el segmento $[0, l]$. Completando la definición de esta función de modo arbitrario en el segmento $[-l, 0]$ (conservando la monotonía por trozos), podemos desarrollar esta función en la serie de Fourier. En particular, si completamos la definición de la función dada de modo tal que para $-l \leqslant x < 0$ sea $f(x) = f(-x)$, obtenemos en definitiva una función par (fig. 367). (En este caso se dice que la función $f(x)$ «es prolongada de manera par»). Esta función se desarrolla en la serie de Fourier que contiene solamente cosenos. De este modo la función $f(x)$, dada en el segmento $[0, l]$, la hemos desarrollado en serie de cosenos.

Si continuamos la definición de la función $f(x)$ para $-l \leqslant x < 0$ de modo tal que $f(x) = -f(-x)$, obtenemos una función impar que se desarrolla en serie de senos (fig. 368). (La función $f(x)$ «es prolongada de manera impar»). De este modo, si en el segmento

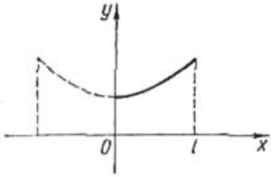

Fig. 367

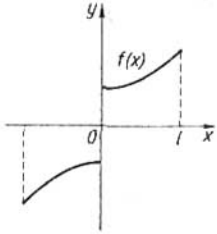

Fig. 368

$[0, l]$ está dada cierta función monótona por trozos $f(x)$, podemos desarrollarla tanto en la serie de Fourier de cosenos, como en la serie de Fourier de senos.

Ejemplo 1. Desarrollar la función $f(x)=x$ en el segmento $[0, \pi]$ en la serie de senos.

Solución. Prolongando esta función de manera impar (fig. 357) obtenemos la serie:

$$x=2\left[\frac{\operatorname{sen} x}{1}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3}-\dots\right]$$

(véase el ejemplo 1, § 2).

Ejemplo 2. Desarrollar la función $f(x)=x$ en el segmento $[0, \pi]$ en la serie de cosenos.

Solución. Prolongando esta función de manera par, tenemos:

$$f(x)=|x|, \quad -\pi < x \leqslant \pi$$

(fig. 358). Desarrollándola en la serie, hallamos:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots\right]$$

(véase el ejemplo 2, § 2). Pues, en el segmento $[0, \pi]$ tiene lugar la igualdad

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots\right].$$

§ 7. APROXIMACION EN PROMEDIO DE UNA FUNCION DADA CON AYUDA DE UN POLINOMIO TRIGONOMETRICO

La representación de una función en una serie infinita (de Fourier, Taylor, etc.) tiene prácticamente el sentido de que la suma finita, que se obtiene al interrumpir la serie en el n-ésimo término, es una expresión aproximada de la función que se desarrolla; esta expresión aproximada se puede llevar hasta cualquier grado de precisión, eligiendo un valor suficientemente grande de n. Sin embargo, el carácter de la representación aproximada puede ser diverso.

Así, por ejemplo, la suma s_n de los n primeros términos de la serie de Taylor coincide con la función examinada en un punto, y en este último tiene las derivadas hasta el n-ésimo orden que coinciden con las derivadas de la función analizada. Un polinomio de Lagrange de n-ésimo grado (véase § 9, capítulo VII, tomo I) coincide con la función considerada en $n+1$ puntos).

Analicemos el carácter que tiene la representación aproximada de una función periódica $f(x)$ por los polinomios trigonométricos de la forma

$$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx+b_k \operatorname{sen} kx,$$

donde $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ son los coeficientes de Fourier, es decir, por la suma de los n primeros términos de la serie de Fourier. Hagamos primeramente algunas observaciones.

Supongamos que tenemos una cierta función $y=f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y queremos evaluar el error, cometido al sustituirla por otra función $\varphi(x)$. Se puede tomar en calidad de medida del error, por ejemplo, $\max|f(x)-\varphi(x)|$ en el segmento $[a, b]$, es decir, así llamado *desvío máximo* de la función $\varphi(x)$ de $f(x)$. Pero a veces es más natural tomar, como medida del error, así llamado *desvío medio cuadrático* δ que se determina por la igualdad

$$\delta^2=\frac{1}{(b-a)}\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]^2\,dx.$$

Explicaremos en la figura 369 la diferencia entre el desvío medio cuadrático y el máximo.

Supongamos que la línea continua representa la función $y=f(x)$ y las líneas punteadas, las aproximaciones $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$. El desvío máximo de la curva $y=\varphi_1(x)$ es menor que él de la curva $y=\varphi_2(x)$, pero el desvío medio cuadrático de la primera curva es mayor que él de la segunda, puesto que la curva $y = \varphi_2(x)$ difiere considerablemente de la curva $y = \varphi(x)$ sólo en un intervalo estrecho y por eso caracteriza mejor a la curva $y = f(x)$ que la primera.

Regresemos ahora a nuestro problema.

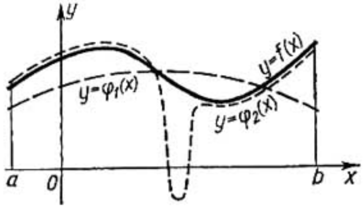

Fig. 369

Sea dada una función periódica $f(x)$ de período 2π. Entre todos los polinomios trigonométricos de n-ésimo orden

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx)$$

es preciso hallar, mediante la elección de coeficientes α_k y β_k, un polinomio tal para el cual el desvío medio cuadrático, determinado por la igualdad

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx) \right]^2 dx,$$

tiene el valor mínimo.

El problema se reduce a la determinación del mínimo de una función $2n + 1$ de las variables $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

Desarrollando el cuadrado que se encuentra bajo el signo de la integral, e integrando término a término, obtenemos:

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f^2(x) - 2f(x) \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx) \right] + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx) \right]^2 \right\} dx =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{\alpha_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx + \\
&+ \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\beta_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx + \frac{1}{2\pi}\frac{\alpha_0^2}{4}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \\
&+ \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^2 kx\,dx + \\
&+ \frac{1}{2\pi}\alpha_0\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx + \frac{1}{2\pi}\alpha_0\sum_{k=1}^{n}\beta_k\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} kx\,dx + \\
&+ \frac{1}{\pi}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq 1}}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_k\alpha_j\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos jx\,dx + \\
&+ \frac{1}{\pi}\alpha_0\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_k\beta_j\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\operatorname{sen} jx\,dx + \\
&+ \frac{1}{\pi}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq 1}}^{\pi}\sum_{j=1}^{n}\beta_k\beta_j\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} kx\operatorname{sen} jx\,dx.
\end{aligned}
$$

Notemos que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0; \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx = b_k$$

son los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$.

Luego, según las fórmulas (I) y (II) § 1 tenemos: para $k = j$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx = \pi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^2 kx\,dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} kx\cos jx\,dx = 0$$

y para $k \neq j$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos jx\, dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} jx\, dx = 0.$$

De este modo, obtenemos:

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx - \frac{\alpha_0 a_0}{2} - \\ - \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) + \frac{\alpha_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2).$$

Adicionando y sustrayendo la suma

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2),$$

tenemos:

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) + \frac{1}{4} (\alpha_0 - a_0)^2 + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2 . \qquad (1)$$

Los tres primeros términos de esta suma no dependen de la elección de los coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$. Los demás sumandos

$$\frac{1}{4} (\alpha_0 - a_0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2]$$

no son negativos. Su suma alcanza el valor mínimo (igual a cero), si ponemos $\alpha_0 = a_0$, $\alpha_1 = a_1, \ldots, \alpha_n = a_n$, $\beta_1 = b_1, \ldots, \beta_n = b_n$. Con tal elección de los coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ el polinomio trigonométrico

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx)$$

difiere en lo mínimo de la función $f(x)$ en el sentido de que el desvío cuadrático δ_n^2 es mínimo.

Queda demostrado, pues, el teorema.

Entre todos los polinomios trigonométricos de n-ésimo orden el polinomio, cuyos coeficientes son los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$, da el menor desvío medio cuadrático de esta función.

El valor del desvío cuadrático mínimo es igual a:

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2). \tag{2}$$

Puesto que $\delta_n^2 \geqslant 0$, para cualquier n tenemos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \geqslant \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2).$$

Por consiguiente, la serie del segundo miembro converge, cuando $n \to \infty$, y podemos escribir:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \geqslant \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2). \tag{3}$$

Esta correlación se llama *desigualdad de Bessel.*

Notemos sin demostración, que para toda función acotada y monótona por trozos el desvío medio cuadrático obtenido por la sustitución de la función dada por n-ésima suma parcial de la serie de Fourier, tiende a cero cuando $n \to \infty$, es decir, $\delta_n^2 \to 0$, cuando $n \to \infty$. Pero, entonces de la fórmula (2) se deduce la igualdad

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx, \tag{3'}$$

que se llama *igualdad de Liapunóv.* (Notemos que A. M. Liapunóv demostró esta igualdad incluso para una clase más amplia de funciones que la clase analizada aquí).

De lo demostrado se deduce que para la función que satisface a la igualdad de Liapunóv (en particular, para toda función acotada, monótona por trozos), la serie de Fourier correspondiente da un desvío medio cuadrático igual a cero.

Observación. Establezcamos una propiedad de los coeficientes de Fourier que será necesaria en lo sucesivo. Al principio, introduzcamos la definición.

Una función $f(x)$ se llama *continua por trozos* en el segmento $[a, b]$, si tiene un número finito de puntos de discontinuidad de primera especie en este segmento (o es continua en todos los puntos).

Demostremos la siguiente afirmación.

Si la función $f(x)$ es continua por trozos en el segmento $[-\pi, \pi]$, sus coeficientes de Fourier tienden a cero, cuando $n \to \infty$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{4}$$

Demostración. Si la función $f(x)$ es continua por trozos en el segmento $[-\pi, \pi]$, la función $f^2(x)$ también es continua por trozos en este segmento. Entonces, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$ existe y es un número finito*). En este caso, de la desigualdad de Bessel (3) se deduce que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ converge. Pero, si la serie converge, entonces su término general tiende a cero, es decir, en el caso dado $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0$. De ahí obtenemos directamente las igualdades (4). Pues, para una función acotada y continua por trozos son válidas las igualdades

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\,dx = 0.$$

Si la función $f(x)$ es periódica de período 2π, podemos escribir las últimas igualdades de modo siguiente (para cualquier a):

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{a}^{a+2\pi} f(x) \cos nx\,dx = 0; \qquad \lim_{n\to\infty} \int\limits_{a}^{a+2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\,dx = 0.$$

Notemos que estas igualdades quedan en vigor, si integramos en un intervalo cualquiera $[a, b]$, es decir, las integrales

$$\int\limits_a^b f(x) \cos nx\,dx \quad \text{y} \quad \int\limits_a^b f(x) \operatorname{sen} nx\,dx$$

tienden a cero, al aumentar n indefinidamente, si $f(x)$ es una función acotada y continua por trozos.

En efecto, para precisar las ideas, suponiendo que $b - a < 2\pi$, analicemos una función auxiliar $\varphi(x)$ de período 2π, definida de modo siguiente:

$$\varphi(x) = f(x), \text{ cuando } a \leqslant x \leqslant b,$$
$$\varphi(x) = 0, \quad \text{ cuando } b < x \leqslant a + 2\pi.$$

Entonces:

$$\int\limits_a^b f(x) \cos nx\,dx = \int\limits_a^{a+2\pi} \varphi(x) \cos nx\,dx,$$
$$\int\limits_a^b f(x) \operatorname{sen} nx\,dx = \int\limits_a^{a+2\pi} \varphi(x) \operatorname{sen} nx\,dx.$$

---

*) Esta integral podemos representarla como la suma de integrales definidas de las funciones continuas por tramos en que se divide el segmento $[-\pi, \pi]$.

Puesto que $\varphi(x)$ es una función acotada y continua por trozos, las integrales de los segundos miembros tienden a cero, cuando $n \to \infty$. Por consiguiente, las integrales de los primeros miembros también tienden a cero. De este modo, la afirmación es demostrada, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \cos nx \, dx = 0; \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen} nx \, dx = 0 \tag{5}$$

para cualesquiera que sean los números a y b y la función $f(x)$, continua por trozos y acotada en el segmento $[a, b]$.

§ 8. INTEGRAL DE DIRICHLET

En este párrafo deduzcamos una fórmula que expresa la n-ésima suma parcial de una serie de Fourier mediante cierta integral. Necesitaremos de esta fórmula en los párrafos siguientes.

Examinemos la n-ésima suma parcial de una serie de Fourier para la función periódica $f(x)$ de período 2π:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx),$$

donde

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} kt \, dt.$$

Introduciendo estas expresiones en la fórmula para $s_n(x)$, obtenemos:

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\cos kx}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt + \frac{\operatorname{sen} kx}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} kt \, dt \right],$$

o introduciendo $\cos kx$ y $\operatorname{sen} kx$ bajo el signo de la integral (lo que es posible, puesto que $\cos kx$ y $\operatorname{sen} kx$ no dependen de la variable de integración, y por consiguiente, pueden considerarse como constantes), obtenemos:

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kx \cos kt \, dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} kt \, dt \right]$$

Sacando ahora $1/\pi$ fuera de los paréntesis y sustituyendo la suma de integrales por la integral de la suma, tenemos:

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{f(t)}{2}+\sum_{k=1}^{n}[f(t)\cos kx\cos kt+f(t)\operatorname{sen} kx\operatorname{sen} kt]\right\}dt,$$

ó

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx+\operatorname{sen} kt\operatorname{sen} kx)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt. \qquad (1)$$

Transformemos la expresión comprendida entre los corchetes. Sea:

$$\sigma_n(z)=\frac{1}{2}+\cos z+\cos 2z+\ldots+\cos nz;$$

entonces:

$$\begin{aligned}2\sigma_n(z)\cos z&=\cos z+2\cos z\cos z+2\cos z\cos 2z+\ldots\\&\ldots+2\cos z\cos nz=\cos z+(1+\cos 2z)+\\&+(\cos z+\cos 3z)+(\cos 2z+\cos 4z)+\ldots\\&\ldots+[\cos(n-1)z+\cos(n+1)z]=1+2\cos z+\\&+2\cos 2z+\ldots+2\cos(n-1)z+\cos nz+\cos(n+1)z\end{aligned}$$

ó

$$2\sigma_n(z)\cos z=2\sigma_n(z)-\cos nz+\cos(n+1)z,$$

$$\sigma_n(z)=\frac{\cos nz-\cos(n+1)z}{2(1-\cos z)}.$$

Pero:

$$\cos nz-\cos(n+1)z=2\operatorname{sen}(2n+1)\frac{z}{2}\operatorname{sen}\frac{z}{2},$$

$$1-\cos z=2\operatorname{sen}^2\frac{z}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\sigma_n(z)=\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{z}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{z}{2}}.$$

De este modo, se puede escribir la igualdad (1) en la forma:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\dfrac{t-x}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{t-x}{2}}\,dt.$$

Puesto que el integrando es periódico (de período 2π), la integral conserva su valor en cualquier segmento de integración de longitud 2π. Por eso podemos escribir:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)\,\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\dfrac{t-x}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{t-x}{2}}\,dt.$$

Introduzcamos una variable nueva α, poniendo $t-x=\alpha$, $t=x+\alpha$. Obtendremos, pues, la fórmula:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha)\,\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\dfrac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}}\,d\alpha. \tag{2}$$

La integral del segundo miembro se llama *integral de Dirichlet*.

Pongamos en esta fórmula $f(x)\equiv 1$, entonces: $a_0=2$, $a_k=0$, $b_k=0$ cuando $k>0$; por consiguiente, $s_n(x)=1$ para cualquier n, y obtenemos la identidad:

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\dfrac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}}\,d\alpha, \tag{3}$$

que será necesaria a continuación.

§ 9. CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER EN UN PUNTO DADO

Supongamos que la función $f(x)$ es continua por trozos en el segmento $[-\pi, \pi]$.

Multiplicando ambos miembros de la identidad (3) del párrafo anterior por $f(x)$ e introduciendo $f(x)$ bajo el signo de la integral, obtenemos la igualdad:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha.$$

Sustrayamos, miembro a miembro, esta igualdad de la igualdad (2) del párrafo anterior y obtenemos:

$$s_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\alpha)-f(x)]\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha.$$

De este modo, la convergencia de la serie de Fourier al valor de la función $f(x)$ en el punto dado depende de la convergencia hacia cero de la integral del segundo miembro, cuando $n\to\infty$.

Dividamos la última integral en dos integrales:

$$s_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\alpha)-f(x)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\operatorname{sen}n\alpha\,d\alpha+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\alpha)-f(x)]\cos n\alpha\,d\alpha,$$

utilizando la fórmula $\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\alpha}{2}=\operatorname{sen}n\alpha\cos\frac{\alpha}{2}+\cos n\alpha\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$. Dividamos la primera integral del segundo miembro de la última igualdad, en tres integrales:

$$s_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}[f(x+\alpha)-f(x)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\operatorname{sen}n\alpha\,d\alpha+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}[f(x+\alpha)-f(x)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\operatorname{sen}n\alpha\,d\alpha+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}[f(x+\alpha)-f(x)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\operatorname{sen} n\alpha\, d\alpha+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\alpha)-f(x)]\frac{1}{2}\cos n\alpha\, d\alpha.$$

Pongamos:

$$\Phi_1(\alpha)=\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{2}.$$

Como $f(x)$ es una función acotada y continua por trozos, $\Phi_1(\alpha)$ también es una función de α, periódica, acotada y continua por trozos. Por consiguiente, la última integral del segundo miembro tiende a cero cuando $n\to\infty$, puesto que es coeficiente de Fourier de esta función. La función

$$\Phi_2(\alpha)=[f(x+\alpha)-f(x)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$$

es acotada cuando $-\pi\leqslant\alpha<-\delta$ y $\delta\leqslant\alpha\leqslant\pi$, además:

$$|\Phi_2(\alpha)|\leqslant[M+M]\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{\varepsilon}{2}},$$

donde M es el límite superior de la magnitud $|f(x)|$. Además, la función $\Phi_2(\alpha)$ es también continua por trozos. Por consiguiente, en virtud de las fórmulas (5) del § 7, las integrales segunda y tercera tienden a cero, cuando $n\to\infty$.

De este modo, se puede escribir:

$$\lim_{n\to\infty}[s_n(x)-f(x)]-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}[f(x+\alpha)-f(x)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\operatorname{sen} n\alpha\, d\alpha. \quad (1)$$

La integración en la expresión del segundo miembro se efectúa en el intervalo $-\delta\leqslant\alpha\leqslant\delta$; por consiguiente, la integral depende del valor de la función $f(x)$ solamente en el intervalo comprendido entre $x-\delta$ y $x+\delta$. De este modo, de la última igualdad se deduce una proposición importante: *la convergencia de la serie de Fourier en el punto dado x depende solamente del comportamiento de la función $f(x)$ en la vecindad, por pequeña que sea, de este punto.*

En esto consiste así llamado *principio de localización durante el estudio de las series de Fourier. Si dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ coinciden en la vecindad de cierto punto x, entonces sus series de Fourier convergen o divergen simultáneamente en el punto dado.*

§ 10. ALGUNAS CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA CONVERGENCIA DE UNA SERIE DE FOURIER

En el párrafo anterior hemos mostrado que si una función $f(x)$ es continua por trozos en el segmento $[-\pi, \pi]$, la convergencia de su serie de Fourier en el punto dado x_0 al valor de la función $f(x_0)$ depende del comportamiento de la función en cierta vecindad arbitrariamente pequeña $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ de centro en el punto x_0.

Demostremos, ahora, que si la función $f(x)$ en la vecindad x_0 *es tal que existen los límites finitos*

$$\lim_{\alpha\to-0}\frac{f(x_0+\alpha)-f(x_0)}{\alpha}=k_1, \tag{1}$$

$$\lim_{\alpha\to+0}\frac{f(x_0+\alpha)-f(x_0)}{\alpha}=k_2, \tag{2}$$

y en el mismo punto x_0 la función es continua (fig. 370), entonces*) la serie de Fourier converge en este punto al valor correspondiente de la función $f(x)$.

Demostración. Examinemos la función $\Phi_2(\alpha)$ determinada en el párrafo anterior:

$$\Phi_2(\alpha)=[f(x_0+\alpha)-f(x_0)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}};$$

puesto que la función $f(x)$ es continua por trozos en el segmento $[-\pi, \pi]$ y continua en el punto x_0, entonces es continua en cierta

*) Si se cumplen las condiciones (1) y (2), se dice que la función $f(x)$ tiene en el punto x una derivada a la derecha y una derivada a la izquierda. En la fig. 370 está representada una función donde $k_1=\operatorname{tg}\varphi_1$, $k_2=\operatorname{tg}\varphi_2$, $k_1\neq k_2$. Si $k_1=k_2$, *es decir, si las derivadas a la derecha y a la izquierda son iguales,* la función es derivable en el punto dado.

vecindad $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ del punto x_0. Por eso la función $\Phi_2(\alpha)$ es continua en todos los puntos donde $\alpha \neq 0$, y $|\alpha| \leqslant \delta$. Cuando $\alpha = 0$, la función $\Phi_2(\alpha)$ no está definida.

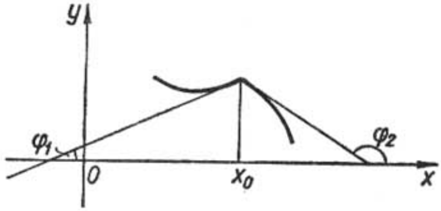

Fig. 370

Hallemos los límites $\lim\limits_{\alpha \to 0-0} \Phi_2(\alpha)$ y $\lim\limits_{\alpha \to 0+0} \Phi_2(\alpha)$, utilizando las condiciones (1) y (2):

$$\lim_{\alpha \to 0-0} \Phi_2(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0-0} [f(x_0+\alpha) - f(x_0)] \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0-0} \frac{f(x_0+\alpha) - f(x_0)}{\alpha} \frac{\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\alpha}{2} =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0-0} \frac{f(x_0+\alpha) - f(x_0)}{\alpha} \lim_{\alpha \to 0-0} \frac{\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \lim_{\alpha \to 0-0} \cos \frac{\alpha}{2} = k_1 \cdot 1 \cdot 1 = k_1.$$

De este modo, si determinamos adicionalmente la función $\Phi_2(\alpha)$ poniendo $\Phi_2(0) = k_1$, ésta será continua en el segmento $[-\delta, 0]$, y por consiguiente, también acotada. De modo análogo demostremos que

$$\lim_{\alpha \to 0+0} \Phi_2(\alpha) = k_2.$$

Por consiguiente, la función $\Phi_2(\alpha)$ es acotada y continua en el segmento $[0, \delta]$. Por lo tanto, en el intervalo $[-\delta, \delta]$ la función $\Phi_2(\alpha)$ es acotada y continua por trozos. Regresemos ahora a la igualdad (1) § 9 (designando x por x_0)

$$\lim_{n\to\infty}[s_n(x_0)-f(x_0)]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}[f(x_0+\alpha)-f(x_0)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\operatorname{sen} n\alpha\, d\alpha$$

ó

$$\lim_{n\to\infty}[s(x_0)-f(x_0)]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_2(\alpha)\operatorname{sen} n\alpha\, d\alpha.$$

Basándonos en las fórmulas (5) del § 7, deducimos que el límite del segundo miembro es igual a cero, por eso

$$\lim_{n\to\infty}[s_n(x_0)-f(x_0)]=0$$

ó

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_0)=f(x_0).$$

El teorema queda así demostrado.

