CAPITULO IV

LAS SERIES DE POTENCIAS

LECCIÓN 23

SERIES NUMERICAS EN GENERAL

94. — Adición y sustracción de series.

Siendo el algoritmo de las series una combinación de la suma con el paso al límite, las propiedades demostradas en la lección 6 permiten obtener nuevas propiedades de las series. Por ejemplo: dada la serie convergente:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = U$$

es decir: $\text{lím.}\, U_n = U$ por la definición (36)

se verifica: $\text{lím.}\, kU_n = kU$ por la propiedad (23)

luego resulta de la misma definición de serie:

$$ku_1 + ku_2 + \dots + ku_n + \dots = kU$$

Si se multiplican los términos de una serie convergente por un mismo número, su valor queda multiplyicado por este número.

En particular: *si se cambian de signo todos los términos, resulta como valor de la serie el número opuesto.*

Consideremos ahora varias series convergentes, por ejemplo:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = U$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots = V$$

es decir: $U = \text{lím.}\, U_n$; $V = \text{lím.}\, V_n$ (def. 36)

se verifica: $U + V = \text{lím.}\, (U_n + V_n)$ (prop. 22)

o sea, por la misma definición de serie:

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n) + \dots = U + V$$

La serie obtenida sumando término a término dos o más series convergentes tiene como valor la suma de los valores de estas series.

Como la diferencia puede considerarse como suma resulta:

La serie obtenida restando término a término dos series convergentes, tiene como valor la diferencia de los valores de ambas.

95. — Series absolutamente convergentes; propiedad conmutativa. Considerando una serie de términos positivos y negativos, por ejemplo:

$$a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 + a_7 + a_8 - a_9 + \ldots.$$

que es la diferencia de las series:

$$a_1 + 0 + 0 + a_4 + 0 + a_6 + a_7 + a_8 + 0 + \ldots.$$
$$0 + a_2 + a_3 + 0 + a_5 + 0 + 0 + 0 + a_9 + \ldots.$$

Si formamos la serie de valores absolutos:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \ldots.$$

y ésta es convergente, también lo son las dos anteriores, que tienen los términos $\leqq$, luego tienen sumas finitas A y A'. Como la serie dada es la diferencia de ambas, su valor es $A - A'$.

Resulta así el teorema o criterio de Dirichlet:

Si la serie de valores absolutos converge, también converge la serie dada y su valor es menor que el de aquélla.

Dada una serie de términos positivos y negativos, si se forma la serie de valores absolutos y resulta convergente, también lo es la serie dada la cual se llama *absolutamente convergente;* si la serie de valores absolutos diverge, nada puede decirse de la serie dada, pero si ésta es convergente su convergencia se llama *condicional.*

EJEMPLO 1. — La serie

$$1 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} +$$

cualquiera que sea la ley de los signos de sus términos, es absolutamente convergente, pues la serie d valors absolutos es la que defin el número e.

EJEMPLO 2. — La serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots.$$

es convergente por ser alternada y tender a 0 su término general; sin embargo, la serie de valores absolutos es la serie armónica, cuya divergencia se ha visto en (39). Por tanto: la serie dada es *condicionalmente convergente.*

La distinción entre la convergencia absoluta y condicional es importante, si se desea alterar el orden de los términos. En efecto:

Las series absolutamente convergentes tienen la propiedad conmutativa; en las condicionalmente convergentes la alteración del orden de los términos puede cambiar el valor y hasta el carácter de la serie.

Demostración — Veamos la propiedad conmutativa para las series de términos positivos. Si se altera el orden de éstos, cualquiera que sea el número de términos que tomemos en la segunda serie, es la suma $S'_n < S$, pues todos ellos figuran en una cierta suma parcial de S; luego el límite es $S' \leq S$; por igual razón, invirtiendo el razonamiento, debe ser $S \leq S'$, luego $S = S'$.

Esta es la propiedad llamada *conmutativa*, análoga a la de las sumas finitas; mas no se crea que esta propiedad subsiste para todas las series, pues al alterar el orden de los términos, no sólo puede cambiar la suma, sino hasta hacerse divergente la serie. (Véase el ejemplo).

Las series absolutamente convergentes tienen la propiedad conmutativa, pues toda alteración de orden en sus términos produce una alteración en los minuendos, (que no hace variar su suma A), y otra en los sustraendos, que tampoco altera la suma A', luego resulta $S = A - A'$, después de la alteración del orden

EJEMPLOS. — Con los términos de la serie:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots$$

cuya suma es $l2 = 0{,}69 \dots$, como pronto veremos, se pueden *formar estas series:*

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

donde las fracciones de denominador par ocupan los puestos cuyos números de orden son $1, 4, 9, \dots n^2, \dots$ Esta serie es *divergente; en cambio*

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{1} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{3} - \dots$$

en la que las fracciones impares ocupan los lugares múltiplos de 5, converge y vale 0. (Puede verse la demostración en *Análisis algebraico*, núm. 353).

Compruebe el lector aproximadamente estos resultados tomando suficiente número de términos.

Esta variación de la suma y aún del carácter de la serie es debida a no ser absolutamente convergente, pues al tomar todos los términos en valor absoluto, resulta la serie armónica, cuya divergencia se demostró en (39).

96. — Multiplicación de series.

Dadas las series convergentes de términos *positivos:*

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots = V$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = U$$

multipliquemos cada término de una por cada término de la otra, agrupando los productos en esta forma:

$$\begin{aligned}&u_1v_1 +\\&+ u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_2 v_2 +\\&+ u_1 v_3 + u_2 v_3 + u_3 v_1 + u_3 v_2 + u_3 v_3 +\\&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

de modo que la suma de 1, 4, 9, ... n^2, ... términos es precisamente $U_n \cdot V_n$; *luego esta serie es convergente y su valor es $U \cdot V$*; y de cualquier modo que se ordene, siempre vale $U \cdot V$, producto de los valores de ambas series.

Si las dos series son de términos positivos y negativos, pero *absolutamente convergentes,* la serie de productos es absolutamente convergente e igual al producto de las series de valores absolutos de ambas; pero si los términos se ordenan como arriba se hizo, es decir, *de modo que los n^2 primeros sumen $U_n \cdot V_n$, su límite es $U \cdot V$.* Por tanto:

Dadas dos series absolutamente convergentes, la serie obtenida multiplicando en cualquier orden cada término de una por cada término de la otra, es absolutamente convergente e igual al producto de los valores de ambas.

En particular, puede adoptarse esta ordenación llamada de Cauchy, atendiendo a la suma de índices:

$$u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + (u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1) + \ldots\ldots\ldots$$

EJERCICIOS

1. — Demostrar que el error cometido en una serie absolutamente convergente al tomar S_n, es menor que el resto de la serie de valores absolutos.

2. — Demostrar que si las dos series de términos positivos y negativos *componentes de una serie son divergentes,* pero *el término general tiende a* cero, alterando el orden se puede formar una serie convergente de suma prefijada, o una serie divergente de suma $+ \infty$, o bien una serie oscilante.

3. — Elevar al cuadrado la serie de valores absolutos de la serie que desarrolla e^x (42), ordenando según la regla de Cauchy; multiplicar de nuevo por la serie exponencial y descubrir la ley que siguen estas series, potencias de aquélla.

Lección 24

DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIE DE POTENCIAS

97. — Intervalo de convergencia de una serie de potencias.

Una generalización muy útil de las funciones enteras o polinomios *son las series enteras o series potenciales:*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \qquad [1]$$

cuyos términos son las potencias sucesivas de una variable x, multiplicadas *por coeficientes cualesquiera.* De este tipo general resulta cada serie particular dando valores numéricos a los coeficientes $a_0, a_1, a_2 \dots$ Tales series *no tienen significado numérico sino para* aquellos valores especiales de x que sustituídos en vez de la variable *dan una serie numérica convergente.*

El conjunto de valores de x que hacen convergente una serie se llama *campo de convergencia;* veamos qué es un *intervalo.*

Formemos el cociente de valores absolutos de cada coeficiente al siguiente: $|a_n| : |a_{n+1}|$ y calculemos su límite R, para $n \to \infty$.

Apliquemos a la serie el criterio de convergencia de Dirichlet (95), es decir, formemos la serie de valores absolutos:

$$|a_0| + |a_1x| + |a_2x^2| + \dots + |a_nx^n| + \dots \qquad [2]$$

El cociente de un *término* al anterior es

$$\frac{|a_{n+1} \cdot x^{n+1}|}{|a_nx^n|} = \frac{|a_{n+1}| \cdot |x|}{|a_n|}$$

cuyo límite para $n \to \infty$ es $|x| : R$.

1.°) Si $R = \infty$ el límite de este *cociente* es 0, cualquiera que sea x, es decir, la serie [2] converge y también la [1] para todo valor de x. El intervalo de convergencia es todo el eje de las x.

2.°) Si $R > 0$ *pero finito,* este límite es:

$$\begin{array}{ll} < 1 \text{ para los valores } & |x| < R \\ > 1 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & |x| > R \end{array}$$

es decir, por el criterio (40) de d'Alembert, la serie [2] converge y por el de Dirichlet la [1] converge, por tanto, *absolutamente,* para los valores de x comprendidos entre $-R$ y $+R$. Para valores

$|x| > R$, la serie [2] diverge y sus términos van creciendo desde un cierto lugar en adelante, por ser > 1 el límite del cociente de términos consecutivos; luego la serie [1] cuyos términos crecen, no converge, por no tender éstos a cero (36).

Este número R, que mide la amplitud del intervalo de convergencia a uno y otro lado del origen, suele llamarse *radio de convergencia*. En los extremos R, $-R$, caben todas las posibilidades.

3.°) Si $R = 0$ la serie [1] sólo converge para el valor $x = 0$ que la reduce a su primer término a_0. La serie no define, pues, función ninguna. Ejemplo: $0! + 1!x + 2!x^2 + \dots$.

Podemos resumir en una sola regla práctica los tres casos:

El radio de convergencia es el límite para $n \to \infty$, del cociente de cada coeficiente al siguiente, tomados ambos en valor absoluto.

Solamente las series de los dos primeros tipos tienen interés, pues definen funciones de x para los valores del intervalo de convergencia. Las series de intervalo infinito de convergencia son las más parecidas a los polinomios, pues toman valor numérico para cualquier valor de x; se llaman funciones *trascendentes enteras*.

EJEMPLOS. — Compruebe el lector que pertenecen al primer tipo las series

$$(e^x) \qquad 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots\dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$(\cos x) \qquad x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \pm \frac{x^{2n}}{(2n)!} \mp \dots$$

$$(\operatorname{sen} x) \qquad x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \pm \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \mp \dots$$

y al segundo tipo las series siguientes:

$$l(1+x) \qquad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x) \qquad x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

que serán estudiadas en las lecciones siguientes, donde demostraremos que sus sumas respectivas son las anotadas a la izquierda.

En estas series, excepto primera y penúltima, no es aplicable la fórmula dada para R, pues hay infinitos coeficientes 0; pero tomando x^2 como variable, resulta 1 como límite en la última, luego $R = 1$; y en las 2.ª y 3.ª, $R = \infty$.

En las funciones no elementales el cociente $|a_n| : |a_{n+1}|$ suele carecer de límite y también falla la regla análoga de la raíz n-sima (Lecc. 10, Ejerc. 4); pero se generaliza mediante el concepto de *límite de oscilación* (V. *Teoría de funciones*).

98. — Operaciones con series de potencias.

La utilidad de las series de potencias reside, sobre todo, en sus propiedades sencillas, análogas a las de los polinomios y que ya hemos demostrado. Las series de potencias se suman y restan como polinomios ordenados; se multiplican formando el producto de cada término de una por cada término de la otra, y ordenando los productos según las potencias crecientes de x.

El intervalo de convergencia de la serie que resulta comprende *al menor de los intervalos de convergencia*; pues para x interior a él, ambas series convergen absolutamente.

EJEMPLO. — Elevando al cuadrado la serie

$$1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^n + \ldots\ldots = 1 : (1 - x) \qquad |x| < 1,$$

y ordenando según las potencias ascendentes de x obtenemos este resultado:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots\ldots = 1 : (1 - x)^2 \qquad |x| < 1$$

Análogamente, pueden dividirse las series de potencias como los polinomios, ordenando el cociente según las potencias ascendentes de x, pero la validez del resultado ya no es de tan fácil expresión como en la suma, resta y multiplicación, pues el radio de convergencia del cociente puede ser menor que los de ambas series, ya que no puede superar al menor de los módulos de las raíces reales o complejas del denominador. (Véase lección 27).

99. — Desarrollo en serie por división.

En particular, los polinomios son series que tienen nulos infinitos términos y prolongado indefinidamente el cociente de dos polinomios, ordenado según las potencias ascendentes, resulta una serie que equivale al cociente de ambos polinomios en un cierto intervalo de convergencia. Su radio es el *módulo mínimo de los ceros reales o imaginarios del denominador.*

La demostración exige pasar al campo complejo, explicándose así paradojas como la que presenta la función [4].

Sin apoyarnos en el teorema general arriba citado, si dividimos 1 por $1 + x$ podemos escribir la igualdad:

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - \ldots\ldots \qquad [3]$$

pues tal desarrollo es válido para $|x| < 1$ *como se* demostró en (36).

En este caso el radio de convergencia que limita la validez de esta igualdad es $R = 1$; para valores fuera del intervalo $(-1 + 1)$ deja de ser cierta la igualdad ;así, por ejemplo, para $x = 2$, el primer miembro toma el valor -1 mientras el segundo carece de valor, pues es *divergente. Tal es el inconveniente de los desarrollos en* serie, que no dan la función completa, sino sólo un *trozo de función* comprendido en el intervalo de convergencia.

Análogamente se obtiene:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots. \qquad [4]$$

desarrollo también válido para $|x| < 1$.

100. — Desarrollo en serie mediante la fórmula de Mac-Laurin. La fórmula de Mac-Laurin, aplicable a toda función que tiene infinitas derivadas, expresa la función en forma de polinomio, más un término complementario:

$$f(x) = f(0) + x.f'(0) + \frac{x^2.f''(0)}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^{n-1}.f^{n-1}(0)}{(n-1)!} + \frac{x^n f^n(\xi)}{n!}$$

Inmediatamente ocurre pensar si será legítimo extender indefinidamente el desarrollo, poniendo en vez del término complementario unos puntos suspensivos. Vamos a estudiar cuándo será cierta esta igualdad:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2.f''(0)}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^{n-1}.f^{n-1}(0)}{(n-1)!} + \ldots\ldots$$

Para ello basta recordar el significado de estos puntos suspensivos que equivale al símbolo lím. S_n. Llamando, pues, S_n a la suma de los n primeros términos; la segunda igualdad será cierta, si lo es esta otra:

$$f(x) = \text{lím. } S_n \quad ;$$

o lo que es lo mismo: lím. $[f(x) - S_n] = 0$.

Ahora bien, esta diferencia $f(x) - S_n$ es precisamente el término complementario, luego resulta:

El desarrollo de una función en serie por la fórmula de Mac-Laurin, es legítimo para todo valor de x para el cual el término complementario tiende a 0, al crecer n infinitamente.

NOTA. — El mismo criterio subsiste para la validez del desarrollo general tayloriano:

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + (x-a)^2 f''(a)/2! + \ldots.$$

101. — Desarrollos mediante la serie derivada.

En las lecciones siguientes será muy útil este teorema:

Si $f'(x)$ es desarrollable en serie potencial en $(-R, +R)$, también lo es $f(x)$ en el mismo intervalo y los términos de la serie son las potencias primitivas de los términos de aquélla.

Demostración. — Hemos visto (97) que si la serie [1] converge en un punto x_0 del intervalo de convergencia $(-R, +R)$ la serie de valores absolutos [2] converge para todo x tal que $|x| < |x_0|$ y el resto es:

$$|R_n(x)| \leq |a_n x^n| + \ldots \leq |a_n x_0^n| + \ldots\ldots < \varepsilon$$

desde un cierto índice $n \geqq \nu$, para todo $|x| < |x_0|$.

Aplicando la fórmula de Taylor a las funciones $f(x)$ y $f'(x)$ se tiene:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + R_n(x)$$

$$f'(x) = a_1 + \ldots + n a_n x^{n-1} + R'_n(x)$$

y si $f'(x)$ es desarrollable en serie para $x = x_0$, se verifica, como acabamos de probar, $|R'_n(x)| < \varepsilon$ para todo $x < x_0$ y todo $n \geqq \nu$. Por el teorema del valor medio es

$$R_n(x) = R_n(x) - R_n(0) = x \cdot R'_n(\xi)$$

luego para cada $|x| < |x_0|$ es desde $n \geqq \nu$: $|R_n(x)| < |x_0| \varepsilon$; por tanto, es $R_n(x) \to 0$ para $-R < x < R$, y $f(x)$ es desarrollable en todo el intervalo $(-R + R)$.

102. — Aproximaciones sucesivas de las funciones.

Los desarrollos en serie de potencias son el instrumento óptimo para el cálculo aproximado y tabulación de funciones, puesto que se puede tomar mayor o menor número de términos según la aproximación exigida.

Para determinar el grado de aproximación alcanzado al tomar varios términos, no basta que sean despreciables los siguientes; pues la suma de ellos puede exceder el límite de error y aun ser infinita (*). Solamente en las series alternadas puede asegurarse que el error cometido es inferior al primer término despreciado; en las demás series sólo podrá precisarse el grado de aproximación, formando el término complementario de Taylor o comparando con una propresión geométrica convergente que tenga los términos mayores que la serie dada. Este último procedimiento (que suele llamarse de la serie *mayorante*) ha sido utilizado para la serie del número e; el método del término complementario ha sido aplicado repetidas veces.

Hay funciones complicadas de una o varias variables, que pueden expresarse aproximadamente por fórmulas sencillas (que los principiantes creen exactas), *cuando una de las variables es suficientemente pequeña.* El significado de esta palabra es el siguiente: Se desarrolla en serie de potencias de dicha variable, y la serie es válida para todos los valores de la variable inferiores al radio de convergencia. Tomando 1, 2, 3, ... términos de la serie resultan fórmulas que dan aproximaciones sucesivas de la función. Algunos ejemplos expuestos en la lección siguiente enseñarán el modo de proceder.

EJERCICIOS

1. — Calcular el desarrollo de $1 : (1 - 3x + 2x^2)$.

2. — Demostrar que el producto de dos series exponenciales es del mismo tipo; y comprobarlo para el cociente de 1 por una serie exponencial.

(*) El principiante que al calcular la suma 3,81737.... de los 100 primeros términos de la serie armónica crea poder asegurar siquiera las cifras 3,8 de la suma total de la serie en vista de que los términos siguientes son inferiores a 0,01 cometerá craso error, pues esta serie es divergente.

La afirmación tan frecuente en libros técnicos, de que el error de una aproximación es *despreciable* por ser del orden del primer término que sigue, el cual es despreciable, es tan arbitraria y peligrosa como la anterior.

Lección 25

DESARROLLO EN SERIE DE LAS FUNCIONES EXPONENCIAL, CIRCULARES E HIPERBOLICAS

103. — La serie exponencial.

Las derivadas sucesivas de $f(x) = e^x$ son todas e^x, y para $x = 0$ toman el valor 1, luego el desarrollo en serie de Mac-Laurin es:

$$[1] \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots$$

¿Para qué valores es válido? La serie converge para todo x; luego el término general tiende a 0; y como el término complementario, según (100), sólo difiere de él en el factor e^{ξ}, resulta que este desarrollo es válido para todo valor de x. En particular, para $x = 1$, tenemos la serie ya estudiada en la lección 11, con la cual se calcula el número e con cuantas cifras decimales se quiera.

La función $a^x = (e^{la})^x = e^{x \cdot la}$ se reduce a la exponencial natural, sustituyendo x por $x \cdot la$.

104. — Desarrollos de sen x y cos x.

Derivando sucesivamente la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, resulta:

$$f(x) = \operatorname{sen} x,\ f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\operatorname{sen} x,\ f'''(x) = -\cos x,$$
$$f^{\text{iv}}(x) = \operatorname{sen} x,\ f^{\text{v}}(x) = \cos x,\ \ldots.$$

y para $x = 0$ toman los valores:

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{\text{iv}}(0) = 0,\ \ldots.$$

luego el desarrollo en serie es:

$$[2] \qquad \operatorname{sen} x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots \pm \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \mp \cdots.$$

Análogamente para el coseno, basta rebajar en 1 los índices de las derivadas y resultan los valores:

$$f(0) = 1,\quad f'(0) = 0,\quad f''(0) = -1,\quad f'''(0) = 0,\quad f^{\text{iv}}(0) = 1,\ \ldots.$$

con los cuales se forma la serie siguiente, que solo contiene las potencias pares de x:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \pm \frac{x^{2k}}{(2k)!} \mp \cdots$$

Como el término complementario sólo difiere del término general en un factor sen ξ o cos ξ, tiende a 0 para todo valor de x.

Luego ambos desarrollos son válidos para todo valor de x. Sin embargo sólo son útiles para valores menores que un octante, lo cual es suficiente.

Es sabido que sen x es función *impar*, es decir, cambia de signo al cambiar x, y cos x es función *par*, que toma valores iguales *para x y $-x$; estas propiedades aparecen claramente en los desarrollos* [2] y [3].

También se observa que la serie del cos x resulta derivando *término a término la serie del sen x, de acuerdo con* (101).

105. — Funciones hiperbólicas.

Con frecuencia se presentan series de potencias, que sólo difieren de las series del sen x y del cos x en tener positivos todos los coeficientes. Estas nuevas funciones se llaman *seno hiperbólico* y *coseno hiperbólico*, y se representan así:

[4] $$\mathrm{sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

[5] $$\mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

Inmediatamente resulta de esta definición:

[6] $$\mathrm{sh}\, 0 = 0 \qquad \mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}\, x$$

[7] $$\mathrm{ch}\, 0 = 1 \qquad \mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}\, x$$

relaciones que son análogas a las del sen x y cos x.

Comparemos estas series con las exponenciales e^x y e^{-x}

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots \pm \frac{x^n}{n!} \mp \cdots$$

y resulta la descomposición

[8] $$e^x = \mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x \quad ; \quad e^{-x} = \mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x$$

sumando y restando ambas igualdades, resultan éstas:

[9] $\quad \mathrm{ch}\, x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad \mathrm{sh}\, x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

y multiplicándolas se obtiene la relación fundamental:

[10] $\quad \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$

Todas las propiedades de las funciones hiperbólicas resultan fácilmente sustituyéndolas por las expresiones [9], que también pueden *adoptarse como definición.*

Las relaciones fundamentales son:

[11] $\quad \mathrm{sh}(x + y) = \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, y + \mathrm{ch} x\, \mathrm{sh}\, y$

[12] $\quad \mathrm{sh}(x - y) = \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, y - \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{sh}\, y$

[13] $\quad \mathrm{ch}(x + y) = \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{ch}\, y + \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{sh}\, y$

[14] $\quad \mathrm{ch}(x - y) = \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{ch}\, y - \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{sh}\, y$

relaciones muy análogas a las de Trigonometría circular, y más si*métricas que ellas, pues hay correspondencia en los signos.*

Haciendo $x = y$, *resultan las fórmulas de duplicación:*

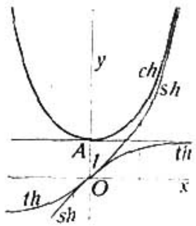
[15] $\quad \mathrm{sh}\, 2x = 2\mathrm{sh}\, x \,.\, \mathrm{ch}\, x$

[16] $\quad \mathrm{ch}\, 2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x = 2\mathrm{ch}^2 x - 1 = 2\mathrm{sh}^2 x + 1$

de donde se despejan estas fórmulas útiles:

[17] $\quad \mathrm{ch}^2 x = \tfrac{1}{2}(\mathrm{ch} 2x + 1)$

[18] $\quad \mathrm{sh}^2 x = \tfrac{1}{2}(\mathrm{ch} 2x - 1)$



Derivando sh x resulta ch x; y derivando ch x, resulta sh x. Las derivadas sucesivas son: sh x, ch x, sh x, ch x, ...

La tangente hiperbólica se define:

$$\mathrm{th}\, x = \mathrm{sh}\, x / \mathrm{ch}\, x$$

y su derivada es $1/\mathrm{ch}^2 x$.

EJERCICIOS

1. — *Demostrar para las funciones hiperbólicas* las fórmulas correspondientes a las conocidas para las circulares: expresión de sh^2x, ch^2x mediante el arco doble, transformación de sumas y diferencias en productos, etc.

2. — ¿Qué curva representan las ecuaciones paramétricas $x = cht$, $y = sht$? Establézcanse analogías con la representación geométrica de las funciones circulares.

LECCIÓN 26

SERIES LOGARITMICA, BINOMICA Y CIRCULARES INVERSAS

106. — Desarrollos en serie mediante la serie derivada.

Aunque la serie de Mac-Laurin permite desarrollar todas las funciones elementales, al examinar el término complementario para determinar el intervalo de convergencia surgen dificultades, para evitar las cuales vamos a seguir otro método, que consiste en efectuar el desarrollo de la función derivada (cuando es *más sencilla* que la función dada) y de este desarrollo pasar al de la función propuesta (que también se llama función *primitiva*) como se ha explicado en (101).

Obtenida una serie primitiva y sumándole una constante arbitraria, se tienen todas las series primitivas, y todas tienen el mismo intervalo de convergencia que la sere derivada.

Las funciones log $(1+x)$, arc sen x, arc tg x tienen derivadas algebraicas, fácilmente desarrollables en serie y de este desarrollo se pasa al de aquéllas formando la serie primitiva y determinando la constante. En los párrafos siguientes puede verse el modo de proceder.

107. — *Desarrollo en serie de la función* l $(1+x)$

La función lx no es desarrollable en serie de potencias, por no ser finita para $x=0$, condición que cumplen todas las series enteras; pero la función $l(1+x)$ se desarrolla fácilmente mediante la derivada cuyo desarrollo [3] ha sido obtenido en (99).

[1] $$y' = 1/(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \pm x^n \mp \dots$$

serie cuyo radio de convergencia es $R=1$. Integrando, o sea tomando funciones primitivas de ambos miembros, resulta:

[2] $$y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + C\ ;$$

y como para $x=0$ la función vale $l1=0$, y el segundo miembro se reduce a C, debe ser $C=0$. Resulta, pues, este desarrollo:

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \pm \frac{x^n}{n} \mp \dots\dots$$

Nota. — Para $x=1$ la serie del segundo miembro es alternada convergente y aunque la demostración dada de [2] nada dice sobre ese punto, se puede demosrtar (V. *Teoría de funciones*) que el desarrollo es válido en ese extremo $x=1$, resultando el desarrollo

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots. \qquad [3]$$

inservible prácticamente, por su lenta convergencia.

108. — Transformación de la serie logarítmica.

La serie logarítmica converge tan lentamente que no es aplicable al cálculo de logaritmos. De ella se deducen estas series más útiles, que exponemos a continuación:

Cambiando x por $-x$ en la serie

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots.$$

resulta:
$$l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots. \qquad [4]$$

y restando,
$$\tfrac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots. \qquad [5]$$

Aplicación técnica. — En los cálculos de la flexión de vigas curvas de sección rectangular interviene en vez de la sección rectangular $b.h$ el *área corregida*, cuyo valor es

$$A = Rb.l \, \frac{2R+h}{2R-h}$$

siendo b la base de la sección rectangular y h la altura; R es el radio de curvatura de la viga. Para simplificar el cálculo de A, basta aplicar la última formula y resulta:

$$A = bh\left[1 + \frac{h^2}{12R^2} + \frac{h^4}{80R^4} + \ldots\right]$$

Como la razón $h:R=\lambda$ es muy pequeña, con dos términos puede obtenerse buena aproximación; es decir, basta agregar al área bh un término de corrección que resulta de multiplicarla por $\lambda^2:12$.

