J . REY PASTOR

CÁLCULO

INFINITESIMAL

CURSO

DE

CALCULO INFINITESIMAL

CURSO

DE

CALCULO INFINITESIMAL

POR

J. REY PASTOR

4.ª EDICION
MUY AMPLIADA

BUENOS AIRES

1944

PROLOGO

Hemos procurado en estas lecciones —decíamos en la primera edición— precisar los conceptos fundamentales con la mayor claridad y concisión posibles, sin entrar en cuestiones de interés puramente teórico, ni en casos singulares poco frecuentes, o aludiéndolos apenas en las notas impresas en letra menuda, dedicadas a los lectores más curiosos, que desean ampliar su horizonte de conocimientos.

No es ocasión de exponer cuáles deben ser las características de un curso dedicado a la enseñanza de técnicos, para quienes la Matemática es un medio y no un fin. Después de laboriosas discusiones habidas en Europa en reuniones internacionales diversas, llegóse en los comienzos del siglo a conclusiones concretas, entre ellas las siguientes:

La enseñanza debe ser sistemática y lógica, propendiendo a una educación de la inteligencia en el razonamiento matemático; y no empírica, con carácter recetario, para la resolución de casos concretos.

De los problemas de existencia que tienen tanta importancia y dificultad para el matemático, (raíces de las ecuaciones, existencia de la derivada, de la función implícita, etc.), sólo interesan al técnico los resultados y no las demostraciones.

De los métodos de resolución teórica, muchos de los cuales apenas si son demostraciones de existencia, sólo importan los que conducen rápidamente al resultado apetecido, con aproximación suficiente.

Además de los ejemplos abstractos, para ejercitar los métodos aprendidos, es conveniente tratar los problemas y magnitudes que se presentan en las ciencias físicas, para llenar el vacío que el ingeniero salido de las aulas suele encontrar entre la Matemática abstracta y la realidad concreta.

El graficismo, la intuición geométrica son los recursos esenciales del técnico para la visión de los fenómenos en su conjunto, para *adivinar las soluciones y calcularlas aproximadamente; pero la intuición por sí sola es fundamento demasiado inseguro para apoyar las demostraciones y conceptos fundamentales. Con dibujos y llamamientos a la intuición se puede probar, con apariencia de verdad, cualquier resultado falso.*

Cuando la demostración convincente, esto es, aritmética, sea demasiado laboriosa, debemos omitirla, conformándonos con una representación gráfica que dé cierta verosimilitud al teorema; quien desee conocer la demostración, deberá acudir a los tratados de Análisis.

Esta cuestión del método nos conduce al discutido punto del RIGOR. *No falta quien opina que el rigor, es decir, la precisión y la claridad, son exigencias del matemático puro y que la mente del ingeniero puede llenarse con vagos juegos de palabras, de sabor metafísico, que disimulen la oscuridad del pensamiento.*

Repase el lector las antiguas definiciones de curva, de tangente, de infinitésimo, de diferencial,... y después de larga cavilación sobre los puntos CONSECUTIVOS *de una curva, sobre el infinitésimo que ni es cero ni tiene valor ninguno, sobre los infinitésimos que se desprecian sin alterar la exactitud del resultado, deberá descansar en la fe y aceptarlo todo como dogma.*

Al cabo del tiempo se pusieron en claro todos estos conceptos; la Matemática dejó de ser Metafísica para hacerse Aritmética, es decir, clara, sencilla, limpia de nebulosidades y libre de discusiones. Pues bien: nadie como el técnico, que ha de manejar realidades y no abstracciones, debe ser exigente en claridad y precisión; nada más lejano de la Metafísica que el hierro y el hormigón.

Una vez pasado ese obscuro túnel de los conceptos fundamentales, para entrar en el campo de los desarrollos, ¿qué significado tienen esas palabras tan frecuentemente usadas en los antiguos tratados: número muy pequeño, número muy grande, números aproximados?... Todo número es muy pequeño y muy grande, según con cuál se le compare; dos números cualesquiera son aproximados.

Sobre estas palabras relativas, a las que se pretende dar valor absoluto, por desconocimiento del término de comparación, se basan esos cálculos ilusorios, en que lo despreciado vale más que lo conservado. El técnico no puede decir que un número es muy pequeño o despreciable, sin saber que se conserva inferior al límite de error admitido; no debe usar ninguna fórmula sin conocer su límite de error.

esto es, sin saber cuál es el número ε que limita el error de la función cuando los de las variables son inferiores a un número δ.

Ahora bien; esta dependencia entre los números ε y δ que condiciona un incremento a otro incremento, no es sino la noción clara de APROXIMACIÓN SUFICIENTE, *y ésta es la esencia del rigor. Nadie como el técnico necesita este rigor; para nadie es tan necesario el* SENTIDO DE LA APROXIMACIÓN. *Quien, ardiendo en fiebre de exactitud, llega hasta apreciar las millonésimas en un cálculo cuyos datos tienen solamente tres o cuatro cifras exactas, y cuantas más cifras amontona más se aleja de la verdad, carece de este sexto sentido, tan necesario al ingeniero como la vista al pintor.*

Cultivar el sentido de la aproximación es el principal objeto de estas lecciones.

He aquí algunas de las teorías agregadas en la 2.ª edición: asíntotas de las curvas planas, series de términos complejos, interpolación, teorema de Cauchy del valor medio y sus aplicaciones, fórmulas de Frenet-Serret, líneas de curvatura y geodésicas, representación de superficies, superficies regladas, envolventes de curvas y superficies, cálculo vectorial y sus aplicaciones cinemáticas y geométricas, funciones de variable compleja, nociones de representación conforme, y multitud de ampliaciones en diversas teorías, especialmente en la de ecuaciones diferenciales.

En esta 3.ª edición hemos concedido la extensión que merece a la teoría de la representación conforme, estudiada muy elementalmente y hemos ampliado y aclarado diversos capítulos, como notará el lector; pero la mejora esencial estriba en las numerosas figuras que aclaran el texto y en la agregación de varias lecciones sobre Geometría analítica del espacio, que serán bien recibidas por quienes no la hayan estudiado en cursos anteriores.

NOTA SOBRE ESTA CUARTA EDICION

Aunque hemos procurado conservar el aspecto del libro, son importantes las mejoras y adiciones incorporadas a esta edición, gracias al aprovechamiento del espacio, que ha aumentado el contenido mucho más de lo que corresponde a las 40 páginas agregadas, muchas de ellas en composición densa y concisa.

Nos propusimos, al redactar este Cálculo, desarrollar los tópicos esenciales para las ciencias de aplicación, con el rigor posible dentro de los límites de extensión y elementalidad que corresponden a tales cursos; y es obvio que rigor implica concentración de pensamiento y abandono de imágenes intuitivas, rápidas pero engañosas. Quienes se conformen con ese criterio de verdad *probable*, podrán consultar con fruto el viejo libro de Appell, o nuestro *Curso cíclico*, donde todo es sencillo y convincente, mientras el lector no se percata del escaso valor de tales razonamientos. Son los propios técnicos quienes exigen rigor, que equivale a claridad, aunque lograda a más alto precio; y por ello ha sido transformado radicalmente el citado libro francés, mejorando en cuanto al rigor, pero perdiendo toda su primitiva sencillez.

No es tarea fácil la que nos propusimos desde nuestra primera edición, de alcanzar el rigor por caminos más breves y sencillos que los seguidos en los tratados más prestigiosos. Quienes lean el nuevo capítulo de *Complementos de Cálculo integral*, pequeña ventana abierta hacia el Análisis moderno, comprenderán quizás el enorme esfuerzo que significa organizar el copioso material de esta obra, eludiendo el uso de las poderosas herramientas, de costosa adquisición, con las cuales los matemáticos profesionales desarrollan cómodamente el Análisis, distribuído en varios cursos, sin trabas de extensión, tiempo ni esfuerzo. Para ellos todo es importante, porque su vida entera pende de la interminable cadena de diminutos eslabones, que forman esta sólida disciplina; y suprimir algunos de ellos es como atentar contra su vida. Mientras los ingenieros encuentran este libro demasiado científico y riguroso, recargado de

concisas informaciones de carácter superior, impresas en letra menuda, nuestros colegas matemáticos notan, en cambio, la falta de muchos conceptos que juzgan capitales; pero el hecho de haber podido desarrollar tan amplio programa sin necesitarlos, ya indica que no son tan importantes como se figuran; y aunque su uso depara sin duda satisfacción al profesional de la Matemática, no es precisamente ese placer intelectual, del que no participan los discentes, la finalidad de sus cátedras de preparación para otras disciplinas.

Se impone, pues, el sacrificio de callar mucho de lo que se sabe, y con esta norma hemos accedido a tales sugestiones solamente cuando las aplicaciones ya logradas de ciertas teorías aconsejan ocupar en ellas a quienes tienen otro rumbo en la vida y mucho que estudiar en su profesión.

Si apenas tenemos la pretensión de servir a sus necesidades matemáticas actuales, menos podemos pretender escribir un libro para los siglos venideros, en que sin duda tales teorías matemáticas, y otras que nacerán, habrán fructificado.

BIBLIOGRAFIA. — Tratados rigurosos de Cálculo son el *Cours d'Analyse infinitesimale* de Vallèe-Poussin, en dos volúmenes y el de Beppo Levi en un apretado volumen, titulado *Analisi matematica algebraica ed infinitesimale*. De más fácil lectura son las *Lezioni di Calcolo infinitesimale* de Pincherle y el *Calcolo infinitesimale* de Pascal, en tres pequeños volúmenes, con otro más de ejercicios críticos, y las *Lezioni di Analisi matematica* de Vivanti.

Más orientado hacia las aplicaciones es el de Fubini: *Lezioni di Analisi Matematica* y el de Courant: *Differential-und Integralrechnung* en dos volúmenes (hay traducción inglesa en uno sólo), así como el de Cisotti: *Lezioni di Analisi matematica* de tipo intuitivo, y el más elemental de Granville.

Los libros franceses de *Mathématiques générales* (Zoretti, Garnier, ...) carecen de todo rigor, como corresponde a tal grado de enseñanza; y los grandes tratados de Goursat, Hadamard, etc., se apoyan en ellos, suponiendo ya conocidos los fundamentos. En definitiva, quedan sin establecer en parte alguna, de modo adecuado. El libro de Appell ha sido reformado por Valiron en tal sentido.

Casi ninguno de los citados se ocupa del Cálculo de variaciones, ni de los métodos gráficos y mecánicos; ninguno trata las funciones de variable compleja, a pesar de sus importantes aplicaciones, ni tampoco el Cálculo tensorial.

INDICE DE ADICIONES

A las observaciones de los colegas y discípulos Balanzat, Frenkel, Gaspar y muy especialmente Pi Calleja, se deben muchas de las mejoras intruducidas. La revisión efectuada por este competentísimo profesor nos ha sido muy valiosa; y para corresponder a su esfuerzo hemos intercalado en el texto complementario, impreso en tipo menor, multitud de nociones, sin duda interesantes, pero que todavía no tienen interés técnico, violentando algo nuestro criterio arriba declarado.

A cambio de no aceptar todas las sugestiones de los lectores, que habrían dilatado desmesuradamente este volumen, hemos agregado una breve exposición del Cálculo tensorial, tan abstrusamente tratado en general, que nadie se atrevió a sugerirnos tal ensayo, el cual corresponde de lleno al criterio de utilidad que nos ha guiado. Este capítulo y el de Complementos de Cálculo integral, son las novedades más importantes.

Los lectores sin base adecuada que se inicien en el razonamiento riguroso a esta altura de su vida, encontrarán sin duda alguna dificultad hasta educar su mentalidad: no creemos que encuentren más fáciles los libros rigurosos antes citados. Respondemos así a una observación muy explicable de algunos lectores, educados en el Cálculo newtoniano, que pretenden saltar ágilmente por encima de todo el denso y fecundo siglo XVIII, que separa ambas concepciones.

La otra observación, muy general, se refiere a la escasez de ejercicios y a la concisión de los ejemplos numerosos. Hemos creído que entre la somera lista de ejercicios, copiados de cualquier colección, sin indicaciones para resolverlos, y el ejemplo desmenuzado hasta eliminar toda colaboración del lector, cabe ese tipo intermedio del ejemplo a medio aclarar, o del ejercicio a medio resolver, que vienen a ser la misma cosa. Se trata, pues, de una cuestión de rótulo; y esas lagunas que el lector encuentra en los numerosos ejemplos, donde debe caminar algún trecho sin andadores y lápiz en ristre, responden precisamente al fin que nos hemos propuesto. Hemos agregado además no pocos ejercicios nuevos al final de varias lecciones.

He aquí la lista de las principales modificaciones introducidas:

CAP. I. — Concepto de número real por el método más simple. — *Fundamento de la Geometría Analítica.* — Ampliación del Concepto de función, con ejemplos. — Curvas algebraicas notables, con figuras. — Variación de las funciones. — Funciones elementales, con sus gráficas. — Medida radial de ángulos (sin *radián*). — Aclaración del concepto de límite. Propiedades de los límites. — Teorema de las sucesiones convergentes. con sencilla demostración. — Definición de arco. — Operaciones con funciones continuas. — *Perfeccionamiento de la clasificación de las discontinuas,* con ejemplos. — Demostración directa y sencilla del Teorema de Bolzano-Weierstrass. — Aclaraciones sobre infinitésimos e infinitos. — Ejercicios *sobre límites indeterminados. — Perfeccionamiento del concepto de asíntota y ejemplos.* — Condición necesaria de la convergencia de series. — Ejercicios y criterio de Cauchy. — Demostración del desarrollo en serie exponencial.

CAP. II. — Relación entre inclinación y pendiente. — Puntos angulosos, cuspidales, e inflexiones, con ejemplos y figuras. — Nueva demostración de la derivada de *función compuesta. — Nuevos ejercicios sobre derivadas.* — Aclaraciones sobre el Teorema del valor medio. — Ejercicios sobre Límites indeterminados. — Demostración del Teorema de Rolle. — Rectificación histórica sobre la regla de l'Hôpital.

CAP. III. — Fórmula de Leibniz. — Nueva demostración del orden de contacto. — Mejora de notaciones y figuras en la exposición del radio de curvatura.

CAP. IV. — Multiplicación de series por la Regla de Cauchy. — Ampliaciones *sobre el radio de convergencia y mejora del Teorema (101).* — Aclaraciones sobre funciones hiperbólicas.

CAP. V. — Considerable ampliación del cálculo de integrales racionales, dando para cada caso el método más conveniente, con ejemplos variados. — *Propiedades fundamentales de las integrales definidas.* — Nuevos ejemplos de integrales elípticas. — Ecuación del péndulo simple. — Aclaración de la fórmula de Simpson. — Demostración rigurosa y sencilla de la derivación bajo el signo integral. — Ampliaciones de concepto y figuras sobre la línea elástica. — Mejora de la exposición sobre la Teoría del planímetro.

CAP. VI. — Aclaraciones, ejemplos y figuras sobre funciones periódicas. — Interpolación trigonométrica. — Simplificación del criterio para funciones especiales. — La demostración rigurosa en el capítulo de Complementos.

Complementos de Cálculo Integral. — Lema de Borel. — La continuidad uniforme. — Integración de funciones continuas. — Rectificación de curvas. — Series e integrales sobre intervalo infinito. — Cálculo de la integral de Gauss o Poisson. — Criterio de Mac-Laurin. — Convergencia absoluta y condicional. — Criterios de Abel y de Dirichlet. — Series funcionales. — Convergencia uniforme; propiedades. — Relación de los coeficientes de Fourier de primitiva y derivada. — Teorema de unicidad. — Tipos *I* y *II* de Series de Fourier.

CAP. VII. — Variación de la razón simple. — Noción de coordenadas plückerianas; ley de dualidad. — Fórmula del cero. — Algebra tensorial: concepto de *vector* y de *tensor;* diadas, tensores de inercia y elástico.

CAP. VII. — Aclaraciones sobre las cuádricas alabeadas y puntos cíclicos.

CAP. IX. — Entornos circulares. — *Notación general de los puntos.* — Continuidad de las funciones derivables. — Función con derivadas nulas. — *Mejora de la derivación de funciones compuestas.* — Concepto general de diferencial de Thomae. — Alusión al recíproco del Teorema de Euler. —

Derivadas sucesivas. — Fórmula diferencial de Taylor. — Mejora de la clasificación de los puntos de una superficie. — Extremos de variables ligadas.

CAP. X. — Demostración de la fórmula directa del radio de curvatura. — Aclaraciones sobre la curvatura de superficies. — Fórmula de Euler. — Definición de líneas asintóticas. — Aclaración del concepto de superficie. — Reordenación de la teoría de envolventes. — Teoría vectorial de superficies. — Cálculo diferencial absoluto.

CAP. XI. — Demostración rigurosa del cambio de variables. — Mejoras en la exposición de la teoría de momentos y rigorización de la teoría de las integrales curvilíneas. — Aplicación en Aerotécnica de las funciones analíticas.

CAP. XII.—Método de la derivación para resolver la ecuación de Clairaut. — Complemento sobre el factor integrante; su verdadero alcance. — Nota sobre ecuaciones incompletas de segundo orden. — Cálculo de una integral particular en las ecuaciones lineales completas.

El índice alfabético ha sido completado, agregando los nombres de los matemáticos que aparecen en el nuevo texto, con sus correspondientes fechas de nacimiento y muerte. Muchas figuras nuevas han sido intercaladas y otras renovadas, para mayor claridad.

PRIMERA PARTE

Funciones de una variable

CAPITULO I

LIMITES DE LAS FUNCIONES DE UNA VARIABLE

LECCIÓN 1

CONCEPTO DE FUNCION

1. — Variables independientes.

El problema de la medida de magnitudes conduce prácticamente a números *racionales* del tipo $\pm A, a\breve{b} \ldots k$; pero tanto en Aritmética como en Geometría se presentan expresiones decimales de infinitas cifras con signo $+$, o signo $-$. Tal sucede al extraer raíces, calcular distancias, rectificar curvas, cuadrar superficies, etc.

Número real es un símbolo $\pm A, abcd \ldots$ con infinitas cifras decimales. Cuando éstas son nulas desde una en adelante, es sabido cómo se obtiene una fracción equivalente, cuyo denominador sólo contiene factores 2 y 5; más en general, si la sucesión de cifras es periódica, se obtiene una fracción equivalente cuyo denominador contiene otros factores primos. El número *irracional* o *inconmensurable* es una expresión decimal no periódica. Por ej. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, π.

Suponemos conocida la Aritmética de los números reales: suma, diferencia, producto y cociente (de divisor no nulo) conducen a otro número real; las operaciones de extraer raíces y tomar logaritmos de números positivos son siempre posibles en el campo real.

Las operaciones aritméticas entre números reales tienen interpretación geométrica mediante puntos de una recta; y recíprocamente, la Geometría de la recta se reduce al Algebra, gracias al concepto cartesiano de *abscisa*. Elegidos en la recta un origen O y un segmento OU como unidad, cada número real a está representado por un punto A tal que la medida del segmento dirigido OA con la unidad OU es el número a, el cual se llama *abscisa* de A. Recíprocamente, cada punto de la recta tiene una abscisa real, y se llama *afijo* de este número.

Esta correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales es el fundamento de la Geometría Analítica.

Es, por tanto, legítimo, usar lenguaje geométrico en el Cálculo, sin menoscabo del rigor aritmético, que excluye apoyarse para las deducciones en imágenes intuitivas. Así, pues, cuando usemos las palabras: *punto c; puntos a la derecha de c, puntos a la izquierda de c.* etc., debe entenderse: *número* c, números *mayores* que c, números *menores* que c, etc.

Dar una *variable independiente* x es dar el conjunto de valores numéricos, reales o complejos, que puede tomar. Solamente consideramos en este curso variables *reales:* y el conjunto de valores que cada variable puede tomar se llama su *campo de variabilidad.*

La variable real x se llama *continua* cuando puede tomar todos los valores comprendidos entre dos números a y b; o bien todos los valores mayores que un número a; o bien los menores que un número b; o finalmente cabe que pueda tomar todos los valores reales.

Tales conjuntos de valores se llaman *intervalos;* en el primer caso el intervalo se llama *finito* y los números o puntos a y b son sus *extremos;* en los otros casos el intervalo se llama *infinito* y tiene un solo extremo o ninguno. Los restantes puntos del intervalo se llaman *interiores.* Los intervalos definidos por las condiciones:

$$a < x < b \quad ; \quad x > a \quad ; \quad x < b \quad :$$

se designan respectivamente así: (a, b), (a, ∞), $(-\infty, b)$ no debiendo considerarse ∞ como número, sino como símbolo convencional para el crecimiento o decrecimiento indefinido de la variable.

El intervalo se llama *completo* o *cerrado* cuando en él se incluyen sus extremos. Los intervalos completos $a \leqq x \leqq b$; $x \geqq a$; $x \leqq b$ se representan así: $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$.

Entorno de un punto x es todo intervalo (a, b) al cual es interior dicho punto x. Suele tomarse simétrico, es decir, del tipo $(x - d, x + d)$ y el número $d > 0$ es su *semiamplitud,* o su *radio.*

Las expresiones aritméticas en que figura una variable x determinan el campo de variabilidad de ésta. Son los ejemplos más sencillos de *función,* concepto que definimos en (2) con la más amplia generalidad.

Ejemplo 1. — En la expresión $\sqrt{x}$ el intervalo de variabilidad de x es $x \geqq 0$, pues para valores negativos no tiene valor real la raíz cuadrada.

Ejemplo 2. — En la expresión $1:x$, la x puede tomar cualquier valor no nulo, pues la división por 0 carece de sentido; el campo de variabilidad de x se compone de dos intervalos infinitos.

Ejemplo 3. — En todo problema físico donde intervienen temperaturas centígradas, el intervalo de variabilidad de éstas tiene —273° como extremo inferior, y el superior depende de la índole del problema.

2. — Variables dependientes o funciones.

Hasta los comienzos del S. XIX la palabra *función* era sinónima de *expresión aritmética*, incluyendo el paso al límite como operación aritmética; pero ciertos problemas físicos obligaron a adoptar este concepto, mucho más amplio, de Dirichlet:

DEFINICIÓN. Se dice que la variable y es *función* de la variable independiente x si a cada valor de x corresponde un valor de y, determinado por una ley aritmética, geométrica o arbitraria.

La palabra *función* equivale, pues, a variable *dependiente* de otra variable. También se usa la palabra función para designar a la *ley* de correspondencia y se representa por una letra: f, F, φ, Φ,... llamada *característica*, que antepuesta a la variable x indica las operaciones aritméticas, geométricas o arbitrarias que determinan el valor de y.

Cada función de uso frecuente se suele representar por un signo especial, que suele ser abreviatura del nombre de la función; así, por ejemplo, el *logaritmo, seno, coseno, tangente, cotangente*, de x, se representan así: lx (logaritmo natural); $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

La palabra función se usa a veces para las correspondencias en que cada valor de x determina *varios* de y; pero entonces se llama *función multiforme*, y su estudio se hace descomponiéndolas en varias funciones, como veremos en la lección siguiente.

Hemos distinguido en la definición de función no tres *clases* de funciones, sino tres *modos* de definir funciones, que se reducen, como veremos, al primero.

EJEMPLOS. — Está definida aritméticamente la función $y = x^2$; pues de cada valor de x se deduce el de y por la operación aritmética de elevar al cuadrado.

Está definida geométricamente la función $y = \operatorname{sen} x$; pero se puede expresar también, como veremos, por una serie, es decir, por operaciones aritméticas combinadas con el *paso al límite*.

Está definida arbitrariamente la función siguiente en el intervalo $[0,2\pi]$:

$y = x$ para $0 < x < \pi$;

$y = x - \pi$ para $\pi < x < 2\pi$;

$y = \pi/2$ para $x = 0$, y para $x = \pi$.

A pesar de estar dada la correspondencia por *tres* expresiones (y por ello se consideraba como tres funciones en la Matemática euleriana) obtendremos en (160) una sola expresión de tal correspondencia.

3. — Representación gráfica de las funciones.

Una función $y = f(x)$ puede representarse gráficamente por una escala rectilínea, llevando a partir de un origen O segmentos iguales a los valores de y, pero anotando en el extremo el valor correspondiente de x.

EJEMPLO. — Cada una de las escalas que forman la regla de cálculo es una escala logarítmica, es decir, la representación gráfica de la función $y = \log x$; pero si se quiere utilizar para el cálculo de logaritmos, debe acoplarse una escala natural que sirva para medir las distancias.

El método más usado para representar gráficamente funciones es el de las coordenadas cartesianas; pero igualmente puede utilizarse cualquier otro sistema de coordenadas (polares, proyectivas, ...).

La determinación de puntos de la gráfica da idea de la variación de la función, pero por muchos que sean es arriesgado enlazarlos por un trazo continuo, sin un previo estudio aritmético de la función. En cambio, hecho este estudio, bastarán pocos puntos para efectuar un trazado muy aproximado.

Tal estudio de las funciones, que haremos oportunamente, nos dará las propiedades fundamentales de continuidad y existencia de tangentes, que facilitan notablemente el trazado de la gráfica.

EJEMPLOS. — Sea la función $y = 5x^5 - 4x$.

Atribúyanse a x los valores -2, -1, 0, 1, 2, ... y dibújese el trazo que los une del modo que parece más directo y natural. Véase después que tal dibujo es absurdo, dando a x valores entre 0 y 1.

Hágase lo mismo con la función $y = 2x^3 - x$.

4. — Funciones y leyes naturales.

Los fenómenos naturales ofrecen ciertas dependencias entre unas y otras variables; cuando esta dependencia *determina* el valor de una variable mediante los de otras, aquélla se dice *función* de éstas.

El *valor* numérico de una variable natural procede de una medida y, por tanto, adolece de un error; en realidad, nunca se tiene un *número*, sino un *intervalo*, en que el valor está comprendido. Se comprende, pues, que la expresión aritmética de las funciones naturales es y será siempre *aproximada*; y cabe por tanto, obtener multitud de expresiones para cada función. El problema capital de las Ciencias naturales exactas es obtener para cada fenómeno la *ley matemática*, esto es, la expresión *más aproximada* y *más sencilla*.

Mediciones más exactas pueden descubrir en toda ley natural errores intolerables que obligarán a sustituirla por otra mejor.

EJEMPLOS. — El volumen de una cierta cantidad de gas no sólo *depende* de la presión, sino que está *determinado* por la presión, si se supone fija la temperatura; luego es *función* de la presión, en igualdad de temperatura.

¿Cuál es la ley natural de este fenómeno físico? Durante mucho tiempo se consideró como tal la de BOYLE-MARIOTTE, o sea: $pv =$ constante; pero las experiencias de Regnault (con gran escándalo de casi todos los físicos que creían ciegamente en aquella ley) revelaron grandes discrepancias al aumentar la presión, y VAN DER WAALS dió posteriormente su ecuación más exacta (véase: Curso cíclico, t. II). ¿Podemos, pues, rechazar la antigua ley por *inexacta* y sustituirla por la nueva, que es la *verdadera*? Sólo podemos decir que ésta expresa mejor los hechos; y sin duda vendrá después otra que la superará.

LECCIÓN 2

CLASIFICACION DE LAS FUNCIONES

5. — Expresiones algebraicas racionales e irracionales.

Las funciones más sencillas son las *enteras* así llamadas porque las únicas operaciones a que está sometida la variable son: adición, sustracción y multiplicación. Están definidas para todo valor de x, *sin excepción.* Se llaman *lineales, cuadráticas, cúbicas, etc.*, según el grado de la variable.

EJEMPLOS. — Son enteras las funciones:

$y = \frac{1}{2}x - \sqrt{2}$ lineal

$y = \frac{3}{4}x^2 - x + \pi$ cuadrática

Si la variable figura como divisor, pero no está sometida a radicaciones, la función se llama *fraccionaria;* las enteras y las fraccionarias se llaman *racionales.*

EJEMPLOS. — Son racionales fraccionarias:

$$y = x^{-1} + 1 \quad , \quad y = 1 : (x^2 - 1)$$

La primera tiene el valor excepcional $x = 0$; la segunda los valores excepcionales $x = \pm 1$, que anulan al denominador.

Si la variable figura bajo signo radical, la función se llama *irracional;* éstas y las racionales forman las funciones algebraicas explícitas, o *expresiones algebraicas.*

EJEMPLOS. — Son irracionales las funciones:

$$y = \sqrt{x} \quad ; \quad y = 1 : (x^{1/2} - 1)$$

6. — Funciones algebraicas y curvas algebraicas.

En general, se dice que y es función *algebraica* de x, cuando está ligada con ella por una ecuación de la forma: polinomio en x, y, igual a cero. Obsérvese que en los ejemplos anteriores se puede llegar a tal resultado: $P(x, y) = 0$. La curva que representa se llama *curva algebraica* y el número de puntos que tiene común con cualquier recta ,según se demuestra en Algebra, es igual al grado de la ecuación. Hay funciones algebraicas que no se pueden despejar mediante radicales, es decir, funciones algebraicas no expresables mediante expresiones algebraicas. Se llaman funciones *algebraicas implícitas.* Tales son las definidas por estas ecuaciones:

$$y^5 - xy + 1 = 0 \quad , \quad xy^6 - y + x = 0.$$

NOTA. — Si para el valor x_0 corresponden m raíces y_1, y_2, y_m de la ecuación algebraica, y se cumple cierta condición que veremos en (203), resultan m funciones uniformes al variar x en un entorno suficientemente pequeño de x_0; pero al ampliar éste se confunden y entrecruzan. (*V. Elem. de la T. de funciones*). Esto se ve más claramente en las ecuaciones que se descomponen en factores racionales; tal por ejmplo $y^2 - x^2 = 0$, que se descompone en $y = x$, $y = -x$. Si se parte de los valores $y_1 = + \sqrt{4} = 2$, $y_2 = -2$; y se amplía el entorno más allá del origen el valor positivo se hace negativo y viceversa.

El examen de la ecuación $P(x, y) = o$ permite a veces decir inmediatamente algunas propiedades de la curva:

a) Si todos los términos tienen coeficientes *positivos* y los exponentes son *pares* no existe curva; pues el primer miembro toma valor positivo, para todo (x, y) excepto si $x = y = 0$ y no hay término constante, resultando punto único el origen

Toda ecuación algebraica admite, sin embargo, soluciones complejas (x, y) que reciben el nombre de *puntos imaginarios*; y cuando no hay soluciones reales, o sólo hay número finito, se dice que representa una *curva imaginaria;* por ej.:

$$x^2 + y^2 = 0 \qquad\qquad 2x^2 + y^2 + 1 = 0$$

b) Si la y figura solamente con exponentes *pares*, al punto *(x, y) de la curva corresponde también el $(x, -y)$; es decir*, la curva es *simétrica* respecto del eje x.

EJEMPLO. — Son simétricas respecto del eje x:

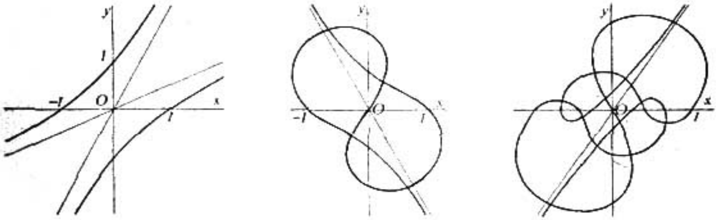
$$x^2 - 2y^2 + 3x - 1 = 0 \qquad (\textit{cónica})$$

$$y^2(2a - x) = x^3 \qquad (\textit{cisoide})$$

Son simétricas respecto de ambos ejes las *espíricas:*

$$(x^2 + y^2)^2 - (a^2x^2 + b^2y^2) = c$$

c) Si en cada término los exponentes de x, y, son ambos pares o ambos impares, al punto (x, y) de la curva corresponde el $(-x, -y)$, es decir: la curva es simétrica respecto del origen O.