La diferencia entre el teorema demostrado y el teorema formulado en el § 1 consiste en lo siguiente: como sabemos en el teorema del § 1 para la convergencia de la serie de Fourier en el punto x_0 hacia el valor de la función $f(x)$ es necesario cumplir la condición de que x_0 sea un punto de continuidad en el segmento $[-\pi, \pi]$ y la función sea monótona por trozos; en el teorema recién demostrado es necesario que la función sea continua en el punto x_0 y que se cumplan las condiciones (1) y (2), mientras la función sea continua por trozos y acotada en todo el intervalo $[-\pi, \pi]$. Es evidente que estas condiciones son diferentes.

Observación 1. Si una función continua por trozos es derivable en el punto x_0, es evidente, que se cumplen las condiciones (1) y (2). Con ello, $k_1 = k_2$. Por consiguiente, en los puntos, donde la función $f(x)$ es derivable, la serie de Fourier converge hacia el valor de la función en el punto correspondiente.

Observación 2. 1°. La función examinada en el ejemplo 2 § 2 (fig. 358), satisface a las condiciones (1) y (2) en los puntos $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ En todos los demás puntos esta función es derivable. Por consiguiente, la serie de Fourier de esta función converge en cada punto hacia el valor de dicha función.

2°. La función examinada en el ejemplo 4 § 2 (fig. 361), satisface a las condiciones (1) y (2) en los puntos $\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi$. En todos estos puntos esta función es derivable y se representa por una serie de Fourier en cada punto.

3°. La función examinada en el ejemplo 1 § 2 (fig. 357) es discontinua en los puntos $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$. En todos los demás puntos esta función es derivable. Por consiguiente, en todos los puntos, excepto los puntos de discontinuidad, la serie de Fourier, que le corresponde, converge hacia el valor de la función en los puntos correspondientes. En los puntos de discontinuidad la suma de la serie de Fourier es igual al medio aritmético de los valores límites de la función a la derecha y a la izquierda, en el caso dado la suma es igual a cero.

§ 11. ANALISIS ARMONICO PRACTICO

La teoría del desarrollo de las funciones en series de Fourier se llama *análisis armónico*. Hagamos ahora algunas observaciones acerca del cálculo aproximado de los coeficientes de la serie de Fourier, es decir, respecto el análisis armónico práctico.

Como es sabido, los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$ de período 2π se determinan por las fórmulas

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx; \quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx;$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx.$$

En muchos casos de la práctica la función $f(x)$ se da o bien en forma de tabla (cuando la dependencia funcional se obtiene como el resultado de un experimento), o bien en forma de una curva trazada por cierto aparato. En estos casos el cálculo de los coeficientes de Fourier se realiza mediante los métodos aproximados de integración (véase § 8, cap. XI, tomo I).

Analicemos el intervalo $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ de longitud 2π. Se puede lograrlo con la elección correspondiente de la escala en el eje Ox.

Dividamos el intervalo $[-\pi, \pi]$ en n partes iguales por los puntos

$$x_0=-\pi,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n=\pi.$$

En este caso la longitud de un segmento parcial será igual a

$$\Delta x=\frac{2\pi}{n}.$$

Designemos los valores de la función $f(x)$ en los puntos x_0, x_1, x_2, ..., x_n, respectivamente, por

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n.$$

Determinamos estos valores o bien por la tabla, o bien por la gráfica de la función dada, midiendo las ordenadas correspondientes.

Entonces, utilizando, por ejemplo, la fórmula de rectángulos (véase la fórmula (1) § 8, cap. XI, tomo I), determinamos los coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \quad a_k = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \cos kx_i, \quad b_k = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \operatorname{sen} kx_i.$$

Existen esquemas elaborados para simplificar el cálculo de los coeficientes de Fourier. No podemos detenernos aquí en los detalles, pero notemos que existen aparatos (así llamados analizadores armónicos) que según la gráfica de la función dada, permiten calcular los valores aproximados de los coeficientes de Fourier.

§ 12. INTEGRAL DE FOURIER

Sea la función $f(x)$ definida en el intervalo infinito $(-\infty, \infty)$ y absolutamente integrable en éste, es decir, existe la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = Q. \tag{1}$$

Sea también la función $f(x)$ tal, que se desarrolla en una serie de Fourier en todo intervalo $(-l, +l)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi}{l}x + b_k \operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}x, \tag{2}$$

donde

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi}{l}t\, dt, \qquad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}\, dt. \tag{3}$$

Poniendo en la serie (2) las expresiones de los coeficientes a_k y b_x de las fórmulas (3), se puede escribir:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi}{l}t\, dt\right)\cos\frac{k\pi}{l}x +$$

$$+\left(\int_{-l}^{l} f(t)\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}t\, dt\right)\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}x = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, dt +$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\left[\cos\frac{k\pi}{l}t\cos\frac{k\pi}{l}x + \operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}t\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}x\right] dt$$

ó

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi(t-x)}{l}\,dt. \qquad (4)$$

Analicemos el problema de qué forma tome el desarrollo (4) durante el paso al límite, cuando $l\to\infty$.

Introduzcamos las siguientes designaciones:

$$\alpha_1=\frac{\pi}{l},\quad \alpha_2=\frac{2\pi}{l},\ \ldots,\ \alpha_k=\frac{k\pi}{l},\ \ldots\ \text{y}\ \Delta\alpha_k=\frac{\pi}{l}. \qquad (5)$$

Sustituyéndolas en (4), obtenemos:

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\alpha_k(t-x)\,dt\right)\Delta\alpha_k. \qquad (6)$$

Cuando $l\to\infty$, el primer término del segundo miembro tiende a cero. En efecto,

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt\right|\leqslant\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(t)|\,dt<\frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt=\frac{1}{2l}Q\to 0.$$

Para cualquier l fijado la expresión entre paréntesis es una función de α_k (véanse las fórmulas (5)) que toma los valores desde $\frac{\pi}{l}$ hasta ∞. Indiquemos sin demostración que si la función $f(x)$ es monótona por trozos en cada intervalo finito, acotada en el intervalo infinito y satisface a la condición (1), entonces, cuando $l\to\infty$, la fórmula (6) toma la forma:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha. \qquad (7)$$

La expresión del segundo miembro se llama *integral de Fourier* para la función $f(x)$. La igualdad (7) tiene lugar para todos los puntos donde la función es continua. En los puntos de discontinuidad se cumple la igualdad

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\right)dx=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \qquad (7')$$

Transformemos la integral del segundo miembro de la igualdad (7), desarrollando la expresión $\cos\alpha(t-x)$:

$$\cos\alpha(t-x)=\cos\alpha t\cos\alpha x+\operatorname{sen}\alpha t\operatorname{sen}\alpha x.$$

Poniendo esta expresión en la fórmula (7) y sacando $\cos \alpha x$ y $\operatorname{sen} \alpha x$ fuera de los signos de integrales, en las que integramos respecto a la variable t, obtenemos:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t \, dt \right) \cos \alpha x \, d\alpha + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \alpha t \, dt \right) \operatorname{sen} \alpha x \, d\alpha. \qquad (8)$$

Cada una de las integrales respecto a t, que se hallan entre paréntesis, existe, puesto que la función $f(t)$ es absolutamente integrable en el intervalo $(-\infty, \infty)$, y por consiguiente, son absolutamente integrables también las funciones $f(t) \cos \alpha t$ y $f(t) \operatorname{sen} \alpha t$.

Examinemos los casos particulares de la fórmula (8).

1. Sea $f(x)$ par. En este caso $f(t) \cos \alpha t$ es una función par y $f(t) \operatorname{sen} \alpha t$ es impar y obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t \, dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t \, dt,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \alpha t \, dt = 0.$$

En este caso la fórmula (8) toma la forma:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t \, dt \right) \cos \alpha x \, d\alpha. \qquad (9)$$

2. Sea $f(x)$ impar. Analizando el carácter de las integrales en la fórmula (8), en este caso, obtenemos:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \alpha t \, dt \right) \operatorname{sen} \alpha x \, d\alpha. \qquad (10)$$

Si la función $f(x)$ esta definida sólo en el intervalo $(0, \infty)$, podemos representarla, para $x > 0$, tanto por la fórmula (9), como por (10). En el primer caso la definimos adicionalmente en el intervalo $(-\infty, 0)$ de modo par, y en el segundo caso, de modo impar.

Notemos una vez más que en los puntos de discontinuidad, en vez de la expresión $f(x)$ en los primeros miembros de las igualdades (9) y (10) conviene escribir la expresión

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Regresemos a la fórmula (8). Las integrales comprendidas entre paréntesis son funciones de α. Introduzcamos las designaciones:

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt,$$

$$B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}\alpha t\,dt.$$

Entonces, podemos escribir la fórmula (8) así:

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}[A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\operatorname{sen}\alpha x]\,d\alpha. \tag{11}$$

Se dice que la fórmula (11) da el desarrollo de la función $f(x)$ en armónicas con frecuencia α que varía continuamente desde 0 hasta ∞. La ley de distribución de las amplitudes y de las fases iniciales en función de la frecuencia α es expresada mediante las funciones $A(\alpha)$ y $B(\alpha)$. Regresemos a la fórmula (9). Pongamos:

$$F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt, \tag{12}$$

entonces, la fórmula (9) toma la fórma:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} F(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha. \tag{13}$$

La función $F(\alpha)$ se llama *transformación coseno de Fourier* para la función $f(x)$.

Si en la igualdad (12) consideramos $F(\alpha)$ como una función dada y $f(t)$, como desconocida, entonces esta igualdad es la *ecuación integral* para la función $f(t)$. La fórmula (13) da la solución de esta ecuación.

Basándonos en la fórmula (10) podemos escribir las siguientes igualdades:

$$\Phi(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}\alpha t\,dt, \tag{14}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} \Phi(\alpha)\operatorname{sen}\alpha x\,d\alpha. \tag{15}$$

La función $\Phi(\alpha)$ se llama *transformación seno de Fourier*.

Ejemplo. Sea

$$f(x)=e^{-\beta x} \quad (\beta>0,\ x\geqslant 0).$$

Según la fórmula (12) determinamos la transformación coseno de Fourier:

$$F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\beta t}\cos\alpha t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\alpha}{\beta^2+\alpha^2}.$$

Según la fórmula (14) determinamos la transformación seno de Fourier:

$$\Phi(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\beta t}\operatorname{sen}\alpha t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\alpha}{\beta^2+\alpha^2}.$$

Según las fórmulas (13) y (15) hallamos las correlaciones mútuas:

$$\frac{2\beta}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{\beta^2+\alpha^2}\,d\alpha=e^{-\beta x} \quad (x\geqslant 0),$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha\operatorname{sen}\alpha x}{\beta^2+\alpha^2}\,d\alpha=e^{-\beta x} \quad (x>0).$$

§ 13. INTEGRAL DE FOURIER EN FORMA COMPLEJA

Si en la integral de Fourier (fórmula (7) § 12) está entre paréntesis la función par de α, por consiguiente, ésta está definida también para los valores negativos de α. De esto se deduce que podemos escribir la fórmula (7) en la forma:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha. \tag{1}$$

Examinemos ahora la siguiente expresión que es idénticamente igual a cero:

$$\int_{-M}^{M}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha=0.$$

La expresión del primer miembro es idénticamente igual a cero, puesto que la función de α entre paréntesis es una función impar y la integral de una función impar dentro de los límites de $-M$ a $+M$ es igual a cero. Es evidente que

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha=0$$

ó

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha=0. \tag{2}$$

Observación. Aquí es necesario explicar la siguiente circunstancia. Una integral convergente con límites infinitos se determina así:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{c} \varphi(\alpha)\, d\alpha + \int_{c}^{\infty} \varphi(\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{c} \varphi(\alpha)\, d\alpha + \lim_{M\to\infty} \int_{c}^{M} \varphi(\alpha)\, d\alpha \qquad (^{*})$$

a condición de que exista cada uno de los límites del segundo miembro (véase § 7, cap. XI, tomo I). Pero, en la igualdad (2) hemos escrito:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha)\, d\alpha = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \varphi(\alpha)\, d\alpha. \qquad (^{**})$$

Es evidente que puede ocurrir que el límite (**) existe, pero no existen los límites del segundo miembro de la igualdad (*). La expresión del segundo miembro de la igualdad (**), se llama *valor principal* de la integral. Pues, en la igualdad (2) se estudia el valor principal de la integral impropia (exterior). En el mismo sentido serán escritas también las integrales posteriores de este párrafo.

Al multiplicar los términos de la igualdad (2) por $\frac{i}{2\pi}$ y sumar con los miembros correspondientes de la igualdad (1), obtenemos:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,(\cos\alpha\,(t-x) + i\,\mathrm{sen}\,\alpha\,(t-x))\, dt \right] d\alpha$$

ó

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\alpha(t-x)}\, dt \right] d\alpha. \qquad (3)$$

Esta es precisamente la integral de Fourier en forma compleja. Podemos escribir la fórmula (3) en la forma siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\alpha t}\, dt \right) e^{-i\alpha x}\, d\alpha.$$

En virtud de la última igualdad, tenemos:

$$F^{*}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\alpha t}\, dt, \qquad (4)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F^{*}(\alpha)\, e^{-i\alpha x}\, d\alpha. \qquad (5)$$

La función $F^*(\alpha)$, determinada por la fórmula (4), se llama *transformación de Fourier* para la función $f(x)$. La función $f(x)$, determinada por la fórmula (5), se llama *transformación inversa de Fourier* para la función $F^*(\alpha)$ (las transformaciones difieren por el signo de i).

Ejercicios para el capítulo XVII

1. Desarrollar en una serie de Fourier en el intervalo $(-\pi, \pi)$ la función

$$f(x) = 2x \text{ para } 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$
$$f(x) = x \text{ para } -\pi < x \leqslant 0.$$

Respuesta:

$$\frac{1}{4}\pi - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) + 3\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \ldots\right).$$

2. Utilizando el desarrollo de la función $f(x) = 1$ en el intervalo $(0, \pi)$ en senos de arcos múltiples, calcular la suma de la serie $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

Respuesta: $\frac{\pi}{4}$.

3. Aplicando el desarrollo en una serie de Fourier de la función $f(x) = x^2$, calcular la suma de la serie $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots$

Respuesta: $\frac{\pi^2}{12}$.

4. Desarrollar la función $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$ en una serie de Fourier en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

Respuesta:

$$\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \ldots$$

5. Desarrollar en una serie de Fourier en el intervalo $(-\pi, \pi)$ la función

$$f(x) = -\frac{(\pi + x)}{2} \quad \text{para} \quad -\pi \leqslant x < 0,$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x) \quad \text{para} \quad 0 \leqslant x < \pi.$$

Respuesta:

$$\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \ldots$$

6. Desarrollar en una serie de Fourier en el intervalo $(-\pi, \pi)$ la función

$$f(x) = -x \quad \text{para} \quad -\pi < x \leqslant 0,$$
$$f(x) = 0 \quad \text{para} \quad 0 < x \leqslant \pi.$$

Respuesta:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}.$$

7. Desarrollar en una serie de Fourier en el intervalo $(-\pi, \pi)$ la función

$$f(x)=1 \quad \text{para} \quad -\pi < x \leqslant 0,$$
$$f(x)=-2 \quad \text{para} \quad 0 < x \leqslant \pi.$$

Respuesta:

$$-\frac{1}{2}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1}.$$

8. Desarrollar la función $f(x)=x^2$ en el intervalo $(0, \pi)$ en una serie de senos.

Respuesta:

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left\{\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}[(-1)^n-1]\right\}\operatorname{sen} nx.$$

9. Desarrollar la función $y=\cos 2x$ en el intervalo $(0, \pi)$ en una serie de senos.

Respuesta:

$$-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{2^2-1}+\frac{3\operatorname{sen} 3x}{2^2-3^2}+\frac{5\operatorname{sen} 5x}{2^2-5^2}+\dots\right].$$

10. Desarrollar la función $y=\operatorname{sen} x$ en el intervalo $(0, \pi)$ en una serie de cosenos.

Respuesta:

$$\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{1-2^2}+\frac{\cos 4x}{1-4^2}+\dots\right].$$

11. Desarrollar en una serie de Fourier la función $y=e^x$ en el intervalo $(-l, l)$.

Respuesta:

$$\frac{e^l-e^{-l}}{2l}+l(e^l-e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}+\pi(e^l-e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}.$$

12. Desarrollar la función $f(x)=2x$ en una serie de senos en el intervalo $(0, 1)$.

Respuesta:

$$1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi x}{n}.$$

13. Desarrollar en una serie de senos la función $f(x)=x$ en el intervalo $(0, l)$.

Respuesta:

$$\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}}{n}.$$

14. Desarrollar la función

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{para } 0<x\leqslant 1, \\ 2-x & \text{para } 1<x<2 \end{cases}$$

en el intervalo (0, 2): a) en una serie de senos;
b) en una serie de cosenos;

Respuesta:

$$\text{a)}\quad \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{sen}\dfrac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2};$$

$$\text{b)}\quad \frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}.$$

CAPITULO XVIII

ECUACIONES DE LA FISICA MATEMATICA

§ 1. TIPOS FUNDAMENTALES DE LAS ECUACIONES DE LA FISICA MATEMATICA

Se llaman ecuaciones fundamentales de la física matemática (para el caso de unas funciones de dos variables independientes) a las siguientes ecuaciones diferenciales con derivadas parciales de segundo orden.

I. Ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

A la necesidad de analizar esta ecuación conduce el examen de los procesos de vibraciones transversales de una cuerda, vibraciones longitudinales del vástago, oscilaciones eléctricas en un conductor, oscilaciones torsionales de un árbol, oscilaciones de un gas, etc. Esta ecuación es la más sencilla de *tipo hiperbólico*.

II. Ecuación de conducción de calor o ecuación de Fourier:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2}$$

A la necesidad de analizar esta ecuación conduce el examen de los procesos de propagación de calor, filtración de líquido y gas en un medio poroso (por ejemplo, filtración de petróleo y gas en areniscos subterráneos), algunos problemas de la teoría de probabilidades, etc. Esta ecuación es la más sencilla de *tipo parabólico*.

III. Ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{3}$$

El examen de los problemas sobre campos eléctricos y magnéticos, sobre el estado térmico estacionario, problemas de la hidrodinámica, difusión, etc., plantea la necesidad de analizar esta ecuación. Esta ecuación es la más sencilla de *tipo elíptico*.

En las ecuaciones (1), (2) y (3) la función desconocida u depende de dos variables. Se estudian también las ecuaciones correspondientes para unas funciones con mayor número de variables. Así, la ecuación de onda con tres variables independientes tiene la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1'}$$

la ecuación de conducción de calor con tres variables independientes tiene la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{2'}$$

la ecuación de Laplace con tres variables independiente tiene la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{3'}$$

§ 2. *ECUACION DE OSCILACIONES DE UNA CUERDA.* FORMULACION DEL PROBLEMA CON VALORES DE CONTORNO. ECUACIONES DE OSCILACIONES ELECTRICAS EN LOS CONDUCTORES

En la física matemática bajo el término de cuerda se entiende un hilo flexible y elástico. Las tensiones que surgen en la cuerda en cualquier momento, están dirigidas por la tangente a su perfil. Supongamos que en el momento inicial la cuerda de longitud l está dirigida a lo largo del segmento del eje Ox desde 0 hasta l. Supongamos también que los extremos de la cuerda están fijados en los puntos $x = 0$ y $x = l$. Si desviamos la cuerda de su posición inicial y luego la dejamos en libertad, o bien, sin desviar la cuerda, si damos en el momento inicial a sus puntos cierta velocidad, o si *desviamos la cuerda y damos a sus puntos cierta velocidad entonces* los puntos de la cuerda comienzan a realizar unos movimientos y se dice que la cuerda comienza a vibrar. El problema consiste en la determinación de la forma de la cuerda en cualquier momento y en la determinación de la ley de movimiento de cada punto de la cuerda en función del tiempo.

Analicemos pequeñas desviaciones de los puntos de la cuerda a partir de la posición inicial. Por tanto, se puede suponer que el movimiento de los puntos de la cuerda se efectúa perpendicularmente al eje Ox y en un mismo plano. Bajo esta suposición el proceso de oscilación de la cuerda se describe por una función $u(x, t)$, que da la magnitud de desplazamiento de un punto de la cuerda de abscisa x en el momento t (fig. 371).

Puesto que examinamos pequeñas desviaciones de la cuerda en el plano (x, u), supongamos que la longitud del elemento de la

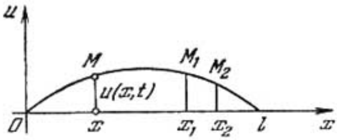

Fig. 371

cuerda $\smile M_1M_2$ es igual a su proyección sobre el eje Ox, o sea *), $\smile M_1M_2 = x_2 - x_1$. Supongamos también que la tensión es igual en todos los puntos de la cuerda; designemos esta tensión por T.

