CALCULO VECTORIAL DIFERENCIAL

246. — Derivación de vectores funciones de una variable.

Si los componentes de un vector A son funciones de t, se dice que éste es función de t, y escribiremos $A(t)$.

Derivada $A'(t)$ es el límite del cociente del incremento $A(t+h) - A(t)$ por el incremento $h \to 0$. Como las componentes de este vector diferencia son las diferencias o incrementos de las componentes:

$$x(t+h) - x(t) \quad , \quad y(t+h) - y(t) \quad , \quad z(t+h) - z(t)$$

al dividir por h y pasar al límite, resultan las componentes del vector derivado $A'(t)$ que son:

$$x'(t) \quad , \quad y'(t) \quad , \quad z'(t)$$

Si el origen del vector varía, y las componentes se dan como funciones del origen, el cual es función de t, se aplicará la misma regla de derivación de las funciones compuestas.

Como las componentes del producto escalar $A(t) . B(t)$ son las sumas de los productos de las componentes de ambos, la regla de la derivada del producto es aplicable:

$$(A . B)' = A . B' + A' . B$$

omitiendo la variable, por brevedad.

Como la derivada del determinante que define $A \times B$ es suma de los dos determinantes que resultan derivando la segunda fila, o la tercera, resulta:

$$(A \times B)' = A \times B' + A' \times B$$

es decir,también para el producto vectorial es aplicable la regla de derivación.

También lo es para el producto de una función escalar por una vectorial: $m(t) . A(t)$, o brevemente $m . A$; pues al multiplicar el vector por m, las componentes del vector derivado son:

$$m' . x + m . x' \quad , \quad m' . y + m . y' \quad , \quad m' . z + m . z',$$

luego resulta $\qquad (m . A)' = m' . A + m . A'$

Velocidad y aceleración en el movimiento curvilíneo.

Una curva alabeada está determinada por el vector variable cuyo origen es 0 y su extremo P un punto móvil sobre la curva, cuyas coordenadas son funciones del tiempo u otro parámetro t:

$$x(t) \quad , \quad y(t) \quad , \quad z(t)$$

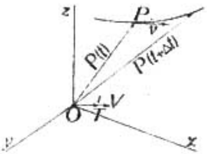
El vector de componentes:

$$x'(t) \quad , \quad y'(t) \quad , \quad z'(t)$$

está situado en la tangente, y tiene el sentido del movimiento; se llama *vector velocidad,* y lo representaremos por $V(t)$ o simplemente V. Su módulo es $v = ds : dt$, es decir, la *velocidad lineal.*

Llamamos *vector tangente:* $T(t)$ o simplemente T, al vector de módulo 1 sobre la tangente en el sentido del movimiento, es decir, T es el versor de V; por tanto,

[1] $$V = v \,.\, T.$$



Las componentes de T son, por consiguiente:

$$\frac{dx}{ds} \quad , \quad \frac{dy}{ds} \quad , \quad \frac{dz}{ds}$$

La derivada del vector velocidad se llama *aceleración;* sus componentes o coordenadas son por tanto $x''(t)$, $y''(t)$, $z''(t)$ y su expresión vectorial resulta derivando [1] respecto de t; esto es:

$$A = v' \,.\, T + v \,.\, T'$$

Ahora veremos la dirección y valor absoluto de T'.

247. — Triedro intrínseco y fórmulas de Frenet.

Dada una curva alabeada, llevemos sobre cada uno de los tres rayos que forman el triedro principal un vector de módulo 1, y obtenemos tres vectores principales:

Vector tangente: T; vector normal: N; vector binormal: B. La perpendicularidad está expresada así:

[2] $$N \,.\, B = 0 \qquad B \,.\, T = 0 \qquad T \,.\, N = 0$$

[3] $$T = N \times B \qquad N = B \times T \qquad B = T \times N$$

Veamos el significado de las derivadas T', N', B' respecto de s.

Por definición de curvatura de flexión, ésta es $c_1 = |T'|$ y el recíproco es el radio de flexión r_1.

Por definición de curvatura de torsión, ésta es $c_2 = |B'|$ y el recíproco es el radio de torsión r_2.

Como la dirección de T' tangente a la indicatriz de flexión es la de N, y lo mismo la de B', tangente a la indicatriz de torsión, resultan las dos primeras fórmulas de Frenet:

$$\text{I)} \quad T' = c_1 . N \qquad \text{II)} \quad B' = c_2 . N$$

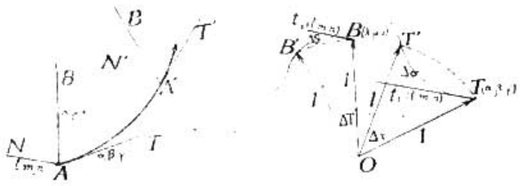
Falta N', que se deduce derivando $B \times T$, y resulta:

$$N' = B \times T' + B' \times T = c_1 . B \times N + c_2 . N \times T$$

y utilizando [3] resulta la tercera fórmula de Frenet, que completa las I) y II):

$$\text{III)} \quad N' = -c_1 . T - c_2 . B.$$

como B y T son perpendiculares resulta $|N'|^2 = c_1{}^2 + c_2{}^2$.



Aplicación al cálculo de la aceleración.

Puesto que la derivada de T respecto de s es $c_1 . N$, según la fórmula primera de Frenet, su derivada respecto de t será $c_1 . N$ por la derivada de s respecto de t, es decir, por v; y sustituida en la fórmula [1'] obtenida para la aceleración, resulta esta otra, mucho más expresiva:

[4] $$A = v' . T + v^2 . N . c_1$$

La aceleración se compone, pues, de dos partes: una dirigida según la tangente tiene el módulo v' que es la *aceleración lineal;* la otra dirigida según la normal tiene el módulo $v^2 . c_1 = v^2 : r_1$ y se llama *aceleración normal.*

Si el movimiento es uniforme, $v' = 0$, y la aceleración está dirigida según la normal. Si el movimiento es rectilíneo, es $c_1 = 0$ y la aceleración tiene la misma dirección del movimiento.

NOTA SOBRE LA GEOMETRIA VECTORIAL DE SUPERFICIES

Expresión vectorial y recta normal. — Por analogía con las curvas, el punto P de la superficie definida paramétricamente (235) y el vector OP, que también designamos por P vienen expresados como función de u, v, es decir, $P(u, v)$; el vector de origen P cuyas componentes son las derivadas de x, y, z respecto de u lo designamos por P_u, y análogamente P_v.

Los coeficientes del plano tangente (236) son las componentes del producto vectorial $P_n = P_u \times P_v$, el cual es, por tanto, normal a la superficie. Si el punto es *ordinario*, es decir, no se anulan las tres componentes, es $P_n \neq 0$; y este vector es nulo o no está definido, si el punto es singular.

Superficies regladas. — Dada la curva directriz $P = P(s)$, si sobre ella se apoya la recta generatriz paralela al versor $Q(s)$, cada punto X de la generatriz (o el vector correspondiente de origen O) viene expresado mediante los parámetros s, t, así:

$$X = P(s) + t \cdot Q(s); \quad (|P'(s)| = 1, \ |Q(s)| = 1)$$

y el vector normal en cada punto ordinario:

$$X_n = X_s \times X_t = (P' + t\,Q') \times Q \neq 0$$

Este vector $P' \times Q + t \cdot Q' \times Q$, tiene dirección fija para cada s, independiente de t, si $Q' \times Q$, y $P' \times Q$ tiene igual dirección, es decir, si P', Q, Q' son coplanarios, o sea: si cada uno es *combinación lineal* de los otros. Esta es, pues, la condición necesaria y suficiente para que la superficie sea desarrollable.

Con las notaciones (239) si se elige la directriz en el plano xy las componentes de P son $(a, b, 1)$ y las de Q son $(p, q, 1)$; luego es $P'(a', b'\,0)$, $Q'(p', q', 0)$ y la condición de dependencia lineal, o de ser coplanarios P', Q, Q' es la anulación del determinante, que da la misma condición ya obtenida en (240), o sea: $p'\,b' = q'\,a'$.

El desarrollo sistemático de la teoría puede estudiarse en la Geometría diferencial de Bieberbach.

EJERCICIOS

1. — Demostrar, mediante la fórmula [4] de la aceleración, que los únicos movimientos uniformes en sentido estricto, esto es, sin aceleración, son los rectilíneos de velocidad constante.

2. — Expresar la intensidad y dirección de la aceleración del movimiento circular de aceleración angular constante, y su variación al tender ésta a 0.

3. — Escribir las ecuaciones vectoriales de las superficies elementales: plano, esfera, y más en general, de todas las superficies de revolución.

CÁLCULO TENSORIAL

248. — Campos tensoriales. Velocidad y gradiente.

Los tensores que hemos estudiado en los capítulos anteriores, tienen componentes constantes y se presentan al considerar propiedades de un solo punto (tensión, momento de inercia, etc.); pero claro es que al variar ese punto las componentes varían en función de sus coordenadas y resulta un tensor función del punto, o brevemente un *campo tensorial;* en particular se llama *campo vectorial,* o *campo escalar* en los dos casos más sencillos.

EJEMPLOS. — La temperatura y la presión de un flúido en cada punto son ejemplos de campos escalares.

El campo gravitacional de centro O es vectorial; en cambio, los vectores funciones de una variable t, estudiados en Lección 59, no forman campo vectorial.

Notación. — Desde ahora designaremos las coordenadas ortogonales con índices superiores: x^1, x^2, x^3; y las fórmulas de rotación de ejes se escribirán así:

$$x'^1 = \alpha^1{}_1\, x^1 + \alpha^1{}_2\, x^2 + \alpha^1{}_3\, x^3 \qquad x^1 = \beta^1{}_1\, x'^1 + \beta^1{}_2\, x'^2 + \beta^1{}_3\, x'^3$$

$$x'^2 = \ldots\ldots \qquad\qquad x^2 = \ldots\ldots$$

$$x'^3 = \ldots\ldots \qquad\qquad x^3 = \ldots\ldots$$

Pronto veremos la utilidad de usar índices superiores para las coordenadas; en cuanto a los coeficientes, designamos como hasta aquí por $\alpha_k{}^h$ el coseno del ángulo que forma el nuevo eje x'^h con el x^h; mientras que designaremos por $\beta_h{}^k$ el coseno del ángulo que forma el primitivo eje x^k con el nuevo x'^h. Ambos cosenos son, por consiguiente, iguales; y la matriz (α) se deduce de la (β) por simetría respecto de la diagonal principal, es decir, ambas son *conjugadas.*

Obsérvese que ni la matriz (α) ni la (β) son simétricas, pues el ángulo *que forman, p. ej., x'_1 con x_2 es independiente del que forma x_1 con x'_2.* Escríbanse ambas matrices para el plano, y se verá su asimetría.

Velocidad y gradiente. — He aquí dos ejemplos importantes de campo vectorial:

1.º) Si un sólido se mueve, las coordenadas de cada punto son funciones de t; y como los coeficientes de la fórmula de rotación de ejes son constantes, se pueden derivar éstas, término a término, y por tanto las componentes v^i y v'^i de la velocidad satisfacen a la misma ley lineal [1] adoptada en Lección 45 como definición de vector:

$$v'^1 = \alpha^i{}_1 v^1 + \alpha_2{}^i v^2 + \alpha^i{}_3 v^3 \qquad [1]$$

2.º) El gradiente de un campo escalar $u(x^1, x^2, x^3)$ tiene como componentes las derivadas u_1, u_2, u_3; y al cambiar de ejes, resulta por la regla de la derivación compuesta:

$$u_i' = u_1 \beta^1{}_i + u_2 \beta^2{}_i + u_3 \beta^3{}_i \qquad [2]$$

Encontramos aquí una novedad respecto de las fórmulas de transformación de las componentes de la velocidad; mientras aquéllas se transforman por la matriz (α), las componentes del gradiente se transforman mediante la matriz (β) conjugada de la (β). Es claro que en coordenadas cartesianas rectangulares tal diferencia es sólo aparente, puesto que tal matriz conjugada de la (β) es precisamente la (α); y por tanto, las derivadas parciales componentes del gradiente se transforma como las coordenadas, por la matriz (α); pero basta pasar a coordenadas oblícuas para notar la diferencia esencial entre ambas matrices.

NOTA. — Para la Mecánica racional clásica son suficientes las coordenadas rectangulares; pero en la relativista son indispensables las coordenadas curvilíneas, distinguiendo: *coordenadas contravariantes* son las que se transforman según la matriz (α), como las coordenadas y las velocidades; *coordenadas covariantes* las que se transforman por la matriz (β), como en el ejemplo del gradiente.

249. — Derivación de vectores y tensores.

Derivación de vectores. Puesto que la derivada de un campo escalar es un campo vectorial (brevemente suele decirse que la derivada de un escalar es un vector), parece natural definir como derivada de un vector al cuadro o matriz cuyas nueve componentes sean las derivadas $a^r{}_\kappa$ de las tres componentes a^r del vector. Esta matriz tiene caracter tensorial, es decir, define una díada, *suponiendo coordenadas cartesianas ortogonales* (*).

Para demostrarlo, derivemos respecto de x'_j la fórmula de transformación:

$$a'^i = \Sigma\, \alpha^i{}_r\, a^r \qquad (r = 1, 2, 3) \qquad [3]$$

Calculando la derivada de cada a^r respecto de x'_j como suma de derivadas parciales respecto de cada x^s por la derivada de ésta respecto de x'_j, resulta:

$$a'^i{}_j = \Sigma\, \alpha^i{}_r (\Sigma\, a_s{}^r \beta_j{}^s) = \Sigma\, a_s{}^r \alpha_r{}^i \beta_j{}^s \qquad (r, s = 1, 2, 3) \qquad [4]$$

y como en la hipótesis de coordenadas ortogonales los coeficientes β son conjugados de los α, resulta la relación:

$$a'_j{}^i = \Sigma\, a_s{}^r \alpha^i{}_r\, \alpha^j{}_s \qquad [5]$$

(*) No acontece lo mismo en coordenadas oblícuas o curvilíneas; para lograrlo es preciso introducir términos complementarios, formando así la *derivada covariante* y la *contravariante*.

que a pesar de su distinto aspecto equivale a la fórmula [5] (Lecc. 45) en la hipótesis de coordenadas ortogonales, en la cual es indiferente la colocación superior o inferior de cada índice; llegando así a este resultado:

Si las coordenadas son cartesianas ortogonales, las derivadas de las componentes de un vector forman un tensor doble, llamado derivada del vector.

Condiciones necesarias y suficientes para que un campo vectorial sea constante, es la anulación de su tensor derivado. Pues la anulación del tensor derivado equivale a la anulación de todas las derivadas de las tres componentes.

Derivada de un gradiente. — Si el vector A es el gradiente del escalar u, las componentes son las derivadas parciales de u, que designaremos así: $a^1 = u_1$, $a^2 = u_2$, $a^3 = u_3$.

En tal hipótesis, suponiendo continuas las derivadas segundas, son iguales las derivadas cruzadas:

$$a^h{}_K = a^k{}_h = u_{hk} \qquad [6]$$

es decir: *el tensor derivado de un gradiente es simétrico.*

Generalización. — Las 27 derivadas de las 9 componentes de una díada forman una matriz cúbica; y repitiendo el cálculo anterior, con ligeras variantes, se ve que esta matriz obedece a la ley lineal de transformación y representa por tanto un tensor triple o tríada, siempre con la hipótesis de coordenadas cartesianas rectangulares.

Fácil ejercicio es la repetición de la demostración anterior para cualquier número de índices, y resulta:

En coordenadas cartesianas rectangulares, las derivadas parciales de un tensor de rango r forman otro tensor de rango r + 1, llamado derivado de aquél.

Divergencia y rotor. — Estos conceptos, fundamentales en el cálculo vectorial clásico, aparecen de modo muy natural y con mayor alcance en este cálculo generalizado.

Divergencia del campo vectorial $A(a^1, a^2, a^3)$ es el número suma de las derivadas principales de las tres componentes, esto es:

$$\text{Div. } A = a_1{}^1 + a_2{}^2 + a_3{}^3 \qquad [6]$$

Tal número es invariante por ser el escalar dado por la contracción del tensor derivado. Si las coordenadas son oblícuas o curvilíneas, no subsiste esta propiedad invariante.

Las importantes aplicaciones de la divergencia se desarrollan en Cap. XI; pero es preciso dejar sentado que la divergencia es un número independiente de los ejes, como acabamos de probar.

Dado un tensor doble (a^{ij}) de componentes variables, se define de dos modos el *vector divergencia*. Las componentes d_1, d_2, d_3 de éste son las sumas de derivadas:

$$d_i = \Sigma\, a_i{}^{ir} \qquad (r = 1, 2, 3)$$

es decir: las tres componentes del vector divergencia son las sumas de las derivadas que forman cada fila del tensor respecto de la variable de igual índice, esto es, la 1.ª componente es la suma de derivadas de la 1.ª fila respecto de x^1, y análogamente las otras.

Derivando por columnas resulta análogamente otro vector divergencia del mismo tensor A. Por tanto, si éste es simétrico, sus dos divergencias coinciden.

Omitimos la demostración del carácter tensorial de la divergencia que el lector pueda hacer como ejercicio, y nos limitamos a mencionar estas importantes aplicaciones:

1.ª *La divergencia del tensor de esfuerzos es igual a la fuerza unitaria en cada punto.*

2.ª Si sobre cada punto de un medio continuo deformable, de densidad constante o variable ρ, actúa la fuerza unitaria F, y son (a_{ij}) las componentes de la tensión T, funciones del punto, las tres ecuaciones clásicas de equilibrio quedan resumidas en esta sola: Div. $T = -F$.

3.ª Si el medio continuo está en movimiento, y es V la velocidad de cada punto, las tres ecuaciones del movimiento están condensadas en esta: Div. $T = (V' - F)$, siendo V' el vector derivado respecto del tiempo t.

Esta ecuación es fundamental en Elastodinámica, como la anterior lo es en Elastostática. Para mayores ampliaciones de las nociones aquí expuestas, puede consultarse nuestra *Introducción al Cálculo tensorial.*

Rotor. — Se define en el cálculo vectorial clásico el rotor de un campo vectorial $A(a^1, a^2, a^3)$ adoptando como componentes las diferencias de derivadas cruzadas:

$$(a^2{}_3 - a^3{}_2 \quad , \quad a^3{}_1 - a'_3 \quad , \quad a'_2 - a^2{}_1)$$

Estas componentes forman un semitensor, pues son las componentes situadas a un lado de la diagonal en el tensor deducido del tensor derivado por la operación de restarle su conjugado, como se vió en la Lección 45.

CÁLCULO TENSORIAL EN COORDENADAS CURVILÍNEAS. — Cualesquiera que sean los parámetros o coordenadas que determinen cada punto, si las fórmulas de transformación son:

$$x'^i = \alpha^i\ (x^1, x^2, x^3) \qquad x^r = \beta^r\ (x'^1, x'^2, x'^3)$$

y designamos por $\alpha_j{}^i$ la derivada de α^i respecto de x^j, subsisten las fórmulas [1] y [2] y todas las siguientes. Se comprende así la ventaja de la notación adoptada para los cosenos directores, que figuran como coeficientes constantes de las fórmulas de transformación, los cuales son ahora las derivadas de las nuevas coordenadas respecto de las antiguas, o viceversa.

Obsérvese cuán fácilmente se opera con los índices superiores e inferiores, como si formaran fracciones, y nótese que las fórmulas [3] y [4], mucho más generales que la [5], so nmucho más cómodas que ella.

Los ya numerosos tratadistas suelen comenzar por este caso general, pero creemos preferible el método inverso, aquí esbozado, cuyo desarrollo puede estudiarse en nuestra ya citada *Introducción.*

CAPITULO XI

INTEGRACION DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

LECCIÓN 61

INTEGRALES DOBLES

250. — Area de un recinto.

Un método usado frecuentemente en dibujo para calcular el área de un recinto, cuyo contorno está dibujado en papel milimetrado, consiste en contar el número s_1 de centímetros cuadrados contenidos completamente en el recinto; si agregamos el número δ_1 de centímetros que atraviesa el contorno, la suma $S_1 = s_1 + \delta_1$ expresa el área de un polígono que contiene en su interior al recinto dado. El área buscada está comprendida entre s_1 y S_1, siendo el error de cualquiera de estas sumas menor que δ_1.

Si ahora contamos el número de mm² de la cuadrícula contenidos en el recinto y expresado en la misma unidad anterior, o sea en cm², resulta un área s_2, y si hacemos lo mismo con los mm² que atraviesa la curva, resulta un nuevo polígono de área $S_2 = s_2 + \delta_2$ contenido en el anterior. Obtenemos, pues, dos valores s_2, S_2, que expresan el área del recinto, con error menor que δ_2.

Teóricamente puede proseguirse indefinidamente y resultan las sumas:

$$s_1 \leqq s_2 \leqq \ldots \leqq S_2 \leqq S_1$$

fácil es ver que estas sumas convergen, es decir, el error δ_i llega a ser tan pequeño como se quiera. Bastará probar para esto: el área δ de las mallas atravesadas por un arco de curva creciente (o decreciente) tiende hacia cero al tomar las dimensiones de las mallas suficientemente pequeñas sean iguales o desiguales y esto ya se ha visto (130), cuando el contorno está formado por dos arcos uniformes.

El área buscada viene, pues, expresada como límite de las sumas $\Sigma\, dx . dy$, cuando estos intervalos parciales dx, dy tienden simultáneamente hacia cero. Este límite común de las sumas por defecto y por exceso se representa así:

$$\int \int_R dx\, dy = \text{lím. } \Sigma\, dx\, dy$$

y puesto que expresa el área ,su valor coincide con la expresión

$$\int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} dy = \int_a^b (y_2 - y_1)\, dx$$

es decir, esta integral doble se puede calcular integrando primero respecto de y, después respecto de x, como se ha hecho antes de ahora.

251. — Integrales de recinto plano.

