SEGUNDA PARTE

Funciones de varias variables

CAPITULO VII

ELEMENTOS DE GEOMETRIA ANALITICA LINEAL

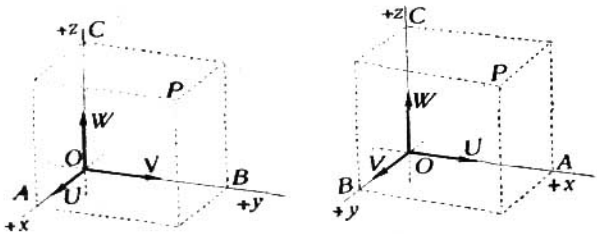
LECCIÓN 42

PROPIEDADES PROYECTIVAS Y AFINES

162. — Triedros coordenados.

La determinación de cada punto en el espacio de tres dimensiones exige dar tres números, llamados *coordenadas*, de igual modo que en el plano son suficientes dos.

Para definir las coordenadas cartesianas, adoptemos un triedro de referencia formado por tres ejes x, y, z, concurrentes en un punto O, llamado *origen*, y fijemos en cada uno un sentido como positivo. Esta fijación puede hacerse de dos modos distintos.



Colocado el observador en el origen O, en el sentido del semieje $+z$, al contemplar el plano xy puede suceder que el sentido $(+x, +y)$, *sea el positivo o el negativo*. El *primer sistema suele* ser usado por los autores ingleses y se llama *directo, destrorsum* o *destrógiro*, y el segundo se llama *inverso, sinistrorsum* o *levógiro*, y por ser el más usado en los tratados más accesibles a los alumnos, es el que nosotros utilizaremos.

De otro modo: supongamos el par de ejes x, y del plano, tal como suelen colocarse en Geometría Analítica plana, es decir, visto el plano por una cara (que llamaremos positiva), el sentido x, y

sea contrario al de las saetas de un reloj con la esfera del lado de dicha cara positiva; el semieje $+z$ puede colocarse en O hacia la cara *positiva* del plano (triedro directo), o bien hacia la *negativa* (triedro negativo.).

Como cada eje se compone de dos semiejes, determinan ocho triedros:

$$+x, +y, +z \;;\; +x, -y, +z \;;\; -x, -y, +z \;;\; -x, +y, +z \;;$$
$$+x, +y, -z \;;\; +x, -y, -z \;;\; -x, -y, -z \;;\; -x, +y, -z \;;$$

Los cuatro primeros están sobre el plano xy y los otros cuatro debajo. El triedro formado por los semiejes positivos suele colocarse de frente al observador, es decir, éste se supone colocado dentro del primer triedro $+x$, $+y$, $+z$.

163. — Coordenadas cartesianas.

Elegido un triedro de referencia, sea directo o inverso y un vector unidad en cada eje, si por cada punto P del espacio, se trazan planos paralelos a los coordenados, las abscisas x, y, z de sus trazas sobre los ejes x, y, z, determinan estos planos proyectantes y por tanto el punto P. Estos tres números se llaman coordenadas cartesianas de P.

Definición. — *Coordenadas cartesianas* de un punto son las abscisas x, y, z, de sus tres proyecciones sobre cada eje coordenado x, y, z, paralelamente al plano opuesto. Si los ejes son ortogonales las coordenadas se llaman *rectangulares*, y en caso contrario *oblícuas*.

Para los *problemas métricos* (ángulos, distancias, áreas, volúmenes) conviene usar coordenadas rectangulares; para los *problemas afines* (paralelismo, razones simples) pueden utilizarse coordenadas rectangulares u oblícuas; los *problemas proyectivos* (determinación de rectas y planos, intersecciones, ...) se tratan con igual sencillez en coordenadas proyectivas, pero los estudiaremos en coordenadas cartesianas, oblícuas o rectangulares.

164. — Ecuaciones con una variable.

Todos los puntos del plano xy tienen $z = 0$ y recíprocamente. He aquí, pues, una ecuación a la que satisfacen todos los puntos de este plano y sólo ellos. Diremos, brevemente, que es la *ecuación del plano*. Análogamente las ecuaciones de los planos xz, yz son respectivamente:

$$y = 0 \quad , \quad x = 0.$$

Las ecuaciones del tipo

$$x = a \quad , \quad y = b \quad , \quad z = c$$

representan, respectivamente, planos paralelos al yz, al zx, al xy, que distan de ellos a, b, c en magnitud y signo.

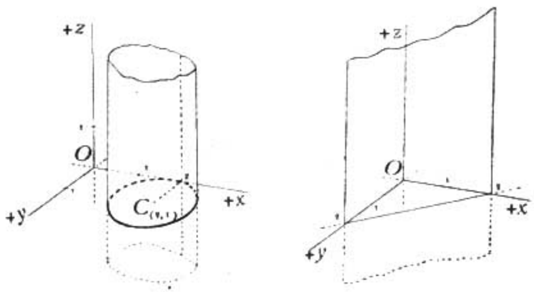
Una ecuación con una sola variable, p. ej. $z^2 = 1$, se descompone en ecuaciones de primer grado que en este ejemplo son $z = 1$ y $z = -1$, cada una de las cuales representa un plano paralelo al xy. En general:

Una ecuación con una sola variable representa planos paralelos al plano coordenado opuesto al eje correspondiente a esa variable: son tantos planos como raíces tenga la ecuación.

165. — Ecuaciones con dos variables.

Diremos que una superficie está representada por una ecuación $f(x, y, z) = 0$, si todos los puntos de la superficie satisfacen a esa ecuación y recíprocamente, toda solución de ésta representa un punto de la superficie. Así obtendremos la ecuación del plano, de la superficie esférica, etc.

Hay un caso importante que conviene destacar. Sea $f(x, y) = 0$ ción representará una curva y los únicos puntos del espacio que sa- una ecuación que no contiene la variable z; en el plano xy esta ecua- tisfacen a esta ecuación son aquellos cuyas coordenadas x, y la satisfacen, cualquiera que sea la z; es decir, aquellos puntos y sólo aquellos que se proyectan paralelamente al eje z según los puntos de esta curva. Por tanto, *una ecuación con dos variables representa la superficie cilíndrica cuya directriz es la curva representada por esta ecuación en el plano correspondiente a estas dos coordenadas y cuyas generatrices son paralelas al otro eje.*



Las superficies cilíndricas más sencillas son los planos. Así, por ejemplo, la ecuación $x + y = 2$ en el plano xy representa una recta que intercepta con los ejes segmentos de longitud 2; pero esa ecuación representa en el espacio el plano paralelo al eje z, trazado por esa recta.

166. — Sistema de dos ecuaciones.

Una sola ecuación no representa una *curva*, sino una *superficie*; las curvas vienen dadas como intersección de dos superficies, es decir, por un sistema de *dos ecuaciones*.

Los puntos del eje z tienen coordenadas $x = 0$, $y = 0$ y recíprocamente, todo punto que cumpla estas dos condiciones pertenece al eje z. Diremos, pues, que el eje z está representado por este *sistema de ecuaciones*. Los sistemas de ecuaciones que representan los ejes son por tanto:

$$\text{eje } x \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{eje } y \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{eje } z \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Toda línea está representada, como hemos dicho, por un sistema de dos ecuaciones; cada una de las cuales representa una superficie y la línea aparece como conjunto de puntos comunes a ambas. En cada caso, se procura la elección de las dos superficies más sencillas que pasen por la curva. Así, p. ej., la circunferencia situada en el plano xy, representada en la figura anterior tiene este sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 \\ z = 0 \end{aligned}\right\}$$

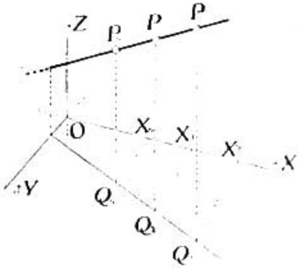
167. — Ecuaciones de la recta.

Dados los puntos $P_0(x_0\, y_0\, z_0)$, y $P_1(x_1\, y_1\, z_1)$, a cada punto de la recta $P_0 P_1$ le corresponde un valor λ, que es la razón simple $(P_0 P_1 P)$, es decir:

$$\lambda = \frac{P_0 P}{P_1 P}$$

y es sabido que a cada valor de λ, distinto de 1, le corresponde un punto de la recta, que es distinto del P_1. Si λ tiende a 1, P se aleja infinitamente; si λ crece infinitamente, $P \to P_1$. La correspondencia se hace biunívoca asignando $\lambda = \infty$ a P_1 y el punto impropio al valor $\lambda = 1$.

Si proyectamos la terna sobre el eje x resultan tres puntos, de abcisas x_0, x_1, x cuya razón de distancias es la misma:



$$\lambda = \frac{x - x_0}{x - x_1}$$

de donde $x = \dfrac{x_0 - \lambda x_1}{1 - \lambda}$

Proyectando análogamente sobre los ejes y, z, obtenemos las coordenadas de todos los puntos de la recta PP_1, que son:

$$x = \frac{x_0 - \lambda x_1}{1 - \lambda} \qquad y = \frac{y_0 - \lambda y_1}{1 - \lambda} \qquad z = \frac{z_0 - \lambda z_1}{1 - \lambda} \qquad [1]$$

Para $\lambda = -1$ resulta: *Las coordenadas del punto medio de un segmento son los promedios de las coordenadas de sus extremos.*

Recíprocamente, cualquiera que sea el valor atribuído a λ en estas expresiones resulta un punto P situado en la recta, pues elegido en ella el que tiene esta razón simple λ, sus coordenadas son los tres números [1]; luego coincide con el punto P. Tenemos, pues, la expresión paramétrica de la recta definida por dos puntos.

Si en vez de adoptar (P_0P_1P) tomamos (PP_1P_0) resulta un sistema de ecuaciones que representa la recta P_0P_1.

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \qquad [2]$$

Cada una de las ecuaciones

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}\,; \quad \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\,; \quad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

representa un plano que es paralelo a un eje y contiene todos los puntos de la recta, es decir, tenemos los tres planos *proyectantes* de la recta, en la dirección de cada eje.

En particular las ecuaciones de la recta determinada por el origen y el punto $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ son

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}$$

luego resulta: *la condición necesaria y suficiente para que dos puntos estén alineados con el origen es la proporcionalidad de sus respectivas coordenadas.*

168. — Ecuación general del plano.

La ecuación de primer grado:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad [3]$$

representa un conjunto de puntos que tienen esta propiedad: si (x_0, y_0, z_0); (x_1, y_1, z_1) son dos puntos de ellos, las coordenadas de la recta que determinan, o sea los valores obtenidos en [1]

$$\frac{x_0 - \lambda x_1}{1 - \lambda} \qquad \frac{y_0 - \lambda y_1}{1 - \lambda} \qquad \frac{z_0 - \lambda z_1}{1 - \lambda}$$

la satisfacen. Ahora bien, la ecuación [3] no representa una recta, puesto que x e y pueden tomar valores arbitrarios; y como todo punto del espacio no la satisface, tal conjunto de puntos es un plano. (*).

¿Representa esta ecuación todos los planos posibles?

Dados tres puntos no alineados $(x_1\, y_1\, z_1)$, $(x_2\, y_2\, z_2)$, $(x_3\, y_3\, z_3)$, la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad [4]$$

es de primer grado y se satisface por las coordenadas de los tres puntos; luego, representa el plano determinado por éstos.

Otro modo de escribir la misma ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad [5]$$

que se deduce restando la segunda fila de cada una de las otras.

(*) Basta recordar el postulado fundamental que define la recta E_1, el plano E_2, el espacio E_3.

Ejemplo: Plano determinado por los puntos $(2, -1, 5)$, $(4, 0, -3)$, $(1, 2, 1)$.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-5 \\ 2 & 1 & -8 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

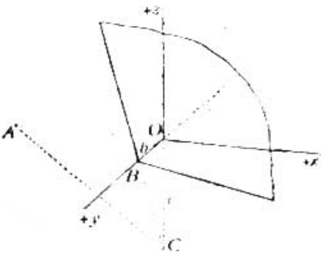
Nota. — Falta examinar el caso en que la ecuación [4] o su equivalente [5] tenga todos los coeficientes nulos, es decir, sean nulos los tres menores complementarios de los elementos de la primera fila de [5] y por tanto se verifique:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

es decir, en virtud de [2] están alineados los tres puntos.

169. — Ecuación segmentaria del plano.

Si los cuatro coeficientes A, B, C, D son distintos de 0, obtenemos una interpretación geométrica interesante. Haciendo $y = 0$; $z = 0$, el segmento a que el plano intercepta con el eje x o sea la abscisa del punto de intersección con este eje, viene expresada así:



$$a = -\frac{D}{A}$$

Análogamente:

$$b = -\frac{D}{B} \quad , \quad c = -\frac{D}{C}$$

Luego dividiendo por $-D$ la ecuación general

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

resulta ésta, que puede formarse directamente, conocidos a, b, c:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad [6]$$

Ejemplo: Plano que intercepta sobre los ejes segmentos 2, $+3$, -1. La ecuación de dicho plano es:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - z = 1$$

170. — Planos proyectantes de una recta.

Cuando la recta viene dada como intersección de dos planos $P = 0$, $Q = 0$, sus planos proyectantes, paralelamente a los ejes, se obtienen inmediatamente eliminando una variable entre ambas ecuaciones, pues la ecuación obtenida se satisface para los puntos de la recta y carece de una variable, luego el plano obtenido pasa por la recta y es paralelo a un eje.

EJEMPLO: Sea la recta de ecuaciones:

$$3x - 2y + z = 1$$
$$x + y - z = 2$$

Sumando, se elimina z y resulta: $4x - y = 3$

Sumando a la 1.ª ecuación el duplo de la 2.ª: $5x - z = 5$

Restando de la 1.ª ecuación el triplo de la 2.ª: $5y - 4z = 5$

Si se desea proyectar la recta $P = 0$, $Q = 0$, desde un punto propio $(x_1\, y_1\, z_1)$, el método más sencillo y rápido es éste: la ecuación $P - \lambda\ Q = 0$ representa un haz de planos que pasa por la recta; para que un plano de ellos pase por el punto $(x_1\, y_1\, z_1)$, éste debe satisfacer a la ecuación y sustituyendo las coordenadas se despeja el valor de λ.

EJEMPLO: Sea la recta de ecuaciones:

$$2x - 3y - z = 2$$
$$x + 5y - 2z = 2$$

El plano que la proyecta desde 0, se obtiene eliminando el término constante, y para ello basta restar, resultando así el plano: $x - 8y + z = 0$.

Para proyectar la misma recta desde el punto $(1, -2, 1)$, restaremos de cada una de ellas, la otra multiplicada por λ

$$(2x - 3y - z - 2) = \lambda(x + 5y - 2z - 2)$$

Y sustituyendo las coordenadas $(1, -2, 1)$ resulta: $\lambda = -{}^5/_{14}$.

Por tanto, la ecuación del plano proyectante es: $31x - 14y - 23z = 36$.

LEY DE DUALIDAD. — Los coeficientes u, v, w de la ecuación del plano:

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

se llaman *coordenadas plückerianas* del mismo. Fijados x, y, z, todos los planos (u, v, w) que satisfacen a esta ecuación forman la radiación que tiene ese vértice. Toda propiedad de incidencia de puntos rectas y planos tiene su *correlativa* o *dual* sustituyendo los puntos por planos y viceversa.

EJERCICIOS

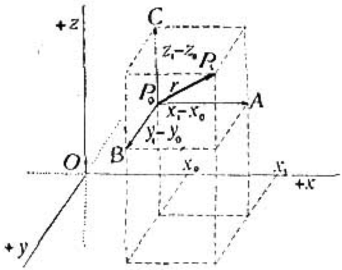
1.— Hallar el plano que proyecta desde el origen a la recta intersección de los planos $2x + 3y + 2 = 1$; $3x - y - 2 = 2$. Id. íd. desde el punto $(1, 0, 2)$.

2.— Trazar por el origen una secante de dos rectas dadas. (Basta obtener los dos planos proyectantes de ambas).

PROPIEDADES METRICAS

171. — Distancia entre dos puntos.

Los planos paralelos a los coordenados trazados por P_0 y P_1 forman un paralelepípedo recto rectángulo; las tres aristas que concurren en P_0 tienen longitudes $x_1 - x_0$; $y_1 - y_0$; $z_1 - z_0$ y la diagonal r por el teorema de Pitágoras, viene expresada así:



La distancia entre dos puntos está dada por la raíz cuadrada las diferencias de coordenadas correspondientes.

$$r^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2 \qquad [1]$$

172. — Cosenos y coeficientes directores de una semi-recta.

La semi-recta $P_0 P_1$ forma con cada semieje positivo un ángulo; los cosenos de estos tres ángulos se llaman *cosenos directores* de la semi-recta y también del vector $P_0 P_1$; los representamos por α, β, γ. La semi-recta opuesta y el vector opuesto tienen cosenos directores opuestos: $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$.

Como $P_0 A$ es la proyección de $P_0 P_1$ sobre la paralela al semieje x, y análogamente las otras aristas, resulta:

$$x_1 - x_0 = r\alpha \qquad y_1 - y_0 = r\beta \qquad z_1 - z_0 = r\gamma$$

siendo $r > 0$. Elevando al cuadrado y teniendo en cuenta [1] resulta:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \qquad [2]$$

Las aristas del paralelepípedo son, como se ve, proporcionales a los cosenos; estos tres números u otros cualesquiera proporcionales a ellos y de igual signo se llaman *coeficientes directores* de la semi-recta $P_0 P_1$; obsérvese que los coeficientes directores son opuestos para las dos semi-rectas opuestas; estos mismos, multiplicados por cualquier número positivo o negativo, se llaman *coeficientes directores de la recta.*

Dados los coeficientes directores a, b, c, es decir:

$$a = k\alpha \qquad b = k\beta \qquad c = k\gamma$$

sumando los cuadrados, resulta: $k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Es decir, *los cosenos directores se deducen de los coeficientes directores dividiéndolos por la raíz cuadrada de la suma de sus cuadrados.* Según el signo que adoptemos para k, resultan los cosenos de una u otra semi-recta.

Para todos los problemas de *paralelismo, perpendicularidad,* etc. bastan los *coeficientes* directores; para las medidas de *ángulos* se precisa obtener los *cosenos.*

Los coeficientes directores de la recta dada como intersección de dos planos se calculan cómodamente obteniendo dos puntos de la recta, por ejemplo sus trazas sobre dos planos coordenados; las diferencias de coordenadas son los tres coeficientes directores. Según el orden en que se resten resultan los de una u otra semi-recta

REGLA PRÁCTICA. — Colocado de frente el plano x, z, resulta esta norma para saber la dirección de una semi-recta:

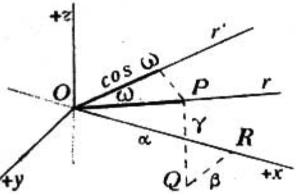
Hacia la derecha si $\alpha > 0$, hacia adelante si $\beta > 0$, hacia arriba si $\gamma > 0$; y al contrario si alguno de estos cosenos es negativo.

EJEMPLO: Calcular los ángulos que forma con los tres ejes, la bisectriz del primer triedro: $+x$, $+y$, $+z$.

Como los ángulos son iguales, los coeficientes directores son 1, 1, 1; luego los cosenos se calculan dividiendo por $\sqrt{3}$ y buscando en la tabla de cosenos el ángulo cuyo coseno es $1/\sqrt{3}$ resulta el ángulo buscado, que vale 54° 44′.

173. — Angulo de dos rectas.

Dadas dos semi-rectas r y r' de origen O, cuyos cosenos directores sean (α, β, γ) $(\alpha', \beta', \gamma')$, la proyección sobre r' del vector de longitud 1 sobre r, o sea $\cos \omega$, es la suma de las proyecciones de sus tres componentes, es decir:



$$\cos \omega = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' \qquad [3]$$

Por tanto: ***El coseno del ángulo de dos semi-rectas es la suma de los productos de los cosenos directores de una por los de otra.***

La condición de perpendicularidad de dos rectas es que la suma de los productos de los respectivos coeficientes directores sea nula: $aa' + bb' + cc' = 0$.

Nótese que para la perpendicularidad basta considerar coeficientes directores, mientras que para calcular el ángulo son precisos los cosenos.

En algunos casos, p. ej. el que veremos en (179), interesa expresar sen ω. Restando las igualdades:

$$1 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)$$

$$\cos^2 \omega = (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')^2$$

y simplificando el 2.° miembro resultante, se tiene:

$$\text{sen}^2 \omega = (\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2 + (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)^2 + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2 \qquad [3']$$

174. — Angulo de dos planos; paralelismo y perpendicularidad.

La ecuación general del plano es

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

siendo (x_0, y_0, z_0) un punto del mismo; pero $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ son los coeficientes directores de todas las rectas del plano, luego esta relación expresa que la recta de coeficientes directores (A, B, C) o proporcionales a ellos, es perpendicular a toda recta del plano, es decir, perpendicular al plano. Por tanto:

La condición necesaria y suficiente para que una recta sea perpendicular a un plano es que sus coeficientes directores sean proporcionales a los coeficientes directores del plano.

Para el cálculo de ángulos, todo plano se puede sustituir por una recta normal, es decir, por una recta que tiene como coeficientes directores los del plano. Dos planos son paralelos, si lo son sus normales, luego:

La condición de paralelismo de dos planos es la proporcionalidad de sus coeficientes directores.

Dos planos son perpendiculares si lo son sus normales, luego:

La condición de perpendicularidad de dos planos, es que la suma de los productos de sus coeficientes directores sea nula.

Más general: *El coseno del ángulo de dos planos es la suma de los productos de los cosenos directores de ambos planos.*

NOTA. — Llamando *producto escalar* de dos ternas a la suma de productos de las componentes homólogas, por razones que después se verán, se abrevia el enunciado de ambos teoremas.

175. — Cuadro sinóptico de las relaciones entre rectas y planos.

Resulta así el cuadro sinóptico siguiente, que comprende los seis casos posibles:

Elementos *homogéneos*:

paralelismo: proporcionalidad de coef. directores.
perpendicularidad: prod. escalar de coef. directores nulo.

$$r \parallel r' \qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \qquad\qquad \pi \parallel \pi' \qquad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

$$r \perp r' \qquad aa' + bb' + cc' = 0 \qquad\qquad \pi \perp \pi' \qquad AA' + BB' + CC' = 0$$

Elementos *heterogéneos*:

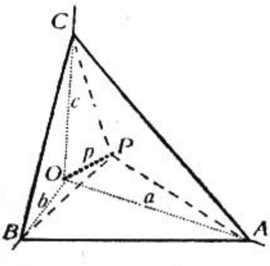
paralelismo: prod. escalar de coeficientes directores nulo.
perpendicularidad: proporcionalidad de coef. directores.

$$r \parallel \pi \qquad Aa + Bb + Cc = 0$$

$$r \perp \pi \qquad \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$$

176. — Ecuación normal y distancia de un punto a un plano. Si son a, b, c los segmentos que intercepta en los ejes el plano

$$Ax + By + Cz = D \qquad [5]$$



la ecuación se puede escribir así:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Llamando p a la distancia absoluta de O al plano, y α, β, γ a los cosenos directores del vector $\vec{OP}$ es

$$p = a\alpha \quad ; \quad p = b\beta \quad ; \quad p = c\gamma$$

Como cosenos directores del plano orientado adoptamos los de su vector normal, es decir, α, β, γ, y no sus opuestos. Sustituyendo resulta:

$$x\alpha + y\beta + z\gamma = p$$

Esta ecuación se llama *normal;* sus coeficientes, en vez de ser los coeficientes directores A, B, C, son los cosenos directores α, β, γ, es decir, se deducen de ellos, dividiéndolos por $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, de modo que el segundo miembro resulte *positivo*. Por tanto:

Para formar la ecuación normal del plano basta dividir la ecuación ordinaria por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los coeficientes directores, con signo + o —, de modo que re-

sulte positivo el segundo miembro constante. Este expresa la distancia del origen al plano.

EJEMPLO: Sea el plano $2x - 3y + 6z = 5$.

La ecuación no es normal, pues la raíz de la suma de cuadrados de los coeficientes directores es $\sqrt{4 + 9 + 36} = 7$, pero se convierte en normal dividiendo por 7 y resulta:

$$\frac{2x}{7} - \frac{3y}{7} + \frac{6z}{7} = \frac{5}{7}$$

Los cosenos directores son: $2/7$, $-3/7$, $6/7$ y la distancia del origen al plano es $5/7$.

NOTA. — En los haces de planos paralelos conviene adoptar para todos estos los coeficientes α, β, γ de uno (lo que equivale a fijar un sentido en la normal) y entonces toma p valores positivos o negativos según la posición del plano.

La distancia entre dos planos paralelos:

$$Ax + By + Cz = D$$
$$Ax + By + Cz = D'$$

es por consiguiente $D - D'$ si estas ecuaciones están en forma normal. En caso contrario, habrá que dividirlas precisamente por $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

La distancia del punto $(x_0\, y_0\, z_0)$ al plano [5] se obtiene trazando por este punto el plano paralelo:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

o sea
$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0 \qquad [6]$$

y la distancia del punto al plano [5] es la distancia entre los planos [5] y [6] es decir:

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad [7]$$

Luego, *la distancia de un punto a un plano es el valor que toma en ese punto el cuatrinomio de la ecuación normal.*

La distancia dada por [7] resulta *positiva* si el punto está a distinto lado que el origen respecto del plano.

EJERCICIOS

1. — Obtener las ecuaciones de los planos bisectores de un diedro.
2. — Calcular la distancia de un punto a una recta.
3. — ¿Qué representan las inecuaciones lineales de variables x, y, z?

Lección 44

ALGEBRA VECTORIAL

177. — Suma y diferencia de vectores.

Importantes magnitudes físicas (V. Notas) han conducido para su estudio y medida a la introducción de ciertos entes abstractos, llamados *vectores* y *tensores*.

Se llama *vector* a un par de puntos dados en un cierto orden; el primero se llama *origen*, el segundo *extremo* y su distancia *módulo* del vector. Designaremos los vectores por mayúsculas y sus módulos por las correspondientes minúsculas; es decir: $|A| = a$.

Dos vectores se dicen *iguales* cuando los dos segmentos son iguales, paralelos y acordes; escribiremos: $A = B$.

Esta definición de igualdad caracteriza a los vectores *libres;* únicos que estudiaremos. Para los vectores *axiales* se exige la coincidencia de sus rectas. (V. Curso cíclico, t. I).

Los cosenos directores de la semirrecta que define el vector se llaman también *cosenos directores* de éste.

Dados dos vectores A, B si se aplica B en el extremo de A (es decir, se transporta un vector igual al B), el vector cuyo origen es origen de A y su extremo es el extremo de B, se llama *suma* $A + B$.

Componente de un vector sobre una recta es el vector proyección sobre ella; si se adoptan tres ejes x y z, de origen O, cada vector A tiene tres vectores componentes A_x, A_y, A_z, cuyas medidas con las unidades adoptadas en los respectivos ejes llamaremos *coordenadas* del vector, y pueden ser números positivos o negativos; designándolas por a_x, a_y, a_z, o brevemente x, y, z

Si se suman progresivamente varios vectores $A + B + \ldots . + L$ se va formando una quebrada cuya proyección sobre cualquier recta es la suma de las proyecciones de sus lados, o sea: *la componente de la suma sobre cualquier eje es la suma de las componentes de los sumandos; las coordenadas de la suma son las sumas de las respectivas coordenadas de los sumandos.*

Por tanto: la suma de vectores es *conmutativa* y *asociativa.*

La *diferencia* $C - A$ es el vector que sumado con A da C; se obtiene sumando a C el opuesto a A, que llamaremos A', pues resulta:

$$(C + A') + A = C + (A' + A) = C$$

Producto mA de un vector A por un número, o de un número por un vector es el vector de igual dirección cuyo módulo se ha multiplicado por m; si m es negativo, cambia el sentido.

Evidentemente

$$m(A+B) = mA + mB$$

puesto que cada componente de la suma es la suma de las respectivas componentes de A y B; y al multiplicar cada una por m también la suma queda multiplicada.

Los vectores adoptados como unidades en los tres ejes serán designados por U, V, W; por tanto, el vector de coordenadas x, y, z como suma de sus componentes, se expresará: $A = xU + yV + zW$.

178. — Multiplicación escalar de vectores.

Producto escalar (o interno) de dos vectores A, A' es el producto numérico de sus módulos por el coseno del ángulo que forman. Es, pues, un *número,* positivo o negativo, según que el ángulo sea agudo u obtuso, dado por la expresión:

[1] $$A.A' = a.a'.\cos AA' = a.\,\text{proy}\,A' = a'.\,\text{proy}\,A$$

es decir, es el *producto del módulo de un vector por la medida de la proyección del otro sobre él, con su signo correspondiente.*

Sustituyendo el coseno por su expresión mediante los cosenos directores α, β, γ del A y α' β', γ' del A'

$$A.A' = aa'(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = a\alpha.a'\alpha' + a\beta\,.\,a'\beta' + a\gamma\,.\,a'\gamma';$$

y como estos productos son las coordenadas x, y, z de A y x', y', z' de A', tenemos la expresión:

[2] $$A.A' = x.x' + y.y' + z.z'$$

Ejemplo. — Si un vector representa una fuerza y el otro es el camino recorrido por el punto de aplicación, el producto escalar representa el trabajo positivo o negativo realizado por la fuerza. Si las componentes de ésta son x, y, z y las del camino son x', y', z' el trabajo es: $xx' + yy' + zz'$.

El producto escalar es conmutativo; y sólo se anula si es nulo alguno de los vectores, o cuando éstos son perpendiculares.

También el producto escalar tiene la propiedad distributiva, pues si se sustituye en [2] el vector A' por $B' + C'$, el segundo miembro se descompone en dos sumas que son $A.B' + A.C'$.

Es decir: $A(B' + C') = (B' + C')A = AB' + AC'$.

179. — Multiplicación vectorial o externa.

Producto vectorial (o externo) de A por B es el vector de módulo $a.b.\text{sen}\, AB$ perpendicular al plano AB y que forma con A y B un triedro positivo. Lo representaremos así: $A \times B$.

El módulo del producto vectorial es, por tanto, el área del paralelógramo que forman los dos vectores aplicados en un mismo punto.