Aplicación al cálculo de tablas de logaritmos. — Si en la serie [5] hacemos el cambio de variable

$$\frac{n+1}{n} = \frac{1+x}{1-x}$$

es decir:
$$x = \frac{1}{2n+1}$$

resulta:

$$l(n+1) - ln = \frac{2}{2n+1} + \ldots.$$

serie que converge muy rápidamente cuando n es grande y que permite calcular $l(n+1)$ conocido $l\,n$, mediante un solo término del desarrollo.

Los logaritmos decimales se calculan fácilmente multiplicando por el módulo $M = 0{,}43429 \ldots.$

Con el primer término del desarrollo es suficiente para construir las tablas usuales hasta 10000, con 7 decimales exactas.

109. — Desarrollo en serie de arc tg x.

La derivada admite desarrollo inmediato en progresión geométrica:

$$[1] \quad y' = 1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \pm x^{2n} \mp \ldots$$

convergente para $|x| < 1$. Pasando a las funciones primitivas, resulta:

$$\operatorname{arctg} x = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Haciendo $x = 0$, el segundo miembro se reduce a C y como entre todos los arcos que tienen la tangente 0 se elige el menor, que es 0, resulta $C = 0$.

Nota. — Para $x = 1$ la serie converge, pues resulta alternada con un término general que tiende a 0, y se puede demostrar que coincide con arc tg 1, resultando el desarrollo:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

serie llamada de Gregory o de Leibniz, cuya lenta convergencia ya observada (37), la hace inservible para el cálculo de π.

110. — Desarrollo de arc sen x y arc cos x.

La derivada de $y = \operatorname{arc\,sen} x$ es:

$$y' = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Esta potencia se desarrolla, como veremos en el párrafo siguiente, aplicando la misma fórmula del binomio de Newton; es decir:

$$y' = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1.3}{1.2} \cdot \frac{x^4}{2^2} + \frac{1.3.5}{1.2.3} \cdot \frac{x^6}{2^3} + \ldots$$

y pasando a la función primitiva, resulta:

$$\operatorname{arc\,sen} x = C + x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Como la función arc sen x se anula cuando el seno es $x = 0$, el valor de la constante es $C = 0$.

La serie de arc cos $x = \frac{1}{2}\pi$ — arc sen x, se deduce fácilmente de la anterior, restándola de $\frac{1}{2}\pi$.

111. — Serie binómica. Fórmula de Newton.

La derivada n-sima de $y = (a + x)^m$ es:

$$y^n = m(m-1)(m-2)\ \ldots\ (m-n+1)(a+x)^{m-n}$$

y la fórmula de Mac-Laurin da el desarrollo:

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \tfrac{1}{2}m(m-1)\,.\,a^{m-2}x^2 + \ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}\,a^{m-n}x^n + \ldots$$

serie cuyo radio de convergencia es a, pues la razón de un coeficiente al siguiente (en valor absoluto) es:

$$\frac{a(n+1)}{|m-n|} = \frac{a(n+1)}{n-m}$$

cuyo límite, para $n \to \infty$, es a. Faltaría ver que el término complementario tiende a 0; pero es más sencillo otro método que puede verse en las notas. Resulta, pues, un desarrollo de $(a + x)^m$, cuya ley de formación es la misma de la fórmula de Algebra elemental, pero que no es polinomio, sino *serie*, pues los factores $m - n$ no son nulos si m no es un número natural. Este desarrollo general en serie es la fórmula de Newton.

Al desarrollar la potencia de un binomio deberá cuidarse de elegir el mayor de los sumandos como primero, pues el desarrollo es divergente si $|x| > a$.

112. — Aplicaciones numéricas.

1.° Para extraer la raíz cuadrada de un número comprendido entre dos cuadrados consecutivos a^2 y $(a+1)^2$, si r es el resto, es decir: $N = a^2 + r$: como es $r \leq 2a < a^2$ desde $a > 2$, resulta la serie convergente:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a} - \frac{r^2}{8a^3} + \ldots$$

Tomando la raíz entera más el resto dividido por el duplo de la raíz se tiene una aproximación cuyo error, por exceso, es menor que el término siguiente (por ser alternada la serie) o sea el cuadrado del resto, dividido por $8a^3$.

2.° En el cálculo de hipotenusas se aplica con frecuencia la fórmula de Newton

$$\sqrt{a^2+b^2} = a + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} + \ldots.$$

Aproximación suficiente casi siempre en el cálculo de oblicuas (anchura de tejados, corrección de lecturas en mira oblicua, etc.) es la siguiente:

La hipotenusa difiere del cateto mayor en el cuadrado del cateto menor dividido por el duplo del mayor.

Así, un tejado de caída 1 *m* en 5 *m* tiene la anchura 5,10 *m*. Si la caída es 0,50 en 4 *m* hay que sumar a este ancho ⅛ 0,25 = 0,03 *m*. Total: 4,03.

3.° He aquí algunas fórmulas aproximadas de uso frecuente:

$$(1+x)^m \sim 1 + mx$$

siendo m cualquiera y $x < 1$. De ella resultan inmediatamente:

$$\frac{1+x}{1+y} \sim 1 + x - y$$

$$\frac{(1+x)^m}{(1+y)^n} \sim 1 + mx - ny$$

Ejemplo de cálculo rápido:

$$\frac{(100{,}2)^2 . 9{,}89^3}{(100{,}3)^5 . 20} = \frac{10^4(1+0{,}002)^2 . (1-0{,}011)^3 . 10^3}{10^{11} . (1+0{,}003)^5 . 2}$$

$$\sim \tfrac{1}{2}\, 10^{-4}(1 + 0{,}004 - 0{,}033 - 0{,}015) = 0{,}0000478$$

Notas. — Para estudiar la función definida por la serie binómica, formemos su derivada, y fácilmente se comprueba la identidad:

$$\frac{y'}{y} = \frac{m}{a+x}$$

pero el primer miembro es la derivada de ly, y el segundo es la derivada de $l(a+x)^m$; siendo iguales las derivadas, ambas funciones ly, $l(a+x)^m$ solo difieren en una constante; y como para $x=0$ vale $y = a^m$, la constante es 0, siendo por tanto

$$ly = l(a+x)^m \qquad \text{es decir:} \qquad y = (a+x)^m$$

La serie coincide, pues, con $(a+x)^m$, para todo valor de x inferior a a en valor absoluto. Para valores exteriores al intervalo de convergencia la función $(a+x)^m$ está definida, pero la serie carece de valor numérico.

EJERCICIOS

1. — Si la longitud de un segmento situado a altura h es l, su longitud l' referida al nivel del mar es $l' = lR : (R+h)$. Deducir una fórmula práctica, y acotar el error.

2. — Desarrollar en serie de potencias de h/l la longitud del arco de circunferencia de cuerda $2l$ y flecha h.

Lección 27

SERIES DE VARIABLE COMPLEJA

113. — Límites y derivadas.

Casi todos los resultados de este capítulo son aplicables a variables complejas $z = x + iy$, aclarándose y simplificándose en este *campo más amplio muchos resultados, inexplicables en el campo real.*

Las definiciones de límite, de infinitésimo, etc., son válidas para *variables complejas, entendiendo que el valor absoluto es el módulo;* las reglas de cálculo de límites son igualmente aplicables; pero al llegar a las derivadas surgen algunas novedades.

En la definición de derivadas hemos insistido en que el límite del cociente $\Delta y : \Delta x$ debe ser único, tanto si Δx es positivo como negativo, es decir, lo mismo si el nuevo valor de x tiende al valor x_0 por la derecha o por la izquierda. En el campo complejo, hay no *dos*, sino *infinitos* caminos para tender a un punto z_0, y es preciso que el cociente de incrementos $\Delta w : \Delta z$ tenga el mismo límite para $\Delta z \to 0$, cualquiera que sea el argumento o dirección de Δz; cuando tal sucede, ese límite único w' se llama *derivada* de la función w en el punto z_0.

Sea, por ejemplo, la función $w = z^2$; el mismo cálculo hecho *para variables reales sirve aquí:*

$$\Delta w = (z + \Delta z)^2 - z^2 = 2z \,.\, \Delta z + (\Delta z)^2$$

y como el cociente $\Delta w : \Delta z$ se compone del sumando fijo $2z$ y el sumando infinitésimo Δz, tiene como límite $2z$ para $\Delta z \to 0$.

Por tanto: la derivada de z^2 es $2z$.

Análogamente: la derivada de z^n es nz^{n-1} (n natural).

Definición. — Las funciones que para cada punto z de una cierta región tienen derivada ,se llaman *analíticas.*

Son analíticas todas las funciones elementales y también las compuestas con ellas, pues las reglas de derivación de sumas, diferencias, productos, cocientes, funciones de función, etc., conservan su validez en el campo complejo, como se observa repasando sus demostraciones.

114. — Series numéricas de términos complejos.

La serie de términos complejos:

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) + \ldots + (a_n + ib_n) + \ldots.$$

se dice *convergente* cuando la suma de los n primeros términos: $S_n = A_n + iB_n$ tiene un límite $A + iB$; es decir: cuando $A_n \to A$, $B_n \to B$, o sea: *cuando son convergentes las dos series componentes*:

$$a_1 + a_2 + \ldots. + a_n + \ldots. = A$$
$$b_1 + b_2 + \ldots. + b_n + \ldots. = B\ .$$

EJEMPLO. — Es convergente la serie:

$$(a + ib) + (a^2 + ib^2) + \ldots + (a^n + ib^n) + \ldots.$$

y su suma, si $|a| < 1$, $|b| < 1$, es:

$$\frac{a}{1 - a} + \frac{bi}{1 - b}$$

El criterio de Dirichlet es aplicable: *si la serie de valores absolutos converge, también converge la serie dada y su suma es menor.*

En efecto, si converge la serie de términos positivos:

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots. + r_n + \ldots.$$

formada por los módulos $r_n = |a_n + ib_n|$; como r_n es la hipotenusa y los catetos son a_n y b_n, se verifica: $|a_n| < r_n$, $|b_n| < r_n$; luego son convergentes las series de $|a_n|$ y de $|b_n|$ que tienen sus términos menores que los de ésta; y por el teorema ya demostrado de Dirichlet, convergen absolutamente las series A y B.

Como se puede alterar el orden en ellas sin cambiar sus sumas A y B, resulta: *una serie absolutamente convergente de términos complejos tiene la propiedad conmutativa.*

115. — Series potenciales de variable compleja.

La demostración dada en (97) para calcular el radio de convergencia subsiste íntegramente. Por tanto: si es R el límite del cociente de un coeficiente por el siguiente en valor absoluto, la serie converge absolutamente para todo valor $|z| < R$; y no converge para $|z| > R$.

Resulta, pues, que *el campo de convergencia es el interior del círculo de centro* 0 *y radio R.*

Resulta, pues, que si en las series ya estudiadas de tipo $R = \infty$ (exponencial, seno y coseno circulares e hiperbólicos) damos a x valores complejos z, la serie converge para todo z del plano. Quedan así generalizadas estas funciones, mediante las series:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots.$$

$$\text{sen } z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots.$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots.$$

y análogamente las hiperbólicas. ¿Qué quiere decir, por ejemplo, sen i? Carece de sentido geométrico hablar de un *arco imaginario;* pero la serie tiene un valor numérico, que es, por definición, el seno propuesto.

Pongamos, por ejemplo, $z = iy$; la serie exponencial se descompone en dos, que son: cos y la parte real, y sen y la imaginaria; luego resulta esta igualdad:

$$e^{iy} = \cos y + i \text{ sen } y$$

análogamente:

$$e^{-iy} = \cos y - i \text{ sen } y$$

Sumando y restando, salen las *fórmulas de Euler:*

$$\cos y = \tfrac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$$

$$\text{sen } y = \tfrac{1}{2}(e^{iy} - e^{-iy}) : i$$

que expresan las funciones circulares reales mediante exponenciales imaginarias. Resulta así, que la exponencial (o el logaritmo) es la única función *simple,* con la que se componen todas las elementales.

Como la regla de derivación término a término es legítima (omitimos la demostración), resulta que toda serie de potencias con coeficientes arbitrarios y radio $R > 0$, define una función analítica.

Mediante series de potencias podemos, pues, definir innumerables nuevas funciones de variable z; y así se tienen todas las funciones posibles, en virtud del famoso teorema de Cauchy, uno de los más capitales descubrimientos matemáticos de todos los siglos:

Si una función $w = f(z)$ tiene derivada finita en un entorno del origen, admite infinitas derivadas y es desarrollable en serie de potencias por la fórmula de Mac-Laurin; siendo el desarrollo válido en el máximo círculo de centro O que no contiene puntos singulares.

No es fácil caracterizar con generalidad los puntos *singulares;* para las funciones elementales basta este criterio: son aquellos en que no toma valor finito y determinado.

Dada, pues, una función, puede afirmarse inmediatamente cuál será el campo de validez de su desarrollo en serie, cuyo radio es la distancia desde O al punto singular más próximo.

EJEMPLO. — Que el desarrollo de $1:(1-z)$ tenga radio 1 se explica por hacerse infinita la función para $z = 1$; pero ¿cómo se explica que el radio del desarrollo de $1:(1+z^2)$ tenga radio 1, a pesar de ser finita para $z = 1$ y para $z = -1$?

La explicación, imposible en el campo real, es inmediata en el campo complejo. Basta observar que los puntos $\pm i$ son singulares y el círculo de convergencia no puede contenerlos; esas singularidades complejas repercuten en el eje real, limitando sobre él el intervalo de convergencia $(-1, +1)$.

NOTA. — Compárese la sencillez y generalidad de este teorema con las restricciones de los desarrollos en serie en el campo real; en éste, no es suficiente la existencia de derivadas de todos órdenes, ni aun siquiera basta la convergencia de la serie de Mac-Laurin, pues puede dar una función distinta de la $f(x)$; el único criterio seguro es el examen del término complementario y *éste no siempre es fácil y en cada caso exige análisis especial.*

En cambio, basta la *existencia* de primera derivada en el campo complejo, para asegurar la existencia de infinitas derivadas y la validez del desarrollo en serie.

EJERCICIOS

1. — Demostrar que la exponencial compleja tiene también la propiedad $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$.

2. — Demostrar que el logaritmo de un número de módulo r y argumento α es $lz = lr + i(\alpha + 2k\pi)$.

3. — Desarrollar en serie, por división, las funciones

$$\frac{1}{z^2 - 2z + 2} \qquad \frac{z-1}{z^3 + 3z^2 + z + 3}$$

y determinar sus radios de convergencia.

(Basta determinar la menor de las raíces del denominador, en valor absoluto). Soluciones: $R = \sqrt{2}$, $R = 1$.

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA.

116. — Representación geométrica de las funciones complejas. Cada valor $z = x + iy$, está representado por el punto del plano, cuyas coordenadas son (x, y); para representar a la función de z, que llamaremos $w = u + iv$, se adopta otro plano, de ejes u, v (que a veces conviene tomar coincidentes con los x, y); cada función $w = f(z)$ está representada por una correspondencia entre los puntos de los planos z y w.

Para hacer visible tal correspondencia suele dibujarse un reticulado de líneas; por ejemplo, a las rectas $x =$ const., corresponden curvas dadas paramétricamente así:

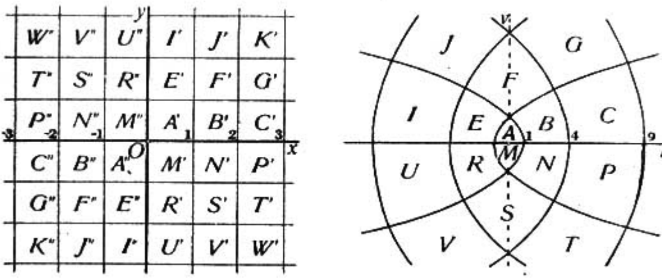
$$u = u(c, y) \qquad v = v(c, y)$$

y análogamente para las rectas $y =$ const.

A las rectas $u = c$ del plano w corresponden las curvas de ecuaciones: $u(x, y) = c$; y a las rectas $v = c$, las curvas: $v(x, y) = c$.

EJEMPLO. — Sea $\quad w = z^2 = (x + iy)^2$

de donde: $\quad u = x^2 - y^2 \quad , \quad v = 2xy.$



A las rectas $x = c$ corresponden las curvas

$$u = c^2 - y^2 \quad , \quad v = 2cy$$

o sea eliminando el parámetro y, las parábolas:

$$v^2 = 4c^2(c^2 - u)$$

Análogamente, a las rectas $y = c$, corresponden las curvas

$$u = x^2 - c^2 \quad , \quad v = 2xc$$

o sea, eliminando el parámetro x, las parábolas

$$v^2 = 4c^2(c^2 + u)$$

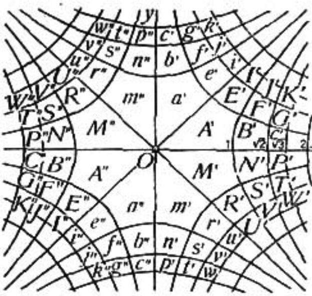
El parámetro de estas parábolas es $p = \pm 2c^2$; y como la abscisa del vértice es precisamente $\pm c^2$, *resulta que todas ellas tienen O como foco, es* decir, son *homofocales.*

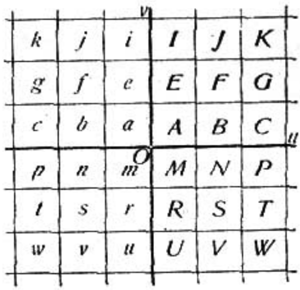
En Analítica se demuestra que deben cortarse perpendicularmente; esto mismo resultará en seguida de modo inmediato.

Veamos ahora las curvas homólogas de las rectas $u = c$, $v = c$.

Para $u = c$, resultan las hipérbolas $x^2 - y^2 = c$.

" $v = c$, " " " $2xy = c$.



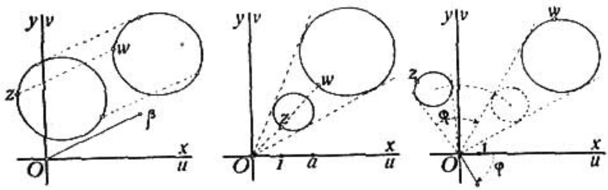


117. — Representación de la función lineal.

Veamos el significado geométrico de las funciones más sencillas, cuando los dos planos z y w se toman coincidentes.

Función $w = z + \beta$. Representa una *traslación*, pues a cada punto z se le aplica el vector β para obtener el w.

Función $w = az$. Si a es real, el argumento de u es igual que el de z, y el módulo queda multiplicado por a, luego la transformación es una *homotecia* de centro 0 y razón a.



Sea $w = \alpha z$ donde α es un complejo de módulo a y argumento φ; el módulo de z hay que multiplicarlo por a, pero al argumento hay que sumarle φ; luego la transformación se compone de una homotecia de razón a y un giro de ángulo φ.

Función $w = \alpha z + \beta$. Como se compone de una homotecia, un giro y una traslación, transforma cada figura en otra semejante.

Recíprocamente, como la semejanza entre dos figuras está determinada por dos pares (z_1, z_2) y (u_1, u_2) de puntos homólogos, y con ellos se calculan inmediatamente los coeficientes α, β resulta que *la función lineal entera representa todas las semejanzas entre los planos z y w.*

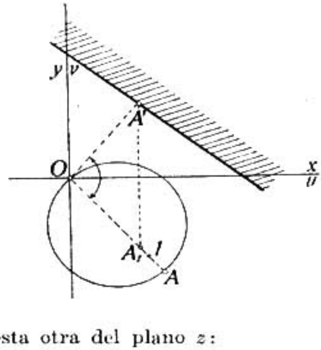
Pasemos ahora a estudiar las funciones fraccionarias, comenzando por la más sencilla:

Función $w = 1 : z$. Poniendo $z = x + iy$ resulta para w:

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{iy}{x^2 + y^2}$$

de donde resulta: la circunferencia del plano w, cuya ecuación es:

$$a(u^2 + v^2) + bu + cv + d = 0$$



se transforma en esta otra del plano z:

$$d(x^2 + y^2) + bx + cy + a = 0$$

Si la primera pasa por el origen, es $d = 0$ y la segunda se reduce a recta; si la primera se reduce a recta, es $a = 0$ y la segunda pasa por el origen.

Si convenimos en decir que al punto $z = 0$ corresponde el punto $w = \infty$; y al punto $z = \infty$ el punto $w = 0$, y convenimos en incluir a las rectas entre las circunferencias, resulta: la función $1:z$ *transforma las circunferencias en circunferencias.*

Siendo $|w| = 1:|z|$, $\operatorname{Arg} w = -\operatorname{Arg} z$, resulta:

La transformación efectuada por la función $w = 1/z$ se compone de la inversión respecto del origen, y de la simetría respecto del eje real.

Función $w = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$

Podemos suponer $\gamma = 1$, dividiendo previamente por él, y después de sacar el cociente entero α, queda la fracción:

$$\frac{\beta - \alpha\delta}{z + \delta} = \frac{\Delta}{z + \delta}$$

llamando Δ al numerador. De la variable z se pasa a la w mediante las operaciones siguientes:

Se suma δ; se toma el recíproco; se multiplica por Δ; se suma α.

Como todas ellas transforman las circunferencias en circunferencias, esta misma propiedad tiene la función lineal; entendiendo que al punto $z = -\delta$ corresponde $w = \infty$; y al punto $z = \infty$ el $w = \alpha$.

NOTA: La función lineal *entera*, esto es, la del tipo $w = \alpha z + \beta$, conserva los ángulos de las curvas homólogas, puesto que la transformación es una *semejanza*.

En Geometría elemental se demuestra que también conserva los ángulos la inversión o transformación por radios recíprocos, pero cambiando su sentido; luego la función $1/z$, que significa una inversión y una simetría, conserva los ángulos en valor absoluto y signo; igual propiedad tiene, por consiguiente, la función lineal general, por componerse mediante las funciones anteriores.

No dedicamos, sin embargo, mayor atención a esta importante propiedad, porque en los próximos párrafos aparecerá como consecuencia inmediata del hecho esencial de ser función *derivable*, sin necesidad de apoyarnos en las citadas propiedades geométricas, especiales de la función lineal.

EJEMPLO: Para transformar en el círculo de radio 1 el semiplano $x < 1$, basta fijar sobre los contornos tres pares de puntos correspondientes, resolviendo las tres ecuaciones a que deben satisfacer los coeficientes α, β, γ, δ, las cuales determinan éstos, o mejor dicho las razones de tres de ellos al cuarto.

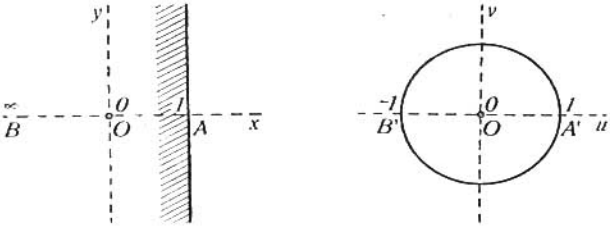
Este problema no tiene tanto interés como el siguiente: *transformar el semiplano en círculo de modo que se correspondan dos puntos interiores y dos puntos de contorno.* Sean los orígenes $z = 0$, $w = 0$ los puntos interiores homólogos, y los puntos de contorno los $z = 1$, $w = 1$. Al eje x, recta que pasa por 0 y es perpendicular al contorno del semiplano, debe corresponder la recta o circunferencia que pasa por 0 y sea perpendicular al contorno del círculo, es decir, debe ser precisamente el eje real u; al punto del infinito del plano z

debe corresponder, por tanto, el punto $w = -1$. Tenemos, pues, con el convenio del punto ∞ (117), tres pares de puntos homólogos:

$$z = 0 \quad , \quad z = 1 \quad , \quad z = \infty$$
$$w = 0 \quad , \quad w = 1 \quad , \quad w = -1$$

La primera condición exige que sea $\beta = 0$; la tercera exige $\alpha = -\gamma$, pudiendo tomarse $\alpha = 1$, $\gamma = -1$; la segunda determina $\delta = 2$; por consiguiente, la función que transforma el semiplano en el círculo de radio 1 es:

$$w = \frac{z}{2 - z}$$



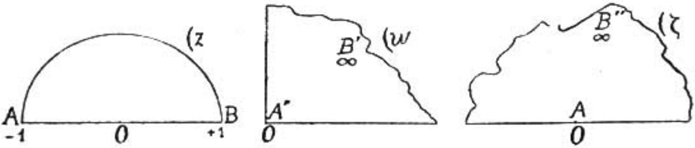
118. — Funciones de segundo grado.

La función $w = z^2$ eleva al cuadrado el módulo y duplica el argumento; por tanto, un ángulo cualquiera de vértice O en el plano z se transforma en un ángulo doble en el plano w; un cuadrante se transforma en semiplano.

Esta función, aplicada convenientemente en combinación con la lineal, permite convertir en semiplanos los recintos compuestos de dos arcos de circunferencia perpendiculares.

Sea el semicírculo de la figura. Comenzaremos por trasformar un vértice en el origen y el otro en el punto ∞; para ello basta poner:

$$w = \frac{1 + z}{1 - z}$$



Al segmento $-1, +1$ corresponde el $0, +\infty$; a la circunferencia, que pasa por A y B, corresponde la que pasa por 0 e ∞, es decir, una recta; y como forma con AB un ángulo $+90°$, le corresponde el semieje $+y$.

Para transformar el ángulo en semiplano, basta elevar al cuadrado.

119. — Funciones analíticas y representación conforme.

Sea $w_0 = f(z_0)$ y sea la derivada $w'_0 = f'(z_0) \neq 0$ es decir, con argumento bien definido φ. Por definición:

$$w'_0 = \text{lím.}\ (\Delta w : \Delta z) \qquad \text{para } \Delta z \to 0$$

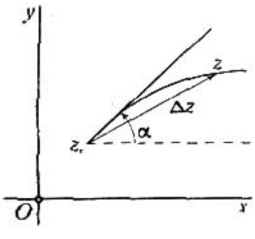
Si un punto tiende hacia otro distinto de 0, su argumento tiende al de ese otro punto, luego:

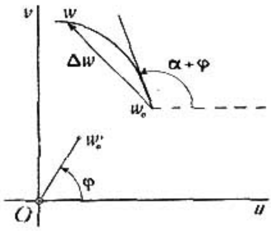
$$\arg \Delta w - \arg \Delta z \to \varphi$$

si el punto $z \to z_0$, siguiendo una curva de argumento α, es decir, si $\arg \Delta z \to \alpha$, resulta:

$$\arg \Delta w \to \alpha + \varphi$$

es decir, el punto homólogo describe una curva cuya tangente en w_0 tiene el argumento $\alpha + \varphi$. El haz de tangentes en w_0 a las curvas *homólogas de las trazadas por* z_0, *es igual a él, pero ha girado un* ángulo φ, argumento de la derivada. Por tanto, el ángulo que forman dos curvas por z_0 es igual en magnitud y en signo al que forman sus transformadas; la correspondencia entre ambos planos se llama *conforme.*





Ejemplo. — En la correspondencia $w = z^2$ son rectos los ángulos que forman en cada plano las curvas homólogas de las rectas paralelas a los ejes en el otro plano.

Consideremos el punto $z = 1 + i$; su homólogo es $w = 2i$; la derivada vale en él $2(1 + i)$, cuyo argumento es $\pi : 4$; luego el haz de tangentes a las curvas homólogas de las trazadas por aquel punto se deduce de él girando 45° en sentido positivo.

Definición. — Las funciones que admiten derivada finita en cada punto de un cierto recinto, se llaman *analíticas.*

120. — Teorema fundamental de la representación conforme.

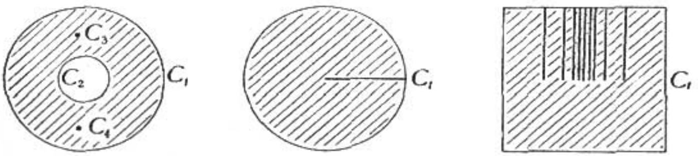
Hemos visto cómo, mediante funciones sencillas, se logra transformar en círculo recintos de formas muy variadas, siendo la representación conforme, por ser analíticas tales funciones. Se comprende que utilizando series de potencias se logrará la transformación sobre el círculo de recintos mucho más complicados.