El volumen de un cilindroide (135), es decir, del cuerpo limitado por la superficie $z = f(x, y)$, el plano xy y el cilindro cuya base es el recinto R en el plano xy, habría podido calcularse también como límite de suma de prismas. Dividido el recinto base por una cuadrícula de paralelas a los ejes, el área de cada rectángulo es $dx.dy$; y multiplicada por la ordenada máxima M_i de la superficie en dicho rectángulo, o por la ordenada mínima m_i, tenemos los volúmenes $M_i\, dx.dy$, $m_i\, dx.dy$, entre los cuales está comprendido el del prisma de igual base limitado por la superficie; el volumen buscado es, pues, el límite de las sumas:

$$s = \Sigma\, m_i . dx . dy \qquad S = \Sigma\, M_i . dx . dy \qquad [1]$$

cuando las dimensiones de la cuadrícula tienden hacia cero (véase la nota).

El procedimiento es aplicable a cualquier función continua $z = f(x, y)$ cualquiera que sea su significado físico; si representa la densidad en cada punto, las sumas [1] representan valores extremos que comprenden a la masa del recinto, y ésta es el límite de aquellas sumas; si $f(x, y)$ es la distancia a un punto, eje o plano, resulta el momento del recinto respecto de ese punto, eje o plano, etc.

Más general: si en vez de los valores mínimo y máximo de la función en cada intervalo $dx.dy$ elegimos un valor cualquiera de la función en el mismo, es decir, $f(\xi, \eta)$ siendo ξ, η un punto cualquiera del rectángulo $dx.dy$, la

$$\Sigma\, f(\xi, \eta)\, dx.dy$$

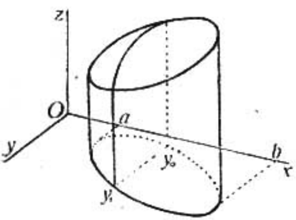
está comprendida entre las sumas s y S; y como ambas tienen el mismo límite, también esta suma intermedia tiende al mismo. Este límite de todas las sumas así formadas ,se llama *integral de superficie*, o mejor: *de recinto plano* y se designa así:

$$\int f(x, y)\,d\sigma = \int_R \int f(x, y)\,dx\,.\,dy = \text{lím.} \sum_R f(\xi, \eta)\,dx\,.\,dy \qquad [2]$$

extendida esta suma a todos los rectángulos de la cuadrícula que contienen puntos del recinto dado R. La notación $d\sigma = dx\,.\,dy$ para el elemento de área, se generaliza también para mallas de forma cualquiera.

DEFINICIÓN: *La integral de $f(x, y)$ en un recinto es el límite de la suma obtenida multiplicando el área de cada rectángulo $dx\,.\,dy$ que contiene puntos del recinto por el valor de la función en un punto cualquiera del mismo, al tender a cero simultáneamente las dimensiones de todos los rectángulos.*

Se demuestra (***Elem. T. F.***) que esta suma tiene el mismo límite cualquiera que sea el modo de tender a cero dx y dy. En particular, si se toma constante dx y se integra respecto de y, o bien inversamente, resultan dos modos de evaluar la integral doble reduciéndola a integrales simples, como vamos a explicar.



Primer método: $\int [\int f(x, y)\,dy]\,dx$

Segundo método: $\int [\int f(x, y)\,dx]\,dy$

variando x e y dentro del recinto R, como explicaremos prácticamente en la lección siguiente.

Si el recinto es el rectángulo:

$$a < x < a' \quad , \quad b < y < b'$$

los límites de ambas integrales son constantes: a y a' para la x, b y b' para la y.

Si el recinto tiene contorno cualquiera, pero cada paralela al eje y lo corta en dos puntos solamente, las ordenadas y_0 e y_1 de estos dos puntos son los extremos de la primera integral simple; estos dos extremos son, pues, funciones de x; los extremos de la segunda integral son los valores c y d mínimo y máximo de la x en el recinto. En el párrafo siguiente y en la lección próxima ponemos ejemplos

252. — Volumen de un cilindroide.

En la lección 33 hemos calculado el volumen de los cilindroides, esto es, de los cuerpos limitados por una superficie $z = f(x, y)$, el plano xy, y el cilindro cuya base es un recinto dado en este plano, mediante la descomposición por planos paralelos al yz; el área de cada sección, a la distancia x, viene expresada por la

$$\int_{y_0(x)}^{y_1(x)} f(x, y)\, dy$$

debiendo limitarse entre los dos valores de y que corresponden al valor de x prefijado, los cuales se deducirán de la ecuación $\varphi(x, y) = 0$ de la curva que sirve de base a la superficie y son, por tanto, funciones de x. El producto de esta área por dx representa el volumen del cilindro elemental que tiene esta base y esta altura y el límite de la suma es la integral

$$V = \int_a^b \left[\int_{y_0(x)}^{y_1(x)} f(x, y)\, dy \right] dx = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{y_1(x)} f(x, y)\, dy$$

debiendo interpretarse esta última notación como integral del producto de la segunda integral por dx, a pesar de omitirse el paréntesis.

Los valores a, b son, como allí se indicó, las abscisas extremas de los puntos de la curva base.

Análogamente habríamos podido integrar primero respecto de x suponiendo y fija, y limitando la integral entre los dos valores x_1, x_2 que corresponden a cada y, los cuales son funciones de y; la integral así definida es, pues, función de y, e integrada respecto de y entre los valores extremos c y d que esta coordenada pueda tomar en la curva base, resulta una segunda expresión para el volumen:

$$V = \int_c^d \left[\int_{x_0(y)}^{x_1(y)} f(x, y)\, dx \right] dy = \int_c^d dy \int_{x_0(y)}^{x_1(y)} f(x, y)\, dx.$$

Si cada paralela a un eje determina en el recinto varios segmentos, la integral se compone de suma de integrales.

En general: cualquiera que sea el significado de la integral doble resulta esta conclusión que enunciaremos esquemáticamente:

Para calcular el valor de la integral doble de una función $f(x, y)$ sobre un recinto plano, se integra esta función respecto de una variable, conservando constante la otra, y después se integra respecto de esta segunda variable.

EJEMPLO. — Calculemos el volumen del cuerpo limitado por el plano xy, el paraboloide

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$

y el cilindro

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Este volumen será:

$$V = \int\int (x^2/2p + y^2/2q)\, dx.dy$$

que se descompone en suma de dos integrales sobre la elipse base.

Para calcular la primera, integraremos primero respecto de y entre las ordenadas y_1 e y_2 que corresponden a cada x, y resulta:

$$\int_{-a}^{+a} x^2\, dx \int_{y_1}^{y_2} dy$$

o sea, separando el factor $2b/a$:

$$\int_{-a}^{+a} x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 2\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

Poniendo $x = a \operatorname{sen} t$, se reduce esta integral simple a

$$a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t\, dt = \tfrac{1}{4} a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} 2t)^2\, dt$$

y pasando al arco doble, resulta:

$$\tfrac{1}{8} a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t)\, dt = \pi a^4/16$$

luego la integral doble vale $\frac{1}{4}\pi a^3 b$, y la otra $\frac{1}{4}\pi a b^3$; por consiguiente

$$V = \tfrac{1}{8}\pi ab\,(a^2/p + b^2/q)$$

En particular, si los parámetros del paraboloide son $p = a$, $q = b$, resulta

$$V = \tfrac{1}{8}\pi\, ab\,(a + b) = \text{base}\ \tfrac{1}{8}(a + b)$$

Si el cilindro fuese el proyectante de la sección plana $z = h$, es decir: $a^2 = 2ph$, $b^2 = 2qh$, resultaría

$$V = \tfrac{1}{2}\pi abh = \tfrac{1}{2}\ \text{base} \times \text{altura}$$

resultado acorde con el ejercicio 3.º, puesto que la curva intersección es plana.

NOTA. — Algunas observaciones son necesarias para el cálculo práctico.

1.º Si la curva $\varphi(x, y) = 0$ que sirve de base al cilindroide no es convexa y es cortada por cada paralela al eje y en más de dos puntos y son $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$ las ordenadas de éstos, contadas de menor a mayor, los segmentos interiores al área base son $y_1 y_2$ e $y_3 y_4$; entonces la integral que expresa el área de la sección vertical se compone de

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy + \int_{y_3}^{y_4} f(x, y)\, dy$$

y análogamente si fuesen más de dos los segmentos.

2.° Si un cuerpo está limitado por una superficie cerrada, tal que a cada valor de x, y corresponden dos valores de z, la superficie no está definida por una, sino por dos funciones uniformes:

$$z_1 = f_1(x, y) \quad , \quad z_2 = f_2(x, y)$$

suponiendo que esta segunda representa el casquete superior, el volumen viene expresado por la fórmula:

$$V = \int dx \int [f_2(x, y) - f_1(x, y)]\, dy$$

En particular, si la superficie es simétrica respecto del plano xy, es decir, si f_2 y f_1 son iguales y de signos contrarios, basta multiplicar por 2, pues las dos integrales son iguales de signo opuesto y al restar se duplica. Bastará, pues, calcular una y tal sucede, por ejemplo, en el caso del elipsoide, que fué resuelto en (135).

253. — Area de una superficie curva.

Parece a primera vista admisible una definición análoga a la dada para la longitud de un arco como límite de los perímetros de las quebradas inscritas, al tender hacia cero todos los lados. Ocurre inmediatamente inscribir en la superficie dada poliedros de caras triangulares y hacerlas tender hacia cero mediante intercalación de nuevos vértices.

Sin embargo ,es fácil ver que pueden resultar límites distintos según como se hagan tender a cero las caras del poliedro (*). Habría que poner tales restricciones a la elección de poliedro inserito. que se complicaría mucho la definición. Recordemos, por otra parte, que la longitud de un arco de curva, resulta también como límite de la suma de diferenciales ds, es decir, como suma de los trozos de tangente limitadas por las ordenadas sucesivas. Una definición análoga es válida para las superficies.

Dividido el plano xy por una cuadrícula de lados paralelos a los ejes, cada rectángulo $dx.dy$ determina sobre la superficie un cuadrilátero curvilíneo cuya proyección es $dx.dy$, y tomando el plano tangente en cualquiera de los puntos de ese trozo de superficie, determina con el mismo prisma proyectante de base $dx.dy$, un cuadrilátero plano cuya área es: $dx.dy : \cos(n, z)$, siendo $\cos(n, z)$ el tercer coseno director de la normal, que es igual al coseno del ángulo que forma el plano tangente con el xy, debiendo tomarse el ángulo agudo, es decir, el coseno positivo, pues todas las áreas lo son.

(*) Hay un ejemplo clásico de Schwarz que puede verse en cualquier tratado. Si un cilindro circular de radio 1 y altura h se corta por planos paralelos y en cada circunferencia se inscribe un polígono regular de m lados, de modo que se correspondan alternativamente, es decir, los vértices de cada polígono correspondan a los puntos medios de los lados de los polígonos contiguos y se une cada vértice con los extremos de estos lados correspondientes de los polígonos contiguos, el área del poliedro tiene límite variable según el modo de tender a 0 sus caras.

El límite de la suma de todos los cuadriláteros así formados es, por definición, el área de la superficie y viene, por tanto, expresada por la integral doble:

$$S = \int \int dx \, . \, dy / \cos nz \qquad [4]$$

La ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (a, b, c) es:

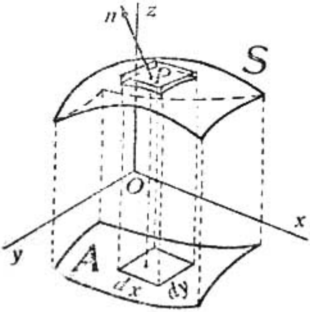
$$z - c = z'_x(x - a) + z'_y(y - b).$$

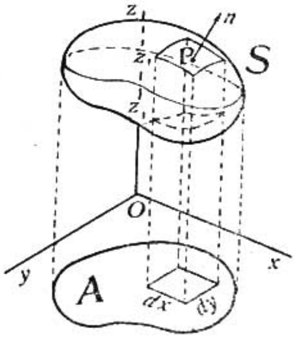
y los cosenos se calculan así:

$$\frac{z'_x}{\cos nx} = \frac{z'_y}{\cos ny} = \frac{-1}{\cos nz} = \frac{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}{1}$$

de donde resulta, aplicando la fórmula [4]:

$$S = \int \int \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} \, dx \, dy.$$





Si la ecuación viene en forma implícita $F(x, y, z) = 0$ basta despejar: z'_x, z'_y y sustituir en la fórmula anterior. La integral es entonces la suma de dos integrales de las funciones z_1 y z_2, correspondientes al casquete superior y al inferior.

NOTA. — Esta fórmula subsiste si en el plano xy se adoptan coordenadas polares, sustituyendo $dx . dy$ por $r \, dr . d\theta$. En la próxima lección pondremos ejemplos.

EJEMPLO 1.° — Area de la porción del paraboloide

$$y^2 + z^2 = 2px \qquad z = \sqrt{2px - y^2}$$

limitada por el plano $x = a$.

Basta considerar la mitad superior, en la cual es:

$$z'_x = p : z \quad , \quad z'_y = - y : z$$

y resulta fácilmente:

$$S = \pi \sqrt{p} \left[(p + 2a)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}} \right] : 3$$

Esto mismo se obtiene más brevemente por una integral simple, como se explicó en (136) por ser una superficie de revolución. Ponemos este ejemplo porque las cuádricas que no son de revolución conducen a integrales elípticas.

EJEMPLO 2.° — Area del trozo del paraboloide $z = x^2/2a + y^2/2b$ limitado por el cilindro $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Resultado:

$$S = 2\pi ab (\sqrt{8} - 1) : 3$$

EJEMPLO 3.° — El área del elipsoide de semiejes $a > b > c$, después de complicadas transformaciones, viene dada por la fórmula final

$$S/2\pi = c^2 + b \sqrt{a^2 - c^2} \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \; d\varphi +$$

$$c^2 \, b/\sqrt{a^2 - c^2} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

siendo
$$\varphi = \text{arc. sen} \left[\sqrt{a^2 - c^2}/a \right]$$

y k el cociente de las excentricidades de las dos elipses meridianas de los planos xz o yz.

El cálculo de estas integrales se hace mediante las tablas que van al final.

Sea, por ejemplo:

$$a = \sqrt{3}, \; b = \sqrt{2}, \; c = 1, \; k = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\varphi = \text{arc sen} \sqrt{2/3} = 54^\circ \, 45'.$$

Buscaremos, pues, los valores de la integral de primera y segunda especie en la columna $\alpha = 60°$ puesto que sen $60° = \sqrt{3}/2$ y en ella, los valores que da la tabla para $\varphi = 54° \, 45'$ son respectivamente 1,078 y 0,836.

Resulta, por lo tanto:

$$S = 2\pi(1 + 1{,}672 + 1{,}078) = 7{,}50\pi$$

Ejercicio. — Suponiendo el elipsoide de revolución, $a = b$, reducir la fórmula a la expresión más sencilla y deducir ésta directamente.

NOTAS

La demostración de que las sumas [1] tienen límite común se reduce a probar que la diferencia entre ambas o sea:

$$\Sigma \, M_i \, . \, dx \, . \, dy - \Sigma \, m_i \, . \, dx \, . \, dy \; = \Sigma (M_i - \; m_i) \; dx \, . \, dy \qquad [3]$$

puede hacerse tan pequeña como se quiera eligiendo la cuadrícula suficientemente densa.

Supongamos que la base sea un rectángulo. Si suponemos la función *uniformemente continua*, es decir, si dado cualquier número positivo ε se puede elegir la cuadrícula suficientemente densa para que en cada malla la oscilación sea $M_i - m_i < \varepsilon$, resulta:

$$S_i - s_i < \varepsilon \, \Sigma \, dx \, . \, dy = \varepsilon \, . \, A$$

siendo A el área del rectángulo. He aquí, pues, un límite del error cometido cuando se toma s_i o S_i como valor del volumen.

Más general: si en vez de prismoide es un cilindroide cuya base es un recinto R del plano xy, no hay inconveniente en suponer como base todo el rectángulo que lo contiene, asignando a la función el valor cero en los puntos exteriores al recinto. A pesar de la discontinuidad que así se introduce en el contorno, las sumas s_1 y S_1 convergen también. En efecto, la diferencia viene dada por la expresión [3]; esa suma debe extenderse a todo el rectángulo, el cual ha quedado descompuesto en tres partes:

1.° Mallas interiores al recinto R;
2.° Mallas exteriores;
3.° Mallas que contienen al contorno (formado por dos arcos uniformes).

Para las primeras, la expresión [3] puede hacerse tan pequeña como se quiera según arriba se ha visto, por la continuidad de la función del recinto. Las segundas son nulas por ser $m_1 = M_1 = 0$. Las terceras tienen un área δ que puede hacerse (130) menor que cualquier número positivo; y como en ellas es $m_1 = 0$, si llamamos M al máximo absoluto de la función, resulta para estas mallas atravesadas por el contorno:

$$\Sigma\, M_1\, dx \, . dy < M\, \Sigma\, dx \, . dy = M\delta$$

número que también tiende hacia cero. (Para el caso general, v. *T. F.*).

Integrales impropias. — En la lección 37 hemos advertido que las integrales en intervalo infinito no pueden someterse a las mismas transformaciones que las de intervalo finito, sin especiales condiciones de la función integrando. Sin poder desarrollar la teoría general, limitémonos a dar esta regla práctica: todas las transformaciones son legítimas, como en el caso de intervalo finito si el integrando para $x \to \infty$ es infinitésimo de orden exponencial o de orden superior.

Integral de Gauss. — Como aplicación de la permutación de variables, calculemos el valor de la integral llamada de Poisson, de Laplace, o de Gauss:

$$A = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

Para ello efectuemos la siguiente permutación de integraciones:

$$\int_0^\infty e^{-y^2}\, y \, . \, dy \int_0^\infty e^{-x^2 . y^2}\, dx = \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-(x^2+1)y^2}\, y \, . \, dy$$

La integral en x del primer miembro vale A/y; luego el integrando en y es $Ae^{-y^2}dy$; el primer miembro vale, por consiguiente A^2.

La integral en y del 2.° miembro vale $1 : 2(1 + x^2)$, luego el valor del 2.° miembro es $\pi/4$. Resultado:

$$A = \int_0^\infty e^{-x^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

EJERCICIOS

1.° — Calcular el volumen limitado por el paraboloide $p.z = x.y$, el plano xy y los dos planos $x = a$, $y = b$.

Solución: $V = a^2 b^2/4p = \tfrac{1}{4}$. base por altura.

2.° — Volumen limitado por el mismo paraboloide, el plano xy y los pares de planos $x = a$, $x = A$; $y = b$, $y = B$.

Solución: $V = (A^2 - a^2)(B^2 - b^2) : 4p$

De otro modo: producto de la base por el promedio de las cuatro ordenadas en los cuatro vértices.

3.° — Volumen limitado por el paraboloide

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$

y un plano horizontal. Solución: $\tfrac{1}{2}$ base $\times$ altura.

LECCIÓN 62

INTEGRALES MULTIPLES.

254. — Integrales triples.

El concepto de integral múltiple se establece sin dificultad, una vez estudiadas ya las integrales dobles.

La definición de la integral triple de una función $f(x, y, z)$ definida en un recinto R, limitado por una superficie cerrada, es ésta:

$$\int\int\int_R f(x, y, z) dx . dy . dz = \text{lím.} \Sigma f(\xi, \eta, \zeta) dx . dy . dz$$

es decir, análoga a la de las integrales dobles: *es el límite de la suma de los productos obtenidos multiplicando el volumen de cada paralelepípedo elemental por el valor de la función en un punto cualquiera del mismo.*

Que ese límite existe si la función es continua y que es independiente del modo de cuadricular el espacio, es cuestión que puede verse demostrada en cualquier tratado de Análisis matemático, así como también que ese valor es el mismo que se obtiene por integraciones sucesivas, es decir:

$$\int dx \int dy \int f(x, y, z) dz.$$

Esto debe interpretarse así: fijados x e y, es decir, trazada una ordenada paralela al eje z, intercepta en ella un cierto segmento el cuerpo dado, y el límite de la suma parcial correspondiente a la pila de paralelepípedos de base $dx . dy$ viene dado por la integral respecto de z; los límites son las ordenadas extremas de la superficie de contorno correspondientes al par (x, y) es decir, son dos funciones: $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$. (Figura 2.ª de párrafo 253).

Resulta así de la primera integración una función de x, y; integrada respecto de y, los límites y_1 y_2 son los valores extremos que corresponden a la abscisa x, es decir, funciones de x; la última integración entre a y b da el valor numérico de la integral triple.

El significado de la integral triple depende de la función $f(x, y, z)$. Si ésta se reduce a la unidad resulta el volumen del recinto R. Si es la densidad en cada punto, resulta la masa; si $f(x, y, z)$ es la distancia a un plano, la integral triple es el momento respecto de ese plano, etc.

EJEMPLO. — Calculemos $\int\int\int z\,dx.dy.dz$ sobre el octante de esfera de centro 0 y radio R limitado por el triedro de los semiejes positivos.

La reduciremos a tres integrales simples, por ejemplo, en este orden: Integrando respecto de z resulta $\frac{1}{2}z^2$, y limitando entre O y $\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ resulta $\frac{1}{2}(R^2 - x^2 - y^2)$; integrando respecto de y resulta:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} (R^2 - x^2 - y^2)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \left[\sqrt{R^2 - x^2}(R^2 - x^2) - \frac{1}{3}(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{3}\int_0^1 (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

y haciendo el cambio de variable $x = R \operatorname{sen} \varphi$, se transforma esta integral en

$$R^4 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \varphi . d\varphi$$

cuyo valor se obtiene pasando al arco doble y después al cuádruplo; tomando el resultado de la tabla de integrales, resulta $3\pi/16$, luego la integral triple que representa el momento del octante respecto del plano yx, vale $\pi R^4/16$. Más ventajosas son las coordenadas esféricas, como veremos en (260).

255. — Concepto general de integral múltiple.