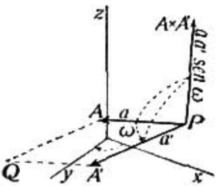
Al permutar A y B cambia de sentido el triedro, luego resulta: $A \times B = - B \times A$.

Si tres vectores ortogonales U, V, W de módulo 1 forman un triedro *positivo*, es, por tanto:

$$[3] \qquad U \times V = W \quad , \quad V \times W = U \quad , \quad W \times U = V$$

pero resultan signos opuestos, si el triedro es negativo.

El producto de cualquier vector por sí mismo es nulo; y lo mismo sucede si son paralelos los dos factores. Recíprocamente, el producto vectorial solamente es nulo si es nulo algún factor, o si ambos están en rectas paralelas o coincidentes.



Dados los vectores A y A', sean x, y, z las coordenadas de A y x', y', z' las coordenadas de A', demostremos que el producto vectorial $A \times A'$ tiene las coordenadas

$$[4] \quad yz' - zy' \ ; \ zx' - xz' \ ; \ xy' - yx'$$

es decir, tiene la expresión

$$[5] \qquad \begin{vmatrix} U & V & W \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = aa' \begin{vmatrix} U & V & W \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}$$

1.° Aplicando la fórmula [3'] de (173) se obtiene:

$$(\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2 + (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)^2 + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2 = \text{sen}^2 AA'$$

luego el módulo del vector así formado es aa' sen AA'.

2.° Como x, y, z son los coeficientes directores de A, y son x', y', z' los de A', los coeficientes directores de la dirección perpendicular al plano AA' son precisamente los [4], es decir, el vector expresado por el determinante es perpendicular a A y A'.

3.° Para ver si su sentido respecto de AA' es positivo, basta comprobarlo en el caso más sencillo; si A y A' son los vectores unitarios U y V, el determinante se reduce a

$$\begin{vmatrix} U & V & W \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = W$$

que es, en efecto, el producto $U \times V$, si el triedro de referencia es *positivo;* pero si es negativo el producto es el vector opuesto. En resumen: *El producto $A \times A'$ está expresado por el determinante* [5] *o por las coordenadas* [4] *si el triedro de referencia es positivo; pero si éste es negativo, es preciso multiplicar el determinante y las coordenadas por* -1.

De la expresión [4] resulta la propiedad *distributiva:*

$$[6] \qquad A \times (A_1 + A_2) = A \times A_1 + A \times A_2$$

pues si se sustituye $x' = x_1 + x_2$, $y' = y_1 + y_2$, $z' = z_1 + z_2$ en [4] resultan como coordenadas las sumas:

$$\begin{matrix} yz_1 - zy_1 & zx_1 - xz_1 & xy_1 - yx_1 \\ + yz_2 - zy_2 & + zx_2 - xz_2 & + xy_2 - yx_2 \end{matrix}$$

es decir, las coordenadas de $A \times A_1$, más las de $A \times A_2$.

EJEMPLO. — El producto vectorial se ha introducido como una generalización natural del *momento* de un vector A respecto de un punto P, al cual podremos ahora definir como *producto vectorial del vector A por el vector que tiene el origen P y el extremo en la recta de A.*

De las propiedades demostradas resulta: *el momento de una suma de vectores es la suma de sus momentos.*

Notaciones vectoriales. — Todavía se usan diversas notaciones para el producto vectorial, única operación nueva de la Aritmética vectorial, ya que el producto escalar, por ser generalización del producto de números, debe designarse como se hace en Algebra, es decir, con un punto o sin signo ninguno, de igual modo que la adición y la sustracción se siguen representando por $+$ y $-$.

El signo de Burali-Forti es usado por los autores italianos y también por algunos de otros países (Butty, Garnier, Lainé ....). Algunos alemanes siguen usando la notación $(A \,.\, B)$ para el producto escalar y la $[A \,.\, B]$ para el vectorial.

El cómodo signo $\times$ se va imponiendo en los libros modernos franceses (Juvet, Veronnet, ...), alemanes (Kowalewski, Lagally, ...), etc.

EJERCICIOS

1. — La condición necesaria y suficiente para que los vectores A, B, C, sean paralelos a un plano, es: $A(B \times C) = 0$.

2. — Demostrar la relación:

$$A \times (B \times C) = (A.C)B - (A.B)C$$

3. — Demostrar que el producto llamado mixto de tres vectores: $(A \times B)C$ que tienen el mismo origen, representa el volumen del paralelepípedo que determinan.

LECCIÓN 45

ÁLGEBRA TENSORIAL

Funciones físicas de punto y de conjunto.

Las magnitudes físicas son de dos tipos: *funciones de punto* y *funciones de conjunto*. He aquí algunos ejemplos:

La temperatura en un punto, la velocidad de un punto material, la tensión de un sólido en uno de sus puntos, cuando actúan sobre el cuerpo fuerzas exteriores, son ejemplos de magnitudes del primer tipo, esto es, funciones de punto, aunque de clase muy diversa, que pronto distinguiremos. En cambio, las longitudes, áreas, volúmenes, momentos de cualquier orden, de líneas, superficies y cuerpos; y la fuerza viva de un móvil, son funciones de conjunto, pues asignan a cada continuo, sea arco de curva, recinto plano o tridimensional, un *número* o bien un *vector*, o más en general, un *tensor*.

Clasificación de las magnitudes puntuales. — En un punto P pueden considerarse magnitudes físicas de tipo muy diverso. He aquí algunos ejemplos:

1) Masa del punto material aislado, densidad de la materia continua en P, potencial eléctrico en P, temperatura, etc. Tales magnitudes pueden ordenarse en escala de menor a mayor y son susceptibles de medida por un número real, positivo, negativo o nulo. Se llaman *magnitudes escalares*, o brevemente *escalares*.

2) *Magnitudes vectoriales*. Hay magnitudes que en cada dirección por P tienen una intensidad y ésta varía con la dirección, es decir, es función de los cosenos directores α_1, α_2, α_3. En particular las intensidades en las direcciones de los ejes se llaman sus componentes, a_1, a_2, a_3; pero esto no basta para asegurar el carácter vectorial de la magnitud. Así, p. ej., la intensidad luminosa de una lámpara varía con la dirección, pero no es magnitud vectorial. Tampoco basta que en cada punto haya una dirección de intensidad máxima (*), representada por un segmento dirigido, como se repite en los textos. Por ejemplo, cada homotecia asigna a cada punto P un segmento dirigido PQ, pero la homotecia no es magnitud vectorial.

La propiedad que caracteriza a las magnitudes vectoriales es la ley de la proyección ortogonal: la intensidad en la dirección de cosenos directores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, debe ser $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3$.

Tal sucede con las fuerzas, velocidades, aceleraciones, etc.

3) *Magnitudes tensoriales*. Hay magnitudes más complejas, que a cada dirección por el punto P le hacen corresponder, no un escalar, sino un vector. Tal sucede con la *tensión* en cada punto de un sólido en equilibrio, bajo la acción de fuerzas exteriores. Si se imagina una pequeña sección plana por P y se supone suprimida la porción de materia contigua a una de las dos superficies producidas en su seno, será preciso aplicar a la otra en P una fuerza F para restablecer el equilibrio. Esta fuerza F es función de la orientación de aquella sección, o sea de la dirección X de su normal, la cual elegimos en el sentido de la porción suprimida de materia. Esta función es lineal, como se demuestra en Estática (véase la Nota) y basta conocer los vectores F correspondientes a tres direcciones ortogonales, para calcular el que corresponde a cualquier otra.

(*) Nótese que no sólo en esa dirección se manifiesta la magnitud. Para descubrir la ley de caída de los graves, Galileo adoptó un plano inclinado en el cual se manifiesta igualmente la gravitación, pero atenuada.

Concepto de vector y de tensor.

Puesto que las componentes del vector PQ respecto de ejes trazados por su origen P son las coordenadas de Q, las fórmulas de transformación de componentes son las mismas de cambio de coordenadas:

$$a'_i = \Sigma\, a_r\, \alpha^i_r \qquad (r = 1, 2, 3) \qquad [1]$$

llamando α^i_j al coseno director del eje x'_i respecto del x_j.

Estas fórmulas expresan que cada coordenada a'_i, o sea la proyección del vector sobre el eje x'_i, es la suma de proyecciones de las componentes a_r.

Esta fórmula expresa también que la componente en cada dirección x'_i es función *lineal* de esa dirección, es decir, de sus cosenos directores. Resulta así esta definición equivalente:

El vector como función escalar de la dirección. Vector de origen P es una función escalar lineal de las direcciones de origen P, es decir, el *valor* o *componente* que corresponde a cada dirección X de cosenos directores α_r está expresado por la fórmula: $a = \Sigma\, a_r\, \alpha_r$.

Concepto de tensor. El ejemplo de la tensión en cada punto de un cuerpo sólido fué el que dió origen a la teoría general de los tensores, y para fijar las ideas nos referiremos concretamente a él.

Supongamos conocida la tensión unitaria para cada una de las orientaciones de los tres planos coordenados, es decir, los vectores F_1, F_2, F_3, que corresponden a las direcciones de los ejes, y designemos así las componentes cartesianas de esos tres vectores:

$$\begin{array}{llll} F_1: & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ F_2: & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ F_3: & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \qquad [2]$$

Para cada pequeña sección plana por P, o sea, para cualquier versor X $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, la tensión unitaria correspondiente está representada (*) por el vector: $F = F_1\, \alpha_1 + F_2\, \alpha_2 + F_3\, \alpha_3$.

El estado de tensión en el punto P queda, pues, caracterizado por estos tres coeficientes vectoriales F_1, F_2, F_3; o lo que es lo mismo, por el cuadro de números o matriz (a_{ij}). El tensor en P es,

(*) En efecto: si se considera el tetraedro $OABC$ que intercepta en el primer triedro el plano ABC de cosenos directores α_1, α_2, α_3, y es s el área del triángulo ABC, el esfuerzo correspondiente es Fs; como las áreas de las otras caras son los productos de s por los cosenos, los esfuerzos correspondientes son $F_1 s\alpha_1$, $F_2 s\alpha_2$, $F_3 s\alpha_3$. Basta escribir la igualdad de equilibrio y suprimir el factor s.

pues, el ente abstracto definido por los tres coeficientes vectoriales o por la matriz de sus nueve componentes, que caracterizan el estado de tensión en el punto P. Por brevedad suele llamarse *tensor* al símbolo formado por estos nueve números o por los tres vectores.

En muchas otras cuestiones se presentan asimismo magnitudes físicas caracterizadas por una función vectorial lineal; y en recuerdo del primer problema de ese tipo que fué estudiado, han recibido el nombre de *tensores* dobles, o *díadas,* siendo necesario ese calificativo para distinguirlos de los tensores triples, cuádruples, etc. Refiriéndonos al tipo más sencillo y más importante para la Técnica, daremos, pues, la definición siguiente:

DEF. 1. — (El tensor como *función vectorial*). *Tensor doble* o *díada* en el punto P es una *función vectorial lineal* de las direcciones por el punto P, del tipo:

$$F = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 \qquad [3]$$

Aunque esta definición es la más clara y expresiva, suele preferirse la definición equivalente, análoga a la de los vectores, como número complejo de nueve componentes, o sea como matriz; pero como estos nueve números varían al modificar los ejes, es preciso caracterizar su modo de transformación.

Si los cosenos directores del nuevo eje x'_i son $\alpha^i_1, \alpha^i_2, \alpha^i_3$, el vector F correspondiente a esa dirección tiene según [2] las componentes:

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11}\,\alpha^i_1 + a_{21}\,\alpha^i_2 + a_{31}\,\alpha^i_3 \\ f_2 &= a_{12}\,\alpha^i_1 + a_{22}\,\alpha^i_2 + a_{32}\,\alpha^i_3 \\ f_3 &= a_{13}\,\alpha^i_1 + a_{23}\,\alpha^i_2 + a_{33}\,\alpha^i_3 \end{aligned} \qquad [4]$$

luego su proyección sobre ese eje x_j, o sea la nueva componente a'_{ij} del tensor, vale:

$$a'_{ij} = f_1\,\alpha^j_1 + f_2\,\alpha^j_2 + f_3\,\alpha^j_3 = \Sigma\, a_{rs}\,\alpha^i_r\,\alpha^j_s$$

entendiendo que la sumatoria es doble, extendida a todos los pares de índices $r, s = 1, 2, 3$.

Obtenemos, pues, esta definición equivalente:

DEF. 2. (El tensor como *matriz*). *Tensor doble* o *díada* es un ente abstracto representado por una matriz (a_{ij}) que al girar los ejes se transforma linealmente así:

$$a'_{ij} = \Sigma\, a_{rs}\,\alpha^i_r\,\alpha^j_s \qquad (r, s = 1, 2, 3) \qquad [5]$$

Nótese el significado de esta matriz: las tres filas definen los tres vectores homólogos de los tres versores coordenados, o sea los tres coeficientes vectoriales que definen el tensor; los números de cada columna son los coeficientes de las expresiones [4] de las componentes f_i de F.

Obsérvese también el diverso significado de los índices en la fórmula sumatoria [5]; los i, j son fijos en cada suma y perduran en el resultado, actuando como *parámetros;* en cambio, los índices de sumación r, s, toman los valores 1, 2, 3, y desaparecen en el resultado; por esta razón se llaman índices *mudos*, y pueden cambiarse sus nombres designándolos por otras letras, sin modificar el significado de la fórmula.

Significación de los tensores. De las relaciones lineales [3] y [5] resulta inmediatamente:

Si un tensor tiene todas sus componentes nulas en un sistema coordenado, también son nulas en cualquier otro. Tal tensor de componentes nulas se llama *tensor nulo.*

La anulación de un tensor expresa, pues, una propiedad intrínseca, independiente del sistema de coordenadas, es decir, una propiedad *geométrica* si relaciona elementos geométricos y una *ley natural* si relaciona elementos físicos De aquí la importancia capital de descubrir tensores para expresar con ellos las propiedades geométricas y las leyes físicas. La Geometría diferencial y la Física matemática encuentran en el cálculo tensorial su instrumento más eficaz.

Ejemplo: la curvatura total de una superficie viene expresada por un tensor; la anulación de éste caracteriza las superficies desarrollables sobre el plano. Este tensor de curvatura, aplicado al espacio-tiempo ha permitido a Einstein formular su ley de gravitación.

Tipos especiales de tensores.

El tensor más sencillo no nulo es el *tensor unidad*:

[6] $$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La función vectorial lineal que representa es la $F(X) = X$, es decir, el vector homólogo de cada versor es este mismo; y recíprocamente, esta función idéntica tiene su expresión en la matriz [6]; como esta propiedad es intrínseca, independiente de las coordenadas, las componentes de este tensor en todo sistema de coordenadas son siempre las mismas.

Igual significado intrínseco tiene el tensor $-U$, de diagonal $-1, -1, -1$; la función vectorial correspondiente es $F(X) = -X$. Tal tensor es, por ejemplo, el que representa el estado de tensión en el centro de una esfera comprimida por igual en todas direcciones; mientras que en el caso de tracción uniforme aparece el tensor de esfuerzos U.

Obsérvese que tiene carácter invariante la anulación de todas las componentes no principales cuando las principales son iguales, como acontece en estos dos casos: $1, 1, 1, -1, -1, -1$, y más en general a, a, a; en cambio, si éstas son a, b, c, aunque sean nulas todas las demás, al cambiar de coordenadas varían en general las nueve componentes, como se ve aplicando la fórmula [5].

En el caso del tensor de esfuerzos y en algunos otros, son iguales las componentes $a_{ij} = a_{ji}$, llamadas *conjugadas* en la matriz, ésta y el tensor, se llaman *simétricos*. En otros casos, los elementos conjugados son opuestos, siendo por tanto nulos los elementos principales a_{11}, a_{22}, a_{33}; tales tensores se llaman ***antisimétricos*** o ***hemisimétricos***.

Estas denominaciones carecerían de valor si no fuera por el hecho sorprendente de que simetría y antisimetría son independientes de los ejes; es decir: si respecto de una terna es $a_{ij} = a_{ji}$, también es $a'_{ij} = a'_{ji}$ respecto de la nueva terna; y análogamente se conserva la antisimetría al cambiar de ejes. Esto es corolario de la propiedad siguiente.

En el caso general de tensor cualquiera, las fórmulas [5] aplicadas a componentes conjugadas, dan componentes conjugadas, es decir, la matriz conjugada de (a_{ij}) se transforma por la misma fórmula [5] y por tanto define un tensor (a_{ji}), el cual se llama *conjugado* del (a_{ij}).

Por tanto, si la matriz conjugada de (a_{ij}) es esta misma, también la transformada lineal es conjugada de sí misma, es decir, simétrica; y análogamente en el otro caso.

Cálculo aritmético con tensores.

De la *Def.* 1 resulta que la suma de tensores es un tensor; y también de la *Def.* 2 resulta que las componentes $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ obtenidas sumando las componentes homólogas de dos tensores A y B, se transforman por la misma fórmula lineal [5], luego esos nueve números c_{ij} componen un tensor. Este se llama *suma* de ambos y se designa así: $A + B = B + A$.

Igualmente forman tensor las componentes ka_{ij}, siendo k un número cualquiera. El nuevo tensor se llama *producto* de k por A o de A por k y se representa así: $kA = Ak$.

Queda definida mediante ambas operaciones la *combinación lineal* de tensores $\Sigma k_r A_r$ de coeficientes reales cualesquiera; sus componentes son las combinaciones lineales análogamente formadas mediante los coeficientes k_r con las componentes homólogas.

Ejemplo importante, que habremos de utilizar, es la descomposición siguiente: dado el tensor $A = (a_{ij})$ llamemos s_{ij} y d_{ij} a la suma y a la diferencia de los elementos simétricos, es decir:

$$s_{ij} = a_{ij} + a_{ji} \qquad\qquad d_{ij} = a_{ij} - a_{ji}$$

y resultan dos nuevos tensores: el $S = (s_{ij})$ que es suma del A y de su conjugado; el $D = (d_{ij})$, que es diferencia de ambos. Resulta así la descomposición siguiente:

$$A = \tfrac{1}{2} S + \tfrac{1}{2} D$$

El tensor S es *simétrico* por tener iguales los elementos simétricos respecto de la diagonal. El D tiene nulos los elementos principales y opuestos los conjugados; luego es *antisimétrico.*

Contracción de tensores. — Consecuencia muy importante de la Def. 2 es esta igualdad:

$$a'_{11} + a'_{22} + a'_{33} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \qquad [7]$$

En efecto, el coeficiente que resulta para a_{11} al sumar las expresiones de a'_{11}, a'_{22}, a'_{33} mediante la fórmula de transformación [5] es la suma de los cuadrados de los tres cosenos directores, o sea 1; y análogamente valen 1 los coeficientes de a_{22} y a_{33}; mientras que el coeficiente de a_{rs} (r diferente de s) es: $\Sigma \alpha^i{}_r \alpha^i{}_s = 0$; por la supuesta ortogonalidad de los nuevos ejes coordenados.

La igualdad [7] puede enunciarse así: *La suma de componentes principales de un tensor* (a_{ij}) *es invariante.*

Esta operación que deduce un escalar partiendo de un tensor doble se llama *contracción del tensor*. Generalizada convenientemente a los de rango superior es muy importante en la teoría general.

Mientras esta operación rebaja el rango, y la suma la conserva, veamos ahora cómo se logra, inversamente, construir tensores de rango tan alto como se quiera, partiendo de los vectores.

Producto tensorial de vectores. — Si se multiplican las componentes del vector $A(a_1, a_2, a_3)$ por las componentes del vector $B(b_1, b_2, b_3)$ resultan nueve productos: $c_{ij} = a_i \cdot b_j$, que componen un tensor; pues en virtud de la fórmula de transformación [5] las nuevas componentes son:

$$c'_{ij} = a'_i \cdot b'_j = (\Sigma a_r \alpha^i{}_r)\ (\Sigma b_s \alpha^j{}_s) = \Sigma a_r b_s \alpha^i{}_r \alpha^j{}_s,$$

es decir, obedecen a la ley lineal. Esta regla de multiplicación se llama *tensorial* o de Gibbs, y el resultado obtenido se enuncia así:

El producto tensorial de dos vectores es un tensor doble.

He aquí desarrollados los dos productos de los vectores A y B:

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & b_1 a_3 \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & b_2 a_3 \\ b_3 a_1 & b_3 a_2 & b_3 a_3 \end{bmatrix}$$

observándose que son tensores conjugados, y su diferencia es el tensor antisimétrico:

$$AB - BA = \begin{bmatrix} 0 & a_1 b_2 - b_1 a_2 & a_1 b_3 - b_1 a_3 \\ a_2 b_1 - b_2 a_1 & 0 & a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - b_3 a_1 & a_3 b_2 - b_3 a_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Salta a la vista que las tres componentes situadas a un lado de la diagonal principal son precisamente las que suelen tomarse como componentes del vector llamado *producto vectorial;* debiendo elegirse las de uno u otro lado de la diagonal, según sea el convenio adoptado para el sentido de dicho vector, convenio íntimamente ligado con el signo de la terna de vectores coordenados. Esta distinción entre triedros positivos y negativos es netamente intuitiva y no expresable algebraicamente.

Según la definición de vector, el citado producto vectorial no es un vector propiamente dicho, sino un *semi-tensor;* la figura que se se conserva invariante es el par de vectores opuestos, en uno y otro sentido; pues si sólo se adopta uno de ellos, al tomar como nuevo triedro coordenado uno de sentido opuesto al anterior, dicho vector convencionalmente adoptado para representar el producto, se convierte en su opuesto.

Por el contrario, el producto escalar es invariante respecto de todo cambio de coordenadas ortogonales y aparece como suma de elementos principales del tensor AB, es decir, es el tensor (de rango 0) deducido de éste por la operación que hemos llamado *contracción*.

Se llama *valor, intensidad* o *componente* del tensor $F(X)$ en la dirección definida por el versor X a la componente del vector $F = F(X)$ en esa dirección, o sea al producto escalar $F \cdot X$.

Como las componentes de F respecto de los ejes vienen dadas por las formas lineales [4] al multiplicarlas por las componentes x_1, x_2, x_3, de X y sumar, resulta como valor de dicho producto escalar la suma doble:

$$a = F \cdot X = \Sigma\, a_{ij}\, x_i\, x_j \qquad (i, j = 1, 2,3)$$

Esta forma cuadrática (es decir polinomio homogéneo de segundo grado) tiene importancia capital en el estudio del tensor.

NOTA. — La componente del vector $F(x)$ en la dirección dada por el versor Y es análogamente el producto escalar:

$$F \cdot Y = \Sigma\, a_{ij}\, x_i\, y_j \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

Esta expresión justifica otro método de exposición de la teoría, que data de Hamilton y Gibbs, seguida por muchos autores modernos, basada en esta definición.

TENSOR DE INERCIA. — Se llama tensor de inercia de un sistema de masas respecto del origen O, al que tiene por componentes principales los momentos de inercia respecto de los ejes y como componentes secundarias los momentos mixtos o centrífugos, con signo opuesto,

Suponiendo una sola masa unitaria en el punto x, y, z; $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, el tensor de inercia tiene la expresión:

$$I = \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & z^2 + x^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{bmatrix}$$

Que esta matriz define, en efecto, un tensor, resulta inmediatamente de la descomposición anterior, puesto que la matriz sustraendo representa el producto tensorial del vector $P(x, y, z)$ por sí mismo, mientras el minuendo es el tensor unitario con el coeficiente numérico r^2; luego I es un tensor doble diferencia de dos tensores: $I = r^2\, U - PP$.

Esta descomposición muestra además el significado geométrico de I, pues llamando q al segmento de proyección de P sobre el eje Q arbitrariamente trazado por O, y d a la distancia de P hasta el eje, el valor de I en esa dirección Q, en virtud de [6] es:

$$a = r^2 - q^2 = d^2$$

Por tanto, la intensidad o valor del tensor I en cada dirección Q es precisamente el momento de inercia de la masa unitaria respecto de ese eje.

Consideremos ahora en lugar de una masa única todo un sistema de masas m_i en los puntos (xi, yi, zi) respectivamente $(i = 1,2,\dots n)$ el tensor de inercia es la suma de los n tensores correspondientes a las diversas masas y su valor en cada dirección es, por tanto, el momento de inercia respecto de ella.

CAPITULO VIII

SUPERFICIES DE SEGUNDO GRADO

LECCIÓN 46

PROPIEDADES GENERALES DE LAS CUÁDRICAS

180. — Superficies cilíndricas y cónicas.

Las superficies más sencillas, no planas, son las definidas por ecuaciones de segundo grado en coordenadas cartesianas y se llaman superficies de *segundo grado*, o de *segundo orden*, o bien *cuádricas*.

La ecuación general de la superficie cilíndrica de segundo grado que tiene las generatrices paralelas al eje z es la ecuación general de segundo grado con las variables x, y, o sea:

$$Ax^2 + By^2 + 2Hxy + 2Gx + 2Fy + C = 0$$

Su estudio se reduce al de las cónicas.

Según (167) todos los grupos de coordenadas λx_0, λy_0, λz_0 forman una recta que pasa por 0, luego la ecuación general de las superficies cónicas de segundo grado con vértice en el origen es la ecuación homogénea

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy = 0$$

cuyo estudio se reduce también al de las curvas de segundo orden, cortando por un plano que no pasa por el origen.

SUPERFICIES CILÍNDRICAS Y CÓNICAS DE REVOLUCIÓN. — Sabemos que la ecuación de un cilindro, cuando se adopta el eje z paralelo a las generatrices, es de forma $f(x, y) = 0$ y recíprocamente, toda ecuación que carece de una variable representa una superficie cilíndrica de generatrices paralelas al eje correspondiente. Si ésta es circular, la ecuación debe representar en el plano xy una circunferencia, y si adoptamos su centro como origen, la ecuación de la superficie cilíndrica circular de generatrices paralelas al eje z, es en coordenadas rectangulares: $x^2 + y^2 = r^2$.

La ecuación $x^2 + y^2 = r^2 z^2$ por ser homogénea representa una superficie cónica de vértice 0. Cortando por el plano $z = 1$ resulta la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$; luego la superficie cónica es circular.

Recíprocamente, dado un cono circular cualquiera de vértice 0, cuya directriz sea la circunferencia de radio r, a distancia h, o sea:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad , \quad z = h$$

la ecuación de la superficie cónica proyectante es:

$$x^2 + y^2 = z^2 \frac{r^2}{h^2}$$

puesto que haciendo $z = h$ resulta la circunferencia propuesta.

181. — Superficie esférica.

Todos los puntos (x, y, z) que distan r del punto 0 (a, b, c) satisfacen a la ecuación

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2 \qquad [1]$$

y recíprocamente; luego ésta es la ecuación de la superficie esférica de centro O y radio r.

Desarrollando [1] se obtiene esta otra:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + (a^2 + b^2 + c^2) - r^2 = 0$$

Dada una ecuación de segundo grado que carece de términos en xy, yz, zx y que tiene iguales los coeficientes de x^2, y^2, z^2, es decir (dividiendo por ese coeficiente)

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0 \qquad [2]$$

representa una superficie esférica cuyo centro está determinado por las coordenadas:

$$a = -\frac{A}{2} \quad ; \quad b = -\frac{B}{2} \quad ; \quad c = -\frac{C}{2}$$

y el radio por la igualdad $(a^2 + b^2 + c^2) - r^2 = D$
la cual exige que sea $D < a^2 + b^2 + c^2$

NOTA. — No es menester recordar en la práctica esta condición; basta escribir la ecuación [2] en la forma [1] y en el segundo miembro, aparece r^2. Si este segundo miembro resulta nulo, suele decirse que la esfera es de radio *nulo;* y si resulta negativo, que la esfera es *imaginaria.*

EJEMPLO 1.° — **Si la ecuación es:** $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z = 0$

Las coordenadas del centro son: $a = -2$; $b = 1$; $c = 3$.

Para formar los cuadrados: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2$.

es preciso sumar $4 + 1 + 9 = 14$ *a los dos miembros y por lo tanto el radio es* $\sqrt{14}$.

EJEMPLO 2.° — Si la ecuación es: $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 14 = 0$ resulta $r = 0$; es decir, la superficie se reduce al único punto real: $x = -2$; $y = 1$; $z = 3$.

Si en vez de $+ 14$ el término constante es cualquier otro número mayor que 14, en el segundo miembro quedará un término negativo y no existe superficie esférica. Suele decirse que la ecuación representa una superficie esférica imaginaria para indicar que todas las soluciones de la ecuación son imaginarias.

182. — Elipsoide.

Generalicemos la ecuación de la superficie esférica con centro en el origen de coordenadas, adoptando en vez del radio tres segmentos cualesquiera: a, b, c, y estudiemos la nueva ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad [3]$$

La superficie que representa se llama *elipsoide*, de semiejes a, b, c. Estos son, en efecto, los segmentos que la superficie intercepta en los semiejes coordenados, pues anulando y, z, o bien z, x, o bien x, y, resulta respectivamente: (*)

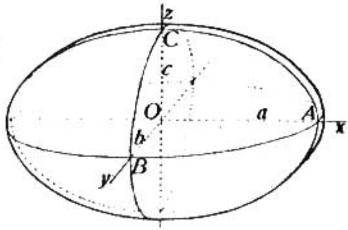
$$x = + a \quad , \quad y = + b \quad , \quad z = + c$$

Forma del elipsoide. — Si fijamos un valor de z, la sección de la superficie por el plano $z = z_0$ es la elipse

$$\frac{x^2}{a^2 k^2} + \frac{y^2}{b^2 k^2} = 1 \quad , \quad z = z_0$$

llamando:

$$k^2 = 1 - \frac{z_0^2}{c^2} \leqq 1 \quad ; \quad z_0 \leqq c$$



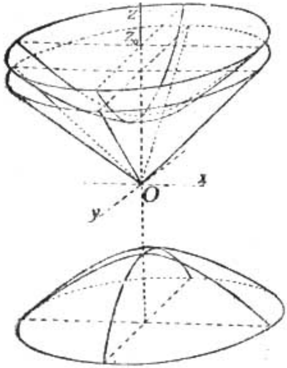
Los semiejes de esta elipse son: $ak \leqq a$; $bk \leqq b$ y van disminuyendo al crecer z_0, hasta anularse para $z_0 = c$, conservándose constante la razón $ak : bk = a : b$. Todas las elipses son, pues, *semejantes*; y para $z_0 > c$ no hay intersección.