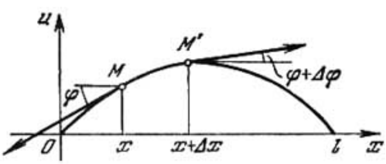

Fig. 372

Analicemos el elemento de la cuerda MM' (fig. 372). En los extremos de este elemento actúan las fuerzas T dirigidas por las tangentes a la cuerda. Supongamos que las tangentes forman con el eje Ox los ángulos φ y $\varphi + \Delta\varphi$. Entonces, la proyección sobre el eje Ou de las fuerzas que actúan sobre el elemento MM' será igual a $T\,\text{sen}\,(\varphi + \Delta\varphi) - T\,\text{sen}\,\varphi$. Puesto que el ángulo φ es peque-

*) Esta suposición equivale al despreciamiento de la magnitud $u_x'^2$ en comparación con 1. En efecto,

$$\smile M_1M_2 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x'^2}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(1 + \frac{1}{2} u_x'^2 - \ldots\right) dx \approx \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1.$$

ño, podemos poner tg $\varphi \approx$ sen φ, entonces tenemos:

$$T \operatorname{sen}(\varphi + \Delta\varphi) - T \operatorname{sen}\varphi \approx$$

$$\approx T \operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) - T \operatorname{tg}\varphi = T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,\, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,\, t)}{\partial x}\right] =$$

$$= T\,\frac{\partial^2 u(x+\theta\Delta x,\, t)}{\partial x^2}\,\Delta x \approx T\,\frac{\partial^2 u(x,\, y)}{\partial x^2}\,\Delta x,$$

$$0 < \theta < 1$$

(aquí hemos utilizado el teorema de Lagrange para la expresión comprendida entre corchetes).

Para obtener la ecuación del movimiento, hay que igualar las fuerzas exteriores, aplicadas al elemento, a la fuerza de inercia. Sea ρ la densidad lineal de la cuerda. Entonces la masa del elemento de la cuerda será $\rho\Delta x$. La aceleración del elemento es igual a $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Por consiguiente, según el principio de d'Alembert, tenemos:

$$\rho\Delta x\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\Delta x.$$

Reduciendo por Δx y designando por $\frac{T}{\rho} = a^2$, otenemos la ecuación del movimiento

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Esta es la *ecuación de onda*, o sea, ecuación de vibración de la cuerda. Para la determinación completa del movimiento de la cuerda la ecuación (1) es insuficiente. La función desconocida $u(x, t)$ debe satisfacer además a las *condiciones de contorno* que indican lo que se hace en los extremos de la cuerda ($x = 0$ y $x = l$), y a las *condiciones iniciales* que describen el estado de la cuerda en el momento inicial ($t = 0$). El conjunto de las condiciones de contorno e iniciales se llama condiciones con *valores de contorno.*

Sean, por ejemplo, como hemos supuesto, fijos los extremos de la cuerda para $x = 0$ y $x = l$. Entonces, para todo t han de cumplirse las igualdades:

$$u(0,\, t) = 0, \qquad (2')$$

$$u(l,\, t) = 0. \qquad (2'')$$

Estas igualdades son las *condiciones de contorno* para nuestro problema.

En el momento inicial $t = 0$ la cuerda tiene una forma determinada que le hemos atribuido. Sea esta forma determinada por la función $f(x)$. De este modo, debe ser

$$u(x, 0) = u|_{t=0} = f(x). \qquad (3')$$

Luego, en el momento inicial ha de ser dada la velocidad en cada punto de la cuerda que se determina por la función $\varphi(x)$. De este modo, debe ser

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x). \qquad (3'')$$

Las condiciones (3′) y (3″) son las condiciones iniciales.

Observación. En particular, puede ser $f(x) \equiv 0$ ó $\varphi(x) \equiv 0$. Pero, si $f(x) \equiv 0$ y $\varphi(x) \equiv 0$, entonces la cuerda está en reposo, por consiguiente, $u(x, t) \equiv 0$.

Como hemos indicado arriba, a la ecuación (1) conduce también el problema de las oscilaciones eléctricas en los conductores. Demostremos esto. La corriente eléctrica en el conductor se caracteriza por la magnitud $i(x, t)$ y la tensión $v(x, t)$ que dependen de la coordenada x del punto del conductor, y del tiempo t. Examinando el elemento del conductor Δx, podemos escribir que la caída de tensión en el elemento Δx es igual a $v(x, t) - v(x + \Delta x, t) \approx \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x$. Esta caída de tensión se compone de la óhmica, igual a $iR\Delta x$, e inductiva, igual a $\frac{\partial i}{\partial t} L \Delta x$.

Pues,

$$-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x = iR\Delta x + \frac{\partial i}{\partial t} L\Delta x, \qquad (4)$$

donde R y L son resistencia y coeficiente de autoinducción calculados por una unidad de longitud del conductor. El signo de menos se toma porque la corriente fluye en dirección inversa al incremento de v. Reduciendo por Δx, obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial x} + iR + L\frac{\partial i}{\partial t} = 0. \qquad (5)$$

Luego, la diferencia entre la corriente que sale del elemento Δx y la corriente que entra en éste por el tiempo Δt, será:

$$i(x, t) - i(x + \Delta x, t) \approx -\frac{\partial i}{\partial x}\Delta x\Delta t.$$

Una parte de esta diferencia se gasta para cargar elemento y es igual a $C\,\Delta x \frac{\partial v}{\partial t}\,\Delta t$; la otra parte se gasta en forma de fuga a través de la superficie lateral del conductor debido a la imperfección del aislamiento y es igual a $Av\,\Delta x\,\Delta t$ (aquí, A es el coeficiente de fuga). Igualando estas expresiones y reduciendo por $\Delta x\,\Delta t$, obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial t} + Av = 0. \tag{6}$$

Las ecuaciones (5) y (6) suelen llamarse *ecuaciones telegráficas*.

Del sistema de ecuaciones (5) y (6) se puede obtener la ecuación que contiene solamente la función desconocida $i\,(x,\ t)$ y la ecuación que contiene solamente la función desconocida $v\,(x,\ t)$. Derivemos los términos de la ecuación (6) respecto a x y los términos de la ecuación (5), respecto a t, y multipliquémoslos por C. Después de la sustracción obtenemos:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + A\frac{\partial v}{\partial x} - CR\frac{\partial i}{\partial x} - CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0.$$

Poniendo en la última ecuación la expresión $\frac{\partial v}{\partial x}$ de la ecuación (5), tenemos:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + A\left(-iR - L\frac{\partial i}{\partial t}\right) - CR\frac{\partial i}{\partial x} - CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

ó

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (CR + AL)\frac{\partial i}{\partial t} + ARi. \tag{7}$$

De modo análogo se obtiene la ecuación para la determinación de $v\,(x,\ t)$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (CR + AL)\frac{\partial v}{\partial t} + ARv. \tag{8}$$

Si se puede despreciar la fuga a través del aislamiento ($A = 0$) y la resistencia ($R = 0$), las ecuaciones (7) y (8) pasan en las ecuaciones de onda:

$$a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \qquad a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

donde está designado: $a^2=\frac{1}{CL}$. Partiendo de las condiciones físicas, se formulan las condiciones de contorno e iniciales del problema.

§ 3. SOLUCION DE LA ECUACION DE VIBRACIONES DE UNA CUERDA POR EL METODO DE SEPARACION DE LAS VARIABLES (METODO DE FOURIER)

El método de separación de las variables (o método de Fourier) que examinemos ahora, es típico para la solución de numerosos problemas de la física matemática. Supongamos que se requiere hallar la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

que satisface a las condiciones con valores de contorno siguientes:

$$u(0,\ t)=0, \tag{2}$$

$$u(l,\ t)=0, \tag{3}$$

$$u(x,\ 0)=f(x), \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x). \tag{5}$$

Busquemos la solución particular de la ecuación (1) (que no es igual idénticamente a cero) que satisface a las condiciones de contorno (2) y (3) en forma de un producto de dos funciones $X(x)$ y $T(t)$ de las cuales la primera depende solamente de x, y la segunda, solamente de t:

$$u(x,\ t)=X(x)\ T(t). \tag{6}$$

Poniendo en la ecuación (1), obtenemos: $X(x)\ T''(t)=a^2X''(x)\ T(t)$ y, dividiendo los términos de la igualdad por a^2XT,

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}. \tag{7}$$

En el primer miembro de esta igualdad se encuentra la función que no depende de x, en el segundo, la función que no depende de t. La igualdad (7) se verifica sólo en el caso en que los miembros primero y segundo no dependen ni de x, ni de t, es decir, son iguales a un número constante. Designémoslo por $-\lambda$, donde $\lambda>0$ (luego examinemos también el caso de $\lambda < 0$). Pues,

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda.$$

De estas igualdades obtenemos dos ecuaciones:

$$X''+\lambda X=0, \tag{8}$$

$$T''+a^2\lambda T=0. \tag{9}$$

Las soluciones generales de estas ecuaciones serán: (véase cap. XIII, § 21):

$$X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x, \tag{10}$$

$$T(x)=C\cos a\sqrt{\lambda}t+D\operatorname{sen}a\sqrt{\lambda}t, \tag{11}$$

donde A, B, C, D son constantes arbitrarias.

Sustituyendo las expresiones $X(x)$ y $T(t)$ en la igualdad (6), obtenemos:

$$u(x,t)=(A\cos\sqrt{\lambda}x+B\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x)(C\cos a\sqrt{\lambda}t+D\operatorname{sen}a\sqrt{\lambda}t).$$

Escojamos ahora las constantes A y B de modo que se cumplan las condiciones (2) y (3). Puesto que $T(t)\not\equiv 0$ (en caso contrario $u(x,t)\equiv 0$ lo que contradice a la condición planteada), la función $X(x)$ debe satisfacer a las condiciones (2) y (3), es decir, ha de ser $X(0)=0$, $X(l)=0$. Poniendo los valores $x=0$ y $x=l$ en la igualdad (10), en virtud de (2) y (3) obtenemos:

$$0=A\cdot 1+B\cdot 0,$$

$$0=A\cos\sqrt{\lambda}l+B\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}l=0.$$

De la primera ecuación hallamos que $A=0$. De la segunda obtenemos:

$$B\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}l=0.$$

$B\neq 0$, puesto que en caso contrario sería $X\equiv 0$ y $u\equiv 0$, lo que contradice a la condición. Por consiguiente, debe ser:

$$\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}l=0,$$

de donde

$$\sqrt{\lambda}=\frac{n\pi}{l}\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots) \tag{12}$$

(no tomamos el valor $n=0$, puesto que en este caso sería $X\equiv 0$ y $u\equiv 0$). Pues, hemos obtenido

$$X=B\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x. \tag{13}$$

Los valores hallados de λ se llaman *propios* para el problema dado con valores de contorno. Las funciones $X(x)$, que les corresponden, se llaman *funciones propias.*

Observación. Si tomamos en vez de $-\lambda$ la expresión $+\lambda = k^2$, entonces la ecuación (8) adquiere la forma:

$$X'' - k^2X = 0.$$

La solución general de esta ecuación:

$$X = Ae^{kx} + Be^{-kx}.$$

La solución en semejante forma que difiere de cero no puede satisfacer a las condiciones de contorno (2) y (3).

Sabiendo $\sqrt{\lambda}$ y aprovechando la igualdad (11) podemos escribir:

$$T(t) = C\cos\frac{an\pi}{l}t + D\,\mathrm{sen}\,\frac{an\pi}{l}t \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{14}$$

Para cada valor de n, por consiguiente, para cada λ, ponemos las expresiones (13) y (14) en la igualdad (6) y obtenemos la solución de la ecuación (1) que satisface a las condiciones de contorno (2) y (3). Designemos esta solución con $u_n(x, t)$:

$$u_n(x,\ t) = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{l}x\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t + D_n\,\mathrm{sen}\,\frac{an\pi}{l}t\right). \tag{15}$$

Para cada valor de n podemos tomar sus constantes C y D, y por eso escribimos C_n y D_n (la constante B está incluida en C_n y D_n). Puesto que la ecuación (1) es lineal y homogénea, entonces la suma de soluciones también es una solución, y por eso la función representada por la serie

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,\ t)$$

ó

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t + D_n\,\mathrm{sen}\,\frac{an\pi}{l}t\right)\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{l}x, \tag{16}$$

también será la solución de la ecuación diferencial (1) que satisfacerá a las condiciones de contorno (2) y (3). Es evidente, que la serie (16) será la solución de la ecuación (1) solamente en el caso en que los coeficientes C_n y D_n son tales que esta serie converge y convergen las series que se obtienen después de la derivación doble término a término respecto a x y a t.

La solución (16) debe, además, satisfacer a las condiciones iniciales (4) y (5). Logremos esto, eligiendo las constantes C_n y D_n. Poniendo en la igualdad (16) $t = 0$, obtenemos (véase la condición (4)):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x. \tag{17}$$

Si la función $f(x)$ es tal que en el intervalo $(0, l)$ podemos desarrollarla en la serie de Fourier (véase § 1, cap. XVII), entonces se cumple la condición (17), si ponemos

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x\, dx. \tag{18}$$

Luego, derivamos los términos de la igualdad (16) respecto a t y ponemos $t = 0$. De la condición (5) se obtiene la igualdad

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{an\pi}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x.$$

Determinemos los coeficientes de Fourier de esta serie:

$$D_n \frac{an\pi}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x\, dx$$

ó

$$D_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \varphi(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x\, dx. \tag{19}$$

Pues, hemos demostrado que si la serie (16), donde los coeficientes C_n y D_n están determinados según las fórmulas (18) y (19), permite la derivación doble término a término, entonces, esta serie representa la función $u(x, t)$ que es la solución de la ecuación (1) y satisface a las condiciones de contorno e iniciales (2) — (5).

Observación. Al resolver el problema examinado para la ecuación de onda mediante otro procedimiento, se puede demostrar que la serie (16) representa la solución, también, en el caso en que esta serie no permite la derivación término a término. Aquí, la función $f(x)$ debe ser dos veces derivable y $\varphi(x)$, una vez derivable.

§ 4. ECUACION DE PROPAGACION DEL CALOR EN UN VASTAGO. PLANTEO DEL PROBLEMA CON VALORES DE CONTORNO

Examinemos un vástago homogéneo de longitud l. Supongamos que la superficie lateral del vástago no conduce el calor y que la temperatura es igual en todos los puntos de la sección transversal del vástago. Estudiemos el proceso de difusión del calor en el vástago.

Dispongamos el eje Ox de modo que un extremo del vástago coincida con el punto $x = 0$, y el otro, con el punto $x = l$ (fig. 373).

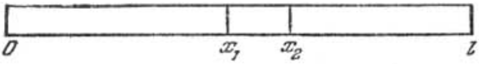

Fig. 373

Sea $u(x, t)$ la temperatura en la sección de lvástago con abscisa x en el momento t. Experimentalmente está establecido que la velocidad de difusión del calor, es decir, la cantidad del calor que fluye a través de la sección de abscisa x por la unidad de tiempo, se determina por la fórmula:

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial x}S, \tag{1}$$

donde S es el área de la sección del vástago examinado y k es el coeficiente de conductibilidad térmica *).

Analicemos un elemento del vástago comprendido entre las secciones de abscisas x_1 y x_2 ($x_2 - x_1 = \Delta x$). La cantidad del calor que pasa a través de la sección de abscisa x_1, durante el tiempo Δt es igual a:

$$\Delta Q_1 = -k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1} S\Delta t, \tag{2}$$

lo mismo tiene lugar para la sección de abscisa x_2:

$$\Delta Q_2 = -k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2} S\Delta t. \tag{3}$$

---

*) La velocidad de propagación del calor o velocidad del flujo térmico se determina del modo siguiente:

$$q = \lim \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

donde ΔQ es la cantidad de calor que pasa por la sección S en el tiempo Δt.

La afluencia del calor $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$ en el elemento del vástago por el tiempo Δt es igual a:

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = \left[-k \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_1} S\,\Delta t \right] - \left[-k \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_2} S\,\Delta t \right] \approx$$

$$\approx k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x S\,\Delta t. \qquad (4)$$

(Hemos aplicado el teorema de Lagrange para la diferencia

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_1} - \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_2} \right).$$

Esta afluencia del calor por el tiempo Δt se gastó para elevar la temperatura del elemento del vástago en una magnitud Δu:

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = c\rho \Delta x S\,\Delta u$$

ó

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 \approx c\rho \Delta x S \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t, \qquad (5)$$

donde c es la capacidad calorífica de la sustancia del vástago, ρ es la densidad de la sustancia del vástago ($\rho \Delta x S$ es la masa del elemento del vástago).

Igualando las expresiones (4) y (5) de la misma cantidad del calor $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$, obtenemos:

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x S\,\Delta t = c\rho \Delta x S \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t$$

ó

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Designado $\frac{k}{c\rho} = a^2$, obtenemos definitivamente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (6)$$

Esta es precisamente la ecuación de propagación del calor (*ecuación de conducción del calor*) en un vástago homogéneo.

Para que sea bien determinada la solución de la ecuación (6), la función $u(x, t)$ ha de satisfacer a las condiciones con valores de contorno que corresponden a las condiciones físicas del problema.

Las condiciones con valores de contorno para resolver las ecuaciones (6) pueden ser diferentes. Las condiciones que corresponden al así llamado *primer problema con valores de contorno* para $0 \leqslant t \leqslant T$, son siguientes:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{7}$$
$$u(0, t) = \psi_1(t), \tag{8}$$
$$u(l, t) = \psi_2(t). \tag{9}$$

La condición (7) (*condición inicial*) físicamente corresponde al fenómeno siguiente: cuando $t = 0$, en diferentes secciones del vástago está dada la temperatura igual a $\varphi(x)$. Las condiciones (8) y (9) (condiciones de contorno) corresponden a que en los extremos del vástago, para $x=0$ y $x=l$, se mantienen las temperaturas iguales a $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$, respectivamente.

Se demuestra que la ecuación (6) tiene la única solución en el campo $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$, que satisface a las condiciones (7), (8), (9).

§ 5. PROPAGACION DEL CALOR EN EL ESPACIO

Examinemos el proceso de propagación del calor en el espacio tridimensional. Sea $u(x, y, z, t)$ la temperatura en el punto de las coordenadas (x, y, z) en el momento t. Experimentalmente está establecido que la velocidad del flujo del calor a través del área Δs, es decir, la cantidad del calor que fluye por la unidad de tiempo, se determina por la fórmula (análoga a la fórmula (1) del párrafo anterior):

$$\Delta Q = -k\frac{\partial u}{\partial n}\Delta s, \tag{1}$$

donde k es el coeficiente de conductibilidad térmica del medio examinado que consideramos homogéneo e isotrópico, $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario dirigido por la normal al área Δs en sentido de movimiento del calor. En virtud del § 14 del cap. VIII, t. I, se puede escribir:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son cosenos directores del vector $\boldsymbol{n}$, o

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \boldsymbol{n} \operatorname{grad} u.$$

Poniendo la expresión $\frac{\partial u}{\partial n}$ en la fórmula (1) obtenemos:

$$\Delta Q = -k\boldsymbol{n} \operatorname{grad} u \, \Delta s.$$

La cantidad del calor que fluye por el tiempo Δt a través del área Δs es igual a

$$\Delta Q \Delta t = -kn \text{ grad } u \, \Delta t \Delta s.$$

Regresemos al problema planteado al principio del párrafo. En el medio considerado separemos un volumen pequeño V, limitado por la superficie S. La cantidad del calor que fluye a través de la superficie S será igual a

$$Q = -\Delta t \iint_S kn \text{ grad } u \, ds, \tag{2}$$

donde n es el vector unitario dirigido por la normal exterior a la superficie S. Es evidente que la fórmula (2) da la cantidad del calor que entra en el volumen V (o sale del volumen V) por el tiempo Δt. La cantidad del calor que entra en el volumen V sirve para aumentar la temperatura de la sustancia de este volumen.

Examinemos un volumen elemental Δv. Supongamos que por el tiempo Δt su temperatura haya aumentado en Δu. Es evidente que la cantidad del calor gastada para este aumento de la temperatura del elemento Δv es igual a

$$c \Delta v \rho \Delta u \approx c \Delta v \rho \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t,$$

donde c es la capacidad calorífica de la sustancia, ρ es la densidad. La cantidad total del calor gastada para el aumento de la temperatura en el volumen V por el tiempo Δt será

$$\Delta t \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \, dv.$$

Pero esto es el calor que ha entrado en el volumen V por el tiempo Δt; está determinado por la fórmula (2). De este modo, tiene lugar la igualdad

$$\Delta t \iint_S kn \text{ grad } u \, ds = \Delta t \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \, dv.$$

Reduciendo por Δt, obtenemos:

$$\iint_S kn \text{ grad } u \, ds = \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \, dv. \tag{3}$$

Transformamos según la fórmula de Ostrogradski (véase § 8, cap. XV) la integral de superficie que se encuentra en el primer miembro de esta igualdad, poniendo $\boldsymbol{F} = k \operatorname{grad} u$:

$$\iint_S (k \operatorname{grad} u)\, \boldsymbol{n}\, ds = \iiint_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)\, dv.$$

Sustituyendo la integral doble del primer miembro de la igualdad (3) por la integral triple, obtenemos:

$$\iiint_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)\, dv = \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\, dv$$

ó

$$\iiint_V \left[\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\right] dv = 0. \tag{4}$$

Aplicando el teorema de la media para la integral triple del primer miembro (véase § 12, cap. XIV), tenemos:

$$\left[\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x=x_1,\ y=y_1,\ z=z_1} = 0, \tag{5}$$

donde el punto $P(x, y, z)$ es cierto punto del volumen V.

Puesto que podemos separar un volumen arbitrario V en el espacio tridimensional donde se propaga el calor, y puesto que supongamos que el integrando en la igualdad (4) es continuo, entonces la igualdad (5) se cumpla en todo punto del espacio. Pues,

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u). \tag{6}$$

Pero

$$k \operatorname{grad} u = k \frac{\partial u}{\partial x} \boldsymbol{i} + k \frac{\partial u}{\partial y} \boldsymbol{j} + k \frac{\partial u}{\partial z} \boldsymbol{k}$$

(véase § 14, cap. VIII, tomo I) y

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

(véase § 9, cap. XV). Poniendo en la ecuación (6), obtenemos:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial u}{\partial z}\right). \tag{7}$$

Si k es constante, entonces:

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = k \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

y la ecuación (6) en este caso nos da:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

o, poniendo $\frac{k}{c\rho} = a^2$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{8}$$

La ecuación (8) se anota concisamente así:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u,$$

donde $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ es el operador de Laplace. La ecuación (8) es precisamente la *ecuación de conducción del calor en el espacio*. Para hallar su solución única que satisface al problema planteado, hay que dar las condiciones con valores de contorno.

Supongamos que tenemos un cuerpo Ω cuya superficie es σ. En este cuerpo se examina el proceso de propagación del calor. En el momento *inicial la temperatura del cuerpo está dada, lo* que corresponde a que es conocido el valor de la solución para $t = 0$, o sea, la *condición inicial*:

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z). \tag{9}$$

Además, debe ser conocida la temperatura en todo punto M de la *superficie σ del cuerpo en cualquier momento de tiempo t, es decir,* la condición de contorno:

$$u(M, t) = \psi(M, t). \tag{10}$$

(Son posibles otras condiciones de contorno).