En la definición de integral doble hemos supuesto, para mayor sencillez, que el recinto D se dividía en una red de rectángulos por paralelas a ambos ejes, pero igualmente puede adoptarse cualquier otra división en mallas de forma arbitraria, con la sóla condición de que su diámetro tienda a cero, entendiendo por *diámetro* de un recinto la máxima de las distancias entre cada par de sus puntos. La demostración de la existencia del límite de las sumas s y S por defecto y por exceso subsiste, y también la independencia del límite respecto del sistema de mallas adoptado.

Es preferible, por tanto, la notación más general:

$$\int f(x, y)\,d\sigma \quad \text{y análogamente} \quad \int f(x, y, z)\,d\tau$$

representado por $d\sigma$ el elemento de área y por $d\tau$ el elemento de volumen, siendo por definición

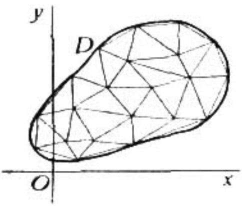
$$\int f(x, y)\,d\sigma = \text{lím.}\, \Sigma\, f(x, y)\,d\sigma$$

y análogamente para tres dimensiones.

Esta notación vale para toda clase de coordenadas planas mientras que la notación (250) vale solamente para cartesianas.

Más general es la notación $\int f(P)\,d\sigma$, designando por P un punto variable en un recinto de cualquier número de dimensiones, y $d\sigma$ un elemento del mismo.

La notación de Leibniz, que hasta aquí hemos seguido, y que tan ventajosa resulta en las integrales simples, puede inducir a transformaciones erróneas de las integrales múltiples al cambiar de variables.



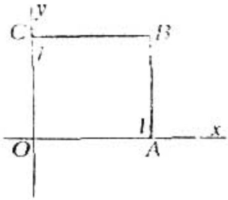
EJEMPLO. — Sea $x = u + v$, $y = u - v$. Si llevados de la analogía sustituimos

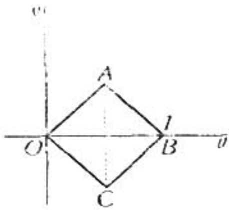
$$dx = du + dv \quad , \quad dy = du - dv \quad ,$$

$$dx \cdot dy = du^2 - dv^2$$

resultará una expresión sin sentido.

Obsérvese en la figura que el cuadrado de lado 1 en el plano xy se transforma en el cuadrado de lado 1 en el plano uv, con sentido opuesto. En el próximo párrafo veremos el significado de esto y explicaremos cómo se efectúa el cambio de variables.





PROPIEDADES. — Puesto que la integral múltiple, como la simple, está definida por dos sucesiones monótonas convergentes, las demostraciones dadas en (130) son aplicables para demostrar:

a) *Si $f(P)$ es suma de varias funciones del mismo punto, la integral de $f(P)$ es la suma de las integrales de éstas, sobre el mismo dominio.*

b) *Si la función se multiplica por un número, su integral queda también multiplicada por él.*

Es, por tanto, legítimo, sacar fuera del signo todo coeficiente constante o independiente de P; pero no se puede efectuar tal operación, si el factor depende de P.

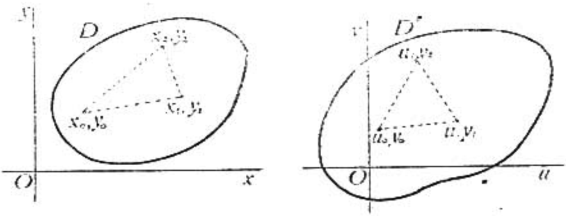
c) *Si $f(P) < g(P)$ la integral de la 1.ª es $\leqq$ que la integral de la 2.ª sobre el mismo recinto. Si son continuas, queda excluído el caso de igualdad.*

d) *Si $f(P)$ es continua en el dominio D, de área α, su integral es igual al producto de α por un valor de $f(P)$ intermedio entre el mínimo y el máximo.*

256. — Cambio de variables en las integrales múltiples. Si entre los planos cartesianos (u, v) y (x, y) se establece una correspondencia punto a punto por las fórmulas

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad [1]$$

cada recinto se transforma en otro, y vamos a obtener la relación entre sus áreas.



El área del recinto D puede obtenerse como límite de la suma de triángulos cuyos lados tienden a cero; y el área de D' como límite de la suma de las áreas de los triángulos formados por los puntos homólogos. (Sin querer decir con esto que los lados de uno se transformen en los del otro por las fórmulas [1]).

Suponiendo *continuas* las derivadas de x, y (y por tanto su jacobiano) vamos a demostrar que la razón de áreas de los recintos homólogos es ésta:

$$[2] \qquad \Delta\sigma = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Delta\sigma'$$

o brevemente: $\Delta\sigma = J . \Delta\sigma'$, llamando J al jacobiano, y debiendo tomarse el valor de este jacobiano en un cierto punto interior. Al tender a 0 los recintos resulta: *el jacobiano en cada punto es el coeficiente de dilatación areolar en ese punto.*

El área del recinto D puede calcularse como límite de la suma de triángulos contenidas en él, y viene expresada así:

$$[3] \qquad S = \int \int dx \,.\, dy = \int \int \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du \,.\, dv$$

o brevemente:

$$\int d\sigma = \int J \,.\, d\sigma'$$

fórmula completamente análoga a la de las integrales simples.

Si en vez del área se tiene una integral doble cualquiera:

$$\int f(x, y)\, d\sigma = \lim \Sigma f(x, y)\, \Delta\sigma$$

y se efectúa la sustitución de variables resulta la fórmula general:

$$[4] \qquad \int_D f(x, y)\, d\sigma = \int_{D'} f(x, y)\, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, d\sigma'$$

que expresa la integral en el dominio D mediante otra integral sobre el dominio homólogo D'.

Análoga fórmula es aplicable a todas las integrales múltiples.

EJEMPLO. — Sea el momento polar de inercia del dominio D expresado en coordenadas cartesianas y en polares por las integrales:

$$\int \int (x^2 + y^2)\, dx\, dy \qquad \int \int r^2 . r . dr . dw$$

esta 2.ª fórmula se puede establecer directamente, o bien deducirla de la 1.ª por cambio de variables, introduciendo como factor el jacobiano, que se calcula así:

$$\begin{array}{l} x = r \cos w \\ y = r \operatorname{sen} w \end{array} \qquad \begin{vmatrix} \cos w & -r \operatorname{sen} w \\ \operatorname{sen} w & r \cos w \end{vmatrix} = r$$

En el ejemplo de (255) el jacobiano vale -2, indicando el signo que los elementos de área homólogos tienen sentidos opuestos; como se observa en la figura comparando los sentidos de los contornos homólogos.

DEMOSTRACIÓN. — Las áreas de los triángulos homólogos son respectivamente:

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}; \qquad \frac{1}{2} \begin{vmatrix} u_1 - u_0 & v_1 - v_0 \\ u_2 - u_0 & v_2 - v_0 \end{vmatrix}$$

o brevemente

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \Delta_1 x & \Delta_1 y \\ \Delta_2 x & \Delta_2 y \end{vmatrix} \qquad \Delta\sigma' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \Delta_1 u & \Delta_1 v \\ \Delta_2 u & \Delta_2 v \end{vmatrix}$$

pero la fórmula del incremento finito permite escribir el primer determinante así:

$$\begin{vmatrix} x'u\, \Delta_1 u + x'v\, \Delta_1 v & y'u\, \Delta_1 u + y'v\, \Delta_1 v \\ x'u\, \Delta_2 u + x'v\, \Delta_2 v & y'u\, \Delta_2 u + y'v\, \Delta_2 v \end{vmatrix}.$$

Como cada derivada debe tomarse en un punto intermedio distinto, conviene unificarlas, tomando todas en un mismo punto (u, v) del triángulo; y si las derivadas son uniformemente continuas, se logrará, tomando los lados de todos los triángulos menores que un número l suficientemente pequeño, que las derivadas que figuran en este determinante difieran de sus valos en el punto (u, v) menos de ε; luego cada elemento del determinante tiene un error menor que $2\varepsilon l$, y el error del determinante tiene una cota del tipo $kl^2\varepsilon$; luego si designamos por $x'_u, \ldots,$ las derivadas en ese punto u, v del triángulo, la fórmula anterior expresa $\Delta\sigma$ con error $< kl^2\varepsilon$.

Este determinante se puede descomponer en producto (*) así:

$$\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Delta_1 u & \Delta_1 v \\ \Delta_2 u & \Delta_2 v \end{vmatrix}$$

el primer factor es el jacobiano J del par (x, y) respecto del par (u, v), luego $|\Delta\sigma - J \cdot \Delta\sigma'| < kl^2\varepsilon$; y suponiendo que los triángulos de D' se eligen partiendo por su diagonal los cuadrados del reticulado cartesiano, es $\Delta\sigma' = \frac{1}{2} l^2$; por tanto, dividiendo por $\Delta\sigma'$ la acotación anterior, resulta $\Delta\sigma/\Delta\sigma' \rightarrow J$, para $l \rightarrow 0$.

Además: $\Sigma\Delta\sigma$ y $\Sigma J \cdot \Delta\sigma'$ difieren en menos de $k\varepsilon\Sigma l^2 \leq k\varepsilon$. área de D'; luego tienen el mismo límite, quedando demostrada [3], y por el teorema del valor medio (255, d) resulta [2].

Esta fórmula [2] es completamente análoga a la ya conocida del cambio de variable en la recta:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du$$

Finalmente, si $|f(x, y)| < M$ multiplicando por f y sumando, resulta la acotación:

$$|\Sigma f \cdot \Delta\sigma - \Sigma f \cdot J \cdot \Delta\sigma'| < Mk\varepsilon \text{ . área de } D'$$

luego ambas sumas tienen el mismo límite, y queda demostrada [4].

EJERCICIOS

1. — Conocido el volumen de la esfera de radio 1, probar inmediatamente que el del elipsoide de semiejes a, b, c se deduce multiplicándolo por $a\,b\,c$.

2. — Se llaman *coordenadas parabólicas* de un punto P respecto del foco O, a los parámetros de las dos parábolas de foco O y eje x, que pasan por P. Calcular el jacobiano de esta transformación de coordenadas.

(*) Basta recordar la fórmula de multiplicación de dos determinantes:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 p_1 + b_1 q_1 & a_1 p_2 + b_1 q_2 \\ a_2 p_1 + b_2 q_1 & a_2 p_2 + b_2 q_2 \end{vmatrix}$$

que se comprueba fácilmente sin más que descomponer este último en suma de cuatro determinantes.

AREAS Y TANGENTES EN COORDENADAS POLARES

257. — Determinación de la tangente.

Aunque este problema corresponde a los primeros capítulos, conviene agruparlo con el de la cuadratura siendo una simple aplicación del cambio de variables. En coordenadas cartesianas, la $\operatorname{tg}\tau$ del ángulo que forma la tangente a la curva $r = f(t)$ con el radio vector, cuya pendiente es $k = y/x$, viene dada así:

$$\frac{y' - k}{1 + ky'} = \frac{x.dy - y.dx}{x.dx + y.dy}$$

pero las fórmulas de cambio de coordenadas son:

$$x = r.\cos t \quad \therefore \quad dx = \cos t.dr - r.\operatorname{sen} t.dt$$
$$y = r.\operatorname{sen} t \quad \therefore \quad dy = \operatorname{sen} t.dr + r.\cos t.dt$$

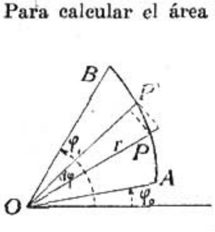
y la expresión anterior se reduce a $r.dt/dr$. Tomando el recíproco y llamando r' a la derivada del radio vector respecto del argumento t, resulta la fórmula

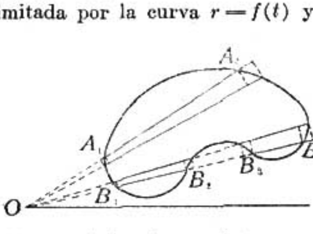
$$\operatorname{ctg}\tau = r'/r$$

Es decir: resulta la derivada logarítmica, mientras que la expresión análoga en cartesianas sería la derivada ordinaria. En los máximos y mínimos de r, es $r' = 0$ y la tangente perpendicular al radio.

258. — Cuadratura de recintos planos.

Para calcular el área limitada por la curva $r = f(t)$ y los ra-





dios de argumentos t_0 t_1, dividamos el ángulo que éstos comprenden por radios intermedios cualesquiera. El área limitada por cada dos radios consecutivos que forman ángulo Δt está comprendida entre los sectores circulares cuyos radios son el máximo M_i y el mínimo m_i de los valores de r en el intervalo Δt, puesto que el sector curvilíneo está contenido en uno de estos sectores circulares y contiene al otro, y como la función es continua, también será igual al área de un sector circular del mismo ángulo y radio intermedio $f(\xi)$, siendo ξ un cierto ángulo comprendido en el intervalo Δt. Por tanto, el área tiene por expresión:

$$S = \text{lím.}\ \Sigma\ \tfrac{1}{2} f(\xi)^2\ \Delta t = \int f(t)^2\ dt = \tfrac{1}{2} \int r^2\ dt.$$

NOTA. — Las sumas de estas áreas de los sectores circulares máximos y mínimos:

$$S = \Sigma\ \tfrac{1}{2} M_i^2\ \Delta t \qquad s = \Sigma\ \tfrac{1}{2} m_i^2\ \Delta t \qquad [1]$$

difieren en

$$S - s = \tfrac{1}{2}\ \Sigma (M_i - m_i)\ (M_i + m_i)\ \Delta t < M\ \Sigma (M_i - m_i) \Delta t$$

si llamamos M al mayor de todos los valores de r en el intervalo total, puesto que

$$M_i + m_i < 2M$$

y como la función es uniformemente continua, es decir, se puede hacer que todas las oscilaciones $M_i - m_i$ sean menores que un número prefijado s, eligiendo todos los Δt suficientemente pequeños, resulta:

$$S - s < M . s\ \Sigma\ \Delta t = Ms(t_1 - t_0) \qquad [2]$$

es decir, el error o diferencia entre ambas expresiones aproximadas S y s puede hacerse tan pequeño como se quiera.

En esta fórmula se tiene un límite del error, es decir, una medida del grado de aproximación.

Espiral de Arquímedes: $r = at$.

El área comprendida desde el rayo origen $t = 0$ hasta el rayo de argumento t_1 es:

$$S = \tfrac{1}{2} \int_0^{t_1} a^2\ t^2\ dt = \tfrac{1}{2}\ a^2 \int_0^{t_1} t^2\ dt = \tfrac{1}{2}\ a^2\ t_1^3/3$$

o también $S = r_1^3/6a$.

El área limitada por la primera espira vale $S = 4/3\ \pi^3\ a^2$

" " " " " segunda " " $S = 28/3\ \pi^3\ a^2$

es decir, siete veces la primera. El área de la tercera espiral vale 19 veces; etc.

Espiral logarítmica $r = k\ e^{mt} = k\ a^t$.

En particular, para la espiral $r = e^t$, el área limitada por dos radios es el producto de su semisuma por su semidiferencia.

Nótese que si $t_1 - t_0 > 2\pi$ resulta el área superpuesta a sí misma. Al tender t_0 hacia $-\infty$ resulta lím. $S = r^2_1/4m$.

Esta es el área de las infinitas espiras que tienden hacia el origen.

EJERCICIOS:

1. — Calcular el área de la cardioide de $r = a(1 + \cos t)$.

Solución: $S = \tfrac{1}{2}\ 3\pi\ a^2$ (seis círculos de diámetro a).

2. — Calcular el área de la lemniscata: $r = a \sqrt{\cos 2t}$.

Solución: $S = a^2$.

259. — Medias cuadráticas.

De igual modo que el promedio de n números se generaliza para infinitos mediante la expresión cartesiana del área (131), el promedio de cuadrados (importante en teoría de errores) se interpreta en coordenadas polares.

Puesto que la expresión del área en coordenadas polares es

$$2\,S = \int r^2\,dt = \text{lím.}\ \Sigma\, f(\xi)^2\,\Delta t$$

si los radios se toman equidistantes, es decir, si el intervalo $t_1 - t_0$ se divide en n partes iguales: $\Delta t = (t_1 - t_0) : n$, la suma anterior es el producto de la longitud $t_1 - t_0$ del intervalo por la fracción $(\Sigma\, f(\xi))^2 : n$ que es la media aritmética de los cuadrados de los radios elegidos arbitrariamente en cada intervalo, y la raíz cuadrada de su límite se llama *media cuadrática* de la función $f(t)$. Por tanto: llamando μ a la media cuadrática

$$\mu^2 = \frac{2\,S}{t_1 - t_0} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} f(t)^2\,dt \qquad [3]$$

es decir: la media cuadrática de una función es la raíz del cociente de la integral de su cuadrado por el intervalo.

Gráficamente se determinará, pues, fácilmente la media cuadrática de cualquier función, representándola en coordenadas polares, y midiendo con un planímetro o gráficamente el área del sector obtenido. Su duplo, dividido por el ángulo o intervalo, es el cuadrado del valor medio cuadrático en el intervalo considerado.

EJEMPLO 1. — En Electrotécnica, sobre todo, tiene interés capital la determinación de la media cuadrática de las intensidades de una corriente en toda una onda; su valor se llama también *valor eficaz* de la corriente.

Sea, p. ej., la corriente alterna dada por esta tabla (Rose):

$t^s = 0$	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008
$t = 5$	8	12	7	0	-6	$-8{,}3$	-3	5

Dibujada la gráfica polar tomando t como ángulo, con unidad adecuada (p. ej., $20° = 0{,}001^s$) y para i un cm. por unidad, el área de la gráfica resulta ser 67,7 cm² y como el intervalo medido en radios vale $160° = 2{,}79$, resulta:

$$\text{Valor eficaz} = \sqrt{2.67{,}7/2{,}79} = 6{,}97.$$

El cociente del valor eficaz por el valor máximo se llama *eficacia*.

EJEMPLO 2. — La potencia luminosa de una lámpara de arco varía según la inclinación del rayo respecto de la horizontal, es decir, es función de la coordenada φ pero no depende de λ. Basta, pues, construir la gráfica polar de la potencia en su plano vertical y hacerla girar alrededor de la vertical para tener la superficie de revolución que representa la potencia en cualquier dirección, mediante el radio vector correspondiente.

Constrúyase, p. ej., el diagrama polar con los datos siguientes (Rose), llamando φ a la latitud

$-\varphi = 8°$	$10°$	$20°$	$30°$	$40°$	$50°$	$60°$	$70°$	$80°$	$90°$
potencia en bujías:									
1000	1470	1800	1720	1200	960	800	720	600	480.

Siendo la iluminación que recibe una superficie el producto de ésta por la potencia, si trazamos una superficie esférica de radio r con centro en la lámpara, cada elemento superficial $d\sigma$ recibe una iluminación $P.d\sigma$ y la iluminación total es:

$$P\,d\,\sigma = 2\pi\,r \int_{-r}^{r} P\,d\,z \qquad [4]$$

efectuando la integración por zonas esféricas.

El cálculo práctico puede hacerse reduciendo la gráfica polar a cartesiana es decir: dibujada una semicircunferencia de centro O en la lámpara, limitada por el diámetro vertical, los puntos que en ella determinan los radios vectores se proyectan sobre dicho diámetro (o sobre una paralela) y se llevan como ordenadas los valores P dados. El área de la curva así obtenida es

$$\int_{-r}^{+r} P\,d\,z.$$

La altura media P_0 de esta curva resulta de dividir esta área por la base $2r$, y este valor medio P_0 se llama potencia luminosa media, es decir:

$$2r\,P_0 = \int_{-r}^{+r} P\,d\,r.$$

Una lámpara colocada en el mismo punto, cuya potencia fuera P_0 en todas direcciones, proyectaría sobre la superficie esférica de radio r una iluminación igual a

$$4\pi\,r^2.P_0 = 2r\,P_0.2\pi\,r$$

expresión idéntica a la iluminación total [4] recibida de la lámpara estudiada.

Este método, que nada nuevo contiene respecto del modo de calcular valores medios (131), suele llamarse ampulosamente *diagrama de Rousseau.*

EJERCICIOS

1. — Calcúlense los valores medio (131) y eficaz de una función sinusoidal $y = \operatorname{sen} t$ en media onda.

Solución:

$$\text{Valor medio} = 2/\pi = 0{,}63663$$
$$\text{Valor eficaz} = 1/\sqrt{2} = 0{,}7071$$

Los mismos resultan para el coseno.

2. — Calcúlese el valor eficaz de una onda general alterna, es decir, la media cuadrática de una función periódica.

$$y = a_1 \cos t + b_1 \operatorname{sen} t + a_2 \cos 2t + b_2 \operatorname{sen} 2t + \ldots\ldots + a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt$$

en el intervalo o período 2π.

Solución:

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + \ldots\ldots + a^2_n + b^2_n)}$$

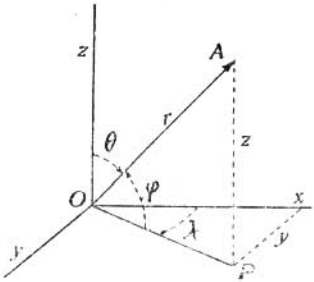
AREAS Y VOLUMENES EN COORDENADAS POLARES

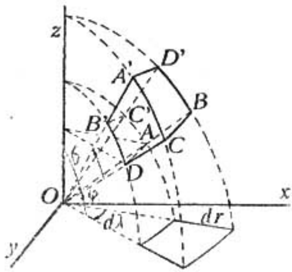
260. — Coordenadas esféricas.

No siempre son las coordenadas cartesianas las más adecuadas para el cálculo de áreas y volúmenes. Para los cuerpos redondos son más naturales las coordenadas polares, también llamadas *esféricas* y las *semipolares* o *cilíndricas*.

Dado un triedro xyz todo punto del espacio está determinado dando: su distancia al origen o radio vector r; el ángulo φ que éste forma con el plano xy; el ángulo λ que el plano vertical rz forma con xz.