Casos especiales. — En particular, tiene interés el caso $a = b$, pues las elipses secciones por planos paralelos al xy son circunferencias. El elipsoide se llama entonces *de revolución*, porque se puede engendrar haciendo girar la elipse meridiana de semiejes a y c alrededor del eje z. Si es $c > a$ se llama *elipsoide alargado*; si es $c < a$ se llama *elipsoide achatado*, o simplemente *esferoide*.

(*) No se confundan los *semiejes coordenados*, que son semirrectas, con los *semiejes de las cuádricas*, que son segmentos, o bien las medidas de estos segmentos.

183. — Hiperboloides.

Así como la ecuación de la hipérbola difiere de la ecuación de la elipse en el signo de un término, cambiemos signos de todos los modos posibles en la ecuación [3], comenzando por considerar ésta:



$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad [4]$$

Las secciones por los planos $z=z_0$ son las elipses:

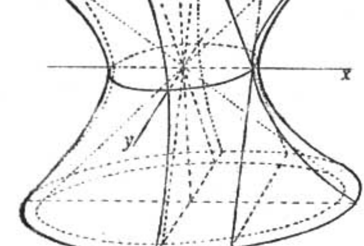
$$\frac{x^2}{a^2k^2}+\frac{y^2}{b^2k^2}=1, \qquad z=z_0$$

siendo:

$$k^2=\frac{{z_0}^2}{c^2}-1 \geqq 0 \quad \text{para } z_0 \geqq c$$

Aquí, al revés que en el elipsoide debe ser $z_0 \geqq c$, para que haya intersección; y ésta es una elipse, de forma invariable cuyos semiejes ak y bk van creciendo infinitamente al crecer $|z_0|$.

Esta superficie tiene, en consecuencia, una *hoja* encima del plano $z=c$, y otra debajo del $z=-c$; se llama, por esto, *hiperboloide de dos hojas.*



Si $a=b$, la superficie es de revolución respecto del eje z.

Cambiando un solo signo en la ecuación [3] resulta:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad [5]$$

Al cortar por el plano $z=z_0$ resulta la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2k^2}+\frac{y^2}{b^2k^2}=1 \qquad z=z_0;$$

siendo:

$$k^2=1+\frac{{z_0}^2}{c^2} \geqq 1$$

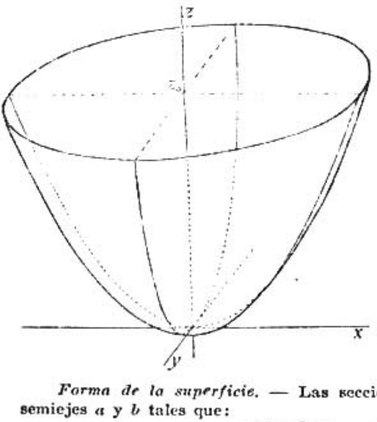
En este caso existe elipse sección para todo valor de z_0; y conservándose semejante, al aumentar z_0, va creciendo a uno y otro lado del plano xy, el cual determina la elipse mínima, de semiejes a, b, llamada *elipse de garganta.*

Como no hay interrupción en la superficie, ésta se llama ***hiperboloide*** de una hoja.

Si es $a = b$, el hiperboloide es de revolución, respecto del eje z.

184. — Paraboloides.

PARABOLOIDE ELÍPTICO. — De igual modo que la ecuación reducida de la parábola tiene un término cuadrado y uno de primer grado, consideremos las ecuaciones con un sólo término de primer grado, comenzando por el caso en que los coeficientes de términos cuadrados sean positivos:



$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z. \qquad [6]$$

Escribimos de este modo los coeficientes, porque así aparecen las secciones por los planos coordenados, llamados ***principales***, en esta forma:

$$x = 0 \quad , \quad y^2 = 2qz.$$
$$y = 0 \quad , \quad x^2 = 2pz$$

que representan dos parábolas de parámetros p y q, dirigidas ambas hacias las z positivas.

Forma de la superficie. — Las secciones por planos $z = z_0$ son elipses de semiejes a y b tales que:

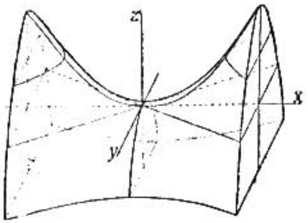
$$a^2 = 2p\, z_0 \quad , \quad b^2 = 2q\, z_0.$$

si es $z_0 > 0$; y estos semiejes van creciendo infinitamente con z_0; es decir, la superficie se extiende infinitamente en el sentido de las z positivas, siendo las secciones horizontales elipses semejantes. En cambio, para $z_0 < 0$ no resulta intersección real.

Esta superficie tiene, por tanto, una sola hoja, situada en la región de las z positivas, la cual es tanto más abierta cuanto mayores sean p y q; si es $p = q$ el paraboloide es de ***revolución*** y sus secciones normales al eje z son circunferencias; si p y q son desiguales, la superficie no es ***redonda*** (es decir, no es de revolución) y tendrá forma tanto más aplastada u ovalada cuanto más difieran entre sí p y q.

PARABOLOIDE HIPERBÓLICO. — Se llama así la superficie definida por la ecuación:

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z \qquad [7]$$



Las dos parábolas secciones principales:

$$y = 0 \quad , \quad x^2 = 2pz;$$

$$x = 0 \quad , \quad y^2 = -2qz;$$

están dirigidas en sentidos contrarios.

Las secciones por los planos $z = z_0$ son todas hipérbolas y por eso se llama *hiperbólico* este paraboloide.

Esta es la única de las cuádricas propiamente tales (esto es, no cónica) que nunca es redonda; por ser todas sus secciones planas hipérbolas o parábolas.

185. — Simetrías de las cuádricas.

Las superficies [3], [4], [5] se llaman *cuádricas con centro,* porque sus ecuaciones no se alteran al cambiar los signos de x, y, z simultáneamente, es decir: si un punto (x, y, z) está en la superficie, también lo está el simétrico $(-x, -y, -z)$ respecto del origen.

Tampoco se altera la ecuación al cambiar el signo de una sola coordenada, es decir: si el punto (x, y, z) está en la superficie, también lo está el $(x, y, -z)$, simétrico respecto del plano xy; y análogamente los simétricos respecto de los otros dos planos coordenados.

Tampoco se altera la ecuación al cambiar los signos de dos coordenadas, es decir: si el punto (x, y, z) está en la superficie, también lo está el $(-x, -y, z)$, simétrico respecto del eje z; y análogamente respecto de los otros ejes.

Resumen: *las tres cuádricas con centro son simétricas respecto de ese punto, respecto de los tres planos coordenados y respecto de los tres ejes coordenados.*

Los paraboloides son simétricos respecto de dos planos coordenados y del eje común a ellos, pero carecen de centro de simetría.

186. — Cuádricas degeneradas.

Toda ecuación que sólo tiene términos cuadrados y término constante:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$$

representa una de las cuádricas con centro estudiadas en esta lección, pues puede escribirse en la forma [3], [4], [5], si bien pueden aparecer permutados los ejes.

DISCUSIÓN. — *No para que se aprendan las fórmulas generales, sino para que se vea el método que deba seguirse en cada caso numérico*, veamos lo que representa la ecuación, cuando se anula alguno de los coeficientes, distinguiendo tres casos esenciales:

I. — *Término constante nulo.* Es decir: $D = 0$.

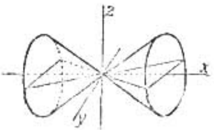
La ecuación homogénea:

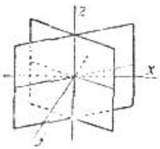
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0 \qquad [8]$$

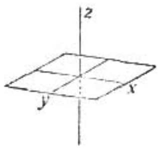
representa, como hemos visto en (180), un *cono*, cuyo vértice es el origen O. Dentro de este tipo de cono, cabe que algún *término cuadrado se anule y el* cono degenera reduciéndose a un par de planos; sea por ejemplo $C = 0$; la ecuación:

$$Ax^2 + By^2 = 0; \quad \frac{y}{x} = \pm\sqrt{-\frac{A}{B}} \qquad [9]$$

representa dos planos que pasan por el eje z; si A y B tienen igual signo, no existen tales planos, pues solamente los puntos $x = y = 0$ del eje z satisfacen a la ecuación; pero como hay soluciones complejas, se dice que representa *dos planos imaginarios.*







Sean $C = 0$, $B = 0$. La ecuación

$$Ax^2 = 0 \quad ; \quad x^2 = 0 \qquad [10]$$

representa el plano $x = 0$, considerado como doble. Análogamente si $z^2 = 0$. (Fig. 3).

II. — *Ecuación no homogénea.* Suponiendo $D \neq 0$, sea, por ejemplo, $C = 0$; la ecuación:

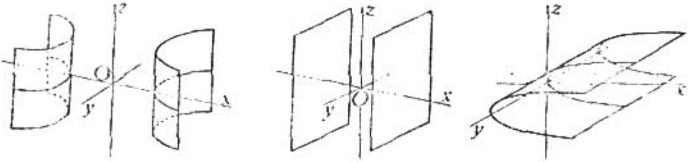
$$Ax^2 + By^2 = D \qquad [11]$$

representa en el plano (x, y), una cónica (real o imaginaria) y todos los puntos que se proyectan en ella en dirección del eje z, también satisfacen a la ecuación, cualquiera que sea su coordenada z, luego: la ecuación [11] representa un cilindro de generatrices paralelas al eje z.

Si es $C = 0$ y $B = 0$, la ecuación:

$$Ax^2 = D \quad ; \quad x = \pm\sqrt{\frac{A}{D}} \qquad [12]$$

representa dos planos paralelos, si D y A tienen el mismo signo; en caso contrario se dice que representa dos planos paralelos imaginarios, por la misma razón antes dada.



III. — *Paraboloides degenerados.* — Dentro del tipo de los paraboloides $Ax^2 + By^2 = z$, si se anula un término cuadrado, la ecuación se reduce al tipo:

$$Ax^2 = z \qquad [13]$$

que representa un cilindro parabólico de generatrices paralelas al eje y.

Si se anulan los dos términos cuadrados, la ecuación se reduce a $z = 0$ que representa el plano xy; para conservar el carácter de cuádrica se dice que representa además el plano del infinito.

Resumen: La ecuación incompleta, dentro de los tipos estudiados en las cinco cuádricas representa una ***superficie cónica*** (que se puede reducir a dos planos secantes) si es homogénea; y una ***superficie cilíndrica*** (que se puede reducir a dos planos paralelos) si no es homogénea.

NOTAS

ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO.

Después de haber estudiado las ecuaciones más sencillas de segundo grado, consideremos la ecuación más general posible:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Hxy + 2Fyz + 2Gxz + 2Lx + 2My + 2Nz + D = 0$$

La razón de elegir esta notación para los coeficientes, que parece no seguir el orden alfabético, se ve inmediatamente pasando a coordenadas cartesianas homogéneas (*), es decir, poniendo x/t, y/t, z/t, en vez de x, y, z, y así resulta la ecuación homogénea:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy + 2Lxt + 2Myt + 2Nzt = 0$$

DETERMINACIÓN DE LA CUÁDRICA. — Como la ecuación tiene diez coeficientes, dividiendo por uno de ellos no nulo quedan nueve; son, pues, necesarias *nueve* condiciones para determinar una cuádrica.

Dar un punto (x_0, y_0, z_0, t_0) de la superficie es dar una ecuación:

$$Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + Dt_0^2 +$$

$$2Fy_0z_0 + 2Gz_0x_0 + 2Hx_0y_0 + 2Lx_0t_0 + 2My_0t_0 + 2Nz_0t_0 = 0$$

entre los coeficientes, luego ***son necesarios nueve puntos para determinar una cuádrica.***

(*) El lector puede suponer coordenadas cartesianas homogéneas, pero todo lo que sigue vale igualmente para coordenadas proyectivas homogéneas.

Cabe, sin embargo, que por nueve puntos dados pasen dos cuádricas. Basta, en efecto, imaginar dos cuádricas secantes y elegir nueve puntos de su intersección.

Pero si por nueve puntos pasan dos cuádricas $f = 0$, $\varphi = 0$, también pasan las infinitas cuádricas del haz $f - \lambda\varphi = 0$, cualquiera que sea el número λ, pues se satisfacen para las soluciones comunes a ambas, luego resulta:

Por nueve puntos pasa una sola cuádrica o bien infinitas.

Otros modos de determinar una cuádrica son las siguientes:

Por un punto y dos cónicas que tienen dos puntos comunes y están en distintos planos. En efecto, los dos puntos comunes, más otros tres elegidos en cada una, son ocho puntos. Sin embargo, el método más rápido para determinar cuádricas, cuando se dan cónicas, es el de la combinación lineal, que llamaremos "método de las λ".

EJEMPLO 1.° — Consideremos la cuádrica:

$$f = x^2 + 2y^2 + z^2 - x + 2y = 0 \qquad [1]$$

y sus dos secciones por los planos $y = 0$, $z = 0$.

Para determinar una cuádrica que pase por estas dos cónicas y además por el punto (1, 1, 2) consideremos la ecuación:

$$f - \lambda yz = 0 \qquad [2]$$

que representa un haz de cuádricas, cada una de las cuales pasa por los puntos comunes a aquella cuádrica y cada uno de los dos planos. Para determinar la que pasa por el punto (1, 1, 2) basta sustituir estas coordenadas [2], y de la ecuación en λ que así resulta, se despeja el valor numérico de este parámetro, que es:

$$\lambda = \frac{f(1,1,2)}{1.2} = \frac{8}{2} = 4$$

Luego, la ecuación de la cuádrica que cumple la condición impuesta es:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 4yz - x + 2y = 0$$

EJEMPLO 2.° — Cuádrica que pasa por el punto $(1, -1, 1)$ y por las secciones determinadas en la misma [1] por los planos $2y + z = 0$, $x - 2y = 0$.

El valor de λ es ahora:

$$\lambda = \frac{f(1,-1,1)}{-1.3} = -\frac{1}{3}$$

y la ecuación que resulta es:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy - 2yz + xz - 3x + 6y = 0$$

PUNTOS SINGULARES. — Un punto (x_0, y_0, z_0, t_0) se llama *singular*, cuando anula a las cuatro derivadas.

Para que exista punto singular deben ser compatibles las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2} f'_{x_0} &= Ax + Hy + Gz + Lt = 0 \\ \tfrac{1}{2} f'_{y_0} &= Hx + By + Fz + Mt = 0 \\ \tfrac{1}{2} f'_{z_0} &= Gx + Fy + Cz + Nt = 0 \\ \tfrac{1}{2} f'_{t_0} &= Lx + My + Nz + Dt = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [3]$$

es decir, deben admitir solución distinta de la $(0, 0, 0, 0)$ y la condición necesaria y suficiente para ello es que se anule el determinante de los coeficientes, que llamaremos *discriminante* de la cuádrica.

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & H & G & L \\ H & B & F & M \\ G & F & C & N \\ L & M & N & D \end{vmatrix} \qquad [4]$$

Si el discriminante es nulo, las ecuaciones son compatibles y existe un punto singular, el cual está en la superficie en virtud de la identidad de Euler, que se comprueba inmediatamente con el cuadro [3]

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = 2f \qquad [5]$$

Supongamos que el punto singular sea el origen; entonces debe ser $L = M = N = D = 0$ y la ecuación se reduce a:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Hxy + 2Fyz + 2Gxz = 0$$

que representa un cono con vértice en el origen.

Análogamente, cualquiera que sea el punto singular, la cuádrica es un cono y éste es su vértice. Adoptado como origen de coordenadas, la ecuación se hace homogénea en x, y, z (180) y su estudio se reduce al de su cónica sección.

PROPIEDADES PROYECTIVAS. — Aunque su estudio se hace mejor usando coordenadas proyectivas, puede estudiarse en cartesianas la polaridad, de la cual sólo podemos dar ligera idea. Se llama *plano polar* de un punto (x_0, y_0, z_0, t_0) al plano en que están situados sus conjugados armónicos respecto de los pares de intersección con la cuádrica de las secantes que pasan por él. Que tal plano existe se demuestra fácilmente resultando como ecuación del mismo en coordenadas homogéneas.

$$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} + tf'_{t_0} = 0 \quad \text{o bien} \quad x_0f'_x + y_0f'_y + z_0f'_z + t_0f'_t = 0$$

y para pasar a coordenadas absolutas, basta haber $t = 1$.

En particular, si el punto es impropio, su plano polar es el plano llamado *diametral*, que contiene los puntos medios de todas las cuerdas paralelas a aquella dirección.

Se demuestra fácilmente mediante esta ecuación, que *los planos polares de los puntos de una recta pasan por otra recta*, la cual se llama *recta polar* de aquella respecto de la cuádrica. Basta, en efecto, utilizar la expresión (167) de las coordenadas de los puntos de una recta, la cual adopta esta forma más simétrica en coordenadas homogéneas:

$$x = x_0 - \lambda x_1 \quad , \quad y = y_0 - \lambda y_1 \qquad z = z_0 - \lambda z_1 \quad , \quad t = t_0 - \lambda t_1$$

EJERCICIOS

1. — Clasificar diversas cuádricas. Si tiene algún centro, se adopta como origen, estudiando las secciones por los planos coordenados.

2. — Clasificar cuádricas por el método de formación de cuadrados, como en este ejemplo:

$$x^2 + 3y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 2x - 4y + 3 = 0$$

sacando x factor común y completando el cuadrado, se transforma así:

$$x^2 - 2x(2y - 1) + 3y^2 - 2yz - 4y + 3 = 0$$
$$(x - 2y + 1)^2 - y^2 - 2yz + 2 = 0$$

y formando cuadrado con los términos en y, z, dan: $-(y + z)^2 + z^2 + 2$.

La cuádrica es, un hiperboloide de dos hojas, pues su ecuación reducida es $X^2 - Y^2 + Z^2 + 2 = 0$, referida al triedro no ortogonal:

$$x - 2y + 1 = 0 \quad , \quad y + z = 0 \quad , \quad z = 0$$

GENERATRICES RECTILÍNEAS Y SECCIONES PLANAS

187. — Generatrices rectilíneas del hiperboloide de una hoja. La ecuación del hiperboloide de una hoja puede escribirse así:

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} \qquad [1]$$

O bien:

$$\left(\frac{x}{a} - 1\right)\left(\frac{x}{a} + 1\right) = \left(\frac{z}{c} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{z}{c} + \frac{y}{b}\right)$$

Escrita en esa forma aparece como producto de las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - 1 &= \lambda\left(\frac{z}{c} - \frac{y}{b}\right) \\ \lambda\left(\frac{x}{a} + 1\right) &= \frac{z}{c} + \frac{y}{b} \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

cualquiera que sea el parámetro λ. Al variar λ cada una de estas ecuaciones representa un haz de planos y sus intersecciones son rectas situadas en la superficie, puesto que la ecuación [1] se satisface para las soluciones comunes a éstas, ya que es el producto de ambas.

Resulta, pues, un sistema de infinitas rectas situadas en la cuádrica y el conjunto de todas se llama *haz alabeado* de segundo orden.

Análogamente, como [1] es el producto de las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - 1 &= \mu\left(\frac{z}{c} + \frac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\frac{x}{a} + 1\right) &= \frac{z}{c} - \frac{y}{b} \end{aligned}\right\} \qquad [3]$$

resulta otro haz alabeado sobre la superficie.

Para $\lambda = 0$ resulta la generatriz $x = a$, $bz + cy = 0$.

„ $\mu = 0$ „ „ „ $x = a$, $bz - cy = 0$.

y el plano tangente $x = a$ da como sección este par de rectas.

Fijado un punto (x_0, y_0, z_0) en la superficie, las ecuaciones [2] determinan un valor de λ:

$$\lambda = \frac{\dfrac{x_0}{a} - 1}{\dfrac{z_0}{c} - \dfrac{y_0}{b}} = \frac{\dfrac{z_0}{c} + \dfrac{y_0}{b}}{\dfrac{x_0}{a} + 1}$$

el cual determina una generatriz del primer sistema que pasa por él, y análogamente resulta una generatriz del segundo sistema. En consecuencia:

El hiperboloide de una hoja contiene dos haces de generatrices rectilíneas y por cada punto de la superficie pasa una de cada sistema, las cuales determinan el plano tangente en dicho punto.

188. — Generatrices rectilíneas del paraboloide hiperbólico. Análogamente, la ecuación del paraboloide hiperbólico:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

puede escribirse así:

$$z = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \qquad [4]$$

y es por tanto el producto de estas dos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} &= \lambda z \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}\right\} \qquad [5]$$

que definen un haz alabeado de rectas situadas en la superficie y asímismo es el producto de estas otras dos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} &= \mu \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= \frac{z}{\mu} \end{aligned}\right\} \qquad [6]$$

que definen otro haz alabeado, por la misma razón ya explicada en el caso del hiperboloide.

Lo mismo que en el caso anterior, por cada punto del paraboloide pasa una generatriz de cada sistema; pero hay una diferencia notable y es que todas las rectas [5] son paralelas al plano:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \qquad [7]$$

y todas las rectas [6] son paralelas al plano:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \qquad [8]$$

Estos dos planos se llaman *directores* del paraboloide.

Para $\mu \to \infty$ resulta en el haz [6] la recta impropia del plano [7]; y para $\lambda \to \infty$, la del plano [8]. Es, pues, natural, decir que esas rectas impropias son generatrices del paraboloide y que forman su intersección con el plano impropio.

189. — Cuádricas alabeadas.

Se llaman *alabeados* el hiperboloide de una hoja y el paraboloide hiperbólico por contener generatrices rectilíneas y no ser desarrollables sobre un plano, como se verá más adelante.

El elipsoide carece de generatrices rectilíneas por ser finito, y también carece de ellas el hiperboloide de dos hojas y el paraboloide elíptico, por existir planos que no contienen puntos de la superficie ni propios ni impropios (por ejemplo todos los planos $z = k$ siendo $k < 0$ para el paraboloide, o bien $-c < k < c$ para el hiperboloide.

Las aristas de los haces de planos [2] son las rectas de ecuaciones:

$$x/a = 1 \quad , \quad z/c = y/b \quad ; \quad x/a = -1 \quad , \quad z/c = y/b$$

y como estas cuatro ecuaciones son claramente incompatibles, dichas aristas se cruzan. Cada par de planos homólogos se cortan en una recta, secante de ambas aristas; luego cada dos secantes MN, $M'N'$ se cruzan. Análogamente para los haces [3], [5], [6].

Por consiguiente: *Dos generatrices de un mismo haz no se cortan.*

En cambio, como las ecuaciones [2] y [3] no son independientes, pues el producto de las dos primeras es idéntico al producto de las dos segundas (o sea la ecuación [1]), una de ellas es consecuencia de las otras dos y por tanto las coordenadas del punto que satisfaga a tres de ellas satisface también a la cuarta. Es decir: *Dos generatrices de distinto haz tienen un punto común.*

Dadas tres generatrices de un sistema, las del otro quedan determinadas por la condición de cortar a estas tres.

Sea un punto de la generatriz c, los planos Pa y Pb determinan una recta que pasa por P y cortan a las a y b en puntos propios o impropios.

Por cada punto de cada una de las rectas a, b, c pasa, pues, una sola generatriz del otro sistema.

Recíprocamente, dadas tres rectas cualesquiera que se cruzan dos a dos se obtiene fácilmente la ecuación de la cuádrica que se determina como indica el siguiente ejemplo.

EJEMPLO. — Sean las generatrices dadas:

$$\begin{matrix} x = 0 & \quad x = 1 & \quad x + y = 2 \\ y = 0 & \quad y = z & \quad z = 0 \end{matrix}$$

Para que la recta

$$\begin{matrix} y = bz + q \\ x = az + p \end{matrix} \qquad [1]$$

corte a la primera, es preciso que las ecuaciones $az + p = 0$, $bz + p = 0$ tengan una solución común, o sea:

$$aq = bp \qquad [2]$$

Para que corte a la segunda es preciso que sean compatibles las ecuaciones:

$$az + p - 1 = 0 \quad ; \quad (b - 1)z + q = 0$$

O sea

$$aq = (b - 1)\,(p - 1)$$

Y teniendo en cuenta la [2]:

$$b + p = 1 \qquad [3]$$

Para que corte a la tercera es preciso que sean compatibles las ecuaciones:

$$(a + b)z + p + q = 2 \quad z = 0 \quad \therefore \quad p + q = 2 \qquad [4]$$

Eliminando a, b, p, q entre las cinco ecuaciones [1], [2], [3] resulta una ecuación en x, y, z que se satisface para las coordenadas de todos los puntos de todas las rectas [1] secantes de las tres dadas, y es por tanto la ecuación del lugar geométrico formado por todas esas secantes.

Dicha eliminación se hace cómodamente despejando a, b, p, q de las cuatro ecuaciones lineales y sustituyendo en la [2], que es de segundo grado. Así resulta la ecuación de la cuádrica:

$$y^2 + xy + xz - yz - 2y = 0$$

Otro método más rápido pero que no pone de manifiesto su estructura reglada es el de coeficientes indeterminados, partiendo de la ecuación general (190) e imponiéndole las condiciones de contener a las tres rectas directrices dadas.

190. — Secciones planas de las cuádricas.

La sección plana de una cuádrica es una cónica propia o degenerada. En efecto, adoptando ese plano como coordenado, es decir $z = 0$, la ecuación general de la cuádrica:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Hxy + 2Fyz + 2Gxz + \\ + 2Lx + 2My + 2Nz + D = 0 \qquad [1]$$

da, como ecuación de la sección por el plano xy la siguiente:

$$Ax^2 + By^2 + 2Hxy + 2Lx + 2My + D = 0 \qquad [2]$$

que representa una cónica.

El plano se llama *secante* si corta a la cuádrica en una cónica propia.

Se llama plano *tangente* si sólo tiene un punto común con la cuádrica o bien un par de rectas. Se llama *exterior* si no tiene ningún punto común con la cuádrica.

Las secciones paralelas de una cuádrica por planos secantes paralelos son curvas semejantes.

En efecto, cortemos la misma cuádrica [1] por otro plano $z = k$ paralelo al plano $z = 0$, resultando una cónica definida por éste y la ecuación:

$$Ax^2 + By^2 + 2Hxy + 2Fyk + 2Gxk + 2Lx + 2My + 2Nk - D = 0$$

que tiene los mismos *términos de segundo grado en xy*, y por consiguiente es semejante a aquélla.

NOTA. — En particular, si el plano paralelo es tangente, la sección se reduce a un *sólo punto o a dos rectas y la semejanza deja de subsistir.*

191. — Determinación analítica de las secciones circulares.

Un método que se presenta de modo natural para determinar las secciones planas que son circunferencias es el siguiente:

Si de la ecuación de la cuádrica $f(x, y, z) = 0$, restamos la ecuación de una superficie esférica elegida de tal manera que la diferencia represente dos planos, la línea de intersección de la cuadrica con la superficie es la misma que la intersección de ésta con los dos planos, es decir, dos circunferencias.

Sea el elipsoide escaleno:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad a > b > c$$

y la superficie esférica de radio b:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

La diferencia de ambas ecuaciones:

$$x^2 \left\{ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right\} = z^2 \left\{ \frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right\}$$

y como ambos coeficientes son positivos por ser $1/b^2 > 1/a^2$ y $1/c^2 > 1/b^2$, esta ecuación se descompone en dos ecuaciones de primer grado que representan dos planos: $z = \pm kx$. Por tanto:

Hay dos secciones circulares cuyos planos pasan por el eje intermedio b.

Si elegimos la superficie esférica de radio a o c resulta un coeficiente positivo y otro negativo, es decir, dos planos imaginarios.

Ejemplo. — Sea el elipsoide:

$$4x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 2$$

Como el coeficiente intermedio es el 4, elegiremos la esfera:

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 2$$

Y restando resulta:

$$y^2 - 2z^2 = 0$$
$$y = \pm \sqrt{2}\, z$$

Las dos secciones circulares que pasan por el eje x están perfectamente determinadas por estos dos planos y la superficie esférica.

Método gráfico. — Si trazamos secciones por el eje mayor a resultan elipses con este semieje a y el otro es el radio vector que el plano determina en la elipse de semiejes b, c, el cual, por estar comprendido entre b y c, es menor que b y en consecuencia menor que a.

Resulta, pues, una elipse de semieje mayor a.

Análogamente, si trazamos un plano por c determina con la elipse de semiejes a, b un radio vector mayor que b y por tanto mayor que c. Resulta, pues, una elipse de semieje mínimo c.

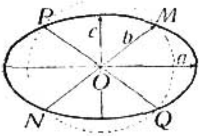
En cambio, si la sección se traza por el eje intermedio b, como el radio vector de la elipse de semiejes a, c, está comprendido entre a y c y por continuidad toma todos los valores intermedios, existe un radio igual a b.

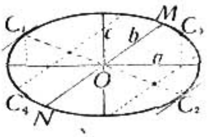
Trazando con centro O la circunferencia de radio b, ésta corta a la elipse en cuatro puntos simétricos dos a dos, que determinan los planos buscados.

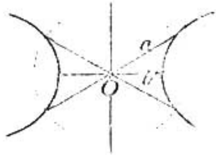
Obtenidos los diámetros MN, PQ, sus conjugados se construyen tomando el punto medio de una cuerda paralela a cada uno; y cortan a la elipse en los puntos cíclicos.

EJERCICIOS. — Determínense analíticamente los diámetros conjugados de los dos diámetros obtenidos en el ejemplo anterior.

La tangente a la elipse $3y^3 + 6z^2 = 2$ en el punto (y, z) tiene coeficientes $6y$, $12z$. Establecida proporcionalidad con los coeficientes 1, $\pm\sqrt{z}$ resultan los diámetros conjugados, y éstos determinan en la elipse los puntos cíclicos.







192. — Doble sistema de secciones circulares. Puntos cíclicos.

Obtenidas las dos secciones circulares por los planos π y π' que pasan por el eje intermedio del elipsoide, determinadas analítica o gráficamente, todas las secciones producidas por planos paralelos son también circunferencias (190) puesto que las secciones paralelas son semejantes. Resulta, pues, un doble sistema de secciones circulares, *dos a dos simétricas, respecto de los planos principales que pasan* por el eje intermedio; los centros de las secciones paralelas entre sí forman el diámetro conjugado con el diámetro MN de la elipse.