El concepto de *recinto* es muy amplio. Es recinto el conjunto de puntos interiores a una elipse, a un polígono, a una curva cerrada sin puntos dobles, etc.; pero se puede dar esta definición mucho más general, que no presupone el difícil concepto de curva: *Recinto es un conjunto de puntos tales que cada uno tiene un entorno perteneciente al mismo.* Tales puntos se llaman *interiores* y se llaman puntos de *contorno* los puntos tales que en todo entorno suyo hay puntos del recinto y puntos que no pertenecen a él.

Los puntos de contorno pueden formar conjuntos muy complicados; se dice que hay más de un contorno, cuando los puntos de contorno forman dos o más conjuntos tales que la distancia entre dos puntos cualesquiera, uno de cada uno, es superior a un número positivo. Por ejemplo, un anillo circular tiene dos contornos y si de ese anillo se suprimen dos puntos interiores resulta un recinto de cuatro contornos, pues cada uno de estos puntos forma un contorno.

En cambio, si en un círculo se efectúa un corte a lo largo de un radio, el círculo así cortado es un recinto de un solo contorno.

También tiene un solo contorno el recinto formado cortando el cuadrado según infinitos segmentos cuyas distancias forman una progresión de razón 1/2; algunos de estos cortes están dibujados en la figura.



Los recintos de un solo contorno se llaman *simplemente conexos;* también los llamaremos *dominios*, representándolos por la letra D.

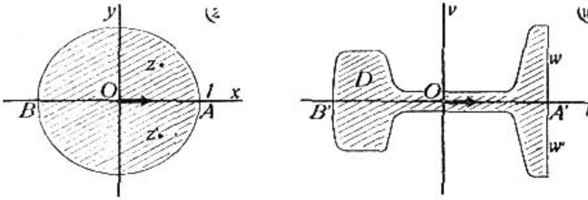
El famoso *teorema de* RIEMANN, fundamento de la teoría de la representación conforme, expresa:

Si D es un recinto simplemente conexo al cual es interior el origen del plano w y C el círculo de radio 1 cuyo centro es el origen del plano z, existe una función y solo una, definida por una serie

[1] $$w = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots\ldots (a_1 \text{ real positivo})$$

convergente en el círculo C, que lo transforma en el recinto D, haciendo corresponder los orígenes de ambos planos y siendo la correspondencia biunívoca y conforme en todos los puntos interiores.

Obsérvese el amplísimo alcance de este teorema, uno de los más importantes del Análisis. Por complicado que sea el recinto, existe una sucesión de números a_1, a_2, a_3, ... (el primero de los cuales puede elegirse real positivo) tales que la serie converge en todo el círculo y lo transforma en el interior del recinto. Como hay problemas capitales en Mecánica de flúidos, en Electrotécnica, etc., cuya solución sobre el círculo es sencilla, la transformación conforme de un recinto cualquiera en círculo permite resolver el problema para todo recinto simplemente conexo; aquí radica la importancia de la representación conforme para la Física.



121. — Representación conforme de recintos simétricos.

Recintos con simetría axial. — Si todos los coeficientes a_n son reales, a valores conjugados de z corresponden valores conjugados de w, es decir puntos simétricos del eje x corresponden puntos simétricos respecto del eje u; y como el círculo es simétrico respecto del eje x, resulta: *el recinto D es simétrico respecto del eje u.*

Recíprocamente: dado un recinto D simétrico respecto del eje u, si en la serie [1] que la representa sobre el círculo sustituimos cada coeficiente a_n por su conjugado a'_n, resulta la nueva serie

[2] $$u_1 = a'_1 z + a'_2 z^2 + a'_3 z^3 + \ldots\ldots (a'_1 = a_1)$$

que hace corresponder al punto $z' = x - iy$ el $w' = u - iv$, pues las potencias de números conjugados son conjugadas y las series de términos conjugados lo son también.

Como el círculo y el recinto son simétricos, resulta pues que la serie [2] transforma C en D, y como por el teorema de Riemann no puede haber más que una sóla serie que transforme el círculo en el recinto, deben ser iguales los coeficientes de ambas, es decir:

$$a'_n = a_n \qquad \text{o sea: } a_n \text{ real.}$$

La representación conforme sobre el círculo de recintos con un eje de simetría, se simplifica notablemente gracias a esta propiedad, pues la determinación de los coeficientes reales es mucho más sencilla que la de los complejos, cada uno de los cuales encierra dos valores reales.

Simetría central. — Se dice que una figura tiene *simetría central de orden n* cuando al girar en torno del centro un ángulo igual a la n-sima parte de una vuelta, la figura coincide consigo misma.

La simetría central de orden 2 es la única estudiada en Geometría elemental bajo el nombre de simetría central. En el campo complejo la rotación de media vuelta equivale a la multiplicación de la variable por -1.

Si la serie [1] tiene nulos los coeficientes de orden par, es decir, si es del tipo

[3] $$w = a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \ldots\ldots$$

al cambiar z por $-z$ resulta $-w$, es decir: a puntos simétricos respecto del origen en el plano z corresponden puntos simétricos en el plano w; luego el *recinto D es simétrico respecto del origen.*

Recíprocamente, dado un recinto D simétrico respecto del origen, si la serie que lo transforma sobre el círculo es [1] y formamos la nueva serie

$$w_1 = a_1 z - a_2 z^2 + a_3 z^3 - \ldots\ldots$$

al valor $-z$ corresponde el $-w$, opuesto al dado por [1] y como el círculo y el recinto son simétricos respecto de sus orígenes, esta serie transforma uno en otro; pero el teorema de Riemann exige la identidad de ambas series, siendo por tanto

$$a_2 = a_4 = a_6 = \ldots\ldots = 0$$

La representación conforme sobre el círculo de recintos con centro de simetría de orden 2 se reduce, pues, a la determinación de los coeficientes $a_1, a_3, a_5, \ldots\ldots$, que en general serán complejos; pero si además hay simetría axial, como acontece en el rectángulo, rombo, elipse, ... todos los coeficientes serán reales.

Finalmente, el mismo razonamiento anterior conduce a este resultado: la serie correspondiente a un recinto que tiene el origen como centro de simetría n-aria, es del tipo:

[4] $$w = a_1 z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{2n+1} z^{2n+1} + \ldots\ldots$$

cuyos coeficientes serán reales si además existe simetría respecto del eje x.

En la práctica suele adoptarse como variable independiente la del plano del recinto D y entonces la serie que resulta despejando z de [1] por el método de coeficientes indeterminados, y permutando las letras z y w, será del tipo:

[5] $$w = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots\ldots \quad (c_1 = 1/a_1)$$

subsistiendo todas las conclusiones relativas a los casos de simetría, con la sola complicación de que su círculo de convergencia puede no contener todo el recinto D. Así, por ej. si se desarrolla en serie la función

$$\frac{z}{2-z} = \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{2^3} + \ldots\ldots$$

que transforma el semiplano $x < 1$ en el círculo de radio 1 como hemos visto en (117), su radio de convergencia es 2, no cubriendo su círculo de convergencia más que una parte del semiplano.

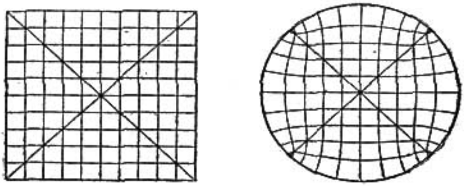
Esta dificultad, que se vence en la teoría general de funciones mediante el proceso que se llama de *prolongación analítica*, no dificulta en nada el cálculo aproximado de la función $w = f(z)$, sustituyendo la serie por polinomios, los cuales tienen valor determinado para todo valor de la variable z.

Consideremos, por ej. el cuadrado de apotema 1; por tener centro de simetría de orden 4, el desarrollo será del tipo

$$w = c_1 z + c_5 z^5 + c_9 z^9 + \ldots\ldots$$

y por la simetría axial, todos estos coeficientes serán *reales*.

Como primer coeficiente se puede tomar $c_1 = 1$, simplificación que modificará el radio del círculo obtenido, el cual será $1/c_1$ en vez de 1.



EJERCICIOS

1. — Transformar el semiplano $x > 0$ en el círculo $|w| \leq 1$, mediante una función lineal.

2. — Transformar en círculo un ángulo de 60°.

CAPITULO V

INTEGRALES SIMPLES Y SUS APLICACIONES GEOMETRICAS

LECCIÓN 29

METODOS GENERALES DE INTEGRACION

122. — Definición y teorema fundamental.

Recordemos conceptos ya dados en (67) y utilizados en Lecc. 26.

Se dice que $F(x)$ es función primitiva de $f(x)$ si es $F'(x) = f(x)$; de otro modo: si es $dF(x) = f(x)dx$. La función primitiva suele llamarse también *integral indefinida*, por la razón que veremos después, y se representa así:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Este signo $\int$ representa, pues, la operación inversa de la diferenciación. Por consiguiente, los signos $\int d$, o bien $d \int$, antepuestos a cualquier función, se reducen y pueden suprimirse.

Hemos demostrado (67) que si dos funciones tienen la misma derivada, su diferencia es constante.

Resulta de aquí que obtenida una función primitiva de $f(x)$, todas las demás se obtienen sumando una constante arbitraria.

En lo sucesivo daremos siempre una sola función primitiva; las demás podrán deducirse sumando constantes.

123. — Funciones primitivas inmediatas.

Para encontrar la función primitiva de una dada es necesario recordar las derivadas de las funciones elementales, tanto de la variable independiente como de otra función cualquiera de x.

He aquí una tabla con algunas de dichas funciones y sus derivadas:

Funciones	Derivadas
$f(x)^n$	$^f(x)^{n-1}.f'(x)$,
$\sqrt{f(x)}$	$\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$a^{f(x)}$	$f'(x).a^{f(x)}.l\,a.$
$lf(x)$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$\operatorname{sen} f(x)$	$f'(x).\cos f(x).$
$\cos f(x)$	$-f'(x) \operatorname{sen} f(x).$
$\operatorname{tg} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
$\operatorname{cotg} f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}$
$\operatorname{arc\,sen} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$\operatorname{arc\,cos} f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$\operatorname{arc\,tg} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$

EJEMPLOS. — 1.° Calcular la función primitiva de la función

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Esta es del tipo 2.°, es decir, una fracción, el denominador un radical y el numerador la derivada de la cantidad sub-radical. La función primitiva es: $\sqrt{1+x^2}$.

2.° Encontrar la función primitiva de $3x^3:(x^8+1)$.

Si fuera

$$\frac{4x^3}{1+x^8} = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$$

la función primitiva sería: $\operatorname{arc\,tg}(x^4)$; basta multiplicar por $\frac{3}{4}$ y se tiene que la función primitiva de la dada es: $\frac{3}{4}\operatorname{arc\,tg}(x^4)$.

3.° Análogamente, la función primitiva de $x: \sqrt{1-x^4}$ es: $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}(x^2)$, puesto que si derivamos esta última resulta la primera.

124. —Método de integración por sustitución.

Para calcular la función primitiva $\int f(x)dx$ conviene con frecuencia, introducir una variable auxiliar t, ligada con la x por una expresión $x = \alpha(t)$ elegida de tal modo que sea fácil calcular la nueva expresión

$$\int f\,[\alpha(t)]\,\alpha'(t)dt = \Phi(t) \qquad [1]$$

Esta función puede expresarse mediante x sustituyendo t por su valor, y es la función primitiva buscada. En efecto, por definición de integral indefinida, es

$$d\Phi(t) = f\,[\alpha(t)]\,\alpha'(t)dt$$

y recordando que $\alpha'(t)dt = dx$, resulta $f(x)dx$. Vemos así la ventaja de la notación adoptada para la integral que nos indica cómo debe hacerse la sustitución.

Cual sea la transformación más conveniente de la variable de integración, resulta del examen de la curva dada. Así, por ejemplo, para calcular $\int\sqrt{1-x^2}dx$ observamos que la curva $y = \sqrt{1-x^2}$ o sea $x^2+y^2=1$ es una circunferencia y sus coordenadas se expresan muy sencillamente en coordenadas polares $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$; siendo t el argumento. Elegida esta nueva variable auxiliar, la diferencial $y.dx = \sqrt{1-x^2}.dx$ se convierte en

$$-\operatorname{sen} t.\operatorname{sen} t.dt = -\tfrac{1}{2}(1-\cos 2t)dt$$

cuya función primitiva es $-\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2t$.

125. — Integración por partes.

Recordemos la regla de diferenciación de un producto de funciones:

$$d(uv) = u.dv + v.du \qquad u.dv = d(uv) - v.du$$

Si la expresión bajo el signo integral se pone en la forma $u.dv$, vemos que es igual a la diferencial de la función conocida uv, menos otra expresión $v.du$; por tanto: la fórmula

$$\int u\,dv = uv - \int v.du \qquad [2]$$

llamada de la integración *por partes,* reduce el cálculo de una integral al de otra que, si es más sencilla que la primera, puede conducir a la solución. Podemos enunciar así esta regla de integración por partes:

La integral del producto de una función por la diferencial de otra es el producto de ambas menos la integral de la ya integrada por la diferencial de la otra.

De otro modo: *para integrar un producto se sustituye un factor por su integral y se resta la integral del producto de la función así obtenida por la diferencial del otro factor.*

La expresión diferencial que aparece bajo el signo integral es siempre de la forma $u.dv$ siendo $v = x$ y la fórmula [2] será conveniente cuando $x.f'(x)$ sea más sencilla. Tal sucede en aquellas funciones trascendentes que tienen derivada algebraica, como son: $\log x$, arc. tg x, arc. sen x.

EJEMPLOS:

$\int l\,x.dx = x.l\,x - \int x.x^{-1}\,dx = x\,l\,x - x$

$\int \text{arc sen}\,x.dx = x.\text{arc sen}\,x - \int x\,dx : \sqrt{1-x^2} = x.\text{arc sen}\,x + \sqrt{1-x^2}$

$\int \text{arc tg}\,x.dx = x.\text{arc tg}\,x - \int x\,dx : (1+x^2) = x.\text{arc tg}\,x - \frac{1}{2}l(1+x^2)$

Integración de las funciones $x^m.e^x$.

Como aplicación del método de integración por partes vamos a estudiar estas funciones. Antes de aplicarlo hay que observar cuál de las dos partes conviene integrar primero, puesto que puede escribirse de dos modos:

$$\int x^m.e^x.dx = \int x^m.d(e^x)$$

o bien (salvo el factor $m+1$) así:

$$\int e^x\,d(x^{m+1})$$

y emprendiendo el primer camino aparecerá en la nueva integral x^{m-1} y en cambio aparecerá x^{m+1} si se emprende el segundo. Por tanto: si $m > 1$ conviene la primera transformación, mientras que es mejor la segunda si m es negativo.

Sea m entero positivo; entonces se va rebajando de unidad en unidad hasta desaparecer la potencia de x.

EJEMPLOS:

$$\int x^2\,e^x.dx = \int x^2.d\,e^x = x^2\,e^x - 2\int e^x.x.dx$$

$$\int x.e^x\,dx = \int x.d\,e^x = x.e^x - \int e^x.dx = x.e^x - e^x.$$

y sustituyendo en la igualdad anterior queda resuelto el problema.

Si m es negativo, aplicaremos el segundo procedimiento para rebajar su valor absoluto, pero al llegar a $\int x^{-1} e^x dx$ no se puede proseguir, pues el factor x^{-1} tiene el logaritmo como función primitiva, y la expresión se complica.

EJEMPLO:

$$\int x^{-3} e^x . dx = - \tfrac{1}{2} \int e^x . dx^{-2} = - \tfrac{1}{2} e^x . x^{-2} + \tfrac{1}{2} \int x^{-2} . e^x . dx$$

$$\int x^{-2} . e^x . dx = - \int e^x . dx^{-1} = - e^x . x^{-1} + \int x^{-1} . e^x . dx$$

NOTA. — Esta integral $\int e^x x^{-1} . dx$ da origen a una función no expresable mediante las funciones elementales, la cual se llama *logaritmo integral*.

NOTAS

El método de sustitución se apoya en la correspondencia entre x y t por la expresión $x = \varphi(t)$ y solamente en el caso en que exista esta correspondencia puede aplicarse el método; de lo contrario pueden resultar absurdos.

EJEMPLO. — Sea $\int dx/1 - x$. Pongamos $t = l(1 - x)$ y la integral se transforma así: $\int - dt = - t = - l(1 - x)$

$$dt = - \frac{dx}{1 - x}$$

pero no debe olvidarse que mientras la integral propuesta tiene valor cualquiera que sea x (excepto $x = 1$) el resultado carece de sentido para $x > 1$, pues el logaritmo de $1 - x$ sería imaginario.

Al llegar a las integrales definidas deberá cuidarse mucho del intervalo de validez de la transformación.

EJERCICIOS

1. — Integrar por partes $\int \sqrt{1 - x^2} . dx$.

(Sumando y restando 1 en la nueva integral que resulta, aparece de nuevo la integral propuesta, que se despeja fácilmente).

2. — Calcular $\int e^{ax} . \cos bx . dx$, $\int e^{ax} . \operatorname{sen} bx . dx$.

(Integrando por partes cada una, resultan dos ecuaciones lineales de las que se despejan ambas).

3.—Sustituir $x = lt$ en la integral y se verá justificada tal denominación.

4. — Calcular por partes la integral de $(1 + x^2)^{-2}$.

(Escríbase el numerador $1 = (1 + x^2) - x^2$, descomponiendo en dos fracciones; la primera se integra inmediatamente, y la segunda por partes, descomponiéndola así: $x . x(1 = x^2)^{-2} . dx$).

INTEGRACION DE FUNCIONES RACIONALES

126. — Descomposición en fracciones simples.

Si el numerador no es de grado menor que el denominador $Q(x)$, comenzaremos sacando el cociente entero, por división. La primitiva de ese polinomio es otro polinomio y basta integrar la fracción complementaria $P(x)/Q(x)$.

Suponiendo que se conozcan las raíces del denominador (cuestión árdua en general), es decir, que se logre descomponer $Q(x)$ en factores de 1.° y 2.° grado, es ya fácil descomponerla en *fracciones simples;* se llaman así las fracciones cuyos denominadores son esos factores de 1.° y 2.° grado, y los numeradores son de grado menor, es decir, constantes, o lineales.

PRIMER CASO. — Las raíces del denominador son *reales* y *simples.* La fracción se descompone en suma de fracciones de numeradores constantes, y denominadores $x - x_1$, $x - x_2$, ..., que pueden ser integradas inmediatamente, resultando logaritmos.

EJEMPLO 1. — El más sencillo es la fracción siguiente, cuya descomposición salta a la vista:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{x - 1} - \frac{\frac{1}{2}}{x + 1}$$

y por tanto la primitiva es $\frac{1}{2}\, l(x - 1) - \frac{1}{2}\, l(x + 1)$, que también puede escribirse así: $\frac{1}{2}\, l\,[(x - 1):(x + 1)]$.

EJ. 2. — Análogamente, si el denominador es $x^2 - a^2$ el coeficiente es $1/2a$.

EJ. 3. — Al tipo anterior se reduce cualquier fracción cuyo denominador de 2.° grado tenga raíces reales simples; pues aplicando el método índico de la formación del cuadrado, se transforma en el anterior tipo. Así, por ejemplo:

$$x^2 - 4x - 1 = (x - 2)^2 - 5 \quad , \text{ luego } a = \sqrt{5}.$$

Suponiendo numerador de 1.er grado (si éste es superior se divide previamente), transformaremos la fracción, como en este ejemplo:

$$\frac{3x + 5}{x^2 - 4x - 1} = \frac{3(x - 2) + 11}{(x - 2)^2 - 5} = \frac{3(x - 2)}{(x - 2)^2 - 5} + \frac{11}{(x - 2)^2 - 5}$$

Con el artificio de haber puesto $x - 2$ en vez de x, se ha logrado que el numerador de la 1.ª fracción sea la derivada del denominador y la integral vale por tanto $l\,[x^2 - 4x - 1]$.

La integral de la 2.ª fracción, como se ha visto en el ejemplo 2.° (cambiando x por $x-2$), es:

$$[l(x-2\sqrt{5})-l(x-2+\sqrt{5})]\,11:2\sqrt{5}.$$

Cálculo general de coeficientes. — Si las raíces del denominador son $x_1, \ldots, x_n$, la fórmula de Lagrange (91) da la descomposición en fracciones simples dividiendo ambos miembros por $Q(x)$. Los coeficientes son por tanto: $a_i = P(x_i):q(x_i)$ si es $q(x) = Q(x):(x-x_i)$. Para $x \to x_i$ resulta $q(x_i) = Q'(x_i)$, fórmula útil que puede aplicar el lector a los ejemplos anteriores. Que la descomposición es *única* fué ya demostrado en (91).

REGLA: El numerador de $x-a$ es el cociente de $P(a)$ por $q(a) = Q'(a)$.

EJ. 4. — Para encontrar la función primitiva de:

$$\frac{\frac{1}{2}x^2+1}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{\frac{1}{2}x^2+1}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}$$

basta aplicar la fórmula $P(a)/q(a)$; o bien identificando resultan ecuaciones:

$$A+B+C=\tfrac{1}{2} \quad , \quad 3A+B=0 \quad , \quad 2A-2B-C=1$$

de donde: $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{3}{4}$, $C=1$; luego la primitiva es:

$$\tfrac{1}{4}\,l(x-1)-\tfrac{3}{4}\,l(x+1)+l(x+2)$$

SEGUNDO CASO. — *Hay raíces imaginarias simples.* El caso más sencillo, en que $Q(x)$ es de 2.° grado con raíces $a \pm bi$, es el de una fracción del tipo:

$$\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2} = \frac{M(x-a)}{(x-a)^2+b^2} + \frac{N+Ma}{(x-a)^2+b^2}$$

poniendo $x-a$ en vez de x, a fin de que el numerador sea, salvo factor constante, derivada del denominador; resulta así como expresión de la integral, llamando $M' = (N+Ma)/b$;

$$\tfrac{1}{2}M\,.\,l\,[(x-a)^2+b^2]+M'\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{x-a}$$

Cualquiera que sea el número de raíces reales e imaginarias simples, cada dos conjugadas dan coeficientes A'_i, A_i'' conjugados y la suma de ambas fracciones es real. Queda así descompuesta $P(x)/Q(x)$ en fracciones reales de los tipos:

$$\frac{A_i}{x-x_i} \quad ; \quad \frac{M_ix+N_i}{(x-a_i)^2+b_i^2}$$

Esta descomposición, que es *única*, como ya se ha visto, se puede obtener mejor identificando los dos polinomios que resultan de multiplicar ambos miembros por $Q(x)$, y resolviendo las n ecuaciones lineales así formadas.

EJEMPLO. — Aplíquense ambos métodos a fracciones de denominador $x(x^2+1)$.

TERCER CASO. — *Raíces múltiples.* Si en el denominador hay un factor $(x-a)^h$ esta raíz h-ple a origina h fracciones simples:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^h q(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^h} + \frac{A_1}{(x-a)^{h-1}} + \ldots\ldots + \frac{A_{h-1}}{x-a} + \frac{p(x)}{q(x)}$$

Multiplicando por $(x-a)^h$ y llamando $F(x) = P(x)/q(x)$ la descomposición:

$$F(x) = A_0 + A_1(x-a) + \ldots\ldots + (x-a)^h p(x)/q(x)$$

determina, según (74) y (75) los coeficientes $A_0 = F(a)$, $A_1 = F'(a)$. $A_2 = \frac{1}{2} F''(a)$, ...

El método de coeficientes indeterminados, ya visto, es también útil; sobre todo cuando hay raíces imaginarias, es más breve que la agrupación de fracciones conjugadas obtenidas por el método anterior. Si las raíces son reales, es muy preferible el método de las derivadas.

EJEMPLO 1.° — Descompongamos:

$$\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

e identificados los numeradores en ambos miembros resulta:

$$A = 1 \quad , \quad -2A + B = 0 \quad , \quad A - B + C = 0$$

de donde $A = 1$, $B = 2$, $C = 1$; luego la función primitiva es

$$l(x-1) - 2(x-1)^{-1} - \tfrac{1}{2}(x-1)^{-2}$$

Más breve es el método de las derivadas, pues en este caso es: $F(x) = x^2$, $F(1) = 1$, $F'(1) = 2$, $F''(1) = 2$.

EJ. 2.° — Separemos ante todo la parte entera 1 de la fracción

$$\frac{x^5 - 2x^3 + 1}{x^5 - 8x^3 + 16x} = 1 + \frac{6x^3 - 16x + 1}{x(x-2)^2(x+2)^2}$$

La descomposición en fracciones simples, será por tanto:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{x+2} + \frac{E}{(x+2)^2}$$

Calcúlense los cinco coeficientes por ambos métodos.

NOTA. — Los antiguos tratados dedicaban gran extensión a este problema, un tanto ficticio, puesto que se basa en otro, prácticamente irresoluble en general. Aunque muy abreviado ya, todavía revela este capítulo la inerte fuerza de la tradición.

Por si acaso se presentan alguna vez raíces imaginarias dobles, basta utilizar este recurso:

$$\frac{1}{(x^2+b^2)^2} = \frac{(x^2+b^2) + (b^2-x^2)}{(x^2+b^2)^2} \cdot \frac{1}{2b^2}$$

que se descompone en dos fracciones; la 1.ª tiene como primitiva $\operatorname{arc\,tg} x/b$, salvo el coeficiente, y la 2.ª es la derivada de $\dfrac{x}{x^2+b^2}$.

EJERCICIO. — Partiendo de la derivada de $x/(x^2+b^2)^2$ aplíquese el método al caso de raíces triples; etc.

Si las raíces tienen parte real a, basta escribir $x-a$ en vez de x.

127. — Método directo de integración.

Aunque sobra con lo expuesto, veamos cómo se procedería por el método más rápido, en el caso más general posible. Descompuesto en factores el denominador, éstos son de dos tipos:

$$(x-a)^m \quad , \quad (x^2+px+q)^n \quad , \quad (p^2 < 4q) \qquad [1]$$

Para cada factor escribiremos una fracción simple del tipo:

$$\frac{A}{x-a} \, , \quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q}$$

respectivamente, como antes se hizo. Si todas las raíces son simples, es decir, $m=1$, $n=1$ la fracción dada, una vez separada su parte entera, es suma de fracciones de este tipo, como hemos visto, y la integración se hace mediante logaritmos y arcos tangentes.

Si hay raíces múltiples agreguemos a estas fracciones simples la derivada de una sola fracción complementaria, cuyo denominador es el producto de los factores [1] con exponentes disminuídos en 1, es decir: $(x-a)^{m-1}$, $(x^2+px+q)^{n-1}$, y como numerador pondremos un polinomio de grado inferior en 1 a dicho denominador.

EJEMPLO. — Si el denominador de la fracción dada es $x^3(x^2+1)^2$, el de la fracción complementaria será $x^2(x^2+1)$ y escribiremos la descomposición:

$$\frac{\frac{1}{2}x^2+2}{x^3(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\,\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2(x^2+1)}$$

Esta derivada se calcula considerando el cociente como producto de tres factores y vale:

$$(3ax^2+2bx+c)x^{-2}(x^2+1)^{-1} -$$
$$-2(ax^3+bx^2+cx+d)x^{-3}(x^2+1)^{-1} -$$
$$-2(ax^3+bx^2+cx+d)x^{-1}(x^2+1)^{-2}$$

Multiplicando ambos miembros por $x^3(x^2+1)^2$, el segundo se convierte en:

$$Ax^2(x^2+1)^2 + (Bx+C)x^3(x^2+1) +$$

$$+ (3ax^2+2bx+c)x(x^2+1) - (ax^3+bx^2+cx+d)(4x^2+2)$$

cuyos siete coeficientes se identifican con los del primer miembro, y el sistema de siete ecuaciones lineales determina las siete incógnitas: A, B, C, a, b, c, d:

$$A+B=0 \quad , \quad C-a=0 \quad , \quad 2A+B-2b=0 \quad ,$$

$$C+a-3c=0 \quad , \quad A-4d=½ \quad , \quad -c=0 \quad , \quad -2d=2$$

comenzando por las últimas, resulta sucesivamente:

$$d=-1 \ , \ c=0 \ , \ A=-{}^7/_2 \ , \ B={}^7/_2 \ , \quad a=0 \ , \ C=0 \ , \ b=-{}^7/_4 \ ;$$

y la integral buscada es, por consiguiente:

$$-{}^7/_2\, lx + {}^7/_4\, l(x^2+1) \quad \frac{7x^2+1}{4x^2\,(x^2+1)}$$

NOTA. — Que el número de coeficientes indeterminados es precisamente igual al número de ecuaciones, resulta observando que en la fracción complementaria hay tantos como el grado de su denominador; y a cada factor de los que juntos con éste forman el denominador de la fracción dada, corresponde un coeficiente indeterminado, si es de primer grado, y dos si es de segundo grado; luego el número total de coeficientes indeterminados es igual al grado del denominador, es decir, igual al número de ecuaciones.