EJEMPLOS. — Son simétricas respecto de 0 las curvas representadas en la figura. La 1.ª es la hipérbola: $2x^2 + 2y^2 - 5xy = 2$; la 3.ª es de grado 25; la 2.ª parecería de 5.º grado, pero su ecuación, de 9.º grado es:

$$(2x + y) \ (x^2 + y^2)^4 + 2y(5x^4 + 10x^2y^2 - 3y^4) - 2x + y = 0 \quad ;$$

7. — *Funciones pares e impares.*

En lo sucesivo, la palabra *función* significará función uniforme.

La función $y = f(x)$ se llama *par*, cuando a valores opuestos de x corresponde el mismo valor de y.

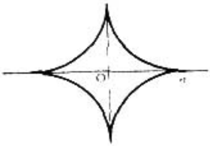
La función se dice *impar*, cuando a valores opuestos de x corresponden valores opuestos de y.

Es par $\cos x$; son impares $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

La gráfica de una función par es simétrica respecto del eje y; pues si el punto (x, y) está en la curva, también está el $(-x, y)$.

La gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen O; pues si el punto (x, y) está en la curva, también está el $(-x, -y)$.

NOTA. — Lo dicho en el párrafo anterior vale si en vez de *potencias* pares o impares figuran funciones pares o impares; es decir:



Si y figura solamente bajo funciones *pares* la *curva es simétrica respecto* del eje x; si x figura solamente bajo *funciones pares*, la *curva es* simétrica respecto del eje y. Por ejemplo, la curva:

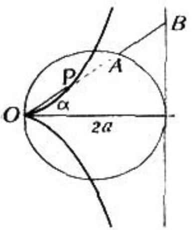
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \qquad (\textit{astroide})$$

es simétrica respecto de ambos ejes.

Si en la ecuación polar $r = f(\alpha)$ la función es *par*, al punto (r, α) corresponde el $(r, -\alpha)$ y la curva es simétrica respecto del eje x; si la función es *impar*, al punto (r, α) corresponde el $(-r, -\alpha)$ y la curva es simétrica respecto del eje y.

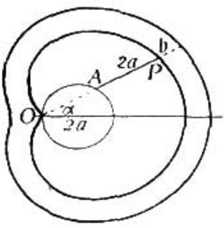
EJEMPLOS. — He aquí tres curvas clásicas, que tienen un eje de simetría, con sus correspondientes ecuaciones polares; compruébese en ellas el criterio enunciado para reconocer la simetría.

Cisoide de Diocles.



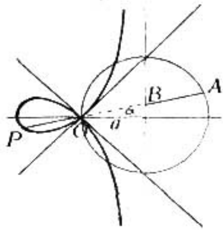
$r = 2a(\sec \alpha - \cos \alpha)$

Caracol de Pascal.



$r = 2a.\cos.\alpha + b$

Estrofoide recta.



$r = a \,.\, \cos 2\alpha / \cos \alpha$

8. — Funciones elementales.

Se llama así a las funciones circulares y a las funciones aritméticas:

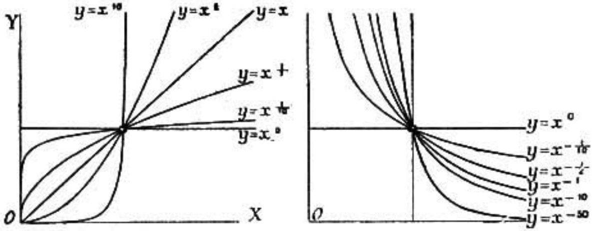
$$y = x^m \qquad \text{función } potencial$$
$$y = a^x \qquad \text{,, } exponencial$$
$$y = \log_a x \qquad \text{,, } logarítmica$$

y también a las compuestas con ellas mediante operaciones aritméticas, únicas que estudia el Cálculo elemental. Como todas las circulares son combinaciones aritméticas de sen x, y ésta se puede expresar por exponenciales, como veremos, no son funciones *simples*.

La función $y = \log_a x$ se define por la relación $x = a^y$; es decir, si y es función logarítmica de x, es x función exponencial de y. Se expresa esto diciendo que las funciones exponencial y logarítmica son *inversas*, concepto sobre el cual insistiremos más adelante.

NOTA. — La potencia x^m es función exponencial de su logaritmo, que es $m.\log x$; luego resulta: todas las funciones llamadas *elementales* son funciones compuestas de la *exponencial* o del *logaritmo*, siendo ésta la única función elemental *simple*.

EJERCICIOS. — Construir la gráfica de la función potencial para diversos valores enteros, fraccionarios, positivos y negativos del exponente m. Obsérvese para qué tipo de exponentes existe curva a la izquierda del eje y.



FUNCIONES CIRCULARES. — Aunque éstas son bien conocidas desde cursos anteriores, conviene puntualizar algunos conceptos esenciales.

Adoptamos la definición *geométrica* usual en Trigonometría, pero una vez demostrados en Cap. IV sus desarrollos en serie, se comprenderá que es posible partir de éstos, como definición *aritmética*, la cual vale para valores complejos de x. Es claro que entonces desaparecen las nociones usuales: circunferencia, cuerdas, grados, etc.; la variable x es un número abstracto.

Este significado de número puro es el único admisible en Análisis, aun en el campo real.

Partiendo, pues, del significado angular de la variable x, y referido el ángulo a su rayo origen como semieje cartesiano positivo de abscisas, establezcamos de una vez para todo el curso estas definiciones:

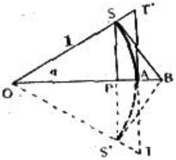
Como medida de un ángulo se adopta la razón de la longitud del arco central al radio. El ángulo recto tiene medida $\pi/2$; el ángulo de una vuelta, 2π; etc. No conviene hablar siquiera del *radian*, en mala hora introducido en la enseñanza.

Seno de x es la razón de la ordenada al radio; coseno es la razón de la abscisa al radio; *tangente* es la razón de la ordenada a la abscisa; etc.

Tanto x como sus funciones circulares son, pues, números reales abstractos; por ej.: $\operatorname{sen} 1 = 0{,}84$.

El ángulo de 1.° *viene expresado por* el *número* $\pi/180 = 0{,}017453\ldots$, que debe retener en la memoria todo técnico, por su gran utilidad.

La *medida de un arco de circunferencia respecto del radio se define* mediante los perímetros de las quebradas inscriptas y circunscriptas por el proceso llamado de las sucesiones convergentes que trataremos en (11). Dado un ángulo AOS, y su simétrico AOS', para rectificar el arco doble SAS', tenemos:



1.° quebrada inscripta: cuerda $SS' = 2 \cdot \operatorname{sen} a$

" " circunscripta: $SBS' = 2 \operatorname{tg} a$

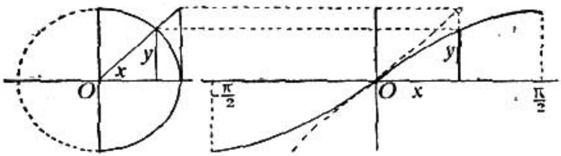
Por tanto:

$$2 \operatorname{sen} a < 2a < 2 \operatorname{tg} a$$

$$\operatorname{sen} a < a < \operatorname{tg} a$$

El concepto de función inversa dado en Trigonometría, donde se admiten *infinitos arcos, también se modifica aquí.*

Las funciones $x = \operatorname{arc\,sen} y$, $x = \operatorname{arc\,tg} y$, significan: arco cuyo seno es y, *arco cuya tangente es y; pero ese arco o ángulo es precisamente el comprendido* entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, es decir, se considera solamente la semicircunferencia de la derecha, a fin de que esté unívocamente determinado.



Esto equivale a limitar la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$ al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ y de la curva tangentoide se toma solamente su rama 1.ª.

Análogamente, $\operatorname{arc\,cos} x$ designa el único arco entre 0 y π, cuyo coseno es x

EJERCICIOS:

1. — *La cisoide de Diocles* se deduce de la circunferencia de radio a y su tangente en M llevando en cada secante por O el segmento $OP = AB$. Dedúzcase la ecuación polar (7) y de ella la cartesiana (6).

2. — La *estrofoide* recta se construye asimismo llevando $OP = AB$, pero la recta es perpendicular al radio de 0 en el centro.

Para la *trisectriz de Mac-Laurin* la recta es perpendicular en el punto medio del radio.

Dedúzcanse las ecuaciones cartesianas y polares de estas curvas.

3. — Demostrar que representa una estrofoide recta, simétrica respecto del eje y la ecuación: $r = a \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$.

4. — ¿Qué posición relativa respecto de la bisectriz $x = y$ ocupan las gráficas de dos funciones inversas $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$?

5. — En la gráfica de las funciones x^m señálense las funciones que son inversas una de otra.

Lección 3

CONCEPTO DE LIMITE

9. — Definición de límite.

Se dice que la función $y = f(x)$ se *aproxima infinitamente* al valor l, o *converge* hacia el valor l, *tiende* hacia el límite l, o *tiene* el límite l, para $x = a$, cuando la diferencia $y - l$, tomada en valor absoluto, se conserva *arbitrariamente* pequeña, tomando x *suficientemente* próxima al número a.

En términos precisos, escribiremos:

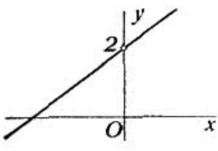
$$\text{lím. } f(x) = l, \text{ para } x = a, \text{ o mejor: } x \to a$$

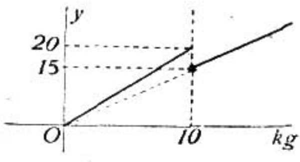
cuando para cada número positivo ε existe otro número positivo δ, tal que para todos los valores de x (excepto el mismo a), que cumplan la condición:

$$|x - a| < \delta \text{ se verifica: } |y - l| < \varepsilon.$$

Obsérvese que en esta definición no intervienen más que los valores de la función $y = f(x)$ en la proximidad de $x = a$, pero no el mismo valor a, en el cual la función puede no tener valor ninguno, o tener valor cualquiera. Por esto parece más adecuado escribir debajo o a la derecha de la abreviatura *lím.* la indicación: $x \to a$, en vez de $x = a$.

Ejemplo 1. — Sea la función $y = (x^2 + 2x) : x$. Su límite para $x \to 0$ es 2, puesto que para todo valor $x \neq 0$ es $y = x + 2$, y por tanto: $y - 2 = x$ llega a ser tan pequeño como se quiera, luego: lím. $(x^2 + 2x) : x = 2$. Sin embargo, para $x = 0$, la función no tiene valor correspondiente, pues carece de sentido aritmético dividir por cero.





Ejemplo 2. — Supongamos que el precio de una mercadería es 2 pesos kg. y desde 10 kg. en adelante se reduce a 1,50 pesos kg. La gráfica del valor de cantidades crecientes de dichas mercaderías se compone de dos segmentos de recta con pendientes 2 y 1,50 respectivamente, extendiéndose el segundo segmento infinitamente hacia la derecha.

La función $y = f(x)$ es creciente desde 0 hasta 10, sus valores se van acercando hacia 20, y llegan a diferir de 20 tan poco como se quiera; por ejemplo: será $20 - f(x) < 0{,}01$ (es decir, el valor diferirá de 20 pesos en menos de un centavo) si la cantidad de mercadería difiere de 10 kg. en menos de 5 gr., es decir: si es $10 - x < 0{,}005$ o sea desde $x = 9{,}995$. Podemos, pues, escribir: para valores *crecientes* de x es lím. $f(x) = 20$, si nos limitamos a considerar el intervalo 0 a 10.

Sin embargo, no llega a alcanzarse este valor 20; pues para $x = 10$, el valor es $y = 15$, según la nueva tarifa de 1,50 el kg.

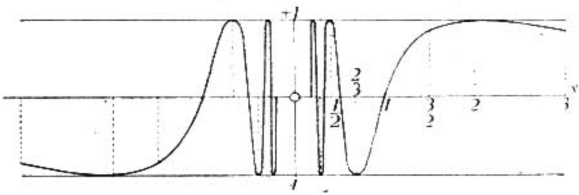
En cambio, si nos acercamos hacia $x = 10$ por la derecha ,es decir, decreciendo x, resulta lím. $f(x) = 15$.

En Análisis se distinguen estos dos modos de tender x al valor a, escribiendo respectivamente:

$$x \to a^- \quad ; \quad x \to a^+$$

Demuéstrese que el límite para $x \to 0+$ de $\sqrt{x}$ y de $1 : \log x$ es cero.

EJEMPLO 3. — Representar gráficamente la función $y = \operatorname{sen} \pi/x$.



Observe el lector que al tender x a 0, y oscila indefinidamente sin tender hacia ningún valor fijo; por el contrario toma infinitas veces todos los valores entre -1 y $+1$. El símbolo lím. para $x \to 0$, aplicado a esta función, carece, por tanto, de sentido.

EJEMPLO 4. — Análogamente, si se representa la función $y = x . \operatorname{sen} \pi/x$, las ordenadas de la función anterior están multiplicadas por x, que va disminuyendo; las infinitas ondas de altura 1 decrecen y quedan entre las dos bisectrices, puesto que el coeficiente angular de la cuerda que une cada punto con 0 es $y : x = \operatorname{sen} \pi/x$ y por tanto oscila entre -1 y $+1$; es decir: el ángulo oscila entre $-\pi/2$ y $+\pi/2$.

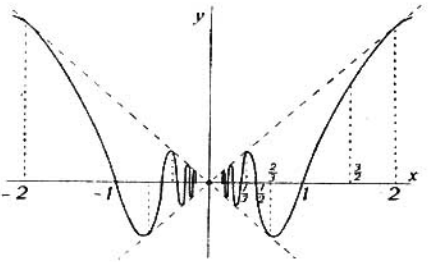
En este caso es:

$$\text{lím. } x \operatorname{sen} \pi/x = 0 \text{ para } x \to 0$$

pues en valor absoluto, la diferencia con el límite es:

$$| x . \operatorname{sen} \pi/x | \leqq | x |$$

y, por tanto, llegará a ser menor que ε, sin más que tomar $| x | < \varepsilon$.



Nota. — Vemos en este ejemplo que la función puede alcanzar infinitas veces su valor límite, mientras que x no alcanza el valor a. Esto mismo acontece ya en el caso más simple: *El límite de una constante es la misma constante.*

10. — Propiedades de los límites.

Si $l = \lim. f(x)$ es positivo, desde un valor de x difiere $f(x)$ de l en menos de l, luego es $f(x) > 0$. Análogamente, si l es negativo, resulta $f(x) < 0$. Es decir: *Desde un valor de x en adelante la función tiene el mismo signo de su límite.*

Corolario: Si $a < l$, como $f(x) - a$ tiene límite $l - a > 0$, será desde un x en adelante: $f(x) - a > 0$, es decir: $f(x) > a$.

Si $f(x)$ está comprendida entre dos funciones $g(x)$ y $h(x)$ que tienen el mismo límite para $x \to a$, la diferencia entre $f(x)$ y l está comprendida entre las diferencias $g(x) - l$ y $h(x) - l$, luego será menor que ε en valor absoluto si éstas lo son. Por tanto: *Si una función está comprendida entre otras dos que tienen el mismo límite para $x \to a$, tiene este mismo límite.*

Como en la definición de límite sólo intervienen los valores de $f(x)$ en la proximidad del punto $x = a$, pero no el valor $f(a)$, resulta: *Dos funciones que son iguales para todos los valores de x distintos del $x = a$, tienen el mismo límite para $x \to a$.*

Por tanto, es legítimo, antes de calcular el límite, hacer en la función todas las simplificaciones convenientes, incluso la supresión de factores comunes que se anulan para $x = a$, siempre que éstos no se anulen para otros valores de x próximos a a.

Así, en el ejemplo anterior 1, simplificaremos suprimiendo el factor x, y después calcularemos el límite.

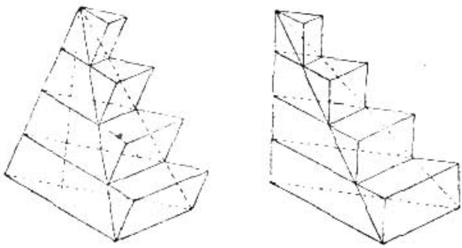
11. — Método infinitesimal o paso al límite.

Esta operación de tomar límites en una igualdad, o pasar al límite, es el fundamento del método infinitesimal.

Mas no vaya a creerse que éste consiste en sustituir una variable por su límite, lo que implicaría un error, y, por tanto, las conclusiones y fórmulas del Cálculo infinitesimal serían aproximadas. El método infinitesimal consiste en *pasar de una igualdad entre dos variables a otra igualdad entre sus límites;* es decir: de la igualdad $y = z$ se deduce: $\lim. y = \lim. z$ que es rigurosamente exacta.

Un ejemplo clásico aclarará esta idea. Una pirámide es límite de la suma de prismas que resultan tomando como bases las secciones por planos paralelos; pero no es legítimo tomar como volumen V de la pirámide la suma S_n de los prismas, pues, por muchos que sean éstos, hay una diferencia o error por defecto o por exceso, respecto de la pirámide dada.

Ahora bien: si tenemos dos pirámides de igual altura y bases equivalentes y efectuamos en ambas la descomposición con igual número de planos equidistantes, cada prisma es equivalente a su homólogo, como se demuestra en Geometría elemental; por tanto, $S_n = S'_n$ y tomando límites resulta la igualdad *rigurosamente* exacta: $V = V'$. *Es así como se demuestra en Geometría que dos pirámides de igual altura y bases equivalentes tienen igual volumen.*



En este ejemplo se admite intuitivamente la existencia de límite, o sea el volumen V; pero tal existencia resulta rigurosamente del importante teorema siguiente:

Teorema de las sucesiones monótonas convergentes.

Todo par de sucesiones numéricas del tipo:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots\cdots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$$

tales que la diferencia $b_n - a_n$ tiende a 0 al crecer n, determinan un número real que pertenece a todos los intervalos $[a_n, b_n]$.

Expresados decimalmente a_n y b_n, si su diferencia es menor que una unidad decimal de orden m, tienen comunes al menos $m - 1$ cifras decimales. Al crecer

n, las cifras comunes componen un número $\xi = E,\ a\ b\ c\ \ldots\ldots$ **contenido en todo intervalo** $[a_n, b_n]$.

Tal número, llamado *frontera*, es el único contenido en todos los intervalos; pues si hubiera otro, se conservaría $b_n - a_n$ mayor que la diferencia entre ambos, contra la hipótesis.

NOTAS

Ejemplos de método infinitesimal en Matemáticas elementales.

En Geometría elemental se utiliza frecuentemente el método infinitesimal; he aquí algunos ejemplos:

La longitud de una curva se define como límite de los perímetros de las quebradas inscritas o circunscritas; análogamente el área del círculo y de todas las figuras limitadas por curvas se define y calcula como límite de las áreas de polígonos inscritos o circunscritos, o bien, como límite de la suma de triángulos cuyo número va creciendo, a medida que tienden sus áreas a cero.

Este método, que consiste en sumar n elementos variables y pasar al límite para $n \to \infty$, se llama *integración*.

Son, pues, integraciones: el cálculo de la longitud de la circunferencia, del área del círculo, de la superficie lateral del cono o cilindro, del volumen del cono, etc., que se efectúan en Geometría elemental.

EJERCICIOS

1. — Demostrar: $\quad$ lím. sen $x = 0$, lím. cos $x = 1$ $\quad$ para $x \to 0$.

2. — Dice la obra de *Häffner* titulada: *Einführung in die Differential- und Integralrechnung*, en la pág. 117 (2.ª ed.):

"**En la gráfica se ve fácilmente que al hacerse el arco cada vez más pequeño, la cuerda (sen x) cada vez coincide más con su correspondiente arco x, y finalmente, *en el límite*, se puede considerar como igual a éste; de donde resulta que el límite de la razón del seno al arco es 1.**"

Vea el lector que es inadmisible este razonamiento; con él se probaría que un lado de un triángulo es igual a la suma de los otros dos, sustituyendo éstos por una quebrada que tiende a confundirse con aquél; ¡y guárdese el lector de esa engañosa frase "*en el límite*"!; pues para $x = 0$ no sólo coincide sen x con x, sino también con $2x$, con $8x$, con $\sqrt{x}$, ... ya que todos son nulos.

3. — Dar sucesiones $x_n \to 0$ tales que los correspondientes valores de la función del Ejemplo 3 tengan límite *aritmético*, a pesar de no existir límite *funcional*.

4. — Demostrar: si $f(x) < g(x)$ es lím. $f(x) \leq$ lím. $g(x)$. Dar ejemplos en que resultan iguales los límites.

FUNCIONES CONTINUAS

12. — Definición de la continuidad.

Hemos advertido que en la determinación del límite de $f(x)$ para $x \to a$ no interviene el valor $f(a)$ sino solamente los valores de $f(x)$ en la proximidad de a. Por tanto, puede ser:

$$f(a) \neq \text{lím.}\, f(x) \text{ para } x \to a$$

La función $f(x)$ se llama *continua* en el punto $x = a$, cuando el valor $f(a)$ que toma en él es también el límite a que tiende al acercarse x a dicho punto, es decir, cuando se verifica:

$$\text{lím.}\, f(x) = f(a) \text{ para } x \to a.$$

Cuando esta condición no se cumple, la función se dice *discontinua* en el punto a.

La función se llama *continua en un intervalo,* cuando sus valores en él cumplen la condición de continuidad en cada punto del intervalo, incluso en sus extremos.

Según el concepto de límite dado en la lección anterior, la definición de continuidad equivale a ésta:

El incremento $\Delta y = f(x) - f(a)$ puede hacerse en valor absoluto tan pequeño como se quiera, tomando el incremento $\Delta x = x - a$ suficientemente pequeño.

En términos precisos: dado un número positivo arbitrario ε, se verifica: $|\Delta y| < \varepsilon$, tomando $|\Delta x|$ menor que un cierto número δ.

Este es el significado claro de la imprecisa frase con que los autores clásicos expresaban la continuidad, diciendo que la función "varía por grados insensibles", es decir, al variar muy poco la variable varía poco la función. ¿Qué relación existe entre ambos incrementos? Este es uno de los problemas capitales del Cálculo diferencial, que pronto resolveremos.

La gráfica de una función continua, se llama *curva uniforme;* no se define, pues, como antiguamente, la continuidad de la función mediante la imprecisa intuición de *curva,* sino que, por el contrario, el concepto de *curva* se define mediante la noción clara y precisa de *función continua.*

Arco de curva uniforme es la parte de ésta que corresponde a un intervalo de la variable independiente x.

Todas las funciones elementales, simples y compuestas, son continuas en todo punto en que tienen valor determinado; sus puntos de discontinuidad son aislados y solamente aquellos en que la función no está definida. Sus gráficas se componen, pues, de arcos de curva. Esta propiedad general resultará más adelante en el cálculo de derivadas; pero podemos utilizarla ya, para calcular el límite de una función elemental cualquiera para $x \to a$, sustituyendo $x = a$.

EJEMPLO. He aquí el cálculo de algunos límites:

$$\text{Para } x \to 1, \text{ lím. } \frac{x^2+1}{2x^4-5} = \frac{1+1}{2-5} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Para } x \to \pi, \text{ lím. tg } x = \text{tg } \pi = 0$$

13. — Propiedades fundamentales de las funciones continuas.

De la definición de función continua y de las propiedades de los límites resulta: I. *La suma, diferencia, producto y cociente de funciones continuas es función continua, excepto en los puntos en que se anule la función divisor.*

En efecto, en la lección 6 demostraremos que el límite para $x \to a$ de las funciones continuas:

$$f(x) + g(x) \;;\; f(x) - g(x) \;;\; f(x) \,.\, g(x) \;;\; f(x) : g(x)$$

es respectivamente $f(a) \pm g(a)$; $f(a) \,.\, g(a)$; $f(a) : g(a)$, valor que toma en a la función compuesta.

EJERCICIO. — Fórmese el incremento de la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones continuas y se verá que tiende a 0, cuando tiende el incremento de x.

Resultará así, en virtud de la segunda definición (12) de continuidad, otra demostración del teorema.

Menos inmediatas son estas dos propiedades fundamentales, cuya demostración puede verse en las notas:

II. *Entre los valores de una función $f(x)$ continua en un intervalo completo $[a, b]$ hay un valor máximo absoluto M no superado por ningún otro; y un mínimo absoluto m, que no supera a ningún otro $f(x)$.* (Teorema de BOLZANO - WEIERSTRASS).

Esta propiedad de las funciones continuas no la tienen todas las funciones. Así, por ejemplo: la función $y = 1/x$ no es continua en todo el intervalo $[0,1]$, puesto que deja de serlo en el extremo $x = 0$; y no tiene valor máximo en $(0,1)$, sino que por el contrario, llega a exceder a cualquier número, por grande que sea, tomando x suficientemente pequeño.

III. *Si una función es continua en $[a, b]$ toma en (a, b) todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$*. (Teorema de BOLZANO).

En particular: si es positiva para $x = a$, y negativa para $x = b$, hay entre a y b un punto al menos en que se anula $f(x)$, es decir, al pasar la curva de uno a otro semiplano del eje x, corta a éste.

En esta propiedad se funda el cálculo de raíces de las ecuaciones. Una vez encontrados los valores a y b en que $f(x)$ toma signos contrarios, para aproximarnos más al valor de la raíz comprendida entre ambos se van sustituyendo valores intermedios, hasta llegar a la aproximación exigida.

EJEMPLO. Resolver la ecuación $\operatorname{tg} x = x$, que se presenta en Física. Con las tablas de tangentes naturales se encuentra:

$x = 180° + 77° = \pi + 1{,}34 \ldots = 4{,}48 \ldots$; $\operatorname{tg} x - x$ *negativa*

$x = 180° + 78° = \pi + 1{,}36 \ldots = 4{,}50 \ldots$; $\operatorname{tg} x - x$ positiva

Aproximando más, dando a x valores de $10'$ en $10'$ y después de $1'$ en $1'$, resulta:

$$x \sim 257° \, 27' = 4{,}493 \ldots$$

Representar gráficamente las raíces como intersección de la tangentoide con la bisectriz de los ejes: $y = x$.

14. — Verdadero valor de las expresiones indeterminadas.

Hemos visto en el ejemplo $(x^2 + 2x) : x$ que esta función está bien determinada, es decir, tiene un valor numérico para todo valor de x, excepto para el $x = 0$, en el cual carece de significado, pues en Aritmética no tiene sentido el cociente $0 : 0$. Si representamos gráficamente la función, vemos que ésta es igual a $x + 2$ para todo valor de $x \neq 0$ y su gráfica es una línea recta, excepto el punto en que corta al eje y. Parece, pues, natural *completar* la función, asignándole al valor $x = 0$ el correspondiente $y = 2$.

Regla general: si al sustituir $x = a$ en la función $f(x)$ resulta una expresión aritmética que carece de valor numérico, completaremos la función, asignándole como valor en el punto $x = a$ el límite a que tiende $f(x)$ para $x \to a$; es decir, ya que $f(a)$ carece de sentido, le asignamos el valor siguiente:

$$f(a) = \text{lím.}\, f(x) \quad \text{para } x \to a.$$

Este número con el cual completamos la función en el punto $x = a$ suele llamarse *verdadero valor* de $f(x)$ en dicho punto; la justificación de este nombre es la siguiente: si asignáramos a $f(x)$ otro valor cualquiera distinto del lím. $f(x)$, resultaría una función discontinua; en cambio, adoptando como valor $f(a)$ este límite, hacemos que la función sea *continua* en el punto $x = a$. Cuando no exista límite, no podemos conseguir esto. Así sucede en los ejemplos del párrafo anterior.

El cálculo del verdadero valor de una función en el punto $x = a$, se reduce, como vemos, a calcular su límite para $x \to a$, y como las reglas de cálculo de límites son ineficaces en estos casos, es preciso recurrir a artificios especiales; uno de ellos es la supresión de factores comunes, como se explica a continuación.

15. — Expresiones indeterminadas de la forma 0 : 0.

Este es el caso más importante, en que la función $f(x)$ carece de valor para $x = a$, es decir: cuando $f(x)$ es un cociente $f(x) = \varphi(x) : \psi(x)$, cuyos dos términos numerador y denominador se anulan para $x = a$.

Cuando $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son polinomios, ambos son divisibles por el binomio $x - a$, según se demuestra en Algebra, y simplificando la fracción antes de tomar límites, mediante la supresión del factor común $x - a$, si en la nueva fracción no se anulan numerador ni denominador, basta poner $x = a$ y resulta el límite buscado.

EJEMPLOS. — Hemos calculado en el párrafo anterior:

$$\text{lím. } (x^2 + 2x) : x = \text{lím. } (x + 2) = 2$$

Análogamente resulta:

$$\frac{x-1}{x^4-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x^3+x^2+x+1)} = \frac{1}{x^3+x^2+x+1}$$

El límite de la primera es igual al de la última, y éste se calcula sustituyendo $x = 1$; así resulta 1/4.

Vemos en estos ejemplos, que el límite de una función que adopta la forma 0/0, puede ver distinto, según cual sea la función que da origen a dicha forma; por esto suele llamarse *expresión indeterminada,* como sus análogas, que estudiaremos más adelante.

Objeto esencial del *Cálculo diferencial* es el cálculo de límites indeterminados del tipo $^0/_0$ mediante el algoritmo de las *derivadas.*

16. — Funciones discontinuas.

La definición de continuidad en el punto $x = a$ exige que exista lím. y; y además, que coincida con $f(a)$.

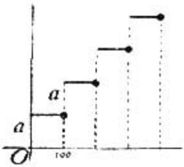
Tenemos, pues, dos causas fundamentales de discontinuidad:

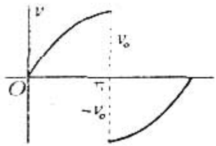
1.° Existe lím. y pero no tiene valor numérico $f(a)$, por presentarse *una expresión aritmética que carece de sentido*; entonces cabe completar la función haciéndola continua,, adoptando el *verdadero valor;* la discontinuidad se llama *evitable*.

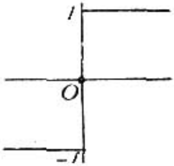
2.° No existe lím. y, es decir, al tender x a a, no tiende y hacia ningún valor único. Si hay un límite por la derecha y otro por la izquierda, la diferencia entre ambos se llama *salto,* y la discontinuidad de 1.ª especie. Tal sucede en los ejemplos que siguen.

Se llaman de 2.ª especie las discontinuidades en que no existen límites laterales; tal es la que ofrece en el origen el ejemplo (9.3).

EJEMPLO 1. — He aquí una función discontinua, en la cual, por pequeño que sea el incremento de la variable, el incremento de la función se conserva constante y no tiende hacia cero. El flete para mercaderías en los ferrocarriles suele calcularse por fracciones indivisibles de 100 kg.; por tanto si el flete para cada 100 kg. es a, el flete correspondiente a 300 kg. es $3\,a$, y para $300 + h$, cualquiera que sea el incremento h, se paga como 400, es decir: $4\,a$. Por tanto, por pequeño que sea el incremento positivo de la variable, el de la función vale a; hay, pues, un salto de altura a.







EJEMPLO 2. — Si desviamos un péndulo OA el ángulo t hasta la posición OA' y lo abandonamos a su propio peso, desciende con velocidad creciente y al llegar al punto más bajo, la velocidad (según la Dinámica), es:

$$v = 2\sqrt{gl}\,\mathrm{sen}\,t/2 \qquad -\pi < t < +\pi$$

siendo l la longitud y g la constante de la gravedad, o sea 981 en sistema c.g.s.