Si la función desconocida $u(x, y, z, t)$ no depende de z, lo que *corresponde a que la temperatura no depende de z, obtenemos* la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{11}$$

es decir, *la ecuación de propagación del calor en el plano.* Si se analiza la propagación del calor en un dominio plano D con frontera C, entonces las condiciones de contorno, análogamente a (9) y (10), se formulan de modo siguiente:

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y),$$
$$u(M, t) = \psi(M, t),$$

donde φ y ψ son funciones dadas, M es el punto de la frontera C.

Si la función u no depende de z, ni de y, obtenemos la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

que es *la ecuación de propagación del calor en un vástago.*

§ 6. SOLUCION DEL PRIMER PROBLEMA CON VALORES DE CONTORNO PARA LA ECUACION DE CONDUCCION DEL CALOR POR EL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS

Igual que en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, al resolver las ecuaciones con derivadas parciales por el método de

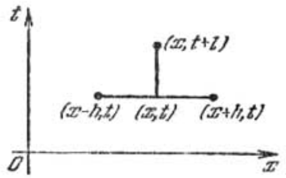

Fig. 374

diferencias finitas, las derivadas se sustituyen por diferencias correspondientes (véase la fig. 374):

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \approx \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h}\left[\frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h} - \frac{u(x, t) - u(x-h, t)}{h}\right]$$

ó

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2}; \tag{2}$$

análogamente

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t} \approx \frac{u(x,\ t+l)-u(x,\ t)}{l}. \tag{3}$$

El primer problema con valores de contorno para la ecuación de conducción del calor se formula (véase el § 4) de modo siguiente. Se requiere hallar la solución de la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4}$$

que satisface a las condiciones con valores de contorno:

$$u(x,\ 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \tag{5}$$

$$u(0,\ t) = \psi_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{6}$$

$$u(l,\ t) = \psi_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{7}$$

es decir, se requiere hallar la solución $u(x,\ t)$ en un rectángulo limitado por las rectas $t=0$, $x=0$, $x=L$, $t \leqslant T$, si son dados los valores de una función desconocida en sus tres lados: $t=0$, $x=0$, $x=L$ (fig. 375). Cubramos nuestro dominio con una red formada por las rectas

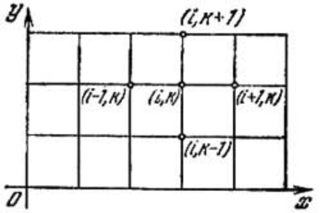

Fig. 375

$$x = ih, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$t = kl, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,$$

y determinemos los valores aproximados de la solución en los nudos de la red, es decir, en los puntos de intersección de estas rectas. Introduzcamos las designaciones: $u(ih,\ kl) = u_{i,\,k}$.

Escribimos en vez de la ecuación (4) otra ecuación que le corresponde en forma de diferencias finitas para el punto $(ih,\ kl)$. En virtud de las fórmulas (3) y (2) obtenemos.

$$\frac{u_{i,\,k+1}-u_{i,\,k}}{l} = a^2 \frac{u_{i+1,\,k}-2u_{i,\,k}+u_{i-1,\,k}}{h^2}. \tag{8}$$

Determinemos $u_{i,\,k+1}$:

$$u_{i,\,k+1} = \left(1-\frac{2a^2 l}{h^2}\right) u_{i,\,k} + a^2 \frac{l}{h^2}(u_{i+1,\,k}+u_{i-1,\,k}). \tag{9}$$

De la fórmula (9) se deduce que si son conocidos tres valores en k-ésima línea: $u_{i,\,k}$, $u_{i+1,\,k}$, $u_{i-1,\,k}$, entonces se determina el valor

$u_{i,k+1}$ en la $(k+1)$-ésima línea. Sabemos ya todos los valores en la recta $t=0$ (véase la fórmula (5)). Según la fórmula (9) determinemos los valores en todos los puntos interiores del segmento $t=l$. En virtud de las fórmulas (6) y (7) sabemos los valores en los puntos extremos de este segmento. De este modo, pasando de una línea a otra, determinemos los valores de la solución desconocida en todos los nudos de la red.

Hemos demostrado que mediante la fórmula (9) se puede obtener el valor aproximado de la solución solamente en el caso en que

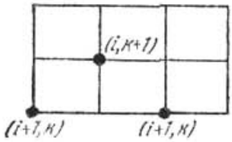

Fig. 376

$l \leqslant \frac{h^2}{2a^2}$ y no para la relación arbitraria de los pasos h y l. La fórmula se simplifica especialmente, si el paso l por el eje t se eliga de modo que

$$1-\frac{2a^2 l}{h^2}=0$$

ó

$$l=\frac{h^2}{2a^2}.$$

En este caso la ecuación (9) toma la forma:

$$u_{i,\,k+1}=\frac{1}{2}(u_{i+1,\,k}+u_{i-1,\,k}). \tag{10}$$

Esta fórmula es especialmente cómoda para los cálculos (fig. 376). Por el método indicado se determina la solución en los nudos de la red. Se puede obtener el valor de la solucion entre los nudos de la red, por ejemplo, mediante la extrapolación, trazando un plano a traves de cada tres puntos en el espacio $(x,\ t,\ u)$. La solución obtenida mediante la fórmula (10) y extrapolada designemos por $u_h(x,\ t)$. Se demuestra que

$$\lim_{h\to 0} u_h(x,\ t)=u(x,\ t),$$

donde $u(x, t)$ es la solución de nuestro problema. Es demostrado también que

$$|u_h(x, t) - u(x, t)| < Mh^2,$$

donde M es una constante que no depende de h.

§ 7. PROPAGACION DEL CALOR EN UN VASTAGO ILIMITADO

Sea dada una temperatura en el momento inicial en diferentes secciones de un vástago ilimitado. Es preciso determinar la distribución de la temperatura en el vástago en los momentos posteriores de tiempo. (Los problemas físicos se reducen al problema de propagación del calor en un vástago ilimitado, cuando el vástago es tan largo que la temperatura en los puntos interiores del mismo en los momentos examinados depende poco de las condiciones en los extremos del vástago).

Si el vástago coincide con el eje Ox, el problema se expresa matemáticamente de modo siguiente. Hallar la solucion de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

en el dominio $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, la que satisface a la condición inicial

$$u(x, 0) = \varphi(x). \tag{2}$$

Para hallar la solución apliquemos el método de separación de variables (véase el § 3), es decir, busquemos la solución particular de la ecuación (1) en forma de un producto de dos funciones:

$$u(x, t) = X(x) T(t). \tag{3}$$

Poniendo en la ecuación (1), tenemos: $X(x) T'(t) = a^2 X''(x) T(t)$ o

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2. \tag{4}$$

Ninguna de estas relaciones puede depender de x, ni de t, por lo cual las igualamos a la constante *) $-\lambda^2$. De (4) obtenemos dos ecuaciones:

$$T' + a^2\lambda^2 T = 0, \tag{5}$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0. \tag{6}$$

---

*) Como, según el sentido del problema $T(t)$ debe ser acotada para cualquier t, si $\varphi(x)$ es acotada, entonces $\frac{T'}{T}$ ha de ser negativa. Por eso escribimos $-\lambda^2$.

Resolviéndolas, hallamos:

$$T = Ce^{-a^2\lambda^2 t},$$

$$X = A\cos\lambda x + B\,\mathrm{sen}\,\lambda x.$$

Poniendo en (3), obtenemos:

$$u_\lambda(x,\ t) = e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\,\mathrm{sen}\,\lambda x] \tag{7}$$

(la constante C está incluida en $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$).

Para cada valor de λ obtenemos la solución de la forma (7). Para cada valor de λ las constantes arbitrarias A y B tienen valores determinados. Por eso se puede considerar A y B como funciones de λ. La suma de las soluciones de la forma (7) también es una solución (debido a la linealidad de la ecuación (1)):

$$\sum_\lambda e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\,\mathrm{sen}\,\lambda x].$$

Integrando la expresión (7) respecto al parámetro λ en los límites de 0 a ∞, también obtenemos la solución

$$u(x,\ t) = \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\,\mathrm{sen}\,\lambda x]\,d\lambda, \tag{8}$$

si $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ son tales que esta integral, su derivada respecto a t y la segunda derivada respecto a x existen y se obtienen mediante la derivación de la integral respecto a t y x. Escojamos $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ de modo que la solución $u(x, t)$ satisfaga a la condición (2). Poniendo en la igualdad (8) $t = 0$, en virtud de la condición (2) obtenemos:

$$u(x,\ 0) = \varphi(x) = \int_0^\infty [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\,\mathrm{sen}\,\lambda x]\,d\lambda. \tag{9}$$

Supongamos que la función $\varphi(x)$ es tal que puede ser representada por la integral de Fourier (véase § 12, cap. XVII):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty \varphi(\alpha)\cos\lambda(\alpha - x)\,d\alpha\right)d\lambda$$

ó

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\left(\int_{-\infty}^\infty \varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha\,d\alpha\right)\cos\lambda x + \right.$$

$$\left. + \left(\int_{-\infty}^\infty \varphi(\alpha)\,\mathrm{sen}\,\lambda\alpha\,d\alpha\right)\mathrm{sen}\,\lambda x\right]d\lambda \tag{10}$$

Comparando los segundos miembros de (9) y (10), obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha\, d\alpha, \\ B(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha)\operatorname{sen}\lambda\alpha\, d\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Sustituyendo las expresiones halladas de $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ en la fórmula (8), tenemos:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha\, d\alpha\right)\cos\lambda x + \right.$$

$$\left. + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha)\operatorname{sen}\lambda\alpha\, d\alpha\right)\operatorname{sen}\lambda x\right] d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha)(\cos\lambda\alpha\cos\lambda x + \operatorname{sen}\lambda\alpha\operatorname{sen}\lambda x)\, d\alpha\right] d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha)\cos\lambda(\alpha - x)\, d\alpha\right) d\lambda$$

o, cambiando el orden de integración, obtenemos definitivamente:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi(\alpha)\left(\int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\alpha - x)\, d\lambda\right)\right] d\alpha. \qquad (12)$$

Esta es la solución del problema planteado.

Transformemos la fórmula (12). Calculemos la integral entre paréntesis:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\alpha - x)\, d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}}\int_0^{\infty} e^{-z^2}\cos\beta z\, dz. \qquad (13)$$

La integral está transformada mediante las sustituciones:

$$a\lambda\sqrt{t} = z, \quad \frac{\alpha - x}{a\sqrt{t}} = \beta. \qquad (14)$$

Designemos:

$$K(\beta)=\int_0^\infty e^{-z^2}\cos\beta z\,dz. \tag{15}$$

Derivando *), obtenemos:

$$K'(\beta)=-\int_0^\infty e^{-z^2}z\,\mathrm{sen}\,\beta z\,dz.$$

Integrando por partes, hallamos:

$$K'(\beta)=\frac{1}{2}[e^{-z^2}\mathrm{sen}\,\beta z]_0^\infty-\frac{\beta}{2}\int_0^\infty e^{-z^2}\cos\beta z\,dz$$

o bien

$$K'(\beta)=-\frac{\beta}{2}K(\beta).$$

Integrando esta ecuación diferencial, obtenemos:

$$K(\beta)=Ce^{-\frac{\beta^2}{4}}. \tag{16}$$

Determinemos la constante C. De (15) se deduce:

$$K(0)=\int_0^\infty e^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(véase § 5, cap. XIV). Por consiguiente, en la igualdad (16) debe ser

$$C=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Pues,

$$K(\beta)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4}}. \tag{17}$$

Pongamos el valor (17) de la integral (15) en (13):

$$\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\alpha-x)\,d\lambda=\frac{1}{a\sqrt{t}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4}}.$$

---

*) La posibilidad de realizar la derivación se argumenta fácilmente.

Sustituyendo β por su expresión (14), obtenemos en definitiva el valor de la integral (13):

$$\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\alpha-x)\,d\lambda=\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}}. \tag{18}$$

Poniendo esta expresión de la integral en la solución (12), obtenemos definitivamente:

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\,e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}}\,d\alpha. \tag{19}$$

Esta fórmula se llama *integral de Poisson* y es la solución del problema planteado sobre la propagación del calor en un vástago ilimitado.

Observación. Se puede demostrar que la función $u(x,\ t)$, determinada por la integral (19), es la solución de la ecuación (1) y satisface a la condición (2), si la función $\varphi(x)$ es acotada en un intervalo infinito $(-\infty,\ \infty)$.

Establezcamos el sentido físico de la fórmula (19). Examinemos la función

$$\varphi^*(x)=\begin{cases}0 & \text{para}\quad -\infty<x<x_0,\\ \varphi(x) & \text{para}\quad x_0\leqslant x\leqslant x_0+\Delta x,\\ 0 & \text{para}\quad x_0+\Delta x<x<\infty.\end{cases} \tag{20}$$

Entonces la función

$$u^*(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^*(\alpha)\,e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}}\,d\alpha \tag{21}$$

es la solución de la ecuación (1) que toma el valor de $\varphi^*(x)$, para $t=0$. Teniendo en cuenta (20), se puede escribir:

$$u^*(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\varphi(\alpha)\,e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}}\,d\alpha.$$

Aplicando el teorema sobre la media a la última integral, obtenemos:

$$u^*(x,\ t)=\frac{\varphi(\xi)\,\Delta x}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}},\qquad x_0<\xi<x_0+\Delta x. \tag{22}$$

La fórmula (22) da el valor de temperatura en un punto del vástago en cualquier momento de tiempo, si para $t = 0$ en todo el vástago la temperatura es $u^* = 0$, excepto el segmento $[x_0, x_0+\Delta x]$, donde la temperatura es igual a $\varphi(x)$. La suma de temperaturas de la forma (22) da la solución (19). Notemos que si ρ es la densidad lineal del vástago; c, capacidad calorífica del material, entonces la cantidad de calor en el elemento $[x_0, x_0 + \Delta x]$ para $t = 0$ es

$$\Delta Q \approx \varphi(\xi)\,\Delta x\,\rho c. \tag{23}$$

Analicemos luego la función

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}}. \tag{24}$$

Comparándola con el segundo miembro de la fórmula (22), tomando en consideración (23), se dice que ésta da el valor de las temperaturas en todo punto del vástago en cualquier momento de tiempo t, si para $t = 0$ en la sección ξ (caso límite, cuando $\Delta x \to 0$) hubo una fuente instantánea de calor con cantidad de calor $Q = c\rho$.

§ 8. PROBLEMAS QUE CONDUCEN A LA INVESTIGACION DE LAS SOLUCIONES DE LA ECUACION DE LAPLACE. PLANTEO DE LOS PROBLEMAS CON VALORES DE CONTORNO

En el párrafo presente se examinan algunos problemas que conducen a la solución de la *ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

Como ya hemos indicado, el primer miembro de la ecuación (1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv \Delta u$$

se llama operador de Laplace. Las funciones u que satisfacen a la ecuación de Laplace se llaman funciones armónicas.

1. Distribución estacionaria de la temperatura en un cuerpo homogéneo. Sea un cuerpo homogéneo Ω limitado por la superficie σ. En el § 5 se ha mostrado que la temperatura en diferentes puntos del cuerpo satisface a la ecuación (8):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Si el proceso es estacionario, es decir, si la temperatura no depende del tiempo, sino solamente de las coordenadas de los puntos del cuerpo, entonces $\frac{\partial u}{\partial t}=0$, y por consiguiente, la temperatura satisface a la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{1}$$

Para que la temperatura en el cuerpo se determine de esta ecuación unívocamente hay que saber la temperatura de la superficie σ. De este modo, para la ecuación (1) el problema con valores de contorno se formula de la manera siguiente.

Hallar la función $u(x, y, z)$ que satisface a la ecuación (1) en el interior del volumen Ω y toma en cada punto M de la superficie σ *los valores dados:*

$$u|_\sigma=\psi(M). \tag{2}$$

Este problema se llama *problema de Dirichlet o primer problema con valores de contorno* para la ecuación (1).

Si la temperatura es desconocida en la superficie del cuerpo, pero en todo punto de la superficie sabemos el flujo térmico que es proporcional a $\frac{\partial u}{\partial n}$ (véase el § 5), entonces en vez de la condición con valores de contorno en la superficie σ (2) tendremos la condición:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\sigma=\psi^*(M). \tag{3}$$

El problema de hallar la solución de la ecuación (1) que satisface a la condición con valores de contorno (3) se llama *problema de Neuman o segundo problema con valores de contorno.*

Si se examina la distribución de las temperaturas en el dominio plano D limitado por el contorno C, entonces la función u depende de dos variables x e y y satisface a la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{4}$$

que se llama ecuación de Laplace en el plano. Las condiciones con valores de contorno (2) y (3) deben cumplirse en el contorno C.

II. Corriente potencial de un líquido o gas. Ecuación de continuidad. Sea la corriente de un líquido en el interior de un volumen Ω limitado por una superficie σ (en caso particular, Ω puede ser también ilimitado). Sea ρ la densidad del líquido. Designemos la velocidad del líquido por

$$v = v_x i + v_y j + v_z k, \tag{5}$$

donde v_x, v_y, v_z son las proyecciones del vector $\boldsymbol{v}$ en los ejes de coordenadas. Separemos en el cuerpo Ω un pequeño volumen ω limitado por la superficie S. A través de cada elemento Δs de la superficie S en el tiempo Δt pasará la cantidad de líquido

$$\Delta Q = \rho v n \Delta s \Delta t,$$

donde $\boldsymbol{n}$ es un vector unitario dirigido a lo largo de la normal exterior respecto a la superficie S. La cantidad total de líquido Q que entra en el volumen ω (o sale del volumen ω) se expresa mediante la integral

$$Q = \Delta t \iint\limits_S \rho \boldsymbol{v n}\, ds \tag{6}$$

(véase §§ 5 y 6, cap. XV). La cantidad de líquido en el volumen ω en el momento t fue

$$\iiint\limits_\omega \rho\, d\omega.$$

Durante el tiempo Δt la cantidad de líquido, en virtud de la variación de la densidad, cambia en la magnitud

$$Q = \iiint\limits_\omega \Delta\rho \Delta\omega \approx \Delta t \iiint\limits_\omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\omega. \tag{7}$$

Suponiendo que en el volumen ω no hay fuentes, concluimos que esta variación está provocada por la afluencia del líquido cuya cantidad está determinada por la igualdad (6). Igualando los segundos miembros de las igualdades (6) y (7) y reduciendo por Δt, obtenemos:

$$-\iint\limits_S \rho \boldsymbol{v n}\, ds = + \iiint\limits_\omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\omega. \tag{8}$$

Transformemos la integral iterada de segundo orden del primer miembro según la fórmula de Ostrogradski (§ 8, cap. XV). Entonces la igualdad (8) toma la forma:

$$-\iiint\limits_\omega \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v})\, d\omega = \iiint\limits_\omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\omega$$

ó

$$\iiint\limits_\omega \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) \right) d\omega = 0.$$

Puesto que el volumen ω es arbitrario y el integrando es continuo, obtenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{9}$$

ó

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0. \tag{9'}$$

Esta es la *ecuación de continuidad de corriente del líquido compresible*

Observación. En algunos problemas, por ejemplo, al examinar el proceso de movimiento de petróleo o gas en un pozo, en un medio poroso subterráneo, se puede aceptar

$$\boldsymbol{v} = -\frac{k}{\rho} \operatorname{grad} p,$$

donde p es la presión, k es el coeficiente de permeabilidad y

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx \lambda \frac{\partial p}{\partial t},$$

λ = const. Poniendo en la ecuación de continuidad (9), obtenemos:

$$\lambda \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} p) = 0$$

ó

$$\lambda \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial p}{\partial z}\right). \tag{10}$$

Si k es una constante, la ecuación toma la forma:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right), \tag{11}$$

y nosotros llegamos a la ecuación de conducción del calor.

Regresemos a la ecuación (9). Si el líquido es incompresible, entonces $\rho = \text{const}$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ y la ecuación (9) toma la forma:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = 0. \tag{12}$$

Si el movimiento es potencial, es decir, el vector v es un gradiente de cierta función φ:

$$v = \operatorname{grad} \varphi,$$

entonces la ecuación (12) toma la forma:

$$\operatorname{div} (\operatorname{grad} \varphi) = 0$$

ó

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{13}$$

es decir, la función potencial de la velocidad φ debe satisfacer a la ecuación de Laplace.

En muchos problemas, como, por ejemplo, en los de filtración, se puede aceptar

$$v = -k_1 \operatorname{grad} p,$$

donde p es la presión y k_1 es una constante; entonces obtenemos la ecuación de Laplace para determinar la presión

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \tag{13'}$$

Las condiciones con valores de contorno para la ecuación (13) o (13′) pueden ser las siguientes:

1. En la superficie σ se dan los valores de la función desconocida p, (es decir, de la presión (condición (2)). Esto es el problema de Dirichlet.

2. En la superficie σ se dan los valores de la derivada normal $\frac{\partial p}{\partial n}$, es decir, se da el flujo a través de la superficie (condición (3)). Esto es el problema de Neumann.

3. En una parte de la superficie σ se dan los valores de la función desconocida p, es decir, de la presión y en otra parte de la superficie, los valores de la derivada normal $\frac{\partial p}{\partial n}$ es decir, del flujo a través de la superficie. Esto es el problema de Dirichlet-Neumann.

Si el movimiento es plano y paralelo, es decir, la función φ (ó p) no depende de z, obtenemos la ecuación de Laplace en el dominio bidimensional D con frontera C:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{14}$$

Las condiciones con valores de contorno de la forma (2) (problema de Dirichlet), o de la forma (3) (problema de Neumann) se dan en el contorno C.

III. Potencial de la corriente eléctrica estacionaria. Supongamos que a traves de un medio homogéneo que llena cierto volumen V, pasa una corriente eléctrica cuya densidad en cada punto se da por el vector $\boldsymbol{J}(x, y, z) = \boldsymbol{J}_x i + \boldsymbol{J}_y i + \boldsymbol{J}_z K$. Supongamos, que la densidad de corriente no depende del tiempo t. Supongamos, también, que en el volumen examinado no hay fuentes de corriente. Por consiguiente, el flujo del vector $\boldsymbol{J}$ a través de cualquier superficie cerrada S que se halla en el interior del volumen V, será igual a cero:

$$\iint_S \boldsymbol{J n}\, ds = 0,$$

donde $\boldsymbol{n}$ es un vector unitario dirigido a lo largo de la normal exterior respecto a la superficie.