PUNTOS CÍCLICOS. — Los dos extremos C_1 C_2 de cada diámetro conjugado con un sistema de secciones circulares, o sea los puntos en que corta a la cuádrica se llaman *umbílicos* o *cíclicos*.

Los puntos cíclicos de la cuádrica están, pues, definidos por la condición de que los planos secantes paralelos al plano tangente en cada uno de ellos, dan secciones circulares.

En el elipsoide, hay por consiguiente cuatro puntos cíclicos si*tuados en la sección principal de semiejes máximo y mínimo y si*métricos dos a dos respecto de éstos.

193. — Secciones circulares del hiperboloide de una hoja.

El método es igual al seguido en el elipsoide. Si de la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad a > b \;\; ; \; c \text{ es cualquiera,}$$

restamos la ecuación de la superficie esférica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

resulta:

$$y^2 \left\{ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right\} - z^2 \left\{ \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right\} = 0$$

que representa un par de planos: $z = \pm k$ y que pasan por el eje x y que son simétricos respecto de los dos planos coordenados xy, xz.

NOTA. — En cambio, por el eje menor b no pasa ningún plano que dé secciones circulares, pues todas las secciones resultan con el semieje mínimo b. Como el plano tangente corta en dos rectas, y sus paralelos cortan en hipérbolas que tienen los mismos puntos impropios que estas rectas: resulta *el hiperboloide alabeado carece de puntos cíclicos.*

Ejemplo: $$3x^2 + y^2 - 2z^2 = 4$$

Como el mayor de los semiejes transversos es el b, elegiremos la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

y restando resulta la ecuación:

$$2x^2 = 3z^2 \quad \therefore \quad \pm \sqrt{2/3}x = z$$

que representa dos planos; éstos, con la superficie esférica, determinan dos secciones circulares.

EJERCICIOS

1. — Determinar las secciones circulares y los puntos cíclicos del hiperboloide de dos hojas, demostrando que existen dos sistemas de secciones circulares, paralelas al mayor de los dos ejes no transversos y cuatro puntos cíclicos.

2. — Determinar las secciones circulares del paraboloide elíptico, demostrando que hay dos sistemas paralelos a la tangente a la parábola principal de mayor parámetro y dos puntos cíclicos en la parábola principal de menor parámetro.

3. — ¿Cuáles son los puntos cíclicos y las secciones circulares en la cuádricas de revolución?

4. — Enumerar las cuádricas que carecen de secciones circulares y las que carecen de puntos cíclicos, pero tienen secciones circulares.

5. — Condición necesaria y suficiente para que las secciones circulares centrales del elipsoide contengan los puntos cíclicos, es que el coeficiente intermedio sea medio armónico de los otros dos.

Obsérvese que esto se verifica en el ejemplo del texto.

CAPITULO IX

DERIVADAS Y DIFERENCIALES DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

LECCIÓN 48

DERIVADAS PARCIALES Y TEOREMA DEL VALOR MEDIO

194. — Continuidad de las funciones de dos variables.

La definición de continuidad de una función $z = f(x,y)$ de dos variables, es análoga a la de las funciones de una sola variable, y vale para cualquier número de variables.

Se dice que $f(x, y)$ es *continua* en el punto (a, b) cuando se verifica la condición:

$$\text{lím. } f(x, y) = f(a, b), \text{ para } (x, y) \to (a, b)$$

es decir: cualquiera que sea el número positivo ε, se verifica

$$| f(x, y) - f(a, b) | < \varepsilon$$

para todos los puntos (x, y), que cumplen la condición:

$$| x - a | < \delta, \; | y - b | < \delta \quad , \quad \text{o bien } (x - a)^2 + (y - b)^2 < \delta^2$$

siendo δ un número conveniente.

Estos puntos (x, y) forman un cuadrado de semilado δ o un círculo de radio δ; uno y otro se llaman *entornos* del punto (a, b).

Una función se dice continua en toda una región del plano, cuando es continua en cada uno de los puntos de dicha región. Si en el punto (a, b) la función es positiva, como $f(x, y)$ llega a diferir de $f(a, b)$ menos de su valor, también es $f(x, y) > 0$ en un cierto entorno del punto (a, b). Es decir: *Si una función es continua en un punto, y no se anula en él, tiene signo constante en un entorno de ese punto.*

La representación gráfica de una función: $z = f(x, y)$, se hace llevando el valor de z correspondiente a cada par (x, y) como tercera coordenada perpendicular al plano $x\,y$, y se tiene un conjunto de puntos cuyas alturas difieren tan poco como se quiera (como suele decirse imprecisamente, varían por grados insensibles), y esta figura se llama *superficie*. Ejemplos de estas representaciones gráficas se conocen desde la Geometría Analítica.

Notación general: Se dice que un punto variable $P \to Q$ si las coordenadas de P tienden a las de Q; o sea: la *distancia* $PQ \to 0$. La continuidad en el punto Q se expresará así: $f(P) \to f(Q)$ para $P \to Q$.

195. — Derivadas parciales primeras.

Si consideramos los valores de z para los distintos de x, se obtiene, considerando a y constante, una curva sección situada en un plano paralelo al $z\,x$. La pendiente de esa curva se obtiene derivando $z = f(x, y)$, como si la única variable fuese la x, mientras que la y se conserva constante. Esta *derivada parcial* se representa así: $z'_x = f'_x(x, y)$, o más escuetamente: $z_x = f_x(x, y)$.

Análogamente, si se conserva x constante, haciendo variar y, la derivada se representa así: $z'_y = f'_y(x, y)$, y su valor es la pendiente de las curvas secciones de la superficie, por los planos $x =$ constante.

Se suelen usar también las notaciones: $D_x f(x, y)$, $D_y f(x, y)$; y también estas otras:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \; , \; \frac{\partial z}{\partial y}$$

debiendo tenerse en cuenta que no son cocientes de diferenciales, pues los incrementos de z son distintos según que se incremente x o y. Esta notación puede inducir a error, y es menos conveniente.

196. — Teorema del incremento finito.

Vamos a demostrar el teorema análogo al del valor medio de las funciones de una variable, comenzando por calcular el incremento de la función cuando incrementamos las dos variables.

Si tenemos el valor de la función en un punto $x = a$, $y = b$, e incrementamos la x en h, la función se habrá incrementado en $hf'_x(\xi, b)$; y si después se incrementa b en k, sufre un nuevo incremento $kf'_y(a + h, \eta)$; luego resulta el teorema del valor medio:

$$\Delta z = hf'_x(\xi, b) + kf'_y(a + h, \eta)$$

NOTA. — He aquí todo el cálculo, más ampliamente desarrollado. Sea:

$$\Delta z = f(a + h, b + k) - f(a, b) \qquad [1]$$

donde h y k pueden ser números cualesquiera. Sumando y restando el número $f(a + h, b)$ a la expresión [1] se tiene:

$$\Delta z = [f(a + h, b + k) - f(a + h, b)] + [f(a + h, b) - f(a, b)]$$

Los dos primeros términos forman el incremento de la función $f(a+h, b)$ en que b sufre un incremento k; y los dos últimos términos son el incremento de la $f(a, b)$ en que a está incrementada en h.

Aplicando el teorema del valor medio a los dos primeros términos, resulta:

$$f(a+h, b+k) - f(a+h, b) = k.f'_y(a+h, b+\theta k) \qquad 0 < \theta < 1$$

Análogamente, aplicando el teorema del valor medio a los dos últimos:

$$f(a+h, b) - f(a, b) = hf'_x(a+\vartheta' h, b) \qquad 0 < \vartheta' < 1$$

Luego sumando resulta el teorema del valor medio.

Obsérvese que de la simple existencia de derivadas parciales en un punto ha resultado el teorema del valor medio; y que éste implica la *continuidad* de $f(x, y)$ si tales derivadas están *acotadas* en un entorno del punto, pues Δz puede hacerse arbitrariamente pequeño tomando suficientemente pequeños h y k.

Si las variables son x, y, z, e incrementamos la x en h, después la y en k, después la z en l, el incremento que sufre la función $u = f(x, y, z)$ al incrementar cada variable, es igual al incremento de ésta por la derivada parcial respectiva en un punto del intervalo de incrementación, luego el incremento total es:

$$\Delta u = f(a+h,\ b+k,\ c+l) - f(a, b, c) =$$
$$h.f'_x(\xi, b, c) + kf'_y(a+h, \eta, c) + lf'_z(a+h,\ b+k,\ \zeta)$$

Análogamente se procede para cualquier número de variables.

Corolario. *Si las derivadas son nulas en un entorno del punto Q, es $f(P)$ constante en tal entorno.* Pues siendo $\Delta u = 0$, resulta: $f(P) = f(Q)$ para todo P del entorno.

197. — Errores en las funciones de varias variables.

El teorema del valor medio tiene aplicaciones análogas a las ya vistas en el caso de una variable.

Calculada una magnitud en función de otras, los errores en las medidas de éstas producen un error de aquélla, el cual es igual a la suma de estos errores multiplicados por las respectivas derivadas. En la medición de los datos habrá, pues, que extremar la exactitud en aquellas variables cuya derivada respectiva es grande; y puede descuidarse la de aquellas que corresponden a derivada pequeña.

El desconocimiento de los puntos intermedios que figuran en el teorema no es obstáculo, puesto que se trata, no de obtener el valor exacto del error, sino una cota del mismo, conocidas las cotas de los errores de los datos.

Error de uvw. — Como la derivada respecto de cada variable es el producto de las otras, resulta:

$$\Delta(uvw) = vw \, . \, \Delta u + uw \, . \, \Delta v + uv \, . \, \Delta u$$

y el error relativo se deduce dividiendo por uvw, y resulta *aproximadamente* la suma de los errores de los factores.

Para acotar rigurosamente el error de uvw debe tenerse en cuenta que vw, uw, uv deben tomarse en puntos intermedios de los intervalos respectivos.

Análogamente se deducen las otras reglas de cálculo de errores en las operaciones aritméticas.

Ejemplo. — Dada la base a y los ángulos contiguos B y C, el lado b se calcula por la fórmula:

$$b = \frac{a \, . \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} = \frac{a \, . \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}(B+C)}$$

Sus derivadas respecto de a, B y C son:

$$\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}(B+C)} \quad , \quad \frac{a \, . \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen}^2(B+C)} \quad , \quad -\frac{a \, . \operatorname{sen} B \, . \cos(B+C)}{\operatorname{sen}^2(B+C)}$$

Si los datos son:

$$a \sim 10 \text{ m.} \qquad B \sim 29° \qquad C \sim 61°$$

los valores aproximados de las derivadas son:

$$0{,}5 \quad ; \quad 8 \quad ; \quad 0$$

esto indica que debe extremarse la exactitud en la medida de B, aunque se descuide la de C, que apenas influye. Supongamos que los errores absolutos sean:

$$\Delta a < 0{,}05 ; \quad \Delta B < 10' < 0{,}003 ; \quad \Delta C < 10' < 0{,}003.$$

Aunque no se conocen los valores intermedios B, C, puede asegurarse que están comprendidos entre

$$29° \pm 10' \qquad 61° \pm 10' \quad ;$$

luego: $B + C > 89°$, por tanto, las derivadas son seguramente menores que

$$0{,}5 \quad ; \quad 10 \quad ; \quad 0{,}05$$

y el error total menor que

$$0{,}025 + 0{,}03 + 0{,}0002 \sim 0{,}05$$

donde se observa que el error de C no ha influido, pudiendo haberse apreciado ese ángulo casi a simple vista.

EJERCICIOS

1. — Deducir las fórmulas de error en el cálculo de un triángulo determinado por dos lados y el ángulo que forman.

2. — ¿Cuáles son los ángulos más favorables para la determinación de un triángulo por un lado y los ángulos adyacentes?

3. — Deducir las reglas que dan el error relativo de un cociente y de una raíz.

CALCULO DE DERIVADAS Y DIFERENCIALES

198. — Derivada de una función compuesta.

Una función $f(u, v)$ de dos variables u, v dependientes de una misma variable t, se llama *compuesta* de u y v. Tal es por ejemplo, la función u^v cuando u y v son funciones de t. Más general, $f(u, v, w \ldots)$ siendo $u, v, w \ldots$ funciones de t, es una función compuesta de estas variables dependientes de t.

Para calcular la derivada de una función compuesta, $F(t) = f(u, v)$, pasemos del valor t al $t + \Delta t$; si son u, v los valores correspondientes a t, y $u + \Delta u$, $v + \Delta v$ los correspondientes a $t + \Delta t$, tendremos por el teorema del valor medio:

$$\Delta F(t) = f'_u(u_1, v_1) \,.\, \Delta u + f'_v(u_2, v_2) \,.\, \Delta v$$

o bien, llamando $\delta_1 = f'_u(u_1, v_1) - f'_u(u, v)$, diferencia que es infinitésima, por la supuesta continuidad de f'_u (y análogamente para δ_2) es:

[1] $$\Delta F(t) = f'_u(u, v)\, \Delta u + f'_v(u, v)\, \Delta v + (\delta_1 \Delta u + \delta_2 \Delta v)$$

y formando el cociente de incrementos:

$$\frac{\Delta F(t)}{\Delta t} = f'_u(u, v) \frac{\Delta u}{\Delta t} + f'_v(u, v) \frac{\Delta v}{\Delta t} + \delta\ ,$$

siendo δ infinitésimo, pues los cocientes de incrementos de u y v por Δt están acotados, por tener límites finitos: u', v'. Para $\Delta t \to 0$ resulta:

$$F'(t) = f'_u(u, v) \,.\, u' + f'_v(u, v) \,.\, v'.$$

En general, si la función se compone de varias funciones $u, v, w \ldots$ (por ejemplo tres funciones), resulta, como antes:

$$F'(t) = f'_u(u, v, w) \,.\, u' + f'_v(u, v, w) \,.\, v' + f'_w(u, v, w) \,.\, w'$$

que también podemos escribir así:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dt}$$

La derivada de una función compuesta respecto de la variable t independiente, es la suma de los productos obtenidos multiplicando cada derivada parcial respecto de una de las variables dependientes por la derivada de ésta respecto de t.

Si en la fórmula anterior multiplicamos por dt resulta:

$$dF(t) = f'_u . du + f'_v . dv + f'_w . dw$$

fórmula que vale cualquiera que sea la variable independiente t y de la cual se pasa a la derivada dividiendo por la diferencial dt.

Supongamos ahora que u, v y w sean funciones de x y de y al mismo tiempo. Entonces, tendremos: $F(x, y) = f(u, v, w)$.

Esta función tendrá dos derivadas parciales, ya sea que se considere a x o a y como constante. Es decir, aplicando la regla anterior:

$$F_x' = f'_u . u'_x + f'_v . v'_x + f'_w . w'_x$$

$$F'_y = f'_u . u'_y + f'_v . v'_y + f'_w . w'_y .$$

Si en vez de ser dos las variables independientes fuesen más, las derivadas parciales serían tantas como variables independientes.

EJEMPLO. — Sea $y = u^v$, siendo u, v funciones de x; la derivada de y es:

$$y' = v . u^{v-1} . u' + u^v . lu . v'$$

Si es $y = x^x$ resulta:

$$y' = x . x^{x-1} + x^x . lx = x^x(1 + l . x)$$

que ya se obtuvo mediante logaritmos.

TEOREMA DE EULER. — Una función se llama *homogénea* de grado m si al multiplicar sus variables por t queda multiplicada por t^m; es decir, si tiene por ejemplo dos variables x, y, se verifica la identidad:

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y)$$

Derivando respecto de t resulta:

$$xf'_x(tx, ty) + yf'_y(tx, ty) = mt^{m-1} f(x, y)$$

y para $t = 1$, obtenemos la *identidad de Euler*, que caracteriza las funciones homogeneas de cualquier número de variables

$$xf'_x + yf'_y + . + wf'_w = mf(x, y, \ldots\ldots, w)$$

la cual habíamos obtenido para las funciones algebraicas de segundo grado.

La demostración usual del teorema recíproco que omitimos, es inadmisible.

199. — Concepto general de diferencial.

Dada una función $z = f(x, y)$ con derivadas continuas, si las variables son funciones de t, acabamos de ver que la diferencial de z viene dada por la fórmula:

$$[2] \qquad dz = f'_x . dx + f'_y . dy$$

donde $dx = x' . dt$, $dy = y' . dt$. Supongamos ahora que x e y sean variables independientes y adoptemos la misma definición [2], o sea:

Diferencial de una función con todas sus derivadas parciales continuas es la suma de los productos de estas derivadas parciales por los incrementos arbitrarios de las correspondientes variables.

La expresión [2] es, pues, una *definición* si x e y son variables independientes; es un *teorema* si son funciones de t.

Supongamos el caso general de una función de varias variables, las cuales son funciones de otras varias. Sea, por ejemplo, $f(u, v, w)$ siendo u, v, w funciones de x, y; luego $f(u, v, w) = F(x, y)$; su diferencial, según la definición que acabamos de dar, es:

$$dF = F'_x . dx + F'_y . dy$$

puesto que estas derivadas F'_x, F'_y, son continuas si lo son las derivadas respecto de u, v, w, y las de éstas respecto de x, y; ya que entonces vienen dadas F'_x, F'_y por las expresiones obtenidas en (198), las cuales, sustituidas en dF, dan:

$$dF = f'_u(u'_x . dx + u'_y . dy) + f'_v(v'_x . dx + v'_y . dy) + f'_w(w'_x . dx + w'_y . dy)$$

y como los paréntesis son du, dv, dw, resulta:

[3] $$dF = f'_u . du + f'_v . dv + f'_w . dw$$

Conclusión importante: Mientras la derivación exige saber la dependencia o independencia de las variables y en cada caso resulta regla distinta, para la diferenciación hay una regla única:

La diferencial de una función de varias variables (dependientes o independientes) es la suma de los productos de sus derivadas respecto de ellas, por las respectivas diferenciales de éstas.

NOTA. — Si se repasa la demostración (198) se verá que lo esencial es que el paréntesis de [1] sea infinitésimo de orden superior a los incrementos; y esto induce a dar esta noción más general, debida a Thomae:

Sean independientes o no las variables, si el incremento admite la expresión:

$$f(x + h,\ y + k) - f(x, y) = A \cdot h + B \cdot k + \delta \cdot r$$

siendo A, B independientes de h, k, y $\delta \to 0$ cuando la distancia $r = \sqrt{h^2 + k^2} \to 0$, es f derivable y sus derivadas parciales son A, B. La parte principal $f'_x \cdot h + f'_y \cdot k$ se designa por df. Las funciones que cumplen tal condición se llaman diferenciables.

Todas las reglas demostradas con la hipótesis demasiado exigente de la continuidad de las derivadas, valen para las funciones diferenciables en general. (V. *Elementos de la T. de funciones*).

200. — Significado geométrico de la diferencial.

De igual modo que para las curvas el tomar la diferencial por el incremento equivale a sustituir la curva por su tangente, para las superficies equivale a tomar un plano, que se llama tangente.

Consideremos la superficie $z = f(x, y)$, donde la función $f(x, y)$ tiene derivadas parciales *continuas* en el punto $z_0 = f(x_0, y_0)$; su incremento, para todo punto (x, y), o sea la ecuación de la superficie, es:

$$z - z_0 = (x - x_0)f'_x(x_1, y_1) + (y - y_0)f'_y(x_2, y_2)$$

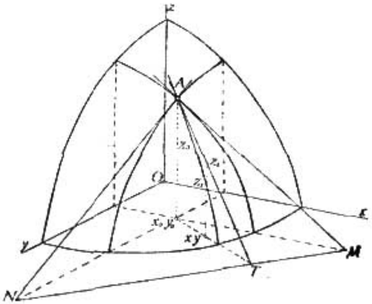
donde (x_1, y_1) (x_2, y_2) son puntos intermedios; en cambio, si ponemos la diferencial, la ecuación:

[4] $$z - z_0 = (x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0)$$

que tiene coeficientes constantes, representa un plano que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0). La diferencia de ordenadas entre el plano y la superficie es

$$(x - x_0)\delta + (y - y_0)\delta' = r(\delta . \cos\ \alpha + \delta' . \text{sen}\ \alpha)$$

siendo δ δ' infinitésimos, por ser los incrementos de f'_x f'_y, que por hipótesis, son continuas. Siendo, pues, infinitésima de orden superior respecto de la distancia r desde (x_0, y_0) a (x, y), parece natural llamar *tangente* a ese plano, por analogía con las curvas y porque cortado por planos verticales da las tangentes a las curvas secciones de la superficie.



Para $y = y_0$ resulta una sección plana paralela al plano xz, y la sección del plano tangente es la recta tangente.

Análogamente, para $x = x_0$, resulta una sección plana de la superficie y su tangente en el mismo punto A.

Más general: para $\alpha =$ constante, resulta una sección plana y su tangente; la pendiente de ésta, o sea el límite de $\Delta z/\Delta r$ para $\Delta r \to 0$, se llama *pendiente* en la dirección α, o *derivada* en la dirección α; su valor se representa así:

[4] $$z'_r = f'_x(x_0, y_0) . \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) . \text{sen}\, \alpha$$

Para $\alpha = 0$ es $r = x$, y resulta z'_x ; para $\alpha = 90°$, resulta z'_y.

EJEMPLO 1. — *Paraboloide.* La ecuación del paraboloide es $z = px^2 \pm qy^2$; considerando el signo [+], el paraboloide es elíptico, con el signo [—] hiperbólico.

Las derivadas son: $z'_x = 2px$, $z'_y = 2py$, luego la ecuación del plano tangente al paraboloide elíptico, en el punto (x_0, y_0, z_0) es:

$$2pxx_0 + 2qyy_0 - 2px_0^2 - 2qy_0^2 + z_0 = z.$$

Los dos términos: $-2px_0^2 - 2qy_0^2$ suman: $-2z_0$ puesto que el punto (x_0, y_0, z_0) está en la superficie, luego $z + z_0 = 2pxx_0 \pm 2qyy_0$ es la ecuación del plano tangente al paraboloide elíptico o hiperbólico en un punto.

EJEMPLO 2. — ¿Cuál es la pendiente del paraboloide $z = 2x^2 + y^2$ en el punto (1, 1, 3) en la dirección $x = y$?

$$z'_r = 4 . \cos 45^\circ + 2 . \operatorname{sen} 45^\circ = 3\sqrt{2}$$

EJEMPLO 3. — La ecuación del plano tangente en el origen es $z = 0$; plano que deja a la superficie en su lado superior si el paraboloide es elíptico, pues en todos los demás puntos de éste es $z > 0$; pero el plano $z = 0$ corta el paraboloide hiperbólico en dos rectas $px^2 = qy^2$.

NOTA. — Hemos demostrado que si las derivadas parciales de $f(x,y)$ son *continuas*, las tangentes a las curvas planas, secciones por los planos paralelos al eje z, están en un plano. Del cap. X resulta más en general: Si $F(x, y, z) = 0$ es una superficie, y son x, y, z funciones de t que representan una curva sobre la superficie y por tanto satisfacen a la ecuación, se verifica:

$$F'_x\, dx + F'_y\, dy + F'_z\, dz = 0$$

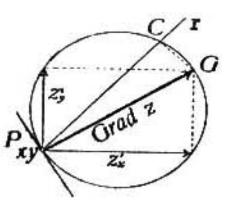
relación que expresa, como veremos, que la tangente a esa curva está en el plano que pasa por el punto y tiene los coeficientes F'_x, F'_y, F'_z.

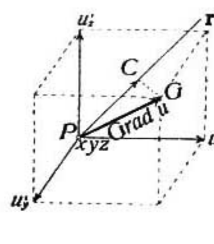
Con la definición de Thomae resulta: *Condición necesaria y suficiente para que una superficie tenga plano tangente, es que la función sea diferenciable.*

201. — Gradiente de una función.

Para construir una gráfica de las pendientes de las diversas curvas trazadas en la superficie $z = f(x, y)$ por un punto $A(a, b, c)$ llevemos en cada recta trazada por el punto (a, b) del plano xy un segmento igual a la derivada de z en esa dirección, en uno u otro sentido según sea su signo. Por tanto, en la dirección x, llevaremos z'_x (hacia uno u otro lado, según su signo); en la dirección y el segmento z_y'; en la dirección de argumento α llevaremos

$$PC = z'_r = z'_x . \cos \alpha + z'_y . \operatorname{sen} \alpha$$





Pero este binomio representa la proyección sobre dicho rayo de la quebrada PMG, o sea de su resultante PG; luego es menor que PG, excepto para la dirección PG, en que z'_r alcanza el valor máximo. Este vector PG de componentes (z'_x, z'_y) que representa la pendiente máxima, se llama *gradiente* de la función z en el punto A, o *pendiente máxima*, o simplemente *pendiente* de la función en A, y suele representarse con la letra *nabla*, que es una Δ invertida.

Resulta, además, que la gráfica lugar de los extremos C es la circunferencia de diámetro PG.

También se representa el gradiente de u por estas notaciones más cómodas:

$$\text{Grad. } u = Du = (u_x, u_y)$$

La función escalar u se llama *potencial* del campo de vectores gradientes. No todo campo de vectores admite un *potencial*, es decir, no siempre existe una función u cuyas derivadas parciales sean las componentes de aquellos vectores, como veremos en (274) obteniendo condiciones necesarias y suficientes.

Análogamente, para las funciones $u = f(x, y, z)$ la derivada en la dirección de cosenos α, β, γ, es

$$u'_r = u'_x \cdot \alpha + u'_y \cdot \beta + u'_z \cdot \gamma$$

pues en esa dirección es:

$$x = a + r\alpha \quad , \quad y = b + r\beta \quad , \quad z = c + r\gamma .$$

Si a partir del punto (a, b, c) se lleva en la direción (α, β, γ) un vector de longitud u'_r, éste resulta ser la proyección del vector (u_x', u'_y, u'_z) llamado *gradiente* de u en el punto (a, b, c) y que representa la pendiente máxima.

La gráfica de las pendientes, o sea el lugar de los extremos de los vectores que se proyectan sobre PG es, por tanto, la superficie esférica de diámetro PG.

202. — Líneas de nivel y superficies de nivel.

En vez de representar la función $z = f(x, y)$ por una superficie, es más cómodo dibujar en el plano xy las líneas de ecuación $f(x, y) =$ constante, anotando en cada una el valor de esa constante. Estas líneas, que se llaman de *nivel*, son las proyecciones de las secciones de la superficie por los planos $z = C$, y dos cualesquiera no se cortan, pues en el punto común, $f(x, y)$ debería tomar C dos valores distintos.

Mediante esta representación, que se llama *plano acotado*, se calcula aproximadamente el valor de la función en cualquier punto, por interpolación.

Como en cada línea de nivel es $\Delta z = 0$, su pendiente en cada punto es nula, y recordando la gráfica del párrafo anterior, resulta:

El gradiente en un punto es normal a la curva de nivel que pasa por ese punto y dirigido en el sentido creciente de la función.

Análogamente: para representar una función $u = f(x, y, z)$ se construyen las *superficies de nivel* $u = C$; el gradiente en cada punto es normal a la superficie de nivel que pasa por él y dirigido en el sentido de las C crecientes.

EJERCICIOS

1. — Determinar los planos tangentes a los paraboloides.

2. — Calcular la máxima pendiente del paraboloide $z = x^2 - y^2$ en el punto $(1, 1, 0)$.

Lección 50

DERIVADAS Y DIFERENCIALES DE FUNCIONES IMPLICITAS

203. — Definición y condición de existencia.

Una curva en el plano no siempre está dada por una función explícita: $y = f(x)$, sino que a veces la y es función de la x implícitamente, es decir, nos dan una ecuación: $f(x, y) = 0$, la cual es preciso resolver para encontrar los valores de y que corresponden a cada valor de x.

A veces es posible despejar y, es decir, transformar la función implícita en explícita. Por ej.:

$$y^3 + xy^2 + x - 1 = 0$$

es una ecuación de tercer grado en y que podría resolverse aplicando la fórmula de Cardano estudiada en Algebra; es decir, transformaríamos la ecuación dada $f(x, y) = 0$ en una función explícita irracional: $y = \varphi(x)$.

Pero si en lugar de tener una ecuación de tercer grado, tuviéramos una de quinto grado, no sería posible, en general ,esta transformación, y menos si la ecuación es trascendente.

Además, ni aún en los casos en que es posible despejar y, ofrece ventaja la transformación.

Sin embargo, no por eso renunciaremos a construir la curva. solo que para cada punto de la curva será necesario resolver la ecuación numérica por los métodos de aproximación que se estudian en Álgebra.

Ejemplos. — Sea la ecuación: $y^5 + x y^2 + x - 1 = 0$. Para $x = 1$ se tiene: $y^5 + y^2 = 0$ $\therefore$ $y^2(y^3 + 1) = 0$. Los valores de y serán $y = 0$, $y = 0$, $y = -1$, y los otros dos valores serán las dos raíces cúbicas imaginarias de -1. Es decir que para $x = 1$, tenemos tres valores reales de y, dos de ellos confundidos. Si damos a x valores muy próximos a 1, los valores de y son muy próximos a los hallados, y tendremos tres ramas de la curva, que nos representan la función dada. Ha quedado descompuesta la función no uniforme, en tres funciones uniformes.

Dada una ecuación $f(x, y) = 0$, no siempre habrá valores de y que correspondan a los de x; en este caso no hay función, como sucede en el ejemplo:

$$\text{sen } (x + y) - x^2 = 5.$$

No habrá ningún par de valores de x e y que cumplan la condición anterior, puesto que un seno a lo sumo vale 1, que nunca es igual a $5 + x^2$.

Sea la ecuación: $x^2 + y^2 = 0$.

¿Se puede decir en este caso que y es función de x?; los únicos valores posibles son $x = 0$ e $y = 0$; por consiguiente no hay curva.

Estos ejemplos nos indican que en cada caso, antes de calcular las derivadas ,será necesario ver si hay curva, es decir, si y es función de x. Se demuestra (véase cualquier tratado moderno de Análisis, p. ej., nuestros *Elementos*) que si las derivadas parciales de la función: f'_x, f'_y, son continuas y se verifica que: $f'_y \neq 0$ para un cierto punto, hay por lo menos un arco de curva que pasa por ese punto, y entonces es posible calcular la derivada en él.