Al crecer t desde 0 hasta valores cercanos a π, crece v aproximándose al valor $v_0 = 2\sqrt{gl}$; análogamente, para valores negativos de t toma v valores de signo contrario. La gráfica tiene la forma indicada en la figura y se repite periódicamente, pues al incrementar t en 2π, toma v el mismo valor. Sin embargo, para $t = \pi$ el valor de la función no es el dado por la fórmula, según la cual, v alcanzaría el valor máximo v_0, sino que, por el contrario, el *péndulo quedaría inmóvil, en equilibrio inestable en su posición OZ; por tanto,* no hay ningún valor de v correspondiente al $t = \pi$ ni al $t = -\pi$.

Para valores de t crecientes y que tiendan hacia π, los valores de v tienen el límite v_0; para valores de t superiores a π, y que tiendan a π, la función tiende hacia $-v_0$.

EJEMPLO 3. — La función $|x| : x$, o bien: $x : |x|$ tiene en el origen discontinuidad de primera especie, con salto 2. Esta función suele designarse sg x (signo de x); vale 1 para $x > 0$; -1 para $x < 0$.

NOTAS

Conservación de signo en el entorno de un punto.

Si $f(x)$ es continua y $f(a) > 0$, hay un entorno en el cual difiere de $f(x)$ en menos de $f(a)$, es decir, $f(a) - f(x) < f(a)$ luego $f(x) > 0$. Análogamente, si $f(a) < 0$ es $f(x) < 0$ en un entorno del punto a.

Corolario: Si $f(x)$ es continua en el punto a, y es $f(a) > c$ se conserva $f(x) > c$ en todo un entorno de c; si es $f(a) < c$, se conserva $f(x) < c$. Basta, en efecto, observar que siendo $f(a) - c > 0$ en el primer caso, debe ser $f(x) - c > 0$ en un entorno; y análogamente en el otro caso.

Demostración del teorema de Bolzano.

El mismo procedimiento seguido para el cálculo de las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ nos da la demostración del teorema de Bolzano. Supongamos, p. ej.: $f(2) < 0$, $f(3) > 0$; si dividimos el intervalo $(2, 3)$ en 10 partes iguales, existirá uno, en que pasará de $-$ a $+$; sea, p. ej.: $f(2{,}7) < 0$, $f(2{,}8) > 0$; así siguiendo, o se llega a un valor en que se anula la función, o se va formando un número $c = 2{,}7051\ldots$ con las cifras calculadas; y debe ser forzosamente $f(c) = 0$; puesto que en todo entorno suyo, por pequeño que sea, la función toma valores positivos y negativos.

Demostración del teorema de Bolzano-Weierstrass.

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, dividido éste en dos partes iguales, caben dos casos:

1.° En cada intervalo parcial hay algún valor de $f(x)$ no superado en el otro. Ambos valores son, por tanto, iguales; y no estando cada uno superado por ningún otro de $f(x)$, es el máximo absoluto.

2.° Hay al menos un intervalo parcial $[a_1, b_1]$ donde son superados *todos* los valores del otro. Bisecado $[a_1, b_1]$ sea $[a_2, b_2]$ un intervalo parcial donde son superados *todos* los valores del otro; etc.

Si en este proceso de bisecciones no se presenta el primer caso, resulta una sucesión indefinida de intervalos, que por el teorema (11) tienen un punto común p.

El valor $f(p)$ no puede ser superado por ningún otro; pues suponiendo $f(p) < f(q)$ se conservará $f(x) < f(q)$ en todo un entorno de p (V. corolario); y como para n suficientemente grande ese entorno, que no contiene a q, contiene un $[a_n, b_n]$ donde son superados *todos* los valores restantes, resulta contradicción. El valor $f(p)$ es, por tanto, máximo.

Con leve cambio de palabras, o bien aplicando la conclusión a la función $-f(x)$, resulta la existencia del mínimo de $f(x)$.

EJERCICIOS

1. — Dar funciones discontinuas sencillas que cumplan la condición de Bolzano en $[a, b]$, esto es, tomen todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$.

2. — Observar que la función discontinua del Ej. 3(9) cumple esa condición en *todo* intervalo.

3. — Una función discontinua en un punto, ¿puede ser continua en un intervalo que tenga ese extremo? Obsérvese que en los siete ejemplos de esta lección y la anterior, el comportamiento es distinto.

LECCIÓN 5

INFINITESIMOS

17. — Propiedades fundamentales.

Toda variable que tiene límite 0 se llama *infinitamente pequeña*: más brevemente, se llama también *infinitésimo*.

La condición esencial del infinitésimo es la *variabilidad* y tener por *límite* 0. Hablar de *números* infinitamente pequeños es un *contrasentido; pues siendo un número invariable, no puede llegar a* ser menor que cualquier otro número, que es la condición esencial del infinitésimo.

I. *La suma de infinitésimos (en número finito de sumandos) es un infinitésimo.*

Pues si tenemos la suma $y_1 + y_2 + \ldots + y_n$, ésta llega a conservarse $< \varepsilon$ en valor absoluto, desde el momento en que todos los sumandos sean menores que $\varepsilon : n$.

EJEMPLO. — La suma $x^2 + \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x + 2x^3$, llega a ser menor que 0,001, tomando $|x| < 0{,}0001$; pues entonces cada uno de los sumandos es inferior a 0,0002.

Nota. — Es indispensable que el número de sumandos sea *finito;* pues si al tender a 0 cada infinitésimo, el número de ellos va aumentando, la suma puede tener un límite distinto de 0. Tal sucede en el cálculo de áreas y volúmenes de figuras curvilíneas planas o espaciales. Como veremos, se descomponen en trozos que van disminuyendo y tendiendo hacia cero, al mismo tiempo que el número de ellos crece infinitamente; la suma de todos estos infinitésimos tiene un límite distinto de cero que es el área o volumen buscado. La determinación de tales límites es objeto del Cálculo integral.

Otro ejemplo: la suma de n sumandos iguales a $1/n$ vale 1, aunque son infinitésimos al crecer n infinitamente.

II. *El producto de un infinitésimo por una constante, o por una variable acotada, es decir, cuyo valor absoluto se conserva inferior a un número fijo k, es un infinitésimo.*

En efecto, si en el producto $y.z$ se conserva $|z| < k$ y la variable y llega a ser tan pequeña como se quiera, desde el momento en que llegue a ser $|y| < \varepsilon : k$, el producto será inferior a ε.

Análogamente: *el cociente de un infinitésimo por una constante no nula, o por una variable cuyo valor absoluto se conserva superior a un número positivo, es un infinitésimo.*

18. — Comparación de infinitésimos.

Para $x \to 0$, son infinitésimas las variables:

$$x, x^2, x^3, \ldots, x^m, \ldots$$

y éstas se toman como tipos de comparación para las demás variables infinitesimales. También pueden tomarse potencias de exponente fraccionario.

El infinitésimo x se llama de primer orden, el x^2 de segundo orden, ..., el x^m se dice de orden m.

Dos infinitésimos α y β se llaman de *igual* orden cuando su cociente tiene un límite finito y distinto de cero. Por tanto, kx^m, cualquiera que sea el coeficiente $k \neq 0$, es también de orden m.

Cuando el cociente α/β tiene límite 0, se dice que α es de orden *superior* a β; entonces tiene β/α límite infinito.

Cuando el cociente de α por β carece de límite, finito ni infinito, se dice que ambos infinitésimos no son comparables.

EJEMPLOS. — Son de segundo orden los infinitésimos: $4x^2$, $\frac{1}{2}x^2$, πx^2.

El infinitésimo $3\sqrt{x}$ es de orden $\frac{1}{2}$.

El infinitésimo x sen π/x no es comparable con el x, pues el cociente carece de límite, como se ha visto en (8).

Para $x \to a$, se adopta $x - a$ como infinitésimo de 1.er orden. Ejemplo: ¿de qué orden es $\operatorname{ctg} x$ para $x \to \pi/2$? Contéstese después de leer (20).

19. — Infinitésimos equivalentes.

Dos variables cualesquiera (en particular dos infinitésimos α y β) se llaman *equivalentes*, cuando su cociente tiene límite igual a 1.

La diferencia de dos infinitésimos equivalentes es un infinitésimo de orden superior. En efecto: por ser

$$\text{lím. } \alpha/\beta = 1 \quad \text{será } \alpha/\beta = 1 + \delta$$

siendo δ un infinitésimo; por tanto: $\alpha - \beta = \beta\delta$, es decir de orden superior a β.

Recíprocamente, de esta igualdad resulta la anterior, es decir: si la diferencia de dos infinitésimos de igual orden es de orden superior a ambos, éstos son equivalentes.

Si un infinitésimo α es igual a otro β más un infinitésimo γ de orden superior a β, es decir: $\alpha = \beta + \gamma$, el sumando β suele llamarse *parte principal* de α, y es equivalente a α. Dada una suma de infinitésimos de órdenes diversos, el de menor orden es la parte principal, equivalente al infinitésimo suma. Esta operación se llama *despreciar* infinitésimos de orden superior; y aunque la *parte principal* no es igual al infinitésimo suma, es equivalente a él, es decir, su cociente tiene límite 1.

Una variable finita puede considerarse como equivalente a su límite, puesto que la diferencia entre ambos es infinitésima. Es lo mismo escribir:

$$\text{lím. } y = l \qquad \text{o bien: } y = l + \delta$$

siendo δ infinitésimo. De esta expresión de cada variable, igual a su límite más un infinitésimo, haremos uso frecuente.

EJEMPLO. — Demostremos que para $x \to 0$ es lím. $\cos x = 1$.

En efecto: $1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}x < 2(\tfrac{1}{2}x)^2 = \tfrac{1}{2}x^2$, que es un infinitésimo.

20. — Equivalencia de los infinitésimos x, sen x, tg x.

Para $x \to 0$ tienen límite cero el *sen x* y *tg x*. Vamos a demostrar que estos tres infinitésimos son equivalentes.

De la definición de longitud de un arco, como límite de los perímetros de las quebradas inscriptas y circunscriptas (8) resulta:

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

es decir: el arco es mayor que el seno y menor que la tangente.

Quizás no sea inútil recordar que son tres números abstractos, razones de longitudes. Dividiendo $\operatorname{sen} x$ por los tres miembros, resulta esta acotación de sentido opuesto:

$$1 > (\operatorname{sen} x)/x > \cos x$$

y dividiendo los mismos tres miembros por $\operatorname{tg} x$, resulta esta otra:

$$\cos x < x/\operatorname{tg} x < 1$$

Al tender x a 0, con signo cualquiera, es:

$$1 - \operatorname{sen} x : x < 1 - \cos x \qquad \text{infinitésimo}$$

$$1 - x : \operatorname{tg} x < 1 - \cos x \qquad \text{,,}$$

y de la definición de límite resulta:

$$\text{lím. } \operatorname{sen} x : x = 1 \qquad \text{para } x \to 0$$

$$\text{lím. } x : \operatorname{tg} x = 1 \qquad \text{,,} \quad \text{,,}$$

Nota. — Puesto que la tangente, el seno y el arco son equivalentes, tenemos estos infinitésimos también equivalentes: x, arc sen x, arc tg x.

EJEMPLO. — El infinitésimo $1 - \cos x$ es equivalente a $\tfrac{1}{2}x^2$. En efecto, basta sustituir en el ejemplo anterior (19) el seno por el arco.

21. — Valores aproximados.

La palabra *infinitésimo* se usa impropiamente en las ciencias de aplicación, designando con ella un número *muy pequeño*, es decir, despreciable respecto del grado de aproximación prefijado. Dentro de este límite de error, el seno y la tangente de un arco pequeño pueden sustituirse por el arco; pero debemos precisar bien qué entendemos por suficientemente pequeño.

Puesto que la longitud de la semicircunferencia de radio 1 es π,

la longitud de 1° es π:180 = 0,01745....
" " " 2° " 0,03490....
" " " 3° " 0,05236....
....

La diferencia entre el seno y el arco es equivalente a la sexta parte del cubo del arco (más adelante se verá que es menor). Por tanto, estos errores $x - \operatorname{sen} x$ y $\operatorname{tg} x - x$ valen aproximadamente:

Para $x \leq 1°$, $x - \operatorname{sen} x < 0{,}000001$, $\operatorname{tg} x - x < 0{,}000002$
" $x \leq 2°$, $x - \operatorname{sen} x < 0{,}00001$, $\operatorname{tg} x - x < 0{,}00002$
" $x \leq 3°$, $x - \operatorname{sen} x < 0{,}0001$, $\operatorname{tg} x - x < 0{,}0001$

Será, pues, legítima la sustitución del seno por el arco, hasta amplitudes de 3°, en cálculos de cuatro decimales exactas, pero no en cálculos que exijan seis decimales exactas, en los cuales sólo será legítima la sustitución para arcos menores que 1° y análogamente en los demás casos.

Advirtamos, de una vez para siempre, que la igualdad *aproximada* de dos números, se expresa por el signo $a \backsim b$; pero la palabra *aproximada* carecerá de sentido si no se da una cota superior de error ,es decir, un número que no puede superar la diferencia $a - b$ o $b - a$, tomada en valor absoluto.

EJEMPLO. — Las visuales dirigidas a la base y al punto más alto de una torre situada a 1000 m. del observador, forman con la horizontal ángulos de 45′ y 2° respectivamente. Calculemos la altura de la torre.

La fórmula exacta es: $h = 1000$ (tg 2° — tg 45′) y sustituyendo las tangentes por los arcos resulta:

$$\operatorname{tg} 2° \backsim 0{,}03490\ldots.$$
$$\operatorname{tg} 45' \backsim \tfrac{3}{4} \cdot 0{,}01745\ldots. = 0{,}01308\ldots..$$

de donde resulta: $h \backsim 21{,}82$ m.

El error en minuendo y sustraendo es por defecto e inferior a 0,02, luego el error final es menor que 2 cm.

EJERCICIOS

1. — Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo infinitésimo, ¿qué elementos *infinitésimos tiene?*

2. — Si un triángulo rectángulo tiene los dos catetos infinitésimos del mismo *orden, ¿cómo* es la *hipotenusa?*

3. — ¿Cómo deben ser los ángulos de un triángulo para que sus tres lados sean infinitésimos equivalentes?

Lección 6

CALCULO DE LIMITES

22. — Límite de una suma.

El límite de la suma de un número finito de variables que tienen límites, es la suma de los límites de estas variables.

Sean las variables y_1, y_2 .... y_m que tienen los límites l_1, l_2, ... l_m, es decir:

$$y_1 = l_1 + \delta_1, \quad y_2 = l_2 + \delta_2, \; \ldots, \; y_m = l_m + \delta_m.$$

siendo δ_1, δ_2, ... δ_m infinitésimos. Sumando:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_m = l_1 + l_2 + \ldots + l_m + (\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_m)$$

y como la suma de infinitésimos es un infinitésimo, resulta:

$$\text{lím.} \; (y_1 + y_2 + \ldots + y_m) = l_1 + l_2 + \ldots + l_m$$

Nota. — Vamos a poner varios ejemplos, en los cuales no es aplicable el teorema que acabamos de enunciar, para hacer ver el peligro que encierra el prescindir de la restricción impuesta al número de sumandos.

Ya vimos en (17) la suma de n sumandos:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots\ldots + \frac{1}{n},$$

supongamos que n crece infinitamente; cada uno de estos sumandos tiene por límite 0. Si aplicáramos el teorema anterior, el límite de la suma sería 0. Sin embargo, no es así, puesto que dicha suma vale exactamente 1.

Otro ejemplo sea la suma de n sumandos:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Si n crece infinitamente, cada uno de los sumandos tiene límite 0; sin embargo, la suma tiene límite infinito, pues su valor es $n : \sqrt{n} = \sqrt{n}$.

23. — Límite de un producto.

El límite de ky, siendo k un coeficiente constante, es k . lím y.

Pues siendo $y = l + \delta$, es $ky = kl \pm$ infinitésimo.

El límite de un producto de un número finito de variables es el producto de los límites de los factores.

Sean, por ejemplo, dos variables y_1, y_2 que tienden hacia los límites l_1, l_2. Es decir:

$$y_1 = l_1 + \delta_1 \qquad y_2 = l_2 + \delta_2$$

siendo infinitésimos δ_1, δ_2. Multiplicando ambas igualdades:

$$y_1\, y_2 = l_1\, l_2 + \quad (\delta_1\, l_2 + \delta_2\, l_1 + \delta_1\, \delta_2)$$

y como la suma de tres infinitésimos lo es también, resulta:

$$\text{lím. } y_1\, y_2 = l_1\, l_2 .$$

y lo mismo para m factores:

$$\text{lím. } y_1\, y_2 \ldots\ldots y_m = l_1\, l_2 \ldots\ldots l_m .$$

EJERCICIO. — Demuéstrese esta fórmula general por el mismo método seguido para dos factores, multiplicando las m igualdades, y observando que todos los términos, excepto $l_1\; l_2\; \ldots\; l_m$ son infinitésimos.

Demuéstrese también por *inducción*, es decir, probando, por lo ya demostrado para dos factores, que si es cierta para varios factores lo es para uno más.

Nota. — La aplicación de la regla cuando el número de factores es infinito o crece indefinidamente, conduce a errores, como en el ejemplo siguiente: sean n factores iguales a $1 + 1/n$; si aplicáramos la regla, como el límite de cada factor es 1, el límite del producto sería 1.

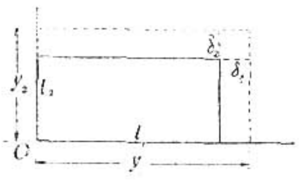
Sin embargo, veremos muy pronto que el límite es el número:

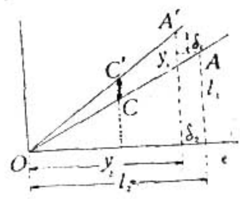
$$e = 2{,}71828\ldots.$$

En resumen: para poder aplicar este teorema, las condiciones que deben cumplirse son: que cada uno de los factores tenga límite y que el número de esos factores, sea fijo o variable, se conserve finito.

Interpretación gráfica.

Geométricamente resulta una interpretación interesante: el producto $y_1\, y_2$ representa el área del rectángulo de lados $y_1\, y_2$; el producto $l_1\, l_2$ el área del rectángulo análogo formado con l_1 y l_2; la diferencia entre ambos se compone de los rectángulos $\delta_1\, l_2$, $\delta_2\, l_1$ y del rectángulo $\delta_1\, \delta_2$.





La suma de los tres puede hacerse tan pequeña como se quiera, tomando los incrementos δ_1 y δ_2 suficientemente pequeños y resulta el teorema.

24. — Límite de un cociente.

Límite de un cociente de dos funciones, las cuales tienen límites finitos, es el cociente de los límites, cuando el límite del denominador sea distinto de 0.

Sean: $y_1 = l_1 + \delta_1$, $y_2 = l_2 + \delta_2$; la diferencia:

$$\frac{l_1 + \delta_1}{l_2 + \delta_2} - \frac{l_1}{l_2} = \frac{\delta_1 l_2 - \delta_2 l_1}{(l_2 + \delta_2)\, l_2}$$

es un infinitésimo en virtud del teorema (17, II); pues el denominador tiende al límite $l_2^2 > 0$, su recíproco es finito, y el numerador es infinitésimo. Por tanto:

$$\text{lím.}\ \frac{y_1}{y_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

También este teorema del cociente tiene interpretación geométrica interesante. *El cociente $y_1 : y_2$ representa el coeficiente angular o pendiente del vector OA*, siendo (y_1, y_2) las coordenadas de A; y el cociente $l_1 : l_2$ es la pendiente de OA', siendo (l_2, l_1) las coordenadas de A'.

Estas rectas OA y OA' interceptan sobre la vertical del punto 1 ordenadas iguales a dichas pendientes; luego CC' mide el incremento del cociente, y puede hacerse tan pequeño como se quiera tomando δ_1 y δ_2 suficientemente pequeñas. (Véase la segunda figura anterior).

25. — Límites de logaritmos y exponenciales.

Como las funciones *exponencial y logarítmica son continuas*, se tiene para $x \to a$:

$$lím.\ b^x = b^a \quad ; \quad lím.\ \log x = \log a$$

Más general: si $f(x)$, $\alpha(x)$ son continuas, se tiene:

$$y = f(x)^{\alpha(x)} = b^{\log y} \quad ; \quad \log y = \alpha(x) \,.\log f(x)$$

cualquiera que sea la base b de los logaritmos; y tomando límites para $x \to a$, resulta:

$$\text{lím. log. } y = \alpha(a)\ \log\ f(a)$$

$$\text{lím. } y = b^{\text{lím. log } y} = f(a)^{\alpha(a)}$$

Basta, pues, sustituir $x = a$ y se obtiene el límite.

EJEMPLOS. — Para $x \to 0$, resultan estos límites:

$$\text{lím. } 2^x = 2^0 = 1 \quad ; \quad \text{lím. } \log(x+1) = \log. 1 = 0.$$

$$\text{lím. } (x+1)^{x-1} = 1^{-1} = 1$$

Nota. — Más adelante estudiaremos los casos en que las reglas de esta lección no dan los límites buscados.

Tal sucede, por ejemplo, cuando dividendo y divisor tienen límite 0; en tales casos, los límites se llaman *indeterminados*, porque no están determinados por los límites de los datos, y según cuales sean las funciones, resultan límites diversos.

26. — Sustitución de variables equivalentes.

En (19) hemos llamado *equivalentes* a dos varaibles cuyo cociente tiene límite 1.

Si en una *expresión se sustituye el factor o divisor* α *por otro equivalente* β, el límite de la expresión no varía.

En efecto, sustituir α por β equivale a multiplicar la expresión por β/α; y *como el límite de este cociente es 1, el límite de la expresión queda multiplicado por 1*, es decir, no varía.

EJEMPLO 1. — Sean las expresiones:

$$\frac{2x \, . \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{tg}^3 2x} \; , \quad \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{2 \operatorname{tg} x} \; ;$$

sustituyendo sen x, arc sen x, tg x por su equivalente x, y el infinitésimo tg $2x$ por su equivalente $2x$, en cada una de las dos fracciones, sus límites no se alteran, y basta por tanto calcular los límites de

$$\frac{2x^3}{8x^3} \; , \quad \frac{x}{2x}$$

que son, respectivamente, ¼ y ½.

EJEMPLO 2. — Puesto que x, sen x, tg x, son equivalentes, sus diferencias son de orden superior al primero. Más adelante demostraremos:

$$x - \operatorname{sen} x, \; \operatorname{tg} x - x, \; \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$$

son respectivamente equivalentes a:

$$\frac{x^3}{6} \; , \quad \frac{x^3}{3} \; , \quad \frac{x^3}{2}$$

Esta última resulta inmediatamente, pues:

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x (1 - \cos x) : \cos x$$

y sustituyendo sen x por x, y $1 - \cos x$ por $\frac{1}{2}x^2$ resulta equivalente a $\frac{1}{2}x^3$.

Nota. — Hemos demostrado que la sustitución de un infinitésimo por otro equivalente no altera el *límite cuando aquél se presenta como factor o divisor;* pero no es legítima la sustitución cuando se presenta como sumando. Es decir: la supresión de sumandos infinitésimos de orden superior puede conducir a resultados erróneos.

Ejemplos varios de esta operación ilegítima pueden verse en (32).

LECCIÓN 7

VARIABLES INFINITAS Y LIMITES INFINITOS

27. — Generalizaciones del concepto de límite.

Recordemos la definición dada en (9).

I. *Límite finito para x finito.* — Hemos definido el límite de $f(x)$ para un valor finito $x = a$ diciendo:

$$\text{lím. } f(x) = l \qquad \text{para } x \to a$$

cuando es: $$|f(x) - l| < \varepsilon \qquad \text{tomando } |\Delta x| < \delta;$$

excepto para el valor $x = a$ en el cual $f(x)$ puede tomar un valor cualquiera o no tener valor. Vamos a generalizar este concepto.

II. *Límite finito para $x \to \infty$.* — Se dice que la función $f(x)$ tiende hacia el límite finito l para $x \to \infty$, cuando se verifica que el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y el límite l llega a ser menor que un número ε, tan pequeño como se quiera, con tal de tomar a x *suficientemente grande*, es decir, mayor que un cierto número H.

Escribiremos lím. $f(x) = l$ para $x \to \infty$ cuando sea

$$|f(x) - l| < \varepsilon \text{ para } |x| > H.$$

La recta $y = l$ a la que se aproxima la curva, llegando a diferir de ella tan poco como se quiera, se llama *asíntota*.

III. *Límite infinito para x finito.* — Se dice que la función $f(x)$ tiende hacia el límite ∞ para $x \to a$ cuando $f(x)$ llega a ser mayor que cualquier número dado K por grande que sea, con tal de tomar a x suficientemente próxima a a.

Escribiremos: lím. $f(x) = \infty$ para $x \to a$ cuando $|f(x)| > K$, para $|\Delta x| < \delta$.

Si la función se conserva positiva, escribiremos:

$$\text{lím. } f(x) = +\infty,$$

y si se conserva negativa:

$$\text{lím. } f(x) = -\infty.$$

La curva se aproxima a la recta $x = a$, llegando la distancia a ser tan pequeña como se quiera. Esta recta $x = a$ es también *asíntota* de la curva.

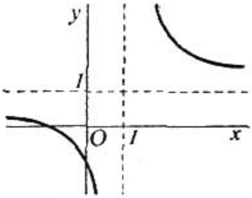
Por abreviar se dice con frecuencia que una función *es infinita* o *se hace infinita* para $x = a$, cuando tiene límite ∞ al tender x a a, pero no debe olvidarse el significado verdadero de esta frase. Así, por ejemplo, decimos que la tangente de 90° o $\pi/2$ es ∞, en vez de decir, que el cuadrante carece de tangente, pero que tg x crece infinitamente cuando $x \to \pi/2$. Este es el significado de la expresión incorrecta, pero de uso corriente: tg $90° = \infty$.

IV. *Límite infinito para* $x \to \infty$. Se dice que $f(x)$ tiene límite ∞ para $x \to \infty$, cuando se verifica que $f(x)$ llega a ser mayor que cualquier número dado K, por grande que sea, con tal de tomar $|x|$ suficientemente grande, es decir, mayor que otro número H.

Escribiremos: lím. $f(x) = \infty$ para $x \to \infty$.

$$\text{cuando: } |f(x)| > K, \text{ para } |x| > H.$$

EJEMPLO 1. — Para ver la representación gráfica de los diversos tipos de límite, sea, por ejemplo la función:



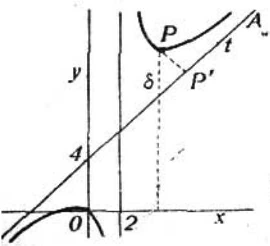
$$\frac{x+1}{x-1}$$

y construyamos la gráfica correspondiente.

Veamos que ésta nos suministra ejemplos de los tipos I, II, III.

Para $x = -1$ la función se anula; para $x = 0$ es $y = -1$; tenemos así puntos de intersección con los ejes. Si x tiende hacia 0, por ser función continua basta sustituir $x = 0$ y resulta: lím. $y = -1$ (tipo I).

Si damos a x el valor 1, la función carece de valor numérico; pero si damos valores próximos a 1, el denominador $x - 1$ es un infinitésimo y la función tiene límite ∞, con signo + o — según sea $x > 1$ o bien $x < 1$; pues siendo positivo el numerador, la fracción tiene el mismo signo del denominador; la curva se aleja, pues, infinitamente hacia arriba para valores próximos al $x = 1$, *pero situados a la derecha; y hacia abajo para los valores a la izquierda* del $x = 1$. Prescindiendo del signo de y podemos escribir: lím. $y = \infty$ (tipo III). La recta $x = 1$ es una asíntota de la curva. Si hacemos crecer infinitamente x hacia la derecha o hacia la izquierda, es decir, tomando valores positivos o negativos, la ordenada y tiende hacia 1, pues difiere de 1 en la fracción $2:(x-1)$ que es infinitésima; luego lím. $y = 1$ (tipo II). La recta $y = 1$ es otra asíntota.



EJEMPLO 2. — Sea la función

$$\frac{x^2 + 2x}{x - 2}$$

Con razonamiento análogo resulta:

lím. $y = \infty$ para $x \to 2$; (tipo III)

lím. $y = \infty$ para $x \to \infty$; (tipo IV)

La curva, tiene por tanto, una asíntota $x = 2$; para estudiar la otra rama infinita, separemos del cociente su parte entera y tendremos:

$$y = x + 4 + \frac{8}{x-2}$$

Si construimos la recta $y = x + 4$, la diferencia de ordenadas con la curva es una *fracción infinitésima*, para $x \to \infty$; *luego también la recta* $y = x + 4$ es asíntota, quedando la curva por encima de ella, en el primer cuadrante; por debajo en el tercero.

Para que este error sea menor que 0,01 deberá tomarse x superior a 800, es decir: la aproximación de la curva a su asíntota es muy lenta; al contrario de lo que sucede *en el ejemplo siguiente*.

EJEMPLO 3. — Representar la curva exponencial $y = 3^x$ con unidad 1 cm., y calcular desde qué valor de x la curva coincide prácticamente con el semieje $-x$.

Solución: desde $x = -5$ el error es $< 0{,}005$.

28. — Principio del crecimiento indefinido.

No se confunda el crecimiento *indefinido* (o crecimiento constante, o monotonía o crecimiento sin fin) con el crecimiento *infinito*, es decir, que llega a superar a cualquier número. Por ejemplo, si se agregan cifras 1 en la expresión 0,1111 . . . . crece indefinidamente, pero no infinitamente, pues se conserva *acotada*, es decir, menor que un número fijo (por ejemplo, menor que 1).

Caben dos casos: Si la variable creciente no está acotada, tiene *límite* ∞. *Si está acotada, su parte entera no puede exceder a cierto* valor, alcanzado el cual, las décimas no pueden pasar de 9; luego desde un lugar en adelante dicha cifra alcanzará un máximo, y fijada ya ésta, las centésimas llegarán a un máximo no superior a 9, etc. El número así formado con estas cifras es el límite de la variable, puesto que ésta difiere de él en menos de una unidad de un orden tan avanzado como se quiera.

Resulta así el teorema fundamental:

Toda variable creciente acotada tiene un límite finito. De otro modo: ***Toda variable creciente tiene límite, finito o infinito.***

EJEMPLOS. — 1. Al agregar cifras decimales sucesivas abitrarias a la derecha del 0, se forma una sucesión creciente $0{,}a$; $0{,}ab$; $0{,}abc$; ... que converge hacia el número real, $0{,}abcd$ ... menor que 1.

2. — Si un peso se coloca a interés compuesto al 100 % anual se convierte en 2 al cabo de un año; si se acumulan intereses al vencer el primer semestre, resultan $(1 + \frac{1}{2})^2 = 2{,}25$; si se acumulan intereses por trimestres, por meses, *por días*, ... crece el resultado; sin embargo, esto crecimiento indefinido es finito, como veremos en (42) y el límite es 2,71828....

29. — Límites indeterminados.

De las definiciones anteriores, resulta:

Si una variable y es infinitésima, su recíproca $1:y$ *es infinita, y recíprocamente.*

Esta propiedad permite reducir unos casos de límite indeterminado a otros, por ejemplo al tipo $^0/_0$, del modo siguiente:

Tipo $0 . \infty$. Es decir un factor $f(x)$ tiende a 0 y el otro $\varphi(x)$ tiende a ∞. Podemos trasformar el producto $f(x) . \varphi(x)$ así:

$$\frac{f(x)}{1 : \varphi(x)}$$

que es del tipo $0 : 0$.

Tipo $\infty : \infty$. El cociente $f(x) : \varphi(x)$ puede escribirse así:

$$[1 : \varphi(x)] : [1 : f(x)]$$

que es del tipo $0 : 0$.