Por analogía con las coordenadas geográficas, a los números r, φ, λ los llamaremos brevemente: *radio, latitud* y *longitud*. A veces se utiliza el complemento θ de φ, llamado *colatitud*.





Las coordenadas cartesianas del punto se obtienen fácilmente observando que la proyección de r sobre el plano xy es $r \cos \varphi$; y sus dos proyecciones sobre los ejes x, y resultan multiplicando por $\cos \lambda$ y $\operatorname{sen} \lambda$:

$$x = r \,.\, \cos \varphi \,.\, \cos \lambda \qquad y = r \,.\, \cos \varphi \,.\, \operatorname{sen} \lambda \qquad z = r \,.\, \operatorname{sen} \varphi$$

de donde se despeja, recíprocamente:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \operatorname{tg} \lambda = y/x; \quad \operatorname{sen} \varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Con el sistema de coordenadas polares el espacio queda dividido del modo siguiente: los valores sucesivos de r dan esferas concéntricas de centro O; los valores de λ dan planos meridianos que pasan por el eje z; los valores de φ (o de θ) dan conos de revolución de eje z.

Si de las coordenadas r, φ, λ pasamos a las $r + dr$, $\varphi + d\varphi$, $\lambda + d\lambda$, las tres superficies que determinan cada uno de estos dos puntos limitan un cuerpo análogo al paralelepípedo de las coordenadas cartesianas. Las aristas (que son curvas) en el punto r, φ, λ son:

$AB = dr$ (rectilínea)

$AC = r\,.\,d\varphi$ (círculo de radio r)

$AD = r\,.\cos\varphi\,.\,d\lambda$ (círculo de radio $r\,.\cos\varphi$).

Considerado como paralelepípedo, su volumen viene dado aproximadamente como producto de estas tres longitudes, es decir:

$$r^2 \cos\varphi\,.\,dr\,.\,d\varphi\,.\,d\lambda. \qquad [6]$$

El volumen de un cuerpo cualquiera es el límite de la suma de todos los elementos contenidos en él, al tender a 0 sus dimensiones y resulta la fórmula práctica:

$$V = \int \int \int r^2 . \cos\varphi .\ dr . d\varphi . d\lambda. \qquad [7]$$

que se resolverá por tres integraciones sucesivas, de igual modo que hacíamos con las coordenadas cartesianas. Si se trata de calcular la masa, siendo δ la densidad variable, función de r, φ, λ resulta:

$$\text{Masa} = \int \int \int \delta\, r^2 . \cos\varphi .\ dr . d\varphi . d\lambda.$$

NOTA. — Con la deducción anterior, corriente en los libros clásicos, queda la duda de si el error cometido en la determinación del elemento de volumen influye en el resultado final. Demostremos que el volumen calculado es exacto, anticipando la aplicación del teorema de Guldin que será demostrado en la lección siguiente.

Puesto que el cuerpo $A\,B\,C\,D\ A'\,B'\,C'\,D'$ es de revolución, basta multiplicar el área $A\,B\,D'\,C' = r_1\, d\,\varphi . d\,r$ (r_1 es el radio medio) por el arco descrito por su centro de gravedad cuyo valor es: $r_2 . \cos\varphi . d\lambda$, llamando r_2, φ_2 las coordenadas de dicho centro de gravedad. El volumen viene dado, pues, exactamente por la fórmula:

$$r_1\, r_2 . \cos\varphi . d\,r .\ d\varphi . d\lambda$$

y como r_1, r_2 son números comprendidos entre r y $r + dr$, su producto es: $r_1\, r_2 = \xi^2$, siendo ξ otro número también comprendido entre ambos.

En definitiva: el volumen viene dado por el producto de $dr . d\varphi . d\lambda$ por el valor que toma la función $r^2 \cos\varphi$ en un punto del cuerpo $A\,B\,C\,D\ A'\,B'\,C'\,D'$. Según la definición de integral, el límite de la suma de estos elementos *exactos* de volumen viene expresado por la integral [7] anteriormente deducida.

Quienes han estudiado (256) poseen ya la demostración más elegante; pues el factor $r^2 \cos\varphi$ que aparece bajo el signo integral, no es sino el valor absoluto del jacobiano de la transformación, como se ve desarrollando el determinante.

Obtenga asimismo, como ejercicio, la fórmula de rectificación:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 . d\varphi^2 + r^2 . \cos^2\varphi . d\lambda^2$$

261. — Coordenadas cilíndricas.

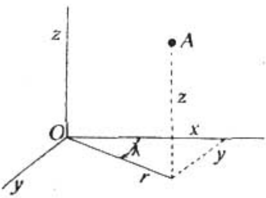
Cada punto viene determinado por los elementos siguientes: las coordenadas polares (r, λ) de su proyección horizontal, más la altura z sobre el plano xy.

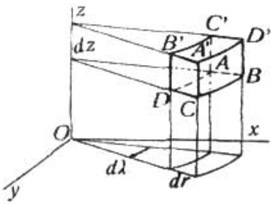
Las coordenadas cartesianas se deducen inmediatamente:

$$x = r \cos \lambda \quad , \quad y = r \operatorname{sen} \lambda \quad , \quad z = z.$$

El elemento de volumen se calcula así: el área del trapecio circular de radios r, $r + dr$ y ángulos λ, $+ \gamma \ d\lambda$ es exactamente: dr por el radio medio $r . d\lambda$ es decir:

$$\text{Area} = r . dr . d\lambda .$$





El volumen del cuerpo prismático limitado por el par de planos, λ, $\lambda + d\lambda$, por el par de planos $z, z + dz$ y por los cilindros $r, r + dr$ es exactamente: $r . dr . d\lambda . dz$, y por tanto el volumen de un cuerpo cualquiera viene expresado por la fórmula:

$$V = \int \int \int r . dr . d\lambda . dz . \qquad [8]$$

De igual modo que se vió para las coordenadas esféricas, esta fórmula [8] es consecuencia inmediata de lo demostrado en (256), por ser r el valor absoluto del jacobiano de la transformación.

Dedúzcase la fórmula de rectificación: $ds^2 = dr^2 + r^2 . d\lambda^2 + dz^2$

262. — Cubicación y cuadratura de cuerpos redondos.

Supongamos un arco de curva en el plano xy, definido por la ecuación $y = f(x)$, y calculemos el volumen del cuerpo redondo engendrado por el trapezoide que determina con el eje x, al girar en torno del eje y.

Si la curva generatriz está determinada en el intervalo (a, b) y lo dividimos en intervalos, considerando las superficies cilíndricas $r = r_1$, $r = r_2$, ... éstas cortan a la superficie de revolución según circunferencias, y el volumen buscado aparece como límite de la suma de los cilindros anulares (tubos) de radios sucesivos r_1, r_2, r_3 ....

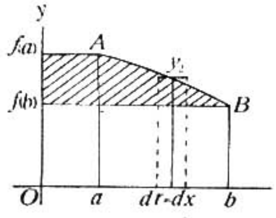
La base de cada uno de estos anillos tiene el área: $2\pi r\,\Delta r$, llamando r a la semisuma de ambos radios o radio medio; pudiendo tomarse como altura de cada cilindro una ordenada cualquiera en cada intervalo.

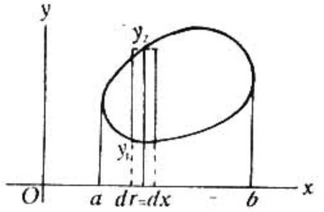
El volumen del cilindro anular que tiene como altura la ordenada $f(r)$ que corresponde a dicho punto r es: $2\pi r f(r)\Delta r$ y el límite de la suma de estos elementos, por la definición de integral es:

$$V = 2\pi \int_a^b r\,f(r)\,dr = 2\pi \int_a^b xy\,dx \qquad [9]$$

si llamamos xy a las coordenadas cartesianas en el plano meridiano según la figura.

Nota: Directamente se llega a esta fórmula sin la deducción anterior, aplicando la fórmula [8] del volumen de coordenadas cilíndricas; integrando sucesivamente respecto de λ, z, r.





Más general: dado un recinto plano limitado por una curva cerrada, el radio variará entre dos valores a, b y para cada valor de r resulta un segmento de ordenada $f(r)$ interceptado por el recinto. La fórmula del volumen es general, o sea:

$$V = 2\pi \int_a^b r\,f(r)\,dr = 2\pi \int_a^b x(y_2 - y_1)\,dx.$$

Si lo que se desea calcular es un segmento de volumen limitado por dos planos paralelos, la integral

$$2\pi \int_a^b xy\,.\,dx$$

no dará el volumen buscado sino el engendrado por $a\,AB\,b$; a él se puede agregar el cilindro $\pi a^2 f(a)$ para llenar el vacío central, y después restarle el cilindro $\pi b^2 f(b)$ en que se apoya el cuerpo dado.

Su volumen, en definitiva, es:

$$V = 2\pi \int_a^b xy \, . \, dx + \pi \, a^2 f(a) - \pi \, b^2 f(b).$$

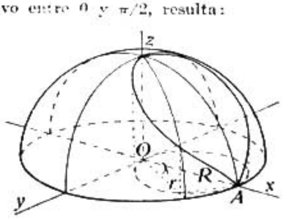
EJEMPLO 1: *Volumen de la bóveda de Viviani.* — Se llama así a la parte de superficie esférica limitada por el cilindro cuyo diámetro es un radio de ella.

En coordenadas cilíndricas:

$$V = \int \int \int r \, d\, r \, . \, d\,\lambda \, . \, d\,z = \int \int r \, d\, r \, . \, d\,\lambda \, \sqrt{R^2 - r^2}$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} d\,\lambda \int_0^{R\cos\lambda} r \, . \, dr \, \sqrt{R^2 - r^2}$$

La integral de $r \sqrt{R^2 - r^2} dr$ es $(-R^3 \operatorname{sen}^3 \lambda + R^3) : 3$, e integrando de nuevo entre 0 y $\pi/2$, resulta:



$$3V = -2R^3 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 \lambda \, . \, d\lambda + 2R^3 \int_0^{\pi/2} d\lambda$$

$$3V = -4/3 \, R^3 + \pi \, R^3 = R^3(\pi - 4/3).$$

Veamos un ejemplo de la simplificación que en el cálculo de áreas de superficies introduce el uso de coordenadas polares del plano xy en la fórmula (253).

EJEMPLO 2: *Area de la bóveda de Viviani.* — Puesto que la normal a la superficie esférica es el radio, el coseno del ángulo que forma con el eje z es z/R; luego:

$$S = R \int \int dx \, dy/z$$

y en coordenadas polares:

$$S = R \int \int r \, d\, r \, d\lambda / \sqrt{R^2 - r^2}$$

fijando λ e integrando respecto de r, resulta: $-(R^2 - r^2)^{1/2}$; pero fijado λ el radio r oscila entre 0 y $R \, . \cos\lambda$, luego:

$$-(R^2 - r^2)^{1/2} \Big|_0^{R\cos\lambda} = -R \operatorname{sen} \lambda + R$$

integrando respecto de λ entre 0 y $\pi/2$ para obtener la mitad de la bóveda:

$$\int R \, . \, d\lambda - \int R \operatorname{sen} \lambda \, . \, d\lambda = R(1/2\pi - 1)$$

La superficie de la bóveda es: $S = R^2(\pi - 2)$.

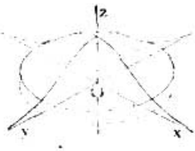
Es éste el *problema florentino*, o de Viviani, discípulo de Galileo, que se propuso trazar en la superficie esférica una ventana cuadrable.

NOTA. — Si hubiéramos tomado la integral entre $-\pi/2$, $\pi/2$ como el $\cos\lambda$ se anula en ambos extremos habría resultado la fórmula errónea: $S = R^2\pi$. La causa es que no debe integrarse $\operatorname{sen}\lambda$, sino su valor absoluto.

EJEMPLO 3: Como aplicación importante calculemos el volumen del cuerpo engendrado por la curva: $z = e^{-x^2}$ y limitado por el cilindro $r = a$.

$$V = 2\pi \int_0^a r \, . \, e^{-r^2} dr = -\pi \int_0^a e^{-r^2} . \, d(-r^2) = \pi e^{-r^2} \Big|_a^0 = \pi \, (1 - e^{-a^2})$$

Si consideramos ahora el cuerpo limitado por la superficie indefinida con el plano xy, se llama volumen del mismo al límite del volumen limitado cuando *el radio a crece infinitamente; el límite de e^{-a^2} es 0 y queda solamente π.*



Este límite se expresa más brevemente escribiendo así: $\int_0^\infty$ cuyo significado no es otro sino este: $\lim\limits_{a \to \infty} \int_0^a$

En definitiva, podemos escribir:

$$V = 2\pi \int_0^\infty r \, . \, e^{-r^2} \, dr = \lim_{a \to \infty} 2\pi \int_0^a r \, . \, e^{-r^2} \, dr = \pi.$$

Cálculo de la integral de Gauss

Este resultado tiene aplicación en el cálculo de la integral de Poisson o Gauss, fundamental en la teoría de los errores.

En efecto, pongamos

$$I_a = \int_0^a e^{-x^2} \, dx = \int_0^a e^{-y^2} \, dy$$

y formemos la integral doble sobre el cuadrado de lado Oa:

$$\int \int e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy = \int_0^a e^{-x^2} \, dx \, . \int_0^a e^{-y^2} \, dy = I_a{}^2.$$

Pasando al límite para $a \to \infty$ y llamando I a la integral de la exponencial de 0 a ∞, o sea $I = \lim. \, I_a$, resulta que el volumen del cuerpo de revolución *antes calculado en coordenadas polares, y cuyo valor es π*, es igual a $4I^2$, luego $I = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$, es decir:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \tfrac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

Cuadratura de superficies redondas. — Aunque la fórmula (253) es general, conviene considerar la superficie como límite de suma de los anillos tronco-cónicos engendrados por los elementos ds de tangente; y si la generatriz está en el plano xz, resulta:

$$S = 2\pi \int z \, . \, ds = 2\pi \int z \sqrt{1 + z'^2} \, . \, dx \qquad [10]$$

Para relacionarla con (253), demuéstrese esta regla práctica:

Dada en el plano xz la curva $z = f(x)$, la ecuación de la superficie engendrada al girar en torno del eje z, es $z = f(r)$, siendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Aplicada a esta ecuación $z = f(r)$ la fórmula (253), resulta la nueva fórmula [10], mucho más sencilla y práctica.

EJERCICIOS

1. — Rectificar la curva que limita la bóveda de Viviani.

(Demuéstrese que la ecuación en coordenadas esféricas, es $\varphi = \lambda$ y la fórmula dada en (260) conduce fácilmente a una integral elíptica de parámetro $1 : \sqrt{2}$.)

2. — Calcular el volumen del toro en coordenadas cilíndricas.

MOMENTOS Y CENTROS DE GRAVEDAD

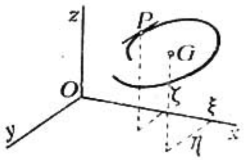
263. — Momentos de líneas, superficies y cuerpos.

El concepto de momento definido en (147) se generaliza fácilmente. Dada una línea, superficie o cuerpo material, dotada de densidad δ, constante o variable (*), puede considerarse como límite de una suma de masas rectilíneas, rectangulares, o paralelepípedos, respectivamente. Calculada la suma de momentos de estas masas componentes respecto de un centro, eje o plano, su límite se llama momento de la curva, superficie o cuerpo material respecto de este centro, eje o plano, y según sean aquellos momentos de primero o segundo orden, es decir, según que cada masa esté multiplicada por la distancia o por el cuadrado de la distancia al centro, eje o plano, así resultará el momento de primero o segundo orden (*estático* o de *inercia*) de la masa curvilínea considerada.

En particular, si el cuerpo es homogéneo ,es decir, su densidad constante, las masas son proporcionales a las longitudes, áreas o volúmenes, y se pueden sustituir por éstas, resultando así momentos *geométricos*, esto es, sumas de productos de las longitudes, áreas y volúmenes componentes por sus distancias o cuadrados de distancias al centro, eje o plano. Una vez calculados estos momentos geométricos bastará multiplicar por la densidad, para tener el momento mecánico.

Si consideramos un elemento de arco ds, es decir, un trozo de tangente que suponemos tiene su punto medio de contacto, y es x la abscisa de este punto de contacto, el producto $x.ds$ es el momento de ese segmento respecto del plano yz. El límite de la suma de momentos, o sea el momento del arco AB es, pues, la integral:

$$M_x = \int x.ds$$



y análogamente

$$M_y = \int y.ds \qquad M_z = \int z.ds.$$

Si el arco tiene densidad variable δ, las fórmulas son:

$$M_x = \int \delta.xds;$$
$$M_y = \int \delta.yds;$$
$$M_z = \int \delta.zds.$$

(*) Acerca del concepto de *densidad* véase la nota de párrafo (266).

Análogamente: el momento de un elemento $dx.dy = d\sigma$ de área plana respecto de su plano es nulo; respecto de los planos yz, xz, vienen expresados por las integrales

$$M_x = \int \delta . x . d\sigma; \qquad M_y = \int \delta . y . d\sigma \tag{1}$$

es decir, coinciden con los momentos respecto de los ejes y, x.

Estas fórmulas valen asimismo para recintos de superficie curva, pero en ellas ya no es $d\sigma$ el producto $dx.dy$, sino éste dividido por $\cos(nz)$ como se explicó en (253) y además aparece $M_z = \int \delta . z . d\sigma$.

Los momentos de un cuerpo homogéneo respecto de los tres planos son análogamente:

$$M_x = \int \delta . x . d\tau \qquad M_y = \int \delta . y . d\tau \qquad M_z = \int \delta . z . d\tau \tag{2}$$

siendo $d\tau = dx.dy.dz$.

La ecuación de un plano cualquiera que pase por O, reducida a su forma normal, es decir, después de dividida por la raíz cuadrada de la suma de cuadrados de los coeficientes, sea:

$$Ax + By + Cz = 0$$

la distancia del punto (x, y, z) a este plano se obtiene sustituyendo estas coordenadas en el mismo, luego el momento del arco AB respecto de ese plano es:

$$\int (Ax + By + Cz)\, ds = AM_x + BM_y + CM_z \tag{3}$$

la misma fórmula vale para las superficies y cuerpos.

Calculados, pues, los momentos respecto de los planos coordenados se deduce fácilmente el momento respecto de otro plano.

264. — Centros de gravedad.

Suele definirse el centro de gravedad de una línea material, superficie o cuerpo, como punto de aplicación de la resultante de un sistema de fuerzas paralelas aplicadas en los infinitos puntos materiales que los componen. Esta expresión incorrecta debe entenderse así: El momento de la línea, superficie o cuerpo, según se acaba de definir, respecto de todo plano que pase por el centro de gravedad debe ser nulo. En particular, si el hilo, superficie o volumen es homogéneo, es decir, su densidad constante, siendo la masa proporcional a la longitud, área o volumen, se puede sustituir el momento estático por el geométrico.

Puesto que el momento respecto de un plano que pasa por la intersección de otros tres rectangulares es la suma de los momentos respecto de éstos por los coeficientes de la ecuación del plano, según se ha demostrado [3], resulta que para la determinación del baricentro de una figura cualquiera, basta imponer la condición de que sean nulos los momentos respecto de los tres planos trazados por él paralelamente a los coordenados.

265. — Baricentros de curvas.

Los momentos del arco AB respecto de los planos $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$ son:

$$\int \delta(x - \xi)\,ds = 0 \qquad \int \delta(y - \eta)\,ds = 0 \qquad \int \delta(z - \zeta)\,ds = 0$$

de donde se deducen las coordenadas ξ, η, ζ del baricentro, que son:

$$\xi = \frac{\int \delta . x . ds}{\int \delta . ds} \qquad \eta = \frac{\int \delta . y . ds}{\int \delta . ds} \qquad \zeta = \frac{\int \delta . z . ds}{\int \delta . ds}$$

Si el arco es homogéneo, la constante δ se puede sacar como factor común y después de simplificar resultan:

$$\frac{\int x . ds}{s} \,, \qquad \frac{\int y . ds}{s} \,, \qquad \frac{\int z . ds}{s}$$

siendo s la longitud total del arco.

266. — Baricentros de superficies.

Si la curva es plana, es $\zeta = 0$ y basta calcular ξ, η. Si es simétrica respecto del eje y, basta calcular η puesto que $\xi = 0$. Si la curva es cerrada, con centro de simetría, éste es el baricentro.

Dado un recinto R en el plano xy si δ es la *densidad* (*) variable en cada punto, (es decir, la masa por unidad de área) el momento total respecto de los planos $x = \xi$, $y = \eta$, o lo que es lo mismo ,respecto de estas rectas situadas en el plano xy, es respectivamente:

$$\int \delta(x - \xi)\,d\sigma = 0 \qquad \int \delta(y - \eta)\,d\sigma = 0$$

(*) Este concepto de *densidad en un punto* no se puede definir claramente sino de modo análogo a como se ha definido la velocidad en un momento, la carga es un punto, etc., mediante la *derivada*. Pero tratándose de dos o más variables hay que estudiar previamente las *funciones de recinto*.

condiciones que determinan las coordenadas ξ, η:

$$\xi = \frac{\int \delta . x . d\sigma}{\int \delta . d\,\sigma} \qquad \eta = \frac{\int \delta . y . d\sigma}{\int \delta . d\,\sigma}$$

En particular, si δ es constante, puede suprimirse como factor común y resultan

$$\frac{\int x . d\sigma}{A}, \quad \frac{\int y . d\sigma}{A}$$

siendo A el área total del recinto.

Siendo $d\sigma = dx . dy$, estas integrales pueden calcularse por dos integraciones sucesivas, pero también pueden expresarse, desde luego, por integrales simples:

$$\xi = (1/A) \int_a^b x(y_2 - y_1)\,dx \qquad \eta = (1/A) \int_c^d y(x_2 - x_1)\,dy$$

NOTA. — Si el recinto es un trozo de superficie curva, $z = f(x, y)$ las fórmulas son las mismas, pero la diferencial de área $d\sigma$ no es $dx . dy$ sino $d\sigma = dx . dy : \cos nz$.