De la fórmula de Ostrogradski deducimos que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{J} = 0. \tag{15}$$

En virtud de la ley generalizada de Ohm se determina la fuerza eléctrica $\boldsymbol{E}$ en el medio conductor examinado:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{J}}{\lambda} \tag{16}$$

ó

$$\boldsymbol{J} = \lambda \boldsymbol{E},$$

donde λ es la conductibilidad del medio la que consideramos constante.

De las ecuaciones generales del campo electromagnético se deduce que si el proceso es estacionario, entonces el campo vectorial $\boldsymbol{E}$ es irrotacional, es decir, rot $\boldsymbol{E} = 0$. Entonces, análogamente al caso examinado durante el análisis de campo de velocidades del líquido, el campo vectorial es potencial (véase § 9, cap. XV). Existe la función φ tal que

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{grad} \varphi. \tag{17}$$

A base de (16) obtenemos:

$$\boldsymbol{J} = \lambda \operatorname{grad} \varphi. \tag{18}$$

De (15) y (18) se deduce:

$$\lambda \operatorname{div} (\operatorname{grad} \varphi) = 0$$

ó

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=0. \tag{19}$$

Obtenemos la ecuación de Laplace.

Resolviendo esta ecuación para las correspondientes condiciones con valores de contorno, hallamos la función φ y, por las fórmulas (18) y (17), la corriente $\boldsymbol{J}$ y la fuerza eléctrica $\boldsymbol{E}$.

§ 9. ECUACION DE LAPLACE EN COORDENADAS CILINDRICAS. SOLUCION DEL PROBLEMA DE DIRICHLET PARA UN ANILLO CON VALORES CONSTANTES DE LA FUNCION DESCONOCIDA EN LAS CIRCUNFERENCIAS INTERNA Y EXTERNA

Sea $u\ (x,\ y,\ z)$ una función armónica de tres variables. Entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{1}$$

Introduzcamos en el examen las coordenadas cilíndricas $(r,\ \varphi,\ z)$

$$x=r\cos\varphi, \qquad x=r\operatorname{sen}\varphi, \qquad z=z,$$

de donde

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \qquad z=z. \tag{2}$$

Sustituyendo las variables independientes x, y y z por r, φ, y z, llegamos a la función u^*:

$$u\ (x,\ y,\ z)=u^*\ (r,\ \varphi,\ z).$$

Hallemos la ecuación a la cual satisfaga $u^*\ (r,\ \varphi,\ z)$ como función de argumentos r, φ y z. Tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u^*}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u^*}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u^*}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u^*}{\partial r\,\partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u^*}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \tag{3}$$

análogamente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u^*}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 u^*}{\partial r\,\partial\varphi}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+$$

$$+\frac{\partial^2 u^*}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u^*}{\partial\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \qquad (4)$$

además,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}. \qquad (5)$$

Las expresiones para

$$\frac{\partial r}{\partial x},\quad \frac{\partial r}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$$

hallamos de la igualdad (2). Sumando los segundos miembros de las igualdades (3), (4) y (5) e igualando la suma a cero (puesto que la suma de los primeros miembros de estas igualdades es igual a cero en virtud de (1)), obtenemos:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}=0. \qquad (6)$$

Esta es la *ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas.*

Si la función u no depende de z, pero depende de x e y, entonces la función u^* que depende sólo de r y φ, satisface a la ecuación

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial\varphi^2}=0, \qquad (7)$$

donde r y φ son coordenadas polares en un plano.

Ahora hallemos la solución de la ecuación de Laplace en el dominio D (anillo), limitado por las circunferencias C_1: $x^2+y^2=R_1^2$ y C_2: $x^2+y^2=R_2^2$, que toman los siguientes valores de contorno:

$$u|_{C_1}=u_1, \qquad (8)$$

$$u|_{C_2}=u_2, \qquad (9)$$

donde u_1 y u_2 son constantes.

Resolvamos el problema en coordenadas polares. Es evidente que conviene buscar la solución que no depende de φ. En este caso la ecuación (7) toma la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0.$$

Integrando esta ecuación, hallamos:

$$u=C_1 \ln r+C_2. \tag{10}$$

Determinemos C_1 y C_2 de las condiciones (8) y (9):

$$u_1 = C_1 \ln R_1 + C_2,$$
$$u_2 = C_1 \ln R_2 + C_2.$$

De ahí hallamos:

$$C_1=\frac{u_2-u_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}, \qquad C_2=u_1-(u_2-u_1)\frac{\ln R_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

Sustituyendo los valores hallados de C_1 y C_2 en la fórmula (10) obtenemos en definitiva:

$$u=u_1+\frac{\ln\frac{r}{R_1}}{\ln\frac{R_2}{R_1}}(u_2-u_1). \tag{11}$$

Observación. En realidad hemos resuelto el siguiente problema. Hallar la función u que satisface a la ecuación de Laplace en el dominio limitado por las superficies (en coordenadas cilíndricas):

$$r=R_1, \quad r=R_2, \quad z=0, \quad z=H,$$

y que satisface a las siguientes condiciones de contorno:

$$u\big|_{r=R_1}=u_1, \qquad u\big|_{r=R_2}=u_2,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=H}=0$$

(el problema de Dirichlet-Neumann). Es evidente que la solución buscada no depende de z, ni de φ y se da por la fórmula (11).

§ 10. SOLUCION DEL PROBLEMA DE DIRICHLET PARA UN CIRCULO

Supongamos que en el plano Oxy hay un círculo de radio R y el centro en el origen de coordenadas. Sea dada en su circunferencia cierta función $f(\varphi)$, donde φ es un ángulo polar. Es preciso hallar la función $u(r, \varphi)$, continua en el círculo, incluyendo el contorno, que satisface en el interior del círculo a la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

y en la circunferencia del círculo toma los valores dados

$$u|_{r=R}=f(\varphi). \tag{2}$$

Calculemos el problema en coordenadas polares. Escribamos la ecuación (1) en estas coordenadas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0$$

ó

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0. \tag{1'}$$

Busquemos la solución por el método de separación de variables, poniendo que

$$u = \Phi(\varphi)\, R(r). \tag{3}$$

Sustituyendo en la ecuación (1′), obtenemos:

$$r^2\Phi(\varphi)\, R''(r)+r\Phi(\varphi)\, R'(r)+\Phi''(\varphi)\, R(r)=0$$

ó

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=-\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-k^2. \tag{4}$$

Puesto que el primer miembro de esta igualdad no depende de r, y el segundo, de φ, por consiguiente, éstos son iguales a un número constante que designaremos por $-k^2$. De este modo, la igualdad (4) nos da dos ecuaciones:

$$\Phi''(\varphi)+k^2\Phi(\varphi)=0, \tag{5}$$

$$r^2R''(r)+rR'(r)-k^2R(r)=0. \tag{5'}$$

La solución general de la ecuación (5) será

$$\Phi = A\cos k\varphi + B\sin k\varphi. \tag{6}$$

Busquemos la solución de la ecuación (5′) en forma de $R = r^m$. Sustituyendo $R = r^m$ en (5′), obtenemos:

$$r^2 m(m-1)r^{m-2}+rmr^{m-1}-k^2r^m=0$$

ó

$$m^2 - k^2 = 0.$$

Podemos escribir dos soluciones particulares linealmente independientes: r^k y r^{-k}. La solución general de la ecuación (5′) será

$$R = Cr^k + Dr^{-k}. \tag{7}$$

Ponemos las expresiones (6) y (7) en (3):

$$u_k = (A_k \cos k\varphi + B_k \operatorname{sen} k\varphi)(C_k r^k + D_k r^{-k}). \tag{8}$$

La función (8) será la solución de la ecuación (1′) para todo valor de k distinto de cero. Si $k = 0$, las ecuaciones (5) y (5′) toman la forma

$$\Phi'' = 0, \quad rR'' + R' = 0,$$

y por consiguiente,

$$u_0 = (A_0 + B_0\varphi)(C_0 + D_0 \ln r). \tag{8′}$$

La solución debe ser una función periódica de φ, puesto que, siendo igual el valor de r, para φ y $\varphi + 2\pi$, hemos de tener un mismo valor de la solución, ya que examinamos un mismo punto del círculo. Por tanto, es evidente que en la fórmula (8′) debe ser $B_0 = 0$. Luego, busquemos una solución continua y finita en el círculo. Por consiguiente, en el centro del círculo, para $r = 0$, la solución debe ser finita, y por eso en la fórmula (8′) debe ser $D_0 = 0$ y en la fórmula (8), $D_k = 0$.

De este modo, el segundo miembro de (8′) se convierte en el producto A_0C_0, que designaremos por $A_0/2$. Pues,

$$u_0 = \frac{A_0}{2}. \tag{8″}$$

Formemos la solucion de nuestro problema en forma de una suma de soluciones de la forma (8) puesto que la suma de soluciones es la solución buscada. La suma debe ser una función periódica de φ. Esta condición se cumple, si cada sumando es una función periódica de φ. Para eso k debe tomar valores enteros. (Notemos que si igualamos los miembros de la igualdad (4) al numero $+k^2$, no obtendríamos la solución periódica). Podemos limitarnos solamente a los valores positivos

$$k = 1, 2, \ldots, n, \ldots,$$

puesto que, en virtud de que las constantes A, B, C, D son arbitrarias, los valores negativos de k no dan nuevas soluciones particulares. Pues,

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \operatorname{sen} n\varphi)\, r^n \tag{9}$$

(la constante C_n está incluida en A_n y B_n). Elijamos ahora las constantes arbitrarias A_n y B_n de modo que se satisfaga la condición con valores de contorno (2). Poniendo en la igualdad (9) $r = R$, en virtud de la condición (2) obtenemos:

$$f(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \operatorname{sen} n\varphi)\, R^n \tag{10}$$

Para que tenga lugar la igualdad (10), es necesario que la función se desarrolle en la serie de Fourier en el intervalo $(-\pi, \pi)$ y que $A_n R^n$ y $B_n R^n$ sean los coeficientes de Fourier. Por consiguiente, A_n y B_n deben determinarse por las fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt, \\ B_n &= \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt\, dt. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Pues, la serie (9) con coeficientes determinados por las fórmulas (11), será la solución de nuestro problema, si ella admite la derivación doble, término a término, respecto a r y a φ (pero esto no lo hemos demostrado). Transformemos la fórmula (9). Sustituyendo A_n y B_n por sus expresiones (11) y efectuando las transformaciones trigonométricas, obtenemos:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n(t-\varphi)\, dt \left(\frac{r}{R}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(t-\varphi)\right] dt. \tag{12}$$

Transformemos la expresion entre corchetes *).

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(t-\varphi)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\left[e^{in(t-\varphi)}+e^{-in(t-\varphi)}\right]=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}\right)^n+\left(\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}\right)^n\right]=$$

$$=1+\frac{\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}}{1-\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}}+\frac{\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}}{1-\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}}=$$

$$=\frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}{1-2\frac{r}{R}\cos(t-\varphi)+\left(\frac{r}{R}\right)^2}=\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}. \tag{13}$$

Sustituyendo la expresión entre corchetes en la fórmula (12) por la expresión (13) tenemos:

$$u(r,\ \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(t-\varphi)+r^2}\,dt. \tag{14}$$

La fórmula (14) se llama *integral de Poisson*. Analizando esta fórmula se demuestra que si la función $f(\varphi)$ es continua, entonces la función $u(r,\ \varphi)$, determinada por la integral (14), satisface a la ecuación (1′), y, para $r \to R$, será que $u(r,\ \varphi)\to f(\varphi)$, es decir, $u(r,\ \varphi)$ es la solución del problema de Dirichlet para un círculo.

§ 11. SOLUCION DEL PROBLEMA DE DIRICHLET POR EL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS

Sea dada en el plano Oxy un dominio D, limitado por el contorno C. Supongamos que en el contorno C está dada una función continua f. Es preciso hallar una solución aproximada de la ecuación

*) Durante la deducción determinamos la suma de una progresión geométrica infinita, cuyo denominador es un número complejo y cuyo módulo es menor de la unidad. Esta fórmula de la suma de una progresión geométrica se deduce igual que en el caso de los números reales. Hay que tener en cuenta la definición del límite de la función compleja de un argumento real. Aquí, el argumento es n (véase § 4, cap. VII, tomo I).

de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

que satisface a la condición de contorno

$$u|_C=f. \tag{2}$$

Tracemos dos familias de rectas:

$$x = ih \quad \text{y} \quad y = kh \tag{3}$$

donde h es el número dado, i y k toman valores numéricos enteros sucesivos. Diremos que el dominio D está cubierto de una *red*. Los puntos de intersección de las rectas los llamaremos *nudos de la red*.

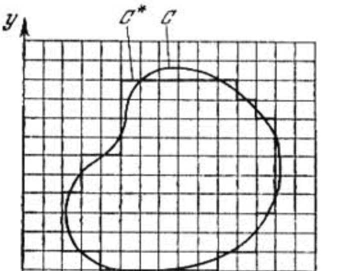

Fig. 377

El valor aproximado de la función desconocida en el punto $x = ih$, $y = kh$, lo designaremos por $u_{i,k}$ es decir, $u(ih, kh) = u_{i,k}$. Aproximemos el dominio D mediante el dominio reticular D^*, compuesto de todos los cuadrados que enteramente se hallan dentro del dominio D, y algunos de éstos son cruzados por la frontera C (con estos últimos se puede despreciar). En este caso el contorno C se aproxima mediante el contorno C^* compuesto por los segmentos de rectas de la forma (3). En cada nudo que se halla en el contorno C^* demos un valor f^* igual al valor de la función f en el punto más próximo del contorno C (fig. 377).

Examinemos los valores de la función desconocida solamente en los nudos de la red. Como hemos indicado en el § 6 las derivadas en el método de aproximación examinado se sustituyen por las diferencias finitas:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=ih,\ y=kh}=\frac{u_{i+1,\,k}-2u_{i,\,k}+u_{i-1,\,k}}{h^2},$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{x=ih,\ y=kh}=\frac{u_{i,\,k+1}-2u_{i,\,k}+u_{i,\,k-1}}{h^2}.$$

La ecuación diferencial (1) se sustituye por la *ecuación de diferencias* o por la *ecuación en diferencias finitas* (después de reducir por h^2):

$$u_{i+1,\,k}-2u_{i,\,k}+u_{i-1,\,k}+u_{i,\,k+1}-2u_{i,\,k}+u_{i,\,k-1}=0$$

ó (fig. 378)

$$u_{i,k} = \frac{1}{4}(u_{i+1,k} + u_{i,k+1} + u_{i-1,k} + u_{i,k-1}). \quad (4)$$

Para cada nudo de la red que se encuentra en el interior del dominio D^* (y no se encuentra en la frontera C^*) componemos la ecuación (4). Si el punto $(x = ih,\ y = kh)$ es vecino al punto del contorno

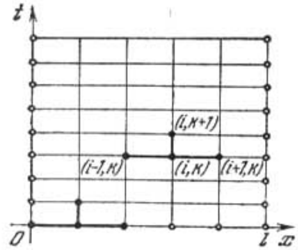

Fig. 378

C^*, entonces en el segundo miembro de la igualdad (4) serán los valores conocidos de f^*. De este modo, obtenemos un sistema heterogéneo de N ecuaciones con N incógnitas (N es el número de nudos de la red que se encuentran en el interior del dominio D^*).

Demostremos que el sistema (4) tiene una y solamente una solución. Es el sistema de N ecuaciones lineales con N incógnitas. Tiene la única solución en el caso en que el determinante del sistema sea distinto de cero. El determinante del sistema difiere de cero si el sistema homogéneo tiene solamente una solución trivial (nula). El sistema será homogénea, si $f^* = 0$ en los nudos de la red en la frontera del contorno C^*. Pues, demostremos que en este caso todos los valores $u_{i,k}$ en todos los nudos interiores de la red son iguales a cero. Supongamos que en el interior del dominio hay $u_{i,k}$ diferentes de cero. Para mayor definición supongamos que el mayor de estos valores es positivo. Designémoslo por $\bar{u}_{i,k} > 0$. En virtud de la fórmula (4) escribimos:

$$\bar{u}_{i,k} = \frac{1}{4}(u_{i+1,k} + u_{i,k+1} + u_{i-1,k} + u_{i,k-1}). \quad (4')$$

Esta igualdad puede tener lugar sólo en el caso si todos los valores de u, del segundo miembro, son iguales al valor óptimo $\bar{u}_{i,k}$. Ahora tenemos cinco puntos donde los valores de la función desconocida son $\bar{u}_{i,k}$. Si ninguno de estos puntos es de la frontera, entonces, tomando uno de éstos y escribiendo para él la igualdad (4), demostremos que en algunos otros puntos el valor de la función desconocida será igual a $\bar{u}_{i,k}$. Prosiguiendo de este modo, llegamos a la frontera y demostremos que en el punto de la frontera el valor de la función será igual a $\bar{u}_{i,k}$. Esto contradice al hecho de que en los puntos de la frontera $f^* = 0$.

Suponiendo que en el interior del dominio hay un valor negativo mínimo, demostremos que en la frontera el valor de la función es negativo. Esto contradice a la condición dada.

Pues, el sistema (4) tiene una y solamente una solución.

Los valores de $u_{i,k}$, determinados del sistema (4), son valores aproximados de la solución del problema de Dirichlet formulado anteriormente. Hemos demostrado que si existe la solución del problema de Dirichlet para el dominio dado D y la función dada f, (designémosla esta solución por $u(x, y)$), y si $u_{i,k}$ es la solución del sistema (4), entonces se verifica la correlación:

$$|u(x, y) - u_{i,k}| < Ah^2, \tag{5}$$

donde A es una constante que no depende de h.

Observación. Puede ser justificado, aunque estrictamente no está demostrado, el siguiente procedimiento para evaluar el error de la solución aproximada. Sean: $u_{i,k}^{(2h)}$ la solución aproximada para el paso $2h$; $u_{i,k}^{(h)}$, la solución aproximada para el paso h; $E_h(x, y)$, el error de la solución $u_{i,k}^{(h)}$. Entonces tiene lugar la igualdad aproximada.

$$E_h(x, y) \approx \frac{1}{3}(u_{i,k}^{(2h)} - u_{i,k}^{(h)})$$

en los nudos comunes de las redes. Pues, para determinar el error de la solución aproximada para el paso h, hay que hallar la solución para el paso $2h$. Una tercera parte de la diferencia de estas soluciones aproximadas es la evaluación del error de la solución para el paso h. Esta observación se puede extender también a la solución de la ecuación de la conducción de calor mediante el método de diferencias finitas.

Ejercicios para el capítulo XVIII

1. Deducir la ecuación de oscilaciones torsionales de un vástago cilíndrico homogéneo.

Indicación. El momento torsional en la sección del vástago de abscisa x se determina por la fórmula $M = GI\frac{\partial\theta}{\partial x}$, donde $\theta(x, t)$ es el ángulo de torsión de la sección de abscisa x en el momento t, G es el módulo de desplazamiento I, es el momento polar de inercia de la sección transversal del vástago.

Respuesta: $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$, donde $a^2=\frac{GI}{k}$, k es el momento de inercia de la unidad de longitud del vástago.

2. Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$ que satisface a las condiciones:

$$\theta(0, t)=0,\ \theta(l, t)=0,\ \theta(x, 0)=\varphi(x),\ \frac{\partial\theta(x, 0)}{\partial t}=0,$$

donde

$$\varphi(x)=\frac{2\theta_0 x}{l} \qquad \text{cuando } 0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2},$$

$$\varphi(x)=-\frac{2\theta_0 x}{l}+2\theta_0 \text{ cuando } \frac{l}{2}\leqslant x\leqslant l.$$

Dar la interpretación mecánica del problema.

Respuesta:

$$\theta(x, t)=\frac{8\theta_0}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi x}{l}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{l}.$$

3. Deducir la ecuación de oscilaciones longitudinales de un vástago cilíndrico homogéneo.

Indicación. Si $u(x, t)$ es el desplazamiento de la sección del vástago de abscisa x en el momento t, entonces la tensión T de extensión en la sección x se determina por la fórmula $T=ES\frac{\partial u}{\partial x}$, donde E es el módulo de elasticidad del material, S es el área de la sección transversal del vástago.

Respuesta: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, donde $a^2=\frac{E}{\rho}$, ρ es la densidad del material del vástago.

4. Un vástago homogéneo de longitud $2l$, bajo la acción de las fuerzas aplicadas a sus extremos, se ha reducido en la magnitud 2λ. Cuando $t=0$, cesa la acción de las fuerzas exteriores. Determinar el desplazamiento $u(x, t)$ de la sección del vástago de abscisa x en el momento t (el punto medio del eje del vástago tiene abscisa $x=0$).

Respuesta:

$$u(x, t)=\frac{8\lambda}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l}.$$

5. Un extremo del vástago de longitud l está fijo, sobre el otro actúa una fuerza de extensión P. Hallar las oscilaciones longitudinales del vástago, si para $t=0$ cesa la acción de fuerza P.

Respuesta:

$$\frac{8Pl}{Es\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}$$

(el sentido de E y S véase en el problema 3).

6. Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ que satisface a las condiciones:

$$u=(0,\ t)=0,\quad u(l,\ t)=A\ \mathrm{sen}\ \omega t,$$
$$u(x,\ 0)=0,\quad \frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t}=0.$$

Dar la interpretación mecánica del problema.

Respuesta:

$$u(x,\ t)=\frac{A\ \mathrm{sen}\frac{\omega}{a}x\ \mathrm{sen}\ \omega t}{\mathrm{sen}\frac{\omega}{a}l}+\frac{2A\omega a}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\omega^2-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\mathrm{sen}\frac{n\pi a t}{l}\ \mathrm{sen}\frac{n\pi x}{l}.$$

Indicación. Buscar la solución en forma de una suma de dos soluciones:

$$u=v+\omega,\ \text{donde}\ \omega=\frac{A\ \mathrm{sen}\frac{\omega}{a}x\ \mathrm{sen}\ \omega t}{\mathrm{sen}\frac{\omega}{a}l}$$

es la solución que satisface a las condiciones:

$$v(0,\ t)=0,\quad v(l,\ t)=0,$$
$$v(x,\ 0)=-w(x,\ 0),\quad \frac{\partial v(x,\ 0)}{\partial t}=-\frac{\partial w(x,\ 0)}{\partial t}.$$

$\left(\text{Se supone que sen}\frac{\omega}{a}l\neq 0\right)$.

7. Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ que satisface a las condiciones:

$$u(0,\ t)=0,\quad u(l,\ t)=0,\ t>0,$$
$$u(x,\ 0)=\begin{cases} x\ \text{para}\ 0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\\ l-x\ \text{para}\ \frac{l}{2}<x<l.\end{cases}$$

Respuesta:

$$h(x,\ t)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2t}{l^2}}\mathrm{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

Indicación. Resolver el problema por el método de separacion de variables.

8. Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ que satisface a las condiciones:

$$u(0,\ t)=u(0\cdot l)=0,\quad u(x,0)=\frac{x(l-x)}{l^2}.$$

Respuesta:

$$u(x,\ t)=\frac{8}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\,e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2t}{l^2}}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\,\pi x}{l}\ .$$

9. Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ que satisface a las condiciones:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\ u(l,\ t)=u_0,\ u(x,\ 0)=\varphi(x).$$

Indicar el sentido físico del problema.

Respuesta:

$$u(x,\ t)=u_0+\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}\cos\frac{(2n+1)\,\pi}{2l}\,x,$$

donde

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\frac{(2n+1)\,\pi x}{2l}\,dx-\frac{(-1)^n\,4u_0}{\pi\,(2n+1)}\ .$$

Indicación. Buscar la solución en la forma $u=u_0+v(x,\ t)$.

10. Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ que satisface a las condiciones:

$$u(0,\ t)=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=-Hu\,|_{x=l},\ u(x,\ 0)=\varphi(x).$$

Indicar el sentido físico del problema.

Respuesta:

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{p^2+\mu_n^2}{p\,(p+1)+\mu_n^2}\,e^{-\frac{\mu_n^2a^2t^2}{l^2}}\operatorname{sen}\frac{\mu_n x}{l}\ ,$$

donde

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\operatorname{sen}\frac{\mu_n x}{l}\,dx,\ p=Hl,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_n,$$

son raíces positivas de la ecuación $\operatorname{tg}\mu=-\frac{\mu}{p}$.

Indicación. En el extremo del vástago, para $x=l$, tiene lugar un intercambio de calor con el medio ambiente cuya temperatura es igual a cero.

11. Hallar (según la fórmula (10), § 6, poniendo $h=0,2$) la solución aproximada de la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, que satisface a las condiciones:

$$u(x,\ 0)=x\left(\frac{3}{2}-x\right),\ u(0,\ t)=0,\ u(1,\ t)=\frac{1}{2},\ 0\leqslant t\leqslant 4l.$$

12. Hallar la solución de la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ en la banda $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y<\infty$, que satisface a las condiciones:

$$u(0, y)=0,\ u(a, y)=0,\ u(x, 0)=A\left(1-\frac{x}{a}\right),\ u(x, \infty)=0.$$

Respuesta:

$$u(x, t)=\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{a}y}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}.$$

Indicación. Buscar la solución por el método de separación de variables.

13. Hallar la solución de la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ en un rectángulo $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$, que satisface a las condiciones:

$$u(x, 0)=0,\ u(x, b)=0,\ u(0, y)=Ay(b-y),\ u(a, y)=0.$$

Respuesta:

$$u(x, t)=\frac{8Ab^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{senh}\frac{(2n+1)\pi(a-x)}{b}}{(2n+1)^3}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi y}{b}}{\operatorname{senh}\frac{(2n+1)\pi a}{b}}.$$

14. Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ en el interior de un anillo limitado por las circunferencias $x^2+y^2=R_1^2$, $x^2+y^2=R_2^2$, que satisface a las condiciones

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_1}=+\frac{Q}{\lambda 2\pi R_1},\quad \left.u\right|_{r=R_2}=u_2.$$

Dar la interpretación hidrodinámica del problema.

Indicación. Resolver el problema en coordenadas polares.

Respuesta:

$$u=u_2-\frac{Q}{2\lambda\pi}\ln\frac{R_2}{r}.$$

15. La función $u(x, y)=e^{-y}\operatorname{sen}x$ es la solución de la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ en el cuadrado $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$ que satisface a las condiciones:

$$u(0, y)=0,\ u(1, y)=e^{-y}\operatorname{sen}1,\ u(x, 0)=\operatorname{sen}x,\ u(x, 1)=e^{-1}\operatorname{sen}x.$$

En los problemas 12-15 resolver las ecuaciones de Laplace para las condiciones de contorno dadas, por el método de diferencias finitas, cuando $h=0{,}25$. Comparar la solución aproximada con la exacta.

CAPITULO XIX

CALCULO OPERACIONAL Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES

Actualmente el cálculo operacional es una de las importantes esferas del análisis matemático. Los métodos de cálculo operacional se usan en la física, mecánica, electrotecnia y otras ciencias durante la solución de diversos problemas. El cálculo operacional ha encontrado una aplicación especialmente amplia en la automática y en la telemecánica. En el presente capítulo (basándonos en el material de los capítulos anteriores del manual) daremos los conceptos principales del cálculo operacional y los métodos operacionales de solución de las ecauciones diferenciales ordinarias.

§ 1. FUNCION INICIAL Y SU TRANSFORMACION (IMAGEN)

Sea una función de una variable real t, definida para $t \geqslant 0$ (a veces consideremos que la función $f(t)$ está definida en un intervalo infinito $-\infty < t < \infty$, pero $f(t) = 0$, cuando $t < 0$). Supongamos que la función $f(t)$ es continua por rozos (segmentos), es decir, tal que en todo intervalo finito tiene un número finito de puntos de discontinuidad de primera especie (véase § 9, capítulo II, tomo I). Para asegurar la existencia de algunas integrales en el intervalo infinito $0 \leqslant t < \infty$, impongamos sobre la función $f(t)$ una limitación adicional. Es decir, supongamos que existen números constantes positivos M y s_0 tales que

$$|f(t)| < Me^{s_0 t} \tag{1}$$

para todo valor de t del intervalo $0 \leqslant t < \infty$.

Examinemos el producto de la función $f(t)$ por la función compleja e^{-pt} de una variable real *) t donde $p = a + ib$ $(a > 0)$ es cierto número complejo

$$e^{-pt} f(t). \tag{2}$$

---

*) Sobre las funciones complejas de una variable real véase § 4, capítulo VII.

La función (2) es también una función compleja de una variable real t:

$$e^{-pt} f(t) = e^{-(a+ib)t} f(t) = e^{-at} f(t)\, e^{-ibt} =$$
$$= e^{-at} f(t) \cos bt - ie^{-at} f(t) \operatorname{sen} bt,$$

Examinemos ahora la integral impropia

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-at} f(t) \cos bt\, dt - i \int_0^\infty e^{-at} f(t) \operatorname{sen} bt\, dt. \tag{3}$$

Mostremos que si la función $f(x)$ satisface a la condición (1) y $a > s_0$, entonces las integrales del segundo miembro de la igualdad (3) existen y la convergencia de las integrales es absoluta. Al principio, evaluemos la primera de estas integrales:

$$\left| \int_0^\infty e^{-at} f(t) \cos bt\, dt \right| \leqslant \int_0^\infty \left| e^{-at} f(t) \cos bt \right| dt <$$
$$< M \int_0^\infty e^{-at} e^{s_0 t}\, dt < M \int_0^\infty e^{-(a-s_0)t}\, dt = \frac{M}{a - s_0}.$$

De modo análogo se evalúa también la segunda integral. Ahora bien, la integral $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$ existe. Esta determina cierta función de p, la cual designemos *) por $F(p)$:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, (dt). \tag{4}$$

La función $F(p)$ se llama transformación de Laplace o transformada L, o bien, simplemente, imagen de la función $f(t)$. La función $f(t)$ se llama función inicial u original. Si $F(p)$ es la imagen de la función $f(t)$, se escribe que

$$F(p) \doteq\!\!> f(t), \tag{5}$$

ó

$$f(t) <\!\!\doteq F(p), \tag{6}$$

ó

$$L\{f(t)\} = F(p). \tag{7}$$

Como veremos, la razón de introducción de las imágenes consiste en que con su ayuda se logra simplificar la solución de muchos

*) La función $f(p)$, cuando $p \neq 0$, es la función de una variable compleja.

problemas, en particular, reducir la solución de ecuaciones diferenciales a las operaciones algebraicas simples para hallar una imagen. Sabiendo la imagen, se puede hallar el original, bien según tablas confeccionadas de antemano «original-imagen», bien según los métodos expuestos a continuación. Surgen las siguientes cuestiones naturales.

Sea dada cierta función $F(p)$. ¿Existe o no una función $f(t)$, para la cual $F(p)$ es su imagen? Sí existe ¿es esta función la única? Con suposiciones determinadas respecto a $F(p)$ y $f(t)$, a ambas cuestiones se da una respuesta positiva. En particular, la unicidad de imagen se establece mediante el siguiente teorema que citemos sin demostración.

Teorema de unicidad. *Si dos funciones continuas $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ tienen la misma imagen L de $F(p)$, entonces estas funciones son idénticamente iguales.*

Este teorema desempeña en lo ulterior un papel muy importante. Efectivamente, si al resolver un problema práctico, hemos determinado, de cierto modo, la imagen de la función desconocida, después, según la imagen hemos hallado la función inicial, entonces, basándonos en el teorema formulado, concluimos que la función hallada es la solución del problema planteado y otras soluciones no existen.

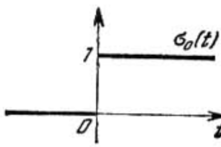

Fig. 379

§ 2. IMAGEN DE LAS FUNCIONES $\sigma_0(t)$, sen t, cos t

I. La función $f(t)$ definida de modo tal que

$$f(t) = 1, \quad \text{cuando} \quad t \geqslant 0$$
$$f(t) = 0, \quad \text{cuando} \quad t < 0,$$

se llama *función unitaria de Heaviside* y se designa por $\sigma(t)$. La gráfica de esta función está representada en la fig. 379. Hallemos la imagen L de la función de Heaviside:

$$L\{\sigma_0(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt}\,dt = -\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

Pues*)

$$1 \risingdotseq \frac{1}{p} \tag{8}$$

---

*) Al calcular la integral $\int_0^\infty e^{-pt}dt$, se puede representarla como suma de integrales de funciones reales; así obtengamos el mismo resultado. Esta observación se refiere también a las dos integrales ulteriores.

o, más precisamente, $\sigma_0(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$.

En algunos tratados del cálculo operacional llaman la imagen de la función $f(t)$ a la expresión

$$F^*(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Con tal definición tenemos: $\sigma_0(t) \risingdotseq 1$, y, por consiguiente, $C \risingdotseq C$, o, más precisamente, $C\,\sigma_0(t) \risingdotseq C$.

II. Sea $f(t) = \operatorname{sen} t$; entonces

$$L\{\operatorname{sen} t\} = \int_0^\infty e^{-pt} \operatorname{sen} t\,dt = \left.\frac{e^{-pt}(-p\operatorname{sen} t - \cos t)}{p^2+1}\right|_0^\infty = \frac{1}{p^2+1}.$$

Pues,

$$\operatorname{sen} t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}. \tag{9}$$

III. Sea $f(t) = \cos t$; entonces

$$L\{\cos t\} = \int_0^\infty e^{-pt} \cos t\,dt = \left.\frac{e^{-pt}(\operatorname{sen} t - p\cos t)}{p^2+1}\right|_0^\infty = \frac{p}{p^2+1}.$$

Pues,

$$\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}. \tag{10}$$

§ 3. IMAGEN DE LA FUNCION CON ESCALA MODIFICADA DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE. IMAGEN DE LAS FUNCIONES sen at, cos at

Examinemos la imagen de la función $f(at)$, donde $a > 0$:

$$L\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(at)\,dt.$$

Sustituyamos la variable en la última integral, poniendo $z = at$; por consiguiente, $dz = a\,dt$; entonces obtenemos:

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{p}{a}z} f(z)\,dz$$

ó

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

De este modo, si

$$F(p) \doteqdot f(t),$$

entonces:

$$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \doteqdot f(at). \tag{11}$$

Ejemplo 1. De la fórmula (9), en virtud de la (11), obtenemos directamente:

$$\operatorname{sen} at \doteqdot \frac{1}{a}\,\frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1}$$

ó

$$\operatorname{sen} at \doteqdot \frac{a}{p^2 + a^2}. \tag{12}$$

Ejemplo 2. De la fórmula (10), en virtud de la (11), tenemos:

$$\cos at \doteqdot \frac{1}{a}\,\frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1}$$

ó

$$\cos at \doteqdot \frac{p}{p^2 + a^2}. \tag{13}$$

§ 4. PROPIEDAD DE LINEALIDAD DE LA IMAGEN

Teorema. *La imagen de una suma de varias funciones multiplicadas por constantes, es igual a la suma de imágenes de estas funciones multiplicadas por constantes correspondientes, es decir, si*

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t) \tag{14}$$

(C_i son constantes) y

$$F(p) \doteqdot f(t), \quad F_i(p) \doteqdot f_i(t),$$

entonces

$$F(p) = \sum_{i=1}^{n} C_i F_i(p). \tag{14'}$$

Demostración. Multiplicando todos los términos de la igualdad (14) por e^{-pt} e integrando respecto a t en los límites de 0 a ∞ (sacando los factores C_i fuera del signo de la integral), obtenemos la igualdad (14').

Ejemplo 1. Hallar la imagen de la función

$$f(t) = 3 \operatorname{sen} 4t - 2\cos 5t.$$

Solución. En virtud de las fórmulas (12), (13) y (15), obtenemos:

$$L\{f(t)\} = 3\frac{4}{p^2+16} - 2\frac{p}{p^2+25} = \frac{12}{p^2+16} - \frac{2p}{p^2+25}.$$

Ejemplo 2. Hallar la función inicial cuya imagen se expresa mediante la fórmula

$$F(p) = \frac{5}{p^2+(2)^2} + \frac{20p}{p^2+(3)^2}.$$

Solución. Interpretemos $F(p)$ de modo siguiente:

$$F(p) = \frac{5}{2}\,\frac{2}{p^2+(2)^2} + 20\,\frac{p}{p^2+(3)^2}.$$

Por consiguiente, según las fórmulas (12), (13), y (14'), obtenemos:

$$f(t) = \frac{5}{2}\operatorname{sen} 2t + 20\cos 3t.$$

Del teorema de unicidad, § 1 se deduce que esta es la única función inicial que corresponde a la $F(p)$ dada.

§ 5. TEOREMA DE DESPLAZAMIENTO

Teorema. *Si $F(p)$ es la imagen de la función $f(t)$, entonces $F(p+\alpha)$ es la imagen de la función $e^{-\alpha t} f(t)$, es decir,*

$$\left.\begin{array}{l} Si\ \ F(p) \doteqdot f(t), \\ entonces\quad F(p+\alpha) \doteqdot e^{-\alpha t} f(t). \end{array}\right\} \tag{15}$$

(Aquí se supone que $\operatorname{Re}(p+\alpha) > s_0$).

Demostración. Hallemos la imagen de la función $e^{-\alpha t} f(t)$:

$$L\{e^{-\alpha t} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt-\alpha t} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(p+\alpha)t} f(t)\,dt.$$

De este modo,

$$L\{e^{-\alpha t}f(t)\} = F(p+\alpha).$$

El teorema demostrado permite ampliar considerablemente la familia de imágenes para las cuales se hallan fácilmente las funciones iniciales.

§ 6. IMAGENES DE LAS FUNCIONES $e^{-\alpha t}$, senh at, cosh αt, $e^{-\alpha t}$ sen at, $e^{-\alpha t}$ cos at

De la fórmula (8), en virtud de las fórmulas (15), se deduce directamente:

$$\frac{1}{p+\alpha} \doteq\!> e^{-\alpha t}. \tag{16}$$

Análogamente

$$\frac{1}{p-\alpha} \doteq\!> e^{\alpha t}. \tag{16'}$$

Sustrayendo de los términos de la correlación (16′) los términos correspondientes de la correlación (16) y dividiendo los resultados de la resta por dos, obtenemos

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{p+\alpha}\right) \doteq\!> \frac{1}{2}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}),$$

ó

$$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2} \doteq\!> \operatorname{senh} \alpha t. \tag{17}$$

Análogamente, sumando (16) y (16′), obtenemos:

$$\frac{p}{p^2-\alpha^2} \doteq\!> \cosh \alpha t. \tag{18}$$

En virtud de las fórmulas (15), de la fórmula (12) se deduce:

$$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2} \doteq\!> e^{-\alpha t} \operatorname{sen} at. \tag{19}$$

A base de la fórmula (15), de la fórmula (13) se deduce:

$$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2} \doteq\!> e^{-\alpha t} \cos at. \tag{20}$$

Ejemplo 1. Hallar la función inicial cuya imagen se da por la fórmula: $F(p)=\frac{7}{p^2+10p+41}$.

Solución. Transformemos $F(p)$ en una expresion semejante a la que se encuentra en el primer miembro de la correlación (19):

$$\frac{7}{p^2+10p+41}=\frac{7}{(p+5)^2+16}=\frac{7}{4}\,\frac{4}{(p+5)^2+4^2}.$$

Pues,

$$F(p)=\frac{7}{4}\,\frac{4}{(p+5)^2+4^2}.$$

Por consiguiente, en virtud de la fórmula (19) tenemos:

$$F(p)\doteq\frac{7}{4}\,e^{-5t}\operatorname{sen}4t.$$

Ejemplo 2. Hallar la función inicial cuya imagen se da por la fórmula

$$F(p)=\frac{p+3}{p^2+2p+10}.$$

Solución. Transformemos la función $F(p)$:

$$\frac{p+3}{p^2+2p+10}=\frac{(p+1)+2}{(p+1)^2+9}=\frac{p+1}{(p+1)^2+3^2}+\frac{2}{(p+1)^2+3^2}=$$
$$=\frac{p+1}{(p+1)^2+3^2}+\frac{2}{3}\,\frac{3}{(p+1)^2+3^2},$$

usando las fórmulas (19) y (20) hallemos la función inicial:

$$F(p)\doteq e^{-t}\cos 3t+\frac{2}{3}\,e^{-t}\operatorname{sen}3t.$$

§ 7. DERIVACION DE LA IMAGEN

Teorema. *Si* $F(p)\doteq f(t)$, *entonces*

$$(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}F(p)\doteq t^nf(t). \tag{21}$$

Demostración. Primero demostremos que si $f(t)$ satisface a la condición (1), entonces la integral

$$\int_0^\infty e^{-pt}(-t)^nf(t)\,dt \tag{22}$$

existe.

Según la hipótesis, $|f(t)|<Me^{s_0t}$, $p=a+ib$, $a>s_0$; con esto, $a>0$, $s_0>0$. Es evidente que se halle $\varepsilon>0$ tal, que se cumplirá la desigualdad $a<s_0+\varepsilon$. Igual que en § 1 se demuestra

que existe la integral

$$\int_0^\infty e^{-(p-\varepsilon)t} \,|\, f(t) \,|\, dt.$$

Evaluemos ahora, la integral (22):

$$\int_0^\infty | e^{-pt} t^n f(t) | \, dt = \int_0^\infty | e^{-(p-\varepsilon)t} e^{-\varepsilon t} t^n f(t) | \, dt.$$

Puesto que la función $e^{-\varepsilon t} t^n$ es acotada y su valor absoluto es menor que cierto número N para cualquier valor de $t > 0$, podemos escribir:

$$\int_0^\infty | e^{-pt} t^n f(t) | \, dt < N \int_0^\infty | e^{-(p-\varepsilon)t} f(t) | \, dt = N \int_0^\infty e^{-(p-\varepsilon)t} \,|\, f(t) \,|\, dt < \infty.$$

De este modo, queda demostrado que la integral (22) existe. Pero podemos considerar esta integral como una derivada de n-ésimo orden respecto al parámetro*) p de la integral

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t) \, dt.$$

Pues, de la fórmula

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) \, dt$$

obtenemos la fórmula

$$\int_0^\infty e^{-pt} (-t)^n f(t) \, dt = \frac{d^n}{dp^n} \int_0^\infty e^{-pt} f(t) \, dt.$$

De estas dos igualdades obtenemos:

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) = \int_C^\infty e^{-pt} t^n f(t),$$

es decir, la fórmula (21).

---

*) Hemos determinado antes la fórmula de derivación de una integral definida respecto a un parámetro real (véase § 10, capítulo XI, tomo I). Aquí, el parámetro p es un número complejo, pero la fórmula de derivación queda válida.

Apliquemos la fórmula (22) para hallar la imagen de la función potencial. Escribamos la fórmula (8):

$$\frac{1}{p} \stackrel{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} 1.$$

De esta fórmula, en virtud de la fórmula (21), obtenemos:

$$(-1)\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) \stackrel{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} t$$

ó

$$\frac{1}{p^2} \stackrel{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} t.$$

Análogamente

$$\frac{2}{p^3} \stackrel{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} t^2.$$

Para cualquier n tenemos:

$$\frac{n!}{p^{n+1}} \stackrel{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} t^n. \tag{23}$$

Ejemplo 1. De la fórmula (véase (12))

$$\frac{a}{p^2+a^2} = \int_0^\infty e^{-pt} \operatorname{sen} at\, dt$$

derivando ambos miembros respecto al parámetro p obtenemos:

$$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2} \stackrel{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} t \operatorname{sen} at. \tag{24}$$

Ejemplo 2. De la fórmula (13), en virtud de la fórmula (21) obtenemos:

$$-\frac{a^2-p^2}{(p^2+a^2)^2} \stackrel{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} t \cos at. \tag{25}$$

Ejemplo 3. En virtud de la fórmula (21), de (16) tenemos:

$$\frac{1}{(p+\alpha)^2} \stackrel{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} te^{-\alpha t}. \tag{26}$$

§ 8. IMAGEN DE LAS DERIVADAS

Teorema. *Si* $F(p) \stackrel{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} f(t)$, *entonces*

$$pF(p) - f(0) \stackrel{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} f'(t). \tag{27}$$

Demostración. Basándose en la definición de la imagen, podemos escribir:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,dt. \tag{28}$$

Supongamos que todas las derivadas $f'(t)$, $f''(t)$, ..., $f^n(t)$, con que encontremos, satisfacen a la condición (1) y, por consiguiente, existe la integral (28), así como las integrales análogas para derivadas ulteriores. Calculando por partes la integral del segundo miembro de la igualdad (28), hallamos:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,dt = e^{-pt} f(t)\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Pero, según la condición (1)

$$\lim_{t\to\infty} e^{-pt} f(t) = 0,$$

y

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = F(p).$$

Por eso:

$$L\{f'(t)\} = -f(0) + pF(p).$$

El teorema queda demostrado. Examinemos ahora la imagen de las derivadas de cualquier orden. Sustituyendo en la fórmula (27) $F(p)$ por la expresión $pF(p) - f(0)$, y $f(t)$, por la expresión $f'(t)$, obtenemos:

$$p[pF(p) - f(0)] - f'(0) \ \dot{\rightarrow}\ f''(t)$$

o, abriendo los corchetes:

$$p^2F(p) - pf(0) - f'(0) \ \dot{\rightarrow}\ f''(t). \tag{29}$$

La imagen para la derivada de n-ésimo orden será:

$$p^nF(p) - [p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \ldots$$
$$\ldots + pf^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)] \ \dot{\rightarrow}\ f^{(n)}(t). \tag{30}$$

Observación. Las fórmulas (27), (29), (30) se simplifican, si $f(0) = f'(0) = \ldots f^{(n-1)}(0) = 0$. En este caso tenemos:

$$F(p) \ \dot{\rightarrow}\ f(t),$$

$$pF(p) \ \dot{\rightarrow}\ f'(t),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p^nF(p) \ \dot{\rightarrow}\ f^{(n)}(t).$$

§ 9. TABLA DE ALGUNAS IMAGENES

Para el uso cómodo de las imágenes obtenidas, reunámoslas en una tabla.