EJEMPLOS. — Para la ecuación $x^2 + y^2 = 0$ las derivadas parciales son:

$$f'_x = 2x, \quad f'_y = 2y$$

para el punto $x = 0$, $y = 0$ es $f'_y = 0$, luego no debe extrañarnos que no haya curva.

Si tenemos: $x^2 + y^2 = 1$ para $x = 0$, es $y = \pm 1$; las derivadas parciales son:

$$f'_x = 2x; \quad f'_y = 2y,$$

entonces para el punto $(0, +1)$ o $(0, -1)$, es $f'_y = 2$, o bien $f'_y = -2$, luego por el criterio enunciado, podemos asegurar que por cada uno de esos puntos pasa un arco de curva, los cuales se expresan inmediatamente en forma explícita, como es bien sabido.

204. — Derivadas de funciones implícitas de una variable.

Sea una función derivable $y(x)$, definida por la ecuación $f(x, y) = 0$. En un punto (a, b) tendremos: $f(a, b) = 0$.

La función dada es una función de dos variables, de las cuales la x es la independiente, puesto que la y depende del valor de la x. La derivada, que se calcula por la regla de la función compuesta, es nula para todo valor de x por ser $f(x, y) = 0$; luego:

$$f'_x . 1 + f'_y . y' = 0$$

de donde se despeja:

[1] $$y' = -f'_x / f'_y$$

suponiendo que existe derivada f'_y continua, no nula en el punto considerado. Esta hipótesis basta para asegurar la existencia de la función y su derivada. (V. *Elementos de T. Funciones*).

Sustituyendo las coordenadas (x, y) de cada punto de la curva, se obtiene la pendiente de la tangente en él.

NOTA. — Claramente se ve que las expresiones f'_x y f'_y, o sea:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}$$

no son cocientes; pues, si lo fueran, la expresión [1] se reduciría a $-\partial y/\partial x$, lo que es absurdo. Las fracciones figuradas no son más que símbolos para indicar f'_x o bien f'_y, como hemos explicado en otro lugar.

EJEMPLO. — Sea la ecuación de una elipse:

$$3x^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'x}{f'y} = -\frac{6x}{2y} = -\frac{3x}{y}$$

205. — Función implícita de varias variables independientes.

Sea la ecuación: $F(x, y, z) = 0$; por ejemplo:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 2z^2 = 0,$$

En este caso, z no es función de x e y porque los únicos valores que satisfacen a la ecuación dada son: $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$, y no existe la superficie porque la suma de 3 cuadrados será siempre positiva, cualquiera que sea el valor que se dé a x y a y.

En ecuaciones más complicadas que la del ejemplo, será más difícil darse cuenta si z es función de x y de y. Se demuestra de modo análogo al caso de dos variables (v. *Elementos de T. F.*), que una vez obtenido un punto (x_0, y_0, z_0), la condición suficiente para la existencia de superficie en un cierto entorno de este punto, es que las tres derivadas existan y sean continuas y además que $f'_z \neq 0$ en dicho punto.

Si en lugar de la ecuación anterior tenemos:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 2z^2 = 1$$

que representa un elipsoide de revolución, resulta para $x = 1$, e $y = 2$:

$$z = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{2}\,;\; f'_z = 4z = \pm 2\sqrt{2} \neq 0$$

luego por cada uno de esos puntos pasa un trozo de superficie: $z = f(x, y)$. Vamos a calcular las dos derivadas parciales de esta función. La derivada parcial con respecto a x resulta tomando $y =$ constante en la ecuación $F(x, y, z) = 0$; estamos en el caso de funciones implícitas de una variable y suponiendo $F'_z \neq 0$, resulta:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad . \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Por tanto: la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $F(x, y, z) = 0$ resulta sustituyendo estas expresiones en la ecuación:

[2] $$z - z_0 = (x - x_0)z'_x + (y - y_0)z'_y$$

sale así la ecuación siguiente, que es válida aun en el caso $F'_z = 0$, si no son nulas las tres derivadas, pues basta elegir convenientemente las variables *independientes*:

[3] $$(x - x_0)F'_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)F'_y(x_0, y_0, z_0) + \\ + (z - z_0)F'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Ejemplo. — El plano tangente al elipsoide anterior en el punto $(1\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{4}\sqrt{6})$ *tiene* la *ecuación*

$$(x - 1\tfrac{1}{2}) + \sqrt{6}\,(z - \tfrac{1}{4}\sqrt{6}) = 0$$

En el punto (2, 2, 0) se anula F'_z, pero tomando x, z *o* bien y, z como variables independientes, subsiste la ecuación [3] que en este caso es:

$$2(x - z) + 0\,.\,(y - z) + 0\,.\,z = 0$$

es decir: $x = z$, como se debía esperar.

206. — Planos tangentes a las cuádricas con centro.

Sea el hiperboloide de una hoja:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

Las derivadas parciales en el punto (x_0, y_0, z_0) son:

$$\frac{2x_0}{a^2} \;.\; \frac{2y_0}{b^2} \;.\; \frac{2z_0}{c^2}$$

El plano tangente *tiene, pues, la ecuación:*

$$\frac{(x - x_0)x_0}{a^2} + \frac{(y - y_0)y_0}{b^2} - \frac{(z - z_0)z_0}{c^2} = 0$$

y como el punto (x_0, y_0, z_0) satisface a la ecuación de la superfície, la ecuación del plano se reduce a ésta:

$$\frac{x\,.\,x_0}{a^2} + \frac{y\,.\,y_0}{b^2} - \frac{z\,.\,z_0}{c^2} = 1.$$

Si en lugar del hiperboloide de una hoja tenemos el de dos hojas, o bien un elipsoide, basta cambiar signos.

Si la cuádrica es un paraboloide $z = px^2 + qy^2$ resulta la ecuación del plano tangente:

$$z + z_0 = 2p\,.\,xx_0 + 2q\,.\,yy_0$$

207. — Funciones definidas por sistemas de ecuaciones.

Con frecuencia vienen definidas las funciones implícitas, no por una ecuación, sino por un sistema de ecuaciones. Así, por ejemplo, una curva del espacio de tres dimensiones viene definida como intersección de dos superficies:

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0.$$

Sólo una de las variables es independiente, pues las otras dos quedan determinadas por el par de ecuaciones.

Sea (x_0, y_0, z_0) un punto de la curva, es decir, un punto común a las dos superficies. ¿Existe la curva? es decir, ¿hay un cierto entorno del valor x_0, tal que a cada valor de x corresponden valores de y, z?

Suponiendo que existen las derivadas parciales continuas de las funciones $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$, se demuestra (V. *Elementos de T. F.*). que es condición *suficiente* para la existencia de un arco de curva que pase por el punto (x_0, y_0, z_0) que sea:

$$\begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ \varphi'_y & \varphi'_z \end{vmatrix} \neq 0$$

Todo determinante de este tipo, formado con las n derivadas parciales de cada una de las n funciones respecto de n variables, se llama determinante *funcional* o *jacobiano* de las funciones respectó de las n variables, y se suele representar por la misma notación de las derivadas parciales. Así por ejemplo, el determinante anterior se representaría brevemente así:

$$\frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(y, z)}$$

Para calcular las derivadas de las funciones y, z de la variable independiente x, definidas por el anterior sistema de ecuaciones, derivaremos ambas respecto de x y tenemos:

$$f'_x + f'_y \cdot y' + f'_z \cdot z' = 0$$
$$\varphi'_x + \varphi'_y \cdot y' + \varphi'_z \cdot z' = 0$$

de donde podemos despejar y'. z', ya que el determinante de sus coeficientes no es sino el jacobiano, el cual, por hipótesis, no es 0.

Tenemos, por consiguiente:

$$y' = \begin{vmatrix} -f'_x & f'_z \\ -\varphi'_x & \varphi'_z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ \varphi'_y & \varphi'_z \end{vmatrix}$$

$$z' = \begin{vmatrix} f'_y & -f'_x \\ \varphi'_y & -\varphi'_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ \varphi'_y & \varphi'_z \end{vmatrix}$$

o sea, con la notación simbólica de los jacobianos:

$$\frac{\partial(f,\varphi)}{\partial(z,x)} : \frac{\partial(f,\varphi)}{\partial(y,z)}$$

$$\frac{\partial(f,\varphi)}{\partial(x.y)} : \frac{\partial(f,\varphi)}{\partial(y,z)}$$

resultados que podemos escribir así:

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial(f,\varphi)}{\partial(y,z)}} = \frac{dy}{\dfrac{\partial(f,\varphi)}{\partial(z,x)}} = \frac{dz}{\dfrac{\partial(f,\varphi)}{\partial(x,y)}}$$

es decir, las diferenciales de las variables x, y, z, ligadas por el par de ecuaciones dadas, son proporcionales a los tres determinantes funcionales respecto de los tres pares de variables x, y, z en orden circular.

Este resultado lo hemos de aplicar muy pronto para la determinación de la tangente a la curva dada.

EJEMPLO.—El paraboloide $z = 2x^2 - y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$ tienen común el origen de coordenadas y el jacobiano en él respecto de y, z es:

$$\begin{vmatrix} -2y & -1 \\ 2y-2 & 2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

luego existe intersección de las dos superficies.

EJERCICIOS

1. — Obtener las ecuaciones de los planos tangentes a la cuádrica

$$x^2 - 2xy + z^2 - 3x + z = 0$$

en los puntos $(0, 0, 0)$ y $(1, -1, -1)$.

2. — ¿Corta dicha cuádrica a la esfera de centro $(1, 0, 1)$ que pasa por el origen?

Deducir las expresiones dx, dy, dz para la curva de intersección en el origen.

FORMULA DE TAYLOR PARA FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

208. — Derivadas sucesivas.

Puesto que las derivadas primeras $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ de una función $f(x,y)$ son a su vez funciones de dos variables, pueden derivarse respecto de x o respecto de y, y así obtenemos cuatro derivadas *segundas*, que se indican de dos modos:

$$f''_{xx}(x,y) \quad , \quad f''_{xy}(x,y) \quad , \quad f''_{yx}(x,y) \quad , \quad f''_{yy}(x,y)$$

o bien, con la notación de Jacobi:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x} \; ; \; \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} \; ; \; \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} \; ; \; \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

Estas derivadas segundas pueden derivarse respecto de x o y, resultando las derivadas terceras, que se representan así:

$$f'''_{x^3} \; ; \; f'''_{x^2y} \; ; \; f'''_{xy^2} \; ; \; f'''_{y^3}$$

o bien con la notación de Jacobi, mediante las ∂.

Obsérvese que hemos hecho dos abreviaciones de escritura: poniendo índices a modo de exponentes a la variable respecto de la cual se deriva dos o más veces, para evitar poner xx, yy, etc.; la otra abreviación ha consistido en suprimir las variables (x,y); esto puede hacerse cuando no haya peligro de confusión, pero cuando haya que escribir no las funciones derivadas, sino los valores que toman en el punto (a,b), entonces no deberán omitirse.

EJEMPLO. — La función $z = px^2 + qy^2$ representa un paraboloide elíptico; sus derivadas son:

$$f''_{xx} = 2p; \quad f''_{yy} = 2q; \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 0;$$

209. — Propiedad conmutativa de la derivación.

Obsérvese en los ejemplos anteriores que resulta $f''_{xy} = f''_{yx}$; y puede demostrarse que esto acontece siempre, suponiendo continuas estas derivadas.

En virtud de esta propiedad el número de derivadas terceras se reduce a cuatro; si la función tiene tres variables independientes, hay seis derivadas segundas, diez terceras, etc.

La hipótesis de la continuidad de las dos derivadas mixtas es cómoda para la demostración, pero excesiva. En realidad, basta la existencia de f_{xy} en un entorno de P y su continuidad en P, para asegurar la existencia de f_{yx} en P, igual a ella (Teorema de Schwarz).

También resulta esta igualdad suponiendo la existencia de las cuatro derivadas 2.as en P y la diferenciabilidad de las derivadas 1.as en P, según la definición (199) de Thomae (Teorema de Hefftar - Young).

La demostración de ambos puede verse en *Elementos de T. F.*, § 41; pero como estas condiciones son todavía excesivas, y las demostraciones delicadas, daremos solamente la muy sencilla y más que suficiente del teorema arriba enunciado de Bonnet, que supone continuas en P las dos derivadas mixtas.

Demostración. — Hemos visto que la diferencia de valores de $f(x, y)$ en dos vértices consecutivos del rectángulo formado por los puntos fijos

$$(a, b), \quad (a + h, b), \quad (a, b + k), \quad (a + h,\ b + k),$$

es una expresión de primer grado respecto de h y k; vamos a ver ahora que la suma de valores en dos vértices opuestos, menos la suma de valores en los otros dos, es de segundo orden. Esta suma puede escribirse de dos modos:

$$[f(a + h,\ b + k) - f(a, b + k)] - [f(a + h, b) - f(a, b)] =$$
$$= [f(a + h,\ b + k) - f(a + h, b)] - [f(a, b + k) - f(a, b)].$$

Escrita del primer modo se ve que no es sino el incremento de la función $f(a + h, y) - f(a, y)$, al incrementar $y = b$ en k, luego su valor es:

$$k[f'_y(a + h, \eta) - f'_y(a, \eta)] = k.h.f''_{xy}(\xi, \eta)$$

puesto que el incremento de $f'_y(a, \eta)$ al pasar de a al valor $a + h$, resulta aplicando de nuevo el teorema del valor medio de las funciones de una variable.

Análogamente, escrita la expresión del segundo modo ,se ve que basta permutar x e y, a y b, h y k; tenemos, pues, dos fórmulas para la misma expresión y por tanto, suprimiendo el factor común hk, resulta:

$$f''_{yx}(\xi' \eta') = f''_{xy}(\xi, \eta)$$

Hasta aquí hemos supuesto fijos h y k, siendo también constantes los números ξ, η; pero si hacemos tender h y k hacia 0 y suponemos que las derivadas $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$ son funciones *continuas*, esto es, que sus límites para $(h, k) \to 0$ coinciden con sus valores para $h = k = 0$, tomando límites de la igualdad [1], basta sustituir $h = k = 0$ y resulta la igualdad:

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b)$$

210. — Fórmula de Taylor para dos variables.

Si se conoce el valor de una función $f(x)$, para un cierto valor a de x, hemos enseñado a calcular el valor de la función en un punto $a + h$, mediante la fórmula de Taylor.

Consideremos el mismo problema para las funciones de dos variables; sea $f(x, y)$ la función cuyo valor se conoce para el punto (a, b) y se trata de calcular el valor que toma en el punto $(a + h,\ b + k)$.

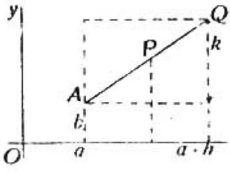
Para pasar del punto $A(a, b)$ al $Q(a + h,\ b + k)$ podríamos primero incrementar a a en h y luego a b en k; pero vamos a pasar directamente de A a Q siguiendo la recta AQ, es decir, incrementando ambos valores al mismo tiempo.

Un punto P sobre la recta AQ está fijado por la relación:

$AP/AQ = t$ siendo $0 < t < 1$;

luego los valores de x e y dependen de una variable t:

$$x = a + ht; \quad y = b + kt.$$



(Para $t = 0$ se tiene el punto A, y para $t = 1$ el punto Q).

Resulta, pues, $f(x, y) = f(a + ht,\ b + kt) = \varphi(t)$

y aplicando la fórmula de Mac-Laurin a la función $\varphi(t)$, se tiene:

[2] $$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \\ + \frac{t^2 . \varphi''(0)}{2!} + \ldots + \frac{t^{n-1} . \varphi^{n-1}(0)}{(n-1)!} + \frac{t^n . \varphi^n(\xi)}{n!}$$

Vamos a calcular los valores de las derivadas: $\varphi'(0)$; $\varphi''(0)$;... aplicando la regla de derivación de las funciones compuestas, puesto que f es función de x, y, las cuales son funciones de t, resulta:

$$\varphi'(t) = f'_x(x, y) . h + f'_y(x, y) . k$$

de donde:

$$\varphi'(0) = f'_x(a, b) . h + f'_y(a, b) . k.$$

Análogamente:

$$\varphi''(t) = f''_{xx}(x, y) . h^2 + 2f''_{xy}(x, y) . hk + f''_{yy}(x, y) . k^2$$

$$\varphi''(0) = f''_{x^2}(a, b) . h^2 + 2f''_{xy}(a, b) . hk + f''_{y^2}(a, b) . k^2.$$

$$\varphi'''(0) = f'''_{x^3}(a, b) h^3 + 3f'''_{x^2y}(a, b) h^2 . k + 3f'''_{xy^2}(a, b) . hk^2 + \\ + f'''_{y^3}(a, b) k^3.$$

La formación de estas derivadas sucesivas tiene analogía con el desarrollo del binomio de Newton; los coeficientes son los mismos y los exponentes están representados por los índices de diferenciación. Se escriben abreviadamente así:

$$\varphi''(0) = [f'_x(a, b) . h + f'_y(a, b) . k]^{(2)}.$$

$$\varphi'''(0) = [f'_x(a, b) . h + f'_y(a, b) . k]^{(3)}.$$

Sustituyendo estos valores de las derivadas en la fórmula [2] se tiene:

$$\varphi(t) = f(a + ht,\ b + kt) = f(x, y) = f(a, b) +$$
$$+ t[f'_x(a, b) . h + f'_y(a, b) . k] +$$
$$+ t^2 [f'_x(a, b) . h + f'_y(a, b) . k]^{(2)} : 2! + \dots . +$$
$$+ t^n [f'_x(\xi, \eta) . h + f'_y(\xi, \eta) k]^{(n)} : n!$$

Si queremos el valor de la función $f(x, y)$ en el punto Q, es $t = 1$, luego:

$$f(a + h,\ b + k) = f(a, b) + f'_x(a, b) . h + f'_y(a, b) . k +$$
$$+ \tfrac{1}{2} [f'_x(a, b) . h + f'_y(a, b) . k]^{(2)} + \dots . +$$
$$+ [f'_x(\xi, \eta) h + f'_y(\xi, \eta) . k]^{(n)} : n!$$

que es el desarrollo de Taylor para dos variables.

NOTA. — La ley que se ha observado en la formación de las derivadas sucesivas es general para todo valor de n.

En efecto, para derivar una expresión respecto de la variable independiente t hay que hacer estas operaciones: derivar respecto de x y multiplicar por h (es decir, según la notación simbólica de las potencias, multiplicar la expresión por $h . f'_x$); después derivar respecto de y y multiplicar por k (es decir, multiplicar simbólicamente por kf'_x) y sumar estos dos resultados. Esto equivale, en definitiva, a multiplicar la expresión dada por el binomio $hf'_x + kf'_y$, luego las expresiones que se obtienen son siempre potencias sucesivas de este binomio.

Obsérvese que esta multiplicación simbólica, o sea, la suma de las derivadas parciales por los respectivos incrementos, es precisamente la diferenciación, y designando por df, d^2f, ..., las diferenciales sucesivas, la fórmula de Taylor se escribe así:

$$\Delta f = df + \frac{d^2 f}{2!} + \frac{d^3 f}{3!} + \dots . + \frac{(d f)}{n!}$$

indicando el paréntesis que la diferencial se toma en un punto intermedio.

211. — Fórmula de Taylor para más variables.

El mismo razonamiento vale para cualquier número de variables. Si, por ejemplo, son tres, la fórmula es:

$$f(a + h,\ b + k,\ c + l) = f(a, b, c) + (f'_x . h + f'_y . k + f'_z . l) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\ [f'_x . h + f'_y . k + . f'_y . l]^{(2)} + \dots + [f'_x . h + f'_y . k + f'_z . l]^{(n)} : n!$$

entendiendo que las derivadas deben tomarse en el punto (a, b), excepto las del último término, donde se toman en un punto intermedio.

Una vez más se ve la ventaja de la notación diferencial, al expresar la fórmula de Taylor, cualquiera que sea el número de variables, pues la fórmula anterior tiene validez general.

212. — Aplicaciones en Geometría Analítica.

Cambio de coordenadas. — La fórmula de Taylor tiene multitud de aplicaciones en Geometría Analítica. Tal es, por ejemplo, el cambio de coordenadas. Dada la ecuación: $f(x, y) = 0$ si se cambian los ejes por otros paralelos, *las coordenadas antiguas y nuevas están ligadas por la relación:*

$$x = a + x'; \quad y = b + y'$$

La ecuación se transforma en esta otra:

$$f(a, b) + x' \cdot f'_x(a, b) + y' \cdot f'_y(a, b) + \ldots\ldots = 0$$

Análogamente ,la ecuación: $f(x, y, z)$ referida a los nuevos ejes x', y', z' relacionados por las fórmulas: $x = a + x'$, $y = b + y'$, $z = c + z'$ es:

$$f(a, b, c) + x' \cdot f'_x(a, b, c) + y' \cdot f'_y(a, b, c) + z' \cdot f'_z(a, b, c) + \ldots\ldots = 0.$$

Centro de las cuádricas. — En particular, si se trata de una cuádrica y elegimos el punto (a, b, c) de modo que cumpla las condiciones:

$$f'_x(a, b, c) = 0; \quad f'_y(a, b, c) = 0; \quad f'_z(a, b, c) = 0 \qquad [3]$$

la ecuación referida a este nuevo origen carece de términos de primer grado. *Por tanto, si un punto (x', y', z') está en la superficie, también el simétrico* $(-x', -y', -z')$; es decir: el punto (a, b, c) es *centro de simetría* de la superficie.

Regla práctica: para determinar el centro de una cuádrica, se resuelve el sistema que resulta de anular las tres derivadas primeras.

Obsérvese que los términos de segundo grado no se alteran con la sustitución, luego para referir la cuádrica a su centro (a, b, c) basta suprimir los términos de primer grado y poner como término constante $f(a, b, c)$.

EJEMPLO. — *Sea la superficie:*

$$2x^2 - 3xy + y^2 - xz + z^2 - 2y = 4$$

Para determinar el centro pondremos:

$$4x - 3y - z = 0; \quad -3x + 2y - 2 = 0; \quad -x + 2z = 0$$

de donde se despeja:

$$x = -3 \ , \ y = -7/2 \ , \ z = -3/2.$$

La ecuación referida a este centro es:

$$2x^2 - 3xy + y^2 - xz + z^2 - 1/2 = 0.$$

EJERCICIOS

1. — Referir la cuádrica del ejemplo anterior a los ejes trazados paralelamente por el nuevo origen $(-1, 2, 3)$.

2. — Acotar el error producido en la función $f(x, y)$ por los errores Δx, Δy cuando $f'_x = f'_y = 0$.

3. — Escríbase la fórmula de Taylor para el origen y un punto (x, y); en tal caso se llama *fórmula de Mac-Laurin.*

CLASIFICACION DE LOS PUNTOS DE UNA SUPERFICIE. MAXIMOS Y MINIMOS RELATIVOS.

213. — Relación entre la superficie y el plano tangente.

Para estudiar la forma de una superficie: $z = f(x, y)$ en el entorno de un punto (a, b, c) conviene desarrollar la función por la fórmula de Taylor, limitando el desarrollo en un término más o menos avanzado, según el grado de aproximación que se desee en dicho estudio.

Limitándola en los términos de segundo grado, se tiene:

$$f(x, y) = f(a + h, b + k) = f(a, b) + hf'_x(a, b) + kf'_y(a, b) +$$
$$+ \tfrac{1}{2} [h^2 f''_{xx}(\xi, \eta) + 2hkf''_{xy}(\xi, \eta) + k^2 f''_{yy}(\xi, \eta)] .$$

La ecuación del plano tangente en el punto (a, b, c) es:

$$z - c = (x - a) f'_x(a, b) + (y - b) f'_y(a, b)$$

o sea, puesto que: $c = f(a, b)$, $x - a = h$, $y - b = k$:

$$z = f(a, b) + hf'_x(a, b) + kf'_y(a, b).$$

Restando ambas ecuaciones tenemos como expresión del incremento de la ordenada de la superficie respecto de la ordenada del plano tangente:

$$[1] \quad z_1 - z_2 = \tfrac{1}{2} [h^2 f''_{xx}(\xi, \eta) + 2hkf''_{xy}(\xi, \eta) + k^2 f''_{yy}(\xi, \eta)]$$
$$= \tfrac{1}{2} r^2 [\cos^2 w . f''_{xx}(\xi, \eta) + 2 \operatorname{sen} w . \cos w . f''_{xy}(\xi, \eta) +$$
$$+ \operatorname{sen}^2 w . f''_{yy}(\xi, \eta)] = \tfrac{1}{2} r^2 T$$

introduciendo coordenadas polares: $h = r \cos w$, $k = r \operatorname{sen} w$.

Según sea la variación de signo de este trinomio, así será la posición de la superficie en el entorno del punto (a, b, c) respecto de su plano tangente en él. El signo del trinomio entre paréntesis es en un entorno del punto (a, b) el mismo del trinomio:

$$[2] \quad T_0 = A \cos^2 w + 2B . \operatorname{sen} w . \cos w + C \operatorname{sen}^2 w$$

llamando A, B, C a las derivadas segundas en el punto (a, b):

$$A = f''_{x^2}(a, b) \quad B = f''_{xy}(a, b) \quad C = f''_{y^2}(a, b).$$

y excluyendo un entorno angular arbitrariamente pequeño de cada dirección w en que se anula T_0; el cual, con el artificio usado en Algebra elemental de multiplicar por A (si no es nulo) para formar un cuadrado, puede escribirse así:

$$[3] \qquad T_0 = [(A \cos w + B \operatorname{sen} w)^2 + (AC - B^2) \operatorname{sen}^2 w] : A$$

utilizando el mismo artificio estudiado en Algebra para resolver las ecuaciones de segundo grado, esto es, multiplicar por A, para formar el cuadrado de un binomio.

Demostración. — T_0 es función continua de w, no nula por haber excluido el valor o los dos valores en que se anule, con sendos entornos; luego su valor absoluto tiene un mínimo $m > 0$.

Suponiendo continuas las derivadas, en un círculo de radio r difieren de los números A, B, C, menos de $\frac{1}{4}$ m; y como los senos y cosenos no superan a 1, el trinomio T difiere del T_0 en menos de m; luego tiene el mismo signo de T_0.

214. — Discusión.

Consideremos todos los casos posibles respecto del binomio $H = AC - B^2$, que se llama *hessiano* de la función.

Primer caso: $H = AC - B^2 > 0$. Entonces es necesariamente:
$A > 0$, $C > 0$ o bien $A < 0$, $C < 0$ y la expresión [3] no se anula para ningún valor de w, pues si se anula el seno no se anula el coseno y viceversa, siendo siempre positiva.

Es decir: $z_1 - z_2$ tiene siempre el mismo signo. Hay una región de la superficie alrededor del punto (a, b) la cual queda situada a un mismo lado del plano tangente, y éste no atraviesa a la superficie.

El punto de la superficie se llama entonces *elíptico*.

Segundo caso: $H = AC - B^2 < 0$. Si es $A \neq 0$ vale la transformación [3] y resulta: para $w = 0$ la expresión queda reducida a un cuadrado, por tanto, tiene un valor *positivo*. En cambio para

$$[4] \qquad \operatorname{tg} w = -A/B, \text{ es decir, } A \cos w + B \operatorname{sen} \; w = 0,$$

resulta un número negativo $(AC - B^2) \operatorname{sen}^2 w$, es decir: al girar la recta AQ en torno del punto A, hay direcciones en que $z_1 - z_2$ es *positivo* y otras en que es *negativo*. La superficie queda, pues, atravesada por el plano tangente.

El punto (a, b, c) se llama *hiperbólico*, expresando este calificativo, no sólo que el plano tangente *atraviesa* a la superficie, sino que hay dos sectores finitos de ella a distinto lado del plano. V. Nota).

Si dentro de este caso fuese $A = 0$, procederíamos análogamente multiplicando y dividiendo por C.

Si fuese $A = 0$, $C = 0$ la expresión se reduciría al término: $2B \operatorname{sen} w . \cos w$, que también cambia de signo al recorrer w los cuatro cuadrantes.

La conclusión anterior subsiste, es decir: el punto es hiperbólico.

Tercer caso: $H = AC - B^2 = 0$. La expresión se reduce a un cuadrado que es positivo para todo valor w, excepto para el rayo [4]. donde se anula, luego la superficie está de un lado del plano tangente, excepto en un ángulo arbitrariamente pequeño entorno de dicho rayo, donde nada puede asegurarse. Si $A = 0$ y por consiguiente $B = 0$ el trinomio se reduce a $C \operatorname{sen}^2 w$ y la conclusión subsiste; pero si $A = B = C = 0$, hay que recurrir a las derivadas superiores. (V. Notas).

El punto se llama *parabólico* si $H = 0$, pero A, B, C no son todas nulas; el tipo más sencillo se presenta en las superficies cónicas y cilíndricas.

215. — Máximos y mínimos relativos.

Se dice que una función de cualquier número de variables tiene en un punto un máximo (mínimo) relativo cuando el valor que toma en dicho punto es mayor (menor) que todos los que toma en un entorno del mismo punto.

Si es una función: $f(x, y)$ decimos que en el punto (a, b)
toma valor máximo si se verifica $f(a + h,\ b + k) < f(a, b)$
" " mínimo " " " $f(a + h,\ b + k) > f(a, b)$

para todos los puntos que distan del (a, b) menos de un cierto número r, es decir, para todos los puntos que cumplen la condición: $h^2 + k^2 < r^2$.

Análogamente para las funciones de tres variables, el valor $f(a, b, c)$ ha de superar a todos los que toma en una cierta esfera de centro (a, b, c) y radio r.

Desde luego, es condición *necesaria*, para que en un punto haya máximo o un mínimo relativo, que se anulen todas las derivadas primeras. Así, para dos variables, debe ser:

$$f'_x(a, b) = 0, \quad f'_y(a, b) = 0. \tag{5}$$

En efecto, fijado: $y = b$ tenemos una función de una variable x; y para que el valor $f(a, b)$ sea máximo o mínimo ha de anularse f'_x; análogamente, fijado $x =$ constante, resulta que debe anularse f'_y. **El plano tangente** a la superficie en el punto (a, b) se reduce a $z = c$, es decir, paralelo al plano xy.