Tipo $\infty - \infty$. La diferencia $f(x) - \varphi(x)$ de dos funciones que tienden ambas a $+\infty$, se puede escribir así, llamando $F(x)$ y $\Phi(x)$ a las recíprocas:

$$\frac{1}{1 : f(x)} - \frac{1}{1 : \varphi(x)} = \frac{1}{F(x)} - \frac{1}{\Phi(x)} = \frac{\Phi(x) - F(x)}{F(x) . \Phi(x)}$$

y como por hipótesis $f(x)$ y $\varphi(x)$ tienden a ∞, la fracción obtenida es del tipo $0 : 0$.

Hemos reducido todos los tipos a éste, por ser el más importante del Cálculo diferencial, como veremos; pero sin él cabe resolver muchos casos de indeterminación (V. Ejercicios).

30. — Límites de exponenciales.

He aquí los casos más elementales de límites para variable infinita:

La función exponencial a^x, para $x \to +\infty$, tiene límite ∞, si es $a > 1$; y límite 0 si es $a < 1$.

Si $a = 1 + d$ es: $a^x \gtreqless (1 + d)^n > dn$ (n parte entera de x) tomando un solo término del desarrollo, luego crece infinitamente para $x \to +\infty$.

Si es $a < 1$ pongamos $b = 1 : a$ y resulta: $a^x = 1 : b^x$. Como el denominador es un infinito, el cociente es un infinitésimo.

Si el exponente $x \to -\infty$, las conclusiones son opuestas: Si $a > 1$, $a^x \to 0$; si $a < 1$, $a^x \to \infty$.

Nota. — Son éstos casos de límites *singulares*, pero no ***indeterminados***; **éstos se presentarán más adelante.**

Si la base $a > 1$ es variable, el límite de a^x puede ser finito, como ya se vió en el ejemplo de (23) y (28), que resultó el límite 2,718....

EJERCICIOS

1. — Obsérvese que en la función que expresa el valor de una mercadería (véase párrafo 8) al crecer infinitamente x también crece y infinitamente, es decir: para $x \to \infty$, lím. $y = \infty$ (tipo IV) para $x \to 2$ carece de límite.

2. — Dividiendo numerador y denominador por una potencia de x, calcular, para $x \to \infty$ los límites de:

$$\frac{x - 1}{x^2 + 1}, \quad \frac{2x^2 + x - 3}{3x^3 - 2x + 1}, \quad \frac{4x^3 - 1}{x + 5}$$

3. — Calcular, por simplificación, el límite para $x \to \infty$ de la expresión

$$\frac{x^2 - 1}{x + 2} - \frac{x^2 + 1}{x - 2}$$

LECCIÓN 8

LOS INFINITOS

31. — Comparación de infinitos.

Las variables infinitas, o infinitamente grandes, es decir, las que tienen límite ∞, pueden compararse de igual modo que los infinitésimos. También aquí caben cuatro casos:

1.°) lím. $(A : B) = \infty$; se dice: A es de orden *superior* a B.

2.°) lím. $(A : B) = 0$; el orden de A es *inferior* al de B.

3.°) El límite es finito no nulo; se dice que los infinitos A y B son del *mismo* orden; si el límite es 1, se llaman *equivalentes.*

4.°) No existe límite; A y B se dicen *no comparables.*

Lo mismo que en los infinitésimos, en la comparación del orden se prescinde del signo; pero los infinitos equivalentes tienen igual signo.

Como tipos de referencia se adoptan los infinitos x, x^2, x^3 .... ue se llaman de 1.°, 2.°, 3.°, ... orden.

De modo análogo a lo demostrado para los infinitésimos, resulta:

Si a un infinito A se le suma otro infinito B de orden inferior (o variable finita), el infinito $A + B$ es equivalente al A.

En efecto: $$(A + B) : A = 1 + B/A \to 1 + 0 = 1$$

como corolario de la propiedad anterior, resulta:

Todo polinomio ordenado, de grado entero o fraccionario, positivo, es equivalente a su término más elevado.

En efecto, al sumarle cada término inferior, resulta equivalente, según acabamos de demostrar.

32. — Principio general de sustitución.

Podemos completar ahora el principio de sustitución demostrado en (26), enunciándolo en esta forma:

El límite de una expresión monomia no varía si se sustituye:

a) *Un factor finito por su límite, no nulo.*

b) *Un factor infinitésimo por otro equivalente.*

c) *Un factor infinito por otro equivalente.*

Lo mismo acontece si en vez de *factor* es *divisor.*

Aplicación importante: tienen igual límite para $x \to \infty$, los cocientes:

$$\frac{ax^m + bx^{m-1} + \ldots + l}{a'x^n + b'x^{n-1} + \ldots + h'}\ ,\quad \frac{ax^m}{a'x^n},$$

pues cada polinomio es equivalente a su término más elevado.

Caben tres casos:

1.°) Si es $m = n$, resulta el límite a/a'. Es decir:

El límite para $x \to \infty$, del cociente de dos polinomios de igual grado es igual al cociente de los coeficientes de los términos superiores.

2.°) Si es $m < n$, simplificando resulta lím. $= 0$.

3.°) Si es $m > n$, „ „ „ $= \infty$.

El límite para $x \to \infty$, del cociente de dos polinomios de distinto grado, es cero o infinito, según que el grado del numerador sea menor o mayor que el grado del denominador.

NOTA. — Cuídese mucho de no sustituir un *sumando* por otro equivalente, trátese de infinitos o infinitésimos, pues el resultado puede ser absurdo.

EJEMPLO 1. — Si en la función

$$x^{-1} - (x^{-1} - x + 1)$$

donde $x \to 0$ se sustituye el paréntesis por el infinito equivalente x^{-1} resulta 0; sin embargo, el límite es -1.

EJEMPLO 2. — Hemos obtenido en el ejemplo 2 de (26) para $x \to 0$:

$$\text{lím. } (\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x) : x^3 = \tfrac{1}{2} \qquad [1]$$

Si en el numerador hubiéramos sustituido $\operatorname{tg} x$ y $\operatorname{sen} x$ por su equivalente x, habría resultado el límite falso 0.

Sea la expresión:

$$\frac{\operatorname{tg} x - (\operatorname{sen} x + 2x^3)}{x^3}$$

Si despreciáramos el infinitésimo de orden superior $2x^3$, es decir, si sustituyéramos $\operatorname{sen} x + 2x^3$ por su equivalente $\operatorname{sen} x$, resultaría la misma expresión [1], cuyo límite es $\tfrac{1}{2}$. Sin embargo, el verdadero límite es $-{}^3/_2$.

Obsérvese también que la diferencia de dos infinitos puede ser infinitésima.

EJEMPLO. — Es infinitésima la diferencia $\sqrt{x^2 + a} - x$ al crecer x infinitamente; pues multiplicando y dividiendo por la suma, se puede escribir así:

$$\frac{(x^2 + a) - x^2}{\sqrt{x^2 + a} + x} = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a} + x}$$

que es un infinitésimo, como recíproco de una variable que crece infinitamente.

Análogamente: es infinitésima al crecer x infinitamente la diferencia

$$\sqrt{(ax + b)^2 + c} - (ax + b)$$

33. — Asíntotas de las curvas planas.

Se dice que un punto se aleja infinitamente sobre una curva, cuando su x, o su y, o ambas coordenadas, crecen infinitamente.

Se llama *asíntota* una recta t tal que la distancia Pt desde el punto P de la curva tiende a 0 al alejarse P sobre la curva, es decir, al crecer infinitamente x, y, o ambas. (Figura en (27), Ej. 2).

Primer caso. Si para $x \to \infty$ es lím. $y = b$, finito, ya hemos visto que la recta $y = b$ es la asíntota de la rama infinita.

Segundo caso. Si para $x \to a$, $y \to \infty$, la asíntota es la recta $x = a$.

Tercer caso. — Si x e y crecen infinitamente y se calcula lím. $y:x = m$, se dice que la rama tiene la dirección de la recta $y = mx$. Tal lím. $y:x$ existe siempre que hay asíntota $y = mx + a$, pues si las coordenadas del pie P'' de la distancia Pt son $x\,y$, las de P difieren de ellas en infinitésimos y su cociente tiene el mismo límite m. La ecuación de la curva puede escribirse, pues, en la forma:

$$y = mx + a + \delta \qquad (\delta \text{ infinitésimo para } x \to \infty)$$

Recíprocamente: si la curva tiene un punto impropio A, es decir, si $y:x \to m$, y puede escribirse la ecuación en la forma precitada, o sea si se calcula la ordenada en el origen:

$$a = \text{lím.}\ (y - mx) \qquad \text{para } x \to \infty$$

la distancia del punto de la curva a la recta $y = mx + a$, es precisamente δ, medida verticalmente; y como tiende a 0, también tiende a 0 la distancia normal, que solo difiere en un factor coseno; luego esta recta es la asíntota. La rama de curva que tiene asíntota se llama *hiperbólica*, y se dice que t es la tangente en A; la justificación se verá en (45). Si resulta $a = \infty$, se dice que la tangente es la recta impropia y la curva se llama *parabólica*. Cabe también que no haya tangente en A, es decir, que $y - mx$ carezca de límite. Por último, hay curvas infinitas sin dirección, es decir, no existe lím. $y:x$.

Ejemplo 1. — Si la ecuación es $y = P(x) : Q(x)$ siendo el grado del polinomio dividendo $P(x)$ superior en 1 al grado del polinomio divisor $Q(x)$, efectuada la división y sacada la parte entera $mx + a$, la fracción complementaria tiende a 0 por tener el numerador de menor grado que el denominador, luego se tiene la asíntota $y = mx + a$.

Sea por ejemplo: $\quad y = \dfrac{2x^2 - 3}{x + 1}$

la parte entera es $2x - 2$, luego la ecuación de la única asíntota es $y = 2x - 2$.

EJEMPLO 2. — Si la ecuación es $y = \sqrt{(ax+b)^2+c}$ la parte principal es $y = ax + b$, pues la diferencia es infinitésimo, como se ha visto en (32); luego esta recta $y = ax + b$ es la asíntota.

EJEMPLO 3. — Sea la cónica: $3x^2 + y^2 - 4xy - 8x + 2y - 2 = 0$

despejando, resulta: $y = 2x - 1 \pm \sqrt{x^2 + 4x + 3}$

luego las dos asíntotas son:

$$y = 2x - 1 + (x + 2) = 3x + 1$$
$$y = 2x - 1 - (x + 2) = x - 3$$

EJEMPLO 4. — La curva estudiada en (9) Ej. 4, de ecuación $y = x \cdot \operatorname{sen} \pi/x$ tiene la dirección del eje x, pues $y: x \to 0$; demuéstrese que asíntota es $y = \pi$.

EJEMPLO 5. — La parábola $y = \sqrt{x}$ tiene la dirección del eje x, pero es parabólica.

EJEMPLO 6. — La curva sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ tiene la dirección del eje x, sin tangente propia ni impropia. En cambio la $y = \operatorname{sen} \pi/x$, (9) Ej. 3, tiene la asíntota $y = 0$.

La curva $y = x \cdot \operatorname{sen} x$ carece de dirección; y tampoco la tienen las espirales de Arquímedes y logarítmica.

34. — Crecimientos potencial, exponencial y logarítmico.

Para $x \to \infty$ tienen límite infinito las funciones:

$$x^m \quad (m > 0); \quad a^x \quad (a > 1); \quad \log_b x \quad (a > 1)$$

Comparemos estos tres infinitos, mediante división; y para ello, siendo $a = 1 + d$, si llamamos n a la parte entera de x será:

$$a^x \geqq a^n = (1 + d)^n = 1 + nd + \tfrac{1}{2}n\,(n - 1)\,d^2 + \ldots .$$

y si tomamos un número de términos suficiente para que el polinomio de variable n resulte de grado superior a m, este polinomio es *infinito* de orden superior al $(n + 1)^m$, y por tanto, superior a x^m; luego:

Para $x \to \infty$, la exponencial a^x es un infinito de orden superior a x^m, cualquiera que sea m.

Si llamamos $z = log_b\, x$, resulta: $x = b^z$; $x^m = (a^m)^z$, luego x^m es infinito de orden superior a $z = \log x$. Es decir:

Para $x \to \infty$, la potencia x^m, cualquiera que sea el exponente $m > 0$, es un infinito superior al logaritmo de x.

Podemos, pues, establecer la escala de infinitud:

Orden de a^x, mayor que orden de x^m, mayor que orden de $\log x$.

Infinitésimos potencial y exponencial. — Si tomamos las recíprocas, resulta que el infinitésimo a^{-x} es de orden superior al x^{-m}, puesto que su cociente es recíproco del $a^x : x^m$, y, por tanto, tiende a 0. Por tanto:

Todo infinitésimo exponencial es de orden superior a todo infinitésimo potencial.

Así se explica que la aproximación de las curvas exponenciales a su asíntota *es más rápida que en las potenciales.*

Obsérvese, por ejemplo, la gráfica de la función 3^x y se nota que la aproximación hacia el semieje $-x$ es tan rápida que ya desde $x = -5$ el valor *es $3^{-5} < 0{,}005$; y si la unidad es 1 cm, este error es menor que el grueso de* una línea del dibujo y, por tanto, puede continuarse la curva como si fuera el semieje $-x$.

EJEMPLOS:

1. — El crecimiento de las funciones potencial y exponencial depara **sorpresas.** Constrúyase la gráfica de $1{,}001^n$ y se observa que resulta aproximadamente una recta de pendiente 0,001; pues las potencias valen aproximadamnt 1,002; 1,003; 1,004; .... En cambio, las ordenadas de la función n^4 son: 16,81, 256, 625, ... y crecen tan rápidamente que pronto escapa la gráfica *del cuadro de dibujo. Demuéstrese que las ordenadas de la primera gráfica* llegan a superar a las de ésta; y calcúlese un valor suficiente de n.

2. — Representar gráficamente en coordenadas cartesianas la función:

$$y = ae^{-ht}\cos \delta t \qquad e = 2{,}71828\ldots.$$

Esta función define el movimiento rectilíneo vibratorio de un punto sujeto al extremo de un resorte que *se distiende una longitud* a y se abandona a sí mismo; se admite que la fuerza es proporcional a la distancia, es decir: $-k^2y$; y suponemos que el rozamiento es en todo momento proporcional a la velocidad, es decir, es igual a ella por un cierto coeficiente $2h$. Finalmente $\delta^2 = k^2 - h^2$.

Si no existiera el factor e^{-ht}, la gráfica sería una sinusoide cuyas ordenadas están multiplicadas por a y las longitudes de las ondas divididas por δ; el factor e^{-ht} tiende hacia 0 al crecer t y va reduciendo rápidamente las amplitudes o alturas de las ondas, resultando: lím. $y = 0$.

Constrúyase la curva para los valores: $a = 1$; $h = 0{,}01$; $k = 1$

NOTA: *Gráficas con escala logarítmica.*

Hemos llamado la atención del lector sobre el orden de infinitud de la exponencial respecto de la potencial. Por grande que sea el exponente m y el coeficiente de x^m, y por pequeño que sea el coeficiente de la exponencial, ésta llega a superar a aquélla rápidamente. Por este crecimiento rápido, al dibujar gráficas de funciones exponenciales, pronto adquiere la ordenada valores que exceden la altura del papel; para evitar esto y poder representar intervalos más amplios, se acostumbra a veces a adoptar para las y una escala logarítmica, es decir, en vez de llevar como ordenadas las y se llevan sus logaritmos, que crecen mucho más lentamente y con esto se simplifica la función, pues los factores exponenciales se convierten en lineales, facilitando mucho el trazado.

Estas gráficas se dibujan rápidamente sobre *papel logarítmico,* que difiere del papel milimétrico ordinario en que las distancias de las rayas de un sistema son los logaritmos de los números sucesivos. También hay papel en que las dos escalas son logarítmicas.

EJERCICIOS

1. — Representar en papel logarítmico la función x^x.

2. — En la obra de KOESTLER - TRAMER titulada: *Infinitesimalrechnung für Ingenieure,* se lee en pág. 295:

para $x = +\infty$, lím. $(x + \cos x)$ = indeterminado (no es $+\infty$).

para $x = -\infty$, lím. $(x + \cos x)$ = indeterminado (no es $-\infty$).

Demuéstrese la inexactitud de ambas afirmaciones, probando que el límite existe y es $+\infty$ y $-\infty$ respectivamente.

3. — ¿Tiene límite infinito la función $x.\text{sen}\, x$ para $x \to \infty$?

4. — *Determinar las asíntotas de las curvas:*

$$x^3y - x^4 - y + 1 = 0$$
$$x^2 - 2y^2 + 4xy - x + 1 = 0$$

Lección 9

SERIES GEOMETRICAS Y ALTERNADAS

35. — Series; condición necesaria de convergencia.

El algoritmo de las series se reduce a tomar límites para $n \to \infty$ en la suma S_n de los n primeros términos. El caso más sencillo y frecuente es la progresión geométrica indefinida, o *serie geométrica*:

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$$

cuyo significado es el siguiente: se forma la suma:

$$S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} \qquad [1]$$

de los n primeros términos; y se calcula su límite para $n \to \infty$.

En general: la serie $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ se llama *convergente* si las sumas $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ tienen límite finito S, y S es la *suma* de la serie; si el límite es ∞ la serie se llama *divergente;* si no existe límite, se llama *oscilante.*

El símbolo $+ \dots$ detrás de una suma, equivale, pues, al símbolo antepuesto lím. para $n \to \infty$.

Puesto que S_n y S_{n-1} tienden hacia S su diferencia $u_n \to 0$. Es decir: *condición necesaria de convergencia es que el término general tienda a* 0.

36. — Progresión geométrica indefinida.

Observemos que al multiplicar [1] por $1 - q$, se simplifica el producto, hasta reducirse a $a - aq^n$; luego el valor de S_n es:

$$\frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}$$

Si es $|q| < 1$, la potencia q^n llega a ser menor que cualquier número positivo; es decir, la segunda fracción tiene por límite 0, y por tanto:

$$S = \text{lím. } S_n = \frac{a}{1 - q}$$

es decir: *la suma de la progresión geométrica convergente es igual al primer término dividido por* 1 *menos la razón.*

Si $|q| > 1$ resulta *divergente;* y si $q = 1$ la progresión $a + a + a + \dots$ es también *divergente.*

Si es $q = -1$ la progresión $a - a + a - \ldots$ es *oscilante*, puesto que las sumas sucesivas valen 0 y a, alternativamente.

Ejemplo. — Es convergente la serie:

$$\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots . + \frac{1}{2^n} + \ldots .$$

por tener razón menor que 1, y su suma vale 2.
Esta misma, con signos alternados, es también convergente y su suma es:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

37. — Series alternadas. Criterio de convergencia.

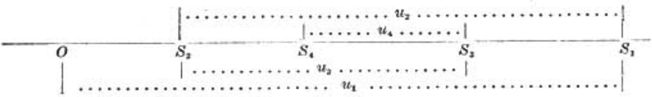
Una serie de términos alternativamente positivos y negativos, y cuyos valores absolutos son decrecientes, se llama *alternada*. Es decir, es alternada la serie:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots . + u_{2k-1} - u_{2k} + \ldots .$$

con la condición:

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots . > 0$$

Las sumas sucesivas se forman de este modo: una vez obtenida una, la siguiente resulta de llevar el segmento que representa el nuevo término, hacia la izquierda si es negativo, hacia la derecha si es positivo; y como cada término es menor que el anterior, cada segmento queda dentro del anterior, como indica la figura.



Las sumas pares S_0, S_2, S_4, ... van creciendo y se conservan menores que S_1, luego por el principio del crecimiento indefinido (28) tienen un límite S; análogamente las sumas impares van decreciendo y como son mayores que 0, tienen un límite S'. Es decir:

$$\text{lím. } S_{2m} = S \quad ; \quad \text{lím. } S_{2m+1} = S'$$

Como la diferencia entre dos sumas sucesivas es el término u_n, restando ambas igualdades resulta: lím. $u_n = S' - S$

Por tanto: si $u_n \to 0$, es $S' = S$ y este límite único es la suma de la serie, que es *convergente;* si u_n no tiende a 0, la serie es *oscilante*.

En el caso de convergencia, como la suma S es mayor que las sumas pares y menor que las impares, difiere de cada una menos que éstas entre sí, o sea, menos que el nuevo término u_n. Es decir:

$$S_1 - S < S_1 - S_2 = u_2 \quad , \quad S - S_2 < S_3 - S_2 = u_3 \quad ,$$
$$S_3 - S < S_3 - S_4 = u_4 \quad , \quad S - S_4 < S_5 - S_4 = u_5 \quad ,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Podemos, pues, enunciar esta doble propiedad importante:

La condición necesaria y suficiente para que una serie alternada sea convergente, es que el término general tienda a cero.

El error cometido al tomar una suma parcial como valor de la suma total, es menor que el término siguiente, y es por defecto o por exceso, según que éste sea positivo o negativo.

Ejemplo 1. — Sea la serie alternada:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

que es convergente, por tener sus términos decrecientes y tender a 0. Su suma, como veremos más adelante, es $\pi : 4$.

El error qce se comete al tomar los cien primeros términos, es menor que el siguiente, o sea $1 : 101$; de modo que con tan ímprobo trabajo solamente obtenemos *dos* cifras exactas.

Series tan lentamente convergentes son inútiles para el cálculo aproximado.

Ejemplo 2. — Sea la serie alternada:

$$\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots$$

que también es convergente por tener decrecientes y con límite 0 sus términos.

Si tomáramos como antes, 100 términos, el error sería menor que una unidad de orden 157; para obtener dos cifras exactas basta tomar *cuatro* términos.

Estas series, tan rápidamente convergentes, son el medio ideal del cálculo.

Esta, en particular, tiene la ventaja de que sus términos se calculan muy fácilmente, pues basta una división sencilla para deducir de cada término el siguiente. La suma de esta serie, según veremos (42), es $1 : e$.

EJERCICIOS

1. — Deducir las reglas dadas en Aritmética para formar la fracción ordinaria equivalente a una expresión decimal periódica.

2. — Formar una serie de términos alternados que tiendan a cero y sin embargo sea divergente.

3. — Sumar las series geométricas convergentes:

$$0{,}2 - 0{,}15 + \dots \quad ; \quad \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2} + \dots$$

LECCIÓN 10

SERIES DE TERMINOS POSITIVOS

38. — Clasificación de las series de términos positivos.

Consideremos ahora una serie cualquiera:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$$

de términos *positivos*. Las sumas sucesivas:

$$S_1 = u_1 \quad , \quad S_2 = u_1 + u_2 \quad , \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3 \quad , \quad \ldots\ldots$$

van creciendo, luego sólo caben dos casos: si llegan a superar a cualquier número, por grande que sea, S_n tiene límite ∞ y la serie se llama *divergente;* si, por el contrario, S_n se conserva *finita,* es decir, inferior a un número fijo, la variable S_n *tiene* límite finito S; la serie se llama entonces *convergente* y S es su suma. El error cometido al tomar como valor de S la suma S_n es exactamente la serie:

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots$$

llamada *resto* de orden n. Cuando se sabe encontrar un número superior al valor de esta serie, se tiene una acotación del error cometido. Esta acotación del error suele lograrse por comparación con una serie conocida; por ejemplo, una progresión geométrica.

Nota. — A veces, un artificio permite, no sólo clasificar una serie, sino también calcular su suma. Sea por ejemplo:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots\ldots$$

El término general puede escribirse como diferencia de dos fracciones:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

y la suma S_n se simplifica así:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots\ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$$

luego la serie converge y su suma vale 1.

39. — Criterio de comparación.

Para las series de términos positivos se verifica:

Si una serie tiene sus términos menores que los de otra convergente, también es convergente.

Si una serie tiene sus términos mayores que los de otra divergente, también es divergente.

Pues siendo $S'_n < S_n$, si S_n se conserva finito, también S'_n, luego tiene límite finito; análogamente: siendo $S'_n > S_n$, si S_n crece infinitamente, también S'_n.

EJEMPLO 1. — Sea la serie llamada *armónica*

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

cuyos términos son mayores que los de esta otra:

$$\frac{1}{1} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}}_{1/2} + \dots$$

que es claramente divergente; luego también la armónica.

He aquí, pues, un ejemplo de serie divergente, cuyo término general tiende a cero. No es, por tanto, suficiente que $u_n \to 0$, para asegurar la convergencia.

40. — Criterio de D'Alembert.

Si la serie no es una progresión geométrica, la razón de un término al anterior no es constante, es decir, varía con n. Si es lím. $(u_{n+1}/u_n) = l$ para $n \to \infty$, resulta el siguiente criterio, llamado de D'Alembert:

Si $l < 1$ la serie converge.
Si $l > 1$ „ „ diverge.
Si $l = 1$ „ „ es dudosa.

Primer caso.—Puesto que el límite del cociente u_{n+1}/u_n es $l < 1$, elijamos un número intermedio q, es decir: $l < q < 1$.

Desde un lugar n en adelante, la variable $u_{n+1} : u_n$ debe conservarse menor que q; puesto que llega a diferir de l menos de $q - l$.

Prescindiendo de los términos anteriores (los que no alteran el carácter de la serie) se verifica por consiguiente:

$$u_{m+1}/u_m < q \quad , \quad u_{m+1} < u_m \cdot q .$$

es decir, cada término es menor que el anterior por q; luego los términos son menores que los de la serie geométrica:

$$u_m + u_m q + u_m q^2 + u_m q^3 + \ldots .$$

que es convergente por ser la razón $q < 1$; luego también converge la serie dada.

No sólo queda así demostrada la convergencia, sino que tenemos una cota superior para el resto, como veremos en algún ejemplo.

EJEMPLO 2. — Consideremos la serie, sumamente importante

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \ldots$$

La razón de un término al anterior es $1 : n$, que tiene límite 0 para $n \to \infty$, luego la serie es convergente. Su suma es mayor que $1 + 1 = 2$; veremos que vale 2,718.... y se designa siempre por la letra e.

El error cometido al detenernos en $1/n!$, o sea la serie que forma el resto, es menor que la serie gométrica de razón $1/(n+1)$, o sea:

$$R_n < \frac{1}{(n+1)!\,[1 - 1:(n+1)]} = \frac{1}{n!\,n}$$

Obsérvese que si bien este resto es mayor que el primer término despreciado (por ser los siguientes positivos) difiere relativamente muy poco de él a causa de tener límite 0 la razón de términos; en cambio, si el límite fuese próximo a 1, el resto sería mucho mayor, y la utilidad de la serie casi nula, por ser necesario tomar muchos términos para lograr una aproximación suficiente.

Segundo caso. — Si $L > 1$, desde un n en adelante el cociente u_{n+1}/u_n supera a 1, como se vió en (10); será por tanto: $u_{n+1} > u_n$; y siendo crecientes los términos, la suma superará a todo número, es decir, la serie es divergente.

41. — Caso dudoso. Criterio de Raabe.

Cuando resulte lím. $u_{n+1}/u_n = 1$, nada puede decirse del carácter de la serie, salvo si es $u_{n+1}/u_n > 1$, en cuyo caso es divergente. El caso $l = 1$ es el más frecuente, pues sólo en series muy rápidamente convergentes es $l < 1$. Hay, pues, que acudir a otros criterios, de los cuales el más importante, que daremos sin demostración (véase en *An. alg.*, pág. 398), es el siguiente, llamado de Raabe:

Si la razón de un término al anterior tiende a 1, réstese de 1, y la diferencia (que es un infinitésimo)se multiplica por n; se calcula: $L = \text{lím. } n(1 - u_{n+1}/u_n)$; y resulta:

Si es $L > 1$ *la serie es convergente.*

Si es $L < 1$ *la serie es divergente.*

EJEMPLO 3. —

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

La razón de un término al anterior es:

$$\frac{1}{n^2} : \frac{1}{(n-1)^2} = \frac{(n-1)^2}{n^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n} + 1 \to 1 \quad ;$$

al restar de 1 y multiplicar por n, queda:

$$\frac{2n}{n} - \frac{n}{n^2}$$

que tiende a 2, luego la serie converge.

EJERCICIOS

1. — Clasificar las series cuyos términos generales son:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \; ; \qquad \frac{n-1}{n^2}$$

2. — Acotar el resto de la serie del ejemplo 3 y comprobar así aproximadamente que la suma es $\pi^2/6$.

3. — Clasificar, por comparación, la serie formada por los términos impares de la armónica y la serie formada por los términos pares.

4. — Demostrar el criterio de Cauchy: *Si lím.* $\sqrt[n]{u_n} = l$, *y es* $l < 1$ *la serie converge; si* $l > 1$, *diverge.*

(La demostración es análoga a la expuesta para el criterio de d'Alembert. En el 1.er caso basta elegir un número q entre l y 1; en el 2.° el teorema es inmediato).

5. — Por el artificio usado en (38), sumar la primera serie clasificada en Ejercicio 1.

(Basta descomponer cada término en diferencia de dos fracciones).

6. — Demostrar el criterio de Raabe en el caso $l < 1$.

(Basta observar que resulta $u_{n+1}/u_n > 1 - {}^1/_n$ y de aquí resulta que desde un término en adelante, los términos son mayores que los de la serie armónica, por un factor fijo).

EL NUMERO e Y LOS LOGARITMOS NATURALES

42. — Definición del número e.

La función $(1 + 1/n)^n$ es creciente para $n = 1, 2, 3 \ldots$, como se observa para los primeros valores:

$$2^1 = 2 \quad ; \quad 1{,}5^2 = 2{,}25 \quad ; \quad 1{,}33^3 = 2{,}37\ldots ; \quad \ldots.$$

y se demuestra, en general, desarrollando la potencia del binomio, pues resulta:

$$1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\,\frac{1}{n^n}$$

y simplificando se puede escribir así:

$$1 + 1 + (1 - 1/n) : 2! + (1 - {}^1/_n)\,(1 - {}^2/_n) : 3! + \ldots$$
$$+ (1 - {}^1/_n)\ \ldots\ (1 - {}^{n-1}/_n) : n!$$

Al crecer n aumenta cada término; además se agregan nuevos términos positivos, luego la función crece; pero tiene límite finito por ser cada término menor que el correspondiente de la serie convergente

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\ldots$$

y ser por tanto dicha función menor que la suma de esta serie; y aunque la regla del límite de una suma no es aplicable en general para infinitos sumandos, es *legítima en este caso* (*véase la demostración en las notas*) y resulta: el límite para $n \to \infty$ de la expresión $(1 + 1/n)^n$ es el número que siempre se designa por e y que se calcula muy fácilmente por la serie:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots = 2{,}7182818284\ \ldots.$$

Si el exponente, en vez de ser n, es $n \pm h$, la potencia queda multiplicada o dividida por una potencia h de la base, que tiende a 1; luego dicho factor también tiende a 1, y el límite resulta también e.

Si en vez de dividir $n + 1$ por n, se divide inversamente n por $n + 1$, el límite es e^{-1}, luego podemos enunciar: *el cociente de*

dos números naturales consecutivos, elevado a uno de ellos, aumentado o disminuído en cualquier número fijo, tiene el límite e o e^{-1}, según que se divida el mayor por el menor, o inversamente.

EJEMPLOS:

$$[(n-2):(n-3)]^{n+1} \to e$$

$$[(2n+1):(2n+2)]^{2n-3} \to e^{-1}$$

Nota. — La conclusión vale aunque los números no sean enteros, pues si en la base $1 + 1/x$ ponemos en vez de x su parte entera por defecto n, o por exceso $n + 1$, se obtienen dos números que comprenden a aquél; y como el límite de estas potencias (conservando el mismo exponente x) es e, también el de aquélla, que está comprendida entre ambas, es decir:

$$\text{lím. } (1 + 1/x)^x = e \quad \text{para } x \to \infty \tag{1}$$

donde la variable real x toma valores cualesquiera, según la definición (2) de límite.

La serie de la función exponencial.