En particular, es importante el caso en que la superficie es esférica. Para ella la normal es el radio y $\cos nz = z/R$. Por tanto:

$$\zeta = (R/A) \int dx . dy = RA_0 : A$$

es decir: *la altura del baricentro de una porción de superficie esférica de área A es igual al radio por la razón entre su proyección A_0 y su área A.*

Así, por ejemplo, la altura del baricentro de la bóveda de Viviani (N.º 262, Ej. 2) es:

$$\zeta = R\,\frac{\frac{1}{4}\,\pi R^2}{(\pi - 2)R^2} = \frac{1}{4}\,\frac{R\,\pi}{\pi - 2}$$

El baricentro del hemisferio superior de la esfera de centro 0 y de radio R tiene las coordenadas $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = R/2$.

267. — Baricentros de cuerpos.

De modo totalmente análogo al anterior se deduce el baricentro de un cuerpo de densidad δ (masa por unidad de volumen) variable, cuyas coordenadas ξ, η, ζ, son:

$$\frac{\int \delta . x . d\tau}{\int \delta . d\tau}, \quad \frac{\int \delta . y . d\tau}{\int \delta . d\tau}, \quad \frac{\int \delta . z . d\tau}{\int \delta . d\tau}$$

extendiendo las integrales a todo el cuerpo; y si δ es constante, puede suprimirse como factor común.

Nótese que $d\tau$ designa el elemento de volumen, que puede tomarse en coordenadas cartesianas o polares, según convenga por la forma de la superficie.

EJEMPLO. — En el número (254) hemos calculado el momento del octante de esfera respecto del plano xy. Hagamos ahora el cálculo en coordenadas esféricas, y dicho momento vendrá expresado por la integral triple de $z.r^2 \cos\varphi$ que se calcula muy sencillamente y vale $\pi R^4/16$.

Compárese la brevedad de este método con el cartesiano seguido anteriormente. No menos sencillo es usar coordenadas cilíndricas.

Las coordenadas del baricentro del octante de esfera, son por tanto:

$$\xi = \eta = \zeta = 3/8\, R.$$

268. — Teoremas de Guldin.

Relacionan las áreas y volúmenes de los cuerpos de revolución con la longitud recorrida por el centro de gravedad de la generatriz de la superficie o cuerpo, y tienen muy útil aplicación, directa e inversa.

El área de una superficie de revolución alrededor del eje x viene expresada por

$$S = 2\pi \int y ds$$

pero obsérvese que esta integral es el momento de la línea generatriz respecto del eje x, es decir, el numerador que figura en la fórmula que determina la coordenada η del baricentro, y cuyo denominador es la longitud s de dicha curva, luego $S = 2\pi\eta.s$.

Y si se considera solamente un sector de superficie de revolución, es decir, si la curva generatriz gira un arco, bastará poner dicho arco en vez de $2\pi\eta$. Es decir:

El área engendrada por un arco al girar alrededor de un eje de su plano, que no lo corta, es igual a su longitud por la longitud del arco de circunferencia descrito por el centro de gravedad.

El volumen engendrado por un área al girar alrededor del eje y es:

$$V = 2\pi \int xy.dx$$

donde bajo el signo integral aparece el elemento de área $y.dx$ por la distancia x al eje y, luego es el momento total del área respecto del eje y; y recordando la fórmula que da la ordenada del centro de gravedad del área, esta integral resulta igual a: ξA, luego $V = A.2\pi\xi$, es decir:

El volumen engendrado por un recinto que gira alrededor de un eje no secante es igual al producto del área del recinto por la longitud del arco descripto por su centro de gravedad.

Los teoremas de Guldin (ya sabidos de Pappo) sirven para calcular áreas y volúmenes de superficies redondas cuando se conoce el centro de gravedad, del arco o área móvil. Y también para calcular el centro de gravedad, cuando se conoce el volumen o el área engendrada.

EJEMPLO 1. — Area del toro engendrado por la circunferencia de radio r, siendo el radio de giro a.

$$S = 2\pi . r . 2\pi a = 4\pi^2 a r$$

$$V = \pi r^2 . 2\pi a = 2\pi^2 r^2 a.$$

Compárese la brevedad de este método con el del cálculo directo en coordenadas cartesianas.

EJEMPLO 2: *Centro de gravedad de un arco de circunferencia.* — Si R es el radio y 2α la amplitud, la longitud es $2R\alpha$. Haciéndolo girar alrededor del eje y perpendicular al eje x de simetría, el área de la zona engendrada es

$$2\pi R . 2R \operatorname{sen} \alpha = 2R\alpha . 2\pi\xi$$

luego

$$\xi = R \operatorname{sen} \alpha/\alpha \quad ; \quad \eta = 0.$$

EJEMPLO 3: *Centro de gravedad del semicírculo.* — Por simetría debe estar en el radio perpendicular a la base a una distancia ξ de la misma; haciendo girar el semicírculo engendra una esfera de volumen:

$$4/3\pi R^3 = 1/2\pi R^2 . 2\pi\xi$$

de donde se despeja:

$$\xi = 4R/3\pi$$

EJEMPLO 4: Hagamos girar el semicírculo alrededor del eje que dista a de su base. Aplicando de nuevo el teorema de Guldin, el volumen engendrado vale:

$$V = 1/2\pi R^2 . 2\pi(a \pm \xi) = \pi^2 R^2(a \pm 4R/3\pi)$$

según que el eje esté situado del lado de la concavidad o de la convexidad.

He aquí, pues, calculado el volumen de las dos porciones externa e interna del toro; su suma coincide naturalmente con la expresión $2\pi^2 R^2 a$ arriba obtenida para el volumen del toro.

EJERCICIO:

Calcúlese análogamente el centro de gravedad de la semicircunferencia y aplíquese a la determinación del área de cada una de las dos regiones convexa y cóncava del toro.

269. — Momentos de inercia.

Momento de *inercia* (o de segundo orden) de una masa aislada m respecto de un eje es el producto de m por el cuadrado de su distancia al eje, es decir: $I = m\rho^2$.

Tales momentos se llaman *axiales*, y si ρ es la distancia a un punto o a un plano, el momento se llama *polar* o *plano*, respectivamente.

Si la masa es un hilo, superficie o volumen, las expresiones del momento de inercia se definen como límites de sumas de los momentos de sus elementos, es decir, por integrales.

Si la masa es plana, resultan estas reducciones:

Momentos polares son los momentos de inercia respecto de ejes perpendiculares al plano o, lo que es lo mismo, respecto de puntos del plano.

Momentos axiales son los momentos respecto de planos perpendiculares al dado, o lo que es lo mismo, respecto de ejes situados en el plano.

El momento respecto de un punto O lo designaremos I_0 y respecto de un eje y lo designaremos I_x puesto que en él figuran las distancias x.

Si el momento polar o axial de una masa plana M es I, se llama radio de giro al segmento ρ que cumple la condición

$$I = M\rho^2 \quad \text{es decir:} \quad \rho = \sqrt{I/M}$$

Representa, pues, el *radio de giro la distancia del centro o del eje a que debe colocarse la masa concentrada M para obtener un momento igual al de toda la masa superficial.* Obsérvese (259) que no es sino la media cuadrática de todos los radios u ordenadas del recinto, según sea el momento polar o axial.

Si, como supondremos en lo sucesivo la masa es uniforme, es decir, proporcional al area, se puede sustituir en las fórmulas, masa por área, tomando como unidad de masa la masa de la unidad de área.

Las relaciones fundamentales a que satisfacen los momentos de inercia de las masas planas, o áreas, son éstas:

El momento polar respecto de 0 es la suma de los momentos axiales respecto de los ejes x, y.

En efecto, siendo $r^2 = x^2 + y^2$, integrando resulta: $I_0 = I_x + I_y$.

El momento de inercia respecto de cualquier eje es igual al momento respecto del eje paralelo trazado por el centro de gravedad más el producto de la masa (o del área) por el cuadrado de la distancia entre ambos ejes.

En efecto, si adoptamos el baricentro como origen, y el eje dado es el $x = d$ tenemos:

$$(x - d)^2 = x^2 - 2dx + d^2$$

e integrando sobre la superficie resultan tres integrales.

De estas tres integrales la segunda es el momento estático respecto del eje y que pasa por el baricentro, y, por tanto, es nula. Queda, por consiguiente:

$$I_d = I_x + Ad^2.$$

EJEMPLO 1. — Momento de inercia del rectángulo de base b y altura a respecto de su base.

Adoptada ésta como eje y tomando elementos rectangulares de base b y altura dy, resulta:

$$I_x = \int_0^a by^2 . dy = a^3\, b/3 = \text{area por } a^2/3$$

Luego $\rho = a/\sqrt{3}$.

EJEMPLO 2. — Idem respecto de su base media o eje neutro.

Adoptado éste como eje x resulta:

$$I_x = \int_{-a/2}^{a/2} by^2\, dy = a^3\, b/12 = \text{área por } a^2/12$$

de donde resulta: $\rho = a/2\sqrt{3}$.

EJEMPLO 3. — Idem respecto de una paralela a la base, a distancia d del centro. Según la propiedad segunda:

$$I_d = a^3\, b/12 + a\, b\, d^2$$

En particular para $d = \frac{1}{2}a$ resulta el ejemplo 1.º.

EJEMPLO 4. — Momento polar de un anillo circular respecto de su diámetro. Sean r y R los radios interno y externo; tomando coronas circulares como elementos de área, resulta:

$$I_0 = 2\pi \int_r^R r^3\, dr = \tfrac{1}{2}\pi(R^4 - r^4)\ ,\ \rho^2 = \tfrac{1}{2}\pi(R^4 - r^4)\ :(R^2 - r^2) = \tfrac{1}{2}(R^2 + r^2)$$

Puesto que los momentos respecto de los diámetros perpendiculares son iguales por simetría, y su suma es I_0 resulta:

$$I_x = \tfrac{1}{4}\pi(R^4 - r^4)$$

Para el círculo, resulta, por ser $r = 0$

$$I_0 = \tfrac{1}{2}\pi R^4\quad ,\quad \rho = R/\sqrt{2}\quad ,\quad I_x = \tfrac{1}{4}\pi R^4\quad ,\quad \rho = \tfrac{1}{2}R.$$

270. — Centros de presión.

La presión que un líquido cualquiera ejerce sobre unidad de superficie sumergida es proporcional a la profundidad, es decir, tiene por expresión kz, adoptando como positivo el sentido hacia abajo. El punto de aplicación de la presión resultante se llama *centro de presión* y se puede calcular como el centro de gravedad cuando la densidad es $\delta = kz$.

Hay una relación notable entre el baricentro de un área, su centro de presión y el radio de giro respecto de la traza con el plano de nivel del líquido. Suponiendo el área vertical, sea ζ la coordenada del baricentro, η la del centro de presión y ρ el radio de giro.

La definición del centro de presión implica que el momento de todas las presiones es igual al momento de la presión total P, aplicada en el centro de presión, es decir:

$$\int z^2\, d\sigma = \eta \int z\, d\sigma = \eta\, \zeta . A$$

y como el primer miembro es el momento de inercia, igual a $A\rho^2$, resulta

$$\eta\,\zeta = \rho^2 \qquad [1]$$

El radio de giro de un área sumergida respecto de la línea de nivel de su plano, es media proporcional entre las distancias a ésta del baricentro y del centro de presión.

Esta relación permite determinar un elemento, conocidos los otros dos y subsiste aunque el plano sumergido no sea vertical, pues si forma con el horizontal ángulo α, la presión queda multiplicada por sen α y también el momento de presiones, luego η (coordenada del centro de presión en su plano) no varía y tampoco ζ ni ρ.

EJEMPLO. — Sea una compuerta vertical rectangular de base $b = 1$ m. y altura $a = 1{,}50$ m., cuyo borde superior está sumergido a 3 m. de profundidad bajo el nivel; la coordenada ζ del centro de presión viene dada por la fórmula:

$$\int_3^{4,50} kz^2\,dz : \int_3^{4,50} kz\,dz$$

cuyo valor es:

$$\tfrac{1}{3}(4{,}5^3 - 3^3) : \tfrac{1}{2}(4{,}5^2 - 3^2) = 21{,}375 : 5{,}625 = 3{,}80 \text{ m.}$$

Llégueso a este mismo resultado utilizando la fórmula [1].

EJERCICIOS

1. — Calcular los momentos de inercia de un cilindro circular de radio R y altura a respecto de los ejes siguientes:

a) Eje del cilindro.
Solución: $I = \tfrac{1}{2} M R^2$; $\rho = R/\sqrt{2}$.

b) Eje perpendicular a la dirección del cilindro, trazado por el baricentro.
Solución: $I = M(R^2/4 + a^2/12)$.

c) Diámetro de una base.
Solución: $I = M(R^2/4 + h^2/3)$.

2.— Momento de inercia de la esfera de radio R respecto de un diámetro.
Solución: $I = 2M R^2 : 5 \quad \rho = R\sqrt{2/5}$.

3.— Momento del toro engendrado por la circunferencia de radio r cuyo centro dista R del eje, respecto de éste.
Solución: $I = M(R^2 + \tfrac{3}{4} r^2)$.

4. —Momento de inercia de una elipse de semiejes a y b respecto del eje mayor.
Solución: $I = \tfrac{1}{4} M b^2 \quad \rho = \tfrac{1}{2} b$.

5. — Entre el radio de giro ρ respecto de un eje que pasa por el baricentro, el radio de giro ρ_1 respecto de un eje paralelo que dista d existe la relación:

$$\rho_1^2 = \rho^2 + d^2$$

6.— Constrúyase el radio de giro de los recintos anteriores para ejes paralelos a los considerados.

INTEGRALES CURVILINEAS

271. — Definición y cálculo de integrales curvilíneas.

Como para las funciones de una variable, también para las de dos variables hay un doble problema de cálculo integral: la integral *definida* entre dos puntos (a, b) (a', b'), y el problema inverso de la derivación, o sea el cálculo de una función conocidas sus derivadas.

Lo mismo que allí, el primer problema se reduce al segundo, pero la analogía no es completa, pues carece de sentido hablar de *función primitiva* de una sola función; en cambio se dirá que u es *función primitiva* o *función potencial* del par de funciones $p(x, y)$, $q(x, y)$, cuando es $u'_x = p \quad , \quad u'_y = q$.

Si el par p, q admite funciones primitivas, la diferencia de éstas es constante, pues siendo nulas sus derivadas parciales, debe ser independiente de x y de y, es decir, constante.

En la lección próxima estudiaremos el caso en que hay función primitiva, y en ésta vamos a estudiar las integrales definidas.

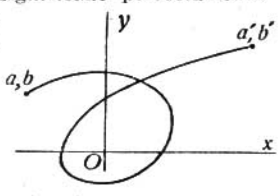
¿Qué significado puede atribuirse a los símbolos:

$$\int_{(a,b)}^{(a' b')} p(x, y)\,dx \quad , \quad \int_{(a,b)}^{(a', b')} p(x, y)\,dy$$

siendo $p(x, y)$ una función de dos variables (x, y)? Será preciso saber cuál es el camino seguido para pasar del punto inicial (a, b) al (a', b'); y dada esa curva:

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t)$$

a lo largo de la cual debe efectuarse la integración, siendo t_0 el valor de t que corresponde al punto inicial (a, b) y t' el punto final (a', b') ambas integrales tienen su significado perfectamente claro, pues se reducen a integrales de una sola variable t. La primera se transforma así:



$$\int_{t_0}^{t'} p[x(t), \, y(t)]\, x'(t)\,dt$$

y análogamente la segunda.

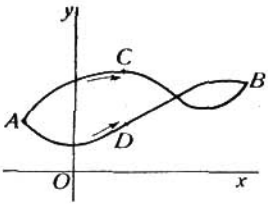
En efecto, tales integrales existen seguramente (v. núm. 3 de *Complementos*) si suponemos p y q funciones continuas, y además que sean continuas las derivadas $x'(t)$, $y'(t)$, salvo a lo sumo en número finito de puntos. Tales arcos de curva formados por número finito de arcos, provistos de *tangente continua*, suelen llamarse *regulares*, y a ellos nos referimos en todo este capítulo.

Si el camino de integración de t_0 a t' se descompone en varios, por ejemplo, de t_0 a t_1, de t_1 a t_2, de t_2 a t', siendo $t_0 < t_1 < t_2 < t'$, la integral desde t_0 a t' es la suma de las integrales desde t_0 a t_1, desde t_1 a t_2, desde t_2 a t'.

En particular, la integral a lo largo de un contorno cerrado se puede calcular como suma de las integrales a lo largo de diversos arcos abiertos en que éste se descomponga, o bien por una sola integral de t_0 a t' si t_0 y t' son los valores del parámetro que determinan el punto inicial y el final de la curva, siendo ambos coincidentes.

Si se cambia el sentido de la integración sobre un camino abierto o cerrado, hay que permutar los extremos t_0, t', luego la integral cambia de signo.

Si la integral a lo largo de un camino cerrado es nula, y AB son dos puntos del mismo, las dos integrales a lo largo de los dos caminos AB son iguales; pues siendo:



$$\int_{ACB} + \int_{BDA} = 0 \quad \therefore \quad \int_{ACB} = \int_{ADB}$$

EJEMPLO 1. — Calculemos $\int y . dx$ a lo largo de la elipse de semiejes a y b situados en los ejes coordenados, recorrida en sentido positivo.

Las ecuaciones paramétricas de la elipse son:

$$x = a . \cos t \quad , \quad y = b . \operatorname{sen} t$$

desde $t = 0$ que da el vértice de la derecha, hasta $t = 2\pi$ que vuelve a dar el mismo, después de recorrida en sentido positivo; la integral se transforma así:

$$\int y . dx = \int b . \operatorname{sen} t (-a . \operatorname{sen} t) dt = -ab \int \operatorname{sen}^2 t . dt$$

y como la función primitiva de $\operatorname{sen}^2 t$ es $\frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t$, limitada entre a y 2π resulta el valor de la integral: $-\pi ab$.

NOTA. — Todas las integrales de funciones irracionales cuadráticas calculadas en el capítulo V, son integrales curvilíneas a lo largo de circunferencias, y el cambio de variables que se hizo para efectuar las integraciones no es sino la expresión paramétrica de la respectiva circunferencia.

Sea, por ejemplo:

$$\int \sqrt{1 - x^2} . dx = \int y . dx$$

poniendo

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{o sea:} \quad x^2 + y^2 = 1$$

el cambio de variables:

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t$$

es justamente la expresión paramétrica de la circunferencia.

Lo mismo acontece en cualquier otra, por ejemplo,

$$\int x \sqrt{1 - x^2 - 2x} . dx$$

que es una integral curvilínea sobre la circunferencia: $x^2 + y^2 + 2x = 1$.

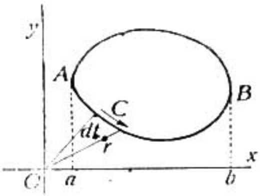
272. — Areas y momentos por integrales curvilíneas.

Hemos observado que $\int y\,.dx$ a lo largo de una elipse nos ha dado el área; en general: si la función $P(x, y)$ se reduce a y, tenemos a lo largo de cualquier curva cerrada C compuesta de dos arcos uniformes:

$$\int_C y dx = \int_a^b [y_1 - y_2]\, dx = -S \qquad [1]$$

siendo S el área del recinto; y esto se generaliza fácilmente, aunque el contorno sea más complicado.

Análogamente, tomando la integral curvilínea respecto de y:



$$\int_C x dy = \int_a^b (x_2 - x_1)\, dy = S \qquad [2]$$

y sumando ambas resulta ésta:

$$S = \tfrac{1}{2} \int_C x dy - y dx \qquad [3]$$

Nota. — La diferencial en esta fórmula [3] es el elemento de área en coordenadas polares, pues haciendo:

$$x = r \cos t \quad , \quad y = r \operatorname{sen} t$$

resulta.

$$x.dy - y.dx = r.\cos t(r.\cos t.dt + \operatorname{sen} t.dr) - r.\operatorname{sen} t(\cos t.ds - \operatorname{sen} t.dt) =$$
$$= r^2.dt$$

Análogamente, los momentos de primero y segundo orden del área S respecto de los ejes, vienen dados por las integrales curvilíneas:

$$\int_C y^2\, d\,x = \int_a^b [y_1^2 - y_2^2]\, d\,x = -2M_x$$

$$\int_C x^2\, d\,y = \int_c^d [x_2^2 - x_1^2]\, d\,y = 2M_y$$

$$\int_C y^3\, d\,x = \int_a^b [y_1^3 - y_2^3]\, d\,x = -3I_x$$

$$\int_C x^3\, d\,y = \int_c^d [x_2^3 - x_1^3]\, d\,y = 3I_y.$$

He aquí la demostración general, sin recurrir a las integrales dobles, como suele hacerse. Para un trapezoide sobre (a, b) el momento respecto del eje y es:

$$\int y\,.\,x^n\,.\;dx = \frac{y\,.\,x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1}\,.\,dy$$

Al restar las dos expresiones para los dos trapezoides cuya diferencia es el recinto, se reduce el término integrado, común a ambas y queda la integral curvilínea de $x^{n+1}\,.\,dy$ dividida por $n + 1$.

273. — Integrales curvilíneas de funciones de tres variables.