Ahora bien: ¿siempre serán éstas compatibles? Basta ver que el determinante de coeficientes no es nulo. En efecto, si fuera nulo, el sistema homogéneo tendría solución no nula, es decir, tendríamos una descomposición de la nueva fracción cuyo numerador tiene coeficientes nulos, en suma de fracciones no nulas; pero al integrar tendríamos: suma de logaritmos y arcos tangentes, más una fracción complementaria, igual a una constante. Como la fracción es función uniforme y aquéllas no, deberían ser nulos los coeficientes de los logaritmos y arc tg., resultando la *fracción igual a una constante*, cosa imposible por tener el numerador menor grado que el denominador.

La idea de este método de integración es de Hermite; pero su demostración es mucho más complicada que la nuestra y sería inadecuada en este curso.

EJERCICIOS

Calcular la función primitiva de la fracción:

$$\frac{x^5+2x^3-5x^2+x-1}{x^2(x^3+1)^2}$$

Los coeficientes que deben resultar son:

$$A=1 \quad , \quad B=0 \quad , \quad C=-1 \quad , \quad a=-1, \quad b=0 \quad , \quad c=+1.$$

INTEGRACION DE FUNCIONES IRRACIONALES Y TRIGONOMETRICAS

128. —Integración de irracionales cuadráticos.

He aquí otro tipo de funciones que se integran elementalmente, a saber, aquellas de forma entera o fraccionaria en que figura una raíz cuadrada de una expresión de primero o segundo grado en x.

Si el radical que figura es $\sqrt{ax+b}$, hacemos el cambio de variable: $\sqrt{ax+b}=t$, de donde se despeja x, y la expresión se transforma en racional. Lo mismo vale para raíces de índice m.

NOTA. — Si bajo el signo integral figura una o varias veces una fracción $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ elevada a $^m/_n$, basta igualar esa fracción a t^n.

Si el radical es $\sqrt{ax^2+bx+c}$ distinguiremos estos casos:

1.° $a > o$. Sacado fuera del radical el primer coeficiente queda reducido a 1 y haremos el cambio de variable: $\sqrt{x^2+bx+c}=x+t$, de donde:

$$x^2+bx+c=x^2+2tx+t^2 \qquad [1]$$

y se puede despejar racionalmente x y dx haciéndose la integral racional en t.

2.° $a < o$. Sacado el valor absoluto del coeficiente fuera del radical, queda éste reducido a: $\sqrt{-x^2+bx+c}$.

Para que la integral tenga sentido el trinomio ha de ser *positivo* en el intervalo de integración, y como es negativo para valores muy grandes de x, por ser $-x^2$ el término de mayor grado, resulta que el trinomio cambia de signo y por tanto tiene raíces reales α y β. Es decir:

$$-x^2+bx+c=-(x-\alpha)(x-\beta)$$

haremos, pues, el cambio de variable:

$$\sqrt{-(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)t$$

de donde:

$$-x+\beta=(x-\alpha)t^2$$

y ya se puede despejar racionalmente x.

En resumen: La idea fundamental del método consiste en poner el radical igual a una expresión tal, que al elevar al cuadrado quede la x en el primer grado y, por tanto, se pueda despejar sin radicales.

NOTA. — Cuando es $c > o$, puede seguirse este otro artificio: ponemos

$$\sqrt{bx + c - x^2} = \sqrt{c} + xt \text{ de donde:}$$

$$bx - x^2 = 2\sqrt{c}\,xt + x^2.t^2$$

$$b - x = 2t\,\sqrt{c} + x\,t^2$$

de donde se despeja x, y sustituyendo x y dx en la expresión, ha desaparecido el radical.

EJEMPLO. — Calcular:

$$\int \sqrt{1 + x^2}\, dx.$$

Pondremos:

$$\sqrt{1 + x^2} = x + t\,, \qquad 1 = 2xt + t^2$$

$$x = \tfrac{1}{2}\,\frac{1 - t^2}{t}$$

y sustituyendo $t = \sqrt{1 + x^2} - x$ sale, puesto que

$$1/t = \sqrt{1 + x^2} + x;$$

$$\int \sqrt{1 + x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\left[x\sqrt{1 + x^2} - l\left[\sqrt{1 + x^2} - x\right]\right]$$

NOTA. — En el ejemplo anterior será más conveniente poner

$$x = Sh\,t;\ \ dx = Ch\,t.dt;\ \ \sqrt{1 + x^2} = Ch\,t$$

y la expresión se transforma así:

$$\int \sqrt{1 + x^2}\, dx = \int Ch^2\,t.dt = \tfrac{1}{2}\int (1 + Ch\,2t)\,dt = \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}Sh\,2t$$

Este método es válido para las expresiones donde figure

$\sqrt{1 + x^2}$ o bien $\sqrt{x^2 - 1}$, poniendo en este caso $x = Ch\,t$

129. — Integración de funciones trigonométricas.

Toda función racional de $\operatorname{sen} x$, y $\cos x$ se reduce a racional introduciendo la variable:

$$t = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x \qquad \therefore \qquad x = 2 \operatorname{arc\,tg} t.$$

En efecto:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x}{\cos^2 \frac{1}{2}x + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}x - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x}{\cos^2 \frac{1}{2}x + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

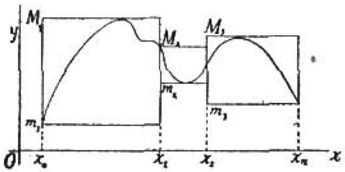
Lección 32

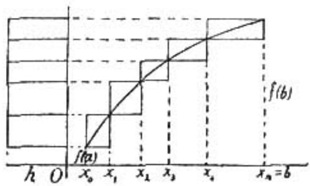
INTEGRALES DEFINIDAS

130. — El problema del área y el concepto de integral.

Tratemos de definir el área encerrada por la curva $f(x)$, el eje de abscisas y las dos ordenadas en los puntos a y b. Dividiendo el intervalo (a, b) por puntos intermedios en intervalos

$$(x_0, x_1),\ (x_1, x_2)\ (x_2, x_3) \ldots . (x_{n-1}, x_n)$$





y levantando las ordenadas de dichos puntos, tenemos dividida la superficie en fajas que podrán tener o no la misma anchura.

Si trazamos horizontales por los puntos de altura máxima y mínima de la curva en cada faja, habremos formado una serie de rectángulos. Llamaremos S_i a la suma de los rectángulos cuya ordenada es máxima:

$$S_i = (x_1 - x_0)\, M_1 + (x_2 - x_1)\, M_2 + \ldots . + (x_n - x_{n-1})\, M_n.$$

y s_i a la suma de los rectángulos de ordenada mínima:

$$s_i = (x_1 - x_0)\, m_1 + (x_2 - x_1)\, m_2 + \ldots . + (x_n - x_{n-1})\, m_n.$$

El área del recinto será menor que S_i y mayor que s_i. Si aumentamos el número de intervalos y por consiguiente el de fajas, en cada una disminuye la ordenada M y aumenta la m, o a lo sumo permanecen iguales, luego las s_i decrecen, Para probar la convergencia de estas sucesiones monótonas (Lecc. 3), basta ver que las diferencias $S_i - s_i$ llegan a ser arbitrariamente pequeñas.

Tal sucede si $f(x)$ es monótona, p. ej. creciente (fig. 2); pues si el mayor de los intervalos es h, transportando en columna los rectángulos que componen $S_i - s_i$, es:

$$S_i - s_i \leqq h\,[f(b) - f(a)].$$

Si aumentamos indefinidamente el número de fajas, de modo que $h \to o$, y siendo $f(b) - f(a)$ constante, la diferencia $S_i - s_i$ llega a ser tan pequeña como se quiera; lo mismo sucede para la curva total, si se descompone en un número finito de arcos crecientes o decrecientes, luego:

$$\text{lím. } S_i = \text{lím. } s_i = S.$$

Este valor límite es el que se toma como medida del **área del recinto.**

Si consideramos ahora la suma

$$\Sigma f(x)\Delta x = (x_1 - x_0) f(\xi_1) + \ldots\ldots + (x_n - x_{n-1})\, f(\xi_n)$$

formada multiplicando cada intervalo por una ordenada cualquiera del mismo, será:

$$s_i \leqq \Sigma f(x)\Delta x \leqq S_i$$

luego también tiene Σ el mismo límite.

Este límite común de todas las Σ, entre las cuales están las S_i y las s_i, se llama integral definida de $f(x)$ y se representa así:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \text{lím. } \Sigma f(x)\Delta x$$

Como se ve en esta definición, la integral no es sino límite de una suma; y se presenta, no sólo en los problemas de áreas, sino también en todo límite de sumas cuyos sumandos tienden a 0 al crecer su número infinitamente. Daremos, pues, una definición general:

Integral de $f(x)$ entre a y b es el límite de la suma de los productos obtenidos multiplicando cada uno de los intervalos parciales en que el (a, b) se divide, por uno cualquiera de los valores de la función en el mismo, al tender a 0 la amplitud de todos.

Hemos probado que toda función monótona acotada es integrable, y lo mismo si dividido (a, b) en número finito de intervalos es monótona en cada uno, aunque sea discontinua; pero hemos visto funciones continuas, como $x \,.\, \text{sen}\, \pi/x$, que no cumplen tal condición. Sin embargo, *toda función continua es integrable.* (V. *Complementos*)

Propiedades. — Si $f(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$, cada suma s_i, S_i, se desdobla en dos; y según (22) resulta:

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\, dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \qquad [1]$$

Análogamente, según (23): $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ [2]

Es, pues, legítimo, sacar fuera del signo, como coeficiente, todo factor *constante*; si el integrando cambia de signo, también la integral.

De (10) resulta asimismo la ley de monotonía:

Si $f(x) < g(x)$ es $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ [3]

Si $a < c < b$ y cada suma s_i S_i se desdobla en dos sobre (a, c) y sobre (c, b), el límite de la primera es la suma de los límites de estas dos; por tanto, para una misma función $f(x)$ es:

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b \qquad \text{o sea:} \qquad \int_c^b = \int_a^b - \int_a^c \qquad [4]$$

Finalmente, se hace este convenio: $\int_b^a = -\int_a^b$ [5]

131. – Teorema del valor medio y media aritmética de una función.

Sean m y M los valores mínimo y máximo de $f(x)$ en el intervalo (a, b); puesto que el área calculada está comprendida entre los rectángulos: $(b - a)m$ y $(b - a)M$, será igual a un número intermedio $(b - a)\mu$, siendo: $m \leq \mu \leq M$, es decir:

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)\mu = (b - a)f(\xi)$$

pues si $f(x)$ es *continua*, alcanza esé valor μ (13, II) en algún punto intermedio; aunque sea discontinua, vale la expresión $(b - a)\mu$.

Esta es la fórmula *del valor medio* del cálculo integral. Geométricamente expresa que el área limitada por la curva es igual a la de un rectángulo de base $b - a$ y cuya altura es una cierta ordenada intermedia.

Si dividimos (a, b) en n partes iguales a h y tomamos las n ordenadas: $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la función $f(x)$, su media aritmética es:

$$\frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} = \frac{y_1h + y_2h + \ldots + y_nh}{nh}$$

El denominador es $nh = b - a$. El límite del numerador para $n \to \infty$ es la integral de $f(x)$. Por tanto, el límite de la media aritmética de las n ordenadas al crecer n es:

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a}$$

Este número μ es, pues, el mismo que nos daba el teorema del **valor medio, y es legítimo llamarlo** ***media aritmética de la función*** en el intervalo (a, b).

Generalización. — Si $g(x) \gtreqless 0$, $m \leq f(x) \leq M$ existe un número μ intermedio entre m y M tal que:

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int g(x)\,dx$$

Basta observar, comparando los integrandos, que es:

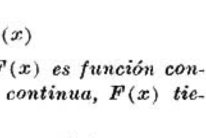
$$\int m \,.\, g(x)\,dx \leq \int f(x)\,g(x)\,dx \leq \int M g(x)\,dx$$

luego el cociente de la integral de $f \,.\, g$ por la integral de g es un número intermedio entre m y M, suponiendo las integrales sobre un mismo intervalo (a, b).

132. — El área como función primitiva.

Sea una curva, representación de una función $f(x)$. El área limitada por esta curva, el eje de abscisas, una ordenada fija $f(a)$ y la ordenada variable $f(x)$ es una función $F(x)$, nula para $x = a$. Esta función es *continua*, aunque $f(x)$ *sea discontinua*, pues

$$\triangle F(x) = F(x + h) - F(x) = h\mu$$



llamando μ al valor medio obtenido en (131). Si $f(x)$ es *continua*, hay un punto ξ donde

$$f(\xi) = \mu, \quad \text{luego} \qquad f(\xi) = \frac{\Delta F(x)}{h}$$

Si $h \to 0$, por definición (12) se verifica:

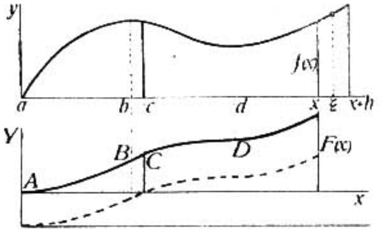
$$f(\xi) \to f(x), \quad \text{luego } F'(x) = f(x)$$

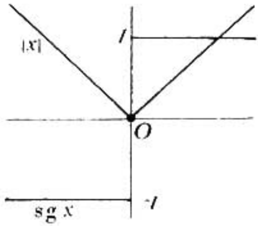
Obtenemos así dos resultados: *La integral $F(x)$ es función continua, aunque $f(x)$ sea discontinua. Si $f(x)$ es continua, $F(x)$ tiene como derivada $f(x)$.*

O sea: Si $f(x)$ es continua, $F(x)$ es función *primitiva* de $f(x)$.

Si sobre un par de ejes llevamos para cada valor de x, sobre la ordenada correspondiente, el valor $F(x)$ del área de la curva $f(x)$, habiendo adoptado una unidad de longitud para representar la unidad de áreas, obtenemos una curva que se llama *curva integral* de la dada.

EJEMPLO. — Veamos la marcha de la curva integral. Para el valor $x = a$, es $F(a) = 0$ y obtenemos el punto A. Cuando x aumenta, el área crece y la curva va creciendo; para tener una idea de su marcha, observemos que $F'(x) = f(x)$; luego $F''(x) = f'(x)$; los valores de $f'(x)$ los conocemos pues son las pendientes de las tangentes en los puntos de la $f(x)$. Así entre a y b es $f'(x)$ positiva, luego también lo es $F''(x)$, es decir, la curva integral entre a y b es convexa con respecto al eje x. Entre b y d, $f'(x) = F''(x)$ es negativa y por tanto la curva integral, $y = F(x)$ será cóncava y así sucesivamente. En el punto D tendríamos un punto de inflexión, pues en él se tiene: $F''(x) = 0$.





Intégrese la función discontinua $\operatorname{sg} x$ que ha sido definida (16, Ej. 3) así: para $x < 0$ es $y = -1$; para $x > 0$ es $y = +1$. Salta a la vista que elegido $a = 0$ resulta la función *continua* $y = |x|$. El punto de discontinuidad $x = 0$ del integrando es anguloso en la integral (fig. 2.ª). La derivada de $|x|$, salvo en el origen, es $\operatorname{sg} x$.

133. — Paso de la integral indefinida a la definida.

Si en lugar de empezar a calcular el área en la ordenada correspondiente al punto a, comenzamos por ejemplo en el punto c, para ese punto, $F(x)$ valdrá 0 y para el valor $x = 0$ tendrá $F(a)$ un cierto valor $-C$, que es el área comprendida entre la curva, el eje de las x y las ordenadas del origen y del punto c. Como el punto desde donde se empieza a medir el área puede ser cualquiera habrá infinitas curvas integrales que diferirán en un cierto valor constante arbitrario C.

Cuando se fija el extremo a del intervalo, pero se deja variable el extremo x, tenemos la integral $\int_a^x$ que se llama *definida inferiormente*. Cuando se dejan indeterminados los dos extremos se escribe simplemente $\int f(x)dx$ y se llama *integral indefinida*.

Si queremos calcular el valor del área en el intervalo (a, b) comenzaremos por encontrar una función primitiva cualquiera $\Phi(x)$ de $f(x)$, es decir, mediante artificios convenientes encontramos una función tal que $\Phi'(x) = f(x)$. Ahora bien, el área buscada, a partir de a, es una función primitiva de $f(x)$, luego ambas funciones primitivas difieren en una constante ,es decir:

$$\int_a^x f(x)dx = \Phi(x) + c.$$

Para calcular c hagamos $x = a$ y como el área es nula, resulta:

$$c = -\Phi(a)$$

por tanto: Area $= \int_a^x f(x)dx = \Phi(x) - \Phi(a)$

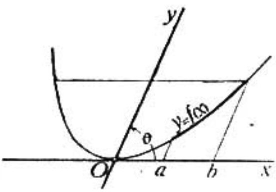
Es decir: ***para calcular el área o sea la integral definida se sustituye en una función primitiva cualquiera el límite superior y luego el inferior y se resta este resultado de aquél.***

Esta *fórmula* de BARROW es el fundamento del Cálculo integral.

EJEMPLO. — Sea la parábola $x^2 = 2py$.

Para calcular el área limitada por la parábola, el eje x y la ordenada correspondiente a $x = a$, formemos la primitiva de $y = x^2 : 2p$, que es $x^3 : 6p$; para $x = a$ vale $a^3 : 6p$ y para $x = 0$, vale O, luego $A = a^3 : 6p$.

Para $x = a$, $y = a^2 : 2p$, el rectángulo $0\ a\ b\ c$ tiene por área: $Ar = a^3 : 2p$; es decir, el área del segmento parabólico es la tercera parte del área del rectángulo que lo comprende.



NOTA. — Si la función $f(x)$ se representa en ejes oblicuos de ángulo θ, la integral ya no representa el área; para obtener el área de cada paralelógramo habrá que multiplicar $f(x)\Delta x$ por sen θ, y por tanto

$$A = \text{sen}\,\theta \int_a^b f(x)\,dx$$

EJERCICIOS

1. — Variar el origen a de la integral definida inferiormente, equivale a sumar una constante; pero a veces no toma ésta todos los valores reales. Así, la integral en (a, x) de $2x$ es x^2 más *constante negativa*, cualquiera que sea a.

Revise el lector las integrales de lecciones anteriores y vea qué limitaciones tiene la constante.

2. — ¿Qué significado geométrico tiene la integral de $|f(x)|$?

LECCIÓN 33

AREAS Y VOLUMENES

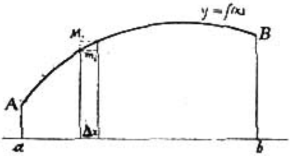
134. — Volumen de los cuerpos de revolución.

Sea $y = f(x)$ la función que representa la sección meridiana de una superficie de revolución respecto del eje x.

Al girar en torno de ese eje el trapezoide que tal curva limita, engendra un cuerpo *redondo* o *cuerpo de revolución*.

Dividido el intervalo ab en n partes, el trapezoide está contenido en la suma de rectángulos de bases Δx y alturas M_i; y a su vez contiene los de alturas m_i.

Estos rectángulos, al girar la meridiana, engendran cilindros. El volumen buscado será el límite común de la suma de los volúmenes engendrados por los rectángulos de ordenadas m_i o M_i o cualquier ordenada intermedia.



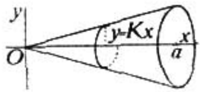
El volumen del cilindro de ordenada $y = f(x)$ es igual a la base por la altura o sea: $\pi y^2 \Delta x$, luego el volumen del cuerpo de revolución es el límite de la suma de éstos, o sea

$$\text{Vol} = \pi \int_a^b y^2 dx$$

EJEMPLO 1.° — Calcular el volumen del cono.

Aplicando la fórmula anterior teniendo presente que $f(x)$ en este caso es: Kx, tenemos:

$$\text{Vol.} = \pi \int_0^a K^2 x^2 \, dx = \tfrac{1}{3} \pi K^2 a^3$$



Siendo $K = r : a$ (coeficiente angular) se tiene:

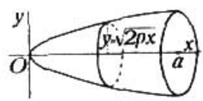
Vol. del cono $= \tfrac{1}{3} \pi r^2 a$, es decir, la tercera parte del cilindro de igual base y altura.

EJEMPLO 2.° — Volumen de un paraboloide.

Sea su meridiana: $y^2 = 2px$.

Aplicando la misma fórmula:

$$V = \pi \int_0^a 2p \, x \, d\,x = \pi p x^2 \Big|_0^a = p \, \pi \, a^2$$



En cambio, el cilindro de igual base y altura tiene el volumen: $\pi y^2 a = 2 \pi p a^2$, es decir, el paraboloide tiene como volumen la mitad del cilindro que lo comprende.

EJEMPLO 3.° — Si tuviéramos un elipsoide de revolución:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

la meridiana tendría por ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \therefore \ y = b/a\sqrt{a^2 - x^2}$$

Aplicando la fórmula y separando el factor constante $2\pi\, b^2 : a^2$, calculemos:

$$\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = a^3 - a^3 : 3 = 2a^3 : 3$$

$$V = 4/3\ \pi\, a\, b^2.$$

Si tuviéramos $a = b = r$, resultaría el volumen de la esfera: $^4/_3\ \pi\, r^3$.

135. — Volúmenes de cuerpos cualesquiera.

Se podrá calcular por una integral simple el volumen limitado por una superficie, siempre que se pueda calcular el área de cualquier sección paralela a uno de los planos coordenados.

En efecto; trazando un sistema de planos paralelos, por ejemplo, al plano yz, si sumamos los cilindros que tienen como bases las secciones de la superficie y como alturas las distancias entre cada dos planos consecutivos, el límite de esa suma es el volumen; como el área es función de la distancia x, si es: Area $= \alpha(x)$, resulta:

$$\text{Volumen} = \text{lím.}\ \Sigma\, \alpha(x)\,\Delta x = \int_a^b \alpha(x)\,dx.$$

EJEMPLO 1.° — Calcular el volumen de un elipsoide de ejes desiguales cuya ecuación es la del ejemplo anterior, con denominadores a^2, b^2, c^2.

El área de la elipse sección con el plano yz es: $\pi\, b\, c$. Las secciones con planos paralelos al yz dan elipses semejantes a la anterior, cuyos semiejes son:

$$\frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{a}, \quad \frac{c\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

luego el área de cualquier sección paralela al plano yz en función de su distancia x al mismo, es

$$\frac{\pi\, bc(a^2 - x^2)}{a^2}$$

Aplicando la fórmula general deducida en el número anterior, se tiene:

$$\text{Volumen} = 4/3\ \pi\, a\, b\, c.$$

EJEMPLO 2.° — Calcular el volumen del cuerpo limitado por un hiperboloide de una hoja *y dos planos perpendiculares al eje, a las distancias* $z = \pm\, c$.

Las secciones con planos perpendiculares al eje dan en el hiperboloide de una hoja elipses semejantes. El área de una de ellas es: $\pi\, xy$. Sacando x e y de las ecuaciones de las hipérbolas, secciones del hiperboloide con los planos xz e yz e integrando entre los límites $z = 0$ y $z = c$ y duplicando, se tiene:

$$V = 4/3\ \pi\, abc.$$

En la misma forma se podría calcular el volumen de un segmento de hiperboloide de dos hojas o de un paraboloide.

136. — Area de las superficies de revolución.

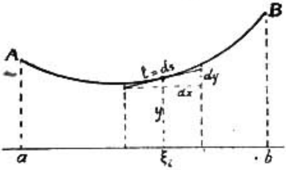
Consideremos una sección meridiana de la superficie de revolución entre los límites $x = a$, $x = b$. Se trata de calcular el área de la superficie que engendra ese arco alrededor del eje x.

Dividamos el intervalo ab en un cierto número de partes y tracemos tangentes a la curva en los puntos de abscisa media.

La superficie engendrada por cada lado es un tronco de cono de área: $2\pi yl$, siendo $2\pi y$ la longitud de la circunferencia media y l la apotema, cuya expresión es $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, luego el límite de esta suma, que se llama *área de la superficie de revolución*, es:

$$2\pi \int_a^b y\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,.\,dx$$

$$\text{o bien: } 2\pi \int_a^b y\,.\,ds,$$



representando abreviadamente por ds el infinitésimo $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ cuyo significado geométrico es el trozo de tangente limitado por las ordenadas que distan dx.

Ejemplo 1.° — Calcular el área de una esfera.

Está engendrada por una semicircunferencia, de ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

de donde:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Aplicando la fórmula anterior, resulta la conocida expresión $4\pi r^2$.

Ejemplo 2.° — Area de un paraboloide de revolución: Sea la ecuación de la meridiana

$$y^2 = 2px, \quad \text{de donde: } y = \sqrt{2px}.$$

Aplicando la fórmula [1] se tiene el resultado siguiente:

$$\text{Area} = 2/3\pi\sqrt{p}[(2a + p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}]$$

EJERCICIOS

1. — Calcular el área y el volumen del cuerpo engendrado por la revolución de la cicloide alrededor de su recta base. ($A = {}^{32}/_{3}\,\pi r^2$, $V = 5\pi^2 a^3$).

2. — Deducir sin cálculo el área de la elipse del área del círculo; y el volumen del elipsoide reduciéndolo al de la esfera.

RECTIFICACION DE LAS CURVAS PLANAS Y CURVATURA

137. — Rectificación de curvas planas.

DEFINICIÓN. — Se llama *longitud* de un arco al límite de la longitud de una poligonal inscripta en ella o circunscripta a ella, *cuando sus lados tienden a cero, al crecer infinitamente el número de* éstos.

Sea una curva representada por una función $f(x)$. La longitud de cada segmento de tangente correspondiente a un intervalo dx, es como hemos visto

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

luego el límite de la suma de estos segmentos (aunque no forman poligonal) es

$$\int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \sqrt{1 + y'^2}dx$$

extendida al intervalo en que está definido el arco.

NOTA. — Queda justificada la notación ds, pues vemos que es la diferencial del arco s.

No se confundan los tres infinitésimos equivalentes:

$$AB = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad , \quad \Delta s \quad , \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

El primero es la cuerda, el segundo el arco, el tercero es el trozo de tangente limitado por las ordenadas de los puntos x, $x + dx$. Aunque son diferentes, pueden sustituirse en toda cuestión de límites de cocientes y la integral de cualquiera de los tres es s. En efecto, tanto la suma de las cuerdas como de las tangentes tiene el límite s y claro es que también la suma de arcos vale justamente s.

Para aquilatar el concepto de longitud de curva, véase el capítulo: *Complementos de Cálculo integral.*

EJEMPLO. — Rectificar un arco de la parábola: $x^2 = 2py$.

La fórmula que da la longitud es:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx = \int_0^a \sqrt{1 + (x/p)^2} \cdot dx$$

integral ya calculada en (128) y sustituyendo los límites resulta:

$$\tfrac{1}{2}a/p\sqrt{p^2 + a^2} + 1/2p \cdot l\,\frac{\sqrt{p^2 + a^2} + a}{p}$$

Ejemplo 2.° — Rectifíquese la curva catenaria, cuya ecuación es

$$y = \tfrac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$$

Aplicando la fórmula resulta:

$$y' = \tfrac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) \qquad 1 + y'^2 = \tfrac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})$$

que es un cuadrado perfecto, luego

$$\int \tfrac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})\,dx = \tfrac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$$

expresión que limitada entre las abscisas extremas da la longitud del arco.