Si hubiéramos partido de la expresión

$$(1 + x/n)^n$$

donde x es positivo o negativo, se reduce a la anterior, poniendo $n = xm$, y resulta:

$$[1 + x/n]^n = [1 + 1/m]^{mx} = [(1 + 1/m)^m]^x$$

y como $(1 + {}^1/_m)^m \to e$ para $m \to \infty$ resulta:

$$\text{lím. } (1 + {}^x/_n)^n = e^x \tag{2}$$

Por otra parte, desarrollando la potencia, obtenemos como límite la serie:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots . \tag{3}$$

válida para todo valor de x, positivo o negativo. (V. notas).

Esta serie permite calcular rápidamente e^{-1}, $\sqrt{e}$, ...

43. — Los logaritmos naturales.

Así como los logaritmos usados como auxiliares para los cálculos numéricos son los decimales, por ser 10 la base del sistema de numeración, los logaritmos que se presentan de modo natural en los cálculos teóricos son los de base e y por esto se llaman logaritmos *naturales* o también *neperianos;* nosotros los designaremos por la letra l, y otros autores así: log., ln, log nat., ...

Para pasar de unos a otros basta tomar logaritmos decimales en la expresión $e^l = x$, y resulta: $\log x = l \cdot \log e$.

La constante log. $e = 0{,}43429\ldots$ se designa siempre por M y se llama módulo de los logaritmos decimales. Por tanto: *los logaritmos decimales se deducen de los naturales multiplicándolos por el módulo.* Así se han calculado las tablas de logaritmos decimales.

44. — Casos de indeterminación de $f(x)^{\alpha(x)}$.

La regla dada en la lección 6, fracasa cuando el producto $\alpha(x).lf(x)$ adopta una forma indeterminada $0.\infty$. He aquí los únicos casos posibles:

lím. $f(x) = 0$	lím. $lf(x) = -\infty$	lím. $\alpha(x) = 0$	Forma 0^0
lím. $f(x) = +\infty$	lím. $lf(x) = +\infty$	lím. $\alpha(x) = 0$	„ ∞^0
lím. $f(x) = 1$	lím. $lf(x) = 0$	lím. $\alpha(x) = \infty$	„ 1^∞

Las expresiones 0^0, ∞^0, 1^∞ no tienen significado de potencias numéricas; son símbolos que nos indican cuales son los límites de la base y del exponente en la potencia $f(x)^{\alpha(x)}$; en cada caso pueden resultar límites muy distintos según cuales sean las funciones $f(x)$, $\alpha(x)$; por esto se llaman formas de indeterminación.

Ejemplo. — Sea la función x^x. Para $x \to 0$ el límite es 1.

Pues se verifica $ly = x.lx \to 0$, según se ha demostrado en (34), ya que el infinitésimo potencial x predomina sobre el infinito logarítmico.

NOTAS

Demostración del desarrollo en serie del número e.

Hemos visto en (42) que cada término del desarrollo de $(1+{}^x/_n)^n$ tiende para $n \to \infty$ hacia el correspondiente término de la serie. Mas en general, comparemos el desarrollo:

$$(1+{}^x/_n)^n = 1 + x + (1-{}^1/_n)x^2 : 2! + \ldots$$
$$+ (1-{}^1/_n)(1-{}^2/_n)\ldots(1-{}^{m-1}/_n)x^m : m! + T_m \qquad [4]$$

con la serie [3] llamada *exponencial*, la cual designando por R_m al *resto*, escribiremos así:

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^m}{m!} + R_m \qquad [5]$$

Si $x > 0$, el resto R_m, o sea la diferencia entre la suma S_m, y su límite, tiende a 0, es decir, $R_m < \varepsilon$ eligiendo m suficiente; los términos de T_m son menores que sus correspondientes en R_m, pues son nulos desde la potencia x^{n+1} en adelante, y para los de exponentes $m+1$, $m+2$, ... n los coeficientes entre paréntesis son productos de números menores que 1, y por tanto menores que 1, luego resulta, por comparación: $T_m < R_m < \varepsilon$.

Fijado ya m, los dos polinomios de grado m que figuran en [4] y [5] difieren en menos de ε desde un n en adelante, puesto que el 2.° es límite del 1.° para $n \to \infty$; luego resulta:

$$0 < f(x) - (1+{}^x/_n)^n < 2\varepsilon .$$

Para $n \to \infty$ el límite de $(1+{}^x/_n)^n$ o sea e^x es, por tanto, $f(x)$, o sea la serie exponencial, quedando así probado el desarrollo [3], para $x > 0$, y además esto: *la sucesión $(1+{}^x/_n)^n$ es creciente y se conserva menor que su límite e^x.*

Para fijar las ideas hemos supuesto $x > 0$; pero el resultado [3] vale para todo x, sea real o imaginario, como se verá en Lecc. 27, con leve modificación de la demostración anterior.

CAPITULO II

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES DE UNA VARIABLE

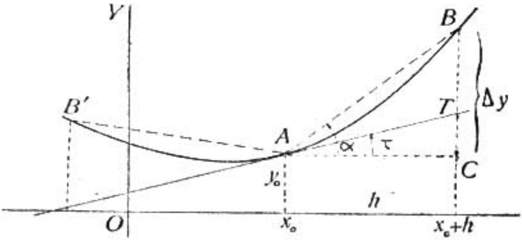
LECCIÓN 12

EL CONCEPTO DE DERIVADA

45. — El problema de la tangente a una curva plana.

Dada una función continua $y = f(x)$ y la curva que la representa gráficamente, vamos a determinar la recta tangente en el punto A de abscisa x_0 y ordenada $y_0 = f(x_0)$.

Se llama semirecta tangente en A por la derecha, al límite de la cuerda AB cuando B tiende hacia A por la derecha, es decir, una semirecta AT cuya pendiente es el límite de la pendiente de la cuerda; veamos cuál es el coeficiente angular de esta recta AB.



Llamando Δy_0 al incremento de la ordenada correspondiente al incremento h de la abscisa, la pendiente o coeficiente angular de la cuerda es

$$\frac{\Delta y_0}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

La pendiente de la semirrecta tangente por la derecha, es el límite de este cociente de incrementos cuando $h \to 0$, conservándose positivo; análogamente resulta la semirrecta tangente por la izquierda, haciendo $h \to 0$ con valores negativos. Cuando ambas semirectas son opuestas, forman la recta tangente.

46. — Definición general de la derivada.

Cuando la fracción $\Delta y : \Delta x = \Delta y : h$, cociente de incrementos, tiene límite único para $h \to 0$, sea h positivo o negativo, este límite se llama *derivada* de $f(x)$ en el punto x_0; y se representa así: $f'(x_0)$. Es decir:

$$[1] \qquad f'(x_0) = \text{lím.} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Llamamos *inclinación* de la curva hacia la derecha, al ángulo τ que forma la semirecta tangente a la derecha con el semieje $+x$; y *pendiente* de la curva al número $\text{tg}\,\tau = f'(x_0)$.

El ángulo que forma con el mismo semieje $+x$ la semirecta tangente por la izquierda es $\tau + \pi$ que tiene la misma tangente trigonométrica. Por tanto, podemos enunciar:

La derivada en el punto x_0 mide la pendiente de la recta tangente, o sea: es la tangente trigonométrica de los ángulos que forma el semieje x con cada una de las semirectas tangentes.

Si la función $f(x)$ tiene derivada en cada punto x, el valor de la derivada depende de x, es decir: es una función de x, que se llama *función derivada* de $f(x)$, o simplemente *derivada*, y se representa así: y', o bien $f'(x)$, o también: $Df(x)$.

Si el límite [1] es $+\infty$ por ambos lados hay tangente vertical y se dice que la derivada es $+\infty$; ejemplo en (50) fig. 2.ª. Análogamente si es $-\infty$ por ambos lados.

47. — Propiedades primeras de las derivadas.

De la definición de derivada resulta: si la función es constante su incremento es nulo, luego el cociente de incrementos es nulo, y también su límite. Es decir:

I. *La derivada de una constante cualquiera es nula.*

Si la función es $y = x$, resulta:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x}$$

y siendo este cociente 1, su límite es 1. Es decir:

II. *La derivada de la variable independiente es 1.*

Si una función se multiplica por k, el cociente de incrementos queda multiplicado por k y también su límite. Luego:

III. *Al multiplicar una función por una constante, su derivada queda multiplicada por la misma constante.*

Si una función es suma o diferencia de varias, por ejemplo:

$$y = u \pm v \pm w$$

el incremento de y es suma o diferencia de los incrementos de éstas:

$$\Delta y = \Delta u \pm \Delta v \pm \Delta w$$

dividiendo por h, resulta:

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{\Delta u}{h} \pm \frac{\Delta v}{h} \pm \frac{\Delta w}{h}$$

y el límite es la suma o diferencia de los límites; es decir:

$$y' = u' \pm v' \pm w'$$

IV. *La derivada de una suma algebraica de funciones es la suma algebraica análogamente formada por sus derivadas.*

Corolario: Si los coeficientes son constantes es:

$$D(au + bv + \ldots . lz) = au' + bv' + \ldots . + lz'$$

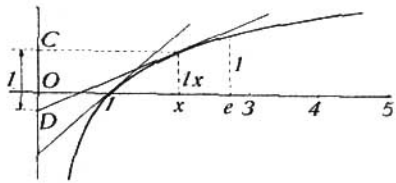
48. — Derivada del logaritmo natural.

Siendo ésta la función elemental a que pueden reducirse las demás, calcularemos directamente su derivada.

Elegido un punto cualquiera x, el cociente de incrementos es:

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{l(x+h) - lx}{h} = \frac{l(1+h/x)}{h}$$

y para calcular su límite al tender $h \to 0$, pongamos $x = hz$ y el cociente se transforma así:



$$\frac{z . l(1 + 1/z)}{x} = \frac{l(1 + 1/z)^z}{x}$$

Fijado x, para $h \to 0$ es $z \to \infty$, y el numerador (por ser el logaritmo función continua) tiende a $le = 1$; luego:

Derivada de $lx = 1/x$.

Nota. — Si el logaritmo es decimal, como $\log x = Mlx$, la expresión anterior queda multiplicada por $M = 0{,}43429\ldots$ y resulta: $D \log x = M/x$.

Más general: siendo $\log_a x = lx/la$, resulta:

$$D \log_a x = 1/x \, . \, la$$

Ejercicio. — Demostrar que la tangente en A a la curva logarítmica se puede construir uniéndolo con el punto D tal que $CD = -1$. Construcción de la curva logarítmica por puntos y tangentes. Dibujada en papel milimétrico, utilícese como tabla de logaritmos.

49. — Diversos significados físicos de la derivada.

Puesto que la derivada es el límite del cociente de incrementos $\Delta y : \Delta x$, en toda función física en que este cociente tenga un significado interesante cuando y sea proporcional a x, se podrá generalizar al caso de una función no lineal, mediante el paso al límite, es decir, con la derivada.

He aquí algunos ejemplos:

I. *Pendiente.* — *Dada una función lineal $y = ax + b$, el coeficiente angular* a mide la pendiente; y el cociente de incrementos es $\Delta y : \Delta x = a$, constante.

Si la función $y = f(x)$ no es lineal, el cociente $\Delta y : \Delta x$ se llama *pendiente media* en el intervalo Δx; su límite $f'(x)$ se llama *pendiente* de la curva en el punto x, y no es sino la pendiente de la recta tangente. Como Δx y Δy son ambas longitudes, la pendiente es un número abstracto.

Si el cociente de incrementos tiene límites distintos, según que Δx tienda hacia 0 tomando valores positivos o negativos, la curva tiene un punto anguloso [véase el ejemplo de la nota (50)] y debe distinguirse entre *pendiente a la derecha* y *pendiente a la izquierda.*

II. *Velocidad.* — El movimiento de un punto sobre una recta, por ejemplo: la caída de un grave, nos da una trayectoria rectilínea en que el espacio recorrido es función del tiempo; tendremos así: $y = f(t)$.

Si la función es lineal: $y = at + b$, el cociente de incrementos del espacio y del tiempo es el número a, que representa el espacio recorrido en la unidad de tiempo. Esta velocidad a es constante y el movimiento se llama *uniforme*.

Si el movimiento viene expresado por una función $y = f(t)$ no uniforme, el cociente $\Delta y : \Delta t$ se llama *velocidad media* en el intervalo Δt; pero al variar Δt esta velocidad media varía, y para $\Delta t \to 0$ el límite $f'(t)$ se llama *velocidad* en el momento t. La velocidad es, pues, una función del tiempo.

Si los espacios recorridos se miden en cm. y el tiempo en segundos, la velocidad viene expresada en cm./s.

Gráfica del movimiento. — En un sistema de coordenadas tomamos sobre el eje de abscisas los tiempos, sobre el de ordenadas los espacios recorridos. Dicho *movimiento* nos dará una *gráfica* sencilla y sus propiedades nos darán las del movimiento.

La diferencia de ordenadas dividida por la diferencia de abscisas de dos puntos t_0 y t_1 nos dará un cociente que se llama *velocidad media* en ese intervalo de tiempo. Si tomamos un tiempo cada vez más pequeño el límite del cociente de los espacios por los tiempos es la velocidad instantánea $v = f'(t)$.

En el movimiento más sencillo, el rectilíneo uniforme, que gráficamente se representa por una recta $y = at + b$, para encontrar la velocidad podemos tomar cualquier segmento, puesto que existe proporcionalidad (el cociente constante es la pendiente); la velocidad es constante.

En la caída de un grave la ecuación es $y = \frac{1}{2} gt^2$, siendo $g = 9{,}80\ m/s^2$; la gráfica es una parábola que no debe confundirse con la trayectoria de un proyectil; puesto que aquí se trata de un movimiento *rectilíneo* y la gráfica es simplemente un esquema para estudiar la relación entre los espacios y los tiempos.

III. *Carga.* — Consideremos una viga AB horizontal que soporta pesos a lo largo de toda ella. Si este peso está uniformemente repartido, es decir, si longitudes iguales soportan pesos iguales, el número de kg. que cargan sobre cada unidad de longitud es el mismo en todas partes y se llama *carga específica* o *carga por unidad;* es, pues, una magnitud compuesta: kg./cm.

Si la carga es continua, pero no está uniformemente repartida, y llamamos Δy a la carga que pesa sobre el segmento Δx, el cociente $\Delta y : \Delta x$ se llama *carga media,* y su límite $\Delta x \to 0$, es decir, la derivada y' en el punto considerado, se llama *carga específica* en dicho punto.

La gráfica de esta función y' se llama *línea de cargas.* La carga viene medida en kg./cm.

IV. *Dilatación.* — Si $y = f(x)$ expresa una correspondencia entre dos escalas, el cociente $\Delta y : \Delta x$ es constante cuando la función sea lineal, y se llama *coeficiente de dilatación.* Si la función no es lineal, este cociente se llama *dilatación media* en el intervalo y varía con Δx; su límite para $\Delta x \to 0$, es decir, el número $f'(x)$ se llama *coeficiente de dilatación* en el punto x.

Como ambos incrementos son longitudes, el coeficiente de dilatación es un número abstracto. Así diremos, por ejemplo: la dilatación es 1,04, es decir: la razón de longitudes vale 1,04, o también: la dilatación es 4 %, vale decir: el incremento de 1 es 0,04.

V. *Concentración.* — Si en una disolución cualquiera, por ejemplo de una sal, la cantidad de sal contenida en la unidad de volumen de líquido es constante, cualquiera que sea la porción elegida, el cociente de esta cantidad de sal por el volumen se llama *concentración.*

Cuando la cantidad de sal por unidad de volumen varía según el lugar, se dice que la disolución no es homogénea; el cociente de la cantidad de sal por el volumen correspondiente se llama *concentración media,* y su límite al tender hacia cero el volumen se llama *concentración* en el punto elegido.

VI. *Velocidad de reacción.* — Puestos en contacto dos cuerpos A y B que reaccionan produciendo otro cuerpo C, la cantidad de éste va creciendo con el tiempo, es decir, es función $y = f(t)$. Si el aumento desde el momento t hasta el $t + h$ es $\Delta y = f(t + h) - f(t)$, el cociente $\Delta y : \Delta t$ se llama *velocidad media* de reacción en el intervalo h. Si éste se toma cada vez más pequeño, dicha velocidad tiende hacia un valor límite, llamado *velocidad en el momento t,* que viene medido por la derivada $y = f'(t)$.

Si las cantidades del producto C se miden en g. la velocidad de reacción vendrá expresada en g./s.

50. — Existencia de la derivada de las funciones continuas.

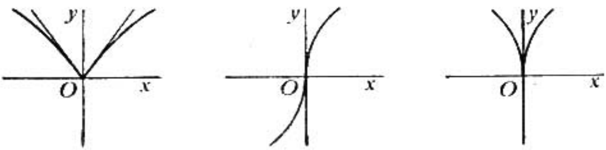
Toda función que tiene derivada es continua; pues si el cociente $\Delta y : \Delta x$ tiene límite finito para $\Delta x \to 0$, debe ser Δy infinitésimo del mismo orden, o de orden superior, según que la derivada sea $f'(x) \neq 0$, o bien $f'(x) = 0$. Es decir: $f(x)$ debe ser continua.

La recíproca no es cierta; hay funciones continuas que no tienen derivada en algunos puntos, por no ser comparables los infinitésimos Δy y Δx, es decir, por carecer de límite el cociente de ambos. Tal sucede, por ejemplo, con la función ya considerada: $y = x . \operatorname{sen} \pi/x$, que es continua en todo el campo real, incluso en el punto $x = 0$, donde es nula. El cociente de incrementos en dicho punto es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h . \operatorname{sen} \pi/h}{h}$$

o sea: sen π/h, que carece de límite para $h \to 0$, pues oscila entre $+1$ y -1. **La curva carece de tangente en 0, y hay curvas sin tangente en ningún punto.**

A veces, el cociente de incrementos tiene límites distintos según que h tienda hacia 0 por la derecha o por la izquierda. Entonces, las dos semirectas tangentes no forman una sola recta, sino un ángulo distinto de 180°. Los dos límites del cociente incremental suelen llamarse *Derivada a la derecha* y *Derivada a la izquierda*, y representan las pendientes de las dos semirectas tangentes en el *punto anguloso*. Sea (fig. 1.ª) $y = x$. arc tg $1/x$; las pendientes en 0 son $\pm \frac{1}{2} \pi$.



Si es $y = \sqrt[3]{x}$ (fig. 2.ª) las pendientes son ambas $+\infty$ (punto de *inflexión*); para $y = \sqrt[3]{x^2}$ las pendientes son $-\infty$ $+\infty$ (*punto cuspidal*).

Las funciones que intervienen en la Técnica suelen venir dadas aproximadamente y cabe preguntar qué influencia tendrá en la derivada el error de la función. Es decir: dada una función $f(x)$ que difiere de otra $\psi(x)$ en menos de ε para todo valor de x; ¿cuál es el error de $f'(x)$ respecto de $\psi'(x)$?

Fácil es ver que la derivada queda completamente indeterminada, sin que se pueda fijar límite ninguno para el error. En efecto, dada la gráfica de $f(x)$, de la función exacta $\psi(x)$ sólo se sabe que queda comprendida en una zona de amplitud ε a uno y otro lado de aquélla; mas, dentro de dicha zona, por muy estrecha que sea, hay funciones de infinitas oscilaciones cuyas derivadas pueden diferir de $f'(x)$ tanto como se quiera.

Si es $y = \sqrt[3]{x}$ (fig. 2.ª) las pendientes son ambas $+\infty$ (punto de *inflexión*); para $y = \sqrt[3]{x^2}$ son $-\infty + \infty$ (*punto* cuspidal).

Sea por ejemplo: la función $f(x) = 0$ dada como aproximación de una funciones que cumplen esta condición, es decir como representación de esta función $\psi(x)$, tenemos el eje x, con error $< 0{,}001$; hay, por ejemplo otras del función $\psi(x)$ cuyo valor absoluto es: $| \psi(x) | < 0{,}001$. Ahora bien, entre las tipo: $\psi(x) = \text{sen } kx:1000$, cuyas derivadas son: $\psi'(x) = k.\cos kx:1000$ y si es por ejemplo: $k = 10^8$ resulta que $\psi'(x)$ toma valores que llegan a 100000.

Se comprende, pues, que no existan aparatos para obtener mecánicamente las derivadas, habiéndolos en cambio para calcular las áreas, las integrales, etc.

Aproximación de las funciones continuas mediante polinomios.

Hemos visto que toda función que tiene derivada es continua, pero hay funciones continuas que no tienen derivada.

Sin embargo, para la Técnica no tienen interés tales funciones, y puede admitirse que todas las funciones continuas que se presenten tienen derivada. Esta hipótesis es legítima, en virtud del teorema siguiente de Weierstrass:

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, existe un polinomio $P(x)$ que difiere de $f(x)$ tan poco como se quiera, en todo punto del intervalo.

Ahora bien, las funciones que se presentan en la Técnica tienen carácter aproximado, es decir, sólo se sabe que la función exacta está comprendida entre $f(x) \pm \delta$; es decir, la curva que representa exactamente el fenómeno de que se trate, está comprendida en la zona obtenida, llevando a uno y otro lado de la curva $y = f(x)$ incrementos de ordenadas iguales a $+\delta$ y $-\delta$.

Por tanto, por muy complicada que sea la función exacta, como, en virtud del teorema de Weierstrass, existe un polinomio que difiere de $f(x)$ tan poco como se quiera, entre las infinitas curvas comprendidas dentro de dicha zona podemos elegir la representada por dicho polinomio, la cual es muy sencilla por tener tangentes en todos sus puntos, ya que el polinomio admite derivada para todo valor de x.

En vista de tal indeterminación, entre las infinitas curvas contenidas en la zona que da el límite de error, se elige la más sencilla, por dos principios: el de *economía del esfuerzo* y la creencia en la *máxima sencillez* de las leyes naturales.

Por esta razón es legítimo admitir que todas las funciones continuas útiles al ingeniero admiten derivada, y así lo supondremos en lo sucesivo.

EJERCICIOS

1. — Demostrar que la derivada de la función $y = x^2$ es $y' = 2x$.

2.—Generalizar ésto, demostrando que la derivada de $y = x^n$ es $y' = n.x^{n-1}$.

3. — ¿Qué pendiente tiene la parábola $2py = x^2$ en cada punto?
¿En qué puntos tiene pendiente prefijada?

4. — Calcular el ángulo de las curvas $y = \text{sen } x$, $y = \cos x$ en cada punto de intersección.
(No se calculen las dos inclinaciones, sino las dos pendientes).

5. — Defínase la recta tangente usando la *inclinación*, en vez de la pendiente, demostrando la identidad de conceptos. (Fundamento: continuidad de la función $\text{tg}\, x$, y de su inversa).

6. — Aplíquese el concepto de tangente a los puntos impropios, sustituyendo inclinaciones o pendientes por distancias; véase la identidad con la definición (33).

7. — Una función interesante, estudiada por González Quijano, se define así: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(½) = ½$, y en general, el valor asignado en cada nuevo punto medio entre dos se forma sumando numeradores y denominadores **de los valores fraccionarios que toma en los dos puntos.**

Demuéstrese su continuidad, completando su definición, y estúdiense sus tangentes.

Lección 13

CALCULO DE LAS DERIVADAS

52. — Derivadas de las funciones inversas.

Siendo $y = f(x)$ función uniforme de x, si también es x función uniforme de y, es decir, si a cada valor de y (de un cierto intervalo) corresponde un valor de x, la función así obtenida $x = \varphi(y)$ se llama función *inversa* de $f(x)$. La derivada de y respecto de x es límite de $\Delta y : \Delta x$; la derivada de x, respecto de y es el límite $\Delta x : \Delta y$. Como estas dos funciones son recíprocas, sus límites también lo son, es decir: *la derivada de x respecto de y es recíproca de la derivada de y respecto de x.*

Geométricamente se llega al mismo resultado: la derivada de y respecto de x es $\operatorname{tg} \tau$; la de x respecto de y es $\operatorname{tg} \tau'$, siendo τ' el ángulo que forma la tangente con el eje y; como estos dos ángulos son complementarios, sus tangentes son recíprocas.

De este principio vamos a hacer repetidas aplicaciones. Así, para calcular la derivada de $y = e^x$ observemos que es $x = ly$, cuya derivada es $1/y$; luego la de y respecto de x será y, es decir:

La derivada de e^x es la misma función e^x.

53. — Derivadas de las funciones de función.

Siendo $y = f(x)$, y $z = \varphi(y)$, también es z función de x, pues al fijar un valor para x queda determinado el de y, del cual se deduce el de z.

Al incremento h de x corresponde un incremento Δy; y a éste corresponde un incremento Δz. Para calcular la derivada de z respecto de x, pondremos:

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{h}$$

Para $h \to 0$ estas dos fracciones tienden hacia los límites $\varphi'(y)$, $f'(x)$, de donde:

$$[1] \qquad z' = \varphi'(y) \cdot f'(x).$$

La derivada respecto de x de una función $\varphi(y)$, cuya variable y es función de la variable independiente x, se obtiene derivando $\varphi(y)$ respecto de la variable y; y multiplicando $\varphi'(y)$ por la derivada y' de y respecto de x.

Esta es la regla general de derivación, pues las funciones que se presentan no son, en general elementales, sino funciones elementales de otras funciones; y aplicando repetidamente la regla se llega a la derivación de todas.

Caso general. — Si la dependencia es por intermedio de varias funciones, por ejemplo: si es $y = f(x)$, $z = \varphi(y)$, $u = \psi(z)$, tendremos análogamente:

$$\frac{\Delta u}{h} = \frac{\Delta u}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{h}$$

y en el límite para $h \to 0$:

$$u' = \psi'(z) \ \varphi'(y) \cdot f'(x)$$

La derivada respecto de la variable independiente x se obtiene multiplicando las derivadas de cada función respecto de la variable de que inmediatamente depende.

Nota. — La fórmula [1] la hemos deducido suponiendo que al tender $h \to 0$, no se anula Δy, pues entonces no es legítimo multiplicar y dividir por él como hemos hecho. Sin embargo, si es $\Delta y = 0$ (de donde $f'(x) = 0$) será también $\Delta z = 0$ y por lo tanto $z' = 0$, que es el mismo resultado de la fórmula [1]; luego ésta vale en todo caso.

Otra demostración: por definición de derivada, los incrementos pueden expresarse así:

$$\Delta z = \Delta y \, [\varphi'(y) + \alpha] \qquad \Delta y = h \, [f'(x) + \beta]$$

siendo α, β infinitésimos, para $h \to 0$. Sustituyendo, resulta:

$$\Delta z = h \, [\varphi'(y) f'(x) + \gamma]$$

donde γ es otro infinitésimo, luego resulta [1].

54. — Derivadas de las funciones elementales.

Para derivar una expresión de forma monomia suele convenir tomar primero logaritmos naturales y después derivar. Como la derivada de ly es y'/y, esta expresión suele llamarse *derivada logarítmica* de y. He aquí varias aplicaciones importantes:

I. *Derivada de* $y = e^x$. — Tomando logaritmos: $ly = x$ y de rivando:

[2] $$y'/y = 1, \text{ o sea: } y' = y = e^x$$

La derivada de e^x es la misma función.

Si la función es $y = a^x$, resulta:

[3] $$ly = xla, \quad y'/y = la, \quad y' = y \, . la = a^x . la$$

II. *Derivada de* $y = x^m$. — Cualquiera que sea el exponente entero o fraccionario o irracional, positivo o negativo):

$$[4] \qquad ly = m.lx, \quad y'/y = m/x, \; y' = y.m/x = m.x^{m-1}$$

***La derivada de una potencia se obtiene multiplicando por su exponente y disminuyendo éste en* 1.**

En particular: si $y = \sqrt{x}$, resulta:

$$[5] \qquad y' = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 1:2\sqrt{x}$$

La derivada de la raíz cuadrada de x es la mitad de su recíproca.

III. *Derivada de un producto* $y = uv\ldots w$. — Tomando logaritmos y suponiendo para fijar las ideas que son tres los factores:

$$ly = lu + lv + lw$$

Derivando:

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w}$$

de donde se despeja inmediatamente:

$$[6] \qquad y' = u'vw + uv'w + uvw'$$

La derivada de un producto de cualquier número de factores es la suma de los productos obtenidos, sustituyendo un factor cualquiera por su derivada.

IV. *Derivada de un cociente* $y = u:v$. — Tomando logaritmos:

$$ly = lu - lv$$

y derivando

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} = \frac{vu' - uv'}{uv}$$

de donde:

$$[7] \qquad y' = \frac{u}{v} \cdot \frac{vu' - uv'}{uv} = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

La derivada de un cociente es igual a la derivada del numerador por el denominador, menos la derivada de éste por la de aquél, dividido por el cuadrado del denominador.

Nota. — Implícitamente hemos supuesto que todas las funciones eran *positivas*, para poder tomar logaritmos; así sucede desde luego en la exponencial y la potencial; pero en el producto o cociente puede presentarse alguna función negativa $-u$. En tal caso, cambiando el signo resulta como derivada logarítmica u'/u; mientras que la derivada logarítmica de $-u$ es

$$\frac{-u'}{-u} = \frac{u'}{u}.$$

Pruébese que también subsisten los teoremas si alguna función se anula.

Ejercicio. — Calcular la derivada de x^x y la de x^{x^x}.

(Basta tomar logaritmos y derivar después).

Aplíquese también la regla a la potencia x^m, cuando x es negativo (m fracción de denominador impar) tomando el valor absoluto.

55. — Derivadas de las funciones circulares directas.

El incremento de sen x al incrementar x en h, es:

$$\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x . \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x$$

y dividiendo por $\Delta x = h$, se deduce:

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{\cos x . \operatorname{sen} h}{h} - \frac{\operatorname{sen} x(1 - \cos h)}{h}$$

como $1 - \cos h$ es de orden superior a h, el último cociente tiene límite 0; y como sen h es equivalente a h(20), resulta:

$$[8] \qquad y' = \cos x$$

Análogamente resulta la derivada de cos x, o también considerada como función de función:

$$[9] \qquad \begin{aligned} y &= \cos x = \operatorname{sen}(1/2\pi - x) \\ y' &= -\cos(1/2\pi - x) = -\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Como tg x es el cociente de sen x por cos x la derivada es:

$$[10] \qquad y' = \frac{\cos x . \cos x + \operatorname{sen} x . \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

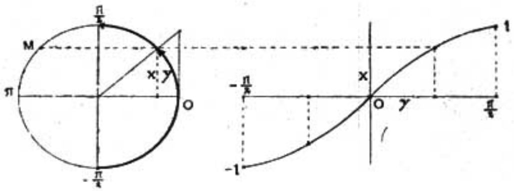
Análogamente, la derivada de ctg x es:

$$[11] \qquad y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

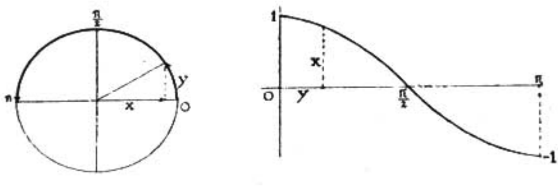
56. — Derivadas de las funciones circulares inversas.

La función $y = \text{arc sen } x$ tiene como inversa $x = \text{sen } y$, cuya derivada es $\cos y$; luego:

$$[12] \qquad y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$



Debemos tomar el signo +, pues entre los infinitos arcos que tienen el seno x, el símbolo arc sen x representa el situado en la semicircunferencia de la derecha, es decir: el comprendido entre $\pi/2$ y $-\pi/2$, cuyo cos y es *positivo.*



Análogamente: $y = \text{arc cos } x$ tiene como inversa $x = \cos y$, cuya derivada es $-\text{sen } y$, luego:

$$[13] \qquad y' = -\frac{1}{\text{sen } y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

tomando en el radical el signo + puesto que en la semicircunferencia superior es $\text{sen } y > 0$.