Dado un arco de curva alabeada entre los puntos (a, b, c) y (a', b', c') y una función $p(x, y, z)$ sobre ella, se define análogamente la integral respecto de x a lo largo del arco. Basta, en efecto, expresar x, y, z, como funciones de un parámetro t y si los valores de t que corresponden a los extremos son t_0 y t' resulta:

$$\int_{(a\, b\, c)}^{(a'\, b'\, c')} p(x, y, z)\, dx = \int_{t_0}^{t'} p\, [x(t), y(t), z(t)]\, x'(t)\, .dt$$

En muchos problemas de Física y Mecánica, donde los elementos físicos vectoriales se descomponen según sus componentes, aparecen integrales curvilíneas:

$$\int_{AA'} p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy = \int_{AA'} p(x, y)\, dx + \int_{AA'} q(x, y)\, dy.$$

y en los problemas tridimensionales aparecen, análogamente, las del tipo:

$$\int_{AA'} p(x, y, z)\, dx + q(x, y, z)\, dy + r(x, y, z)\, dz$$

mientras que las integrales monomias, sean de dos o tres variaoles, carecen de interés. La razón es obvia: si (p, q, r) son las componentes de un campo vectorial, cada una carece de sentido geométrico o físico, y cambia al adoptar nuevos ejes coordenados; mientras que el producto escalar $p . dx + q . dy + r . dz$ tiene significado intrínseco, independiente de la terna adoptada. Así, p. ej., si los vectores representan fuerzas, la integral trinomia significa el trabajo de esa fuerza variable al recorrer su punto de aplicación el arco AA'; número invariante respecto de todos los cambios de coordenadas.

Lo mismo que en las integrales ordinarias, sobre un intervalo, cabe considerar integrales curvilíneas *indefinidas*, es decir, integrales sobre un arco AP de extremo P variable, pero aquí surge el interrogante de cuál sea el camino elegido para la integración, cuestión que será resuelta en la lección siguiente; y además será preciso distinguir el caso de recinto *simplemente conexo*, o de contorno único, y el de recinto multiplemente conexo. Vamos a estudiar ambas cuestiones que tienen primordial interés en las aplicaciones físicas.

EJERCICIOS

1. — Si cambia el signo de un término en [3], la integral es nula, cualquiera que sea el circuito C.

2. — ¿Qué sucede si el integrando [3] se divide por x^2?

LECCIÓN 67

INTEGRACION DE DIFERENCIALES EXACTAS

274. — Caso en que existe un potencial.

Dado un par de funciones $p(x,y), q(x,y)$ (o, lo que es equivalente, un *campo vectorial* plano) veamos la íntima relación existente entre el valor de la integral:

$$\int p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy$$

y la existencia de función *primitiva* o *potencial* del par $p(x,y)$, $q(x,y)$; relación completamente análoga a la clásica fórmula de Barrow.

Cuando estas funciones p y q son las derivadas parciales según x e y respectivamente de una misma función $u(x,y)$, ésta se llama *función potencial* de p y q, no debiendo confundirse con el *potencial físico*, que es $-u(x,y)$.

Cuando existe esta función potencial u tal que $p = u'_x$; $q = u'_y$, la integral curvilínea se transforma así:

$$\int_{(a\,b)}^{(a'\,b')} u'_x\,dx + u'_y\,dy = \int_{(a\,b)}^{(a'\,b')} du(x,y) = u(a',b') - u(a,b).$$

Es decir: *Si existe función potencial uniforme, la integral curvilínea entre dos puntos no depende del camino seguido en la integración y su valor es la diferencia de potencial en ambos puntos extremos. La integral es nula en toda curva cerrada.*

Refiriéndonos a recintos *simplemente conexos* (120) se verifica:

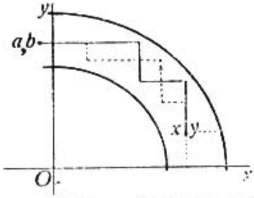
Recíprocamente: *Si son nulas las integrales a lo largo de todos los contornos rectangulares contenidos en un recinto, cuyos lados son paralelos a los ejes, existe función potencial, es decir: $p\,dx + q\,dy$ es una diferencial exacta.*

Definamos la función siguiente:

$$v(x,y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy \qquad [1]$$

extendiendo la integral hasta el punto variable (x,y) siguiendo una quebrada cualquiera de lados paralelos a los ejes, contenida en el recinto. En virtud de la hipótesis, el valor de la integral es el mismo para todas esas quebradas, pues de una se pasa a otra sustituyendo respectivamente dos lados consecutivos de un rectángulo por los otros dos; luego define una función uniforme $u(x,y)$.

Para derivar respecto de x hay que conservar fijo y, es decir, prolongar la quebrada desde (x, y) paralelamente al eje x, luego resulta nula la 2.ª integral y la 1.ª es la primitiva de p, luego $v'_x = p$; análogamente, para derivar respecto de y se prolonga la quebrada paralelamente al eje y, resultando $v'_y = q$. La función formada $v(x, y)$ es, pues, una función potencial.



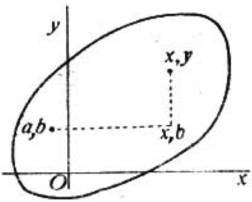
NOTA. — Obsérvese que no es preciso exigir la anulación de la integral en toda curva cerrada; basta que sea nula en todos los contornos rectangulares de lados paralelos a los ejes y contenidos en un cierto recinto, para que exista función potencial y, por consiguiente, la integral será nula en toda curva cerrada contenida en el mismo.

275. — Criterio para la existencia de potencial.

La condición necesaria y suficiente para que las funciones p y q dos veces derivables, definidas en un recinto simplemente conexo, admitan un potencial uniforme, es que sean idénticas las derivadas cruzadas:

$$p'_y = q'_x \qquad [2]$$

1.º Si existe el potencial u, derivando p respecto de y resulta u''_{xy}, y derivando q respecto de x resulta: u''_{xy}; y ambos resultados son iguales, según demostramos en (209) si estas derivadas son continuas.



2.º Supongamos, recíprocamente, que la condición [2] se cumple en un cierto recinto simplemente conexo.

Formemos la integral curvilínea [1] de la expresión $p.dx + q.dy$ desde un punto fijo (a, b) a un punto variable (x, y) siguiendo el camino más simple, formado por paralelas a los ejes,

$$v(x, y) = \int_a^x p(x, b)\,dx + \int_b^y q(x, y)\,dy \qquad [3]$$

esta es una función de x e y puesto que a cada par (x, y) corresponde un solo valor de la integral, ya que hemos fijado el camino.

La derivada respecto de y es inmediata, lo mismo que en el párrafo anterior, puesto que la primera integral no depende de y, y la segunda tiene por derivada $q(x, y)$, es decir: $v'_y = q(x, y)$.

Recordando la regla para derivar bajo el signo integral:

$$v'_x = p(x,b) + \int_b^y q'_x(x,y)\,dy = p(x,b) + \int_b^y p'_y(x,y)\,dy =$$
$$= p(x,b) + [p(x,y) - p(x,b)] = p(x,y)$$

Resulta, pues, que la función $v(x,y)$ definida por la integral [3] suma de dos integrales simples, es una *función potencial* de p y q. Cualquier otra función potencial tendrá la misma derivada respecto de x e y; por tanto difiere de $v(x,y)$ en una constante. Es decir: la función potencial más general del par p, q es: $u = v(x,y) + C$.

Si no se pueden unir los dos puntos (a,b) y (x,y) por una quebrada de dos lados contenida en el recinto se toma de varios lados y la conclusión subsiste.

NOTA. — A este mismo resultado se llega integrando el sistema:

$$u'_x = p \quad , \quad u'_y = q$$

pues de la segunda resulta:

$$u = \int_b^y q(x,y)\,dy + \alpha(x)$$

siendo $\alpha(x)$ una función arbitraria de x que no contiene la y; derivando respecto de x y sustituyendo $u'_x = p$, resulta la nueva condición:

$$p(x,y) = \int_b^y q'_x(x,y)\,dy + \alpha'(x)$$

y sustituyendo $q'_x = p'_y$, resulta:

$$p(x,y) = \int_b^y p'_y(x,y)\,dy + \alpha'(x) = p(x,y) - p(x,b) + \alpha'(x)$$

de donde:

$$\alpha'(x) = p(x,b) \quad \therefore \quad \alpha(x) = \int_a^x p(x,b)\,dx + C$$

y obtenemos el mismo resultado. Este método suele convenir en la práctica.

EJEMPLO. — Calculemos la integral curvilínea

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2 + y)\,dx + (x - 4y)\,dy.$$

Primer método: Puesto que $p'_y = q'_x = 1$, hay función potencial y la podemos calcular así:

$$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,0)} + \int_{(x,0)}^{(x,y)} = x^3 + xy - 2y^2$$

$$\text{luego: } \int_{(0,0)}^{(1,2)} = u(1,2) - u(0,0) = -5.$$

Segundo método:

$$u = xy - 2y^2 + \alpha(x)$$
$$\alpha'(x) = 3x^2 + y - y$$
$$\alpha(x) = x^3 + C.$$

276. — Integrales curvilíneas completas de tres variables.

Con frecuencia se presentan en Física y en Mecánica integrales de esta forma:

$$\int_{(a,b,c)}^{(a',b',c')} p(x,y,z)dx + q(x,y,z)dy + r(x,y,z)dz.$$

Si existe función potencial u, tal que:

$$p = u'_x; \quad q = u'_y; \quad r = u'_z$$

la integral curvilínea se reduce a:

$$\int_{(a,b,c)}^{(a',b',c')} u'_x\,dx + u'_y\,dy + u'_z\,dz = \int_{(a,b,c)}^{(a',b',c')} du = u(a',b',c') - u(a,b,c)$$

es decir: *Si existe potencial uniforme, el valor de la integral curvilínea no depende del camino seguido para pasar del punto* (a,b,c) *al* (a',b',c') *y su valor es la diferencia de potencial en ambos puntos. La integral es nula en toda curva cerrada.*

Suponiendo *simplemente conexos* los recintos considerados, se verifica:

Recíprocamente: *Si son nulas las integrales a lo largo de todos los contornos paralelepipédicos contenidos en un recinto, cuyos lados son paralelos a los ejes, existe función potencial;* es decir, $p.dx + q.dy + r.dz$ *es una diferencial exacta.*

Definamos la función siguiente:

$$v(x,y,z) = \int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)} p(x,y,z)dx + q(x,y,z)dy + r(x,y,z)dz$$

siguiendo como camino una quebrada cualquiera de lados paralelos a los ejes, contenida en el recinto; repitiendo el razonamiento hecho para dos variables, resulta:

$$v'_x = p \quad , \quad v'_y = q \quad , \quad v'_z = r$$

es decir, la función v es potencial de p, q, r.

277. — Criterio para la existencia de potencial.

Como en (275), la igualdad de derivadas cruzadas caracteriza la existencia de potencial en los recintos simplemente conexos.

Las condiciones necesarias y suficientes para que exista función potencial uniforme de p, q, r, *son:*

$$p'_y = q'_x; \quad p'_z = r'_x; \quad r'_y = q'_z. \qquad [1]$$

1.° Desde luego deben verificarse estas igualdades si existe u; pues entonces: $p'_y = u''_{xy}$, $q'_x = u''_{yx}$, y análogamente las otras.

2.° Recíprocamente: si se verifican las condiciones anteriores [1] formemos la función siguiente:

$$v(x, y, z) = \int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)} p(x, y, z)dx + q(x, y, z)dy + r(x, y, z)dz$$

eligiendo como camino de integración la quebrada de lados paralelos a los ejes, tenemos a $v(x, y, z)$ expresada por tres integrales ordinarias:

$$v(x, y, z) = \int_a^x p(x, b, c)dx + \int_b^y q(x, y, c)dy + \int_c^z r(x, y, z)dz \qquad [2]$$

y recordando la regla de derivación bajo el signo integral:

$$v'_x = p(x, b, c) + \int_b^y q'_x(x, y, c)dy + \int_c^z r'_x(x, y, z)dz =$$

$$= p(x, b, c) + \int_b^y p'_y(x, y, c)dy + \int_c^z p'_z(x, y, z)\, dz =$$

$$= p(x, b, c) + p(x, y, c) - p(x, b\, c) + p(x, y, z) - p(x, y, c) =$$

$$= p(x, y, z)$$

$$v'_y = q(x, y, c) + \int_c^z r'_y(x, y, z)dz = q(x, y, c) + \int_c^z q'_z(x, y, z)dz =$$

$$= q(x, y, c) + q(x, y, z) - q(x, y, c) = q(x, y, z).$$

$$v'_z = r(x, y, z).$$

Esta última resulta inmediatamente, pues solo la tercera integral depende de z.

Hemos obtenido, pues, una función potencial $v(x, y, z)$ y cualquier otra difiere de ella en una constante:

$$u = v(x, y, z) + C.$$

NOTA. — Si el recinto no es convexo, se elige una poligonal de lados paralelos a los ejes, como ya se hizo en casos anteriores; y fijada ésta, resulta uniforme la función $u(x, y, z)$.

NOTAS

Caso de recinto multiplemente conexo.

Tanto en el plano, como en el espacio, interesa considerar este caso, que modifica las conclusiones anteriores.

Consideremos, p. ej., el caso: $p = -y:(x^2 + y^2)$, $h = x:(x^2 + y^2)$.

Las derivadas cruzadas son iguales, y existe potencial *no uniforme:* arc tg y/x; si se consideran circuitos que no rodean al origen, el potencial es uniforme en ellos, y la integral nula; pero si el circuito da n vueltas alrededor de 0, la integral vale $2n\pi$.

La integral desde A a P toma valores distintos según el *tipo* de arco, y esos valores difieren en múltiplo de 2π.

Como en este ejemplo se verifica en todo recinto doblemente conexo, donde los valores de la integral difieren en múltiplos de un número, llamado *módulo de periodicidad*; hay dos módulos si la conexión es triple, etc.

Aplicación a la Aerotécnica.

Justamente el caso de recinto doblemente conexo es el que se presenta en la teoría de la sustentación del ala de avión.

Si (p, q) es el vector velocidad de cada partícula de aire respecto del ala, la integral:

$$\Gamma = \int p \, . \, dx + q \, . \, dy$$

sobre un circuito alrededor del perfil se llama *circulación*. Su valor depende de la forma del perfil, y en virtud del teorema fundamental de Kutta y Joukowski, la *sustentación* del ala es igual al producto de la *circulación*, por la *densidad* del flúido, por la *velocidad* del avión. (V. nuestra obra: *Aplicaciones físicas y técnicas de las funciones de variable compleja*. Buenos Aires, 1938).

Aplicación a la Termodinámica

Si un gas perfecto $pv = Rt$ pasa del estado (v, p) al $(v + \Delta v,\ p + \Delta p)$ el incremento de energía ΔQ se compone de dos partes:

Fijado v, es $\Delta Q = c.\Delta t$ siendo c el *calor específico a volumen constante*, y expresado mediante v es $\Delta t = t'_p.\Delta p = v.\Delta p/R$.

Fijada p es $\Delta Q = C.\Delta t$ siendo C el *calor específico a presión constante;* y se puede sustituir $\Delta t = t'_v.\Delta v = p.\Delta v/R$.

El incremento de energía a lo largo de un camino prefijado, es, por tanto:

$$Q = (1/R) \int c.v.dp + C.p.dv$$

¿Es Q función de p, v; es decir, en cada estado del gas tiene Q valor independiente del camino seguido para llegar a él? Así se creía, al admitir la indestructibilidad del calor. Pero como las derivadas cruzadas son c y C, y es $c \neq C$, no acontece así.

Veremos (302) cómo la expresión $cv.dp + Cp.dv$ se transforma en diferencial exacta, dando origen al concepto de *entropía*.

TRANSFORMACION DE INTEGRALES MULTIPLES EN CURVILINEAS

278. — Fórmula de Riemann.

Consideremos un recinto R cuyo contorno está formado por dos arcos uniformes AB; y calculemos la siguiente integral doble:

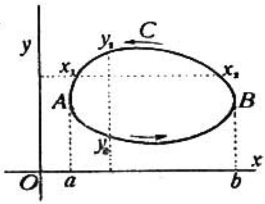
$$\int\int_R p'_y(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} p'_y(x,y)\,dy = \int_a^b [p(x,y_2) - p(x,y_1)]\,\mathrm{dx}.$$

Ahora bien: la suma de estas dos integrales no es, según la definición, sino la integral curvilínea de la función $p(x,y)$ tomada en el arco superior AB y después en el arco inferior BA.

Por tanto, si adoptamos como sentido positivo en el contorno el que deja el recinto a la izquierda, resulta:

$$\int\int_R p'_y(x,y)\,.dx\,dy = -\int_C p(x,y)\,.dx \qquad [1]$$

fórmula que transforma una integral doble en una integral curvilínea.



EJEMPLO. — Si tomamos la función

$$P(x,y) = y$$

tenemos:

$$\int\int_R dx.dy = \text{Area } S = -\int_C y\,dx.$$

Análogamente; calculemos esta integral doble:

$$\int\int_R q'_x(x,y)\,dx\,dy = \int_c dy \int_{x_1} q'_x(x,y)\,dx =$$

$$= \int_c^d dy\,[q(x_2,y) - q(x_1,y)] = \int_c^d q(x_2, y\,dy - \int_c^d q(x_1,y)\,dy$$

y como, según la definición de integrales curvilíneas, estas dos integrales componen la integral curvilínea de la función $q(x,y)$ a lo largo del contorno cerrado en sentido positivo, resulta:

$$\int\int_R q'_x(x,y)\,dx\,dy = \int_C q(x,y)\,dy \qquad [2]$$

Reuniendo en una ambas igualdades [1] y [2] obtenemos la fórmula:

$$\int\int_R (q'_x - p'_y)\,dx\,dy = \int_C p\,dx + q\,dy.$$

llamada de *Stokes* o de *Riemann*, que transforma una integral curvilínea en integral doble o viceversa, y de ella se deducen nuevamente algunos resultados ya obtenidos. Así, por ejemplo, resulta una nueva demostración muy sencilla y breve, del teorema fundamental de las integrales curvilíneas: *La condición necesaria y suficiente para que la integral curvilínea sea nula en todo circuito es la igualdad de derivadas cruzadas.*

Si p y q son los componentes de un vector (p, q) el número $q'_x - p'_y$ que aparece en la integral se llama *curl* o *rotor* del vector.

La condición $q'_x = p'_y$ equivale, pues, a ésta: Rot $W = 0$.

Demostración del criterio de las derivadas cruzadas. — Que la igualdad $p'_y = q'_x$ implica la anulación de la integral [3], salta a la vista. Recíprocamente, si esta integral es nula sobre todo contorno rectangular, el rotor debe ser nulo en todo punto, si se suponen *continuas las derivadas*. Pues si en un punto vale $a > 0$, en un entorno rectangular es $> \frac{1}{2}a$; y por tanto es positiva la integral [3] en este rectángulo, contra la hipótesis. A igual contradicción se llega suponiendo el rotor negativo.

279. — Integrales sobre una superficie.

Una generalización inmediata de la integral de dos variables sobre una curva, es la integral de una función de tres variables sobre una superficie.

Como sobre la superficie no es z independiente, sino que depende de x, y, si sustituímos su expresión: $z = f(x, y)$, resulta una integral doble ordinaria:

$$\int\int_S p(x, y, z)\,dx\,dy = \int\int_S p[x, y, f(x, y)]\,dx\,dy$$

que calcularemos por dos integraciones sucesivas.

Análogamente se definen las integrales dobles sobre R de yz y de zx.

Si se trata de una superficie cerrada S, convendremos en representar por el símbolo:

$$\int\int_S p(x, y, z)\,dx\,dy$$

la diferencia:

$$\int\int_{S_2} p(x, y, z_2)\,dx\,dy - \int\int_{S_1} p(x, y, z_1)\,dx\,dy$$

entre las dos integrales dobles sobre el casquete superior y el casquete inferior.

NOTA. — Este convenio está justificado por analogía con las integrales curvilíneas; y también se llega a él partiendo de esta otra definición:

$$\int p(x, y, z) \cdot \gamma \cdot d\sigma$$

donde γ representa el tercer coseno director de la *normal exterior* en cada punto (x, y, z) de la superficie, concepto importante en Física.

En el casquete *superior* el coseno es *positivo*; en el *inferior* es *negativo*; y resulta la misma definición anterior.

280. — Fórmula de Gauss o de Ostrogradski.

Considerada una superficie convexa cerrada S, y definida en un punto una función $\zeta\,(x, y, z)$ calculemos la integral triple sobre todo el volumen V:

$$\int\int_V\int \zeta'_z(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\int_S [\zeta(x, y, z_2) - \zeta(x, y, z_1)]\,dx\,dy =$$
$$= \int\int_S \zeta(x, y, z)\,dx\,dy$$

La integral de volumen ha quedado así reducida a una integral de superficie.

Aplicando esto a tres funciones:

$$\xi(x, y, z) \quad , \quad \eta(x, y, z) \quad , \quad \zeta(x, y, z) \qquad [1]$$

obtenemos la fórmula:

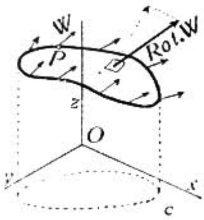
$$\int\int_V\int (\xi'_x + \eta'_y + \zeta'_z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \int\int_S \xi.dy.dz + \eta.d\ z.dx + \zeta.dx.dy$$

llamada de *Gauss* o también de Ostrogradski.

En la lección próxima estudiaremos el importante significado vectorial de esta igualdad, que es independiente de los ejes coordenados.

281. — Fórmula de Stokes.