Utilizando las funciones hiperbólicas, tenemos:

$$y = Ch\,x \qquad y' = Sh\,x \qquad 1 + y'^2 = Ch^2\,x$$

luego

$$\int \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int Ch\,x\,.\,dx = Sh\,x$$

138. — Curvatura de curvas planas.

Hemos definido en (86) la *curvatura* de una circunferencia como número recíproco de su radio y extendido el concepto a cualquier curva, sustituyéndola por su círculo osculador; pero la curvatura se puede definir más directamente como *límite del cociente del ángulo de dos tangentes al arco correspondiente*, cuando éste tiende a 0. Llamado τ a la inclinación de la tangente respecto del eje x, o sea $\tau = \mathrm{arctg}\, y'$, el ángulo que forma con ella otra tangente es $\Delta\tau$ y la curvatura se define así:

$$C = \lim \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{d\tau}{ds}$$

Esta definición concuerda con la dada para la circunferencia, por ser en ella

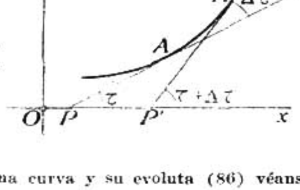
$$\Delta s = R\Delta\tau \qquad \text{luego: } C = 1/R$$

y veamos que también concuerda para toda curva. En efecto:

$$ds = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx \quad ; \quad d\tau = \frac{y''\,.\,dx}{1 + y'^2}$$

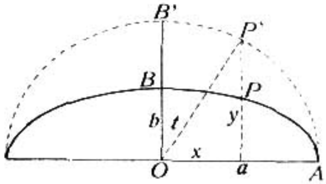
y al dividir ds por $d\tau$ resulta la expresión ya conocida del radio del círculo osculador, es decir:

$$R = \frac{ds}{d\tau} = \frac{1}{C}$$



Para el estudio de las relaciones entre una curva y su evoluta (86) véanse los *Complementos de Cálculo integral*.

139. — Rectificación de la elipse.



Sea la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Podemos hacer:

$$x = a \operatorname{sen} t\,; \qquad y = b \cos t$$

llamando k a la excentricidad, se tiene:

$$[1] \qquad k = c/a = \sqrt{a^2 - b^2}/a$$

El valor: $ds^2 = dx^2 + dy^2$ se calcula así:

$$dx = a \cos t\,.\,dt \qquad dy = -b \operatorname{sen} t\,.\,dt,$$

$$ds^2 = [a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t]\, dt^2.$$

De [1] sacamos: $\quad a^2 - b^2 = k^2 . a^2 \quad b^2 = a^2(1 - k^2).$

Reemplazando en [2]:

$$ds^2 = [a^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t - a^2 k^2 \operatorname{sen}^2 t]\, dt^2 = a^2\, [1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t]\, dt^2.$$

$$[3] \qquad s = a \int \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}\,.\,dt$$

integral que da la longitud de un arco de elipse.

140. — Integrales elípticas de primera y segunda especie.

Las integrales del tipo [3] se llaman *elípticas* de segunda especie y en Análisis se demuestra que no existe ninguna combinación de funciones elementales que sea primitiva de la función $\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}$, pero la función primitiva existe y se puede calcular numérica y gráficamente.

Hay otras integrales elípticas de primera especie cuyo integrando es del tipo:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}}$$

Como las integrales elípticas se presentan muy a menudo en los *problemas de la técnica, se han construído* tablas que dan el valor de estas integrales, para los diferentes valores de k y de t.

Como es $k < 1$, si llamamos α al arco cuyo seno es k, es decir, si ponemos $k = \operatorname{sen} \alpha$, la tabla da los valores de la integral al variar α y t. (Véase el apéndice).

EJEMPLO 1.° — Sea la elipse de semiejes $a = 2$, $b = 1$ $\therefore$ $c = \sqrt{3}$.

Su excentricidad es $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, luego $\alpha = 60°$.

Para rectificar el arco limitado por las abscisas $x = 0$, $x = 1$, calcularemos t por la fórmula

$$1 = 2 \operatorname{sen} t \qquad \text{de donde: } t = 30°.$$

El valor dado por la tabla es: 0,506, luego la longitud del arco es 2. 0,506 = 1,012.

La longitud del cuadrante se obtendrá para $t = 90°$; la tabla da 1,211 luego la longitud del cuadrante es 2,422.

EJEMPLO 2.° — Rectifíquese la elipse intersección de un cilindro y un plano:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \qquad 4z - 3y = 1.$$

Adoptando y como variable independiente,

$$ds = \sqrt{1 + x'^2 + z'^2}\, dy$$

Diferenciando las dos ecuaciones, se despejan x', z', y sustituyendo en la expresión del arco, resulta:

$$ds = \sqrt{25 : (16 - y^2)}\, dy \therefore s = 5 \operatorname{arc\,sen} \tfrac{1}{4} y$$

La posibilidad de efectuar la integración por funciones elementales indica que la elipse es una circunferencia, lo que puede observarse directamente en la figura que representa la intersección, comparando los semiejes de la curva que resultan ambos iguales a 5.

Así la fórmula obtenida da para el arco ($y_0 = 0$, $y_1 = 4$) $s = 5\,\pi/2$ que es la longitud del cuadrante.

ECUACIÓN DEL PÉNDULO SIMPLE.

Si es a el ángulo de desviación, la duración de la oscilación está expresada por la integral elíptica:

$$T = \sqrt{l/g} \int_{-a}^{a} \frac{dt}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t}}.$$

si a es bastante pequeño para que puedan equipararse arcos y senos, resulta una integral elemental, que conduce a la fórmula $T = 2\pi \sqrt{l/g}$.

EJERCICIOS

1. — Rectificar la sinusoide, gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$.
2. — Cuadratura del óvalo definido por la ecuación $y^2 = \cos 2x$.
3. — Rectificar la curva de Viviani ($k = 1 : \sqrt{2}$).
4. — Expresar como integral elíptica de 1.ª especie la integral de $1 : \sqrt{\cos a - \cos x}$. (Basta sustituir: $t = \cos \frac{1}{2} x$, y es $k = 1 : \cos \frac{1}{2} a$).
5. — Idem la integral de $1 : \sqrt{\cos 2x}$.
6. — Acotar el error de la fórmula aproximada del péndulo.

Lección 35

INTEGRACION NUMERICA

141. — Fórmula de Simpson - Acotación del error.

Para calcular una integral cuando no es fácil obtener la función primitiva, o aun obtenida resulta complicada, hay diversos métodos de cálculo aproximado, numérico, gráfico y mecánico, que exponemos a continuación.

Puesto que la integral representa el área limitada por la curva y el eje x en el intervalo (a, b) ocurre dividir éste en partes iguales y tomar como valor aproximado del área la suma de los trapecios inscritos o de los circunscritos, limitados por las ordenadas $y_0, y_1, y_2 \ldots y_{2n}$ en los puntos intermedios. Pero como estos métodos dan aproximación muy insuficiente, solo indicaremos la regla de Simpson que da resultados muy satisfactorios.

Consideremos las tres ordenadas y_0, y_1, y_2, de la función y elegida la intermedia como eje y, sea el desarrollo de la función:

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

cuya integral desde $-h$ a $+h$ es:

$$2ah + {}^2/_3\, ch^3 + {}^2/_5\, ch^5 + \ldots$$

Si la curva fuese parábola de segundo grado, es decir, si el desarrollo solo contuviese hasta el término de segundo grado, la expresión del área sería exactamente

$$S = h(6a + 2ch^2) : 3 = h(y_0 + 4y_1 + y_2) : 3$$

pues para $x = -h$ es: $\quad y_0 = a - bh + ch^2$

„ „ $x = 0$ „ $\quad y_1 = a$

„ „ $x = h$ „ $\quad y_2 = a + bh + ch^2$

Cualquiera que sea la curva, esta fórmula dará un valor que coincide con la expresión del área en tres términos y el error es del orden de h^5.

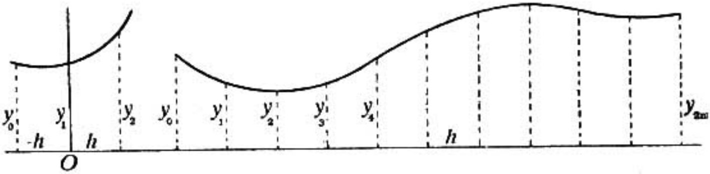
Si ahora consideramos análogamente los intervalos y_2, y_4, y_6, $\ldots$, y_{2n} y al sumar sacamos $h/3$ factor común, resulta la suma:

$$(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

Las ordenadas extremas, cuya suma llamaremos E, figuran una sola vez; cuatro veces las impares intermedias cuya suma designaremos por I, y dos veces las pares intermedias, que llamaremos P.

Resulta así la fórmula de Simpson:

$$\text{Area} \sim h(E + 4I + 2P) : 3 \qquad [1]$$



EJEMPLO. — Para aplicar la fórmula de Simpson a la integral entre 1 y 2 de $1/x$, adoptamos $h = 0{,}1$ y calculados los recíprocos de 1,1; 1,2; 1,3; ....; 2 con la regla de cálculo, resulta:

$$E = 1{,}5 \qquad P = 2{,}71 \qquad I = 3{,}42$$

luego el área vale aproximadamente $S = 0{,}68$; valor exacto hasta las centésimas, pues la integral es $l2 = 0{,}69\ldots.$

Acotación del error. — Si el valor absoluto de $f^{IV}(x)$ se conserva inferior a M en el intervalo $(-h, +h)$ el resto despreciado es menor que $x^4M/4!$ y su integral inferior a $x^5M/5!$, luego entre $-h$ y $+h$ resulta

$$\text{error} < h^5M:60.$$

142. — Integración por desarrollos en serie.

Si la función $f(x)$ admite un desarrollo en serie de potencias

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots. + a_nx^n + \ldots.$$

una función primitiva resulta como se vió en el párrafo (101) integrando cada término, y el intervalo de convergencia es el mismo de la serie dada. Al efectuar la integración por este método debe cuidarse, ante todo, de no aplicarlo más allá del intervalo de convergencia, pues esto conduciría a absurdos. Además es necesario calcular el grado de aproximación alcanzado al tomar algunos términos, pues bien puede suceder que los infinitos despreciados (aun siendo insignificantes los primeros que siguen a los tomados) tengan suma considerable.

El desarrollo de la serie de la función puede hacerse combinando las propiedades ya expuestas en la lección 23, esto es, operando por suma, resta, multiplicación, etc., con las series que representan las funciones elementales que componen $f(x)$, o bien con la fórmula de Mac-Laurin. Si no hay desarrollo según potencias de x o el intervalo de convergencia no comprende al intervalo dado, convendrá trasladar el origen poniendo $x = x' + \alpha$, o bien desarrollar en fórmula de Taylor, según las potencias de $x - \alpha$.

EJEMPLO. — Una integral fundamental en la teoría de los errores es: $\int e^{-x^2}dx$.

Como la función exponencial admite desarrollo convergente para todo valor de x

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots.$$

resulta para la integral entre o y x:

$$\frac{x}{1} - \frac{1}{1!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!}\frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Si tomamos solamente los dos primeros términos, el error cometido es en valor absoluto menor que $x^5/10$ si es $x^2 < 10/3$, por ser alternada la serie

En general: si es $x^2 < m$ al tomar un número de términos $n \gtreqless m$, el error es menor que el primero siguiente. (V. *Complementos*), o sea:

$$\frac{1}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

143. — Método de integración aproximada de Gauss.

La fórmula de Simpson expresa la integral mediante las tres ordenadas y_0, y_1, y_2.

Ahora bien, vamos a ver que es posible elegir las tres ordenadas no equidistantes de modo que el área venga expresada más exactamente por una expresión también lineal, de la forma

$$S = R_0\, y_0 + R_1\, y_1 + R_2\, y_2.$$

Adoptando como origen el punto medio del intervalo y tomando como unidad a la semi-amplitud del mismo, hemos obtenido:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots. \qquad [3]$$

y su integral entre -1 y $+1$ es:

$$\frac{2a_0}{1} + \frac{2a_2}{3} + \frac{2a_4}{5} + \ldots.$$

Ensayemos ahora la determinación de tres valores x_0, x_1, x_2 y tres coeficientes R_0, R_1, R_2, tales que la expresión $R_0\, y_0 + R_1\, y_1 + R_2\, y_2$ coincida con este desarrollo, o sea:

$$\begin{aligned} &R_0(a_0 + a_1\, x_0 + a_2\, x_0^2 + a_3\, x_0^3 + \ldots) + \\ &+ R_1(a_0 + a_1\, x_1 + a_2\, x_1^2 + a_3\, x_1^3 + \ldots) + \\ &+ R_2(a_0 + a_1\, x_2 + a_2\, x_2^2 + a_3\, x_2^3 + \ldots) = \\ &= \frac{2a_0}{1} + \frac{2a_2}{3} + \frac{2a_4}{5} + \ldots \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de a_0, a_1, a_2, ... resultan las condiciones:

$$\begin{aligned}
&R_0 \quad + R_1 \quad + R_2 \quad = 2 \\
&R_0 x_0 + R_1 x_1 + R_2 x_2 = 0 \\
&R_0 x_0^2 + R_1 x_1^2 + R_2 x_2^2 = \tfrac{2}{3} \\
&R_0 x_0^3 + R_1 x_1^3 + R_2 x_2^3 = 0 \\
&R_0 x_0^4 + R_1 x_1^4 + R_2 x_2^4 = \tfrac{2}{5} \\
&R_0 x_0^5 + R_1 x_1^5 + R_2 x_2^5 = 0
\end{aligned}$$

de donde se despeja:

$$\begin{aligned}
&R_0 = 5/9 \quad , \quad x_0 = -\sqrt{3/5} = -0{,}774\ldots \\
&R_1 = 8/9 \quad , \quad x_1 = 0. \\
&R_2 = 5/9 \quad , \quad x_2 = \sqrt{3/5} = 0{,}774\ldots
\end{aligned}$$

si la semiamplitud del intervalo es h, basta multiplicar por h las abscisas y resulta:

Adoptando como valor del área la expresión:

$$h(5y_0 + 8y_1 + 5y_2) : 9$$

siendo y_0, y_1, y_2 las ordenadas en los puntos de abscisas:

$$-h\sqrt{3/5} \quad , \quad 0 \quad , \quad +h\sqrt{3/5}$$

resulta un valor del área cuyo error es del orden de h^7.

Comparada esta fórmula de Gauss con la de Simpson se ve que el mayor trabajo del cálculo queda compensado con la mejor aproximación obtenida.

Así, por ejemplo, si se desea calcular con solo tres datos la temperatura media en un día (es decir, la integral de la temperatura, dividida por el intervalo), deberían tomarse estas tres temperaturas a las horas siguientes:

$$2^h\ 24^m \text{ a/m}, \quad 12^h \text{ m}, \quad 9^h\ 18^m \text{ p/m}.$$

Generalización. — El lector puede repetir sin dificultad el cálculo para n ordenadas. Así p. ej. para $n = 4$, la expresión del área es

$$S \sim R_0 y_0 + R_1 y_1 + R_2 y_2 + R_3 y_3$$

siendo:

$$R_0 = R_3 = 0{,}1739 \qquad R_1 = R_2 = 0{,}3261$$

$$-x_0 = +x_3 = 0{,}8611 \qquad -x_1 = +x_2 = 0{,}3400$$

EJERCICIOS

1. — Calcular la integral desde 1 hasta 2, 3, 4, ... de la expresión $e^x . dx/x$. Utilícese la fórmula de Simpson y la de Gauss.

2. — Dedúzcanse los coeficientes de Gauss para $n = 4$, comprobando los valores indicados en el texto.

3. — Expresar las integrales elípticas de 1.ª y 2.ª especie por series de potencias del parámetro k y obtener así expresiones con error menor que 0,001 para $k = \text{sen } 2°$.

Comprobar los resultados con la 1.ª fila de las tablas finales.

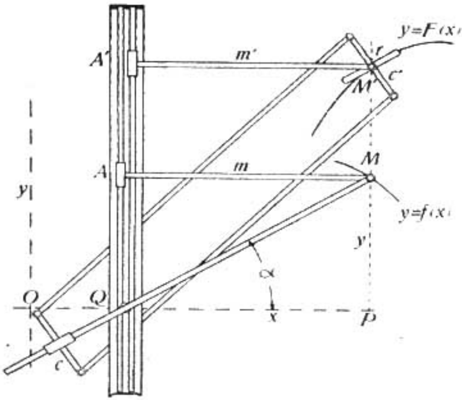
4. — Calcular para $t = 0{,}1$ la función $\Theta(t)$, tabulada en el Apéndice sobre la Teoría de errores.

Lección 36

INTEGRACION GRAFICA Y MECANICA

144. — Intégrafo de Abdank Abakanowitz.

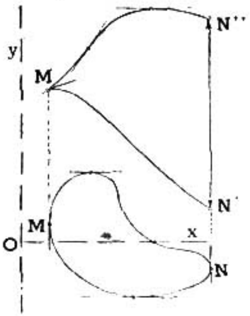
Supongamos una curva dada por la función: $y = f(x)$; sea $F(x)$ una curva integral, es decir, tal que: $F'(x) = f(x)$; los valores de $F'(x)$ son las pendientes $tg\,\alpha$ de las tangentes en los diferentes puntos de la curva integral, y coinciden con los valores de las ordenadas de la curva $f(x)$ en los mismos puntos.



Adoptando como unidad un segmento QP, se tiene: $f(x) = tg\,\alpha$ para cada valor de x. A medida que $f(x)$ toma distintos valores, según los de x, el ángulo α varía, puesto que $QP = 1$. Si se tiene, pues, un medio de ir dibujando una curva $y = F(x)$, tal que la tangente en cada punto sea paralela a la correspondiente recta QM, dicha función cumplirá la condición: $F'(x) = f(x)$ y, por tanto, será una curva integral de $f(x)$.

En este principio está basado el aparato llamado *intégrafo*, que dibuja la curva integral de una curva dada.

Una barra QAA' se traslada conservándose perpendicular al eje x, arrastrando dos varillas AM y $A'M'$ perpendiculares a ella y que pueden deslizarse a lo largo de ella. El estilete M destinado a describir la curva $y = f(x)$ es origen de una varilla que pasa por Q deslizándose por él según varía la hipotenusa QM al variar la ordenada $y = PM$. Sobre esta varilla QM se desliza, conservándose perpendicular, otra varilla c, que forma con otra igual c' un paralelógramo articulado, de modo tal que la ruedecilla r situada en el centro de c', se conserva siempre paralela a QM; y como está obligada a conservarse en la misma ordenada PM por la varilla m' que



resbala sobre a, resulta que dicha ruedecilla r traza una huella tal que la tangente en cada punto es paralela a QM, es decir, una curva $y = F(x)$ tal que en cada punto es $F'(x) = y$, si se adopta como unidad el segmento m; luego $F(x)$ es una función integral de $f(x)$.

Al comenzar el trazado puede deslizarse c sobre QM arbitrariamente, pudiendo, por tanto, colocarse M' arbitrariamente sobre la ordenada PM (naturalmente, dentro del límite que permiten las dimensiones del aparato) pero una vez fijada la posición inicial M', es decir, elegida la constante de integración, la curva integral queda completamente determinada al recorrer M la curva dada.

El segmento de ordenada limitado por los puntos inicial y final de la curva obtenida representa el área con la unidad PQ del aparato; es decir: el recinto es equivalente al rectángulo cuyos lados son PQ y aquél segmento.

Para obtener el área de un recinto limitado por una curva cerrada, basta descomponerla en dos arcos por los puntos de abscisas extremas; y, obtenidas las dos curvas integrales a partir de un mismo punto, la diferencia $N'N''$ de ordenadas finales mide el área.

NOTA. — En el modelo de Abdank Abakanowitz, que es el más conocido, el movimiento de traslación se logra mediante ruedas de ancha llanta y eje a, en los extremos de esta barra.

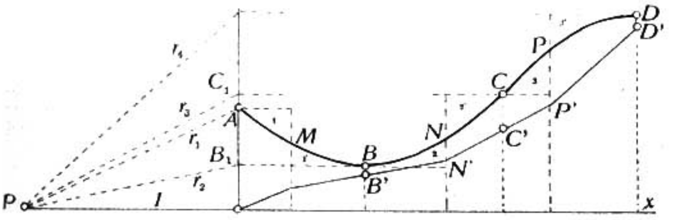
La curva derivada $y = f(x)$ no se describe con el mismo punto M, ni la integral con el M', sino por otros puntos M_1 y M'_1 en la prolongación de m y m'. Esto equivale a trasladar paralelamente ambas curvas en el sentido del eje x, pero subsiste la misma relación entre ambas.

El movimiento de traslación m y m' a lo largo de a se efectúa mediante un carro de dos ruedecillas que cada varilla lleva en su extremo y que ruedan sobre sendas ranuras de la varilla a. Estos carros situados en A y A' suelen llamarse *carro diferencial* y *carro integral*, respectivamente.

145. — Método de integración gráfica.

Cuando no se tiene intégrafo, se puede dibujar la curva integral, con bastante exactitud, por medio de métodos gráficos.

Se sustituye a la curva por una poligonal, haciendo que se vayan compensando los errores, para lo cual tendrán que ser iguales los triángulos $1 = 1'$, $2 = 2'$, $3 = 3'$, etc., lo cual se consigue en el dibujo con suficiente exactitud.



Se proyectan los puntos A, B, C, D, etc., de la poligonal sobre Oy, paralelamente a Ox. Se toma un valor $OP = 1$ arbitrario, que se llama *base* de integración o distancia polar. El punto P, llamado *polo*, se une con los puntos $A_1, B_1, C_1 \ldots$ proyecciones de $A, B, C \ldots$ sobre el eje y.

A partir de un punto A', arbitrario sobre la ordenada del punto A, se traza una paralela al primer radio polar, limitándola en la ordenada correspondiente al punto M. A partir de este punto M', se traza una paralela al segundo radio polar, limitándola en la ordenada del punto N, luego una paralela al tercero y así sucesivamente.

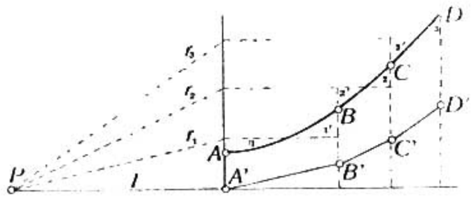
Obtenemos así una línea quebrada $A' M' N' P' D'$ .... que es la integral de la poligonal con que hemos sustituido a la curva, pues en cada punto la pendiente es la ordenada correspondiente de la poligonal dada.

La diferencia de las ordenadas extremas de la quebrada integral, multiplicada por la distancia polar, da el área de la poligonal con que hemos sustituido a la curva, o bien la de esta última, que es sensiblemente igual a la anterior.

Si queremos construir la curva integral de la dada, observamos que los puntos A', B', C' .... pertenecen a dicha curva integral, puesto que para las ordenadas de estos puntos, las áreas de la poligonal y de la curva son iguales.

Para obtener, pues, la curva integral, basta trazar una curva que pase por dichos puntos A', B', C' .... y que sea tangente en los mismos a los lados de la poligonal.

NOTA. — Si hacemos la compensación como en la figura, obtenemos también una integral poligonal, pero ya no resulta tangente a la curva integral, y de ésta sólo se tienen puntos, como el A', B', C', D'.



Se ve, pues, que es preferible el método anterior, que da la curva integral por puntos y tangentes.

Si sólo interesa el área total encerrada por la curva, el eje Ox y las ordenadas extremas, viene expresada por la diferencia de las ordenadas extremas de la curva integral, que en ambos procedimientos coinciden con las de la poligonal integral.

Para la cuadratura de recintos, limitados por una curva cerrada, se descompone ésta en dos arcos, como se hizo en la figura de pág. 162.

EJERCICIOS

1. — Efectuar la integración gráfica de la sinusoide, comprobando el resultado.

2. — Intégrense gráficamente funciones discontinuas de 1.ª especie (15).

LECCIÓN 37

INTEGRALES SUCESIVAS DE UNA FUNCION

146. — Derivación bajo el signo de integral.

DERIVADA PARCIAL DE $f(x, y)$. — Si se considera y fijo, la derivada de $f(x, y)$ respecto de la variable x se llama *derivada parcial*, y se designa así: $f_x(x, y)$, siendo por definición (46):

$$f(x+h, y) - f(x, y) = h\,[f'_x(x, y) + \delta] \qquad [1]$$

donde $\delta \to 0$ para $h \to 0$, es decir: fijado x, para cada $\varepsilon > 0$ hay un τ (dependiente de y) tal que $|\delta| < \varepsilon$ para $|h| < \tau$.

Cuando τ es independiente de y siendo: $|\delta| < \varepsilon$ cualquiera que sea el valor y del intervalo (a, b), diremos que $f(x, y)$ es *derivable* en el punto x, *uniformemente* para el intervalo (a, b) de y.

FUNCIONES DEFINIDAS POR INTEGRALES. — Algoritmo análogo al de las series funcionales para definir funciones de x, es toda integral del tipo:

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)\,dt$$

en que la variable independiente es la t, siendo la x constante al efectuarse la integración, hecha la cual y sustituidos los límites, queda una función de x.

El incremento $\Delta F(x)$ de esta función, para un incremento h de x, está dado por la expresión:

$$\Delta F(x) = \int_a^b [f(x+h, t) - f(x, t)]\,dt \qquad [1]$$

la cual, en virtud de [1], puede escribirse así:

$$\Delta F(x) = \int_a^b h(f'_x(x, t) + \delta)\,dt \qquad [2]$$

Dividiendo ambos miembros por [2], y supuesta uniforme la convergencia hacia f'_x se tiene:

$$\frac{\Delta F(x)}{h} = \int_a^b f'_x(x, t)\,dt + \int_a^b \delta\,.\,dt \qquad [3]$$

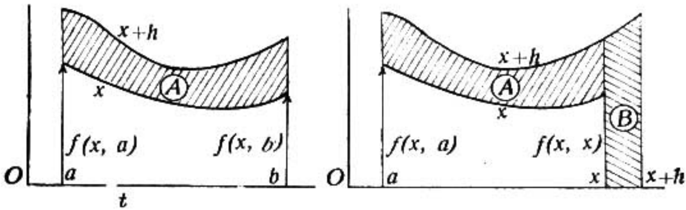
$$\left|\int \delta\,.\,dt\right| < \varepsilon(b-a)$$

luego el cociente incremental de $F(x)$ difiere arbitrariamente poco del primer sumando o sea tiene éste como límite, el cual es por tanto, derivada de $F(x)$, es decir:

$$F'(x) = \int_a^b f'_x(x, t)\,dt$$

Toda integral cuyo integrando contiene un parámetro, define una función de éste cuya derivada se obtiene sustituyendo el integrando por su derivada respecto de ese parámetro, suponiendo que la convergencia hacia ella sea uniforme.

Esto es suponiendo la integral definida entre límites constantes a, b, como en el caso considerado. La figura indica el significado gráfico de $\Delta F(x)$ al pasar de la curva correspondiente al valor x del parámetro a la curva correspondiente al valor $x+h$.



EJEMPLO. — Compruébese la regla en la integral:

$$F(x) = \int_0^1 l(x+t)\,dt$$

$$F'(x) = \int_0^1 dt/(x+t) = l(x+1) - lx$$

Aplicación al cálculo de integrales. — **De una integral definida o indefinida que contiene un parámetro se deduce otra por derivación respecto de este parámetro. Aplíquese esta regla a los ejercicios 3 y 4. En este último la regla es aplicable a pesar de ser infinito el intervalo, como se puede demostrar, pero el lector puede admitirlo sin demostración.**

Caso de límite superior variable. Consideremos: $F(x) = \int_a^x f(x, t)\,dt$

es decir, que la integral tenga variable el límite superior.