La función tendrá máximo o mínimo según que la superficie quede por debajo o por encima del plano tangente; no habrá máximo ni mínimo si la superficie atraviesa el plano tangente.

1.° *Caso elíptico:* $H = AC - B^2 > 0$. La superficie queda, como hemos visto, a un mismo lado del plano tangente y queda por debajo o por encima según que sea $A < 0$ o bien $A > 0$; es decir; hay máximo si es $H > 0$, $A < 0$, y mínimo si es $H > 0$ y $A < 0$.

2.° *Caso hiperbólico:* $H = AC - B^2 < 0$. La superficie queda atravesada por el plano tangente y en el punto (a, b) no tiene ni máximo ni mínimo. El punto se llama de *ensilladura*.

3.° *Caso parabólico:* $H = AC - B^2 = 0$. No es suficiente la consideración de las derivadas segundas para dilucidar si hay máximo o mínimo, en el *sentido estricto*, que hemos definido. (V. *Notas*).

Resumen: Dada la función $f(x, y)$, calcularemos todos los puntos (a, b), que satisfacen a las dos ecuaciones $f'_x(a, b) = 0$, $f'_y(a, b) = 0$, es decir: resolveremos este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y analizaremos cada punto por separado sustituyendo (a, b) en el hessiano

$$H = f''_{x^2} f''_{y^2} - f''^2_{xy}$$

Resulta así este cuadro sinóptico:

Caso elíptico:	$H > 0$	$f''_{x^2}(a, b) > 0$ mínimo. $f''_{x^2}(a, b) < 0$ máximo.
Caso hiperbólico:	$H < 0$	No hay máximo ni mínimo.
Caso parabólico:	$H = 0$	Caso dudoso.

La discusión en el caso de más variables no cabe en este curso.

NOTA. — **A pesar del carácter de este libro, donde no cabe aquilatar todas las cuestiones, conviene puntualizar las conclusiones (214) y (215), aclarando su alcance respecto de las primeras ediciones de esta obra.**

Si fijamos ω y prescindimos de las direcciones en que se anula el trinomio [2] en cualquier otra dirección el trinomio [2] no es nulo y por tanto el [1] tiene signo constante en un trozo de radio $0 < r < \rho$. En el 1.er caso $H > 0$, resulta, pues, que la superficie está de un solo lado del plano tangente en cada una de las direcciones, para un cierto segmento de radio vector; en el 2.° caso $H < 0$ sucede esto para las direcciones interiores a cada uno de los dos ángulos completos que forman las dos rectas en que se anula [2]; y en el 3.er caso también está la superficie de un solo lado en todas las direc-

ciones, excepto una. Sin embargo, de estas conclusiones (v. edición de 1929) que se refieren a un modo especial de aproximación al punto (a, b) radialmente, no podría concluirse nada respecto de la aproximación por caminos curvos.

He aquí un ejemplo sencillo:

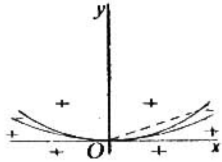
$$z = (y - x^2)(y - 2x^2)$$

o bien desarrollando:

$$z = y^2 - 3x^2y + 2x^4$$

Las parábolas dibujadas en la figura:

$$y = x^2 \qquad y = 2x^2$$



dividen al plano en tres regiones y dentro de cada una tiene z signo constante, que está indicado en la misma figura. A lo largo de cada parábola, z se anula. Cualquiera que sea la dirección elegida, hay un segmento de origen 0 sobre el cual toma z valores *positivos*, es decir, en cada dirección está la superficie encima del plano tangente $z = 0$, y sin embargo no existe ningún entorno circular del punto O, en el cual esté la superficie encima de dicho plano; pues esos infinitos radios, todos mayores que O, no forman ningún entorno superficial.

Examine análogamente el lector la función $z = y^2 - x^2y$, y vea que se verifica la propiedad de estar encima del plano tangente en todas las rectas trazadas por 0, excepto el eje x; y la propiedad (214) se verifica en todo ángulo que no contenga esta recta singular.

Todo lo dicho vale asimismo para los máximos y mínimos. En el caso 3.º puede decirse que si no se anulan las tres derivadas hay máximo o mínimo en sentido *amplio*, entendiendo que en todo entorno angular de la recta singular la función puede tomar valores menores y mayores que en el punto (a, b). Se trata, pues, de un máximo o mínimo relativo en dicho punto respecto de los valores alcanzados en una región angular que se puede aproximar al ángulo de una vuelta tanto como se quiera.

Nótese de paso, que la conclusión puramente negativa a que llegan los autores más acreditados (tales De la Vallée - Poussin, Pincherle, etc.) de que nada puede asegurarse en este caso dudoso, la hemos sustituido por una conclusión afirmativa, tan clara como en los dos anteriores, aunque menos sencilla. El único caso dudoso es aquel en que las tres derivadas segundas se anulan.

El caso de tres variables se reduce análogamente, a la discusión de los signos de una forma cuadrática con tres variables, tal como se hace en la teoría de las cónicas; y la teoría de las cuádricas es aplicable al caso de cuatro variables.

En cambio, cuando se anulan todas las derivadas segundas de la función, en el punto considerado, se precisan recursos más superiores.

(*) Este ejemplo aclara el diverso significado de las condiciones obtenidas en la 2.ª edición, que se referían a la aproximación radial y las aquí demostradas (con razonamiento casi tan simple como aquél) que se refieren a entornos superficiales. Por este mayor alcance resulta menos simple el enunciado del caso 3.º. Obsérvese el ejemplo que acabamos de estudiar y se verá que corresponde a este caso, por ser las derivadas segundas $A = 0$, $B = 0$, $C = 2$; por tanto $H = 0$. Es cierto que la superficie está encima del plano tangente en cada dirección, como allí se enunciaba, y hasta en este caso especial se verifica esta propiedad por añadidura en la dirección singular $y = 0$, pero respecto de entornos superficiales sólo puede asegurarse que la superficie está situada encima del plano en cualquier ángulo que no contenga el eje x.

216. — Caso de variables ligadas - Método de Lagrange.

Caso de una sola ecuación de ligadura.

Sea una función de variables ligadas, es decir:

[1] $$u = f(x, y, z)$$

[2] $$\varphi(x, y, z) = 0.$$

La función u no tiene tres variables independientes, sino sólo dos: por ej. x, y. La condición de máximo o mínimo es que se anulen las derivadas parciales respecto de x, y, o sea que se anule la diferencial total du. Para calcular ésta, diferenciaremos la [1] y la [2] y se tiene:

[3] $$f'_x . dx + f'_y . dy + f'_z . dz = 0$$

[4] $$\varphi'_x . dx + \varphi'_y . dy + \varphi'_z . dz = 0$$

Multiplicando la [4] por λ, que es un coeficiente indeterminado, y sumándole la [3], queda:

$$(f'_x + \lambda\varphi'_x)dx + (f'_y + \lambda\varphi'_y)dy + (f'_z + \lambda\varphi'_z)dz = 0.$$

Podemos dar a λ un valor tal que se anule el tercer término:

$$\lambda = -f'_z/\varphi'_z$$

quedando la expresión reducida a los dos primeros términos, que deben anularse, cualquiera sea el valor de dx, dy por la condición de máximo o mínimo.

Luego se tienen las siguientes ecuaciones:

$$f'_x + \lambda\varphi'_x = 0; \quad f'_y + \lambda\varphi'_y = 0; \quad f'_z + \lambda\varphi'_z = 0 \qquad [a]$$

y como cuarta ecuación se tiene: $\varphi(x, y, z) = 0$ que liga entre sí las variables. Con estas cuatro ecuaciones se pueden calcular los valores de: λ, x, y, z.

Para distinguir si resulta máximo o mínimo será necesaria una discusión especial en cada caso.

Las tres ecuaciones anteriores [a] equivalen a igualar a cero las derivadas parciales de una función: $\Psi(x, y, z) = 0$ obtenida sumando a la función dada $f(x, y, z)$ la otra función $\varphi(x, y, z)$, multiplicada por un coeficiente indeterminado λ.

Ejemplo. — Entre todos los paralelepípedos de volumen dado encontrar el de área mínima.

Sea $C = xyz$ el volumen del paralelepípedo.

Sea $u = 2xy + 2yz + 2xz$ el área del mismo.

Aplicando lo dicho anteriormente:

$$\Psi(x, y, z) = 2xy + 2yz + 2xz + \lambda(xyz - C),$$

Las condiciones que deben cumplirse son:

$$2y + 2z + \lambda yz = 0; \quad 2x + 2z + \lambda xz = 0; \quad 2x + 2y + \lambda xy = 0.$$

La cuarta ecuación es: $C = xyz$.

Despejando λ de las tres primeras, resultan los valores que deben ser iguales:

$$\frac{y+z}{yz} = \frac{x+z}{xz} = \frac{x+y}{xy}.$$

De las dos primeras: $(y+z)x = (x+z)y \therefore xy + xz = xy + yz$, luego: $x = y$. Análogamente de la primera y tercera: $(y+z)x = (z+y)z \therefore xy + xz + yz$. De donde $x = z$. Y en resumen: $x = y = z$, lo que quiere decir, que el paralelepípedo que cumple la condición enunciada en el problema es el cubo.

Como es $u > 0$, y en el contorno, o sea en los ejes x, y es ∞, el mínimo absoluto es interior y por tanto relativo; luego la solución única obtenida da, en efecto, ese mínimo.

Caso de dos ecuaciones de ligadura.

Si en vez de ser dos las funciones que ligan las variables, fueran tres, es decir:

$$[1] \quad u = f(x,y,z); \qquad [2] \quad \varphi(x,y,z) = 0; \qquad [3] \quad \psi(x,y,z) = 0$$

en realidad lo que se tiene es una función $u = F(x)$ con una sola variable independiente. La condición para que haya máximo o mínimo es: $F'(x) = 0$, o sea: $du = 0$.

Diferenciando las tres ecuaciones, los puntos buscados deben satisfacer a éstas:

$$du = f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz = 0 \qquad [4]$$

$$\varphi'_x\,dx + \varphi'_y\,dy + \varphi'_z\,dz = 0 \qquad [5]$$

$$\varphi'_x\,dx + \varphi'_y\,dy + \varphi'_z\,dz = 0 \qquad [6]$$

pudiendo despejarse dy, dz de las dos últimas para sustituirlas en la 1.ª; o bien se eliminan escribiendo el determinante (que es el jacobiano de las tres funciones) igualado a cero; ecuación que con [2] y [3] determina los posibles puntos, llamados *extremantes*.

Es obvio que la eliminación puede hacerse por cualquier método; y si se adopta el de coeficientes indeterminados, el sistema anterior queda sustituido por este otro:

$$f'_x + \lambda\varphi'_x + \mu\psi'_x = 0$$
$$f'_y + \lambda\varphi'_y + \mu\psi'_y = 0$$
$$f'_z + \lambda\varphi'_z + \mu\psi'_z = 0$$

Entre estas tres ecuaciones más las dos ecuaciones $\varphi = 0$, $\psi = 0$ se eliminan λ, μ, y, z, despejándose la solución x.

A esto se reduce el método llamado de Lagrange, que puede enunciarse así: Multiplicando la [2] por λ y la [3] por μ, dos coeficientes indeterminados, y sumándolas con la [1] se tiene:

$$\Psi = f + \lambda\varphi + \mu\psi$$

y tratando esta función como en el caso de variables libres, al anular sus tres derivadas se obtiene el sistema anterior.

EJEMPLO. — Distancia de O a la curva: $\varphi(x,y,z) = 0$, $\psi(x,y,z) = 0$.

La función f es en este caso $x^2 + y^2 + z^2$;

la ecuación [1] es: $u = x^2 + y^2 + z^2$

» » [4] » $x\,.\,dx + y\,.\,dy + z\,.\,dz = 0$

La recta cuyos coeficientes directores vienen dados por [5] y [6] está en los planos tangentes a las superficies $\varphi = 0$, $\psi = 0$ en el punto buscado P, y es por tanto la tangente a la curva intersección; resulta que es perpendicular a la OP, en virtud de [4], luego resulta: *los segmentos mínimos y máximos entre un punto y una curva son normales a ésta.*

En el caso de la recta: $x = az + p$, $y = bz + q$ los coeficientes de las ecuaciones [5] y [6] son

$$\begin{array}{rccc} & 0 & 1 & -b \\ & 1 & 0 & -a \\ \text{Solución:} & a & b & 1 \end{array}$$

y sustituida en la [4], resulta: $ax + by + z = 0$, plano normal a cuya intersección con ella da el punto buscado.

Con el método de Lagrange, el cálculo sería éste:

$$2x + \lambda = 0 \quad , \quad 2y + \mu = 0 \quad , \quad 2z - \lambda a - \mu b = 0$$

y al eliminar λ, μ, resulta la misma ecuación del plano normal.

Método general.

Cualquiera que sea el número n de variables de la función propuesta y el número m de ecuaciones de ligadura (menor que n) condición *necesaria*, pero *no suficiente*, a que deben satisfacer los puntos extremantes, es la anular a la diferencial total. Esta viene expresada mediante las diferenciales de las n variables aparentes, pero en verdad sólo hay $n - m$ independientes; tales diferenciales están vinculadas por las m ecuaciones que se forman diferenciando las de ligadura.

La eliminación puede hacerse por cualquier método, y el de Lagrange puede no tener ventaja sobre otros artificios.

La discusión de los puntos obtenidos se hace formando la diferencial 2.ª, 3.ª, ..., y puede conducir a difíciles problemas algebraicos. En cada caso, la índole del problema puede evitar ese cálculo, como se vió en el ejemplo.

217. — Intersección de la superficie con el plano tangente.

En los puntos de intersección debe ser $z_1 = z_2$, luego la ecuación, sobre el plano xy, de dicha intersección es:

$$h^2 f''_{xx}(\xi, \eta) + 2hk f''_{xy}(\xi, \eta) + k^2 f''_{yy}(\xi, \eta) = 0$$

donde interviene el punto desconocido (ξ, η). Dividiendo por h^2 resulta una ecuación en k/h cuyos coeficientes dependen también de h y k; pero al tender h y k a 0 estos coeficientes son A, B y C; por lo tanto, los valores k/h, es decir, los coeficientes angulares de los rayos que proyectan desde O los puntos de intersección buscados, tienden hacia los valores límites, dados por la ecuación límite

$$h^2 A + 2hkB + k^2 C = 0$$

que representa, por tanto, *las tangentes en el punto a la curva de intersección del plano tangente con la superficie.*

Las bisectrices del ángulo de estas dos rectas se llaman *direcciones principales* de la superficie en el punto (a, b, c).

En particular, si la superficie es una cuádrica, la intersección se compone de dos rectas reales si la superficie es un hiperboloide de una hoja o un paraboloide hiperbólico. Para este último caso se ve inmediatamente, pues siendo la ecuación del paraboloide: $z = px^2 - qy^2$, el desarrollo de Taylor termina en los términos de segundo grado, y no habiendo término complementario, la intersección del plano tangente en (a, b) con la superficie viene dada por la ecuación:

$$2h^2p - 2k^2q = 0; \qquad h^2p - k^2q = 0$$

que representa dos rectas.

Aplicando la discusión, resulta: El *elipsoide*, el ***hiperboloide de dos hojas*** y el *paraboloide elíptico tienen todos sus puntos elípticos;* el ***hiperboloide de una hoja*** y el *paraboloide hiperbólico tienen sus puntos hiperbólicos.*

Finalmente, si se considera un cilindro y colocamos, por ejemplo, sus generatrices paralelamente al eje x su ecuación es: $z = f(y)$ por tanto: $f'_x = 0$, $f''_{x^2} = 0$, $f''_{xy} = 0$ y siendo nulos A y B es $H = 0$ es decir: Todos los puntos de un *cilindro* cualquiera son *parabólicos.*

La intersección con el plano tangente se reduce a la generatriz, considerada como doble.

Lo mismo acontece con los conos y con todas las superficies desarrollables.

En los puntos parabólicos, las dos rectas tangentes dadas por la ecuación: $h^2A + 2hkB + k^2C = 0$, se reducen a una sola doble; la dirección de esta tangente única y la perpendicular a ella son las dos direcciones principales de la superficie.

En el caso del cilindro, o en general en las superficies desarrollables, como la intersección se reduce a una recta, la tangente es ella misma.

EJERCICIOS

1. — Calcular los extremos de la función $y^2 - 2x^2y + x^4 - x^6$.

(Corresponde al caso dudoso y no hay máximo ni mínimo, a pesar de que en cada dirección por el punto $(0, 0)$ la función tiene valor mínimo en él).

2. — Determinar los triángulos tales que el producto de los senos de sus ángulos sea máximo.

(Anulando las derivadas respecto de los dos ángulos que se tomen como variables independientes, resulta que el triángulo debe ser equilátero. Como la función es continua y positiva, admite un máximo absoluto y éste corresponde, por tanto, a los ángulos de 60°).

3. — Determinar en el plano de un triángulo dado el punto tal que la suma de cuadrados de distancias a los tres vértices sea mínima.

(Como coordenadas para el punto buscado resultan los promedios de las coordenadas de los vértices. Demuéstrese que tal punto es el baricentro y que éste es la solución buscada).

4. — Determinar en el plano de un triángulo dado el punto cuya suma de distancias a los tres vértices sea mínima.

Al anular las dos derivadas resulta la condición de que sean iguales los ángulos bajo los cuales se ven los tres lados. Constrúyase, probando que es la solución pedida, si los tres ángulos del triángulo son menores que 120°. Estúdiese el caso en que un ángulo es igual o mayor que 120°.

5. — Calcular la distancia mínima desde el origen de coordenadas al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$.

6. — Calcular la distancia mínima entre dos rectas que se cruzan.

CAPITULO X

TEORIA DE LAS CURVAS Y SUPERFICIES

LECCIÓN 53

TANGENTE Y PLANO OSCULADOR DE LAS CURVAS ALABEADAS

218. — Concepto de curva.

Suele definirse intuitivamente una curva como "camino descrito por un punto que se mueve según cierta ley". Esta definición carece de la claridad y precisión necesarias a todo concepto matemático. Ahora bien: definir un movimiento es dar en cada momento t la posición del punto (x, y, z), es decir: x, y, z, son funciones de t, definidas en un cierto intervalo (t_0, t_1) entre el momento inicial y final; pero, además, estas funciones han de ser continuas, para que a momentos muy próximos entre sí, correspondan posiciones del punto tan próximas como se desee. En definitiva, obtenemos la definición siguiente rigurosa:

Curva en el espacio de tres dimensiones es el lugar de los puntos (x, y, z) definidos por tres funciones:

$$x = x(t)\,; \quad y = y(t)\,; \quad z = z(t) \qquad [1]$$

continuas en un intervalo (t_0, t_1) finito o infinito.

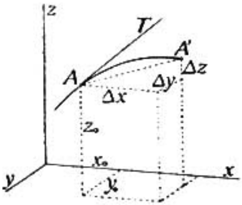
Las curvas que no son planas, se llaman *alabeadas*.

219. — Tangentes a las curvas alabeadas.

Las curvas que se presentan en las aplicaciones tienen tangente en cada punto; es decir: la recta AA' que une el punto $A(x_0\, y_0\, z_0)$ de la curva con otro $A'(x', y', z')$ que tiende hacia A (es decir que sus coordenadas tienen como límites las coordenadas de A) tiene cosenos directores variables que tienden hacia los de una recta que pasa por A, la cual se llama *tangente* a la curva en el punto A.

Los cosenos directores de la recta AA' son proporcionales a los incrementos de coordenadas Δx, Δy, Δz y también proporcionales a los números

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}\,; \quad \frac{\Delta y}{\Delta t}\,; \quad \frac{\Delta z}{\Delta t}\,;$$



y como al tender Δt a cero, estos cocientes tienen como límites las derivadas x', y', z', o sea:

$$\frac{dx}{dt}\,, \quad \frac{dy}{dt}\,, \quad \frac{dz}{dt}\,,$$

resulta que la dirección de la recta AA' tiene como límite la dirección definida por estos tres números, que son sus coeficientes directores.

La recta que pasa por A y tiene esta dirección límite, tiene por ecuaciones:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

que representan la recta tangente en el punto (x_0, y_0, z_0).

Si una de estas derivadas es nula en el punto A, por ejemplo: $z'(t_0) = 0$, es nulo el 3.er coeficiente director; la tangente es paralela al plano coordenado xy; una ecuación de la recta es: $z = z_0$; y la otra es la igualdad del 1.° y 2.° miembro.

Si son nulas dos derivadas. por ej.: $y'(t) = 0$; $z'(t) = 0$ las ecuaciones de la tangente son: $y = y_0$; $z = z_0$ y por lo tanto es paralela a un eje, que en este caso es el x.

Con el convenio de anular el numerador cuando se anula el denominador, pueden adoptarse las ecuaciones anteriores como válidas en estos casos.

NOTA. — Si para t_0 son nulas las tres derivadas x', y', z', pero no x'', y'', z'', es $\Delta x = \frac{1}{2} x''(\xi)(\Delta t)^2$, y análogamente Δy Δz; luego los coeficientes directores de la secante son los valores de x'', y'', z'' para ciertos valores intermedios de t; y supuestas continuas, tienden hacia $x''(t_0)$, $y''(t_0)$, $z''(t_0)$, que son, por tanto, los coeficientes directores de la tangente.

En general, si es n el orden mínimo para el cual no se anulan las tres derivadas, las ecuaciones de la tangente son:

$$\frac{x - x_0}{x^n(t_0)} = \frac{y - y_0}{y^n(t_0)} = \frac{z - z_0}{z^n(t_0)}$$

Las ecuaciones de la tangente suelen escribirse de modos varios; si ponemos en vez de las derivadas los cocientes diferenciales y multiplicamos por dt, resulta:

$$\frac{x - x_0}{dx} = \frac{y - y_0}{dy} = \frac{z - z_0}{dz}$$

Si la curva viene dada como intersección de dos cilindros:

$$y = \Phi(x) \qquad z = \Psi(x),$$

es decir, si nos dan las proyecciones de la curva sobre dos planos coordenados, diferenciando resulta:

$$dy = \Phi'(x)\,dx; \qquad dz = \Psi'(x)\,dx$$

y las ecuaciones se transforman así:

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{\Phi'(x)} = \frac{z - z_0}{\Psi'(x)}$$

Si la curva viene dada como intersección de dos superficies en forma implícita:

$$F(x, y, z) = 0 \qquad G(x, y, z) = 0$$

diferenciaremos ambas ecuaciones y se despejan valores proporcionales a dx, dy, dz.

Ese cálculo ha sido ya efectuado en (207), resultando que dx, dy, dz son proporcionales a los tres jacobianos. Por tanto, si los tres no son nulos en el punto (x_0, y_0, z_0) las ecuaciones de la tangente, con el convenio ya dicho para el caso de anulación de alguno de ellos, son:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}}$$

220. — Hélice cilíndrica.

La hélice puede engendrarse por el movimiento de un punto de una circunferencia que gira alrededor de su centro, al mismo tiempo que éste recorre una perpendicular al plano de la circunferencia, siendo los dos movimientos uniformes.

El movimiento de traslación uniforme se expresa $z = kt + h$.

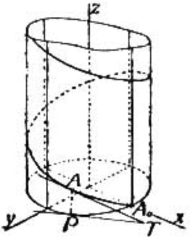
Si la hélice comienza en un punto A_0 situado en el plano xy (cuando $t = 0$, $z = 0$), la ecuación anterior se reduce a: $z = kt$.

El movimiento de rotación es uniforme también y podemos suponer su velocidad 1; si llamamos φ al ángulo de giro en un cierto tiempo t, se tiene: $\varphi = t$, sin término independiente, porque el movimiento empieza en A_0 situado sobre el eje x.

Llamando r al radio del cilindro sostén de la hélice, obtenemos las ecuaciones de la hélice:

$$x = r \cos t, \quad y = r \operatorname{sen} t, \quad z = kt. \qquad [2]$$

Sobre un mismo cilindro podremos obtener infinitas hélices, según el valor de k. El paso de cada una es $2k\pi$.



Si el triedro es directo o positivo (162), los tornillos usuales, llamados directos o positivos, tienen $k > 0$; en cambio, referidos a triedro negativo, como son los dibujados en este texto, tienen $k < 0$. Así, p. ej., la hélice de la adjunta figura tiene $k > 0$, y es negativa.

Importa advertir que todas las demostraciones son independientes del signo del triedro; y en los dibujos conviene usar unos y otros indistintamente.

Las ecuaciones de la tangente en el punto $(x_0\, y_0\, z_0)$ son:

$$\frac{x - x_0}{-r \operatorname{sen} t} = \frac{y - y_0}{r \cos t} = \frac{z - z_0}{k}$$

y sus cosenos directores son, por tanto:

$$\frac{-r \operatorname{sen} t}{\sqrt{k^2 + r^2}}; \qquad \frac{r \cos t}{\sqrt{k^2 + r^2}}; \qquad \frac{k}{\sqrt{k^2 + r^2}}$$

El ángulo que forma la tangente a la hélice en el punto (x_0, y_0, z_0) con la dirección del eje de las z tiene coseno constante; quiere decir que la tangente a la hélice en un punto cualquiera forma un ángulo constante con la generatriz del cilindro que pasa por ese punto. De aquí que su desarrollada sobre un plano sea una recta.

221. — Planos osculadores a las curvas alabeadas.

Si se considera un punto $A(x_0, y_0, z_0)$ fijo de una curva y el plano tangente en A que pasa por un punto A_1 próximo a él, que tiende al A, la posición límite de este plano tangente es un plano que se llama *osculador* en el punto A a la curva.

De otro modo: Si se considera el plano ABC siendo B, C puntos de la curva a distinto lado de A y que tienden hacia A, el límite del plano ABC es también el mismo plano osculador.

De otro modo: Si por la tangente en A se traza el plano paralelo a la tangente en B, también tiene como límite el plano osculador.

En efecto, partiendo de cualquiera de las tres definiciones (véanse las notas) se llega a esta ecuación del plano osculador:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

O bien, omitiendo indicación del parámetro:

$$[y'.z'' - y''z'](x - x_0) + [x''.z' - x'.z''](y - y_0) +$$
$$+ [x'.y'' - x''.y'](z - z_0) = 0.$$

Aplicación a la hélice cilíndrica:

$$x = r\cos t; \qquad y = r\,\text{sen}\,t \qquad z = kt$$
$$x'(t) = -r\,\text{sen}\,t; \qquad y'(t) = r\cos t \qquad z'(t) = k$$
$$x''(t) = -r\cos t; \qquad y''(t) = -r\,\text{sen}\,t; \qquad z''(t) = 0.$$

El plano osculador tiene, por tanto, la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ -r\,\text{sen}\,t_0 & r\cos t_0 & k \\ -r\cos t_0 & -r\,\text{sen}\,t_0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

que puede escribirse así:

$$(x - x_0)k\,\text{sen}\,t_0 - (y - y_0)k\cos t_0 + (z - z_0)r = 0.$$

222. — Triedro principal o intrínseco.

Consideremos el plano osculador en un punto de una curva; la tangente a la curva en ese punto está contenida en dicho plano osculador. Todas las normales a la curva en el punto considerado son perpendiculares a la tangente y están situadas en un plano que es el plano normal a la curva en ese punto. La normal contenida en el plano osculador se llama *normal principal;* la normal perpendicular al plano osculador se llama *binormal.*

El triedro que tiene por aristas la tangente, normal y binormal se llama *triedro principal* o *intrínseco.*

Los cosenos directores (α, β, γ) de la tangente son proporcionales a las derivadas: $x'(t_0)$, $y'(t_0)$, $z'(t_0)$ o bien a las diferenciales: dx, dy, dz. Adoptaremos como sentido positivo en la tangente el de la t creciente, es decir, α, β, γ tienen los signos de x', y', z'.

Los coeficientes del plano normal son proporcionales a estos mismos números, según se ha visto en Geometría Analítica, luego la ecuación de dicho plano normal es:

$$(x - x_0)x'(t_0) + (y - y_0)y'(t_0) + (z - z_0)z'(t_0) = 0$$

o bien:

$$(x - x_0)dx + (y - y_0)dy + (z - z_0)dz = 0$$

bien entendido que las derivadas y diferenciales han de tomarse en el punto $A(x_0\, y_0\, z_0)$.

Los cosenos directores de la binormal son proporcionales a los coeficientes del plano osculador, puesto que le es perpendicular; luego los cosenos directores (λ, μ, ν) de la binormal son:

$$y'z'' - y''z' = \lambda k, \quad z'x'' - z''x' = \mu k, \quad x'y'' - x''y' = \nu k,$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad.

Los cosenos directores de la normal, que llamaremos l, m, n, se determinan teniendo en cuenta que la normal es perpendicular a la tangente de cosenos α, β, γ y a la binormal: λ, μ, ν, pero es preferible utilizar las fórmulas de Frenet, que veremos en la próxima lección.

NOTAS

La ecuación del plano que contiene la tangente en el punto t_0 y es paralelo a la tangente en el t_1, es:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x'(t_1) & y'(t_1) & z'(t_1) \end{vmatrix} = 0$$

pues el vector de componentes $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, proporcionales a las derivadas en t_0, está en el plano, por anularse el determinante; y también el vector paralelo a la segunda tangente. Restando de la tercera fila la segunda y sacando el factor $t_1 - t_0$ quedan, por el teorema del valor medio, las derivadas segundas en puntos intermedios entre t_0 y t_1; en el límite resultan las derivadas $x''(t_0)$, $y''(t_0)$, $z''(t_0)$.

EJERCICIOS

1. — Determinar el triedro intrínseco en la hélice.

2. — Demostrar que la normal principal a la hélice en un punto es el radio del cilindro, que corresponde a ese punto.

LECCIÓN 54

RECTIFICACION Y CURVATURA DE LAS CURVAS ALABEADAS

223. — Rectificación de curvas alabeadas.

Para las curvas alabeadas la fórmula que se obtiene es completamente análoga a la deducida en (137).