Tabla 1

№№	$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, pt$	$f(t)$
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\operatorname{sen} at$
3	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
4	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
5	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$\operatorname{senh} \alpha t$
6	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	$\cosh \alpha t$
7	$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-\alpha t} \operatorname{sen} at$
8	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-\alpha t} \cos at$
9	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	t^n
10	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$	$t \operatorname{sen} at$
11	$-\frac{a^2-p^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t \cos at$
12	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$
13	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\operatorname{sen} at - at\cos at)$
14	$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p)$	$t^n f(t)$
15	$F_1(p)F_2(p)$	$\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau$

Nota: Las fórmulas 13 y 15 de esta tabla las deduciremos más tarde.

Observación. Si en calidad de imagen de la función $f(t)$ tomamos:

$$F^*(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt,$$

entonces en las fórmulas 1-13 de la tabla las expresiones que se encuentran en la primera columna hay que multiplicarlas por p. Las fórmulas 14 y 15 toman el aspecto siguiente. Puesto que $F^*(p) = pF(p)$, entonces, sustituyendo en el primer miembro de la fórmula 14 $F(p)$ por la expresión $\frac{F^*(p)}{p}$ y multiplicando por p, obtenemos:

14′. $$(-1)^n p\frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{F^*(p)}{p}\right)\doteq t^nf(t).$$

Sustituyendo en el primer miembro de la fórmula 15

$$F_1(p)=\frac{F_1^*(p)}{p},\qquad F_2(p)=\frac{F_2^*(p)}{p}$$

y multiplicando este producto por p, tenemos:

15′. $$\frac{1}{p}F_1^*(p)\,F_2^*(p)\doteq\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau.$$

§ 10. ECUACION AUXILIAR PARA LA ECUACION DIFERENCIAL DADA

Supongamos que tenemos una ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden con coeficientes constantes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$:

$$a_0\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx(t)=f(t). \qquad (31)$$

Es preciso hallar la solución de esta ecuación $x = x(t)$ para $t \geqslant 0$, que satisface a las condiciones iniciales:

$$x(0)=x_0,\quad x'(0)=x_0',\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}. \qquad (32)$$

Antes hemos resuelto el problema planteado del modo siguiente: hemos hallado la solución general de la ecuación (31) que contiene n constantes arbitrarias; después hemos determinado las constantes de modo que se satisfagan las condiciones iniciales (32).

Ahora expondremos un método más sencillo de solución de este problema, el método de cálculo operacional. Hallemos la imagen L

de la solución $x(t)$ de la ecuación (31) que satisface a las condiciones (32). Designemos esta imagen L por $\bar{x}(p)$; de modo que $\bar{x}(p) \doteq x(t)$.

Supongamos que existen las imágenes de la solución de la ecuación (31) y de sus derivadas hasta el orden n (después de hallar la solución, podemos comprobar que esta suposición es válida).

Multipliquemos todos los términos de la igualdad (31) por e^{-pt}, donde $p = a + ib$, e integremos respecto a t en los límites de 0 a ∞:

$$a_0 \int_0^\infty e^{-pt} \frac{d^n x}{dt^n} dt + a_1 \int_0^\infty e^{-pt} \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} dt + \ldots + a_n \int_0^\infty e^{-pt} x(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt. \qquad (33)$$

En el primer miembro de la igualdad se encuentran las imágenes L de la función $x(t)$ y sus derivadas, en el segundo, la imagen L de la función $f(t)$ que designemos por $F(p)$. Por consiguiente, se puede escribir la igualdad (33) en la forma:

$$a_0 L\left\{\frac{d^n x}{dt^n}\right\} + a_1 L\left\{\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right\} + \ldots + a_n L\{x(t)\} = L\{f(t)\}.$$

Sustituyendo en esta igualdad las imágenes de la función y de sus derivadas por las expresiones (27), (29), (30), obtenemos:

$$\begin{aligned} a_0 \{p^n \bar{x}(p) - [p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x_0' + p^{n-3}x_0'' + \ldots + x_0^{(n-1)}]\} &+ \\ + a_1 \{p^{n-1}\bar{x}(p) - [p^{n-2}x_0 + p^{n-3}x_0' + \ldots + x_0^{(n-2)}]\} &+ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ + a_{n-1}\{p\bar{x}(p) - [x_0]\} + a_n \bar{x}(p) = F(p).& \qquad (34) \end{aligned}$$

La ecuación (34) se llama *ecuación auxiliar* o la *ecuación de imagen*. En esta ecuación la incógnita es la imagen $\bar{x}(p)$, la cual desde ésta se determina. Transformémosla dejando en el primer miembro los términos que contienen $\bar{x}(p)$:

$$\begin{aligned} \bar{x}(p)[a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n] &= \\ = a_0[p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x_0' + \ldots + x_0^{(n-1)}] &+ \\ + a_1[p^{n-2}x_0 + p^{n-3}x_0' + \ldots + x_0^{(n-2)}] &+ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ + a_{n-2}[px_0 + x_0'] + a_{n-1}[x_0] + F(p).& \qquad (34') \end{aligned}$$

El coeficiente de $\bar{x}(p)$ en el primer miembro de la igualdad (34′) es un polinomio de p de n-ésimo grado que se obtiene si en el primer miembro de la ecuación (31) en vez de las derivadas ponemos las potencias respectivas de p. Designémoslo por $\varphi_n(p)$:

$$\varphi_n(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n. \qquad (35)$$

El segundo miembro de la ecuación (34′) se compone del modo siguiente:

el coeficiente a_{n-1} se multiplica por x_0,

el coeficiente a_{n-2} se multiplica por $px_0 + x_0'$,

. . . .

el coeficiente a_1 se multiplica por $p^{n-2}x_0 + p^{n-3}x_0' + \ldots + x_0^{(n-2)}$,

el coeficiente a_0 se multiplica por $p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x_0' + \ldots + x_0^{(n-1)}$.

Todos estos productos se suman. Se adiciona además la imagen del segundo miembro de la ecuación diferencial $F(p)$. Todos los términos del segundo miembro de la igualdad (34′), a excepción de $F(p)$, después de reducir los términos semejantes, forman un polinomio de p de $(n-1)$-ésimo grado con coeficientes conocidos. Designémoslo por $\psi_{n-1}(p)$. De este modo, la ecuación (34′) podemos escribirla en la forma:

$$\bar{x}(p)\,\varphi_n(p) = \psi_{n-1}(p) + F(p).$$

De esta ecuación determinamos $\bar{x}(p)$:

$$\bar{x}(p) = \frac{\psi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)} + \frac{F(p)}{\varphi_n(p)}. \qquad (36)$$

Pues, $\bar{x}(p)$ determinado de este modo es la imagen de la solución $x(t)$ de la ecuación (31) que satisface a las condiciones iniciales (32). Si ahora hallamos la función $x^*(t)$, cuya imagen es la funcion $\bar{x}(p)$ determinada por la igualdad (36), entonces, en virtud del teorema de unicidad, formulado en § 1, se deduce que $x^*(t)$ es la solución de la ecuación (31) que satisface a las condiciones (32), es decir,

$$x^*(t) = x(t).$$

Si hallamos la solución de la ecuación (31) para condiciones iniciales nulas: $x_0 = x_0' = x_0'' = \ldots x_0^{(n-1)} = 0$, entonces en la igualdad (36) $\psi_{n-1}(p) = 0$, y ésta toma la forma:

$$\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{\varphi_n(p)}$$

ó

$$\bar{x}(p)=\frac{F(p)}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n}. \tag{36'}$$

Ejemplo 1. Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{dx}{dt}+x=1,$$

que satisface a las condiciones: para $t=0$, $x=0$.

Solución. Formemos la ecuación auxiliar

$$\bar{x}(p)(p+1)=0+\frac{1}{p} \text{ ó } \bar{x}(p)=\frac{1}{(p+1)p}.$$

Descomponiendo la fracción del segundo miembro en las fracciones elementales, obtenemos:

$$\bar{x}(p)\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}.$$

Usando las fórmulas 1 y 4 de la tabla 1, hallamos la solución:

$$x(t)=1-e^{-t}.$$

Ejemplo 2. Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2}+9x=1,$$

que satisface a las condiciones iniciales: $x_0=x_0'=0$, para $t=0$.

Solución. Escribamos la ecuación auxiliar (34')

$$\bar{x}(p)(p^2+9)=\frac{1}{p} \text{ ó } \bar{x}(p)=\frac{1}{p(p^2+9)}.$$

Descomponiendo esta fracción en las fracciones elementales, obtenemos:

$$\bar{x}(p)=\frac{-\frac{1}{9}p}{p^2+9}+\frac{\frac{1}{9}}{p}.$$

Basándonos en las fórmulas 1 y 3 de la tabla 1, hallamos la solución:

$$x(t)=-\frac{1}{9}\cos 3t+\frac{1}{9}.$$

Ejemplo 3. Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=t,$$

que satisface a las condiciones iniciales: para $t=0$, $x_0=x_0'=0$.

Solución. Escribamos la ecuación auxiliar (34')

$$\bar{x}(p)(p^2+3p+2)=\frac{1}{p^2}$$

ó

$$\bar{x}(p)=\frac{1}{p^2}\,\frac{1}{(p^2+3p+2)}=\frac{1}{p^2(p+1)(p+2)}\,.$$

Descomponiendo esta fracción en las fracciones elementales por el método de coeficientes indefinidos, obtenemos:

$$\bar{x}(p)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{p^2}-\frac{3}{4}\,\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{4(p+2)}\,.$$

Según las fórmulas 9, 1 y 4 de la tabla 1 hallamos la solución:

$$x(t)=\frac{1}{2}\,t-\frac{3}{4}+e^{-t}-\frac{1}{4}\,e^{-2t}.$$

Ejemplo 4. Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\,\frac{dx}{dt}+5x=\operatorname{sen} t$$

que satisface a las condiciones: $x_0=1$, $x_0'=2$, para $t=0$.

Solución. Escribamos la ecuación auxiliar (34′)

$$\bar{x}(p)(p^2+2p+5)=p\cdot 1+2+2\cdot 1+L\{\operatorname{sen} t\}$$

ó

$$\bar{x}(p)(p^2+2p+5)=p+4+\frac{1}{p^2+1}\,,$$

de donde hallamos $\bar{x}(p)$:

$$\bar{x}(p)=\frac{p+4}{p^2+2p+5}+\frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+5)}\,.$$

Descomponiendo la última fracción del segundo miembro en las fracciones elementales, podemos escribir:

$$\bar{x}(p)=\frac{\frac{11}{10}\,p+4}{p^2+2p+5}+\frac{-\frac{1}{10}\,p+\frac{1}{5}}{p^2+1}$$

ó

$$\bar{x}(p)=\frac{11}{10}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}+\frac{29}{10\cdot 2}\cdot\frac{2}{(p+1)^2+2^2}-\frac{1}{10}\cdot\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2+1}\,.$$

En virtud de las fórmulas 8, 7, 3 y 2 de la tabla 1, obtenemos la solución:

$$x(t)=\frac{11}{10}\,e^{-t}\cos 2t+\frac{29}{20}\,e^{-t}\operatorname{sen} 2t-\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{5}\operatorname{sen} t$$

o, en definitiva:

$$x(t)=e^{-t}\left(\frac{11}{10}\cos 2t+\frac{29}{20}\operatorname{sen} 2t\right)-\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{5}\operatorname{sen} t.$$

§ 11. TEOREMA DE DESCOMPOSICION

De la fórmula (36) del párrafo anterior se deduce que la imagen de la solución de la ecuación diferencial lineal consta de dos términos: el primero es una fracción racional propia de p, el segundo es una fracción, cuyo numerador es la imagen del segundo miembro de la ecuación $F(p)$, y el denominador, el polinomio $\varphi_n(p)$. Si $F(p)$ es una fracción racional, entonces el segundo término es también una fracción racional. De este modo, hay que saber hallar la función inicial cuya imagen es una fracción racional propia. Examinemos este problema en el presente párrafo. Sea la imagen L de cierta función una fracción racional propia de p:

$$\frac{\psi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)}.$$

Es preciso hallar la función inicial (original). En § 7, capítulo X, tomo I hemos mostrado que toda fracción racional propia se puede representar en forma de una suma de fracciones elementales de cuatro tipos:

I. $\dfrac{A}{p-a}$,

II. $\dfrac{A}{(p-a)^k}$,

III. $\dfrac{Ap+B}{p^2+a_1p+a^2}$ donde las raíces del denominador son complejas, es decir, $\dfrac{a_1^2}{4}-a_2<0$,

IV. $\dfrac{Ap+B}{(p^2+a_1p+a_2)^k}$, donde las raíces del denominador son complejas, es decir, $k \geqslant 2$.

Hallemos las funciones iniciales para las fracciones elementales escritas. Para la fraccion de tipo I en virtud de la fórmula 4 de la tabla 1, obtenemos:

$$\frac{A}{p-a} \xrightarrow{\cdot} Ae^{at}.$$

Para la fracción de tipo II en virtud de las fórmulas 9 y 4 de la tabla 1 obtenemos:

$$\frac{A}{(p-a)^k} \xrightarrow{\cdot} A\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{at}. \tag{37}$$

Examinemos ahora la fracción de tipo III. Efectuemos las transformaciones idénticas:

$$\frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2}=\frac{Ap+B}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2}=$$

$$=\frac{A\left(p+\frac{a_1}{2}\right)+\left(B-\frac{Aa_1}{2}\right)}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2}=A\frac{p+\frac{a_1}{2}}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2}+$$

$$+\left(B-\frac{Aa_1}{2}\right)\frac{1}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2}.$$

Designando aquí los sumandos primero y segundo por M y N respectivamente, obtenemos en virtud de las fórmulas 8 y 7 de la tabla 1:

$$M \doteq\!\!> Ae^{-\frac{a_1}{2}t}\cos t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}},$$

$$N \doteq\!\!> \left(B-\frac{Aa_1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}e^{-\frac{a_1}{2}t}\operatorname{sen} t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}.$$

De este modo, en definitiva tenemos:

$$\frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2}\doteq\!\!>$$

$$\doteq\!\!> e^{-\frac{a_1}{2}t}\left[A\cos t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}+\frac{B-\frac{Aa_1}{2}}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}\operatorname{sen} t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right]. \quad (38)$$

Aquí no examinamos el caso de una fracción elemental de tipo IV, puesto que esto está relacionado con numerosos cálculos. Para algunos casos particulares examinaremos este problema más abajo.

§ 12. EJEMPLOS DE SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR EL METODO OPERACIONAL

Ejemplo 1. Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4x=\operatorname{sen} 3x,$$

que satisface a las condiciones iniciales: $x_0=0$, $x'_0=0$, cuando $t=0$.

Solución. Formemos la ecuación auxiliar (34')

$$\bar{x}(p)(p^2+4)=\frac{3}{p^2+9}, \quad \bar{x}(p)=\frac{3}{(p^2+9)(p^2+4)}$$

ó

$$\bar{x}(p)=\frac{-\frac{3}{5}}{p^2+9}+\frac{\frac{3}{5}}{p^2+4}=-\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{p^2+9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{p^2+4},$$

de donde obtenemos la solución:

$$x(t)=\frac{3}{10}\operatorname{sen} 2t-\frac{1}{5}\operatorname{sen} 3t.$$

Ejemplo 2. Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{d^3x}{dt^3}+x=0,$$

que satisface a las condiciones iniciales: $x_0=1$, $x'_0=3$, $x''_0=8$, cuando $t=0$.

Solución. Formemos la ecuación auxiliar (34')

$$\bar{x}(p)(p^3+1)=p^2\cdot 1+p\cdot 3+8,$$

hallamos:

$$\bar{x}(p)=\frac{p^2+3p+8}{p^3+1}=\frac{p^2+3p+8}{(p+1)(p^2-p+1)}.$$

Descomponemos la fracción racional obtenida en las fracciones elementales

$$\frac{p^2+3p+8}{(p+1)(p^2-p+1)}=\frac{2}{p+1}+\frac{-p+6}{p^2-p+1}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{p-\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}+\frac{11}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Usando la tabla 1, escribamos la solución:

$$x(t)=2e^{-t}+e^{\frac{1}{2}t}\left(-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{11}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Ejemplo 3. Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=t\cos 2t,$$

que satisface a las condiciones iniciales: $x=0$, $x_0'=0$, cuando $t=0$.

Solución. Escribamos la ecuación auxiliar (34′)

$$\bar{x}(p)(p^2+1)=\frac{1}{p^2+4}-\frac{8}{(p^2+4)^2},$$

de donde:

$$\bar{x}(p)=-\frac{5}{9}\frac{1}{p^2+1}+\frac{5}{9}\frac{1}{p^2+4}+\frac{8}{3}\frac{1}{(p^2+4)^2}.$$

Por consiguiente,

$$x(t)=-\frac{5}{9}\operatorname{sen}t+\frac{5}{18}\operatorname{sen}2t+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}2t-t\cos 2t\right).$$

Es evidente que aprovechando el método operacional se puede resolver también los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Mostrémoslo en un ejemplo.

Ejemplo 4. Hallar la solución del sistema de ecuaciones

$$3\frac{dx}{dt}+2x+\frac{dy}{dt}=1,$$
$$\frac{dx}{dt}+4\frac{dy}{dt}+3y=0,$$

que satisface a las condiciones iniciales: $x=0$, $y=0$, cuando $t=0$.

Solución. Designemos $x(t)\doteq\bar{x}(p)$, $y(t)\doteq\bar{y}(p)$, y escribamos un sistema de ecuaciones auxiliares:

$$(3p+2)\bar{x}(p)+p\bar{y}(p)=\frac{1}{p},$$
$$p\bar{x}(p)+(4p+3)\bar{y}(p)=0.$$

Resolviendo este sistema, hallamos:

$$\bar{x}(p)=\frac{4p+3}{p(p+1)(11p+6)}=\frac{1}{2p}-\frac{1}{5(p+1)}-\frac{1}{10(11p+6)},$$
$$\bar{y}(p)=-\frac{1}{(11p+6)(p+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{p+1}-\frac{11}{11p+6}\right).$$

Según las imágenes hallamos las funciones iniciales, es decir, las soluciones buscadas del sistema:

$$x(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}e^{-t}-\frac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t},$$
$$y(t)=\frac{1}{5}\left(e^{-t}-e^{-\frac{6}{11}t}\right),$$

Análogamente se resuelven los sistemas lineales de órdenes superiores.

§ 13. TEOREMA DE CONVOLUCION

Al resolver ecuaciones diferenciales por el método operacional, puede ser útil el teorema siguiente.

Teorema de convolución. *Si $F_1(p)$ y $F_2(p)$ son imágenes de las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$, es decir,*

$$F_1(p) \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}}} f_1(t) \quad \text{y} \quad F_2(p) \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}}} f_2(t),$$

entonces $F_1(p)\,F_2(p)$ es la imagen de la función

$$\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau,$$

es decir

$$F_1(p)\,F_2(p) \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}}} \int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau. \tag{39}$$

Demostración. Hallemos la imagen de la función

$$\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau,$$

partiendo de la definición de la imagen:

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau\right\} = \int_0^\infty e^{-pt}\left[\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau\right] dt.$$

La integral de segundo miembro es la integral iterada de segundo orden que se toma por el dominio limitado por las rectas $\tau = 0$, $\tau = t$ (fig. 380). Cambiemos el orden de integración en esta integral; entonces obtenemos:

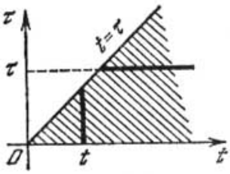

Fig. 380

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau\right\} =$$

$$\int_0^\infty \left[f_1(\tau)\int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau)\, dt\right] d\tau.$$

Sustituyendo la variable $t - \tau = z$ en la integral interior, tenemos:

$$\int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau)\, dt = \int_0^\infty e^{-p(z+\tau)} f_2(z)\, dz = e^{-p\tau}\int_0^\infty e^{-pz} f_2(z)\, dz =$$
$$= e^{-p\tau} F_2(p).$$

Por consiguiente,

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau\right\} = \int_0^\infty f_1(\tau)\, e^{-p\tau} F_2(p)\, d\tau =$$
$$= F_2(p)\int_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\tau)\, d\tau = F_2(p)\, F_1(p).$$

Pues,

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau \leftarrow F_1(p) F_2(p).$$

Esto es la fórmula 15 de la tabla 1.

Observación 1. La expresión $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau$ se llama *convolución* (*resultante*) de dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$. La operación para obtener un resultante se llama *convolución* de dos funciones; en este caso

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\,d\tau.$$

Al sustituir la variable $t-\tau=z$ en la integral derecha podemos determinar que la última igualdad es válida.

Ejemplo. Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=f(t),$$

que satisface a las condiciones iniciales: $x_0=x_0'=0$, cuando $t=0$.

Solución. Escribamos la ecuación auxiliar (34') $\bar{x}(p)(p^2+1)=F(p)$, donde $F(p)$ es la imagen de la función $f(t)$. Por consiguiente, $\bar{x}(p)=\frac{1}{p^2+1}F(p)$, pero $\frac{1}{p^2+1} \rightarrow \operatorname{sen} t$, y $F(p) \rightarrow f(t)$.