El incremento $\Delta F(x)$ tiene el significado que se indica en la figura, el cual se compone de dos áreas $A + B$; al dividir por h el límite de $A : h$ es:

$$\int_a^x f'x(x, t)\,dt$$

El límite de $B : h$, en virtud del teorema del valor medio del Cálculo integral, es $f(x, x)$ al tender h hacia 0, luego:

$$F'(x) = \int_a^x f'_x(x, t)\,dt + f(x, x)$$

NOTA. — Más general, si es $F(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(x,t)\,dt$

puede demostrarse análogamente:

$$F'(x) = \int_a^{\varphi(x)} f'_x(x,t)\,dt + \varphi'(x) \,.\, f[x,\ \varphi(x)]$$

y si también el límite inferior es variable; $\psi(x)$, hay que agregar un nuevo término, que es: $-\psi'(x) \,.\, f\,[x, \psi(x)]$.

147. — Momentos de órdenes sucesivos.

Consideremos un recinto plano limitado por la curva $y = f(t)$, el eje t y dos ordenadas extremas en a y b.

Un elemento rectangular de superficie tiene por expresión: ydt, y el momento de dicho elemento de área respecto a la recta de abscisa x, paralela al eje y, es el producto del área por la distancia a dicha recta; es decir, $(x-t)\,f(t)dt$, siendo t la abscisa media; si hacemos la suma de todos los momentos de las áreas elementales, y calculamos el límite de dicha suma, tenemos, por definición, el momento del área encerrada por la curva $f(t)$, el eje t y las ordenadas en a y b respecto a la recta $t = x$.

Es decir:

$$\mu = \text{lím.}\ \Sigma(x-t)f(t)dt = \int_a^b (x-t)f(t)dt$$

El momento que hemos definido se llama *estático* o de primer orden. En general, la expresión que da el momento de orden n es:

$$\mu_n = \int_a^b (x-t)^n f(t)dt$$

y para $n = 2$, se llama momento de *inercia*.

Para $n = 0$, se tiene:

$$\mu_0 = \int_a^b f(t)dt$$

que no es sino el área del recinto encerrado por la curva, el eje de abscisas y las ordenadas extremas.

La expresión del momento de orden n del área comprendida entre las abscisas a y x, es:

$$\mu_n = \int_a^x (x-t)^n f(t)dt\,;$$

si la derivamos respecto a x resulta:

$$\mu'_n = n \int_a^x f(t)(x-t)^{n-1}\,dt + (x-x)^n$$

y como la integral no es sino el momento de orden $n-1$, se tiene:

$$\mu'_n = n\,\mu_{n-1} \qquad \text{o bien: } \mu_n = n \int_a^x \mu_{n-1}\,dx$$

148. — Cálculo gráfico de los momentos sucesivos.

Consideremos una curva $y = f(t)$ y calculemos el momento de orden n del área que encierra con el eje t, y las ordenadas en los puntos o y x, respecto del eje de abscisa $t = x$.

El momento de orden 0 es:

$$\mu_0 = \int_0^x f(t)\,dt$$

que es el área variable encerrada por la curva, los ejes ,y la ordenada de abscisa $t = x$.

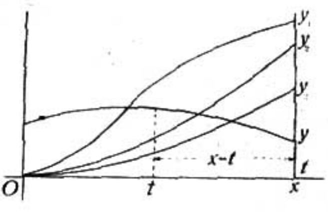
Si llamamos a esa área variable y_1, la nueva integral que da el momento de primer orden es:

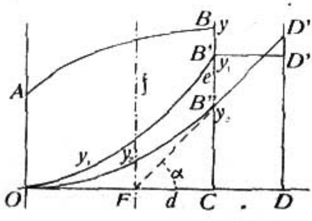
$$\mu_1 = \int_0^x y_1\,dt = y_2,$$

valor que podemos calcular gráficamente, integrando la curva y_1 que da el área, como se ha hecho para la función $f(t)$; y si integramos esta curva y_2 en la misma forma obtendremos una nueva curva y_3 en que las ordenadas multiplicadas por 2 dan los momentos de inercia o de segundo orden:

$$\mu_2 = 2 \int_0^x \mu_1\,dx = 2y_3$$

Estas integrales sucesivas es necesario hacerlas partir del eje x, pues todos los momentos son nulos para $x = 0$.





Hasta ahora hemos calculado los momentos con relación a la ordenada extrema que limita a la curva; si queremos calcular los momentos con respecto al eje de abscisa $x = OD$, del área limitada por la curva y la ordenada BC, completaremos la gráfica con el segmento CD. Hasta el punto C sabemos calcular el área y los momentos de cualquier orden. Si por el punto B' trazamos la recta $B'D'$ paralela al eje x, tenemos en la ordenada $DD' = y$, el área limitada por la curva $OABCD$.

Para calcular el momento estático del área $OABCD = OABC$ *hacemos la integral gráfica de la curva* $OB'D'$, *lo que equivale a* trazar la curva integral OB'' como si fuera para hallar el momento con respecto al eje BC y luego prolongarla con la tangente en B'' a dicha curva hasta cortar el eje DD' en un punto D'', de modo que el momento estático viene dado por la ordenada DD''.

Si se prolonga la tangente a la curva OB'' hasta cortar al eje de las t, en la ordenada del punto F está situado el centro de gravedad del área de la curva. En efecto, tomando momentos con respecto al eje f, del área de la curva, resulta: $M = M_e - d.A$, siendo M el momento con respecto al eje f; M_e = momento con respecto al eje e; A = área y d la distancia entre los ejes f y e.

La derivada de y_2 es y_1, luego: $A = y_1 = tg\,\alpha$ y como $d.tg\,\alpha = y_2 = M_e$, resulta: $M = 0$, condición de todo eje que pasa por el centro de gravedad.

Si se tratara de calcular gráficamente los momentos con respecto a un eje, de una curva cerrada, trazaríamos la curva integral del arco superior, luego la del inferior; la diferencia de las ordenadas de las dos curvas integrales da el momento buscado.

EJERCICIOS

1. — Calcular $\int x^n e^x dx$ por derivación sucesiva de $\int e^{ax} dx$ respecto del parámetro a.

2. — Construir las gráficas de los momentos sucesivos de $y = 1$ respecto de un eje variable desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

3. — Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + a)^2}$ por derivación de $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a}$

4. — Calcular por derivación bajo el signo de integral:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-tx}\,\text{sen}\,x}{x}\,dx$$

LA LINEA ELASTICA

149. — Ecuación de la línea elástica.

Cuando un sólido con puntos de apoyo está en equilibrio por acción de una o varias fuerzas, se introducen *reacciones* de tales puntos de apoyo, esto es, fuerzas ficticias que aplicadas en ellos equilibran a las fuerzas exteriores. Los apoyos quedan así sustituidos por las respectivas reacciones.

EJEMPLOS. — Una balanza en equilibrio por dos pesos iguales P queda sustituida por una varilla en cuyos extremos hay aplicadas dos fuerzas P hacia abajo, y en su punto medio una fuerza $-2P$, es decir, hacia arriba. Si el propio peso p de la varilla no es despreciable respecto de P, se considera una carga continua, de resultante p, y la reacción en el punto de apoyo será $-(2P+p)$.

Si una viga de peso p apoyada en sus extremos soporta la carga P en su centro, la reacción de los apoyos es $-\frac{1}{2}(P+p)$.

Se admite en la teoría de la elasticidad que en una viga horizontal, sometida a cargas verticales, la fibra que pasa por el centro de gravedad de la sección carece de tensiones, y que la curvatura que adopta en cada punto es proporcional al momento flector M en dicho punto e inversamente proporcional al momento de inercia I de la sección. Es decir, la curvatura viene expresada así:

$$\frac{M(x)}{E.I} = k\,.\,M(x)$$

siendo E el módulo de elasticidad del material.

Recuérdese que el momento flector en un punto ,es el momento estático respecto de un plano vertical que pase por él, de las cargas y reacciones a uno u otro lado del punto.

Si la curvatura es pequeña, caso el más frecuente, es decir, si la línea elástica difiere poco de la recta horizontal puede suponerse $y' = 0$, y tomarse y'' como valor aproximado de la curvatura [ver (86) y (90)].

La ecuación que caracteriza la línea elástica es entonces:

$$y'' = -kM(x)$$

de donde:

$$y' = k \int M dx + C ;$$

$$y = -k \int [\int M dx] + Cx + C'$$

Las constantes deberán determinarse según las condiciones del problema.

Ejemplo. — **Si se trata de una viga empotrada por el extremo O y cargada con un peso P en el otro extremo l, el momento flector en cada punto x es: $(l - x)P$.**

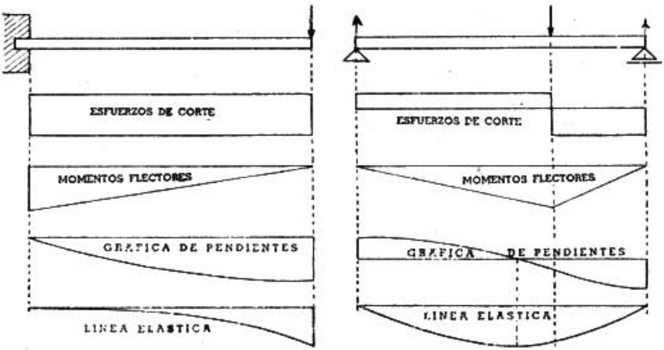
$$y' = -[lx - \tfrac{1}{2}x^2]\, P/EI$$
$$y'' = -(l - x)P/EI$$

la constante es $C = 0$, pues en el punto $x = 0$ es $y' = 0$; luego resulta:

$$y = -[lx^2/2 - x^3/6]\, P/EI$$

parábola cúbica que en la proximidad del origen difiere poco de una parábola ordinaria. La flecha máxima se presenta en el extremo y vale:

$$f = -Pl^3/3EI$$



150. — Construcción de la línea elástica.

Cuando la carga de la viga es continua, suele llamarse carga en cada punto x a la correspondiente a la unidad de longitud en dicho punto x; pero esto, que tiene significado claro cuando la carga es uniforme ,exige una aclaración cuando la carga es variable. En realidad se llama carga en el punto x al límite de la carga correspondiente a un intervalo x, $x + h$ dividida por h; si llamamos $p(x)$ a a carga en el intervalo Ox, lo que se llama *carga unitaria* en el punto x no es sino el límite de la carga media en un intervalo indefinidamente pequeño, es decir: la carga en el punto x (que no debe confundirse con una posible *carga aislada* en él) se define así:

$$\text{lím. } [p(x+h) - p(x)]/h = p'(x),$$

es decir, la derivada de la carga total respecto del intervalo.

Por tanto, dibujada la línea de cargas, $y = f(x)$, el esfuerzo cortante en cada punto x, esto es, la resultante de las cargas del intervalo Ox, no es sino la función integral:

$$p(x) = \int_0^x f(x)\,dx,$$

esto es, el área de la curva hasta el punto x, debiendo agregarse a esta área las reacciones de los apoyos, a la izquierda del punto x; o lo que es lo mismo, el esfuerzo de corte es también igual a

$$\int_l^x f(x)dx,$$

más las reacciones de los apoyos a la derecha del punto x.

La curva de esfuerzos cortantes es, por tanto, la integral:

$$y_1 = \int_0^x f(x)\,dx$$

de la función de cargas, siendo la constante en el punto O la reacción en este punto, cuando no esté libre.

La curva de momentos flectores viene dada por la integral:

$$\int_0^x f(t)\,(x-t)\,dt \quad \text{o sea:} \quad y_2 = \int_0^x y_1\,dx$$

función a la que debe agregarse el momento de las reacciones a la izquierda del punto variable x. También puede expresarse dicho momento flector por la integral a la derecha, más los momentos de las reacciones a la derecha. En el punto O, la constante es igual al momento total de la viga respecto de O.

La tercera integral:

$$y_3 = \int_0^x y_2\,dx$$

multiplicada por la constante $1/EI$ representa la derivada y' de la función y que define la curva elástica; es decir, las pendientes en los diversos puntos de la línea elástica, o también las tangentes trigonométricas de los ángulos de giro que forman con su posición inicial las secciones normales de la viga; y como son ángulos pequeños, las ordenadas y' miden aproximadamente dichos ángulos de giro.

Finalmente, la cuarta integral:

$$y_4 = \int_o^x y_3\, dx$$

multiplicada por $1/EI$ representa la línea elástica.

Con el intégrafo se obtiene, pues, rápidamente, sin más que integrar cuatro veces sucesivas: 1.º) la línea de esfuerzos cortantes; 2.º) la línea de momentos flectores; 3.º) la línea de inclinaciones; 4.º) la línea elástica.

La única dificultad de encontrar la constante en el punto *O* se resuelve como hemos indicado para la línea de esfuerzos y la de momentos; para la línea de pendientes, suele conocerse el punto en que la tangente es horizontal y en él es nula la pendiente, quedando así determinada la constante. Para la línea elástica, se conocen puntos de apoyo, y en ellos es nula la ordenada de la curva.

REGLA PRÁCTICA. — Se construye cada vez la curva integral a partir de cualquier punto; por el de la curva obtenida, cuya ordenada debe ser nula, según las condiciones del problema, se traza el eje x y la curva queda referida a él; pudiéndose integrar de nuevo para pasar a la curva siguiente. O bien, si se conoce en un punto el verdadero valor K de la ordenada, se traza el eje x paralelamente y a la distancia K.

Si hay alguna carga aislada P hay que sumar P a las ordenadas de la 1.ª integral al llegar a ese punto, y resulta una gráfica discontinua, pero la 2.ª integral, que representa los momentos flectores, es siempre continua.
Cuando sólo hay cargas aisladas, la 1.ª gráfica es una línea escalonada, de segmentos horizontales.

EJEMPLO. — Viga apoyada en sus extremos, con carga central.
Si la carga en el punto medio es P, las reacciones en los extremos son: $P/2$.
Momentos:

$$y = -\tfrac{1}{2}Px;$$

Llamando $k = 1/EI$, la pendiente de la línea elástica es:

$$y = k \int -\tfrac{1}{2}\, Px dx = (-Px^2/4 + Pl^2/16)\,k$$

Línea elástica:

$$y = -Pk(x^3/12 - l^2x/16)$$

NOTA. — Por simetría, basta hacer la construcción en la mitad de la izquierda.
Caso más general: carga no central. En la fig. 2.ª está resuelto por integración gráfica, omitiendo trazados auxiliares. Las reacciones se determinan por la ley de las fuerzas paralelas.

EJERCICIOS

1. — Calcular y construir la línea elástica de la viga empotrada en un extremo y cargada con dos pesos.

2. — Viga apoyada en sus extremos con dos cargas simétricas.

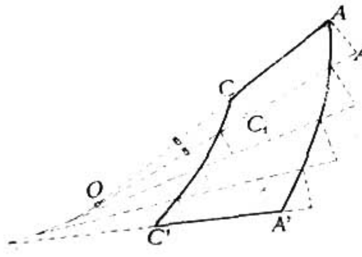
PLANIMETROS E INTEGRADORES

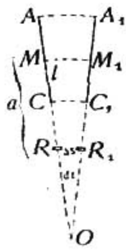
151. — Planímetros polares y lineales.

Son aparatos que dan al área de un recinto plano cualquiera recorriendo su contorno con un índice en uno u otro sentido.

El planímetro de Amsler, que es el más sencillo y práctico, consta de una varilla $A\,C\,R$ provista en su extremo de una ruedecilla R perpendicular a la varilla.

Con el punto A se describe el contorno del recinto cuya área se desea; el punto C está sujeto a moverse sobre una línea fija que es circunferencia o recta según se trate del tipo de planímetro *polar* o *lineal*. Uno y otro se fundan en el mismo principio, que exponemos a continuación.





Si una varilla de longitud $l = AC$ lleva una ruedecilla R en cualquier punto (*), que rueda sobre el plano al moverse la varilla, el área barrida por esta varilla es el límite de la suma de los trapecios circulares determinados por cada dos posiciones, cuando éstas tienden a confundirse. El arco central del trapecio mide:

$$OM \,.\, dt = OR \,.\, dt + RM \,.\, dt = \Delta s + a \,.\, dt$$

siendo Δs el arco rodado por R y llamando $a = RM$.

(*) En los modelos corrientes, la ruedecilla no tiene el centro en la misma varilla, sino que está montada en un eje paralelo en un pequeño bastidor. Este corrimiento no altera el arco girado en la traslación ni en el giro.

La suma de áreas de los trapecios es, por tanto:

$$\Sigma l \,.\, OM \,.\, dt = l\, s_i + la\, t$$

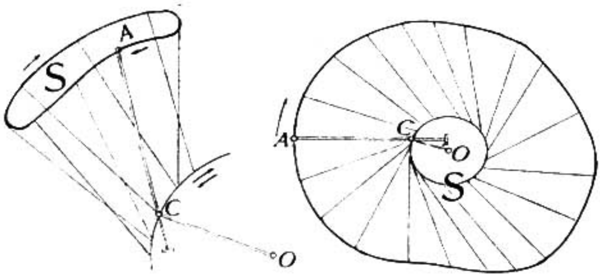
siendo s_i el arco total rodado por la ruedecilla en ese movimiento escalonado de la varilla; pues en los movimientos de deslizamiento sin rotación, para pasar, p. ej., de $A_1\,C_1$ a $A_2\,C_2$ no rueda R.

Si se consideran posiciones intermedias y se repite el movimiento escalonado, el límite del primer miembro es el área barrida por la varilla, o sea el área del trapecio curvilíneo $ACC'\,A'$, y en el segundo miembro, lat es siempre el producto de la por el ángulo total t girado por la varilla; luego s_i tiene límite. Este límite es precisamente la longitud s del arco rodado por R al recorrer A la curva AA'. Por consiguiente:

El área barrida por la varilla de longitud l es: $ls + lat$.

Planímetro polar. — El punto C de la varilla está obligado a describir un arco de circunferencia, para lo cual está sujeto por una varilla a un centro fijo O.

Según la posición y tamaño del área que se trata de medir, distinguiremos dos casos:



Primer caso. — El punto C describe un arco exterior al área. El ángulo total t descrito por la varilla l es nulo, pues vuelve a su posición inicial sin haber descrito una circunferencia completa.

El área engendrada por la varilla l se puede considerar como límite de la suma de trapecios circulares, es decir, por la integral de la expresión [1], luego resulta:

El área engendrada por la varilla de longitud l es ls.

Ahora bien: el área total descripta por l se compone de una parte descripta dos veces en sentido contrario (y por tanto de suma nula) más el área descripta una sola vez. Resulta por tanto: $S = ls$; es decir:

El área del recinto es el producto del brazo l por el arco descripto por la rueda R, al recorrer con el índice su contorno.

Este arco s se obtiene haciendo una lectura inicial en el tambor graduado de la rueda R y otra lectura final al volver al punto de partida. La diferencia entre ambas lecturas es s; las dimensiones de la rueda y la varilla son tales que cada centésima de circunferencia por l es 1 cm². (*)

Segundo caso. — El punto C describe una circunferencia interior a S. Entonces el ángulo girado por l es 2π, y tenemos:

Area engendrada por l es: $ls + 2\pi\, al$.

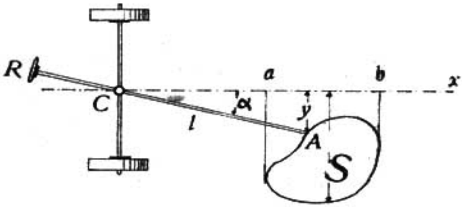
El área S es igual a ésta más el círculo de radio r; luego:

El área del recinto se deduce sumando al producto l . s la constante

$$C = \pi r^2 + 2\pi\, al.$$

Esta constante está dada en el aparato, y no es preciso calcularla.

PLANÍMETRO LINEAL. — Se distingue del polar en que el punto C está sujeto al eje de un carro que se mueve en el plano en una dirección x. Como al recorrer A la curva, describe C un segmento rectilíneo dos veces en sentido contrario, la fórmula es la misma del primer caso, esto es: $S = ls$.



Puede llegarse a este mismo resultado y al cálculo de momentos, como se indica a continuación.

(*) Por tanto, cada unidad de el nonio representa 10 mm². En muchos modelos puede hacerse variar la longitud l y para algunos de sus valores viene dada la unidad de área que corresponde a cada unidad de arco de la ruedecilla.

152. — Integradores.

El área, el momento estático y el momento de inercia de un recinto respecto del eje x, vienen definidos por las integrales:

$$S = \int (y_2 - y_1) dx = \int y \cdot dx$$

$$M = \int dx \int y \cdot dy = \tfrac{1}{2} \int (y_2^2 - y_1^2) dx = \tfrac{1}{2} \int y^2 \cdot dx$$

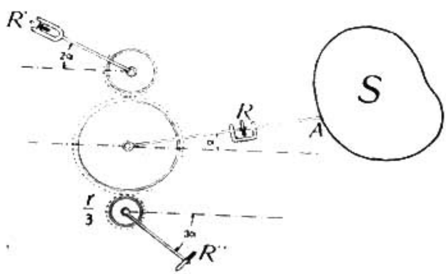
$$I = \int dx \int y^2 \cdot dy = \tfrac{1}{3} \int (y_2^3 - y_1^3) dx = \tfrac{1}{3} \int y^3 \cdot dx$$

entendiendo que en estas tres integrales finales x varía de a a b, tomando como valor y la ordenada superior y_2 y después varía x de b a a, tomando la ordenada inferior y_1 (*).

Fundamentos de los integradores. — Poniendo $y = l \cdot \operatorname{sen} \alpha$, basta integrar las tres funciones $\operatorname{sen} \alpha \cdot dx$, $\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot dx$, $\operatorname{sen}^3 \alpha \cdot dx$, que son combinaciones lineales sencillas de $\operatorname{sen} \alpha \cdot dx$, $\cos 2\alpha \cdot dx$, $\operatorname{sen} 3\alpha \cdot dx$, por ser:

$$2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos 2 \alpha.$$

$$4 \operatorname{sen}^3 \alpha = 3 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 3 \alpha$$



y estas integrales vienen medidas por las ruedecillas R, R', R'', cuyos ejes tienen las inclinaciones α, $\pi/2 - 2\alpha$, 3α, respecto del eje x, gracias al engranaje, indicado en la figura, de las tres ruedas de radios r, $\tfrac{1}{2}r$, $\tfrac{1}{3}r$.

Si los arcos rodados por las tres ruedecillas son s, s', s'', el área y los momentos de 1.° y 2.° orden son, respectivamente:

$$S = ls \quad ; \quad M = -\tfrac{1}{4} l^2 s' \quad ; \quad I = \tfrac{1}{12} l^3 (3s - s'')$$

(*) Más adelante estudiaremos sistemáticamente estas integrales, llamadas *curvilíneas*.

CAPITULO VI

FUNCIONES PERIODICAS Y SERIES DE FOURIER

LECCIÓN 40

FUNCIONES PERIODICAS

153. — Definiciones y clasificación.

Una función $f(t)$ se dice *periódica,* de período T, cuando para todo valor de t satisface a la condición:

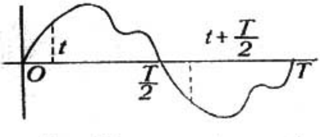
$$f(t+T)=f(t) \qquad T = \text{período.}$$

y no hay ningún $T' < T$ con igual propiedad.

La parte de curva correspondiente a un período cualquiera se llama *onda* y basta estudiar una onda, puesto que todas son iguales.

Función periódica alternada es la que tiene un *semiperíodo;* llamando así al número $\frac{1}{2}T$, si cumple la condición:

$$f(t+\tfrac{1}{2}T) = -f(t)$$



Cada onda se compone de dos semiondas; una se deduce de la otra por traslación y simetría.

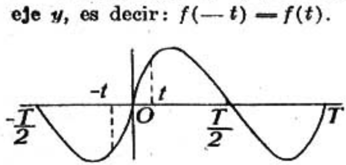
Ejemplo: sen t, pero no tg t.

Períodos respectivos: 2π y π.

Función par es la que tiene las ondas simétricas respecto del eje y, es decir: $f(-t)=f(t)$.

Ejemplos: cos t, sen^2 t.

Períodos respectivos: 2π y π.



Función impar la que tiene las ondas simétricas respecto del origen, es decir: $f(-t)=-f(t)$.

Tales son, por ejemplo: sen t y tg $\frac{1}{2}$ t. El período de ambas es 2π.

154. — Funciones armónicas o sinusoidales.

Se llaman así las del tipo:

$$y = k \,.\, \text{sen}(\omega t + \alpha)$$

El argumento $\omega t + \alpha$ se llama *fase*; y el valor α que éste toma para $t = 0$ es la *fase inicial;* si la fase inicial es nula, la gráfica pasa por el origen de coordenadas.

El valor máximo de la función es el número k y se llama *amplitud* de la onda o de la función; el *período, o longitud de onda* es $T = 2\pi/\omega$; el número de ondas o períodos contenidos en el segmento 2π es $\omega = 2\pi/T$, entero o no, y se llama *pulsación.*

La gráfica de una función sinusoidal es, pues, una sinusoide cuyas ordenadas están ampliadas en la proporción $k : 1$, y las abscisas reducidas en la razón $1 : \omega$.

Nota. — El movimiento vibratorio de un punto sobre una recta está representado por una función periódica $y = f(t)$ del tiempo; el segmento y, abscisa del punto móvil sobre la recta, se llama *elongación.* Si t se expresa en segundos, y T es el período, se llama *frecuencia* al número $n = 1/T$ de ondas contenidas en la unidad de tiempo, es decir: *número de vibraciones completas por segundo.* Aproximadamente puede suponerse entero.

Cuando la función periódica es sinusoidal, el movimiento vibratorio se llama *armónico.* Puesto que t se expresa en segundos, ω representa la velocidad angular por segundo (véase la representación polar) y sustituyendo

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi\, n$$

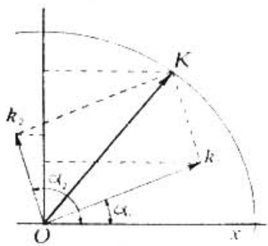
la función se transforma así:

$$y = k \,.\, \text{sen}\,(2\pi\, n\, t + \alpha)$$

Estas funciones sinusoidales son las más frecuentes en Física, sobre todo en Electrotécnica. Si, por ejemplo, un circuito rectangular gira alrededor de un eje de su plano en un campo magnético, se engendra en el circuito una fuerza electromotriz de signos alternados cuyo valor es: $e = k \,.\, \text{sen}\, \omega t$.

155. — Representación polar de las funciones sinusoidales.

Aunque estas nociones no corresponden a un curso de Cálculo, resumiremos algunas relativas a las funciones sinusoidales (*).



Si sobre una circunferencia de radio k se mueve un punto con velocidad angular constante ω, en el momento t habrá descrito el radio vector un ángulo ωt y la proyección del punto sobre el eje y es el punto de abscisa $y = k \,.\, \text{sen}\, \omega t$.

(*) V. p. ej. nuestro *Curso cíclico de Matemáticas,* tomo I. "Las magnitudes y las funciones elementales". Buenos Aires, 1924.

Al girar el punto con movimiento uniforme tenemos sobre el eje y un movimiento vibratorio sinusoidal cuya ecuación es $y = k$. sen ωt. Si la fase inicial no es nula, sino α, la ecuación del movimiento es $y = k$. sen$(\omega + \alpha)$.

Dadas varias funciones sinusoidales de igual período, con amplitudes y fases distintas:

$$k_1 . \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_3) + k_2 . \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_2) + \ldots . + k_n . \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_n)$$

si las representamos en el momento $t = 0$ por los respectivos vectores de módulos k_1, k_3, ... k_n y construímos el vector resultante K, la ordenada de su extremo A es la suma de las ordenadas de los extremos de los n vectores: por tanto, dicha ordenada y es la suma de las n funciones en el momento t. Al variar t, tenemos un movimiento vibratorio del punto Y sobre el eje y, que representa el movimiento vibratorio resultante, suma de los n movimientos dados.

156. — Descomposición de funciones en armónicos.