Sea una curva alabeada ,dada en forma paramétrica:

$$x = x(t) \quad ; \quad y = y(t) \quad ; \quad z = z(t)$$

demostraremos en nota al final de la lección, que la longitud s del arco de curva viene expresada por la integral:

$$s = \int \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Aparece ahora claro por qué se llama *diferencial de arco* al infinitésimo:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

pues, en efecto, la diferencial de s es esta expresión que figura bajo el signo integral.

Si se divide por la longitud de la cuerda $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ y se pasa al límite (dividiendo numerador y denominador por Δt) resulta el límite 1. Es decir: *La diferencial del arco es infinitésimo equivalente a la cuerda correspondiente.*

EJEMPLO. — Calcular la longitud de una espira de hélice cilíndrica de ecuaciones: $x = r \cos t$, $y = r \operatorname{sen} t$, $y = kt$.

Se tiene $ds^2 = (r^2 \cos^2 t + r^2 \operatorname{sen}^2 t + k^2)(dt)^2 = (r^2 + k^2)(dt)^2$ e integrando entre 0 y 2π, resulta:

$$s = 2\pi \sqrt{r^2 + k^2}$$

En general: la longitud del arco de amplitud a es $a\sqrt{r^2 + k^2}$, es decir, proporcional a dicha amplitud, resultado acorde con el desarrollo rectilíneo de la *hélice*.

224. — Curvatura de flexión.

Se llama *curvatura media* de un arco AA' al cociente del *ángulo de contingencia* formado por las tangentes en sus extremos, por la longitud del arco. Se llama *curvatura* de *flexión* o *primera curvatura* en el punto A al límite de la curvatura media del arco AA' cuando A' tiende hacia A. El recíproco de este cociente se llama *radio de flexión* en el punto A.

Si por un origen O trazamos vectores de módulo 1, paralelos a las tangentes a la curva, es decir, de componentes α, β, γ, o sea:

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}$$

se obtiene sobre la esfera una curva llamada *indicatriz de flexión*. Llamaremos $d\sigma$ a la diferencial de su arco que viene dada por la expresión:

$$d\sigma^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2$$

El arco de circunferencia máxima PP'' mide el ángulo $\Delta\tau$ de las tangentes en A y A' y es un infinitésimo equivalente a la cuerda PP'', la cual es equivalente a la diferencial del arco $d\sigma$ de indicatriz (223); luego, según la definición de curvatura resulta:

$$[1] \qquad r_1 = \frac{ds}{d\sigma} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}}$$

225. — Curvatura de torsión.

Se estudia, análogamente, mediante la *indicatriz* de torsión, obtenida llevando a partir de O vectores de módulo 1 paralelos a las binormales, o sea perpendiculares a los planos osculadores. Sus componentes, o sea las coordenadas de los puntos de la indicatriz, son los cosenos λ, μ, ν de la binormal, y llamando $d\sigma_2$ al elemento de arco de indicatriz se verifica:

$$d\,\sigma_2^2 = d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2$$

Se llama *radio de curvatura de torsión*, o simplemente radio *de torsión* al límite del cociente del arco AA' por el ángulo de los planos osculadores $\Delta\tau_2$. La magnitud recíproca se llama *curvatura de torsión, o segunda curvatura*.

Como $\Delta\tau_2$ viene medido por el arco BB' de circunferencia, que es equivalente a la cuerda BB'; y ésta a $d\sigma_2$, resulta:

$$[2] \qquad r_2 = \frac{ds}{d\sigma_2} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2}}$$

226. — Curvatura de la hélice.

Las ecuaciones paramétricas de la hélice cilíndrica son $x = r \cos t$, $y = r \operatorname{sen} t$, $z = kt$. Los cosenos: α, β, γ de la tangente son:

$$\frac{-r \operatorname{sen} t}{\sqrt{r^2+k^2}} \quad ; \quad \frac{r \cos t}{\sqrt{r^2+k^2}} \quad ; \quad \frac{k}{\sqrt{r^2+k^2}}.$$

Las diferenciales de estos cosenos son: $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$

$$\frac{-r \cos t \,.\, dt}{\sqrt{r^2+k^2}} \quad ; \quad \frac{-r \operatorname{sen} t \,.\, dt}{\sqrt{r^2+k^2}} \quad ; \quad d\gamma = 0$$

El radio de curvatura de flexión R es, por tanto:

$$\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2}} = \frac{\sqrt{r^2+k^2}}{\sqrt{\dfrac{r^2}{r^2+k^2}}} = \frac{r^2+k^2}{r}$$

El radio de curvatura de flexión r_1 es, por tanto:

$$r_2 = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\sqrt{d\lambda^2+d\mu^2+d\nu^2}}$$

en donde λ, μ, ν son números proporcionales a los coeficientes del plano osculador, que para la hélice es: $(x-x_0)k \operatorname{sen} t - (y-y_0)k \cos t + (z-z_0)r = 0$.

$$\lambda = \frac{k \operatorname{sen} t}{\sqrt{r^2+k^2}} \quad ; \quad \mu = \frac{-k \cos t}{\sqrt{r^2+k^2}} \quad ; \quad \nu = \frac{r}{\sqrt{r^2+k^2}}$$

$$\sqrt{d\lambda^2+d\mu^2+d\nu^2} \qquad \frac{k}{\sqrt{r^2+k^2}}\, dt.$$

Luego:

$$r_2 = \frac{r^2+k^2}{k}$$

Ambos radios de curvatura son constantes.

227. — Fórmulas directas para los radios de curvatura.

Las fórmulas dadas para el cálculo de los radios de curvatura tienen el inconveniente de exigir la derivación de los cosenos directores, que por contener raíces cuadradas suelen dar origen a largos cálculos. Veamos cómo se simplifican las fórmulas utilizando los coeficientes A, B, C del plano osculador. Designando por letras acentuadas las derivadas respecto de t, se tiene

$$r_1^2 = \frac{x'^2+y'^2+z'^2}{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2}$$

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{x'}{s'}; \qquad \alpha' = \frac{x'' s' - x' s''}{s'^2}; \; \ldots\ldots$$

y análogamente se calculan β' y γ'. Teniendo en cuenta que

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad , \quad s' s'' = x' x'' + y' y'' + z' z''$$

Sumando los cuadrados de las fracciones que expresan α', β', γ' resulta con fácil simplificación:

$$(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\,(x'^2 + y'^2 + z'^2) =$$

$$= (x'^2 + y'^2 + z'^2)\,(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x' x'' + y' y'' + z' z'')^2$$

y utilizando la identidad de Lagrange (173) o bien por directa comprobación, puede escribirse así:

$$= (y' z'' - y'' z')^2 + (z' x'' - z'' x')^2 + (x' y'' - x'' y')^2$$

y llamando A, B, C a los coeficientes del plano osculador, resulta esta sencilla expresión:

$$r_1^2 = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Con transformaciones análogas se llega asimismo a la fórmula cómoda y muy sencilla

$$r_2 = (A^2 + B^2 + C^2) : D$$

donde

$$D = Ax''' + By''' + Cz'''$$

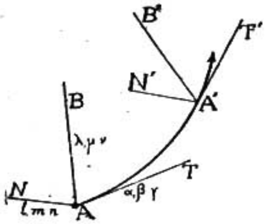
que también puede escribirse en forma de determinante:

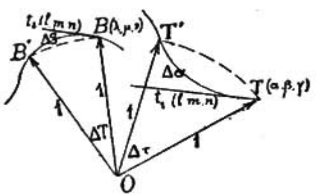
$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

228. — Fórmulas de Frenet o Serret.

El cálculo de los cosenos λ, μ, ν de la binormal se puede hacer como se indicó en (222), y diferenciando se obtiene rápidamente r_2, pero es preferible utilizar las fórmulas siguientes, de Frenet:

Para deducirlas estudiemos más detenidamente las indicatrices. Como el plano osculador puede determinarse como límite del





plano trazado por AT paralelo a $A'T'$, si se traza por O el plano paralelo resulta el TOT'; y su límite es el plano tangente en OT' al cono de la indicatriz; por tanto, la recta t tangente en T a esta indicatriz, es paralela a la normal AN; luego los cosenos l, m, n de ésta son:

$$\frac{d\alpha}{d\sigma}, \quad \frac{d\beta}{d\sigma}, \quad \frac{d\gamma}{d\sigma}$$

o bien, recordando [1] para eliminar $d\sigma$, resulta este primer grupo:
Grupo I.

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{l}{r_1}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{m}{r_1}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{n}{r_1}$$

Los cosenos l, m, n son, pues, proporcionales a las derivadas α' β' γ' respecto de s; propiedad que traduce la relación geométrica que hemos visto; y que permite calcular l, m, n dividiendo dichas derivadas por el factor de proporcionalidad, que es, justamente, la curvatura de flexión.

Puesto que las generatrices OB del 2.° cono son perpendiculares a los planos tangentes al 1.^{er} cono (paralelos a los osculadores), recíprocamente, el plano tangente en OB al cono 2.° es perpendicular a la generatriz OT del 1.°; luego es paralelo al plano BN, normal en A a la curva. Por tanto, la tangente en B a la 2.ª indicatriz, por estar en ese plano tangente y ser perpendicular a OB, es paralela a AN, y sus cosenos son:

$$\frac{d\lambda}{d\sigma_2}, \quad \frac{d\mu}{d\sigma_2}, \quad \frac{d\nu}{d\sigma_2}$$

y eliminando $d\sigma_2$ mediante [2] resulta el segundo grupo:
Grupo II.

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{l}{r_2}, \quad \frac{d\mu}{ds} = \frac{m}{r_2}, \quad \frac{d\nu}{ds} = \frac{n}{r_2}$$

Como α, λ, l son los cosenos directores del eje x respecto del triedro intrínseco, se verifica:

$$\alpha^2 + \lambda^2 + l^2 = 1$$

$$\alpha\alpha' + \lambda\lambda' + ll' = 0$$

y sustituyendo α', λ' por sus valores I y II, y suprimiendo el factor l, queda la primera fórmula siguiente, y análogamente las otras:
Grupo III.

$$\frac{dl}{ds} = -\frac{\alpha}{r_1} - \frac{\lambda}{r_2}; \quad \frac{dm}{ds} = -\frac{\beta}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}; \quad \frac{dn}{ds} = -\frac{\gamma}{r_1} - \frac{\nu}{r_2}$$

Cuadrando y sumando, resulta esta relación entre las derivadas respecto de s, que permite calcular r_2, ya conocido r_1.
Fórmula IV.

$$l'^2 + m'^2 + n'^2 = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}$$

que permite calcular T, ya conocido R.

229. — Círculo osculador y esfera osculatriz.

Entre las circunferencias tangentes a una curva en un punto A y situadas en el plano osculador, la que tiene por radio el de curvatura de flexión, se llama *círculo osculador* de la curva en el punto A y su centro se llama *centro de curvatura.*

Esta circunferencia, igual que en las curvas planas, resulta asimismo como límite de la circunferencia determinada por tres puntos de la curva que tienden a confundirse en A, y tiene contacto al menos de segundo orden, es decir, cortando por planos no paralelos a la tangente, la distancia entre los puntos de ambas curvas es infinitésimo de tercer orden por lo menos. La demostración puede verse en cualquier Geometría diferencial.

Se llama esfera *osculatriz,* al límite de la superficie esférica determinada por cuatro puntos de la curva, que tienden a confundirse en A. Por tanto, contiene al círculo osculador, que es su sección por el plano osculador.

La recta perpendicular al plano osculador en el centro de curvatura de A, se llama *recta polar* o *eje de curvatura* o eje del plano osculador ,correspondiente al punto A y en ella está asimismo el centro de la esfera osculatriz.

Si t_1, t_2, t_3, t_4 son los valores de t que determinan cuatro puntos de una curva, veamos la posición límite de la esfera que pasa por ellos, cuando tienden a confundirse en uno. Para ello formemos la *potencia* de un punto variable de la curva, o sea la función:

$$F(t) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2$$

siendo (a, b, c) las coordenadas del centro y r el radio. Como se verifica:

$$F(t_1) = F(t_2) = F(t_3) = F(t_4) = 0$$

la derivada $F'(t)$ se anula en tres puntos intermedios, la $F''(t)$ se anula en dos; la $F'''(t)$ en uno.

Si los cuatro puntos tienden a confundirse en uno, queda determinada una esfera, que se llama *osculatriz* en éste, cuyo centro y radio están dados por las ecuaciones:

$$F(t) = 0 \quad , F'(t) = 0 \quad , \quad F''(t) = 0 \quad , \quad F'''(t) = 0$$

que, desarrolladas, son:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$
$$(x-a)x' + (y-b)y' + (z-c)z' = 0$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + (x-a)x'' + (y-b)y'' + (z-c)z'' = 0$$
$$3(x'x'' + y'y'' + z'z'') + (x-a)x''' + (y-b)y''' + (z-c)z''' = 0$$

De las tres ecuaciones lineales se despejan $x-a$, $y-b$, $z-c$, y sustituídas en la primera, se obtiene r.

Si se adopta s como parámetro para expresar la curva, las derivadas x', y', z' son precisamente los cosenos α, β, γ; sus derivadas x'', y'', z'' vienen dadas por el grupo I de Frenet.

NOTA. — *Rectificación de curvas alabeadas.* La diferencia de módulos de dos vectores de origen 0 puede acotarse así:

[1] $$\sqrt{a^2+b^2+c^2} - \sqrt{a'^2+b'^2+c'^2} \leq |a-a'| + |b-b'| + |c-c'|$$

en efecto: la diferencia no supera al tercer lado del triángulo, y este lado, como resultante de la poligonal formada por las diferencias de coordenadas, es menor que la suma de éstas. Tal acotación nos permitirá demostrar muy elementalmente la fórmula (223) calculando la diferencia entre la cuerda c y la diferencial ds

[2] $$\delta = c - ds = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} - \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

es decir, la diferencia de módulos de dos vectores, cuyas diferencias de coordenadas son en este caso, por el teorema del incremento finito:

$$\Delta x - dx = x'(\xi)dt - x'(t)dt = [x'(\xi) - x'(t)]\, dt$$

y análogamente las otras dos. Pero siendo continua la derivada $x'(t)$ (y análogamente las otras) este incremento entre paréntesis es menor que ε para todos los intervalos dt suficientemente pequeños, luego aplicando la acotación [1] a la diferencia [2] cada uno de los tres sumandos es menor que ε y por tanto resulta

$$|\delta| < 3\varepsilon\, dt \quad , \quad \Sigma c = \Sigma ds + \Sigma\delta \quad , \quad |\Sigma\delta| < 3\varepsilon(t_1 - t_0)$$

y como este número es arbitrariamente pequeño, las sumas Σc, Σds tienen igual límite, es decir, la longitud del arco viene expresada por la integral (223).

Obsérvese que se ha utilizado el teorema de Heine, de la continuidad uniforme.

EJERCICIOS

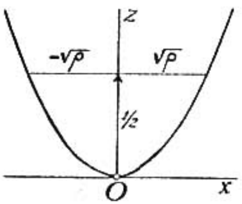
1. — Aplicar las fórmulas de Frenet a la hélice.

2. — Determinar la esfera osculatriz en cualquier punto de la hélice.

CURVATURA DE SUPERFICIES

230. — La indicatriz en un punto. Indicatriz de los paraboloides. Estudiar la curvatura de una superficie en un punto es conocer la curvatura de sus diversas curvas, que pasan por él. Prescindiendo de las alabeadas (cuya curvatura se demuestra ser igual a la de la sección plana producida por su plano osculador) el estudio de las secciones oblicuas se reduce muy sencillamente, como veremos en (233) al de las secciones normales. Para comparar la curvatura de las producidas por el haz de planos normales en O, ideó Dupin la gráfica siguiente.

DEFINICIÓN. — Dada una superficie cualquiera, si consideramos todas las secciones normales en un punto O de la misma, es decir, las curvas determinadas por los planos que pasan por la normal en O, y para cada curva llevamos sobre la tangente, a uno y otro lado, un segmento $r = \pm\sqrt{\rho}$ igual a la raíz cuadrada del radio de curvatura de dicha curva en el punto O, tenemos infinitos vectores cuyos extremos forman una curva llamada *indicatriz* de la superficie en el punto O.



Recordemos una sencilla propiedad de la parábola $x^2 = 2pz$.

Haciendo $z = \frac{1}{2}$ resulta $x = \sqrt{p}$ y como $p = \rho$ es el radio de curvatura en el vértice, tenemos un medio gráfico muy sencillo para construir $\sqrt{\rho}$.

Si la ecuación es $2z = Ax^2$, el coeficiente $A = {}^1/_p$ es la curvatura en el vértice.

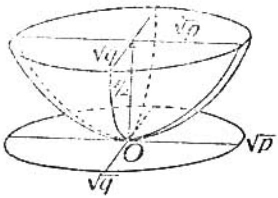
Paraboloide elíptico. — Consideremos el paraboloide elíptico:

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$

o bien $2z = Ax^2 + Cy^2$ y vamos a estudiar la curvatura de las diversas secciones producidas por los planos que pasan por el eje z.

Cada sección es una parábola que tiene O como vértice; el segmento $\pm\sqrt{\rho}$ se obtiene cortando dicha parábola por la secante trazada paralelamente a la tangente a distancia $\frac{1}{2}$ de ésta.

La indicatriz se obtiene, por tanto, cortando el paraboloide por el plano que dista ½ del tangente, y trasladando dicha elipse sobre el plano xy; luego su ecuación es:



$Ax^2 + Cy^2 = 1$ o bien:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1$$

Los radios principales son:

$$r_1 = p \quad , \quad r_2 = q$$

Paraboloide hiperbólico: $A > 0$, $C < 0$. — Considerando todas las secciones normales que pasan por el eje z, cada una corta en una parábola cuyo radio de curvatura se obtiene como antes se indicó.

Sobre la tangente en O a cada parábola llevamos en ambos sentidos el segmento $\sqrt{\rho}$. El lugar geométrico de los extremos de tales segmentos es la indicatriz de la superficie en el punto O.

Puesto que el número $\sqrt{\rho}$ correspondiente a cada parábola no es sino la ordenada de la parábola que dista ½ del origen, si cortamos la superficie por el plano horizontal $z = ½$, éste determinará sobre las parábolas dirigidas hacia arriba una hipérbola; y análogamente el plano $z = -½$ corta a las parábolas de curvatura negativa según otra hipérbola.

Trasladando paralelamente hasta el plano xy dichas dos secciones tenemos la indicatriz de la superficie. Esta indicatriz se compone, pues, de dos hipérbolas que tienen como asíntotas las dos generatrices de la superficie y situadas una en cada uno de los dos ángulos completos que dichas rectas forman.

Los semi-ejes de dichas hipérbolas corresponden a los radios de las dos secciones *principales* de la superficie. Estos radios se llaman radios principales de curvatura y sus valores son: $r_1 = p$, $r_2 = q$, si la ecuación del paraboloide es

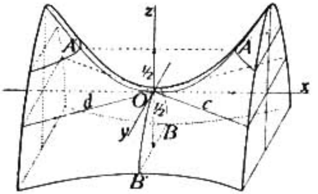
$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$$

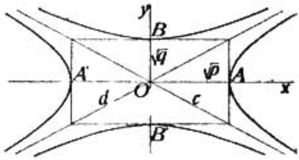
Las ecuaciones de estas hipérbolas resultan haciendo $z = ½$, y $z = -½$ en la ecuación del paraboloide y son:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 1; \qquad \frac{y^2}{q} - \frac{x^2}{p} = 1$$

sus asíntotas son las rectas:

$$\frac{y}{x} = \pm \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}$$





EJEMPLOS. — Sean los paraboloides

$$z = 4x^2 + y^2 \quad ; \quad z = x^2 - 3y^2$$

Las indicatrices en el origen se obtienen inmediatamente haciendo $z = \frac{1}{2}$ en la primera ecuación, y resulta la elipse

$$8x^2 + 2y^2 = 1$$

o bien $z = \pm \frac{1}{2}$ en la segunda y resulta el par de hipérbolas conjugadas:

$$x^2 - 3y^2 = 1 \quad , \quad 3y^2 - x^2 = 1$$

Recordando que las curvaturas principales son las derivadas segundas, éstas son para el paraboloide elíptico $A = 8$, $C = 2$; para el hiperbólico, $A = 2$, $C = 6$.

Los radios principales son los recíprocos de estos números.

231. — Paraboloide osculador.

El plano tangente a una superficie en un punto es una primera aproximación de esta superficie en el entorno de ese punto.

Pasemos ahora a obtener una segunda aproximación, tomando un término más avanzado en el desarrollo de Taylor.

Limitando éste en los términos de segundo grado, prescindiendo del término complementario, resulta una superficie:

$$z = f(a, b) + h\, f'_x(a, b) + k\, f'_y(a, b) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\, h^2 . f''_{xx}(a, b) + h\, k\, f''_{xy}(a, b) + \tfrac{1}{2}\, k^2 . f''_{yy}(a, b)$$

que representa una cuádrica, puesto que es de segundo grado en las coordenadas h, k. La diferencia entre las coordenadas z de la superficie y de esta cuádrica es del tercer orden, y por eso se llama *paraboloide osculador* en el punto A.

Cortando por cualquier plano vertical resultan dos curvas cuya diferencia de ordenadas es de tercer orden, es decir: las curvas tienen un contacto de segundo orden, y, por tanto, la misma curvatura. Por esto, para estudiar la curvatura de la superficie en un punto, basta considerar su paraboloide osculador.

Para mayor comodidad en el estudio de la superficie en un punto suele tomarse como plano xy el tangente en ese punto; entonces las derivadas en $(0, 0)$ son: $f'_x(0, 0) = 0$, $f'_y(0, 0) = 0$. La ecuación de la cuádrica osculatriz, llamando A, B, C a las derivadas, es:

$$2z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

que representa un paraboloide. Sus dos generatrices rectilíneas en el punto O vienen dadas por la ecuación:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$$

Las bisectrices del ángulo de estas generatrices son las direcciones principales del paraboloide, es decir, las secciones del plano tangente con los dos planos principales, que también se llaman *direcciones principales de la superficie.*

Si las adoptamos como ejes x e y, debe reducirse B a 0, para que los valores de y correspondientes a cada valor de x sean iguales y de signo contrario, y la ecuación de la superficie adopta la forma:

$$2z = Ax^2 + Cy^2 + Dx^3 + Ex^4 + \dots$$

y el paraboloide osculador: $2z = Ax^2 + Cy^2$.

232. — Indicatriz de una superficie cualquiera.

Primer caso; punto elíptico: $H = AC > 0$. Entonces tienen A y C el mismo signo; el paraboloide es elíptico. Todas las secciones normales de la superficie tienen la curvatura en el mismo sentido. La ecuación de la indicatriz según hemos demostrado en (230) resulta haciendo $z = \frac{1}{2}$ y es: $Ax^2 + Cy^2 = 1$, siendo $A = f''_{xx}$, $C = f''_{yy}$. Sus recíprocos son los radios principales: $r_1 = 1/A$, $r_2 = 1/C$.

En un punto elíptico todas las secciones principales tienen la curvatura dirigida en el mismo sentido; y comprendida entre los valores $f''_{xx}(0, 0)$ y $f''_{yy}(0, 0)$. La indicatriz es una elipse.

En particular, cuando es $r_1 = r_2$ todos los radios son iguales; la indicatriz es una circunferencia. El punto se llama *umbílico* o también *cíclico.*

Segundo caso; punto hiperbólico: $H = AC < 0$. Puesto que A y C tienen signos opuestos, el paraboloide es hiperbólico; las dos generatrices son simétricas. Para todas las secciones trazadas en uno de los ángulos de dichas rectas la curvatura está dirigida en un sentido y para el otro ángulo en sentido opuesto.

La indicatriz se compone de dos hipérbolas con las mismas asíntotas. Las direcciones de éstas se llaman *direcciones asintóticas* de P.

Los radios oscilan en los intervalos (r_1, ∞) (r_2, ∞) siendo r_1 y r_2 los recíprocos de las curvaturas principales A y C.

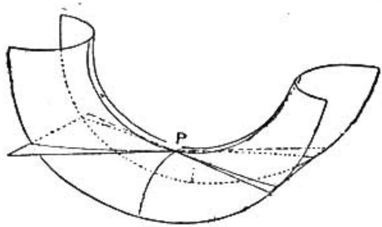
Ecuación de la indicatriz.

Punto elíptico

$$\frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2} = 1$$

Punto hiperbólico:

$$\frac{x^2}{r_1} - \frac{y^2}{r_2} = 1$$



Fórmula de Euler. — Para la dirección ω es $x = r \cdot \cos \omega$, $y = r \cdot \operatorname{sen} \omega$, luego resulta:

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos^2 \omega}{r_1} \pm \frac{\operatorname{sen}^2 \omega}{r_2}$$

Tercer caso; punto parabólico: $H = AC = 0$. Entonces debe ser $A = 0$ o bien $C = 0$. Suponiendo por ejemplo $A = 0$, la cuádrica se reduce a $2z = Cy^2$ que representa un cilindro parabólico tangente al plano xy a lo largo del eje x.

La indicatriz se reduce entonces a dos rectas paralelas simétricas respecto de la generatriz.

Como el parámetro de la parábola $Cy^2 = 2z$, sección principal por el plano zy, es $1/C$, el radio de curvatura principal es $r_1 = 1/C$, luego las dos rectas que forman la indicatriz distan $1/\sqrt{C}$ del eje x.

233. — Teorema de Meusnier.

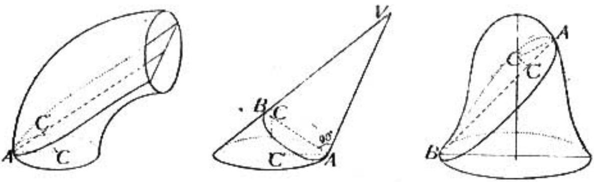
Así como en cada punto de una superficie hay un paraboloide osculador que tiene la misma curvatura en cada sección normal, así hay para cada recta tangente a la superficie una esfera osculatriz tal que las secciones producidas en ella por los planos que pasan por dicha tangente son los círculos osculadores de las secciones producidas en la superficie.

Para estudiar la curvatura de las secciones trazadas por una tangente, se puede sustituir la superficie por su esfera osculatriz.

En ésta se verifica que el centro de cualquier sección oblicua es la proyección sobre su plano del centro de la sección normal; aplicado esto a la superficie dada, resulta el siguiente teorema, cuya demostración puede verse en las Notas.

El centro de curvatura en el punto P de una sección oblicua es la proyección sobre su plano, del centro de curvatura de la sección normal que tiene la misma tangente.

Así, por ejemplo, en una superficie de revolución, como el centro de curvatura de cada paralelo es la intersección de su plano con el eje, en este eje está el centro de curvatura de la sección normal trazada por una tangente cualquiera de dicho paralelo.



Las figuras indican el doble uso del teorema. En la 1.ª, que tiene secciones normales circulares, se ha determinado el centro C' de una sección oblicua perpendicular al plano de simetría; en la 2.ª, que es un cono oblicuo, de base circular, se ha determinado el centro C de aquella sección normal en el punto A, que además es perpendicular al plano de simetría; en la 3.ª, que es una superficie de revolución, se ha determinado el centro C' de una sección oblicua cualquiera en el punto A de intersección con el meridiano cuyo plano es perpendicular a ella.

234. — Líneas de curvatura, geodésicas y asintóticas.

Las ecuaciones de la normal a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $A(x_0, y_0, z_0)$ son:

$$x - x_0 = -p_0(z - z_0)$$
$$y - y_0 = -q_0(z - z_0)$$

siendo p_0 y q_0 las derivadas de z respecto de x y de y en el punto A; si el punto A describe una curva sobre la superficie, es decir, $y = \alpha(x)$, son funciones de x las coordenadas x_0, y_0, z_0 y también p_0, q_0; ambas ecuaciones definen la superficie reglada (llamada *normalía*) que forman las normales a la superficie en los puntos de esa curva $y = \alpha(x)$. Cuando las normales en los puntos de una curva forman superficie desarrollable, dicha curva se llama *línea de curvatura* de la superficie dada. Pronto se verá la ecuación que caracteriza a las superficies desarrollables.

EJEMPLOS. — *Todas las líneas trazadas en un plano son de curvatura*, puesto que las normales forman un cilindro. También son de curvatura todas las líneas trazadas sobre una esfera, puesto que las normales forman un cono. En las superficies de revolución son líneas de curvatura los meridianos, pues las normales forman un plano; y también los paralelos, puesto que las normales forman un cono.

Problema análogo al de las líneas de curvatura, pero muy distinto, es el de encontrar sobre una superficie curvas tales que las normales a la superficie sean normales principales de la curva; estas curvas son las de longitud mínima entre todas las que se *pueden trazar sobre la superficie y se llaman geodésicas; su* determinación es objeto del Cálculo de variaciones.

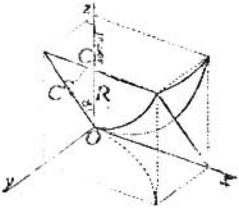
En la superficie esférica las líneas geodésicas son los arcos de circunferencia máxima; en los cilindros y en general en las superficies desarrollables, son las que tienen como transformadas líneas rectas.

Se llaman *curvas asintóticas* de una superficie aquellas en que la dirección de la tangente en todo punto es asintótica. Toda recta de una superficie es, pues, línea asintótica.

NOTAS

Demostración del teorema de Meusnier

Para estudiar la curvatura de las curvas trazadas sobre una superficie $z = f(xy)$ por uno de sus puntos, adoptemos éste como origen y su plano tangente como xy, sustituyendo la superficie por su paraboloide osculador:



$$2z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

El plano que pasa por el eje x, y forma el ángulo α con el xz, tiene la ecuación $z = \lambda y$, siendo $\lambda = \operatorname{ctg} \alpha$; corta a la superficie en una curva cuya proyección sobre el plano xy

$$2\lambda y = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2;$$

la curvatura de ésta en O es y'' (por ser $y' = 0$) y como para $x = 0$ es evidente $y'' = A : \lambda$, ésta es la curvatura de dicha proyección; y la curvatura de la curva proyectada se deduce dividiendo por sen α, y resulta: $A : \cos \alpha$. El radio de curvatura de dicha curva sección es, por tanto, $\cos \alpha : A = R . \cos \alpha$, llamando $R = 1 : A$ al radio de la sección normal, que corresponde al valor $\alpha = 0$.

El teorema de Meusnier queda así demostrado.