La función $y = \text{arc tg } x$ tiene como inversa $x = \text{tg } y$, cuya derivada es $1 : \cos^2 y$, luego:

$$[14] \qquad y' = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Nota. — No debe extrañar que la suma de las derivadas de arc sen x y de arc cos x sea nula, puesto que la suma de estas funciones vale $\pi/2$, que es constante. Análogamente, la derivada de arc ctg x es opuesta a la de arctg x.

57. — Derivación de determinantes.

Sea, por ejemplo, un determinante de tercer orden

$$\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & u_3(x) \\ v_1(x) & v_2(x) & v_3(x) \\ w_1(x) & w_2(x) & w_3(x) \end{vmatrix}$$

Cada término es de la forma: $u_i(x)\, v_j(x)\, w_k(x)$, y su derivada consta de tres términos que solo difieren en tener acentuada la u, o la v, o la w.

Agrupados los primeros, forman el determinante que sólo difiere en tener acentuada la primera fila; y análogamente las otras, luego:

La derivada de un determinante cuyos elementos son funciones de una variable, es la suma de los determinantes obtenidos derivando los elementos de una sola fila.

EJERCICIOS

1. — Derivar las funciones algebraicas siguientes:

$$y = x(x^2 - 1)(x^2 + 3)$$
$$y = x : (x^2 + 1)$$
$$y = \sqrt{x - 1} : \sqrt{x + 1}$$
$$y = (\sqrt{x} + 1) : (\sqrt{x} - 1)$$

2. — Derivar estas funciones trascendentes:

$$y = \text{sen}^2 x$$
$$y = -\tfrac{1}{2} \cos 2x$$
$$y = \text{arc tg}\ \frac{x + 1}{1 - x}$$

¿Por qué tienen igual derivada las dos primeras funciones y la tercera igual que arc tg x?

4. — Derivar directamente la función:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x - 1 & 1 \\ 1 & 1 & x + 1 \end{vmatrix}$$

y comprobar el resultado, derivando el desarrollo.

5. — Observar que la derivada de toda función circular inversa tiene signo constante, e interpretar esta propiedad.

6. — ¿Qué relación entre arc sen x, arc cos x, expresa la propiedad de ser opuestas sus derivadas?

Lección 14

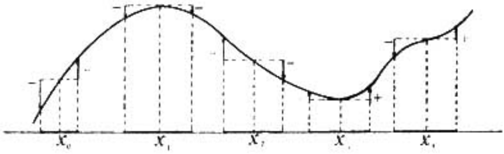
VARIACION DE LAS FUNCIONES . MAXIMOS Y MINIMOS

58. — Crecimiento y decrecimiento de las funciones.

En las diversas gráficas estudiadas en los artículos anteriores se observa que algunas veces crece la función al crecer x y otras decrece la función al crecer x. Esta noción de crecimiento y decrecimiento se refiere a la proximidad de cada punto, pues si nos alejamos de él, puede cambiar el carácter de la función. Vamos a precisar este concepto:

Se dice que $f(x)$ es *creciente* en el punto x_0 cuando el valor $f(x_0)$ es superior a los de su izquierda y menor que los de la derecha, en un cierto entorno del punto x_0.

Se dice que $f(x)$ es *decreciente* en el punto x_0 cuando el valor $f(x_0)$ es menor que los situados a su izquierda y mayor que los de su derecha en un cierto entorno del punto x_0.



Puesto que la derivada $f'(x_0)$ es el límite del cociente de incrementos $\Delta y_0 : \Delta x_0$ este cociente tendrá el mismo signo que $f'(x_0)$, tomando Δx_0 suficientemente pequeño en valor absoluto. Es decir:

Si $f'(x_0) > 0$, hay un intervalo, a uno y otro lado de x_0, en el cual es $\Delta y_0 : \Delta x_0 > 0$; Δy_0 e Δx_0 tienen el mismo signo, es decir, al crecer la variable x crece y; el valor $y = f(x_0)$ es mayor que los de su izquierda y menor que los de su derecha, en un cierto intervalo. La función es entonces *creciente* en el punto x_0; la tangente está dirigida por la derecha hacia arriba.

Si $f'(x_0) < 0$, hay un intervalo en el que $\Delta y_0 : \Delta x_0$ se conserva negativa, es decir: Δy_0 y Δx_0 tienen signo contrario; al crecer x decrece y; el valor $y = f(x_0)$ es menor que los anteriores a su izquierda y mayor que los posteriores a su derecha. La función es decreciente en el punto x_0; la tangente está dirigida por la derecha hacia abajo.

Finalmente, si $f'(x_0) = 0$, nada puede asegurarse respecto del signo de Δy_0 respecto de Δx_0; la tangente es entonces paralela al eje x. y puede haber crecimiento, decrecimiento, u otras posibilidades.

59. — Máximos y mínimos relativos. Criterio general.

Se dice que $f(x)$ tiene un *máximo relativo* en el punto x_0, cuando su valor $f(x_0)$ es mayor que los valores a la izquierda y a la derecha en un cierto intervalo. Y se dice que tiene un *mínimo relativo* cuando su valor es inferior a los otros valores, a derecha e izquierda, de un cierto intervalo.

Claro es que pasado cierto intervalo puede variar $f(x)$, de modo que tome valores mayores que el máximo o menores que el mínimo. Por esto decimos máximo *relativo* y mínimo *relativo*, para expresar que lo son respecto de un cierto intervalo o *entorno* a un lado y otro del punto, con amplitud mayor o menor según cada caso.

Si en un punto x_0 alcanza $f(x)$ un valor máximo relativo o mínimo relativo, debe anularse en él la derivada; pues, si fuese $f'(x_0) > 0$ la función sería *creciente*, y si fuera $f'(x_0) < 0$, la función $f(x)$ sería *decreciente*, lo que contradice a la hipótesis de máximo o mínimo. Podemos, pues, enunciar:

Para los valores de x en que $f(x)$ es máximo o mínimo relativo, si existe derivada ésta debe ser nula.

Geométricamente: la tangente debe ser paralela al eje x.

La anulación de la derivada es, pues, condición *necesaria* para que $f(x)$ sea máximo o mínimo relativo, pero no es suficiente; pues puede suceder que siendo la tangente paralela al eje x atraviese a la curva y sea, por tanto, $f(x)$ creciente o decreciente, sin tener máximo ni mínimo.

Tales puntos en que la tangente atraviesa a la curva (aunque no sea paralela al eje x, como aquí sucede) se llaman de *inflexión*. En la figura hay inflexión para $x = x_4$.

Para saber si $f(x)$ presenta máximo, mínimo o inflexión en los puntos x en que se anule $f'(x)$, basta ver el signo de la derivada a ambos lados. He aquí los tres casos importantes: si al crecer x pasando por el valor $x = x_0$, la derivada $f'(x)$ pasa de

$-$ a $+$, hay *mínimo* en el punto x.
$+$ a $-$, „ *máximo* „ „ „ x.
$-$ a $-$, o de $+$ a $+$, hay *inflexion*.

En efecto, en el primer caso, el mínimo absoluto en el intervalo, no lo puede alcanzar ni a la izquierda (donde es decreciente), ni a la derecha (donde es creciente); luego lo alcanza en x_0.

Análogamente, en el segundo caso, el *máximo* absoluto en el intervalo, debe alcanzarlo en x_0.

En el tercer caso, si la derivada es negativa a ambos lados, el valor $f(x_0)$ es el mínimo del arco de la izquierda y el máximo del arco de la derecha, luego hay inflexión, y lo mismo sucede si la derivada es positiva a ambos lados. (Para un **4.° caso** ,v. **Ejerc. 5**).

EJEMPLO 1. — Sea la función: $y = (x - a)^m(x - b)^n$

Su derivada es:

$$y' = (x - a)^{m-1}(x - b)^{n-1}[m(x - b) + n(x - a)] = 0$$

Raíces: $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = (mb + na) : (m + n)$

Si m es impar, el primer factor no cambia de signo, luego hay inflexión en a; lo mismo sucede en b si n es impar. En cambio, si son los exponentes pares, cambia y' de signo, y esto acontece siempre en x_3, habiendo máximo o mínimo según los casos. Complétese la discusión.

EJEMPLO 2. — Con un rectángulo de lados 5 y 8 dm. construir una caja de capacidad máxima.

Llamando x a la altura, la base tiene las dimensiones $5 - 2x$, $8 - 2x$ y el volumen:

$$V = (5 - 2x)(8 - 2x)x = 4x^3 - 26x^2 + 40x$$

$$V' = 12x^2 - 52x + 40$$

Dividiendo por 4 queda:

$$3x^2 - 13x + 10 = (x - 1)(3x - 10)$$

es decir: las raíces son $x = 1$, $x = 10/3$.

La índole del problema exige que los cuadrados recortados en los ángulos tengan la dimensión $x < 5/2$, pues para $x = 5/2$ resulta volumen nulo. Como para $x = 0$ el volumen es también nulo, dicho volumen debe alcanzar al menos un máximo entre 0 y $5/2$; luego hay una solución y sólo una: $x = 1$ que da una caja de volumen máximo: $V = 3.6 = 18$ dm^3. Esto mismo nos indica el cambio de signo de V'.

EJEMPLO 3. — Generalicemos el problema anterior, construyendo con un rectángulo de dimensiones $a > b$ una caja de capacidad máxima.

Llamando x a la altura, al recortar en los ángulos cuadrados de lado x, la base de la caja tiene el área $(a - 2x)(b - 2x)$ y el problema se reduce a calcular el máximo de la función:

$$V = (a - 2x)(b - 2x)x = 4x^3 - 2(a + b)x^2 + abx$$

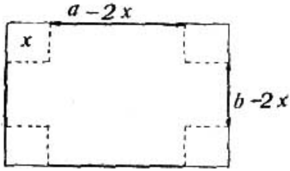
$$V' = 12x^2 - 4(a + b)x + ab = 0$$

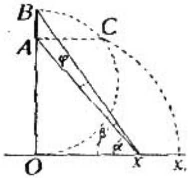
Las raíces de esta ecuación son: $[a + b \pm \sqrt{(a + b)^2 - 3ab}] : 6$.

Estas raíces son siempre reales, pues:

$$(a+b)^2 - 3ab > (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 > 0$$

y las dos son positivas, pues el radical es inferior a $a+b$; o bien directamente, basta observar que los signos de los coeficientes de la ecuación son $+-+$. ¿Corresponden estas raíces a valores máximos o mínimos del volumen? El signo de V' o bien el examen directo del problema, aclaran la duda, y resulta: el problema tiene solución única: $x = [(a+b) - \sqrt{(a+b)^2 - 3ab}] : 6$.





60. — Método de las derivadas sucesivas.

Cuando es fácil la formación de la derivada de $f'(x)$, o sea $f''(x)$, y no se anula en x_0, su signo indica si hay máximo o mínimo.

Si $f''(x_0) < 0$, es $f'(x_0)$ *decreciente*, luego $f(x_0)$ *máximo*.

Si $f''(x_0) > 0$, es $f'(x_0)$ *creciente*, luego $f(x_0)$ *mínimo*.

Sin embargo, es preferible el criterio directo del cambio de signo de $f'(x)$, que evita la formación de derivadas sucesivas, cada vez más complicadas.

Más adelante, por satisfacer una costumbre, más que por necesidad, daremos la discusión general mediante las derivadas sucesivas.

61. — Simplificaciones en el cálculo de máximos y mínimos.

El método de la derivada puede ser engañoso cuando hay puntos donde no existe. La derivada de $\sqrt[3]{x^2}$ no se anula en ningún punto y sin embargo la función es mínima en el origen. El método expuesto debe completarse con un examen de la variación en todo el campo, mediante el signo de la derivada.

Algunas observaciones facilitan el cálculo de máximos y mínimos:

1. — Si la función $y = f(x)$ alcanza un máximo relativo en el punto x_0, la función $-f(x)$ toma una valor mínimo y viceversa. Lo mismo sucede con la función recíproca $1 : f(x)$ suponiendo que $f(x)$ no se anula.

2. — Si $\varphi(y)$ es *creciente*, y la función $y = f(x)$ toma un máximo o mínimo en el punto x_0, también $\varphi(y)$ toma en este punto un máximo o mínimo; pues siendo $y_0 = f(x_0)$ en el caso de máximo, mayor que los valores de y a

uno y otro lado de x_0, también $\varphi(y_0)$ es mayor que los valores $\varphi(y)$ correspondientes a dichos valores de x.

En cambio, si $\varphi(y)$ es decreciente, toma valores máximo o mínimo en los puntos en que y alcanza mínimo o máximo respectivamente.

Así, por ejemplo, en el primer cuadrante, los máximos y mínimos de la función sen $f(x)$ son los de $f(x)$.

Estas observaciones permiten simplificar los problemas como veremos a continuación.

EJEMPLO 4. — He aquí un problema importante para la mejor visualidad de longitudes verticales.

Determinar el punto del suelo desde el cual se ve un segmento vertical AB bajo ángulo máximo

$$\varphi = OXB - OXA = \beta - \alpha$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \beta . \operatorname{tg} \alpha} = \frac{(b-a)x}{x^2 + ab}$$

En vez de despejar φ para calcular su máximo, observemos que siendo tg x mayor o menor según sea mayor o menor el arco, será máximo cuando lo sea su tangente, y ésta será máxima cuando sea mínima su recíproca. Prescindiendo del factor positivo $b - a$, basta, pues, investigar los mínimos de la función:

$$x + abx^{-1}.$$

La derivada es: $1 - ab/x^2 = 0$, de donde: $x = \pm \sqrt{ab}$

La solución es, pues, la media geométrica entre a y b. La índole del problema indica que se trata de máximo, pues el ángulo comienza siendo nulo cuando X está en O, va creciendo y luego decrece al alejarse X, llegando a ser el ángulo tan pequeño como se quiera. Las dos soluciones dan dos puntos simétricos respecto del punto O; su construcción está efectuada en la figura (pág. 64).

EJERCICIOS

1. — Estudiar la variación de la función

$$y = 1 : (1 + x^2)$$

y dibujar su gráfica (curva de Gaetana Agnesi).

Su autora la llamó curva *versiera*.

2. — La resistencia a la flexión de una viga de sección rectangular, es directamente proporcional a la base y al cuadrado de la altura de dicho rectángulo. Sabido esto, determinar la viga de máxima resistencia y sección rectangular que puede sacarse de un tronco de árbol de radio r.

3. — Si en dos medios separados por una recta las velocidades de un móvil v y v' son distintas, el camino más breve para ir de un punto de uno a un punto de otro satisface a la ley de la refracción: la razón de los senos de los ángulos de incidencia y refracción es igual a la razón de velocidades.

4. — Demostrar que si la derivada en un punto es $+\infty$ por ambos lados, la función es creciente en ese punto; si es $-\infty$, la función es decreciente.

5. — Ejemplos en que $f'(0) = 0$, con muy diverso comportamiento:

$$y = x^2 \quad , \quad y = x^3 \quad , \quad y = x^2 \,.\, \operatorname{sen} {}^1/x$$

6. — Demostrar que sumando $\frac{1}{2}x$ a la 3.ª función resulta otra, creciente en 0, pero con puntos de decrecimiento infinitamente próximos.

LECCIÓN 15

LA DIFERENCIAL Y SUS APLICACIONES

62. — Diferencial de una función derivable.

Hemos definido:

$$f'(x) = \text{lím.} \ \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

es decir: $f'(x)$ es el límite del cociente de los incrementos de la función y de la variable, cuando este último tiende a O. Si aplicamos la definición de límite, tenemos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

siendo α un infinitésimo, si hacemos $\Delta x \to 0$. Esta función α es, en general, complicada, pues depende del valor de x, es decir, del punto de la curva en que se calcula la derivada, depende también del incremento de x y de la función $f(x)$.

De la igualdad anterior sacamos:

$$\Delta y = f'(x) \,.\, \Delta x + \alpha \,.\, \Delta x\,;$$

esta nueva igualdad expresa que el incremento de una función se compone de dos sumandos: uno de ellos es la derivada por el incremento de la variable, y el otro es esa función α por el incremento de la variable x, luego es infinitésimo de orden superior a $h = \Delta x$. Si $f'(x) = 0$ la parte llamada *principal* de Δy es, por tanto, el primer sumando, que es infinitésimo equivalente a Δy, y tiene la ventaja de ser función lineal de h; ese término $f'(x) \,.\, \Delta x$ se llama *diferencial* de $f(x)$ y se representa así: $dy = f'(x) \,.\, \Delta x$.

Diferencial de una función en un punto x es el producto de la derivada en ese punto por el incremento arbitrario de la variable.

Si como función se considera la misma x y aplicamos el concepto de diferencial que hemos enunciado, la diferencial será el producto de la derivada por el incremento de la variable; y siendo la derivada de la variable $\Delta x/\Delta x = 1$, se tiene: $dx = \Delta x$. Si se trata de una función cualquiera y se tiene: $dy \neq \Delta y$, como ahora veremos.

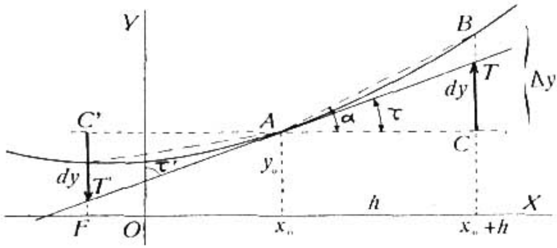
Siendo $\Delta x = dx$, tenemos: $dy = f'(x)dx$, de donde resulta $f'(x) = dy/dx$, es decir: *la derivada es el cociente de la diferencial de la función por la diferencial o incremento de la variable.*

63. — Significado geométrico de la diferencial.

Según la definición

$$dy = f'(x) \,.\, dx = f'(x) \,.\, \Delta x.$$

y como $f'(x) = \operatorname{tg} \tau$ podemos escribir $dy = \Delta x \,.\operatorname{tg} \tau$, y en el triángulo rectángulo ACT un cateto por la tangente del ángulo adyacente, es igual al otro cateto: $CT = dy$. Geométricamente, *la diferencial de $f(x)$ para un valor de x es la ordenada comprendida entre la horizontal que pasa por el punto correspondiente de la curva y la tangente a la curva en dicho punto.* En la figura se ve claramente que $\Delta y \neq dy$. Sustituir el incremento Δy por la diferencial dy equivale, pues, a sustituir la curva por su tangente, lo cual no es legítimo sino en ciertos problemas que estudiaremos. Será $\Delta y = dy$ solamente cuando la curva coincida con su tangente, es decir, cuando la función sea lineal: $y = ax + b$.



Si hacemos $\Delta x \to 0$ entonces Δy, dy, son infinitésimos. En todo punto en que $f'(x) \neq 0$, es dy del mismo orden que dx, puesto que su cociente $f'(x)$ es finito y no nulo; como Δy, dy, difieren en $\alpha . \Delta x$, que es de orden superior a Δx, y por tanto de orden superior a dy, ambos infinitésimos Δy, dy son equivalentes, y por tanto su cociente tiene límite 1. En cambio, cuando sea $f'(x) = 0$, es decir, en los puntos de tangente horizontal, es $dy = 0$; entonces debemos comparar Δy con las diferenciales de orden superior, que pronto definiremos.

64. — Regla general de diferenciación.

Si en la función $y = f(x)$, no es x independiente, sino que a su vez depende de otra variable t, es decir: $x = \varphi(t)$ la derivada de y

respecto de la nueva variable t resulta de la igualdad:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

ya considerada en (53), de donde, tomando límites, sale:

$$y' = f'(x) \cdot \varphi'(t) \qquad [1]$$

conviniendo en que y' designe a la derivada respecto de t.

Si la variable t depende a su vez de otra variable, la fórmula anterior se complica, siendo preciso *multiplicar las derivadas de todas las funciones intermedias*, como se vió en la lección 13.

La notación diferencial es más ventajosa. En efecto, con ella tenemos que la [1] se expresa así:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

y *multiplicando por* dt, resulta:

$$dy = f'(x)\,dx \qquad [2]$$

es decir, esta fórmula que en el caso de ser x la variable independiente constituye la definición de la diferencial, siendo en ella dx un incremento arbitrario, es válida también cuando x no es independiente, *sino función de* t, *según* acabamos de demostrar, sólo que en este caso dx deberá calcularse según la variable o variables de que dependa t, y ya no es un incremento arbitrario.

Como para *la diferenciación no es necesario fijar cuál es la* variable independiente, ofrece ventajas sobre la derivación y suele preferirse.

NOTA. — Pudiera creerse que la fórmula (2) resulta directamente por supresión del factor dx, pero esto no es legítimo, pues dx tiene significados distintos en el numerador y en el denominador. (V. *Curso Cíclico*, II).

EJEMPLO. — Tangente a la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Diferenciando ambos miembros, como el segundo es constante, resulta:

$$\frac{2x \cdot dx}{a^2} + \frac{2y \cdot dy}{b^2} = 0$$

de donde se despeja:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\,\frac{b^2}{a^2} \qquad \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}\,\frac{a^2}{b^2}$$

65. — Tangentes a curvas dadas en forma paramétrica. Cicloide. Llamamos *curva* a la trayectoria de un punto, esto es, al conjunto de posiciones de un punto móvil. Al decir que un punto se mueve expresamos que sus dos proyecciones se mueven, es decir, que *varían* con velocidad determinada en todo momento, o sea que las coordenadas son funciones continuas y derivables del tiempo.

$$x = \varphi(t) \qquad y = f(t)$$

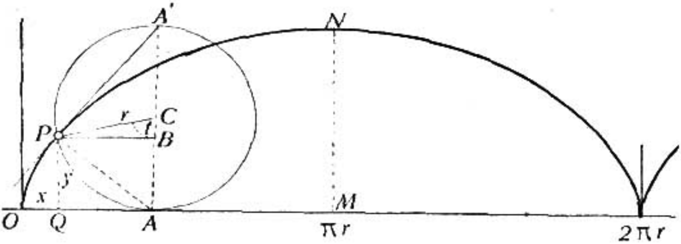
El parámetro t puede ser también una variable continua cualquiera (un ángulo en el ejemplo que sigue) y el par de ecuaciones es la *expresión paramétrica* de la curva; eliminando t resulta la ecuación ordinaria $F(x, y) = 0$.

Suponiendo que $f'(t)$, y $\varphi'(t)$ no se anulan simultáneamente, p. ej. $\varphi'(t) \neq 0$, existe tangente, cuya pendiente se calcula así:

$$dx = \varphi'(t)\,dt, \qquad dy = f'(t)\,dt \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{\varphi'(t)}$$

Cicloide. — Es la curva engendrada por un punto de una circunferencia que rueda sobre una recta sin resbalar, es decir, de modo que cada segmento de recta es igual al arco correspondiente.

Tomando como parámetro el ángulo t que forma con la vertical el radio CP, el arco AP es rt y resulta de la simple inspección de la figura:



$$x = rt - r \text{ sen } t = r(t - \text{sen } t) \qquad dx = r(1 - \cos t)\,dt$$
$$y = r - r \cos t = r(1 - \cos t) \qquad dy = r \text{ sen } t\, dt$$

de donde $y' = \text{ctg}\, \frac{1}{2}\, t$; luego la tangente es la recta PA' que pasa por el punto opuesto al de contacto de la circunferencia. En efecto, el ángulo que forma con el diámetro AA' es $\frac{1}{2}t$, luego el ángulo con el eje x es el complementario. La normal es precisamente PA.

En particular, la tangente en O es la perpendicular a la recta base.

EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO Y SUS APLICACIONES

66. — Teoremas de Rolle y del valor medio.

He aquí una propiedad geométrica importante:

En todo arco de curva regular hay algún punto intermedio cuya tangente es paralela a la cuerda.

La intuición nos hace ver, en efecto, que al trasladarse la cuerda paralelamente, dos al menos de los puntos de intersección tienden a confundirse en uno; y teniendo tangente única ese punto, debe ser precisamente dicha paralela a la cuerda.

La demostración aritmética rigurosa puede verse en las notas; (Lecc. 17). Veamos sus diversas formas y aplicaciones.

Sea $y = f(x)$ una función uniforme con derivada finita en cada punto del intervalo (o bien infinita con signo único por ambos lados). *Si es $f(a) = f(b)$ en los extremos del intervalo, hay algún punto intermedio donde $f'(\xi) = 0$.*

Este es el teorema llamado de Rolle, cuya aplicación más frecuente suele ser ésta: *Entre dos valores que anulan a la función, hay otro que anula a la derivada.*

Supongamos ahora que $f(a)$ y $f(b)$ son cualesquiera; la pendiente de la cuerda es $[f(b) - f(a)] : (b - a)$; la pendiente de la tangente en un punto de abscisa intermedia ξ es $f'(\xi)$, luego si es paralela a la cuerda, resulta la igualdad:

[1] $$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi)$$

Este es el *teorema del valor medio* o del *incremento finito*, de Lagrange, que se enuncia así:

El incremento de una función derivable es igual al incremento correspondiente de la variable por la derivada en un punto intermedio.

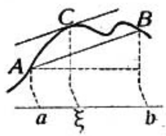
Escrito de otro modo:

[2] $$\Delta y = \Delta x \, . \, f'(\xi)$$

o también así:

$$f(a + h) - f(a) = h f'(a + \vartheta h)$$

siendo $\quad 0 < \vartheta < 1$



67. — Teorema fundamental del Cálculo integral.

Supongamos nula la derivada $f'(x)$ en todo punto de (a, b), ¿cómo será la función? De otro modo: ¿cómo es la curva si todas sus tangentes son paralelas? La intuición asegura que debe reducirse a una recta, pero es más seguro utilizar el teorema del valor medio y con él vemos que siendo nulo el segundo miembro de [1] debe ser $f(b) = f(a)$, para todo par de valores, o sea: $f(x) =$ constante.

Consecuencia inmediata: *si dos funciones $f(x)$, $\varphi(x)$ tienen* derivadas iguales en todo un intervalo, difieren en una constante en dicho intervalo. En efecto, si es $f'(x) = \varphi'(x)$, la función $f(x) - \varphi(x)$ tiene derivada nula, luego para todo valor x del intervalo supuesto se verifica:

$$f(x) - \varphi(x) = c$$

De otro modo: llamando *primitiva* de $f'(x)$ a $f(x)$, resulta:

Dos funciones primitivas de una misma función difieren en una constante.

Pronto veremos la importancia de este teorema para el cálculo de integrales mediante funciones primitivas.

68. — Error de una función.

El teorema del valor medio no sólo es fundamento de todo el cálculo diferencial e integral, sino que también se apoya en él el cálculo de errores de la Matemática práctica.

Calculado un valor $y = f(x)$, ¿qué influjo tiene en y un error Δx de la variable x? El teorema del valor medio da la contestación exacta en la fórmula [2]. El error de la función es igual al error de *la variable por la derivada en un punto intermedio.*

Pero se presentan dos dificultades: 1.ª No se conoce el error de la variable, sino una cota superior del mismo. 2.ª No se conoce el punto intermedio ξ. Sin embargo, sabiendo bajo qué número se conserva Δx y bajo qué número está $f'(\xi)$ en el intervalo $(x, x + \Delta x)$, se tiene fácilmente un límite del error Δy, es decir, sabemos el grado de aproximación alcanzado.

Ejemplo 1. — En la división $y = 1:x$, el error de x queda multiplicado por la derivada $-1/x^2$ en un punto del intervalo de x; este factor es más grande cuanto menor sea x. En cambio el error relativo de y no depende de la cuantía de x, *sino solamente del error relativo de x.*

Suponemos que el lector sabe operar con números decimales, es decir, conoce la teoría de los errores.

EJEMPLO 2. — Si la distancia entre dos puntos AB, no puede medirse directamente, pero sí las distancias $AC = b$, $BC = a$, y el ángulo $ACB = C$, se calcula c por la fórmula:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C}$$

Suponiendo exactos a y b, el error que produce en c un error h del ángulo C es

$$\Delta c = \tfrac{1}{2}(2ab \operatorname{sen} \xi) h : c$$

siendo ξ un número comprendido entre C y $C + h$.

Tendremos, pues, un valor aproximado para Δc tomando:

$$|\Delta c| \sim |h| \, ab \, C : c$$

Si el error del ángulo medido $C = 29° \; 50'$ es $|h| < 1' = 0{,}00003\ldots.$ siendo $\operatorname{sen} \xi < \tfrac{1}{2}$, resulta: $\quad |\Delta c| \sim \tfrac{1}{2}ab \cdot 0{,}00003 : c$

Si se quiere asegurar un límite superior, para evitar el peligro de que el *denominador difiera apreciablemente de c, se sustituye éste por el número menor:*

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab} = a - b$$

NOTA. — La exactitud con que deba efectuarse la medida de x depende de la cuantía de la derivada; si ésta es grande, exige mayor precisión y por ende mayor costo y trabajo.

Una grosera medida de un ángulo pequeño permite calcular su coseno con *error disminuído; al contrario, dado el coseno, el arco adolecerá de gran error.* Explíquese esto con las derivadas y directamente en la circunferencia.

69. — Interpolación lineal. Su error.

Conocidos los valores $f(a)$ y $f(b)$ de una función $f(x)$ en los puntos a y b, podemos calcular aproximadamente los valores en puntos intermedios, sustituyendo el arco de curva por la cuerda. Esto equivale a admitir que los incrementos de ordenadas son proporcionales a los incrementos de las abscisas.

Admitiendo la proporcionalidad entre las diferencias de los tres valores:

$$a \quad , \quad a + h \quad , \quad b$$

y sus correspondientes:

$$f(a) \quad , \quad f(a + h) \quad , \quad f(b)$$

resulta:

$$[3] \qquad f(a + h) \sim f(a) + h \, \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Esta fórmula se aplica para la interpolación de valores no contenidos en una tabla de valores de cualquier función $f(x)$. Así se hace en las tablas de logaritmos, tablas de funciones circulares, tablas de logaritmos de funciones circulares, etc.

La diferencia $f(b) - f(a)$ entre los valores consecutivos dados por las tablas, se llama *diferencia tabular*.

En las tablas de logaritmos, a y b son enteros consecutivos; el producto de la diferencia tabular por el valor $h < 1$ se facilita con tablillas impresas al margen de la tabla.

Acotación del error.

La fórmula de interpolación, en virtud del teorema del valor medio, puede escribirse así:

$$f(a+h) \sim f(a) + h\,f'(c)$$

siendo c un punto intermedio entre a y b.

Por otra parte, el mismo teorema da el valor *exacto*:

$$f(a+h) = f(a) + h\,f'(\zeta), \qquad a < \zeta < a + h.$$

El error de la fórmula [3] será, por tanto: $h[f'(\zeta) - f'(c)]$ y como ambos números pertenecen al intervalo (a, b), aplicando de nuevo el teorema del valor medio será:

$$\text{error} = h(\zeta - c)\,.\,f''(\lambda)$$

siendo λ un número intermedio. En definitiva, siendo la distancia o diferencia $|\zeta - c|$ menor que la amplitud del intervalo, $b - a$, si la derivada segunda se conserva en todo el intervalo inferior a un número fijo K, resulta:

$$\text{error absoluto} < h\,(b-a)K \qquad \text{si se conserva } |f''(x)| < K$$

EJEMPLO. — La interpolación lineal se aplica para calcular logaritmos de números comprendidos entre dos consecutivos n y $n+1$, cuya diferencia de logaritmos se llama diferencia tabular Δ. La fórmula es:

$$\log\,(n+h) = \log\,n + h\Delta \;\text{ siendo }\; \Delta = \log\,(n+1) - \log\,n$$

El error cometido resulta observando que siendo $n > 10000$ para las tablas de 7 decimales (Schrön, Callet, ...)

$$|f''(x)| = M/x^2 < 0{,}43\ldots : (10000)^2$$

luego resulta: $\quad \text{error} < 0{,}000000005$

es decir, no influye en la séptima cifra decimal.