Aplicando la fórmula de convolución (39) y designando $\frac{1}{p^2+1}=F_2(p)$, $F(p)=F_1(p)$, obtenemos:

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)\operatorname{sen}(t-\tau)\,d\tau. \tag{40}$$

Observación 2. En virtud del teorema de convolución es fácil hallar la imagen de la integral de la función dada, si es conocida la imagen de esta última; es decir, si $F(p) \rightarrow f(t)$, entonces:

$$\frac{1}{p}F(p) \rightarrow \int_0^t f(\tau)\,d\tau. \tag{41}$$

En efecto, si designamos

$$f_1(t)=f(t),\quad f_2(t)=1,\quad \text{entonces;}\quad F_1(p)=F(p),\quad F_2(p)=\frac{1}{p}.$$

Sustituyendo estas funciones en la fórmula (39), obtenemos la fórmula (41).

§ 14. ECUACIONES DIFERENCIALES DE OSCILACIONES MECANICAS. ECUACIONES DIFERENCIALES DE LA TEORIA DE CIRCUITOS ELECTRICOS

De la mecánica se sabe que las oscilaciones de un punto material de masa m se describen por la ecuación *):

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{1}{m}f_1(t); \tag{42}$$

aquí, x es la desviación del punto desde cierta posición; k, rigidez de un sistema elástico, por ejemplo, muelle (ballesta); la fuerza de resistencia al movimiento es proporcional (con coeficiente de proporcionalidad λ) al primer grado de la velocidad; $f_1(t)$ es la fuerza exterior o perturbadora.

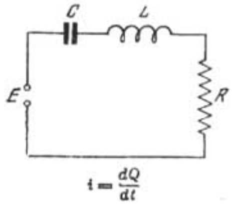

Fig. 381

Resolviendo la ecuación de la forma (42), se describen las oscilaciones pequeñas también de otros sistemas mecánicos que tienen un grado de libertad, por ejemplo, oscilaciones torsionales del volante sobre un árbol elástico, si x es el ángulo de giro del volante; m, momento de inercia del volante; k, rigidez torsional del árbol y $mf_1(t)$, momento de fuerzas exteriores respecto al eje de rotación. Las ecuaciones de la forma (42) describen no sólo oscilaciones mecánicas, sino también los fenómenos en los circuitos eléctricos.

Supongamos que tenemos un circuito eléctrico, compuesto por la inductancia L, resistencia R y capacidad C, al cual es aplicada una f.e.m. E (fig. 381). Designemos por i la corriente en el circuito; por Q, la carga del condensador; entonces, como es sabido de la electrotecnia, i y Q satisfacen a las siguientes ecuaciones:

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{Q}{C}=E, \tag{43}$$

$$\frac{dQ}{dt}=i. \tag{44}$$

De la ecuación (44) obtenemos:

$$\frac{d^2Q}{dt^2}=\frac{di}{dt}. \tag{44'}$$

*) Véase, por ejemplo, tomo II, capítulo XIII, § 26, donde hemos obtenido la ecuación semejante, al examinar la oscilación de una carga sobre una ballesta.

Introduciendo (44) y (44') en la ecuación (43), obtenemos para Q una ecuación de la forma (42):

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=E. \tag{45}$$

Derivando ambos miembros de la ecuación (43) y aplicando la ecuación (44), obtenemos la ecuación para determinar la corriente i:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{dE}{dt}. \tag{46}$$

Las ecuaciones (45) y (46) son de la forma (42).

§ 15. SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE OSCILACIONES

Escribamos la ecuación de oscilaciones en la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_2x=f(t), \tag{47}$$

donde el sentido mecánico o físico de la función desconocida x, los coeficientes a_1, a_2 y la función $f(t)$ se determina fácilmente, comparando esta ecuación con las (42), (45), (46). Hallemos la solución de la ecuación (47), que satisface a las condiciones iniciales: $x=x_0$, $x=x_0'$, cuando $t=0$.

Formemos la ecuación auxiliar para (47):

$$\bar{x}(p)(p^2+a_1p+a_2)=x_0p+x_0'+a_1x_0+F(p), \tag{48}$$

donde $F(p)$ es la imagen de la función $f(t)$. De la igualdad (48) hallamos:

$$\bar{x}(p)=\frac{x_0p+x_0'+a_1x_0}{p^2+a_1p+a_2}+\frac{F(p)}{p^2+a_1p+a_2}. \tag{49}$$

Así, para la solución $Q(t)$ de la ecuación (45) que satisface a las condiciones iniciales: $Q=Q_0$, $Q'=Q_0'$, cuando $t=0$, la imagen tendrá la forma:

$$\overline{Q}(p)=\frac{L(Q_0p+Q_0')+RQ_0}{Lp^2+Rp+\frac{1}{C}}+\frac{\bar{E}(p)}{Lp^2+Rp+\frac{1}{C}}.$$

El carácter de la solución depende en gran medida de que las raíces del trinomio $p^2 + a_1p + a_2$ sean complejas, o bien reales distintas, o bien reales iguales. Examinemos detalladamente el caso en que las raíces del trinomio son complejas, es decir, cuando $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2 < 0$. Los demás casos se examinan análogamente.

Puesto que la imagen de una suma de dos funciones es igual a la suma de sus imágenes, entonces, en virtud de la fórmula (38), la función inicial para la primera fracción que se encuentra en el segundo miembro de (49) toma la forma:

$$\frac{x_0p + x_0' + a_1x_0}{p^2 + a_1p + a_2} \doteq e^{-\frac{a_1}{2}t}\left[x_0 \cos t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} + \right.$$

$$\left. + \frac{x_0' + \frac{x_0a_1}{2}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \operatorname{sen} t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\right]. \qquad (50)$$

Hallemos ahora la función inicial que corresponde a la fracción:

$$\frac{F(p)}{p^2 + a_1p + a_2}.$$

Aquí apliquemos el teorema de convolución, tomando en consideración que

$$\frac{1}{p^2 + a_1p + a_2} \doteq \frac{e^{-\frac{a_1}{2}t}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \operatorname{sen} t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}, \quad F(p) \doteq f(t).$$

Por consiguiente, según la fórmula (39) obtenemos:

$$\frac{F(p)}{p^2 + a_1p + a_2} \doteq$$

$$\doteq \frac{1}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \int_0^t f(\tau)\, e^{-\frac{a_1}{2}(t-\tau)} \operatorname{sen}(t-\tau) \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\, d\tau. \qquad (51)$$

Pues, teniendo en cuenta (50) y (51) de (49), obtenemos:

$$x(t)=e^{-\frac{a_1}{2}t}\left[x_0\cos t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}+\frac{x_0'+\frac{x_0a_1}{2}}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}\operatorname{sen} t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right]+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}\int_0^t f(\tau)\,e^{-\frac{a_1}{2}(t-\tau)}\operatorname{sen}(t-\tau)\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\,d\tau. \quad (52)$$

Si la fuerza exterior $f(t)\equiv 0$, es decir, si tenemos oscilaciones mecánicas o eléctricas libres, entonces la solución se expresa por el primer sumando del segundo miembro de la expresión (52). Si los datos iniciales son iguales a cero: $x_0=x_0'=0$, la solución se expresa por el segundo sumando del segundo miembro de la igualdad (52). Examinemos más detalladamente estos casos.

§ 16. INVESTIGACION DE LAS OSCILACIONES LIBRES

Supongamos que la ecuación (47) describe las *oscilaciones libres*, es decir, $f(t)\equiv 0$. Introduzcamos, para simplificar la escritura de las fórmulas, las designaciones: $a_1=2n$, $a_2=k^2$, $k_1^2=k^2-n^2$. Entonces la ecuación (47) toma la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=0. \quad (53)$$

La solución de esta ecuación x_{IIb}, que satisface a las condiciones iniciales: $x=x_0$, $x'=x_0'$ cuando $t=0$, se da por la fórmula (50) o por el primer sumando de la fórmula (52):

$$x_{\text{IIb}}(t)=e^{-nt}\left[x_0\cos k_1t+\frac{x_0'+x_0n}{k_1}\operatorname{sen} k_1t\right]. \quad (54)$$

Designemos $x_0=a$, $\frac{x_0'+x_0n}{k_1}=b$. Es evidente que para a y b cualesquiera se puede elegir M y δ tales, que $a=M\operatorname{sen}\delta$, $b=M\cos\delta$, siendo $M^2=a^2+b^2$, $\operatorname{tg}\delta=a/b$. Escribamos la fórmula (54) del modo siguiente:

$$x_{\text{IIb}}=e^{-nt}[M\cos k_1t\operatorname{sen}\delta+M\operatorname{sen} k_1t\cos\delta],$$

o, definitivamente, podemos escribir la solución en la forma:

$$x_{\text{IIb}}=\sqrt{a^2+b^2}\,e^{-nt}\operatorname{sen}(k_1t+\delta). \quad (55)$$

La solución (55) corresponde a las *oscilaciones que se amortiguan*.

Si $2n = a_1 = 0$, es decir, si no hay rozamiento interno, la solución tendrá la forma:

$$x_{IIb} = \sqrt{a^2 + b^2}\,\mathrm{sen}\,(k_1 t + \delta).$$

En este caso tienen lugar las *oscilaciones armónicas* (En el tomo II, capítulo XIII, § 27, en las figs. 270 y 271 se dan las gráficas de las oscilaciones armónicas y amortiguadas).

§ 17. INVESTIGACION DE LAS OSCILACIONES MECANICAS Y ELECTRICAS EN CASO DE APLICACION DE UNA FUERZA PERIODICA EXTERIOR

Al estudiar las oscilaciones elásticas de los sistemas mecánicos, y, en particular, al estudiar las oscilaciones eléctricas, hay que examinar diferentes tipos de fuerza exterior $f(t)$. Examinemos detalladamente el caso de una fuerza periódica exterior. Sea la ecuación (47) de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = A\,\mathrm{sen}\,\omega t. \tag{56}$$

Para aclarar el carácter del movimiento es suficiente examinar el caso de $x_0 = x_0' = 0$. Podemos obtener la solución de la ecuación mediante la fórmula (52), pero, desde el punto de vista metodológico, aquí es más cómodo *obtener la solución, ejecutando todos los cálculos intermedios*.

Escribamos la ecuación de imagen:

$$\bar{x}(p)(p^2 + 2np + k^2) = A\frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

de donde obtenemos

$$\bar{x}(p) = \frac{A\omega}{(p^2 + 2np + k^2)(p^2 + \omega^2)}. \tag{57}$$

Examinemos el caso de $2n \neq 0$ $(n^2 < k^2)$. Descompongamos la fracción del segundo miembro en fracciones elementales:

$$\frac{A\omega}{(p^2 + 2np + k^2)(p^2 + \omega^2)} = \frac{Np + B}{p^2 + 2np + k^2} + \frac{Cp + D}{p^2 + \omega^2}. \tag{58}$$

Determinemos las constantes B, C, D por el método de coeficientes indefinidos. Aprovechando la fórmula (38), de la (57) hallemos la función inicial:

$$x(t) = \frac{A}{(k^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}\left\{(k^2-\omega^2)\operatorname{sen}\omega t - 2n\omega\cos\omega t + \right.$$

$$\left. + e^{-nt}\left[(2n^2-k^2+\omega^2)\frac{\omega}{k_1}\operatorname{sen}k_1t + 2n\omega\cos k_1t\right]\right\}; \qquad (59)$$

aquí, de nuevo $k_1 = \sqrt{k^2-n^2}$. Esta es la solución de la ecuación (56) que satisface a las condiciones iniciales: $x_0 = x_0' = 0$, cuando $t = 0$.

Examinemos un caso particular, cuando $2n = 0$. Esto corresponde a que, por ejemplo, en un sistema mecánico no hay resistencia interior, o sea, falta el amortiguador. Para el caso de un circuito eléctrico esto corresponde a que $R = 0$, es decir, no hay resistencia interior en el circuito. Entonces la ecuación (56) toma la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = A\operatorname{sen}\omega t, \qquad (60)$$

y la solución de esta ecuación que satisface a las condiciones: $x_0 = x_0' = 0$, cuando $t = 0$, se obtiene, si en la fórmula (59) ponemos $n = 0$:

$$x(t) = \frac{A}{(k^2-\omega^2)k}[-\omega\operatorname{sen}kt + k\operatorname{sen}\omega t]. \qquad (61)$$

Aquí tenemos la suma de dos oscilaciones armónicas: propias, con frecuencia k:

$$x_p(t) = -\frac{A}{k^2-\omega^2}\frac{\omega}{k}\operatorname{sen}kt$$

y forzadas, con frecuencia ω:

$$x_f(t) = \frac{A}{k^2-\omega^2}\operatorname{sen}\omega t.$$

Para el caso de $k \gg \omega$ el carácter de oscilaciones está representado en la fig. 382.

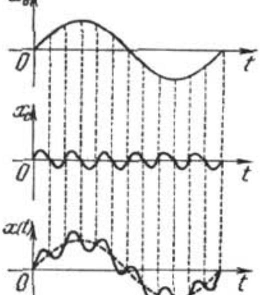

Fig. 382

Regresemos de nuevo a la fórmula (59). Si $2n > 0$, lo que tiene lugar en los sistemas mecánicos y eléctricos examinados, entonces el término que contiene el factor e^{-nt}, que representa oscilaciones amortiguadas propias, va decreciendo rápidamente, cuando t crece. Con t bastante grande el carácter de las oscilaciones se determina por el término que no contiene el factor e^{-nt}, es decir, por el término:

$$x(t) = \frac{A}{(k^2-\omega^2)+4n^2\omega^2}\left\{(k^2-\omega^2)\operatorname{sen}\omega t - 2n\omega\cos\omega t\right\}. \quad (62)$$

Introduzcamos las designaciones:

$$\frac{A(k^2-\omega^2)}{(k^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2} = M\cos\delta; \quad -\frac{A\cdot 2n\omega}{(k^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2} = M\operatorname{sen}\delta, \quad (63)$$

donde

$$M = \frac{A}{\sqrt{(k^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}}.$$

Se puede escribir la solución (62) del modo siguiente:

$$x(t) = \frac{M}{k^2\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{k^2}\right)^2+4n^2\frac{\omega^2}{k^2}}}\operatorname{sen}(\omega t+\delta). \quad (64)$$

De la fórmula (64) se deduce que la frecuencia k de oscilaciones forzadas coincide con la frecuencia ω de la fuerza exterior. Si la resistencia interior que se caracteriza por el número n, es pequeña y la frecuencia ω es próxima a la frecuencia k, entonces la amplitud de oscilaciones puede ser hecha tan grande como se quiera, puesto que el denominador puede ser arbitrariamente pequeño. Para $n=0$, $\omega^2=k^2$; la solución no se expresa por la fórmula (64).

§ 18. SOLUCION DE LA ECUACION DE OSCILACIONES EN CASO DE RESONANCIA

Examinemos un caso particular, cuando $a_1 = 2n = 0$, es decir, cuando no hay resistencia y la frecuencia de la fuerza exterior coincide con la frecuencia de oscilaciones propias $k=\omega$. En este caso la ecuación toma la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = A\operatorname{sen}kt. \quad (65)$$

Hallemos la solución de esta ecuación que satisface a las condiciones iniciales: $x_0 = 0$, $x'_0 = 0$, cuando $t = 0$. La ecuación auxiliar será:

$$\bar{x}(p)(p^2 + k^2) = A\frac{k}{p^2 + k^2},$$

de donde

$$\bar{x}(p) = \frac{Ak}{(p^2 + k^2)^2}. \tag{66}$$

Hemos obtenido una fracción racional propia de tipo IV, que no habíamos examinado en forma general. A fin de hallar la función inicial para la imagen (66), aprovechemos el siguiente procedimiento. Escribamos la identidad (fórmula 2 de la tabla 1)

$$\frac{k}{p^2 + k^2} = \int_0^\infty e^{-pt} \operatorname{sen} kt\, dt. \tag{67}$$

Derivemos *) ambos miembros de esta igualdad respecto a k:

$$\frac{1}{p^2 + k^2} - \frac{2k^2}{(p^2 + k^2)^2} = \int_0^\infty e^{-pt} t \cos kt\, dt.$$

Usando la igualdad (67), podemos escribirla en la forma:

$$-\frac{2k^2}{(p^2 + k^2)^2} = \int_0^\infty e^{-pt}\left[t\cos kt - \frac{1}{k}\operatorname{sen} kt\right] dt.$$

De donde se deduce directamente:

$$\frac{Ak}{(p^2 + k^2)^2} \stackrel{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} \frac{A}{2k}\left(\frac{1}{k}\operatorname{sen} kt - t\cos kt\right)$$

(de esta fórmula se obtiene la 13 de la tabla 1). Pues, la solución buscada de la ecuación (65) es:

$$x(t) = \frac{A}{2k}\left(\frac{1}{k}\operatorname{sen} kt - t\cos kt\right). \tag{68}$$

---

*) La integral del segundo miembro, se puede representar en forma de una suma de dos integrales de una variable real, cada una de las cuales depende del parámetro k.

Estudiemos el segundo sumando de esta solución

$$x_2(t) = -\frac{A}{2k} t \cos kt; \tag{68'}$$

al aumentar t, esta magnitud no es acotada. La amplitud de oscilaciones que corresponden a la fórmula (68') crece ilimitadamente, al aumentar indefinidamente t. Por tanto, la amplitud de oscilaciones que corresponden a la fórmula (68) crece ilimitadamente. Este fenómeno que tiene lugar al coincidir la frecuencia de oscilaciones propias con la frecuencia de fuerza exterior, se llama resonancia (véase también tomo II, capítulo XIII, § 29, fig. 273).

§ 19. TEOREMA DE RETARDO

Sea la función $f(t)$ idénticamente igual a cero, cuando $t < 0$ (fig. 383, *a*). Entonces la función $f(t - t_0)$ será idénticamente

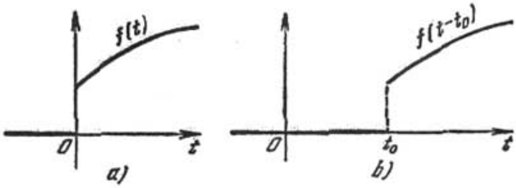

Fig. 383

igual a cero, cuando $t < t_0$ (fig. 383,*b*). Demostremos el siguiente teorema de retardo:

Teorema. *Si $F(p)$ es imagen de la función $f(t)$, entonces $e^{-pt_0}F(p)$ es la imagen de la función $f(t-t_0)$, es decir, si $f(t) \doteqdot F(p)$, entonces:*

$$f(t - t_0) \doteqdot e^{-pt_0}F(p.)$$

Demostración. Según la definición de imagen tenemos:

$$L\{f(t-t_0)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(t-t_0)\,dt = \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t-t_0)\,dt + \int_{t_0}^\infty e^{-pt} f(t-t_0)\,dt.$$

La primera integral del segundo miembro de la igualdad es igual a cero puesto que $f(t - t_0) = 0$, cuando $t < t_0$. En la última integral sustituyamos la variable, poniendo $t - t_0 = z$:

$$L\{f(t-t_0)\} = \int_0^\infty e^{-p(z+t_0)} f(z)\,dz = e^{-pt_0}\int_0^\infty e^{-pz} f(z)\,dz = e^{-pt_0}F(p).$$

De este modo, $f(t - t_0) \doteqdot e^{-pt_0} F(p)$.

Ejemplo. En el § 2 hemos establecido para una función unitaria de Heaviside: $\sigma_0(t) \stackrel{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}} \frac{1}{p}$. Basándose en el teorema demostrado, se deduce que para la función $\sigma_0(t-h)$, representada en la fig. 384, la imagen L será $\frac{1}{p}e^{-ph}$, es decir,

$$\sigma_0(t-h) \stackrel{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}} \frac{1}{p}e^{-ph}.$$

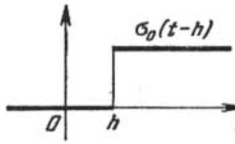

Fig. 384

Ejercicios para el capítulo XIX

Hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones para las condiciones iniciales indicadas:

1. $\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=0$, $x=1$, $x'=2$ para $t=0$. *Resp.* $x=4e^{-t}-3e^{-2t}$.
2. $\frac{d^3x}{dt^3}-\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $x=2$, $x'=0$, $x''=1$ para $t=0$. *Resp.* $x=1-t+e^t$.
3. $\frac{d^2x}{dt^2}-2a\frac{dx}{dt}+(a^2+b^2)x=0$, $x=x_0$, $x'=x_0'$ para $t=0$. *Resp.* $x=\frac{e^{at}}{b}\times$ $\times[x_0b\cos bt+(x_0'-x_0a)\operatorname{sen} bt]$.
4. $\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+2x=e^{5t}$, $x=1$, $x'=2$ para $t=0$. *Resp.* $x=\frac{1}{12}e^{5t}+$ $+\frac{1}{4}e^t+\frac{2}{3}e^{2t}$.
5. $\frac{d^2x}{dt^2}+m^2x=a\cos nt$, $x=x_0$, $x'=x_0'$ para $t=0$. *Resp.* $x=\frac{a}{m^2-n^2}\times$ $\times(\cos nt-\cos mt)+x_0\cos mt+\frac{x_0'}{m}\operatorname{sen} mt$.
6. $\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}=t^2$, $x=0$, $x'=0$ para $t=0$. *Resp.* $x=2e^t-\frac{1}{3}t^3-t^2-2t-2$.
7. $\frac{d^3x}{dt^3}+x=\frac{1}{2}t^2e^t$, $x=x'=x''=0$ para $t=0$. *Resp.* $x=\frac{1}{4}\left(t^2-3t+\frac{3}{2}\right)\times$ $\times e^t-\frac{1}{24}e^{-t}-\frac{1}{3}\left\{\cos\frac{t\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{t\sqrt{3}}{2}\right\}e^{\frac{1}{2}t}$.
8. $\frac{d^3x}{dt^3}+x=1$, $x_0=x_0'=x_0''=0$ para $t=0$. *Resp.* $x=1-\frac{1}{3}e^{-t}-$ $-\frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}$.
9. $\frac{d^4x}{dt^4}-2\frac{d^2x}{dt^2}+x=\operatorname{sen} t$, $x_0=x_0'=x_0''=x_0'''=0$ para $t=0$. *Resp.* $x=$ $=\frac{1}{8}[e^t(t-2)+e^{-t}(t+2)+2\operatorname{sen} t]$.
10. Hallar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2x}{dt^2}+y=1, \quad \frac{d^2y}{dt^2}+x=0,$$

que satisface a las condiciones iniciales: $x_0=y_0=x_0'=y_0'=0$, cuando $t=0$.
Resp. $x(t)=-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t}$, $y(t)=-\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{4}e^{-t}+1$.

INDICE ALFABETICO DE MATERIAS