Consideremos un casquete S de superficie $z = f(x, y)$ cuyo contorno C se proyecta en el plano xy según el contorno c del recinto plano R proyección del casquete. Dar tres funciones



$$\xi(x, y, z), \quad \eta(x, y, z) \quad \zeta(x, y, z)$$

sobre el casquete S es dar tres funciones de x, y sobre R, por ser $z = f(x, y)$ y la integral sobre el contorno C de la terna [1]:

$$\int \xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz$$

se reduce a una integral sobre c, sustituyendo $dz = z'_x.dx + z'_y.dy$, y así resulta la integral curvilínea de dos variables:

$$\int \xi\,dx + \eta\,dy + \zeta(z'_x\,dx + z'_y\,dy) =$$
$$= \int (\xi + \zeta\,z'_x)dx + (\eta + \zeta\,z'_y)dy$$

para aplicar la fórmula de Riemann calcularemos la diferencia de derivadas cruzadas:

$$(\eta'_x + \eta'_z z'_x + \zeta z''_{xy} + \zeta'_x . z'_y + \zeta'_z z'_x z'_y) -$$
$$- (\xi'_y + \xi'_z . z'_y + \zeta z''_{xy} + \zeta'_y z'_x + \zeta'_z z'_y z'_x) =$$
$$= (\eta'_z - \zeta'_y) z'_x + (\zeta'_x - \xi'_z) z'_y + (\eta'_x - \xi'_y)$$

Si multiplicamos por $dx.dy$, podemos sustituir, según la definición (253) de elemento de superficie:

$$z'_x . dx . dy = - \alpha d\sigma$$
$$z'_y . dx . dy = - \beta d\sigma$$
$$dx\, dy = \gamma d\sigma$$

y resulta:

$$\int \xi dx + \eta dy + \zeta dz =$$
$$= \int \int_S [(\zeta'_y - \eta'_z)\alpha + (\xi'_z - \zeta'_x)\beta + (\eta'_x - \xi'_y)\gamma]\, d\sigma$$

que es la *fórmula de Stokes,* cuyo hondo significado aparecerá al interpretarla vectorialmente en la próxima lección. Por ahora expresa simplemente que *toda integral simple sobre un contorno alabeado C que limita un casquete se puede expresar como una integral doble sobre este casquete.*

Como aplicación inmediata resulta el importante teorema demostrado en (276, 277): *La condición necesaria y suficiente para que la integral a lo largo de todo circuito sea nula, es la igualdad de las derivadas cruzadas.*

Que tal condición es *suficiente* salta a la vista en la fórmula de Stokes; para ver que es necesaria, basta suponer por el absurdo, que en un punto no se anula el rotor, llegándose a una contradicción, de modo análogo al de (278).

EJERCICIOS

1. — Demostrar el teorema fundamental que acabamos de enunciar.

2. — Relacionar la fórmula de Stokes con la de Riemann relativa a los campos vectoriales planos (278).

3. — Interpretar la fórmula de Stokes para el campo vectorial:

$$\xi = -y \quad , \quad \eta = x \quad , \quad \zeta = F(z)$$

INTEGRACION DE CAMPOS VECTORIALES

282. — Integral curvilínea de un campo vectorial.

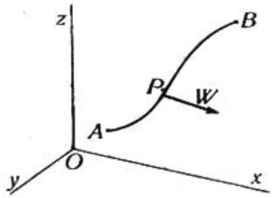
Consecuentes con la notación convenida, las letras minúsculas designan números y las mayúsculas puntos y vectores.

Se dice que forman un campo vectorial los vectores cuyas componentes (ξ, η, ζ) son funciones de (x, y, z). Es decir: cada punto de un cierto recinto es origen de un vector del campo.

Si consideramos un arco de curva $A\,B$, tenemos un vector del campo aplicado en cada punto de arco. La integral

$$\int_{AB} \xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz \qquad [1]$$

estudiada en las lecciones 64 y 65, tiene un valor numérico bien determinado como suma de las tres integrales de sus tres términos, cada una de las cuales se puede calcular según se ha explicado en (271).



Ahora puede darse una notación más sintética, observando que la expresión $\xi . dx + \eta . dy + \zeta . dz$ es el producto escalar de W por $dP(dx, dy, dz)$, luego podemos representar [1] brevemente así:

$$\int_{AB} W . dP \qquad [2]$$

y se llama *integral del vector W a lo largo de la curva A B.*

El significado más importante se obtiene cuando el vector representa una fuerza; el producto $W . dP$ es el trabajo elemental correspondiente al camino ds y el límite de la suma de trabajos elementales, o sea la integral [2] se llama *trabajo de la fuerza a lo largo del camino A B.*

Si W es una velocidad, [2] se llama *circulación* a lo largo del arco AB.

283. — Líneas de fuerza de un campo vectorial.

Se llaman *líneas de fuerza* de un campo vectorial las envolventes de estos vectores ,de modo tal que el vector correspondiente a cada punto de una curva es tangente a ella. La condición que deben cumplir las ecuaciones $y = f(x)$ de las líneas de fuerza en el plano, debe ser por tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}$$

que es una ecuación diferencial de primer orden: de ellas nos ocuparemos más adelante.

En el caso de tres variables las líneas de fuerza satisfacen a las condiciones:

$$[3] \qquad \frac{dx}{\xi(x, y, z)} = \frac{dy}{\eta(x, y, z)} = \frac{dz}{\zeta(x, y, z)}$$

que expresan que el vector correspondiente a cada punto es tangente a la línea de fuerza que pasa por él.

En el cap. XII veremos cómo se resuelve este sistema de ecuaciones diferenciales que determina las líneas de fuerza.

Las líneas de fuerza que pasan por los diversos puntos de una curva cualquiera forman una *superficie de fuerzas;* si aquella curva es cerrada, esta superficie se llama *tubo de fuerzas;* las líneas de fuerza que forman el tubo no se cortan entre sí.

Si todos los vectores son paralelos, las líneas de fuerza son rectas y los tubos de fuerzas son cilindros. Tal sucede, en particular si el campo es *uniforme* ,es decir, todos sus vectores iguales.

284. — Caso en que existe una función potencial.

Todo lo expuesto es válido para cualquier campo vectorial, pero el caso más importante se presenta cuando existe función *potencial u,* tal que

$$u'_x = \xi \quad , \quad u'_y = \eta \quad , \quad u'_z = \zeta \qquad [4]$$

es decir:

$$W = Du = \text{Grad } u.$$

Las superficies de nivel $u(x, y, z) = k$ se llaman entonces *equipotenciales;* los cosenos directores del plano tangente en cada punto son proporcionales a las derivadas de u, es decir, proporcionales a ξ, η, ζ; y como estas componentes son proporcionales a los cosenos directores del vector que tiene su origen en dicho punto, resulta:

Cada vector del campo es normal a la superficie equipotencial que pasa por su origen.

Por tanto: *las líneas de fuerza cortan ortogonalmente a las superficies equipotenciales.*

Recíprocamente, esta condición de ortogonalidad viene expresada por las ecuaciones [3] luego caracteriza completamente a las líneas de fuerza.

Todo campo escalar da origen por derivación a un campo vectorial cuyas componentes son [4]. Recíprocamente un campo vectorial que admite potencial u, puede deducirse como gradiente de este potencial.

Según se ha demostrado en (274) el valor de la integral [2] del vector, es decir, el trabajo, es la diferencia de potencial en ambos extremos. Resulta así la fórmula fundamental:

$$\boxed{\int_A^B \text{Grad. } u = \int_A^B Du = u(B) - u(A)}$$

Como potencial físico v suele tomarse u con signo contrario; este convenio no altera los resultados anteriores, pero al calcular el trabajo de A a B resulta $v(A) - v(B)$, es decir, el trabajo es el potencial *físico* perdido al pasar de A a B.

Según (201) la derivada de u en un punto, en cualquier dirección, se obtiene proyectando sobre ésta el gradiente, es decir, el vector que tiene su origen en el punto, luego:

En cada punto la derivada de la función potencial en una dirección cualquiera es la componente del vector correspondiente según esa dirección.

285. — Integral superficial de un campo vectorial.

Sean α, β, γ los cosenos directores de la normal a la superficie S en un punto; según la definición (254) de elemento de superficie, se tiene: $dx.dy = \gamma.d\sigma$; debiendo tomarse γ *positivo*, puesto que $d\sigma$, dx, dy son positivos; esto equivale a considerar la semirrecta normal que forma ángulo agudo con el semieje $+z$, es decir, la semirrecta normal dirigida hacia arriba. En cambio, como en la integral sobre una superficie cerrada (279) la integral relativa al casquete inferior figura con el signo —, basta considerar $\gamma < 0$, es decir, la semirrecta normal dirigida hacia abajo y con este convenio resulta:

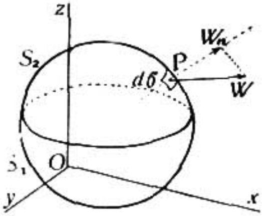
Para toda función $\zeta(x, y, z)$ *es:*

$$\int\int_S \zeta.dx.dy = \int \zeta.\gamma.d\sigma$$

siendo γ el tercer coseno director de la normal exterior al cuerpo li-

mitado por S, es decir, dirigida hacia arriba en el casquete superior y hacia abajo en el inferior.

Apliquemos esta transformación a la integral doble que figura en la fórmula de Gauss y resulta:



$$\int\int \xi\, dy.dz + \eta.dz\, dx + \zeta.dx.dy =$$
$$= \int\int (\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma) d\sigma = \int w_n\, d\sigma$$

llamando w_n a la proyección sobre la normal exterior del vector $W(\xi, \eta, \zeta)$, es decir, al módulo de W_n.

Veamos ahora el importante significado físico de esta integral.

286. — Flujo y divergencia. Fórmula vectorial de Gauss. Dado un campo vectorial uniforme W, si se considera un área σ normal a la dirección de W, se llama *flujo* de W sobre σ al producto $\sigma.|W| = \sigma w$.

Si el área es oblícua al vector W, y el ángulo de incidencia es (n, W) se llama flujo al producto

$$w.\sigma.\cos(n, W) = \sigma.\text{ proy. de } W \text{ sobre } n = w_n.\sigma$$

cuyo signo depende del sentido que se adopte para la normal n. El flujo es un escalar y su significado físico depende de la magnitud que represente el vector. Si es la velocidad de un fluído, el flujo es la cantidad de éste que pasa por σ en la unidad de tiempo; si representa una radiación luminosa, calorífica, etc., el flujo es la cantidad de energía que pasa a través de σ en la unidad de tiempo, etc.

Dada una superficie curva cualquiera y un campo vectorial W de componentes variables (ξ, η, ζ) funciones de (x, y, z) el flujo elemental correspondiente a cada elemento de superficie $d\sigma$ es $w_n.d\sigma$, y el límite de la suma de flujos elementales se llama *flujo* de W a través de la superficie. Su expresión es, por tanto:

$$\text{Flujo} = \int_S w_n.d\sigma$$

Respecto del signo se hace el convenio siguiente: el flujo *saliente* de la superficie cerrada se considera *positivo*, y el *entrante* se toma *negativo*, es decir, a w_n le atribuímos signo $+$ si la proyección de W sobre la normal está dirigida hacia el *exterior* del recinto, y signo $-$ si está dirigida hacia adentro. Esto se expresa brevemente diciendo: W_n es la proyección de W sobre la normal *exterior*.

Vemos, pues, que el 2.º miembro de la fórmula de Gauss es el flujo del campo (ξ, η, ζ) a través de la superficie. Veamos el 1.º.

Se llama *divergencia* de un campo vectorial $W(\xi, \eta, \zeta)$ y se representa por la abreviatura Div. W o bien por DW, al número:

$$\text{Div. } W = DW = \xi'_x + \eta'_y + \zeta'_z$$

El significado físico de este escalar se explicará después; pero con él obtenemos esta expresión sintética de la fórmula de Gauss:

$$\boxed{\text{Flujo} = \int (\text{Div. } W)\, d\tau = \int w_n . d\sigma}$$

es decir: *El flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada es la integral de la divergencia extendida a todo el cuerpo que limita.*

287. — Rotor. Fórmula vectorial de Stokes.

También la fórmula de Stokes (281) adopta una expresión sintética e independiente de los ejes coordenados, mediante la introducción de este concepto vectorial:

Rotor de un campo vectorial (ξ, η, ζ) en un punto es el vector: (*)

$$\text{Rot } W = (\zeta'_y - \eta'_z \quad , \quad \xi'_z - \zeta'_x \quad , \quad \eta'_x - \xi'_y)$$

La fórmula de Stokes (281) se expresa, por tanto, así:

$$\boxed{\int W . dP = \int (\text{Rot } W)_n \, d\sigma}$$

La circulación de un campo vectorial a lo largo del contorno de un casquete es igual al flujo del rotor a través de este casquete.

Las tres fórmulas destacadas en recuadro constituyen el fundamento del Cálculo vectorial integral.

288. — El operador simbólico de Hamilton.

Extrañará al lector que operaciones tan diversas como son el *gradiente* de un escalar, la *divergencia* de un vector y el *rotor* de un vector se designen por notaciones tan análogas:

$$\text{D}u \quad ; \quad \text{D}W \quad \text{o bien} \quad \text{D}.W \quad ; \quad \text{D} \times W$$

Esto responde al significado del símbolo operador de Hamilton D, que se define abstractamente así:

$$\text{D} = (\text{D}_x, \text{D}_y, \text{D}_z)$$

(*) En realidad pueden adoptarse las componentes opuestas y el carácter vectorial es, por tanto, convencional, ya que su sentido no está determinado.

Si convenimos en considerar la derivada $D_x u$ como un producto simbólico de D_x por la función u, y análogamente las otras, resulta que el vector simbólico D puede multiplicarse escalar o vectorialmente. Si multiplicamos D por el escalar u (es decir, cada componente se multiplica por u) resulta el vector que hemos llamado gradiente de u.

Si se multiplica escalarmente por el vector (ξ, η, ζ) resulta, recordando la regla del producto:

$$\mathrm{D} \,.\, W = \mathrm{D}W = \xi'_x + \eta'_y + \zeta'_z$$

es decir, la divergencia del vector W.

Si se multiplica D vectorialmente por el vector (ξ, η, ζ) resulta

$$\mathrm{D} \times W = (\zeta'_y - \eta'_z \quad \xi'_z - \zeta'_x \quad , \quad \eta'_x - \xi'_y)$$

es decir, el rotor del campo W.

Con el símbolo de Hamilton D adoptan las fórmulas antes obtenidas una expresión sintética, usual en los tratados de Física y que interesa conocer.

Fórmula del potencial:

$$u = \int \mathrm{D}u$$

Fórmula de Gauss:

$$\int DW \,.\, d\tau = \int w_n \, d\sigma$$

Fórmula de Stokes:

$$\int w_t \,.\, ds = \int (D \times W)_n \, d\sigma$$

En realidad, este símbolo D no es el mismo de Hamilton, pero es muy preferible al usado por él, que es el signo llamado *nabla*: ∇

289. — Aplicaciones físicas de la integración vectorial.

a) Hidrodinámica. — El movimiento de un flúido está determinado por el campo vectorial (ξ, η, ζ) de las velocidades de sus diversos puntos. En general, estos vectores son funciones de (x, y, z, t), es decir, la velocidad de las diversas moléculas que pasan por cada punto varía con el tiempo; cuando la velocidad no depende del tiempo, el movimiento se llama *estacionario*, y las velocidades (ξ, η, ζ) forman un campo vectorial constante.

El flujo a través de una superficie cualquiera, viene expresado por la integral de Gauss

$$\int\int\int (\xi'_x + \eta'_y + \zeta'_z) dx \,.\, dy \,.\, dz$$

Si el fluído es incompresible, la cantidad que entra en un cierto tiempo por una superficie cerrada, debe ser igual a la que sale, es decir, el flujo debe ser nulo; por tanto su derivada nula, es decir:

$$\xi'_x + \eta'_y + \zeta'_z = 0 \quad \text{o sea} \quad DW = 0$$

Esta es la condición de incompresibilidad de un fluido: divergencia nula en cada punto.

La divergencia de la velocidad de un flúido es el *coeficiente relativo de dilatación*, por unidad de tiempo y unidad de volumen.

Cuando existe función potencial u, las derivadas parciales de ξ, η, ζ son las derivadas segundas de u y resulta como ecuación de incompresibilidad:

$$u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0 \quad \text{o simbólicamente;} \quad \Delta u = 0$$

que es la ecuación de Laplace.

En el caso del movimiento plano, el flujo a través de una curva cerrada es

$$\int\int (\xi'_x + \eta'_y) dx \,.\, dy = \int \xi \,.\, dy - \eta \,.\, dx$$

y la ecuación de incompresibilidad

$$\xi'_x + \eta'_y = 0$$

b) POTENCIAL NEWTONIANO. — Es este el ejemplo más importante de fuerzas que tienen función potencial.

En efecto, según la ley de Newton, la atracción (o repulsión) de un punto fijo sobre la unidad de masa a la distancia r, viene expresada por una fuerza dirigida hacia el punto fijo y de intensidad:

$$f = -k/r^2$$

Si para abreviar nos fijamos especialmente en el caso del plano, las componentes son:

$$\xi = f \cos \alpha = f.x/r = -kx/r^3 = -kx(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\eta = f \operatorname{sen} \alpha = f.y/r = -ky/r^3 = -ky(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

e inmediatamente se observa que ambas son las derivadas parciales de la función:

$$u = k/r = k(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

La misma fórmula k/r expresa el potencial en el caso de tres dimensiones.

Por tanto, el trabajo de la fuerza atractiva a lo largo de una curva cualquiera es: $k/r' - k/r$ siendo r y r' los radios vectores de los extremos; y el trabajo a lo largo de un contorno cerrado cualquiera es nulo.

Las superficies equipotenciales son esferas cuando hay una sola masa y son superficies cuya ecuación es $\Sigma . ki/ri = 0$ cuando hay varias.

c) ROTORES DE UN CAMPO VECTORIAL. — Formemos las expresiones:

$$p = \zeta'_y - \eta'_z \quad , \quad q = \xi'_z - \zeta'_x \quad , \quad r = \eta'_x - \xi'_y$$

Cuando estas tres funciones son idénticamente nulas en todo el campo, existe una función potencial u de ξ, η, ζ y por tanto la integral de la expresión $\xi . dx + \eta . dy + \zeta . dz$ a lo largo de cualquier curva cerrada es nula. Consideremos ahora el caso general en que no exista potencial; las tres funciones p, q, r son componentes de un nuevo vector que hemos llamado el *rotor* del campo W; otros lo llaman *torbellino, curl, vórtice,* .....

Se demuestra inmediatamente que la divergencia de un rotor es nula.

Si el rotor es nulo en todos los puntos del campo, el movimiento se llama *irrotacional;* entonces existe función potencial y el flujo a través de toda superficie cerrada es nulo. Si en algunos puntos aislados no es nulo, el flujo es o no nulo según que la superficie contenga o no vórtices en su interior (*).

En efecto, la carencia de vórtices, o sea la anulación del rotor en todo punto, equivale, como hemos dicho, a la existencia de potencial en todo punto del recinto, sin excepción (por la igualdad de derivadas cruzadas); por tanto, la divergencia del vector W es:

$$DW = \Delta u = 0$$

y como el flujo viene expresado por la integral triple de la divergencia en todo el recinto, resulta nulo el flujo total. En cambio, si hay puntos en que el rotor no es nulo, la integral de la divergencia en el entorno del punto no es nula; y, en general, el flujo total a través de la superficie que encierra vórtices, no será nulo; pero, si hay compensación, puede resultar nulo.

d) TEORÍA DE LA ELASTICIDAD. — En la Teoría de la Elasticidad, cada deformación de un cuerpo da origen a un campo vectorial formado por los desplazamientos de sus puntos; a cada punto le asignamos como vector $W(\xi, \eta, \zeta)$ el que lo transforma en su punto homólogo.

(*) El significado físico del rotor para dos variables, como velocidad media de rotación de las partículas en torno de una de ellas puede verse en nuestro *Resumen de la Teoría de las funciones analíticas y sus aplicaciones físicas.* Buenos Aires, 1918.

El flujo a través de una superficie S representa en este caso el volumen de materia que pasa por esa superficie en la deformación, es decir: el incremento encerrado por la superficie considerada S; luego la dilatación (positiva o negativa) sufrida por una porción de cuerpo viene expresada por la integral de la divergencia: $\int \mathrm{D}W . dv$ sobre todo el volumen.

290. — Funciones analíticas. — Problema de Dirichlet.

Hemos definido en (119) la *función analítica* de variable compleja por la condición de tener derivada única finita en cada punto, es decir, el cociente $\Delta w/\Delta z$ tiene límite independiente del Arg. Δz. Se demuestra fácilmente que la *condición necesaria y suficiente para que la función $w = u(x, y) + i . v(x, y)$* sea analítica es que se verifiquen las igualdades de Cauchy - Riemann:

$$u'_x = v'_y \qquad u'_y = - v'_x \qquad [1]$$

Demostración. — Al incrementar z resulta:

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y \qquad \Delta w = \Delta u + i\Delta v$$

Si el punto z se mueve paralelamente al eje x, es decir, si es $\Delta y = 0$, resulta como derivada en la dirección x el número $u'_x + i . v'_x$.

Si el punto z se mueve en la dirección vertical, es decir, si es $\Delta x = 0$, $\Delta z = i . \Delta y$, resulta la derivada: $- i . u'_y + v'_y$.

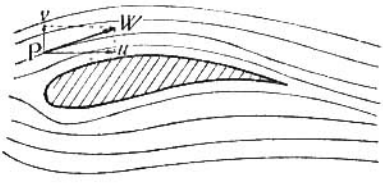
Como ambas derivadas deben ser iguales, igualando las partes reales o imaginarias resultan las igualdades [1]. Que estas condiciones son suficientes puede verse en cualquier tratado de Análisis.

Aplicación en Aerotécnica.

La teoría de la sustentación de un ala cilíndrica, de perfil cualquiera, es un ejemplo muy importante de aplicación de las funciones analíticas.

El movimiento del aire respecto del ala está definido por el vector velocidad $W(u, v)$ de cada partícula respecto de ejes coordenados fijos en el perfil. Estas funciones u, v satisfacen en todo punto (x, y) a las ecuaciones siguientes:

$$u'_x + v'_y = 0 \qquad v'_x = u'_y$$



La primera expresa la incompresibilidad del aire, hipótesis admisible, aun para las velocidades actualmente logradas. La segunda expresa la irrotacionalidad del flúido, esto es, la ausencia de torbellinos.