Otra definición de la indicatriz. — Si en la ecuación de la superficie

$$2z = Ax^2 + Cy^2 + Dx^3 + Ex^2y + \ldots.$$

hacemos $z = h$, obtenemos como sección de la superficie la curva

$$2h = Ax^2 + Cy^2 + \ldots. \qquad \text{o aproximadamente: } 2h = Ax^2 + Cy^2$$

despreciando los términos siguientes, que son infinitésimos superiores en el entorno del origen. Comparada esta curva con la indicatriz $1 = Ax^2 + Cy^2$ son curvas semejantes; por tanto:

Las secciones de la superficie por planos paralelos al tangente en un punto son curvas sensiblemente semejantes a la indicatriz en ese punto.

Curvatura total en un punto de una superficie. — Se llama así al producto de las dos curvaturas principales. Este número tiene un significado análogo al de la curvatura plana; en efecto, dada una región σ de superficie, entorno de un punto P, si por un punto 0 se trazan rayos paralelos a las normales en el contorno de σ, forman un cono cuya amplitud (medida sobre la esfera de radio 1) es una cierta área τ; el límite del cociente τ/σ, al tender σ a cero, es precisamente la curvatura total en el punto P.

Como se ve ,esta amplitud τ del ángulo cónico de las normales viene a sustituir al ángulo de contingencia τ de las curvas planas, formado por las tangentes normales en los extremos del mismo.

Es condición necesaria para que dos superficies sean aplicables una sobre otra sin distensión, que tengan la misma curvatura total en cada punto.

Si la superficie es desarrollable, es decir, aplicable sobre un plano, su curvatura total es la misma del plano, esto es, nula; resultado que se ve directamente porque para ellas el área τ es nula, porque la indicatriz de curvatura total se reduce a una curva, cualquiera que sea la porción elegida σ.

Curvatura media de una superficie en un punto. — Es el promedio de las curvaturas principales en dicho punto, es decir:

$$c = \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2)$$

Son interesantes las superficies que tienen nula su curvatura media en cada punto, es decir: $r_1 = -r_2$; son las *superficies de área mínima*, esto es, las de menor área que cualquier otra superficie limitada por el mismo contorno. Se construyen sumergiendo éste, construido de alambre, en un líquido gelatinoso, que forma una película de área mínima en el contorno dado.

Si se desea obtener superficies de revolución que tengan esta propiedad, el radio de curvatura de la meridiana en cada punto debe ser igual y opuesto al otro radio principal que es el segmento de normal limitada por el eje; la curva que tiene esta propiedad es la catenaria; al girar alrededor de su recta base engendra una superficie de área mínima, que es la única de revolución que tiene esta propiedad.

EJERCICIOS

1. — Demostrar que el centro de curvatura de la sección de una superficie de revolución en los puntos de contacto con los paralelos que le son tangentes, es la intersección del plano secante con el eje de la superficie.

2. — Construir la indicatriz en un punto cualquiera del toro. Obsérvese para ello que en toda superficie de revolución, una sección principal es la meridiana, por razón de simetría y la otra le es perpendicular.

3. — Demostrar que la suma de curvaturas de cada dos secciones normales a la superficie en 0, perpendiculares entre sí, es constante, igual por tanto, a la suma de curvaturas principales.

LECCIÓN 56

CORRESPONDENCIAS Y REPRESENTACION DE SUPERFICIES

235. — Representación paramétrica de superficies.

De igual modo que una curva se expresa paramétricamente como transformada de un segmento, cada superficie se define como imagen de una región de plano.

Si una superficie se da en forma paramétrica:

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v)$$

el elemento de arco ds de una línea trazada sobre la superficie, viene expresado por la fórmula:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

y sustituyendo las diferenciales:

$$dx = x'_u . du + x'_v . dv$$

$$dy = y'_u . du + y'_v . dv$$

$$dz = z'_u . du + z'_v . dv$$

resulta una expresión del tipo:

$$ds^2 = E . du^2 + 2F . du . dv + G . dv^2$$

cuyos coeficientes (que suelen llamarse de Gauss) son funciones de u, v:

$$E = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u$$

$$F = x'_u . x'_v + y'_u . y'_v + z'_u . z'_v$$

$$G = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v$$

A lo largo de una curva $v =$ const la tangente en cada punto tiene como coeficientes directores las tres derivadas de x, y, z, respecto de u; y la tangente en cualquier punto a una curva $u =$ const. tiene como coeficientes directores las derivadas respecto de v.

Si en un punto de la superficie se anula la función F, como ésta es la suma de productos de los coeficientes directores de las dos curvas $u =$ const., $v =$ const. que pasan por ese punto, ambas son ortogonales. Si es $F \equiv 0$ idénticamente, las familias de curvas $u =$ const. $v =$ const. son *ortogonales*, es decir, las de cada sistema cortan a las del otro perpendicularmente.

EJEMPLO. — La ecuación de una superficie de revolución de eje z está determinada por la meridiana $z = f(x)$; y como al girar en torno del eje, la x se convierte en r, las coordenadas de un punto cualquiera son:

$$x = r.\cos\alpha \quad , \quad y = r.\operatorname{sen}\alpha \quad , \quad z = f(r)$$

Los dos parámetros son aquí r y α; las curvas $r = c$ son los paralelos; las $\alpha = c$ son los meridianos.

Los coeficientes de Gauss son:

$$E = 1 + f'^2; \quad F = 0; \quad G = r^2.$$

La anulación idéntica de F indica la ortogonalidad de meridianos y paralelos.

EJEMPLO. — Para la esfera son más convenientes las coordenadas esféricas: longitud λ y latitud φ.

Las ecuaciones paramétricas de la esfera de radio R son:

$$x = R.\cos\varphi.\cos\lambda \qquad y = R.\cos\varphi.\operatorname{sen}\lambda \qquad z = R.\operatorname{sen}\varphi.$$

y los coeficientes de Gauss son:

$$E = R^2 \quad ; \quad F = 0 \quad ; \quad G = R^2.\cos^2\varphi$$

NOTA. — Por el significado gravitacional que en la teoría de la Relatividad adquieren los coeficientes de la forma diferencial que expresa ds^2, se acostumbra a designar los coeficientes de Gauss: E, F y G por g_{11}, g_{12}, g_{22}.

236. — Plano tangente.

El plano tangente a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0) determinado por los valores $u = u_0$, $v = v_0$, tiene por ecuación

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_{u0} & y'_{u0} & z'_{u0} \\ x'_{v0} & y'_{v0} & z'_{v0} \end{vmatrix} = 0$$

En efecto, este plano pasa por el punto $A(x_0, y_0, z_0)$ puesto que el determinante se anula al sustituir $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Además, todos los puntos de la tangente en A a la curva $v = v_0$ están en ese plano, puesto que las diferencias de coordenadas $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, son proporcionales a las derivadas: x'_u, y'_u, z'_u.

También se anula el determinante en todos los puntos de la tangente a la curva $u = u_0$; luego ese plano es el tangente en A.

237. — Representación plana de superficies.

Una *correspondencia* o *representación* entre una superficie:

$$x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v) \quad , \quad z = z(u, v)$$

y un plano (X, Y), viene definida por una correspondencia biunívoca entre los pares (X, Y) y (u, v); cada ley de correspondencia da un sistema de representación.

EJEMPLO. — Establezcamos entre las coordenadas geográficas φ, λ, de la superficie esférica y las coordenadas X, Y del plano la correspondencia

$$X = a\lambda \quad , \quad Y = a \operatorname{sen} \varphi$$

Esta proyección se llama cilíndrica y equivale a proyectar sobre el cilindro circunscrito al Ecuador, mediante los planos de los meridianos y de los paralelos.

Si la correspondencia entre los puntos (u, v) de la superficie y los (X, Y) del plano cumple la condición:

$$E.du^2 + 2F.du.dv + G.dv^2 = \mu(dX^2 + dY^2)$$

siendo μ una función de las coordenadas, resulta que los elementos de arco que pasan por un punto son proporcionales a sus homólogos; esa razón es la *dilatación lineal* que es constante en cada punto, pero varía con éste.

Un triángulo ABC y su homólogo $A'B'C'$ tienen, pues, lados que tienden a ser proporcionales al tender a confundirse los tres vértices, en un solo punto; y sus ángulos homólogos tienden, por tanto a ser iguales. Es decir: el ángulo de dos curvas cualesquiera trazadas sobre la superficie es igual al de sus curvas homólogas. Esto se expresa diciendo que la transformación o la *correspondencia* es *conforme*.

EJEMPLO. — No es conforme la proyección cilíndrica definida en el ejemplo anterior, pues si se forma el elemento de arco en el plano ,no es proporcional al de la esfera cuya expresión, según se vió, es:

$$ds^2 = R^2(d\varphi^2 + \cos^2 \varphi . d\lambda^2)$$

Conservando la función $X = a\lambda$, es decir, representando los meridianos por rectas paralelas equidistantes, ¿cómo deben representarse los paralelos por rectas paralelas de modo que la correspondencia sea conforme?

Es decir, veamos qué función $Y = a.f(\varphi)$ conviene elegir para representar los paralelos, o sea, cómo deben espaciarse para que en cada punto la dilatación sea la misma en ambas direcciones perpendiculares. La dilatación a lo largo del paralelo es $a : R \cos \varphi$, lo cual resulta de las fórmulas anteriores, o bien directamente, por ser $R \cos \varphi$ el radio del paralelo; será, pues, necesario, que se verifique también a lo largo del meridiano:

$$a.f'(\varphi) : R = a : R \cos \varphi$$

o sea $f'(\varphi) = 1 : \cos \varphi$.

La función buscada es, pues, la primitiva de la sec φ, que se calcula fácilmente como ejercicio de integración y vale:

$$f(\varphi) = l \operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi)$$

He aquí, en definitiva, las ecuaciones que definen la proyección de Mercator, usada exclusivamente en las cartas marinas:

$$X = a\lambda \quad ; \quad Y = a\, l \operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi)$$

donde a es la anchura del mapa, o sea el segmento que representa al ecuador; en cambio la altura es infinita, como se ve haciendo $\varphi \to \tfrac{1}{2}\pi$.

238. — Superficies aplicables.

Si el factor μ de la representación conforme se reduce a 1, es decir, si el elemento de arco en la superficie y en el plano son iguales, aquélla se dice *aplicable* sobre el plano; se demuestra en Geometría diferencial que las superficies aplicables sobre el plano son las desarrollables.

Más general: dos superficies que, mediante elección conveniente de los parámetros (u, v) tienen iguales los coeficientes de Gauss, E, F, G, tienen iguales los elementos correspondientes de arco y se dicen *aplicables* una sobre otra.

En efecto, en ambas es igual la expresión de ds, es decir, los arcos homólogos tienen igual longitud: Si suponemos las superficies formadas de corpúsculos iguales, en arcos homólogos habrá igual número de ellos y dispuestos en el mismo orden, luego de una disposición se pasa a la otra sin alterar las longitudes; tal transformación se llama una *deformación*.

Ejemplo. — Sea el cilindro de generatrices paralelas al eje z:

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z.$$

Adoptando como parámetros t y z, resulta:

$$E = x'^2 + y'^2 \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = 1.$$

Si en el plano XZ introducimos las coordenadas curvilíneas

$$X = f(t) \quad , \quad Y = 0 \quad , \quad Z = Z,$$

resulta:

$$E = f'(t)^2 \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = 1$$

luego ambas son aplicables entre sí, a condición de que se adopte

$$f'(t)^2 = x'^2 + y'^2.$$

Esto equivale a desarrollar el cilindro conservando las generatrices paralelas al eje Z, llevando como abscisas $X = f(t)$ las longitudes de los arcos de las secciones rectas, a partir de una generatriz inicial.

Si el cilindro es oblícuo:

$$x = p.z + x(t)$$
$$y = q.z + y(t)$$

se puede tomar $X = f(t)$, pero $Z = \varphi(t, z)$ y resulta:

$$E = f'^2 = x'^2 + y'^2$$
$$F = \varphi' . \varphi'_z = px' + qy'$$
$$G = \varphi_z'^2 = p^2 + q^2 + 1$$

de donde se despejan φ'_t, φ'_z, f', y de ellas se deducen por integración las funciones φ, t.

Si p y q son funciones de t, es decir, para una superficie reglada cualquiera, habrá que tomar $X = f(t, z)$, $Z = \varphi(t, z)$.

Nota. — Gauss demostró que la igualdad de coeficientes E, F, G lleva consigo la igualdad de ciertos elementos no lineales de las superficies; por ejemplo, la *curvatura total* (pág. 272) se expresa mediante E, F, G, luego: dos superficies aplicables tienen igual curvatura total en cada par de puntos homólogos.

SUPERFICIES REGLADAS

239. — Superficies regladas en general.

La definición (235) de las superficies como transformadas continuas del plano es análoga a la dada para las curvas; pero, la generación por movimiento de un punto no es aplicable a las superficies. Veamos un tipo especial en que cabe una generación análoga.

Se llama *superficie reglada* a la engendrada por una recta que se mueve. El concepto de movimiento equivale a variación en función continua de un parámetro t. Sean, pues, las ecuaciones de la recta generatriz:

$$x = pz + a \qquad\qquad y = qz + b$$

donde p, q, a, b, son funciones continuas de t. Si se desea la ecuación ordinaria, hay que eliminar t entre ambas; pero es preferible la expresión paramétrica, bastando agregar como tercera ecuación $z = z$, y así se tienen las coordenadas (x, y, z) del punto de la superficie como funciones de los dos parámetros z, t.

La ecuación del plano tangente se obtiene como se explicó en la lección anterior

$$\begin{vmatrix} x - pz_0 - a & y - qz_0 - b & z - z_0 \\ p & q & 1 \\ p'z_0 + a' & q'z_0 + b' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

donde las letras acentuadas indican derivadas respecto de t. Esta ecuación se simplifica sumando a la primera fila la segunda multiplicada por z_0

$$\begin{vmatrix} x - a & y - b & z \\ p & q & 1 \\ p'z_0 + a' & q'z_0 + b' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

o sea, descomponiendo el determinante en suma de dos:

$$Pz_0 + Q = 0 \qquad [1]$$

donde:

$$P = \begin{vmatrix} x - a & y - b & z \\ p & q & 1 \\ p' & q' & 0 \end{vmatrix}$$

$$Q = \begin{vmatrix} x - a & y - b & z \\ p & q & 1 \\ a' & b' & 0 \end{vmatrix}$$

o sea, desarrollados:

$$P = p'(y - b - qz) - q'(x - a - pz)$$
$$Q = a'(y - b - qz) - b'(x - a - pz)$$

Para cada generatriz es t constante; y al variar z_0, es decir, al moverse el punto a lo largo de la generatriz, el plano [1] forma un haz, cuya arista es la recta $P = 0$, $Q = 0$, que no es sino la misma generatriz.

Sólo hay un caso en que el plano no gira; cuando sea idénticamente $P = 0$, o más en general $P = \lambda Q$ (siendo λ constante); la superficie se llama *desarrollable* y el plano tangente en cada punto de una generatriz es el mismo, que se llama tangente *a lo largo de la generatriz.*

EJEMPLO. — Sean a, b, p, q funciones lineales de t; eliminando t resulta una ecuación de segundo grado, que representa una cuádrica.

Sea, por ejemplo:

$$x = tz + 2t + 1 \quad , \quad y = (t - 1)z - 3t$$

y la cuádrica que definen tiene la ecuación:

$$\frac{x - 1}{y + z} = \frac{z + 2}{z - 3}$$

o sea, reducida a forma entera:

$$(x - 1)(z - 3) = (y + z)(z + 2)$$

240. — Superficies desarrollables.

Una superficie reglada se llama *desarrollable*, cuando el plano tangente en cada punto lo es en todos los puntos de la generatriz; o sea, cuando el plano [1] no depende de z_0. Fijado t, es decir, elegida una generatriz hay tres casos singulares:

1.° Si $P \equiv 0$, debe ser $p' = 0$, $q' = 0$, *o sea: p y q son constantes*; todas las generatrices son paralelas y la superficie es *cilíndrica.*

2.° Si $Q = 0$, debe ser $a' = 0$, $b' = 0$, es decir: a y b constantes; todas las generatrices pasan por el punto $(a, b, 0)$ luego la superficie es *cónica*.

3.° Si $P = \lambda Q$, es decir, si $p'b' = q'a'$

Este caso comprende a los anteriores como casos particulares, y ésta es la condición que caracteriza las superficies desarrollables.

Una curva sobre la superficie está determinada por una ecuación de condición $z =$ función de t; entonces son x, y, z funciones de t y queda determinada la curva. Entre ellas hay una que es tangente a todas las generatrices; para ello basta que sea:

$$\frac{x'}{p} = \frac{y'}{q} = \frac{z'}{1}$$

o sea:

$$\frac{p'z + pz' + a'}{p} = \frac{q'z + qz' + b'}{q} = \frac{z'}{1}$$

que, simplificadas, se reducen a:

$$p'z + a' = 0 \qquad q'z + b' = 0$$

o sea:

$$z = -a'/p' = -b'/q' \qquad [2]$$

que dan la misma función de t, por la condición supuesta:

$$p'b' = q'a'$$

La función [2] representa, pues, la curva tangente a todas las generatrices, la cual se llama *arista de retroceso* de la superficie.

Recíprocamente: las rectas tangentes a una curva alabeada cualquiera cumplen estas condiciones sucesivas y por tanto la $p'b' = q'a'$, luego forman una superficie desarrollable.

241. — Línea de estricción; plano central; parámetro.

Consideremos una generatriz, por ejemplo, la que corresponde a $t = 0$, y adoptada como eje z, deben anularse para $t = 0$ las funciones a, b, p, q. Si damos a t otro valor, tenemos otra generatriz y la mínima distancia se obtendrá trazando un plano horizontal $z = z_0$, tal que los coeficientes directores de la secante común, o sean

$$pz_0 + a \quad , \quad qz_0 + b \quad , \quad 0$$

y los coeficientes directores de la generatriz ,o sean p, q, 1, cumplan la condición de perpendicularidad:

de donde resulta la ordenada z_0 del pie de la mínima distancia, o sea:

$$-\frac{ap + bq}{p^2 + q^2}.$$

Si dividimos por t cada letra y hacemos $t \to 0$, resulta el valor límite:

$$z_1 = -\frac{a'p' + b'q'}{p'^2 + q'^2}$$

Este punto límite del pie de la mínima distancia a otra generatriz (o dicho brevemente: pie de la mínima distancia a la generatriz infinitamente próxima) se llama *punto central* de la generatriz. El lugar de los puntos centrales de todas las generatrices, se llama *línea de estricción* de la superficie.

Obsérvese que si la superficie es desarrollable, este valor z_1 coincide con el [2], es decir: *En las superficies desarrollables la línea de estricción es la arista de retroceso.*

El plano tangente en el punto central de una generatriz se llama *plano central.*

Adoptemos el punto central del eje z como origen, y el plano central como xz. Como la ordenada del punto central debe ser nula, se verifica:

$$a'p' + b'q' = 0$$

y como la ecuación del plano tangente se reduce a $y = 0$, debe ser $b' = 0$; pero $a' \neq 0$, si la superficie no es desarrollable, luego también $p' = 0$, para $t = 0$, es decir, en todos los puntos de la generatriz.

La ecuación del plano tangente en el punto z_0 se reduce, pues, a ésta:

$$q'z_0x = a'y$$

luego: *La pendiente $y:x$ del plano tangente sobre el plano central es proporcional a la distancia z_0 del punto de contacto al punto central O.* (Teorema de CHASLES).

El número $k = a'/q'$ se llama *parámetro de distribución* de la generatriz, y la relación anterior se puede escribir: $z_0 = k.\text{pend.}$

Si k es nulo o infinito, es decir, nulos a' o q', la superficie es desarrollable, y cesa la propiedad, puesto que el plano tangente es el mismo a lo largo de toda la generatriz.

EJERCICIO. — **Expresar el hiperboloide alabeado redondo en la forma (239) y calcular el punto central y el parámetro de distribución.**

LECCIÓN 58

ENVOLVENTES DE CURVAS Y SUPERFICIES

242. — Envolventes de un haz de curvas planas.

Envolvente de un haz de curvas planas es una curva formada por los puntos de contacto con todas ellas.

Sea $F(x, y, c) = 0$ la ecuación del haz; derivando respecto del parámetro c resulta:

$$F(x, y, c) = 0 \quad , \quad F'_c(x, y, c) = 0$$

$$\text{y eliminando } c \text{ sale } \quad \Psi(x, y) = 0 \qquad [1]$$

que es la envolvente buscada, como vamos a demostrar. En efecto, la eliminación puede ponerse de manifiesto expresando c como función $c(x, y)$ sacada de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera. Es decir:

$$F[x, y, c(x, y)] = 0 \qquad [2]$$

Sea x_0, y_0 un punto de esta curva, es decir:

$$F[x_0, y_0, c(x_0, y_0)] = 0 \quad \text{y pongamos} \quad c_0 = c(x_0, y_0)$$

la curva $F(x, y, c_0) = 0$ del haz, pasa, pues, por dicho punto (x_0, y_0); las pendientes y' de las tangentes en ese punto a esta curva y a la envolvente [2], se obtienen derivando en dicho punto y resulta:

$$F'_x + F'_y \cdot y' = 0$$

$$F'_x + F'_y \cdot y' + F'_c(c'_x + c'_y \cdot y') = 0$$

y como $F'_c = 0$, ambas tangentes son la misma; luego en efecto, la curva [1] o lo que es lo mismo [2] es la envolvente buscada.

EJEMPLO 1. — Sea la familia de curvas, ya considerada:

$$(x - a)^2 + y^2 = 1$$

Derivando respecto del parámetro a, sale:

$$-2(x - a) = 0 \quad \text{y eliminando } a, \text{ sale} \quad y^2 = 1; \quad y = \pm 1$$

Estas dos rectas componen la envolvente y, por tanto, $y = \pm 1$ es la integral singular de la ecuación diferencial del haz.

NOTA. — Cuando son dos los parámetros ,ligados por una ecuación, conviene diferenciar ambas ecuaciones, como se indica en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2. — Para obtener la integral singular de la ecuación de Clairaut estudiada en (297), o sea la envolvente de las rectas:

$$x/a + y/b = 1 \qquad \text{siendo} \qquad a^2 + b^2 = k^2$$

diferenciando ambas respecto de a, b, e igualando los cocientes db/da, resulta:

$$\frac{b^2x}{a^2y} = \frac{a}{b} \qquad \frac{x}{a^3} = \frac{y}{b^3} \qquad \frac{x/a}{a^2} = \frac{y/b}{b^2} = \frac{1}{k^2}$$

de donde: $\qquad a^3 = x.k^2 \quad , \quad b^3 = x.k^2$

y eliminando a, b, resulta la ecuación que representa una *astroide.*

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \qquad (astroide)$$

243. — Envolventes de superficies.

Consideremos una superficie móvil; o más general, una familia de superficies con un solo parámetro t. He aquí dos superficies que tienden a confundirse para $h \to 0$:

$$f(x, y, z, t) = 0 \qquad f(x, y, z, t + h) = 0$$

para los puntos de intersección se verifican ambas, y por tanto, se verifica también, por el teorema de Rolle

$$f'_t(x, y, z, \xi) = 0 \qquad (\xi \text{ entre } t \text{ y } t + h)$$

Si $h \to 0$, también $\xi \to t$, luego la curva límite de la intersección satisface a la ecuación

$$f'_t(x, y, z, t) = 0$$

y el lugar de estas curvas, llamadas características, se llama *envolvente* de las superficies; su ecuación se obtiene *eliminando el parámetro t entre la ecuación de la superficie y de su derivada respecto del parámetro.*

Sea el plano móvil

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

donde A, B, C, D son funciones de t; la envolvente se obtiene eliminando t entre esta ecuación y la

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

pudiendo demostrarse que esta superficie es desarrollable.

Si además se agrega la ecuación

$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0$$

las tres definen una curva, que es la arista de retroceso.

Consideremos ahora una familia de superficies doblemente infinita, es decir, con dos parámetros

$$f(x, y, z, u, v) = 0$$

Con razonamiento análogo resulta: *la ecuación de la envolvente se deduce eliminando los parámetros u, v, entre ella y sus derivadas* f'_u, f'_v.

En este caso no hay curvas características, sino *puntos característicos,* es decir, puntos límites de las intersecciones de tres superficies próximas, y la envolvente es el lugar de esos puntos, teniendo común con cada superficie generatriz, no una curva, sino un punto, en general.

EJEMPLOS. — Planos $Ax + By + Cz = 1$
cuyos coeficientes cumplen la condición

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1 : r^2$$

Los parámetros independientes son dos, y en vez de derivar, conviene diferenciar:

$$x.dA + y.dB + z.dC = 0$$
$$A.dA + B.dB + C.dC = 0$$

Si B es constante, resulta: $Cx = Az$
" A " " " $Cy = Bz.$

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C} = \frac{r^2}{1}$$

Despejando A, B, C de las tres ecuaciones lineales y sustituyendo en la cuadrática, resulta:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

pues los planos dados distan de O la longitud r, y la envolvente debe ser una superficie esférica, que sólo tiene común un punto con cada plano generador.

Vamos a estudiar las superficies envolventes de los tres planos del triedro intrínseco de una curva.

El plano determinado por la tangente y la binormal se llama *plano rectificante,* y envuelve una superficie llamada *rectificante* de la curva dada, porque al desarrollarla sobre un plano, la curva dada se convierte en recta. La curva es, por tanto, geodésica de la superficie rectificante. Esto es consecuencia de ser la normal a esta superficie la normal principal de la curva (por ser trirrectángulo el triedro) propiedad que caracteriza a las geodésicas.

El plano normal envuelve una superficie desarrollable que se llama *polar* de la curva dada; sus rectas generatrices son precisamente las rectas polares ya definidas, o sea las perpendiculares a los planos osculadores en sus centros de curvatura; el centro de la esfera osculatriz, asimismo situado en cada generatriz, es precisamente el punto de contacto con la arista de retroceso. Resulta, pues, que *la arista de retroceso de la superficie polar es el lugar de los centros de las esferas osculatrices.*

244. — Evolutas y evolventes de curvas planas.

Se llama *evoluta* de una curva $y = f(x)$ a la envolvente del haz de rectas normales en todos los puntos de la curva. La ecuación de la normal en el punto (α, β) es

$$x - \alpha + y'(y - \beta) = 0$$

siendo

$$\beta = f(\alpha) \qquad y' = f'(\alpha)$$

derivando respecto del parámetro α resulta:

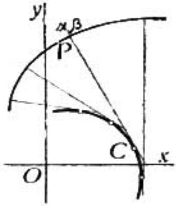
$$-1 + y''(y - \beta) - y'^2 = 0$$

de donde

$$y - \beta = \frac{y''}{1 + y'^2}$$

y de la ecuación primera sale:

$$x - \alpha = -y' \frac{1 + y'^2}{y''}.$$



En vez de eliminar α, puede dejarse como parámetro, y resulta la envolvente (es decir, la evoluta) en forma paramétrica dada por estas dos fórmulas.

Comparando con las fórmulas obtenidas en la lección 21 para el centro de curvatura, resulta que la envolvente es precisamente el lugar geométrico de los centros de curvatura.

Una curva f que tiene por evoluta φ se dice *evolvente* de ésta. Se obtendrán, pues, todas las evolventes de φ como trayectorias ortogonales del haz de tangentes a φ; toda curva tiene, por tanto, infinitas evolventes.

En los tratados de Geometría diferencial se demuestran las propiedades, siendo ésta la más importante: *La longitud de un arco de evolvente sin puntos singulares es igual a la diferencia entre las normales de la evolvente correspondientes a los dos extremos.*

EJEMPLOS. — Evoluta de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Derivando se despeja:

$$y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$$

sustituyendo $c^2 = a^2 - b^2$, resulta:

$$1 + y'^2 = \frac{b^4 + c^2\beta^2}{a^2\beta^2}$$

derivando nuevamente se despeja:

$$y'' = -\frac{b^4}{a^2\beta^3}$$

Las ecuaciones paramétricas de la evoluta son, por tanto,

$$x = c^2\alpha^3/a^4 \qquad y = -c^2\beta^3/b^4$$

eliminando α, β entre éstas y la ecuación de la elipse resulta la ecuación:

$$(ax/c^2)^{\frac{2}{3}} + (by/c^2)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

245. — Envolventes de curvas alabeadas. Evolutas.

Una curva se llama *envolvente* de un haz de curvas alabeadas, cuando en cada punto es tangente a una de ellas. Se comprende, pues, que una familia de curvas carece, en general, de envolvente; pero si se dispone de dos grados de libertad, puede formarse envolvente. Estudiemos un ejemplo importante.

Se llama *evoluta* de una curva a la envolvente de sus normales. Veamos cómo deben elegirse éstas para que tengan envolvente. Sean x, y, z las coordenadas del punto A de la curva dada y X, Y, Z las del punto homólogo A' en la evoluta; los coeficientes directores de la recta AA' son: $X-x$, $Y-y$, $Z-z$; expresando que esta recta es tangente a una curva y normal a la otra, se tienen las ecuaciones:

$$\frac{X-x}{X'} = \frac{Y-y}{Y'} = \frac{Z-z}{Z'}$$

$$(X-x)dx + (Y-y)dy + (Z-z)dz = 0$$

como al variar t varían x, y, z, X, Y, Z, si derivamos

$$(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 = R^2$$

teniendo en cuenta la relación anterior, resulta:

$$(X-x)X' + (Y-y)Y' + (Z-z)Z' = RR'$$

y como el valor de las tres razones de la primera fórmula es R/S', siendo S la longitud del arco de envolvente, sustituyendo en esta última resulta: $RS' = RR'$, de donde: $S' = R'$, $S_1 - S_2 = R_1 - R_2$.

La longitud del arco de envolvente de normales a una curva, es la diferencia de las longitudes de las normales correspondientes a los extremos.

Se demuestra fácilmente que la envolvente está en la superficie polar de la curva dada.

EJERCICIOS

1. — Obtener la evoluta de la parábola.

2. — Obtener la ecuación de las evolventes de la circunferencia.

3. — Demostrar que la longitud de un arco de evoluta es la diferencia entre los radios de curvatura de la curva dada, correspondientes a los extremos.