Dada una función periódica cualquiera $y = f(t)$, si su período es T, haremos un cambio de variable $x = 2\pi t/T$; $t = xT/2\pi$, para que su período se convierta en 2π. Hecho esto, tiene importancia capital descomponerla en suma de funciones sinusoidales cuyas pulsaciones sean 1, 2, 3, ..., (o sea períodos divisores de 2π), es decir:

$$f(x) = k_0 + k_1 . \operatorname{sen}(x + \alpha_1) + k_2 . \operatorname{sen}(2x + \alpha_2) + \\ + \ldots . + k_n . \operatorname{sen}(nx + \alpha_n)$$

Por analogía con la Acústica se dice: descomponer una onda en ondas *armónicas* o en *armónicos sucesivos;* pero en general no es posible descomponerla en una suma de finito número de sumandos.

La primera función sen$(x + \alpha_1)$ que tiene el mismo período 2π que $f(x)$ se llama armónico *fundamental*; las siguientes se llaman armónicos 2.°, 3.°, 4.°, ..., y sus períodos son:

$$\frac{2\pi}{1}, \frac{2\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \ldots\ldots \frac{2\pi}{n}.$$

El desarrollo en armónicos sucesivos puede descomponerse así:

$$f(x) = k_0 + k_1 . \operatorname{sen} \alpha_1 . \cos x + k_2 . \operatorname{sen} \alpha_2 . \cos 2x + \ldots . \\ + k_1 . \cos \alpha_1 . \operatorname{sen} x + k_2 . \cos \alpha_2 . \operatorname{sen} 2x + \ldots .$$

y si llamamos a los coeficientes desconocidos:

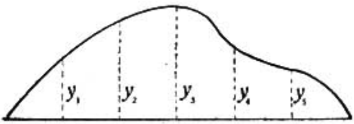
$$k_1 . \operatorname{sen} \alpha_1 = a_1 ;\ k_1 . \cos \alpha_1 = b_1 ;\ k_2 . \operatorname{sen} \alpha_2 = a_2 ;\ k_2 . \cos \alpha_2 = b_2 ;\ \ldots$$

el problema se reduce a encontrar el desarrollo siguiente, llamado polinomio trigonométrico de orden n:

$$f(x) = k_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots.$$
$$\ldots. + a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

INTERPOLACIÓN TRIGONOMÉTRICA. — **Es análoga a la algebraica (Lecc. 22); dada una función $f(x)$ se trata de formar una suma de n armónicos con coeficientes tales que la función formada coincida con $f(x)$ para n valores equidistantes. Veamos en un ejemplo, cómo se calculan los coeficientes indeterminados.**

Sea una función alternada de período 2π, es decir, tal que al incrementar en π cambia de signo; podemos, pues, suponer nulos los coeficientes pares y calcular solamente términos impares, para que al incrementar en π los senos y cosenos cambien de signo.



$$\frac{1\pi}{6},\ \frac{2\pi}{6},\ \frac{3\pi}{6},\ \frac{4\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{6\pi}{6}$$

Formemos una función de seis términos:

$$a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_3 \cos 3x +$$
$$+ b_3 \operatorname{sen} 3x + a_5 \cos 5x + b_5 \operatorname{sen} 5x$$

que coincida con $f(x)$ en los puntos indicados en la figura.

Recordando los senos y cosenos de 30°, 60°, etc., se tienen estas condiciones:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, a_1 + \tfrac{1}{2} b_1 + b_3 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, a_5 + \tfrac{1}{2} b_5 \\
y_2 &= \tfrac{1}{2} a_1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, b_1 - a_3 + \tfrac{1}{2} a_5 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, b_5 \\
y_3 &= b_1 - b_3 + b_5 \\
y_4 &= -\tfrac{1}{2} a_1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, b_1 + a_3 - \tfrac{1}{2} a_5 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, b_5 \\
y_5 &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, a_1 + \tfrac{1}{2} b_1 + b_3 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, a_5 + \tfrac{1}{2} b_5 \\
0 &= a_1 + a_3 + a_5
\end{aligned}$$

Sumando y restando estas ecuaciones convenientemente, resulta:

$$\begin{aligned}
&y_1 + y_5 = b_1 + 2b_3 + b_5 \\
&y_2 + y_4 = \sqrt{3}\, b_1 - \sqrt{3}\, b_5 \\
&y_1 + y_5 - y_3 = 3b_3 && \therefore\ b_3 = (y_1 + y_5) : 3 \\
&y_1 - y_5 = \sqrt{3}\, a_1 - \sqrt{3}\, a_5 \\
&y_2 - y_4 = a_1 - 2a_3 + a_5 \\
&y_2 - y_4 - 0 = -3a_3 && \therefore\ a_3 = -(y_2 - y_4) : 3
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores a_3 y b_3 se despeja:

$$\begin{aligned}
&b_1 + b_5 = y_1 + y_5 - 2b_3 = (y_1 + y_5 + 2y_3) : 3 \\
&b_1 - b_5 = (y_2 + y_4) : \sqrt{3} \\
&a_1 + a_5 = y_2 - y_4 + 2a_3 = (y_2 - y_4) : 3 \\
&a_1 - a_5 = (y_1 - y_5) : \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Sumando y restando cada par de ecuaciones, salen los siguientes valores para los coeficientes:

$$a_1 = [(y_2 - y_4) + \sqrt{3}(y_1 - y_5)] : 6$$
$$b_1 = [(y_1 + y_5 + 2y_3) + \sqrt{3}(y_2 + y_4)] : 6$$
$$a_2 = -(y_2 - y_4) : 3$$
$$b_2 = (y_1 + y_5 - y_3) : 3$$
$$a_3 = [(y_2 - y_4) - \sqrt{3}(y_1 - y_5)] : 6$$
$$b_3 = [(y_1 + y_5 + 2y_3) - \sqrt{3}(y_2 + y_4)] : 6$$

Calculados estos coeficientes dibujaremos la curva que resulta de sumar estos senos y cosenos, la cual pasa por los 12 puntos fijados en la onda, y en los intervalos diferirá algo de ella. Si esta discrepancia es tolerable, el problema queda resuelto. Si no basta, dividiremos en mayor número de partes, para obtener mejor aproximación.

NOTA. — Pueden darse fórmulas generales para la resolución del sistema de ecuaciones; llamando $\alpha = \pi/m$, resulta:

$$ma_n = \Sigma y_k \cos kn\alpha$$
$$mb_n = \Sigma y_k \operatorname{sen} kn\alpha$$

dando a k los valores $0, 1, 2, \ldots, 2m-1$.

Si el número m de intervalos en que se divide el intervalo $(0, \pi)$ va creciendo, las sumas tienen como límites las respectivas integrales y resultan las fórmulas que estudiaremos en la próxima lección.

El tránsito de la fórmula de interpolación que da una función *aproximada*, a la expresión de la función *exacta* por una serie se logra, pues, intercalando puntos intermedios equidistantes. En cambio, de la fórmula de interpolación de Newton (93) a la de Taylor, que también da la función exacta en cierto entorno de x_0, se pasa haciendo tender $x_1, x_2, \ldots$ hacia x_0.

EJERCICIOS

1. — Obtener aproximaciones sucesivas, dividiendo el intervalo $(0, 2\pi)$ en 2, 4, 6 partes, de la función:

$$y = \pi/4 \text{ para } 0 < x < \pi$$
$$y = -\pi/4 \text{ para } \pi < x < 2\pi$$

2. — Idem para el ejemplo 1.° de la lección siguiente.

DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIE TRIGONOMETRICA

157. — Planteo del problema.

La descomposición aproximada de una función periódica $f(t)$ en n armónicos, es decir: la descomposición de $f(t)$ en suma de senos y cosenos de arcos múltiplos sucesivos, si bien puede ser suficiente en algunos problemas de la técnica, no es satisfactoria en general ,porque el grado de aproximación logrado sólo puede calcularse *a posteriori;* y si no es suficiente, precisa reanudar otra, con mayor número de divisiones del intervalo.

Suponiendo reducido el período T al 2π por el cambio de variable $x = 2\pi t/T$, vamos a abordar el problema de la descomposición *exacta* de $f(x)$ en infinitos armónicos, o sea el desarrollo en serie trigonométrica:

$$f(x) = k_0 + a_1 . \cos x + b_1 . \operatorname{sen} x + a_2 . \cos 2x + b_2 . \operatorname{sen} 2x + \ldots .$$
$$\ldots . + a_n . \cos nx + b_n . \operatorname{sen} nx + \ldots . \qquad [1]$$

Con método analítico, supongamos que $f(x)$ admite tal desarrollo en serie, integrable término a término, y veamos que los coeficientes están unívocamente determinados, calculando para ello algunas integrales elementales.

158. — Integración de productos de senos y cosenos.

Recordando el desarrollo de senos y cosenos de sumas y diferencias y suponiendo enteros los coeficientes m y n, resultan inmediatamente:

Para integrar productos de senos y cosenos de múltiplos de t los transformaremos en suma o diferencia de senos o cosenos:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx . \cos nx . dx = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x] \, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx . \cos nx . dx = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos (m+n)x + \cos (m-n)x] \, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx . \operatorname{sen} nx . dx = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos (m-n)x - \cos (m+n)x] \, dx = 0$$

puesto que las funciones primitivas son senos o cosenos, que toman igual valor en 0 y en 2π.

Sólo un caso hay en que el resultado de las dos últimas integrales no es nulo; cuando sea: $m = n$; pues siendo $\cos(m-n)t = 1$, resulta de las fórmulas anteriores:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, . \, dx = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2nx)\, dx = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 nx \, . \, dx = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2nx)\, dx = \pi$$

159.—Cálculo de los coeficientes de Fourier.

Supuesto el desarrollo [1] de $f(x)$ en serie integrable, veamos cómo se determinan muy fácilmente sus coeficientes.

Para calcular k_0 integraremos ambos miembros entre 0 y 2π, y en el segundo miembro se anulan todas las integrales (según el párrafo anterior) excepto la primera, que vale $2\pi k_0$. Por tanto:

$$2\pi\, k_0 = \int_0^{2\pi} f(x)\, dx \qquad [2]$$

o sea: k_0 = valor medio de $f(x)$ en el intervalo $(0{,}2\pi)$.

Para calcular a_n multiplicaremos ambos miembros por $\cos nx$ e integrando se anulan todos los términos excepto el a_n y resulta:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, . \cos nx \, . \, dx = \int_0^{2\pi} a_n \, . \cos^2 nx \, . \, dx = a_n\, \pi.$$

Análogamente para determinar b_n multiplicamos por $\operatorname{sen} nx$ e integrando obtenemos:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, . \, dx = \int_0^{2\pi} b_n \, . \operatorname{sen}^2 nx \, . \, dx = b_n\, \pi.$$

Despejando a_n y b_n obtenemos las fórmulas generales:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, . \cos nx \, . \, dx \quad ; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, . \operatorname{sen} nx \, . \, dx \qquad [3]$$

Cada coeficiente de la serie de Fourier viene dado, por consiguiente, por una integral en el intervalo $(0{,}2\pi)$ que puede calcularse con la fórmula de Simpson, con el intégrafo o gráficamente. Hay aparatos especiales, compuestos de varios intégrafos que dan mecánicamente los coeficientes sucesivos; se llaman *analizadores armónicos* y de ellos nos ocuparemos después.

Resulta, pues, que si $f(x)$ es desarrollable en serie integrable [1] tal desarrollo es único; y sus coeficientes vienen dados por las fórmulas [2] y [3]. Ahora bien: dada una función $f(x)$ periódica, ¿cómo reconocer *a priori* si admite o no tal tipo de desarrollo?

Podemos calcular los números [2] y [3] que llamaremos *coeficientes de Fourier* de la función (en abreviatura: c. F.) podemos formar con ellos la *serie de Fourier* (en abreviatura: s. F.); pero, ¿cómo probar su convergencia y, lo que es mucho más difícil, sumarlas y demostrar que tal suma es precisamente $f(x)$?

Afortunadamente para todos los que precisan este maravilloso instrumento analítico, sin poder estudiar a fondo su difícil teoría, el criterio práctico (que demostramos en las Notas) es sencillísimo.

160. — Desarrollos de tipos especiales.

Se abrevia notablemente el cálculo de coeficientes cuando la función es de estructura especial.

Observemos ante todo que se puede tomar como intervalo de integración $[-\pi, +\pi]$ en lugar de $[0,2\pi]$; pues por la periodicidad del integrando, resulta la descomposición:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx \, dx = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{0}$$

y análogamente para la fórmula que expresa b_n.

1.° Si $f(x)$ es *impar*, es decir, $f(-x) = -f(x)$, el integrando $f(x)\cos nx$, toma en $[-\pi,0]$ valores opuestos a los que toma en $[0,\pi]$, luego las dos integrales son opuestas y resulta $a_n = 0$. Por tanto:

$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots\ldots = 0,$$

es decir: *El desarrollo de una función impar, sólo contiene senos.*

2.° Si $f(x)$ es *par*, es decir, $f(-x) = f(x)$, el integrando $f(x)$ sen nx toma en $[-\pi,0]$ valores opuestos a los de $[0,\pi]$, por causa del factor sen nx, luego resulta nula la integral que expresa b_n. Por tanto:

$$b_1 = b_2 = b_3 = \ldots\ldots = 0,$$

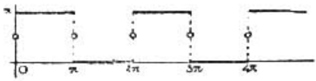
es decir: *El desarrollo de una función par sólo contiene cosenos.*

Si $f(x)$ es *alternada*, esto es: $f(x+\pi) = -f(x)$, resulta que al incrementar x es π, si n es número par queda el arco incrementado en múltiplo de 2π; luego tanto cos nx como sen nx toman el mismo valor, mientras que $f(x)$ toma el opuesto y por tanto las integrales que definen a_n y b_n son nulas. Es decir:

$$a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = \ldots\ldots = 0$$
$$b_2 = b_4 = b_6 = \ldots\ldots = 0$$

El desarrollo de una función alternada sólo contiene múltiplos impares de la variable.

EJEMPLO 1.° — Sea la función periódica representada en la figura; se tiene:



$$a_0 = \pi/2$$

$$a_n = \int_0^{\pi} \cos nt \,.\, dt + 0 = 0$$

$$b_n = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} n\, t\, dt + 0$$

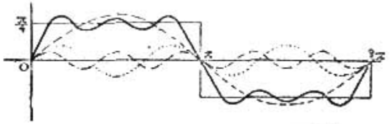
y siendo esta última igual a $2/n$ o bien nula, según que n sea impar o par, resulta el desarrollo:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{2 . \operatorname{sen} t}{1} + \frac{2 . \operatorname{sen} 3\,t}{3} + \frac{2 . \operatorname{sen} 5\,t}{5} + \ldots .$$

Se observa que para $t = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ \ldots .$ resulta $y = \pi/2$, es decir: el promedio de los dos límites a derecha e izquierda.

En cambio, para $t = \pi/2$, resulta: $y = \pi$.

EJEMPLO 2.° — Sea la onda:



$y = \pi/4$ entre $0 < x < \pi$
$y = -\pi/4$ para $\pi < x < 2\pi$

El desarrollo sólo contiene senos de múltiplos impares, por ser la función impar y alternada:

$$y = \operatorname{sen} t + \frac{\operatorname{sen} 3\,t}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5\,t}{5} + \ldots .$$

En la figura se han dibujado los tres primeros términos y su suma, para ver como se va aproximando a la función dada, al tomar términos sucesivos de la serie.

EJEMPLO 3.° — Sea la función definida por los segmentos de paralelas a la bisectriz trazados por los puntos $2n\pi$.

Por ser función impar (es decir: $f(-t) = -f(t)$) el desarrollo sólo contendrá senos. Calculados los coeficientes, resulta fácilmente:

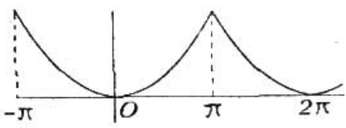
$$f(t) = \operatorname{sen} t - \frac{\operatorname{sen} 2\,t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3\,t}{3} - \ldots$$

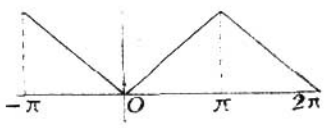
Y aquí también se ve que para $t = \pi,\ 3\pi\ \ldots .$ resulta $y = 0$, es decir, el promedio de la discontinuidad.

EJEMPLO 4.° — Efectúense los desarrollos de estas funciones:

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots .$$

$$|\,x\,| = \tfrac{1}{2}\,\pi - (4/\pi)\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots .\right)$$





161. — Analizadores armónicos.

Son aparatos que determinan automáticamente los primeros coeficientes del desarrollo en serie de cualquier función continua, con un número finito de máximos y mínimos en el intervalo $(0, 2\pi)$. Para poder realizar simultáneamente la multiplicación de $f(x)$ por el coseno o seno de nx, y la integración entre 0 y 2π, transformaremos por partes las integrales que expresan los coeficientes, en esta forma:

$$n \int y.\cos nx.dx = \int y.d(\operatorname{sen} nx) = y.\operatorname{sen} nx - \int \operatorname{sen} nx.dy$$

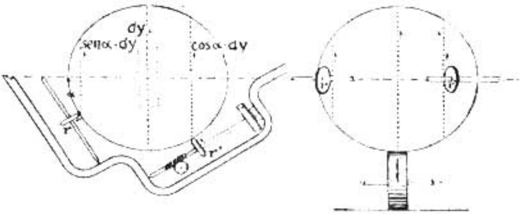
$$n \int y.\operatorname{sen} nx.dx = -\int y.d(\cos nx) = -y.\cos nx + \int \cos nx.dy$$

luego integrando entre 0 y 2π y dividiendo por π resulta:

$$n\pi a_n = -\int_{x=0}^{x=2\pi} \operatorname{sen} nx.dy; \quad n\pi b_n = \int_{x=0}^{x=2\pi} \cos nx.dy$$

debiendo extenderse ambas desde $x = 0$ hasta $x = 2\pi$.

El cálculo de estas integrales se efectúa mediante una esfera que gira alrededor de un diámetro horizontal paralelo al eje x.



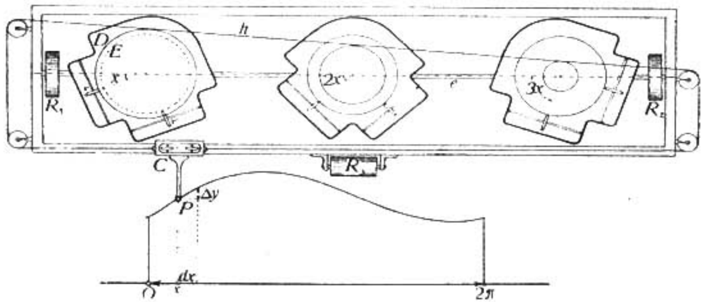
En un bastidor horizontal hay dos ejes perpendiculares entre sí que llevan sendas ruedecillas r y r' las cuales tocan a la esfera en puntos del círculo máximo horizontal. La sección por este plano horizontal está representada por la fig. 1.ª y la sección vertical en la fig. 2.ª. Debajo de la esfera y tangente a ella hay un disco de ancha llanta; si éste gira un arco Δy, también la circunferencia meridiana de la esfera gira Δy en sentido contrario, y los puntos de contacto de las ruedecillas $r\,r'$ describen sobre la esfera circunferencias menores, paralelas a dicho meridiano; las longitudes de estos arcos de circunferencia son proporcionales a los radios respectivos, luego al girar Δy la esfera, la ruedecilla r *gira* $\operatorname{sen} \alpha.\Delta y$, *y la ruedecilla* r' *gira* $\cos \alpha.\Delta y$.

Bastará, pues, un mecanismo que obligue al bastidor a girar en su plano horizontal de modo que en todo momento sea: $\alpha = nx$; y como la variable independiente es y, siendo por tanto $\Delta y = dy$, el arco total girado por r será la integral definida que figura en a_n, así como la ruedecilla r' marcará como arco total girado la integral que figura en b_n.

Estos números leídos directamente en las graduaciones que acompañan a r y r', bastará dividirlos por $n\pi$, para tener los coeficientes a_n y b_n.

El aparato determinará tantos pares de coeficientes como esferas tenga, (en la figura se han representado tres esferas solamente). El término constante a_0 del desarrollo se determina por un planímetro o intégrafo, puesto que su significado es el área limitada por la onda con el eje x, dividida por 2π.

Descripción del modelo Henrici-Coradi. — Consta de un gran bastidor provisto de tres ruedas R_1, R_2, R_3, de modo que se mueve solamente en dirección perpendicular al eje x; sobre uno de los lados de este bastidor se mueve en un intervalo 2π un carrito el cual lleva unido un estilete P que permite recorrer la curva dada. Al pasar desde el punto P al P', el carrito se ha movido Δx sobre el gran carro y éste a su vez se ha movido Δy en la dirección del eje y; los discos situados debajo de las esferas, las cuales van invariablemente unidas al eje e de las ruedas R_1, R_2 giran como éstas Δy (*) y esta rotación es trasmitida a las esferas, y de éstas a las respectivas ruedecillas r, r'.



Al comenzar a recorrer la onda, desde la posición extrema P_0 del carrito, todos los bastidores están dispuestos de modo que la ruedecilla r de cada uno toca en el diámetro de giro de las esferas, es decir, de modo que el ángulo α de la figura es nulo. Bastará, pues, que al avanzar x el carrito, el valor de α en cada bastidor sea respectivamente x, $2x$, $3x$, $4x$, ... y esto se consigue fácilmente, porque el carrito lleva atado en sus extremos un hilo de plata que hace girar los bastidores mediante poleas situadas horizontalmente en la parte superior del aparato ,formando cuerpo con dichos bastidores y cuyos radios son, respectivamente, 1, 2, 3, ..., de modo que la primera polea da justamente una vuelta, al avanzar 2π el hilo; y cuando éste avanza x, la polea, y con ella el bastidor que soporta las ruedecillas $r\,r'$) gira un ángulo $\alpha = x$; el bastidor de la segunda esfera gira un ángulo $2x$; el tercero gira $3x$; etc.

En resumen, los coeficientes a_1, b_1; a_2, b_2; .... se obtienen dividiendo las lecturas en las ruedecillas del primero, segundo, ... bastidor por 1, 2, 3, ...

(*) Si, como suele suceder, estos discos de eje e tienen menor radio que las ruedas R_1, R_2, el arco girado no será Δy sino $h\,\Delta y$ siendo h la razón de los radios y en vez de multiplicar por $1/\pi$ las lecturas finales en r y r', la constante será distinta; para cada aparato la graduación de las ruedas r, r' está hecha teniendo en cuenta esta constante, de modo que basta una simple lectura.

COMPLEMENTOS DE CALCULO INTEGRAL

1. — Lema de Borel.

He aquí una sencilla propiedad de los intervalos *completos* $[a, b]$ que no vale para los incompletos, y que por efectuar el tránsito de lo infinito a lo finito, es muy útil en Análisis.

Si cada punto de un intervalo completo $[a, b]$ *tiene un entorno, hay un número finito de éstos, tales que cada punto del intervalo tiene alguno de ellos como entorno.* (BOREL).

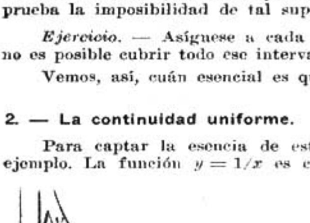
Supongamos, por el absurdo, que para todo conjunto finito de tales entornos e haya puntos x no cubiertos; bisecado $[a, b]$, en alguna de sus mitades $[a_1, b_1]$ habrá de tales puntos; bisecado éste, en alguna de sus dos partes, que llamaremos $[a_2, b_2]$, acontecerá lo mismo; etc. Por el teorema (11) de las sucesiones monótonas convergentes, hay un punto ξ, contenido en todos estos intervalos, el cual, por la hipótesis, es interior a uno de los entornos e; y éste es también entorno de todos los puntos de los $[a_n, b_n]$ que desde un n en adelante son interiores a él. Habíamos supuesto que no podían cubrirse con *ningún número* finito de entornos e y resultan cubiertos con un e; contradicción que prueba la imposibilidad de tal supuesto.

Ejercicio. — Asígnese a cada x de $(0,1]$ el entorno $(\frac{1}{2}x, 2)$ y véase que no es posible cubrir todo ese intervalo $(0,1]$ con número finito de tales entornos.

Vemos, así, cuán esencial es que el intervalo sea *completo*.

2. — La continuidad uniforme.

Para captar la esencia de este importante concepto, nada mejor que un ejemplo. La función $y = 1/x$ es continua en todo punto distinto de O, como se ve formando el incremento:



$$\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{-h}{(x+h)x} = -hyy_1$$

llamando y_1 a la ordenada correspondiente al punto $x + h$.

Si se elige p. ej. $x = 4$, $y = \frac{1}{4}$, para lograr que sea $|\Delta y| < 0{,}1$ bastara evidentemente tomar $|h| \leq 1$; pero esta amplitud resulta ya excesiva en el punto $x = 1$, pues en él es $y = 1$, mientras y_1 toma en el entorno de radio 1 valores arbitrariamente grandes. Es claro que se logra hacer Δy menor que 0,1 tanto en el punto 4, como en el 1, tomando $|h| \leq 0{,}1$; pero también esta amplitud resulta excesiva para todos los puntos comprendidos entre 0 y 0.1, pues en entorno de tal amplitud hay valores y *arbitrariamente* grandes.

DEFINICIÓN. — La continuidad de $f(x)$ se dice *uniforme en un intervalo*, si para cada $\varepsilon > 0$ existe otro número positivo δ, tal que $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ para todo par de puntos x', x'' que distan menos de δ.

Resulta, pues, que la continuidad de $1/x$ *no es uniforme* en ningún intervalo $(0,a)$; pues aunque en un cierto entorno de cada punto los valores de $f(x)$ difieren del que toma en él en menos de ε y por tanto difieren entre sí en menos de 2ε, como hay infinitos de tales intervalos, y los hay arbitrariamente pequeños, no es posible elegir una amplitud mínima, válida para todo punto x.

Ahora bien, si el intervalo de continuidad es *completo* (tal p. ej. el $[1,2]$ para la función $1/x$) es aplicable el Lema de Borel, y si δ es la amplitud mínima de los entornos elegidos para cubrir $[a, b]$, dos puntos x', x'' que disten menos de δ deben estar en un mismo entorno, en cuyo caso los valores de $f(x)$ difieren en menos de 2ε; o bien en dos entornos con punto común, y en ese punto difiere $f(x)$ de $f(x')$ y de $f(x'')$ menos de 2ε, luego éstos difieren entre sí menos de 4ε. Por tanto:

Toda función continua en intervalo completo es uniformemente continua en él. (HEINE).

De esta uniformidad hemos hecho uso en la *Nota* de Lecc. 53, sobre rectificación de curvas, y ahora vamos a deducir otro importante teorema.

3. — Integración de funciones continuas.

Hemos demostrado en (130) que son integrables las funciones monótonas (continuas o discontinuas) y más en general las que son monótonas en cada intervalo parcial de una cierta partición finita del intervalo $[a\ b]$. Brevemente diremos: funciones que cumplen la *condición de Dirichlet*.

Otra clase importante es la de las funciones continuas en intervalo *completo* $[a, b]$, y por tanto *uniformemente continuas*, en virtud del teorema de Heine. Siendo, en efecto, menores que ε todos los incrementos Δy, es decir, todas las alturas de los rectángulos que encierran la curva (130), eligiendo los Δx inferiores a un cierto δ, (lo que acontece desde una partición en adelante) la suma de todas sus áreas es:

$$S_i - s_i < \varepsilon\,[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1})] = \varepsilon\,(b - a)$$

Siendo, pues, esta diferencia arbitrariamente pequeña, resulta:

Toda función continua en intervalo completo, es integrable en él.

El problema de la primitiva, que sólo en casos muy particulares encuentra solución algorítmica, queda así resuelto para todo integrando continuo; pues la integral de $f(x)$ en $[a, x]$ (que puede construirse con el intégrafo), es primitiva de $f(x)$.

Pudiera creer el lector que para calcular tales integrales definidas lo mejor es obtener previamente la primitiva; pero tal problema es en general irresoluble. Así, p. ej., si $f(x) = e^{-x^2}$, el cálculo de la primitiva, que interesa en Probabilidades, lo hemos hecho en (192) aproximadamente, por desarrollo en serie, y en el Apéndice tabulamos los resultados. (*)

(*) Esencial en tales cálculos aproximados es la acotación del error, para saber cuantas son las cifras exactas que pueden utilizarse.