70. — Cálculo aproximado de logaritmos.

El incremento de lx es decir: $l(x+h) - lx$ es aproximadamente igual a h/x y también se aproxima a $h:(x+h)$; en realidad es igual a h por el valor de la derivada en un punto intermedio.

Obtendremos mejor aproximación tomando el promedio de los dos valores extremos, y mejor todavía sumando numeradores y denominadores, con lo que resulta un valor intermedio. Tendremos, pues:

$$l(x+h) - lx \sim \frac{2h}{2x+h}$$

Esta fórmula permite calcular $l(x+h)$ conocido lx, sin más que sumarle la fracción anterior. Según se demuestra en la teoría de las series, es tan exacta esta fórmula, que si es $x > 10000$, el error es menor que 10^{-13}; es decir, resulta el logaritmo con 13 decimales exactas.

Para logaritmos decimales basta multiplicar por el módulo:

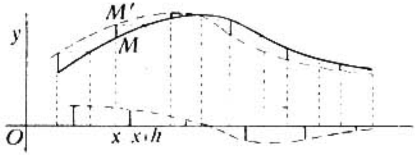
$$\log(x+h) \sim \log x + 2hM/(2x+h)$$

Es con esta fórmula tan sencilla con la que se calculan las tablas de logaritmos. Para construir una tabla hasta 100000 basta calcular los logaritmos de 10^4 a 10^5. Así, por ejemplo, dentro del orden de las diezmillonésimas, es:

$$\log 10001 = 4 + 2 . 0{,}43429/20001 = 4{,}0000434.$$

71. — Derivación gráfica de funciones.

Puesto que la curva derivada $y' = f'(x)$ facilita el estudio de la curva $y = f(x)$, conviene dar un procedimiento rápido de construcción aproximada que en muchos casos es suficiente.



Dibujada la curva, traslademosla hacia su izquierda (mediante un calco en papel transparente) un segmento h.

El segmento de ordenada MM' comprendido entre ambas no es sino:

$$f(x+h) - f(x) = hf'(\xi)$$

Llevada esta ordenada MM' en el punto medio entre x y $x+h$ (que diferirá de ξ en menos de $h/2$) tenemos una gráfica que representa aproximadamente la función derivada, medida con la unidad h. Esto mismo se consigue mejor, sin necesidad de trasladar la curva, dibujando ésta en papel milimetrado.

EJERCICIOS

1. — Aplicar la interpolación lineal a tablas diversas: funciones circulares naturales, cuadrados, recíprocos, logaritmos de Gauss, ...; y acotar el error en cada caso.

2. — En el ejemplo 2, ¿qué influencia tiene en el error del lado c un error del lado a?

3. — ¿Para qué arcos es más exacta la interpolación en las tablas de senos y cosenos?

Distínganse el problema directo y el inverso, es decir, dado el arco, calcular sus funciones circulares, y viceversa.

4. — En qué intervalos del seno o de la tangente el error del arco es mil veces mayor que el de aquéllos?

LECCIÓN 17

TEOREMA GENERAL DEL VALOR MEDIO Y SUS APLICACIONES

72. — Teorema del valor medio de Cauchy.

Dada una curva en forma paramétrica, si las coordenadas del punto variable están dadas como funciones cuyas derivadas no se *anulan simultáneamente*:

$$x = \varphi(t), \quad y = f(t)$$

y el intervalo de variación de t es $a \leqq t \leqq b$, siendo a el valor de t que corresponde al origen A del arco y b al extremo B, la pendiente de la cuerda AB es el cociente de la diferencia de ordenadas por la diferencia de abscisas; y la pendiente de la tangente en el punto intermedio que corresponde al valor ξ (66) es el cociente de derivadas; luego el paralelismo de cuerda y tangente se expresa así:

Si $\varphi(b) \neq \varphi(a)$ se verifica:

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

Este es el *teorema del valor medio de* CAUCHY, que expresa: ***El cociente de incrementos de dos funciones cuyas derivadas no se anulan simultáneamente, es igual al cociente de los valores que éstas toman en un punto intermedio.***

73. — Cálculo de límites indeterminados.

Una aplicación importante del teorema de Cauchy es el cálculo de límites indeterminados.

Si $f(a) = 0$, $\varphi(a) = 0$, el límite del cociente $f(x)/\varphi(x)$ para $x \to a$ *no se puede calcular como cociente de límites, pues carece* de sentido; pero la fórmula de Cauchy da la igualdad:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

y el límite de la primera fracción para $x \to a$ es igual al de la segunda para $\xi \to a$; el problema ha quedado reducido a otro análogo, y si las derivadas toman para $x = a$ valores que no son ambos nulos, su cociente da el límite buscado; si ambas se anulan, puede convenir derivar de nuevo, y así se sigue hasta llegar a derivadas que no se anulan simultáneamente. Esta es la regla que suele llamarse de l'Hôpital, atribuída por otros a Juan Bernoulli.

En la práctica conviene combinar el método con la sustitución de factores infinitésimos o infinitos por otros equivalentes, pues la aplicación repetida de la regla de derivación sólo conduce al resultado en casos sencillos.

EJEMPLO 1. — Aplicando la regla de l'Hôpital se encuentra el verdadero valor de $(\operatorname{sen} x)/x$ para $x = 0$, pues el cociente de derivadas vale: $\cos x$, y para $x = 0$ resulta 1.

No se crea, sin embargo, que esto puede evitar la demostración directa dada en (20), pues la regla de l'Hôpital presupone el conocimiento de la derivada de $\operatorname{sen} x$ y en el cálculo de ésta se ha utilizado la equivalencia de los infinitésimos $\operatorname{sen} h$ y h.

EJEMPLO 2. — Calcular lím. $(x - \operatorname{sen} x) : x^3$ para $x \to 0$.

El cociente de derivadas es:

$$\frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x}{3x^2}$$

y sustituyendo el seno por el arco, sale $1/6$.

Queda así demostrado que el infinitésimo $x - \operatorname{sen} x$ es equivalente a $x^3/6$.

EJEMPLO 3. — Análogamente, calculemos el límite para $x \to 0$, de

$$\frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3},$$

el cociente de derivadas es:

$$\frac{1/\cos^2 x - 1}{3x^2} = \frac{1 - \cos^2 x}{3x^2 \cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{3x^2 \cos^2 x} \to \frac{1}{3}$$

luego $\operatorname{tg} x - x$ es equivalente a $x^3/3$.

GENERALIZACIÓN DE LA REGLA. — Esta es asimismo aplicable para la forma de indeterminación $\infty : \infty$ y también si $x \to \infty$.

Si las dos funciones $f(x)$, $\varphi(x)$ tienden a 0, o bien a ∞, para $x \to a$ (a finito, $+\infty$, $-\infty$), pero el cociente de derivadas tiene límite (finito o infinito) para $x \to a$, y éstas no se anulan simultaneamente en ningún punto también el cociente de funciones tiende a ese mismo límite. Es decir:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \qquad [1]$$

EJEMPLO: Comparemos mediante esta regla las funciones infinitas x^n y a^x $(a > 1)$ para $x \to \infty$. El cociente de sus derivadas 1.as, 2.as, ... es respectivamente:

$$\frac{x^n}{a^x}, \quad \frac{nx^{n-1}}{a^x . la}, \quad \frac{n(n-1)\,x^{n-2}}{a^x . (la)^2}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{n!}{a^x (la)^n}$$

Para $x \to +\infty$ todo denominador crece infinitamente, pero al llegar a la derivada n-sima el numerador es ya finito, luego el límite de esta fracción es 0 *y también lo es el de todas las anteriores.*

Llegamos así al mismo resultado ya obtenido en (34).

NOTA. — Puesto que los tipos de indeterminación $0 . \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 se reducen, como ya sabemos (29 y 44) al tipo $0/0$, o bien al $\infty - \infty$, la regla de l'Hôpital permitirá con frecuencia calcular el límite.

Hay casos, sin embargo, en que ésta es ineficaz. Así por ejemplo si se aplica a las expresiones:

$$\frac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x + \cos x}, \quad \frac{x - \operatorname{sen} x}{x}$$

que para $x \to \infty$ adoptan las forma $\infty : \infty$, la 1.ª se reproduce periódicamente al derivar sucesivas veces y la 2.ª conduce con una derivación a $1 - \cos x$ que carece de límite. Sin embargo, salta a la vista, dividiendo numerador y denominador por e^x (en la 2.ª por x) que ambas fracciones tienen límite 1.

La simplificación, combinada con la regla de l'Hôpital, es el mejor método.

NOTAS

Demostración del Teorema de Rolle.

Sea $f(x)$ una función derivable en todo punto interior de (a, b).

Si $f(x)$ es continua en $[a . b]$ alcanza su máximo al menos en un punto ξ, *y su mínimo al menos en un punto* ξ', *en virtud del teorema de Bolzano-*Weierstrass (13, II).

Siendo, por hipótesis, $f(a) = f(b)$, *si esos puntos* ξ *y* ξ' *son* a *y* b, la función es constante y su derivada nula en todo punto. En caso contrario, alguno de ellos es *interior* y en él toma $f(x)$ *un máximo relativo o mínimo relativo*, debiendo anularse en él $f'(x)$ en virtud de (59).

Demostración de los Teoremas de Cauchy y de Lagrange.

Basta demostrar aritméticamente la *propiedad geométrica en que nos hemos* apoyado en (66) y en (72):

En todo arco regular de curva hay algún punto intermedio cuya tangente es paralela a la cuerda.

Si *cambiamos de coordenadas adoptando como eje* x la recta AB que determinan los extremos del arco, la ecuaciones de éste son:

$$x = \varphi(t) \qquad y = f(t)$$

para $a \leq t < b$, siendo $f(a) = f(b)$.

Si el arco no se confunde con el segmento (en cuyo caso el teorema es evidente), o bien el máximo o bien el mínimo de $f(t)$ lo alcanza en un punto intermedio $t = \xi$, en el cual debe ser $f'(\xi) = 0$, o sea $dy = 0$, por tanto $dy/dx = 0$.

Quedan así justificados rigurosamente el teorema del valor medio de Lagrange, y el generalizado de Cauchy. Obsérvese que en éste queda incluído aquél cuando se supone $\varphi(t) = t$.

Demostración de la regla generalizada de l'Hôpital.

Forma $0:0$ para $t \to \infty$. — Sustituyendo $t = 1/z$ se tiene

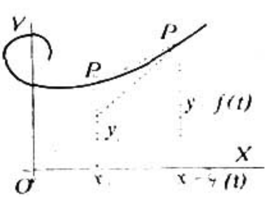
$$\frac{f(t)}{\varphi(t)} = \frac{f(1/z)}{\varphi(1/z)}$$

Si $t \to \infty$, o sea $z \to 0$, basta calcular el cociente de derivadas respecto de z:

$$\frac{f'(t)(-1/z^2)}{\varphi'(t)(-1/z^2)} = \frac{f'(t)}{\varphi'(t)}$$

y si existe límite de este cociente para $t \to 0$, ese límite, en virtud del primer caso, lo es también del cociente de funciones $f(t)/\varphi(t)$.

Forma $\infty : \infty$ *para* $t \to a$, *(finito o infinito)*



Puesto que $f'(t) : \varphi'(f) \to L$, para $t \to a$, desde un t en adelante es:

$$f'(t)/\varphi'(t) = \mathrm{L} + \delta \qquad |\delta| < \varepsilon$$

y como elegido uno de esos valores t_0 es, por el teorema de Cauchy:

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{\varphi(t) - \varphi(t_0)} = \frac{f'(\tau)}{\varphi'(\tau)}$$

la pendiente de $P_0 P$, que es el primer miembro, difiere de L en menos de ε.

Fijado P_0, al alejarse infinitamente P para $t \to \alpha$, el ángulo de las semirectas $P_0 P$ y OP tiende a 0, luego sus pendientes difieren menos de ε, desde un t_1 en adelante; luego la pendiente de OP difiere de L en menos de 2ε, desde t_1 en adelante, es decir: $f(t)/\varphi(f) \to L$.

EJERCICIOS

1. — Calcular para $x \to 0$ los límites de las expresiones siguientes:

$$x^{-2} - \mathrm{ctg}^2\, x \quad ; \qquad x^{-2}(1 - x \cdot \mathrm{ctg}\, x) \quad ;$$
$$x^2 \,.\, \mathrm{sen}\, x^{-1} \,.\, \mathrm{sen}^{-1} \quad ; \qquad x(x^{-1} - \mathrm{sen}\, x^{-1}).$$

Por mera simplificación, o bien, combinada con derivación, resultan respectivamente, estos límites: $^2/_3$; $^1/_3$; 0; 1.

2. — Calcular, para $x \to +\infty$, los límites de:

$$x^2 : (x - \mathrm{sen}\, x) \quad ; \quad l(1 + x)/x$$
$$x(2\, \mathrm{arctg}\, x - \pi) \quad ; \quad l(l\, x) : x,$$

Soluciones: $+\infty$; 0; $-2/\pi$; 0.

CAPITULO III

DERIVADAS Y DIFERENCIALES SUCESIVAS

LECCIÓN 18

INCREMENTOS Y DIFERENCIALES DE ORDEN n

74. — Derivadas sucesivas. Caso de la función entera.

La derivada de la función derivada $f'(x)$ se llama *derivada segunda* de $f(x)$ y se representa así: $y'' = f''(x)$ o también $D^2 f(x)$.

La derivada de la segunda derivada se llama *derivada tercera*, y se representa así: $y''' = f'''(x) = D^3 f(x)$. Así, siguiendo, tenemos infinitas derivadas de $f(x)$.

Sea, por ejemplo, $y = x^m$; sus derivadas sucesivas son:

$$y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}, \quad y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3},$$

$$y^{(m-1)} = m(m-1) \ldots 2x^1; \quad y^{(m)} = m(m-1) \ldots 1$$

las derivadas siguientes son todas nulas, puesto que $y^{(m)}$ es constante. Sea, análogamente $y = (x-a)^m$:

$$y' = m(x-a)^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)(x-a)^{m-2} \ldots$$

$$y^{m-1} = m(m-1) \ldots 2(x-a), \quad y^{(m)} = m(m-1) \ldots 2.1$$

y las derivadas siguientes son:

$$y^{m+1} = y^{m+2} = \ldots = 0$$

Es decir: *Todas las derivadas de* $(x-a)^m$ *se anulan para* $x = a$, *excepto la derivada m-sima cuyo valor es* $m!$

FÓRMULA DE LEIBNIZ. — Las derivadas sucesivas del producto uv son:

$$uv' + u'v \quad ; \quad uv'' + 2u'v' + u''v \quad ; \quad uv''' + 3u'v'' + 3u''v' + u'''v.$$

Demuestre el lector que la ley observada es general; y la analogía con la potencia del binomio justifica esta notación simbólica:

$$D^n uv = (u + v)^{(n)}$$

entendiendo que los exponentes se sustituyen por índices de derivación, y que toda función con índice 0 representa la misma función.

75. — Ordenes de las raíces y de los infinitésimos.

Un número a se llama *cero* o *raíz múltiple de orden* h de un función $f(x)$, o $f(x) = 0$ cuando es

$$f(x) = (x-a)^h g(x) \quad \text{siendo } g(a) \neq 0 \tag{1}$$

Para $x \to a$ es $f(x)$ infinitésimo de orden h pues su cociente por $(x-a)^h$ tiene el límite $g(a) \neq 0$. La derivada de $f(x)$ es:

$$f'(x) = (x-a)^{h-1}\,[hg(x) + (x-a)g'(x)]$$

y como la función entre paréntesis no se anula para $x = a$, pues toma el valor $hg(a) \neq 0$, resulta:

Si una raíz es múltiple de orden h en una función, es de orden $h-1$ en su derivada primera. Por tanto, es de orden $h-2$ en la derivada segunda; de orden 1 en la derivada $f^{h-1}(x)$; no es raíz en la derivada $f^h(x)$.

De otro modo: *El orden de multiplicidad de una raíz a de una ecuación, o sea el orden infinitesimal de $f(x)$ para $x \to a$, es el índice de la primera derivada que no se anula para $x = a$.* Este criterio vale para todas las ecuaciones, sean algebraicas o trascendentes.

Ejemplo 1. — Derivemos respectivamente la función:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 3x + 1 = 0\\
f'(x) &= 12x^5 - 15x^4 - 12x^3 + 18x^2 - 3\\
&= 3\ \ [4x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 1]\\
f''(x) &= 6\ \ [10x^4 - 10x^3 - 6x^2 + 6x]\\
f'''(x) &= 12\,[20x^3 - 15x^2 - 6x + 3]\\
f^{\text{IV}}(x) &= 72\,[10x^2 - 5x - 1]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Se observa inmediatamente que el valor $x = 1$ anula a $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, pero no a $f'''(x)$, luego es raíz triple.

El valor $x = -1$ anula a $f(x)$ y $f'(x)$, pero no a $f''(x)$, luego es raíz doble. El polinomio debe ser, pues, divisible por $(x-1)^3\,(x+1)^2$; suprimido el factor $x^2 - 1$ dos veces, y otra el $x - 1$ queda como cociente $2x - 1$; luego la quinta raíz es $x = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 2. — El valor $x = 0$ es cero doble de la función $1 - \cos x$; y es raíz triple de la ecuación $\operatorname{sen} x = x$.

Nota. — De la definición adoptada resulta: si h es par $f(x)$ tiene el mismo signo a ambos lados del punto a; si h es impar cambia de signo $f(x)$.

Como corolario resulta la posición relativa de dos curvas con un punto común. (79, Nota).

76. — Diferenciales sucesivas y derivadas sucesivas.

Hemos definido la diferencial $dy = f'(x)dx$ como producto de la derivada por el incremento de la variable independiente. La diferencial es, pues, una función de x y del incremento dx. Si fijamos dx como constante, (por ejemplo, $dx = 1$) la diferencial dy es función de x y admite a su vez derivada que es $f''(x) . dx$, luego la diferencial de dy, que llamaremos *diferencial segunda* de y, es:

$$d^2y = d(dy) = f''(x)\ dx . dx = f''(x)\ (dx)^2$$

Por brevedad de la escritura, suele ponerse dx^2 en vez de $(dx)^2$; no se confunda esta notación con la diferencial de x^2, que es $2\,x\,dx$.

Si $dx \to 0$, y las derivadas no son nulas, es dy un infinitésimo de primer orden; y d^2y es infinitésimo de segundo orden, pues dividido por $(dx)^2$, da cociente finito no nulo.

Análogamente, tenemos la diferencial tercera, cuarta, etc.:

$$d^3y = d(d^2y) = f'''(x)\ (dx)^3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = f^n(x)\,(dx)^n$$

De estas igualdades se puede despejar las derivadas: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ... que son, respectivamente:

$$\frac{dy}{dx}\ ,\ \frac{d^2y}{dx^2}\ ,\ \frac{d^3y}{dx^3}\ ,\ \dots$$

y el cálculo diferencial opera con estos cocientes como fracciones. Los numeradores pueden anularse, pero no los denominadores.

77. — Teorema generalizado del valor medio.

Si $f(x)$ tiene sus derivadas, hasta la de orden $n - 1$, nulas en el punto a, es decir:

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{n-1}(a) = 0,$$

y aplicamos repetidamente el teorema de Cauchy, resulta:

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^n} = \frac{f'(\xi_1)}{n(\xi_1 - a)^{n-1}} = \frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_2 - a)^{n-2}} = \dots = \frac{f^n(\xi)}{n!}$$

siendo ξ_1 un número comprendido entre x y a; ξ_2 entre ξ_1 y a ; ... y por tanto, ξ comprendido entre x y a.

De donde despejamos el valor del incremento:

$$f(b) - f(a) = (b - a)^n . f^n(\xi)/n!$$

Es decir: *El incremento $f(b) - f(a)$ de la función $f(x)$ que tiene nulas sus derivadas* 1.ª, 2.ª, ..., $(n-1)$ª, *en el punto a, es igual a la potencia n-sima del incremento de la variable por la derivada n-sima en un punto intermedio, dividido por n!*

NOTA. — Como $f^n(x)\Delta x^n$ es la diferencial n — sima de $f(x)$ resulta:

Cuando se anulan las derivadas 1.ª, 2.ª.... $(n-1)$ª de $f(x)$ en el punto a, el ***incremento $\Delta f(x)$ es un infinitésimo de orden n, equivalente a la diferencial*** *n-sima (tomada en el punto a) dividida por n!, e igual a la diferencial n-sima en un punto intermedio dividida por n!*

78. — Discusión general de los máximos y mínimos.

Hemos visto en lección 14 el método para la obtención de los máximos y mínimos de una función, mediante la anulación de su derivada.

El análisis de cada problema concreto indicará si los valores encontrados para x hacen máxima o mínima a la función, o si por el contrario la curva tiene simplemente una inflexión. Cuando esto no se logre, el examen del signo de la derivada resuelve la cuestión, como ya vimos. He aquí otro criterio general:

Si a es una raíz de la derivada $f'(x)$, caben los casos siguientes, según que la primera derivada no nula sea de índice par o impar:

$f^{2k}(a) > 0$		$f(x)$ toma un valor mínimo
$f^{2k}(a) < 0$		„ „ „ „ máximo
$f^{2k}(a) = 0$	$f^{2k+1}(a) > 0$	„ es creciente con inflexión
$f^{2k}(a) = 0$	$f^{2k+1}(a) < 0$	„ „ decreciente con inflexión

En efecto: hemos visto que

$$f(a+h) - f(a) \text{ es equivalente a } h^n f^n(a)/n!$$

Si $n = 2k$ es par, es $(-h)^{2k} > 0$ a la izquierda, $h^{2k} > 0$ a la derecha de a, luego:

Si $f^{2k}(a) > 0$, $\quad f(a-h) > f(a) < f(a+h)$ mínimo

Si $f^{2k}(a) < 0$, $\quad f(a-h) < f(a) > f(a+h)$ máximo

Si $n = 2k+1$, es $(-h)^{2k+1} < 0$ a la izquierda, $h^{2k+1} > 0$ a la derecha, luego según que sea:

$f^{2k+1}(a) > 0$ resulta: $f(a-h) < f(a) < f(a+h)$ creciente.

$f^{2k+1}(a) < 0$ „ $f(a-h) > f(a) > f(a+h)$ decreciente

79. — Ordenes de contacto de dos curvas.

Dadas dos curvas $y = f(x)$ $y = \varphi(x)$ con un punto común A, los valores de ambas funciones son iguales para la abscisa a de A, es decir: $f(a) = \varphi(a)$.

La diferencia $\delta(x) = f(x) - \varphi(x) = f(a+h) - \varphi(a+h)$ de las ordenadas para una abscisa próxima a a tiende hacia cero con h, es decir, es un infinitésimo. La derivada de $\delta(x)$ es:

$$\delta'(x) = f'(x) - \varphi'(x) \quad ; \quad \delta'(a) = f'(a) - \varphi'(a) \quad ;$$

luego el infinitésimo $\delta(x)$ es equivalente a la diferencial en el punto a:

$$h[f'(a) - \varphi'(a)]$$

Es decir: si las dos curvas no son tangentes en el punto de intersección, y por tanto es $f'(a) \neq \varphi'(a)$, el segmento de ordenada comprendido entre ambas curvas es un infinitésimo de primer orden; las dos curvas se atraviesan.

Si es $f'(a) = \varphi'(a)$ pero $f''(a) \neq \varphi''(a)$, la función $\delta(x)$ tiene nula su derivada primera, pero no la segunda; por el teorema generalizado del valor medio el infinitésimo $\delta(x)$ es de segundo orden, equivalente a la diferencial segunda (dividida por 2):

$$\tfrac{1}{2}h^2[f''(a) - \varphi''(a)]$$

Las dos curvas son tangentes en A y el contacto se llama *simple* o *de primer orden*. Como $\delta(x)$ no cambia de signo, las dos curvas no se atraviesan.

Si es $f'(a) = \varphi'(a)$, $f''(a) = \varphi''(a)$, pero $f'''(a) \neq \varphi'''(a)$, por el mismo teorema generalizado del valor medio, el infinitésimo $\delta(x)$ es de tercer orden. El contacto se dice entonces de *segundo orden* y las dos curvas se atraviesan.

En general, el contacto se dice de orden n cuando las dos funciones tienen iguales las derivadas, hasta las de orden n inclusive; entonces el segmento de ordenada limitado por ambas curvas es un infinitésimo de orden $n+1$ equivalente a:

$$h^{n+1}[f^{n+1}(a) - \varphi^{n+1}(a)] : (n+1)!$$

NOTA. — Esta exposición ha sido independiente del teorema (75) sobre raíces múltiples. Con él queda resuelta la cuestión en pocas palabras:

Si $f(x)$ y $\varphi(x)$ tienen iguales las n primeras derivadas para $x = a$, es a raíz de orden $n+1$ de $f(x) - \varphi(x)$ y se verifica en virtud de [1]:

$$f(x) - \varphi(x) = (x-a)^{n+1} \cdot g(x) \qquad g(a) \neq 0$$

El infinitésimo es, pues, de orden $n+1$, y las curvas se atraviesan si el orden n es par; no se atraviesan si es impar.

NOTA 1. — Hemos supuesto que las derivadas para $x = a$ son finitas; si las derivadas primeras son infinitas, es decir, si la recta tangente es paralela al eje y, tomaremos las x como ordenadas, o cualquier otra dirección distinta de la dirección de la tangente. Si un sistema de secantes paralelas (de dirección distinta que la recta tangente) da segmentos infinitésimos de un cierto orden, el mismo orden resulta con secantes de otra dirección siempre que sea distinta de la tangente; pues aplicando las fórmulas de cambio de eje y, resultan infinitésimos del mismo orden.

NOTA 2. — En los puntos en que $f(x)$ toma valores máximos, la tangente es paralela al eje x, por ser $f'(x) = 0$; cuando además se anulan varias derivadas, el contacto con la tangente es de orden superior. Si la primera derivada no nula es la del orden $2k$, la curva no es atravesada por su tangente; esto sucede en los máximos y mínimos. En cambio, si la primera derivada no nula es de orden $2k + 1$, el contacto es de orden $2k$; la curva es atravesada por la tangente, y el punto es de inflexión.

NOTAS

Ecuaciones algebraicas. — Para saber si tienen raíces múltiples, basta averiguar si hay algún divisor común a $f(x)$ y $f'(x)$; esto se consigue calculando el m. c. d. de ambos polinomios, para lo que basta someterlos al mismo algoritmo de divisiones sucesivas (algoritmo de Euclides), como se hace con los números, hasta llegar a una división exacta. El último divisor es el m. c. d.; si es constante, los dos polinomios no admiten divisor común dependiente de x; la ecuación no tiene entonces raíces múltiples.

Teorema de Sturm. — Si al efectuar las divisiones del m. c. d. se tiene la precaución de cambiar el signo de cada resto al ponerlo como divisor, se obtienen varios polinomios que se llaman de Sturm: $f(x)$, $f'(x)$, y los divisores siguientes, hasta el m. c. d.

Para saber el número de raíces reales comprendidas en un intervalo (a, b) basta sustituir $x = a$ en los polinomios de Sturm y contar el número A de cambios de signo; sustituir $x = b$, contando el número B de cambios de signo. El número de raíces comprendidas entre a y b es precisamente $A - B$.

Como solo interesan los signos y no los valores, basta calcular todos los coeficientes con dos cifras exactas y esto se consigue muy rápidamente con la regla de cálculo, pues cada división se hace con una sola posición de la reglilla.

Para estudiar la divisibilidad algebraica y la demostración del teorema de Sturm, consúltese cualquier tratado de Algebra.

EJERCICIOS

1. — Determinar el orden de contacto mutuo en el origen de las curvas

$$y = x \quad , \quad y = \operatorname{sen} x \quad , \quad y = x \,.\cos x \,.$$

2. — Hacer la discusión completa de los máximos y mínimos de la función

$$y = (x - a)^m \, (x - b)^n$$

mediante las derivadas sucesivas.

3. — Generalizar el resultado anterior al caso de tres o más factores

$$y = (x - a)^m \, (x - b)^n \, \ldots\ldots \, (x - h)^q$$

FORMULA DE TAYLOR. APROXIMACION LINEAL

80. — Fórmulas de Mac-Laurin y de Taylor.

Siendo los polinomios las funciones más sencillas, se tiende en Análisis a expresar las demás funciones por medio de *polinomios*, calculando el error o diferencia para saber el grado de aproximación logrado.

Dada la función $f(x)$, si formamos el polinomio:

$$P(x) = f(0) + \frac{x \cdot f'(0)}{1!} + \frac{x^2 \cdot f''(0)}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1} f^{n-1}(0)}{(n-1)!}$$

tiene para $x = 0$ las mismas derivadas 1.ª, 2.ª, ... $(n-1)^a$ que $f(x)$, pues resulta, en virtud de (74):

$$P'(0) = f'(0) \qquad P''(0) = f''(0) \ldots \qquad P^{n-1}(0) = f^{n-1}(0).$$

Vamos a expresar la función $f(x)$ en la forma

[1] $$f(x) = P(x) + T(x)$$

llamando $T(x)$ a la diferencia entre ambas. Este término complementario $T(x)$ tendrá, por tanto, nulas sus derivadas 1.ª, 2.ª, ... $(n-1)^a$, es decir:

$$T(0) = 0 \quad , \quad T'(0) = 0, \ldots \quad , \quad T^{n-1}(0) = 0.$$

En cambio, como la derivada n-sima de $P(x)$ es nula, resulta:

$$T^n(x) = f^n(x)$$

luego, aplicando el teorema generalizado del valor medio, será:

[2] $$T(x) = x^n \cdot f^n(\xi) : n!$$

es decir, el término complementario tiene la misma forma que los *anteriores, con la única modificación* de tomar la derivada n-sima no en el punto 0, sino en un punto intermedio ξ, entre 0 y x.

La fórmula [1] suele llamarse de Mac-Laurin, aunque es de Taylor, reservándose este nombre para la fórmula más general:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h \cdot f'(a)}{1!} + \frac{h^2 \cdot f''(a)}{2!} + \ldots + \frac{h^{n-1} \cdot f^{n-1}(a)}{(n-1)!} + \frac{h^n f^n(\xi)}{n!}$$

que se deduce de la anterior considerando h como variable. El número ξ está comprendido entre a y $a+h$.

Recíprocamente, poniendo $F(x) = f(a + x)$, de la fórmula [1] sale la general de Taylor; luego ambas son equivalentes.

En ambas fórmulas puede darse a n cualquier valor $n = 1, 2, 3, \ldots$; agregando el correspondiente término complementario, en el cual figura el número desconocido ξ; pero si la derivada $f^n(x)$ se conserva en todo el intervalo inferior a un número fijo K, no es necesario conocer dicho número, pues tenemos como cota del error:

$$\text{error} < h^n K : n!$$

Por tanto, al crecer n, el error tiende hacia cero.

EJEMPLO 1. — Puesto que las derivadas de e^x son todas e^x y para $x = 0$ valen 1, tenemos este desarrollo:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3 e^{\theta x}}{3!}$$

luego aproximadamente, se puede adoptar:

$$e^x \sim 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2$$

Para $x = 0,1$ resulta:

$$e^{0,1} \sim 1 + 0,1 + 0,005 = 1,105$$

luego

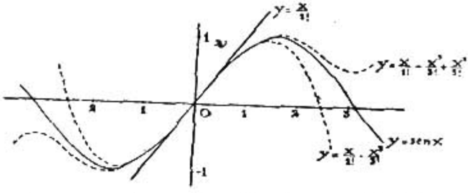
$$e^{\theta x} < e^{0,1} < 1,2$$

y el error cometido es:

$$T < 0,001 \,.\, 1,2 : 6 = 0,0002$$

es decir: el resultado 1,105 tiene todas sus cifras exactas.