En vez de adoptar como cota de error el primer término despreciado, como hemos hecho en (142), algún autor obtiene cota mucho mayor por no utilizar el carácter alternado de la serie. Así p. ej. *Scheffer* en su *Lehrbuch der Mathematik*, Leipzig, 1901, pág. 569, da ese mismo término dividido por $1 - x^2 : (m + 1)$.

Resulta así que si se toman tres términos, y es p. ej. $x = 1{,}9$, su cota resulta 10 veces mayor que la nuestra; si es $x = 1{,}99$ resulta 100 veces mayor; y siendo ya grosera la aproximación para $x > 1$, tal imprecisión de la cota la hace inservible.

4. — Rectificación de curvas.

Aunque sale del marco del Cálculo diferencial e integral el estudio general de las curvas, daremos algunas nociones del problema.

Los perímetros de las poligonales inscriptas en un arco finito crecen al intercalar nuevos vértices; luego caben dos casos: si superan a todo número, el arco se llama *no rectificable*, o de longitud infinita; si tales perímetros están acotados, tienen según (11) un límite, que se llama *longitud* del arco. Si éste viene dado por funciones con derivada continua, ya hemos demostrado (219) que es rectificable; pero si tal continuidad no alcanza a los extremos, puede resultar no rectificable el arco.

EJEMPLO. — La función continua x . sen (π/x), estudiada en (9), tiene derivada continua, salvo en el origen; si se adoptan como vértices los puntos de contacto con las bisectrices de los ejes, y las intersecciones con el eje x, las longitudes de los lados oblicuos superan a las ordenadas correspondientes, cuyas sumas de valores absolutos:

$$\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\ldots+\frac{2}{2n-1}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

superan a todo número, como se vió en (39); luego el arco $[0, 2]$ *no es rectificable*, ni tampoco cualquier otro: $[0, a]$.

La función $y=f(x)$ se llama de *variación acotada* en (a, b) si las sumas $\Sigma\,|\,\Delta y\,|$ para toda división de (a, b) en número finito de partes, son inferiores a un número fijo.

El razonamiento hecho para el ejemplo anterior demuestra en general que si $f(x)$ *es* de variación *no acotada, el arco no es rectificable.*

Si la curva viene dada paramétricamente por las funciones $x(t)$, $y(t)$, como cada cuerda es menor que la suma de los catetos $|\,\Delta x\,| + |\,\Delta y\,|$, que la tienen por hipotenusa, resulta: *si están acotadas las sumas* $\Sigma\,|\,\Delta x\,|$ y $\Sigma\,|\,\Delta y\,|$, es decir, *si* $x(t)$, $y(t)$, *son de variación acotada, la curva es rectificable.*

En cambio, si alguna de ellas tiene variación *no acotada*, como las cuerdas son mayores que los catetos, la curva *no es rectificable*, como se vió en el ejemplo. Queda así demostrado:

Condición necesaria y suficiente para que un arco sea rectificable, es que las funciones que lo definen sean de variación acotada. (JORDAN).

5. — Series e integrales sobre intervalo infinito.

Aunque el concepto de integral definida nace de un proceso infinitesimal, ofrece parecido al de suma finita en sus propiedades lineales y de monotonía obtenidas en (130). La analogía se hace más patente al combinar ambos algoritmos con el paso al límite para formar *series* en un caso, e *integrales en intervalo infinito*, en el otro. He aquí las definiciones correlativas:

$$\sum_{a}^{\infty} u_t = \lim \sum_{a}^{n} u_t \qquad \int_{a}^{\infty} u(t)\,dt = \lim \int_{a}^{n} u(t)\,dt$$

con la diferencia de que n debe tomar valores naturales en el 1.er caso, y toma valores reales cualesquiera en el 2.ª.

La integral como la serie, se llama *convergente ,divergente, oscilante*, según que el límite sea finito, infinito o inexistente.

Cuando el integrando es positivo sólo cabe la convergencia y la divergencia, y vale el criterio de comparación, como en las series (30). Así p. ej. puesto que la integral de e^{-x} converge, pues su primitiva $-e^{-x} \to 0$, también converge la integral si el exponente de e es $-x^2 < -x$. Tal integral de e^{-x^2}, fundamental en Cálculo de probabilidades y teoría de errores, se calculará en (262).

Ejemplo sencillo en que se presentan los dos casos de convergencia y divergencia, es la integral:

$$\int x^m \, . \, dx = \lim \int x^m \, . \, dx$$

Si $m < -1$ es $m + 1$ negativo, y la primitiva $x^{m+1} : (m+1) \to 0$, luego la integral *converge*. Si $m > -1$ *diverge*. Si $m = -1$ la primitiva es el logaritmo que crece infinitamente, luego *diverge* la integral.

Interesante es comparar la serie $\Sigma u(m)$ con $\int u(x) dx$ cuando $u(x)$ es *decreciente*. Si se construyen los rectángulos por defecto y por exceso (130) adoptando como escala de partición los números 0, 1, 2, 3, ..., resulta que las sumas S_i y s_i que acotan la integral sobre $(0\ n)$ son sumas parciales de la serie; si ésta converge, también la integral, por ser sus integrales parciales menores que las correspondientes S_i; si la serie diverge, es decir, si las s_i crecen infinitamente, diverge la integral. Por tanto: *La serie y la integral de función decreciente tienen igual carácter.* (Criterio de Mac-Laurin).

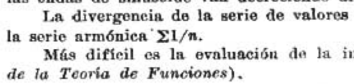
Ejemplo. — La serie armónica general: Σn^{-h} tiene igual carácter que la integral de x^{-h}, luego resulta:

Si $h \leqq 1$ la serie diverge; si $h > 1$, converge.

6. — Convergencia absoluta y condicional.

También para integrando que toma valores positivos y negativos subsiste la analogía con las series. Llamando $f_1(x)$ a la función que coincide con $f(x)$ donde ésta es positiva, y vale 0 en los demás puntos; y análogamente $f_2(x) = -f(x)$ donde $f(x)$ es negativa y nula en el resto del intervalo (a, ∞) es $f = f_1 - f_2$ y repitiendo *mutatis mutandis* los razonamientos (95) resulta:

Si converge la integral de $|f(x)|$, ***también converge la de*** $f(x)$. Esta convergencia se llama ***absoluta;*** pero cabe la convergencia ***condicional*** de $f(x)$, que no implica la de $|f(x)|$.



Ejemplo importante de integral condicionalmente convergente:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx = \tfrac{1}{2}\pi$$

Su convergencia se ve inmediatamente (30) observando que las áreas de las ondas de sinusoide van decreciendo al crecer el denominador y tienden a 0.

La divergencia de la serie de valores absolutos resulta por comparación con la serie armónica $\Sigma 1/n$.

Más difícil es la evaluación de la integral arriba indicada (V. ***Elementos de la Teoría de Funciones***).

Ejercicio. — Demuéstrese la divergencia de las integrales sobre $(0, \infty)$ de las funciones siguientes:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} \qquad \frac{\cos^2 x}{x} \qquad \frac{\operatorname{sen}^2 x^2}{x}$$

7. — Criterios de Abel y de Dirichlet.

Sumación por partes. — Desde Abel se usa frecuentemente en la teoría de series la siguiente transformación, correlativa de la integración por partes:

Llamando $U_m = u_0 + u_1 + \ldots + u_{m-1}$, $U_0 = 0$, la suma:

$$S_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \ldots + u_{n-1} v_{n-1} \qquad [1]$$

puede escribirse así:

$$S_n = v_0(U_1 - U_0) + v_1 (U_2 - U_1) + \ldots + v_{n-1} (U_n - U_{n-1}) =$$
$$= U_n v_n + U_1(v_0 - v_1) + U_2(v_1 - v_2) + \ldots + U_n (v_{n-1} - v_n);$$

igualdad que puede adoptar forma análoga a la de integración por partes, usando la notación (93). Deduzcamos dos importantes consecuencias.

Si las U_n están acotadas, es decir: $| U_n | < k$, los términos del 2.° miembro (prescindiendo del 1.°), son menores que los términos de la serie:

$$k [(v_0 - v_1) + (v_1 - v_2) + \ldots] < k v_0 \qquad [2]$$

luego aquéllos forman serie absolutamente convergente.

En cuanto al término inicial $U_n v_n$ tiende a **0** si $v_n \to 0$, luego $\Sigma u_n v_n$ converge. También si U_n tiene límite, es decir, si la serie Σu_n converge, puesto que v_n tiene límite, por ser decreciente positiva.

Tenemos, pues, dos conclusiones:

La serie $\Sigma u_n v_n$ de factores v_n positivos y decrecientes converge si se cumple una u otra de estas dos condiciones:

Converge la serie Σu_n (Criterio de ABEL).

Las sumas parciales U_n están acotadas y $v_n \to 0$. (Criterio de DIRICHLET).

NOTA. — En el primer caso resulta $| S | < kv_0$; en el segundo caso $| S | < 2kv_0$.

Correlativamente se demuestran ambos criterios para las integrales. Aplicado el de Dirichlet a la integral de $(\operatorname{sen} x)/x$, resulta su convergencia, por estar acotada la integral de $\operatorname{sen} x$, y tender a 0 el factor decreciente $1/x$.

8. — Series funcionales. Convergencia uniforme.

Las series de potencias y las trigonométricas son dos tipos particulares de las *series funcionales* del tipo general:

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad [1]$$

De igual modo que la aproximación de una función continua $f(x)$ a su valor depende de a, es decir, la amplitud del entorno en que el error es $| f(x) - f(a) | < \varepsilon$, varía con a, así también el número de términos de la serie [1], necesarios para que su suma difiera de $f(x)$ menos de ε, depende de x.

La convergencia se dice *uniforme* en (a, b) si para cada $\varepsilon < 0$ existe un número n de términos tal que dicho error, o sea el *resto* de la serie, es

$$| u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots | < \varepsilon$$

cualquiera que sea el punto x de (a, b).

Consideremos, p. ej., la serie geométrica $1 + x + x^2 \ldots$, cuyo resto es $x^n : (1 - x)$. Si es $x = \frac{1}{2}$, basta tomar 5 términos para que tal error sea $< 0{,}1$; si es $x = \frac{3}{4}$ se necesitan 12 términos para lograr esa misma aproximación; y tal número crece indefinidamente al acercarse x a 1. La convergencia no es, por tanto, uniforme en el intervalo $(0{,}1)$; lo es, sin embargo, en $(0{,}a)$ si es $a < 1$, pues siendo convergente la serie:

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^n + \ldots$$

se puede tomar n suficiente para que sea el resto $< \varepsilon$; y como la serie propuesta $1 + x + x^2 + \ldots$ tiene los términos menores, su resto será $< \varepsilon$, desde ese n en adelante, para todo $x < a$; y también para valores negativos, tales que $|x| < a$.

Este mismo razonamiento es aplicable con mayor generalidad, y resulta este criterio llamado *de la serie mayorante*, o de Weierstrass:

I. — *Si los términos u_n son en valor absoluto menores que los términos a_n de una serie numérica convergente, para todo x de un intervalo, la serie $\Sigma u_n(x)$ converge uniformemente en él.*

Así, por ejemplo, la serie trigonométrica:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1^2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2} + \ldots$$

converge uniformemente en todo el campo real, pues la serie numérica *mayorante* $\Sigma\, 1/n^2$ converge, como se vió en (41), y como resulta asimismo del criterio de Mac-Laurin.

La Nota de (nº 7) permite formular otro criterio, que llamaremos de Dirichlet:

II. — *Converge uniformemente en (a, b) la serie $\Sigma u_n(x) \cdot v_n$ (v_n decrecientes) si las sumas $U_n(x)$ están acotadas uniformemente, es decir: $|U_n(x)| < k$, para todo x de (a,b), y además se verifica: $v_n \to 0$.*

En efecto, el resto, según dicha nota, es $< kv_n$, y desde un n se conserva $< \varepsilon$, para todo x de (a, b).

9. — Propiedades de la convergencia uniforme.

La importancia del concepto de convergencia uniforme reside, sobre todo, en esta propiedad:

T. 1. — *Si los términos de una serie $f(x) = \Sigma u_n(x)$ uniformemente convergente en (a, b) son funciones continuas en el mismo, también lo es la suma de la serie.*

En efecto, descompuesta $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$, llamando $\delta_n(x)$ a la suma de los n primeros términos y $R_n(x)$ al resto, el incremento de $f(x)$ se descompone así:

$$f(x + h) - f(x) = [S_n(x + h) - S_n(x)] + R_n(x + h) - R_n(x).$$

Siendo x interior al intervalo (a, b) y elegido h de modo que $x + h$ lo sea también serán por la supuesta uniformidad de la convergencia inferiores a ε en valor absoluto los dos restos que figuran en el trinomio para un cierto índice n. Así fijado n, el incremento de la función continua $\delta_n(x)$ que figura en el paréntesis, puede hacerse $< \varepsilon$ eligiendo $|h| < \delta$; luego para tales incrementos de x el incremento de $f(x)$ resulta $< 3\varepsilon$.

Si x es uno de los extremos del intervalo, resulta continuidad a la derecha de a, y a la izquierda de b.

Otra propiedad importante es la integrabilidad término a término:

T. 2. — *Si la serie de funciones continuas $f(x) = \Sigma u_n(x)$ converge uniformemente en (a, b) la serie de las integrales definidas en (a, b) es igual a la integral de la serie.*

Si designamos por U_n la integral de $u_n(x)$ y por F la integral de la función también continua f, resulta, integrando los dos miembros de la igualdad:

$$f(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x) + R_n(x)$$

que la integral $F(x)$ difiere de la suma $U_1(x) + \ldots . + U_n(x)$ en la integral del resto; pero siendo éste menor que ε, desde un n en adelante, su integral $U_1(x) + U_2(x) + \ldots .$ converge y su suma es $F(x)$.
será menor que $\varepsilon(b - a)$: luego tal diferencia tiende a 0, es decir, la serie
Esta propiedad generaliza la ya demostrada en (101) para las series de potencias, que hemos aplicado fructuosamente en (107) y (109).

Como corolario resulta:

T. 3. — *Es legítimo derivar término a término una serie $\Sigma U_n(x) = F(x)$ si converge uniformemente la serie de derivadas $\Sigma u_n(x) = f(x)$*, es decir: $f(x) = F'(x)$.

10. — Relación entre los coeficientes de Fourier de primitiva y derivada.

El concepto de convergencia (9 y 36) por aproximación indefinida, debido a Wallis, y rigorizado por Bolzano y Cauchy, implica serias dificultades para el cálculo con series, que éstos no lograron vencer. La integración término a término la hemos apoyado (n.º 9) en la convergencia *uniforme* en todo el intervalo ;pero tal hipótesis restringe mucho el alcance de la teoría de las series trigonométricas, poco desarrollada todavía por esa causa.

Adoptemos en cambio desarrollos en el sentido de Fourier, es decir, expresemos con el signo $\sim$ la relación entre una función y su S. F., cuyos coeficientes se calculan por las fórmulas de Euler (159) y escribamos:

$$[1] \qquad f(x) \sim \Sigma\, a_n \,.\, \cos nx + b_n \,.\, \operatorname{sen} nx$$

Luego veremos que las sumas sucesivas S_n de esta serie se aproximan indefinidamente a $f(x)$, pero midiendo el error de modo distinto al de Wallis, y más bien análogo a la distancia cartesiana ;pero ahora sólo interesa notar cuán sencillamente se opera con estos desarrollos. Calcule el lector los c. F. de la función $F(x)$, integral de $f(r)$ en $(0,r)$; y suponiendo $k_0 = 0$, una sencilla integración por partes le conducirá a estos coeficientes: $A_n = - b_n/n$, $B_n = a_n/n$; pues los términos $F(x) \operatorname{sen} nx$, $F(x) \cos nx$ se anulan para $x = 2\pi$, por ser $F(2\pi) = nk_0 = 0$. Resulta así la nueva serie de Fourier:

$$[2] \qquad F(x) \sim C + \sum - \frac{b_n \,.\, \cos nx}{n} + \frac{a_n \,.\, \operatorname{sen} nx}{n}$$

La s. F. de la primitiva de $f(x)$ se forma integrando término a término la s. F. de $f(x)$.

Si $k_0 \neq 0$, subsiste la conclusión, siendo $F(x)$ la integral de $f(x) - k_0$, lo que equivale a agregar el término $k_0 x$ a la expresión anterior.

11. — Unicidad de la función definida por los coeficientes de Fourier.

Los c. F. de las funciones continuas pueden considerarse como coordenadas que determinan cada función. No son ciertamente números que puedan darse arbitrariamente; pero de haber alguna función continua con c. F. prefijados, ésta es única. De otro modo: *Dos funciones continuas con los mismos c. F. son idénticas.*

Puesto que los c. F. de $f_1(x) - f_2(x)$ son las diferencias entre los c. F. correspondientes de ambas funciones, bastará probar:

Si una función continua periódica $f(x)$ tiene nulos todos sus c. F., es idénticamente nula.

Supongamos que en un punto de continuidad no sea nula. Adoptado ese punto como origen, sea $f(0) = 2k > 0$; y por la continuidad, será $f(x) > k$ en un cierto entorno $(- 2h, + 2h)$ el cual disminuiremos, si es preciso, a fin de que sea $\cos x > ½$.

Puesto que son nulas las integrales de $f(x)\cos nx$ y de $f(x)\,\mathrm{sen}\,nx$, también es nula la integral de $f(x)$ por cualquier polinomio trigonométrico, por ser combinación lineal de tales integrales. Por tanto:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,(1-\cos h+\cos x)^n\,dx = 0 \qquad [1]$$

pues desarrollando la potencia resulta un polinomio del tipo $a + b\,.\cos x + {} + c(\cos x)^2 + \ldots.$; y es sabido de Trigonometría que estas potencias se expresan linealmente mediante $\cos x$, $\mathrm{sen}\,x$, $\cos 2x$, $\mathrm{sen}\,2x$. ....

La gráfica del trinomio es la cosinusoide trasladada el segmento $1-\cos h > 0$; luego dicho trinomio es mayor que 1 en $(-h, h)$, igual a 1 en h y $-h$; menor que 1 en valor absoluto en el resto. Más aún: como en el punto $2h$ vale:

$$1-\cos h + (2\cos^2 h - 1) = \cos h\,(2\cos h - 1) < \cos h < 1$$

si M es una cota superior de $f(x)$ el valor absoluto del integrando en $(2h, \pi)$ y en su simétrico $(-\pi, -2h)$ es menor que $M(\cos h)^n$, número arbitrariamente pequeño al crecer n. En cambio, la integral en $(-2h, 2h)$ es mayor que en $(-h, h)$; y en éste, como el integrando supera a k, dicha integral es mayor que $2hk$ para todo n. Por tanto es imposible la anulación [1].

Suponer $f(x) \neq 0$ implica, como se ve, contradicción con la igualdad [1]; luego debe ser $f(x)$ nula en todo punto.

12. — Tipo I. La serie de coeficientes converge absolutamente.

Si la s. F. de la función continua $f(x)$ resulta *uniformemente convergente en todo el período,* su suma es una función *continua* (T. 1); y como en virtud de (T. 2) son legítimas las operaciones efectuadas en (159) para deducir los c. F., resultan los mismos a_n, b_n que para $f(x)$; por el teorema (n.º 9) de unicidad, ambas funciones son la misma; o sea: Si *la s. F. de la función periódica continua $f(x)$ converge uniformemente, su suma es $f(x)$.*

La convergencia uniforme no es propiedad que salte a la vista; pero se ve inmediatamente en este caso importante: *cuando la serie de coeficientes converge absolutamente.*

En efecto como los senos y cosenos no superan a 1, es aplicable el criterio de Weierstrass (n.º 8) adoptando tal serie como mayorante y resulta *uniformemente convergente la s. F. en todo el campo real;* luego su suma es precisamente la función continua $f(x)$.

Quedan así demostrados los desarrollos del Ejemplo 4.º dados en (160).

13. — Tipo II. Los coeficientes tienden decreciendo a 0.

En los ejemplos de s. F. desarrollados en (160), en los tabulados a continuación, y en los que figuran en los manuales para ciencias aplicadas, se observa que los coeficientes son todos de igual signo, o bien alternados.

Obsérvase, además, que tales coeficientes son monótonos en valor absoluto. Veamos los diversos casos que se presentan:

Primer caso. Si los coeficientes a_n son positivos y tienden a 0 decreciendo, es aplicable a la serie $\Sigma a_n \cos nx$ el criterio de Dirichlet; pues recordando (*Análisis algebraico*, pág. 499) la expresión:

$$\tfrac{1}{2}\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \mathrm{sen}(n+\tfrac{1}{2})x \ : 2\,\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}x$$

resulta que estas sumas están acotadas si se excluyen entornos arbitrariamente pequeños de los puntos $\pm 2m\pi$.

Por tanto: la serie converge para todo x distinto de estos puntos; y en virtud del citado criterio II, la convergencia es uniforme en $(h, 2\pi - h)$, por pequeño que sea h, luego la suma de la serie es una función continua en todo punto *interior* al intervalo $(0,2\pi)$; y lo mismo puede decirse de las series $\Sigma b_n \operatorname{sen} nx$ de coeficientes b_n que tiendan a 0 decreciendo; y también si la serie se compone de ambas.

Caso 2.º — Si los coeficientes decrecientes tienen signos alternados, la transformación $x' = x - \pi$ unifica los signos; luego resulta:

Si los coeficientes forman serie alternada, la s. F. tiene suma continua en $(-\pi, +\pi)$.

Tal sucede en Ej. 3.º (160) o en su equivalente:

$$\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \ldots.$$

Caso 3.º — Si, como acontece en los Ej. 1.º y 2.º se presentan solamente múltiplos impares de x, con coeficientes positivos, subsiste la conclusión 1.ª; pues las sumas de senos o cosenos son análogas, y están asímismo acotadas; pero los puntos excluídos son entonces $\pm m\pi$.

Esto acontece en los Ej. 1.º y 2.º de (160), o en su equivalente:

$$\operatorname{sg} x = (4/\pi)\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \ldots\right)$$

Caso 4.º — Si solamente hay múltiplos impares, con coeficientes alternados, la traslación $x' = x - \frac{1}{2}\pi$ unifica los signos; y reduciéndose al caso 3.º, los puntos de discontinuidad son los múltiplos impares de $\frac{1}{2}\pi$.

Nos falta todavía demostrar las igualdades tabuladas en el cuadro, es decir, que las s. F. de las diversas funciones convergen hacia ellas. Parecería a primera vista que siendo uniforme la convergencia en todo el campo real, salvo entornos arbitrariamente pequeños de tales puntos; y siendo la suma función continua en todo punto, excepto esos puntos aislados, se podrá sustituir el signo $\sim$ por el $=$; pero es preciso recurrir a un artificio.

Obsérvase en todos los ejemplos citados de s. F. que, aun siendo en *algunos* divergente la serie de coeficientes, al dividirlos por n, resulta en *todo* caso una serie absolutamente convergente, es decir, aun siendo la s. F. de $f(x)$ del tipo II, la de $F(x)$ es del tipo I; y por tanto converge absolutamente y uniformemente en el sentido usual, hacia $F(x)$; luego el signo $\sim$ puede sustituirse por $=$.

Para pasar al desarrollo de $f(x)$, utilicemos la continuidad uniforme ya demostrada cuando los coeficientes son monótonos. Según T. 3, es legítima la derivación término a término, en todo punto de continuidad, y resulta, por consiguiente, $f(x) = \Sigma\, a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$ en todos ellos.

En general: aunque la serie de primitivas no tenga convergente absolutamente la serie de coeficientes, siempre se logra ésto tomando primitivas otra vez; y repitiendo el razonamiento anterior, resulta:

La s. F. de $f(x)$ tiene la suma $f(x)$ en todo punto de continuidad, si los coeficientes a_n, así como los b_n tienden monótonamente a 0. Lo mismo sucede aunque sus signos *sean alternados; y también si solamente figuran arcos en progresión aritmética, de diferencia $2x$, con coeficientes de uno u otro tipo.*

Ya hemos visto cuáles son los puntos de discontinuidad en cada caso; y es fácil generalizar los resultados al caso en que la progresión es de diferencia mx

14. — Funciones ortogonales y convergencia cuadrática.

Si los senos y cosenos de múltiplos de x los designamos por $g_0(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., la propiedad esencial (159) que hemos utilizado es ésta:

$$\int g_m(x)\, g_n(x)\, dx = 0 \qquad \text{si } m \neq n \qquad [1]$$

Toda sucesión de funciones que cumplen tal condición en (a, b) se llama *sistema ortogonal;* los senos y cosenos de múltiplos de x son, pues, ortogonales en $(0,2\pi)$ o en cualquier intervalo de amplitud 2π.

El sistema se dice *normal* si además se verifica:

$$\int g_n(x)^2 \,.\, dx = 1; \quad (n = 0, 1, 2, \ldots.) \qquad [2]$$

basta, pues, dividir los senos y cosenos por la constante $\sqrt{\pi}$ para tener un sistema *ortonormal.*

Si $f(x)$ es desarrollable en serie uniformemente convergente en (a, b):

$$f(x) = \Sigma\, a_n \cdot g_n(x) \qquad \therefore \qquad a_n = \int f(x) g_n(x) dx \qquad [3]$$

pues basta repetir los razonamientos ya hechos (159); y si llamamos c. F. de $f(x)$ a estos números, aunque la serie no resulte uniformemente convergente, veamos cómo se aproximan a $f(x)$ las sumas sucesivas:

$$s_n(x) = a_0 \cdot g_0(x) + a_1 \cdot g_1(x) + \ldots. + a_n \cdot g_n(x) \qquad [4]$$

adoptando como medida del error ésta:

$$\int [f(x) - s_n(x)]^2\, dx = \int f(x)^2\, dx - 2\int f(x)\, s_n(x) dx + \int s_n(x)^2\, dx$$

La 1.ª integral es un número positivo, llamado *norma* de $f(x)$. La 2.ª se descompone así:

$$\int f \cdot s_n = a_0 \int f \cdot g_0 + a_1 \int f \cdot g_1 + \ldots. + a_n \int f \cdot g_n =$$
$$= a_0^2 + a_1^2 + \ldots. + a_n^2.$$

Para calcular la 3.ª desarrollaremos el cuadrado del polinomio $s_n(x)$; pero los productos de términos distintos dan integral nula, según [1]; los cuadrados dan integral 1, en virtud de [2]; luego resulta:

$$\int [f(x) - s_n(x)]^2\, dx = \int f(x)^2\, dx - (a_0^2 + a_1^2 + \ldots. + a_n^2) \qquad [5]$$

de donde salen sencillas pero importantes consecuencias:

1.ª) Las sumas $\Sigma\, a_i^2$ son menores que la integral de $f(x)^2$ (*Desigualdad de Bessel*).

2.ª) La serie $\Sigma\, a_i^2$ es *convergente* y por tanto (35) $a_n \to 0$.

3.ª) Disminuye el error al tomar más términos, es decir, al crecer n.

Se demuestra fácilmente que los coeficientes a_n dan un polinomio s_n más aproximado que los de otros coeficientes cualesquiera.

Finalmente, el sistema ortonormal se llama *completo,* si no hay ninguna función ortogonal a todas; y una vez demostrado que los senos y cosenos de múltiplos de x forman sistema completo, es aplicable la propiedad fundamental de tales sistemas completos: la diferencia [5] expresada por la desigualdad de Parseval, tiende a 0 para $n \to \infty$, es decir: las sumas $s_n(x)$ *convergen en media cuadrática hacia* $f(x)$.

Tomando, pues límites para $n \to \infty$, resulta la *igualdad de Parseval:*

$$\int f(x)^2\, dx = a_0^2 + a_1^2 + \ldots. + a_n^2 + \ldots. \qquad [6]$$

Otro sistema importante es el de los polinomios de Legendre:

$$1,\ x,\ {}^3/_2 x^2 - {}^1/_2 \quad , \quad {}^5/_2 x^3 - {}^3/_2 x,\ \ldots.$$

ortogonales en $(-1,1)$ y que se normalizan dividiéndolos por sendos coeficientes.