EJEMPLO 2. — Las derivadas de sen x son: $\cos x$, $-\operatorname{sen} x$, $-\cos x$, ..., cuyos valores para $x = 0$ son: 1, 0, -1, 0, ...



La figura representa la aproximación de los polinomios sucesivos hacia la función $y = \operatorname{sen} x$.

Si limitamos el desarrollo de Mac-Laurin en el término de segundo grado, tenemos:

$$\operatorname{sen} x \sim x; \qquad \text{error} = x^3 . \cos \theta x/6 < x^3/6$$

Es decir: la diferencia entre el seno y el arco es menor que la sexta parte del cubo del arco.

Arcos	hasta	$1° = 0,017$	$\varepsilon < 0,000001$
„	„	$2° = 0,035$	$\varepsilon < 0,00001$
„	„	$3° = 0,052$	$\varepsilon < 0,00003$
....			
„	„	$10° = 0,175$	$\varepsilon < 0,001$

Para arcos mayores, el error va creciendo, pero si tomamos un término más, tenemos: $\operatorname{sen} x \sim x - x^3/6$ error $< x^5/5!$

$$x < 10^\circ = 0{,}175 \quad , \quad T < 0{,}00076:5! = 0{,}000001\ldots.$$
$$x < 45^\circ = 0{,}785 \quad , \quad T < 0{,}0025$$

Nótese que por tener $P(x)$ comunes con $f(x)$ las $n-1$ primeras derivadas en a ambas curvas tienen contacto de orden igual o mayor que el grado. En este ejemplo las curvas sucesivas tienen con la sinusoide contacto de orden 2, 4, 6, ...

81. — La recta tangente como primera aproximación.

El objeto principal de la fórmula de Taylor es, como hemos visto, expresar aproximadamente las funciones en forma de polinomio de grado prefijado. El error viene dado por un término trascendente cuyo valor es desconocido; pero si se sabe entre qué límites se conserva la derivada n-sima, se puede limitar dicho término complementario, sabiendo así el grado de aproximación lograda con el polinomio de grado $n-1$.

Limitemos el desarrollo de Taylor así:

$$y = f(a) + hf'(a) + \tfrac{1}{2}h^2 f''(\xi)$$

Si tomamos solamente los dos términos primeros, tenemos una aproximación lineal:

$$y = f(a) + hf'(a) \qquad \text{o sea:} \quad y = f(a) + (x-a)f'(a)$$

que representa la tangente en el punto a.

NOTA. — En las Ciencias físicas se presentan funciones empíricas, dadas por experiencias, que conviene representar analíticamente, esto es, por fórmulas, para inducir la marcha de los fenómenos análogos. Tal sucede, por ejemplo, con las deformaciones producidas en los ensayos a la tracción, de varillas metálicas, donde se observa que la gráfica tiene un trazo sensiblemente rectilíneo, que revela la proporcionalidad entre los esfuerzos y las dilataciones dentro del límite de elasticidad. Es la ley de Hooke. Pero esta proporcionalidad *es sólo aproximada; y si bien suele ser suficiente para predecir* la cuantía de la dilatación, hay casos en que la deformación crece más rápidamente que los esfuerzos. La función lineal no es entonces suficiente para expresar la ley de deformación y hay que agregarle un término cuadrático y aún de tercer grado. Lo mismo sucede con la fórmula de dilatación de varillas por el calor.

Según la fórmula de Taylor, es suficiente la aproximación lineal en un intervalo mayor o menor, según que la derivada segunda sea menor o mayor.

EJERCICIOS

1. — Tangente en el origen a la sinusoide a la tangentoide y a la curva $y = 5x^3 - 4x$, propuesta en (3).

2. — Tangentes a las mismas curvas en el punto $x = -3$.

Lección 20

CONVEXIDAD, CONCAVIDAD E INFLEXIONES

82. — Convexidad y concavidad de curvas.

El error cometido en la aproximación lineal es exactamente:

$$\tfrac{1}{2}h^2 . f''(\xi)$$

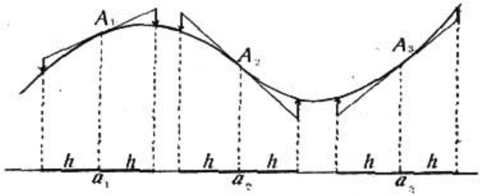
y mide la diferencia de ordenadas entre la curva y la tangente.

He aquí expresada exactamente la función $h\alpha$ con que designábamos *en (62) la diferencia* $\Delta y - dy$ *entre el incremento y la* diferencial.

Si es $f''(a) > 0$, como $f''(x)$ es función continua, conserva signo $+$ en la proximidad de a y siendo $f''(\xi) > 0$ el error es por defecto ,es decir, las ordenadas de la curva superan a las de la tangente a ambos lados del punto a; o sea: la curva se conserva por encima de la tangente. Se dice entonces que tiene la *concavidad* hacia arriba.

Si es $f''(a) < 0$, en la proximidad de a es $f''(\xi) < 0$, el error es por exceso; la curva queda hacia abajo de la tangente en un cierto intervalo; se dice entonces que la curva tiene su *convexidad* hacia arriba.

En ambos casos el error o diferencia es un infinitésimo de 2.º orden; se dice por esto que el contacto es de 1.er orden.



Ejemplos: 1. — La curva de la figura es convexa hacia arriba en el punto a_1 y cóncava hacia arriba en el punto a_3.

2. — La derivada segunda del sen x es — sen x, luego en las semiondas positivas la concavidad es hacia abajo, y en las semiondas negativas la concavidad es hacia arriba.

83. — Puntos de inflexión.

Cuando es $f''(a) = 0$, es preciso tomar más términos del desarrollo hasta llegar a una derivada que no se anule.

Si $f^n(a) \neq 0$, escribiremos:

$$y = f(a) + hf'(a) + h^n.f^n(\xi) : n!$$

y el error es entonces $h^n.f^n(\xi) : n!$ que es infinitésimo de orden n.

Si n es par, este error no cambia de signo al cambiar h de signo, es decir, al pasar de la izquierda a la derecha de a; la curva es convexa o cóncava hacia arriba ,según sea la derivada $f^n(a)$ negativa o positiva, pero con un contacto superior con la tangente; se dice que el contacto es de orden $n-1$. Esto se nota en el dibujo, pues siendo el error del mismo orden que h^n, disminuye muy rápidamente y pronto llega a ser inapreciable en el dibujo, apareciendo como si la curva tuviera con la tangente un trozo común.

Si es impar, la diferencia de ordenadas cambia de signo al pasar de la izquierda a la derecha del punto a; la curva queda atravesada por su tangente. Tal punto se llama de *inflexión*. El caso más sencillo de inflexión es:

$$f''(a) = 0 \qquad f'''(a) \neq 0 \qquad \text{error} = h^3.f'''(\xi) : 6$$

EJEMPLO. — En la figura de (82) el punto A_2 es de inflexión, pasando la curva de convexa a cóncava.

NOTA. — No suele ser necesario ni conveniente la formación de las derivadas tercera, ..., siendo preferible ver que la segunda cambia de signo, lo que indica que el primer término no nulo es de grado impar.

EJEMPLO. — Para la curva versiera $y = 1 : (1 + x^2)$ la segunda derivada, prescindiendo de factores positivos, es $3x^2 - 1$, que cambia de signo en los puntos $x = \pm {}^1/_3 \sqrt{3}$, luego son de inflexión.

84. — Aproximación de raíces por la regla de Newton.

Dada una ecuación $f(x) = 0$ algebraica o trascendente y una vez encontrado un intervalo (a, b) donde existe una raíz, tanto a como b son valores aproximados de dicha raíz; para mejorar la aproximación, caben dos métodos: sustituir la curva por la cuerda, o por la tangente en uno de los dos extremos del arco.

El primer método es el de interpolación lineal o por partes proporcionales, que ha sido explicado en (69). El segundo es el método de Newton, que da mejor aproximación.

Puesto que la ecuación de la tangente en el punto a es:

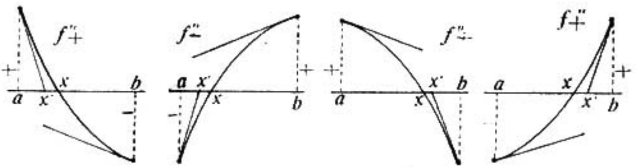
$$y = f(a) + (x - a)f'(a)$$

su intersección con el eje x da el valor:

$$x = a - f(a)/f'(a)$$

es decir: al valor aproximado a se le agrega el término

$$-f(a)/f'(a)$$



Ahora bien: la inspección de las figuras muestra que la tangente puede dar una intersección que se aleje del verdadero valor de la raíz buscada. Para tener la garantía de que se mejora la aproximación aplicando la regla de Newton, procederemos así:

Suponemos que $f''(x)$ no se anula en el intervalo y por tanto, tiene el mismo signo en a y b; en cambio, $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios, luego hay un extremo y uno sólo tal que $f(x)$ y $f''(x)$ tienen el mismo signo; pues bien, elegimos ese punto y agregándole el término complementario de Newton, tenemos una mejor aproximación, como se observa en la figura donde se han puesto los cuatro casos posibles, y en todos ellos queda x' entre el valor de partida y el verdadero valor de x, es decir, más aproximado al valor de la raíz buscada. (Véanse: *Lecciones de Algebra*, § 9).

Error de la fórmula de Newton:

Puesto que la ecuación exacta es

$$y = f(a) + (x - a)f'(a) + \tfrac{1}{2}(x - a)^2 f''(\xi)$$

la intersección con el eje x tiene por abscisa

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{(x-a)^2 f''(\xi)}{2f'(a)}$$

El error cometido con la fórmula de Newton es

$$\frac{(x-a)^2 f''(\xi)}{2f'(a)} < \frac{(b-a)^2 f''(\xi)}{2f'(a)}$$

Poniendo en vez de $f''(\xi)$ un número K superior a los valores de $f''(x)$ en el intervalo (a, b), resulta como límite de error

$$\frac{(b-a)^2 K}{2f'(a)}$$

Esta *fórmula demuestra que* la aproximación lograda es tanto mejor cuanto mayor sea $f'(a)$. Si ésta supera a la derivada segunda, el número de cifras decimales exactas en el nuevo valor será doble que en el valor de partida. Pero si $f'(a)$ es pequeño podemos alejarnos del valor de la raíz.

Tendremos la seguridad de que x' se aproxima a x más que a si x' está comprendido entre a y x; esto se verifica *si $f(a)$ tiene el mismo signo que $f''(x)$ en todo el intervalo.* Suponemos que en todo él no se anula $f''(x)$ y por tanto tiene signo constante. Si la derivada segunda se anula precisamente en la raíz buscada, la regla de Newton puede alejarnos de este valor.

EJEMPLO. — Ecuación $\mathrm{tg}\ x = x + \pi$.

Hemos calculado en (13) los valores aproximados:

$$77^\circ\, 27' < x < 77^\circ\, 28'$$

x	$x+\pi$	$\mathrm{tg}\ x$	$f(x)$
$77^\circ\, 27' = 1{,}352\ldots.$	$4{,}494\ldots.$	$4{,}492\ldots.$	$-0{,}002\ldots.$
$77^\circ\, 28' = 1{,}352\ldots.$	$4{,}494\ldots.$	$4{,}498\ldots.$	$+0{,}004\ldots.$

Las derivadas son:

$$f'(x) = 1/\cos^2 x - 1 = \mathrm{tg}^2\, x$$
$$f''(x) = +2\ \mathrm{sen}\ x/\cos^3 x > 0.$$

Elegiremos, pues, el valor $a = 77^\circ\, 28' = 1{,}352$ y le agregaremos

$$-0{,}004683 : \mathrm{tg}^2\, 77^\circ\, 28' = -0{,}000231\ldots.$$

¿Con cuántas cifras debemos calcular $f(a)$, $f'(a)$ y el cociente de ambos, para que todas sean exactas?

El error de la fórmula de Newton es:

$$\frac{(b-a)^2}{2} \cdot \frac{f''(\xi)}{f'(a)} = \frac{0{,}0003^2}{2} \cdot \frac{2\ \mathrm{sen}\ \xi}{20{,}23\ \cos^3\xi} \quad \frac{0{,}0000001}{0{,}008 \times 20}$$

que es $< 0{,}0000007$; luego podemos obtener exactas hasta las millonésimas, es decir, tres cifras significativas del término de corrección, y para ello ha sido preciso tomar 4 cifras exactas en el dividendo.

En resumen, el término de corrección vale $-0{,}000231 = -47''$ y el nuevo valor de la raíz por exceso es $a' = 77^\circ\, 27'\, 13''$.

EJERCICIOS

1. — Estudiar la convexidad, concavidad e inflexión de la curva de Cauchy, definida por la exponencial de exponente $-1/x^2$.

2. — Resolver las ecuaciones: $2 . lx = x$, $2 . \mathrm{sen}\ x = x$.

Lección 21

APROXIMACION CUADRATICA. CURVATURA

85. — Parábola osculatriz de una curva.

Si en el desarrollo de Taylor tomamos los tres primeros términos, obtenemos la curva:

$$y = f(a) + (x - a)\, f'(a) + \tfrac{1}{2}(x - a)^2 f''(a)$$

que es una parábola llamada *osculatriz* porque tiene con la curva $y = f(x)$ un contacto de segundo orden en el punto a. La diferencia de ordenadas es un infinitésimo de tercer orden, y como este infinitésimo contiene la potencia h^3, cambia de signo al pasar h de negativo a positivo. Es decir: la parábola atraviesa a la curva en el punto de contacto, a no ser que el contacto sea superior por anularse la derivada 3.ª.

Esta parábola tiene el eje paralelo al y; al cambiar los ejes coordenados, varía la parábola, y por ésto se prefiere la circunferencia osculatriz o círculo osculador, que tiene en el punto dado un contacto de segundo orden con la curva dada, es decir, que tiene comunes con la función $f(x)$ las derivadas 1.ª y 2.ª en dicho punto.

EJEMPLOS: 1. — Como aproximación de la catenaria $y = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ obtener la parábola osculatriz en el punto más bajo ($x = 0$, $y = 1$).

Solución: $x^2 = 2(y - 1)$.

Idem la parábola osculatriz en el punto (a, b).

2. — Determinar la parábola osculatriz de la curva $y = e^x$ en el punto $x = 1$.

Solución: $y = \tfrac{1}{2}\, e(x^2 + 1)$. Calcúlese el error.

86. — Círculo osculador y curvatura.

Un modo de determinar una circunferencia:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$$

es dar los valores de y, y', y'' en un punto cualquiera $x = a$. En el 1.er miembro es y función de x luego aplicando la regla (53) dos veces sucesivas, resultan las igualdades:

$$(y - \beta)\, y' = -(x - \alpha)$$
$$(y - \beta)\, y'' + y'^2 = -1$$

de donde se despeja:

$$y - \beta = -\frac{1 + y'^2}{y''}$$

$$x - \alpha = y' \frac{1 + y'^2}{y''}$$

tenemos así las coordenadas (α, β) del centro.

Sustituyendo en la ecuación resulta el radio:

[1] $$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

Dada una curva $y = f(x)$, entre los infinitos círculos tangentes en un punto $[x = a,\ y = f(a)]$, hay uno sólo que tiene con la curva un contacto de segundo orden y se llama círculo osculador. En efecto, si de la ecuación de la curva deducimos los valores:

$$y = f(a) \quad , \quad y' = f'(a) \quad , \quad y'' = f''(a) \quad ,$$

la condición de contacto de segundo orden es que en el círculo y en la curva tengan los mismos valores y, y', y'', luego sustituyendo estos tres números en las fórmulas, queda determinado un círculo, que es osculador de la curva en el punto fijado y cuyo radio viene dado por la fórmula [1].

Fórmula diferencial de ρ.

Si la curva viene dada en forma paramétrica $x = x(t)$, $y = y(t)$, convendrá transformar la fórmula anterior. No siendo ya x variable independiente, se tendrá:

$$y' = dy/dx$$

$$dy' = [dx \,.\, d^2y - dy \,.\, d^2x] : dx^2$$

de donde:

$$y'' = \frac{dx^3}{dx \,.\, d^2y - dy \,.\, d^2x}$$

y sustituyendo resulta:

[2] $$\rho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx \,.\, d^2y - dy \,.\, d^2x} = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

representando por $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ las derivadas segundas respecto de t.

Por razones que veremos en (138), se llama *curvatura* en cada punto a la magnitud $C = 1 : \rho$, recíproca del radio ρ.

Si la tangente es horizontal, es decir: $y' = 0$, la curvatura está medida exactamente por el número y''.

Se llama *evoluta* de una curva f al lugar φ de los centros de los círculos osculadores, o centros de curvatura en sus diversos puntos. La curva f se llama *evolvente* de la φ. Para su estudio véanse los *Complementos de Cálculo integral*, al final de Cap. V.

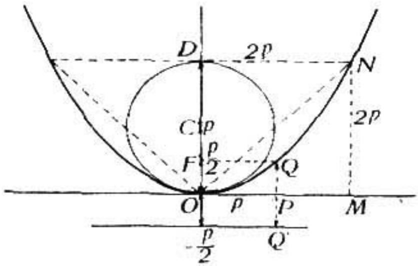
87. — Curvatura de la parábola $x^2 = 2py$.

En el vértice la curvatura es:

$$y'' = 1/p \quad , \quad \text{luego } \rho = p.$$

El radio de curvatura en el vértice es igual al parámetro p.

Dibujada una parábola, tenemos, pues, el diámetro del círculo osculador, buscando la ordenada igual a la abscisa $x = y$, para lo



que basta trazar la bisectriz. El punto medio del radio es el foco. La ordenada de la curva correspondiente al foco, es decir, la perpendicular al eje limitada por el foco y la curva es precisamente el radio $p = \rho$.

88. — Curvatura de curvas usuales.

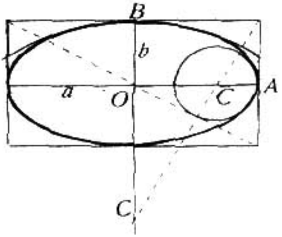
Las ordenadas de la elipse son las de la circunferencia de radio a, multiplicadas por b/a; y la derivada y'' queda multiplicada por b/a; como la curvatura de la circunferencia es $1 : a$, la curvatura de la elipse en el vértice B es *por tanto* b/a^2; *luego el radio de curvatura es* a^2/b.

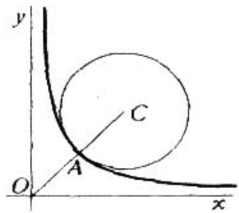
Cambiando las letras, el radio de curvatura en A es b^2/a.

Construcción: Desde el vértice D del rectángulo circunscripto se traza la perpendicular a la diagonal EH; *sus intersecciones con los ejes son los centros de curvatura* C y C'.

Basta, en efecto, comparar los triángulos semejantes ADC y OAB; o bien los $BC'D$ y OAB.

Puesto que la construcción de los cuatro círculos osculadores es tan sencilla, y la curva tiene con cada uno un arco que coincide sensiblemente, basta completar estos cuatro arcos con una regla flexible de acero para tener la





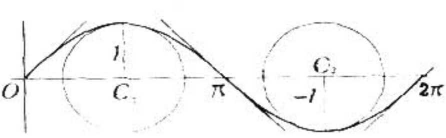
elipse, mientras que las construcciones compuestas de arcos de circunferencias tangentes, dan un óvalo nada parecido a la elipse, pues su curvatura es función discontinua.

Hipérbola. — Para calcular el radio de curvatura en los vértices de una hipérbola adóptese y como variable independiente, y derivando dos veces, resulta: $\rho = b^2/a$.

Basta, pues, trazar desde el punto (a, b) que determina una asíntota la perpendicular a ésta y corta al eje x en el centro C de curvatura.

Para el vértice de la hipérbola equilátera $xy = a^2$ resulta $\rho = a\sqrt{2} = OA$.

Sinusoide $y = \operatorname{sen} x$. — La derivada segunda es $y'' = -\operatorname{sen} x$; la curvatura en los vértices vale 1 y el radio de curvatura $\rho = 1$. Como el contacto con el círculo osculador es de tercer orden, hay un arco de sinusoide que sensiblemente coincide con la circunferencia. *Además, la tangente en cada punto de intersección* con el eje x forma ángulo $= 45°$, y como tiene contacto de segundo orden, también hay un trozo de sinusoide que sensiblemente coincide con la tangente.



Cicloide. — Para calcular el radio de curvatura de la cicloide en cualquier punto aplíquese la fórmula [2]. En el vértice resulta: $\rho = -4r$.

89. — Vértices de las curvas en general.

Al moverse un punto sobre la curva $y = f(x)$, la curvatura varía con x; los puntos en que alcanza valores máximos y mínimos sin anularse, se llaman ***vértices*** de la curva.

Si el radio es máximo o mínimo, también su cuadrado; obtendremos sus máximos y mínimos resolviendo la ecuación:

$$y''^2 . 3(1 + y'^2)^2 . 2y' y'' - (1 + y'^2)^3 . 2y'' y''' = 0$$
$$\text{o sea: } 3y' y''^2 = (1 + y'^2) y'''$$

El factor suprimido $y'' = 0$ representa los puntos de inflexión, donde la curvatura alcanza su mínimo *cero*, pero éstos no se consideran como vértices.

Si la curva es simétrica respecto del eje y, es $y' = 0$ y resulta $y''' = 0$ lo mismo que en el círculo osculador, que también es simétrico; por tanto, el contacto es de tercer orden.

Más general, consideremos el círculo osculador en un vértice de la curva. Derivando por tercera vez la ecuación del círculo, resulta:

$$(y - \beta)\, y''' + y' y'' + 2y' y'' = 0$$

y sustituyendo el valor de $y - \beta$, resulta para y''' el valor:

$$\frac{3y' y''^2}{1 + y'^2}$$

que es el mismo valor que resulta en el vértice de la curva; luego: ***En los vértices de una curva el contacto con su círculo osculador es de orden superior al segundo.***

90. — Curvatura de la línea elástica.

En Técnica se presentan algunas curvas de pequeña curvatura, como es por ejemplo, la línea elástica, esto es, la forma adoptada por la fibra central de una varilla horizontal sujeta a deformación para ciertas fuerzas; por ejemplo: viga horizontal empotrada por un extremo.

La pendiente y' en cada punto es en general pequeña y suele adoptarse como fórmula aproximada para la curvatura $C \sim y''$. Ahora bien, ¿qué error produce aquella hipótesis simplificadora? El error exacto es:

$$y'' - y''(1 + y'^2)^{-3/2} = y''\left[1 - (1 + y'^2)^{-3/2}\right]$$

y aplicando el teorema del valor medio, llamando $y'^2 = z$, el paréntesis vale exactamente $3/2$ multiplicado por

$$z(1 + \theta z)^{-5/2} < z = y'^2$$

El error absoluto es menor que $^3/_2\, y''\, y'^2$ y el error relativo menor que $^3/_2\, y'^2$. Si se sabe que la pendiente se conserva menor que δ, el error relativo cometido en la curvatura es $< {}^3/_2\, \delta^2$.

Fácilmente demostrará el lector que la serie binómica en que se desarrolla la potencia es alternada y, por tanto, el valor del paréntesis es menor que $^3/_2\, y'^2$; primer término de la serie. (V. Lección 26).

EJERCICIOS

1. — Determinar los vértices de la sinusoide y cicloide.

2. — Demostrar que la evoluta de la cicloide es otra cicloide igual.

3. — Deducir la fórmula [1] como caso particular de la [2].

4. — Demostrar que el círculo osculador a una cónica en cada vértice tiene contacto de tercer orden.

LECCIÓN 22

INTERPOLACION

91. — La fórmula de Lagrange.

El desarrollo de Taylor da aproximaciones sucesivas de $f(x)$ en el entorno de un punto, pero el error crece muy rápidamente al alejarse de ese punto. *Más útil es en muchos casos obtener polinomios que coincidan con la función en 2, 3, 4, ... puntos aunque las tangentes a las gráficas sean distintas; este es el problema de la interpolación y extrapolación.*

Dados los valores:

$$y_0 = f(x_0) \quad , \quad y_1 = f(x_1) \quad , \quad \ldots ; \quad y_n = f(x_n)$$

existe un polinomio y solo uno, de grado n, que toma estos $n+1$ valores; pudiendo calcularse sus $n+1$ coeficientes mediante las $n+1$ ecuaciones lineales de condición; pero es preferible formarlo directamente así:

$$\begin{aligned} P_n(x) = {} & a_0(x-x_1)(x-x_2) \ldots (x-x_n) + \\ & + a_1(x-x_0)(x-x_2) \ldots (x-x_n) + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_n(x-x_0)(x-x_1) \ldots (x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

donde en cada producto falta un factor $x - x_i$. Para $x = x_0$, se anulan todos los términos, excepto el primero, y se despeja el valor de a_0; haciendo $x = x_1$, se despeja a_1, etc.

Esta es la *fórmula de Lagrange*, que da el polinomio buscado; el cual es *único*, pues la diferencia entre dos polinomios $P_n(x) - Q_n(x)$ que tomen los mismos $n+1$ valores, se anula en ellos, y, por tanto, es idénticamente nula, luego $P_n(x) \equiv Q_n(x)$.

EJEMPLOS. — Recta determinada por los puntos (x_0, y_0) (x_1, y_1):
El polinomio de primer grado es:

$$y = a_0(x-x_1) + a_1(x-x_0)$$

donde los coeficientes a_0 y a_1 son las fracciones:

$$\frac{y_0}{x_0 - x_1} \quad , \quad \frac{y_1}{x_1 - x_0}$$

Párabola determinada por los puntos: (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2).

$$y = a_0(x-x_1)(x-x_2) + a_1(x-x_0)(x-x_2) + a_2(x-x_0)(x-x_1)$$

cuyos coeficientes se calculan inmediatamente.

92. — La interpolación parabólica progresiva.

Dos son los defectos de la fórmula de Lagrange; la complicación de los cálculos y la inutilidad de ellos cuando después de formado el polinomio $P_n(x)$ se quiere formar el $P_{n+1}(x)$ para conseguir mejor aproximación. Ambos inconvenientes se evitan con la interpolación *parabólica progresiva*, que conduce más cómodamente al mismo polinomio, por la unicidad ya demostrada.

Primer grado. — Pongamos: $\quad P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$

donde: $\quad a_0 = y_0 \quad ; \quad a_1 = (y_1 - a_0):(x_1 - x_0)$

Segundo grado.

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Conservando los mismos a_0, a_1, basta calcular a_2 con la condición que y tome el valor y_2 para x_2; o sea:

$$a_2 = \frac{y_2 - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Grado n.

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + a_n(x - x_0) \ldots\ldots (x - x_{n-1})$$

El nuevo coeficiente a_n es igual a la diferencia $y_n - P_{n-1}(x_n)$ entre el nuevo valor prefijado y_n y el valor que toma el polinomio antes calculado, dividido por el producto

$$(x_n - x_0)(x_n - x_1) \ldots\ldots (x_n - x_{n-1})$$

de distancias al nuevo punto x_n desde los anteriores.

Ejemplo. — He aquí las tensiones del vapor de agua a diversas temperaturas:

Temp:	t	80°	90°	100°
Tensiones:	P	35,46	52,55	76,00

La interpolación lineal entre 80° y 90° da:

$$P_1 = 35{,}46 + a_1(t - 80°)$$

donde:

$$a_1 = (76 - 35{,}46) : 20 = 2{,}027$$

pero si sustituímos $t = 90°$ resulta:

$$P_1 = 35{,}46 + 20{,}27 = 55{,}73$$
$$\text{error:}\quad 52{,}55 - 55{,}73 = -3{,}18$$

como es excesivo, recurramos a la interpolación de segundo grado, cuyo nuevo coeficiente a_2 se deduce dividiendo ese error por $(90-80)(90-100) = -100$; luego resulta 0,0318; la nueva fórmula es:

$$P_2 = 35{,}46 + 2{,}027(t-80) + 0{,}0318(t-80)(t-100)$$

Por ejemplo: para $t = 86$ resulta $T = 44{,}95$, mientras que la observación directa del fenómeno da 45,01; el error relativo, por tanto, no llega a 1: 1000.

93. — Valores equidistantes. Fórmula de Newton.

Caso importante es aquel en que los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots$ son equidistantes, es decir:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = h$$

Los numeradores de los coeficientes $a_0, a_1, \ldots$ son entonces:

$$y_0 \quad , \quad y_1 - y_0 \quad , \quad y_2 - 2y_1 + y_0 \quad , \quad \ldots$$

y los denominadores respectivos son:

$$1 \quad , \quad 1!h \quad , \quad 2!h^2 \quad , \quad \ldots$$

La formación de los numeradores se hace cómodamente con este esquema, usando las diferencias 2.as: $\Delta^2 y = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$; las 3.as, 4.as, ...

$$\begin{array}{llll}
y_0 & & & \\
 & \Delta y_0 = y_1 - y_0 & & \\
y_1 & & \Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 & \\
 & \Delta y_1 = y_2 - y_1 & & \Delta^3 y = \ldots \\
y_2 & & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\
 & \Delta y_2 = y_3 - y_2 & & \\
y_3 & & &
\end{array}$$

en el cual se forma cada elemento restando los dos que lo comprenden en la columna anterior.

Obsérvase que los numeradores de los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ son precisamente las diferencias sucesivas:

$$y_0 \quad , \quad \Delta y_0 \quad , \quad \Delta^2 y_0 \quad , \quad \Delta^3 y_0 \quad , \quad \ldots$$

que ocupan la primera fila; y admitida la generalidad de esta ley (cuya generalidad se prueba fácilmente por inducción) resulta la importante fórmula de Newton, cuya semejanza con la de Taylor salta a la vista:

$$f(x) = y_0 + \frac{(x-x_0)\Delta y_0}{1!h} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\Delta^2 y_0}{2!h^2} + \ldots +$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\Delta^n y_0}{n!h^n} + T.$$

EJEMPLO. — Como aplicación de la fórmula de Newton, resolvamos el mismo problema anterior, ya que los valores 80, 90, 100, son equidistantes:

80	35,46		
		17,09	
90	52,55		6,36
		23,45	
100	76,00		

luego la fórmula obtenida, idéntica a la antes formada en (92), es:

$$P = 35{,}46 + 1{,}709(t - 80) + 0{,}0318(t - 80)(t - 90)$$

Nota. — Es preciso agregar el término complementario, pues la función dada $f(x)$ no coincide con el polinomio que hemos formado, más que en los puntos x_0, x_1 .... x_n. La expresión del término complementario es:

$$\frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots.(x - x_n)f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$$

siendo ξ un número comprendido entre x_0, x_1, ... x_n, x, y esta expresión vale aunque no sean equidistantes los valores, es decir, en la interpolación parabólica general. (La demostración puede verse en Vallée-Poussin).

Obsérvese el peligro de la *extrapolación*, es decir, la utilización de la fórmula para el cálculo de valores en puntos exteriores al intervalo de los valores observados; pues aparte el riesgo de un crecimiento rápido de la derivada, el producto de distancias a los puntos dados crece rápidamente al salir del intervalo de éstos.

EJEMPLO. — La misma fórmula que tan excelente resultado nos ha dado para el valor $t = 86$, nos da para $t = 0°$ el resultado absurdo 127,70, mientras que el valor observado es 0,46.

EJERCICIOS

1. — Formar la ecuación de la parábola de eje vertical determinada por tres puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2).

2. — Resolver los ejemplos del texto, aplicando la fórmula de Lagrange, y comparar los diversos métodos en cada caso.

3. — De igual modo que $\Delta y_0/h \to y'_0$, se puede probar: $\Delta^2 y_0/h^2 \to y''_0$; etc. Admitido esto, demuéstrese que al tender x_1 x_2 ..... hacia x_0 resulta la fórmula de Taylor.