Salta a la vista la analogía con las ecuaciones [1], y coinciden con ellas sin más que cambiar el signo de v. Resulta, pues, que $u - iv$ es función analítica de z; esta función $w(z)$ conjugada de la velocidad física, se llama *velocidad compleja.*

La función $f(z)$ primitiva de $w(z)$ se llama *potencial complejo;* su parte real $\varphi(x, y)$ cumple las condiciones

$$\varphi'_x = u \qquad \varphi'_y = v$$

luego es el potencial del campo vectorial W; se llama *potencial de velocidades.* La otra componente $\psi(x, y)$ determina el haz de líneas de corriente, cuya ecuación es: $\psi(x, y) = C$.

Toda la teoría se desarrolla cómodamente mediante funciones complejas. Así, la presión del aire sobre el ala, o sea la *sustentación,* viene expresada por la integral de w^2 sobre el perfil; esta es la primera fórmula de *Blasius;* y análogamente se expresa su momento. Así se demuestra que esa presión es penperdicular a la dirección del movimiento y proporcional a la circulación. Este es el teorema capital de Kutta y Joukowski, ya citado en Lecc. 67. La teoría aquí esbozada puede estudiarse en nuestra obra allí citada.

Ecuación de Laplace. — Algunos problemas físicos citados y otros varios conducen al estudio de la ecuación de Laplace para tres variables; su teoría puede estudiarse en cualquier tratado de Análisis (Picard, Goursat, Vallée-Poussin).

Hay un caso importante: son los movimientos llamados *planos* o de dos dimensiones, es decir, aquellos en que todas las partículas situadas en una misma vertical se mueven de igual modo; basta, pues, considerar las coordenadas (x, y) y la ecuación de Laplace se reduce a dos términos. Para este caso es muy útil la aplicación de funciones de variable compleja, como explicamos a continuación:

Sea $u(x, y)$ una función *armónica,* esto es, que satisface a la ecuación de Laplace $\Delta u(x, y) = 0$ en un cierto recinto R del plano (x, y) y efectuemos una transformación conforme de R mediante una función analítica cualquiera que lo transforma en otro recinto R'; trasplantando los valores $u(x, y)$ sobre los puntos homólogos (x', y') resulta otra función $v(x', y')$ en R', que también satisface a la ecuación de Laplace, como fácilmente se demuestra. Esto se expresa diciendo: *la ecuación de Laplace es invariante respecto de las trasformaciones conformes.*

Por tanto: para construir las líneas equipotenciales y las líneas de fuerza (o bien las líneas de corriente si se trata del movimiento de un fluído) en un recinto, basta transformarlo en círculo, o en semiplano, construir en éste las líneas y dibujar sus homólogas en el recinto dado.

EJEMPLO. — En un estanque semicircular (n.º 118) hay una fuente A y un sumidero B; si se trasforma en semiplano (fig. 3.ª) las líneas de corriente son las rectas del haz A y sus trayectorias ortogonales las semicircunferencias de centro A; sus trasformadas en el semicírculo son los arcos AB de circunferencia y otro haz ortogonal.

NOTAS

Fórmulas de Green. — Si en la fórmula de Gauss se eligen como **funciones:**

$$\xi = u.v'_x \quad , \quad \eta = u.v'_y \quad , \quad \zeta = u.v'_z$$

resulta:
$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = u(\alpha v'_x + \beta v'_y + \gamma v'_z) = -uv'_n$$

pues la expresión del paréntesis no es sino la derivada de v según la normal exterior y designamos por v'_n la derivada según la normal *interior*. Por otra parte, la divergencia es en este caso:

$$\xi'_x + \eta'_y + \zeta'_z = u(v''_{x^2} + v''_{y^2} + v''_{z^2}) +$$
$$+ u'_x\, v'_x + u'_y\, v'_y + u'_z\, v'_z$$

y designando estos paréntesis por Δv y $Du.Dv$, resulta:

$$\int u.\Delta v\, d\tau + \int Du.Dv\, d\tau = -\int uv'_n\, d\sigma$$

Análogamente $\int u.\Delta v\, d\tau + \int Dv.Du\, d\tau = -\int vu'_n\, d\sigma$

y restando resulta la fórmula de Green:

$$\int (u.\Delta v - v.\Delta u)\, d\tau = -\int [uv'_n - vu'_n]\, d\sigma \qquad [5]$$

En particular si se supone $u = 1$

$$\int \Delta v\, d\tau = -\int v'_n\, d\sigma$$

fórmula de Green para una sola función v.

Si v es armónica $(\Delta v = 0)$ resulta

$$\int v'_n\, d\sigma = 0.$$

La integral sobre una superficie cerrada de la derivada según la normal de una función armónica dentro del recinto es nula.

Si u es armónica y v cualquiera

$$\int u.\Delta v\, d\tau = -\int [uv'_n - vu'_n]\, d\sigma$$

Funciones de Green. — Se llama función de Green en un recinto que contiene en su interior un punto O, a una función $G(x, y, z)$ que cumple estas condiciones:

1.° Es continua ella y sus derivadas en todo el recinto excepto en el punto O.

2.° La función $G + 1/r$ es continua, incluso en el punto O.

3.° En todo el recinto es $\Delta G = 0$.

4.° En la superficie es $G = 0$.

La función $G = -1/r$ cumple las condiciones 1.ª, 2.ª, 3.ª, según es fácil comprobar, pero no satisface a la 4.ª.

El problema de Dirichlet. — La determinación de la función de Green de un recinto es caso particular del problema de Dirichlet: *calcular la función* $u(x, y)$ *que en el interior del recinto satisface a la ecuación de Laplace* $\Delta u = 0$ *y en el contorno toma valores prefijados.*

Si el recinto se transforma en círculo por una función de variable compleja, basta resolver el problema para el círculo mediante la integral de Poisson. (V., p. ej., nuestro *Resumen de la teoría de las funciones analíticas y sus aplicaciones físicas*). Esto vale solamente para el plano.

CAPÍTULO XII

ECUACIONES DIFERENCIALES

LECCIÓN 70

FAMILIAS DE CURVAS Y ECUACIONES DIFERENCIALES

291. — Ecuación diferencial de un haz de curvas.

Una ecuación $\varphi(x, y) = 0$ entre las coordenadas x e y representa una curva; pero si en la ecuación figura un parámetro c, la ecuación $\varphi(x, y, c) = 0$, para cada valor que se fije a c (dentro de un cierto intervalo) representa una curva. Obtenemos, pues, infinitas curvas que forman una *familia simplemente infinita* o ***haz*** de curvas.

Por cada punto (x_0, y_0) del plano pasa, en general, un número finito de curvas de la familia, pues la constante c queda determinada por la condición: $\varphi(x_0, y_0, c) = 0$, de donde resulta el valor o valores de c que sustituídos en la ecuación $\varphi(x, y, c) = 0$ dan una o varias curvas, o bien ninguna. Para algunos valores excepcionales (x, y) la ecuación puede satisfacerse idénticamente cualquiera que sea c, y entonces pasan todas las curvas del haz por dicho punto (x, y), el cual se llama *base* del haz.

Dada la ecuación $y = \varphi(x, c)$ de un haz de curvas es posible obtener una ecuación que carece del parámetro c y que relaciona la x de cada punto, la y y la y', es decir una ecuación que expresa una propiedad geométrica de cada punto y su tangente, para todas las curvas del haz.

En efecto, si derivamos la ecuación: $y = \varphi(x, c)$, resulta: $y' = \varphi'(x, c)$; fijado c, para la curva correspondiente se verifican simultáneamente ambas condiciones y, por tanto, se verifica la que resulta de eliminar c entre ellas. Resulta así una ecuación:

$$F(x, y, y') = 0$$

a la cual satisfacen todas las curvas del haz. Esta se llama ***ecuación diferencial*** del haz. Esta ecuación se llama de primer orden porque solo figura en ella la derivada primera.

El problema inverso: dada una ecuación diferencial cualquiera obtener todas las funciones que satisfagan a esa ecuación, es decir, integrarla, lo tratamos en los párrafos siguientes.

EJEMPLO 1.° — Sean las curvas $x^2 + y^2 = r^2$. Por cada punto del plano pasa una sola circunferencia del haz.

Derivando resulta: $x + y\,y' = 0$ y como no contiene el parámetro, no es necesaria la eliminación; esta es la ecuación diferencial del haz, la cual expresa la propiedad geométrica $y' = -x/y$, es decir: la normal a cualquier curva del haz en un punto cualquiera A es el radio correspondiente OA.

EJEMPLO 2.° — Si la ecuación es $(x - a)^2 + y^2 = 1$, por cada punto del plano pasan dos circunferencias del haz.

Derivando resulta: $x - a + y\,y' = 0$, y eliminando a se obtiene la ecuación diferencial del haz:

$$y^2\,y'^2 + y^2 = 1.$$

292. — Teorema de existencia de las ecuaciones de primer orden.

Una ecuación cualquiera $F(x, y, y') = 0$ que liga la variable x, la función y, la derivada primera y', se llama ecuación diferencial de *primer orden* para distinguirla de las que contienen las derivadas de órdenes superiores y'', y''', etc., que se llaman ecuaciones diferenciales de segundo, tercero .... orden, las cuales estudiaremos en capítulos siguientes.

El problema de encontrar todas las funciones que satisfacen a la ecuación es el inverso del resuelto en el número anterior y se llama *integrar la ecuación diferencial*. Geométricamente tiene este significado: encontrar la familia de curvas que tienen una cierta propiedad geométrica entre las coordenadas de cada punto y la tangente en él.

Si la ecuación diferencial de primer orden cumple la condición exigida en (205), para despejar las funciones implícitas, puede escribirse en la forma explícita

$$y' = f(x, y)$$

siendo $f(x, y)$ una función *uniforme* de x, y; pero cuando y' sea multiforme se obtendrán tantas ecuaciones diferenciales como soluciones tenga la ecuación resuelta respecto de y'.

Suponiendo y' uniforme y fijado un punto (x_0, y_0) ordinario de $f(x, y)$ (*) resulta, pues, un solo valor y'_0 dado por la ecuación, y derivando resultan los y_0'', y_0''' .... ; por tanto, para otro valor x

(*) He aquí la definición general que de ellos puede darse:
El punto (x_0, y_0) es ordinario cuando $f(x, y)$ admite un desarrollo en serie según las potencias de $x - x_0$, $y - y_0$, es decir, cuando el resto de la fórmula de Taylor tiende a cero para $n \to \infty$.

cualquiera, la función buscada queda determinada por la fórmula de Mac-Laurin:

$$y = y_0 + \frac{(x - x_0)\,y'_0}{1!} + \frac{(x - x_0)^2\,y''_0}{2!} + \ldots.$$

Recíprocamente: Cauchy demostró (ver cualquier tratado moderno de Análisis, por ejemplo, Goursat, t. II) que esta serie converge y define por tanto, una función de x, que satisface a la ecuación diferencial dada. Se exceptúan aquellos puntos (x_0, y_0) en los cuales no está definida la función $f(x, y)$; por ellos no pasa ninguna curva del haz; y también los puntos singulares de $f(x, y)$ por los cuales pueden pasar infinitas curvas.

Una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ tiene infinitas soluciones; cada una queda determinada fijando el valor y_0 de y que corresponde a un valor $x = x_0$. O sea: por cada punto del plano (o de la región del plano en que $f(x, y)$ cumple las condiciones impuestas) pasa una curva y sólo una que satisface a la ecuación diferencial.

Toda expresión $y = \varphi(x, c)$ que satisface a la ecuación diferencial, cualquiera que sea el valor de la constante c, se llama *integral general* de la ecuación, si fijado cualquier punto (x_0, y_0) que sea ordinario para la función $f(x, y)$ existe un valor de c, y por lo tanto una curva integral, que satisface a la ecuación y pasa por el punto elegido.

La integral general da, por consiguiente, *todas* las soluciones de la ecuación que pasan por los puntos *ordinarios* de la función $f(x, y)$; pero si esta función no es uniforme, por los puntos llamados de *ramificación*, es decir, por aquellos en cuyo entorno hay dos o más funciones que se confunden en dicho punto, pueden pasar varias curvas integrales del haz; y aun otra distinta, que estudiaremos más adelante, y se llama *integral singular*.

EJEMPLOS. — La ecuación $y' = -x/y$ considerada en el Ej. 1 del párrafo anterior cumple las condiciones impuestas en todo el plano, excepto en el eje x.

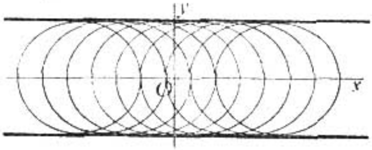
En el ejemplo 2.° la ecuación diferencial se descompone en dos:

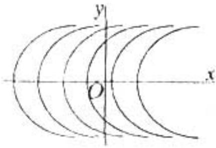
$$y' = + \frac{\sqrt{1 - y^2}}{y} \qquad y' = - \frac{\sqrt{1 - y^2}}{y}$$

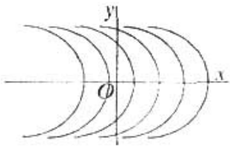
(*) Un punto puede ser singular aunque esto no se note en el campo real; por ejemplo, es singular el punto $(0, 0)$ en la función

$$e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$

las cuales representan, separadamente, los dos haces de semicircunferencias que indica la figura 2.ª; pues en la primera ecuación diferencial tiene y' el mismo signo de y, es decir, es positiva sobre el eje x y negativa debajo de él; y lo contrario sucede en la segunda ecuación.







Obsérvese que por cada punto interior de la zona limitada por las rectas $y = 1$, $y = -1$, pasa una curva de cada haz y sólo una, pues en cada semicircunferencia se excluyen sus extremos.

293. — Trayectorias ortogonales de un haz de curvas.

Dada una familia de curvas $\varphi(x, y, c) = 0$, se llama *trayectoria ortogonal* a toda curva que las corta perpendicularmente.

Formemos la ecuación diferencial de primer orden: $f(x, y, y') = 0$, que representa la familia dada. La condición que debe cumplir cada curva ortogonal buscada es:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y'}$$

siendo y' el coeficiente angular de la tangente a la curva del haz. Por tanto, si en vez de $y' = dy/dx$ sustituimos $-x' = -dx/dy$, tenemos la ecuación diferencial de las curvas ortogonales:

$$f(x, y, -x') = 0.$$

Regla práctica. — Se forma la ecuación diferencial del haz de curvas, se permutan dx y dy cambiando el signo a uno de ellos y se tiene la ecuación diferencial del haz de curvas ortogonales al haz dado.

EJERCICIOS

1. — Obtener por la serie de Mac-Laurin la integral general de la ecuación $y' = y + x$.

2. — Obtener el haz de trayectorias ortogonales de todas las hipérbolas $xy = c$.

3. — Idem de las parábolas de eje x, foco O, y parámetro positivo.

(Resultan las parábolas del mismo eje y foco, de parámetro negativo).

TIPOS ELEMENTALES DE ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

294. — Ecuaciones con variables separables.

Cuando la ecuación tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}$$

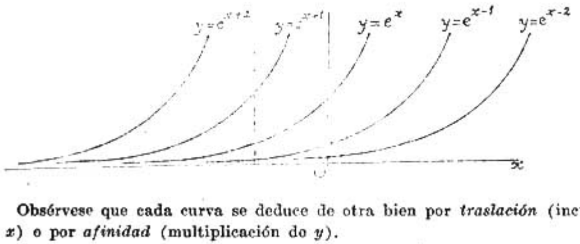
se separan las variables así: $\varphi(x)\,.\,dx = \psi(y)\,.\,dy$, e integrando ambos miembros, si $\Phi(x)$, $\Psi(y)$ son dos funciones primitivas cualesquiera, tenemos: $\Phi(x) = \Psi(y) + c$ que es la integral general.

En este tipo queda incluído el caso en que la ecuación no contiene x, y también cuando la función no contiene la y, pues $y' = f(x)$, es el caso de la integración ordinaria.

EJEMPLO 1.° — Curvas que tienen la subtangente constante k. Es decir: $S_t = y/y' = k$ de donde: $dx = k.dy/y$ o integrando ambos miembros resulta:

$$x = k.ly + c \quad \text{o sea:} \quad y = e^{\frac{x-c}{k}}$$

que es la ecuación de la familia de curvas buscadas.



Obsérvese que cada curva se deduce de otra bien por *traslación* (incremento de x) o por *afinidad* (multiplicación de y).

EJEMPLO 2.° — Hallar las curvas que tienen la subnormal constante. Es decir:

$$S_n = y\,.\,y' = p$$

$$y\,.\,dy = p\,.\,dx \quad \therefore \quad \tfrac{1}{2}y^2 = px + c$$

La integral general es, por consiguiente:

$$y^2 = 2px + 2c$$

luego las curvas que tienen la propiedad dada son las parábolas de eje x y parámetro p.

295. — Ecuaciones homogéneas en x, y.

Cuando la función del segundo miembro es un cociente de dos funciones homogéneas del mismo grado, o sea es una función de (x, y) que no varía al multiplicar x e y por una constante arbitraria, es decir, si $f(x, y)$ sólo depende del valor del cociente $y/x = z$, es, en realidad, una función $\varphi(z)$ de la sola variable z y haciendo el cambio de la y por la z resulta:

$$y = zx \quad ; \quad dy = z . dx + x . dz$$

y sustituyendo, la ecuación se transforma así:

$$x . dz = [\varphi(z) - z] \, dx$$

de donde resulta, separando las variables:

$$\frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x}$$

y después de integrados ambos miembros se restablece el valor $z = y/x$ quedando una ecuación en x, y, c, que es la integral buscada.

Ejemplo 1.° — Sea la ecuación homogénea:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

pongamos: $\qquad y/x = z; \quad y = xz; \quad dy = z . dx + x . dz$

$$z . dx + x . dz = - \sqrt{1 + z^2} \, dx$$

$$\frac{dz}{-(z + \sqrt{1 + z^2})} = \frac{dx}{x}$$

haciendo: $z + \sqrt{1 + z^2} = t$ se integran fácilmente ambos miembros y resulta.

$$lx = - \tfrac{1}{2} \, l(z + \sqrt{1 + z^2}) + \tfrac{1}{4} : (z + \sqrt{1 + z^2}) + c$$

reemplazando t por su valor, se tiene la ecuación de la familia de curvas buscadas.

Ejemplo 2. — Curvas cuya subtangente en cada punto es la media aritmética de las coordenadas del punto.

La ecuación es: $\qquad 2y . dx = (x + y) dy$

y efectuado el cambio de variable $y = xz$, se transforma así:

$$2z . dx = (1 + z)(x . dz + z . dx)$$

y separando las variables:

$$\frac{dx}{x} = \frac{(1 + z) dz}{z - z^2}$$

Integrando resultan las parábolas: $y = c(x - y)^2$

296. — Ecuaciones lineales.

Se llaman *ecuaciones lineales incompletas* a las del tipo.

$$y' + P(x) \cdot y = 0 \quad \text{o sea:} \quad y'/y = -P(x) \qquad [1]$$

Si llamamos $p(x)$ a una función primitiva cualquiera de $P(x)$, integrando los dos miembros, sale:

$$ly = -p(x) + lc, \quad \text{de donde:} \quad y = c \cdot e^{-p(x)}$$

integral general de la ecuación lineal incompleta.

La ecuación lineal completa (con segundo miembro) es de la forma:

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad [2]$$

Hagamos: $y = u \cdot v$, y esta ecuación toma la forma:

$$uv' + u'v + P \cdot uv = Q$$

o sea:
$$u(v' + Pv) + u'v = Q$$

el primer término del primer miembro es igual a cero si elegimos v de modo que sea $v' + Pv = 0$, para lo cual basta tomar $v = e^{-p(x)}$

$$u' = Q : v = Qe^{p(x)}$$

e integrando, sale: $u = \int Qe^{p(x)} \cdot dx + C$.

Luego la función $y = uv$, o sea la *integral general* de la ecuación, es:

$$y = e^{-p(x)} \left[\int Qe^{p(x)} dx + C \right]$$

Ejemplo. — La intensidad I de una corriente alternada, en el momento t viene expresada por la ley de Ohm:

$$E \cdot \text{sen}\, wt = RI + LI'$$

siendo E la fuerza electromotriz máxima, w la frecuencia, R la resistencia, L el coeficiente de autoinducción.

Aplicando la fórmula general de las ecuaciones lineales y recordando las integrales del tipo $\int e^{rt} \cdot \text{sen}\, wt \cdot dt$, ya calculadas en la pág. 189, resulta, llamando $r = R : L$, la expresión:

$$I = E(r \cdot \text{sen}\, wt - w \cdot \cos wt) : L(w^2 + r^2) + Ce^{-rt}$$

que se compone de un sumando periódico y otro que decrece rápidamente.

Ejercicio. — Integrar la ecuación: $y' + 2xy = x$.

Solución: $Ce^{-x^2} + \frac{1}{2}$.

297. — Ecuaciones de Clairaut.

La ecuación de todas las rectas del plano (excepto las paralelas al eje y) es:

$$y = cx + a;$$

pero si los coeficientes no son los dos arbitrarios, sino que están ligados por una relación $a = \alpha(c)$, tenemos una familia simplemente infinita: $y = cx + \alpha(c)$ pues contiene una sola constante.

La ecuación diferencial de este haz se obtiene así: derivando resulta $y' = c$, y eliminando c resulta

$$y = y'.x + \alpha(y') \qquad [3]$$

Las ecuaciones diferenciales de este tipo se llaman: *ecuaciones de Clairaut.*

Recíprocamente: toda ecuación de este tipo tiene por integral general las rectas $y = cx + \alpha(c)$ puesto que éstas la satisfacen, como acabamos de ver.

Como en estas ecuaciones no es y' función uniforme de (x, y), no es aplicable el teorema de existencia, y además de la integral general puede haber otra integral llamada *singular*, envolvente del haz de rectas, que se obtendrá como se vió en (243). Volveremos sobre este concepto en (303).

EJEMPLO. — Ecuación diferencial de las rectas que son cortadas por los ejes x, y en segmentos de longitud constante k

$$y = cx + d \quad ; \quad d^2 + d^2/c^2 = k^2 \quad \therefore \quad d = \pm ck/\sqrt{1 + c^2}$$

La ecuación diferencial es por tanto:

$$y = y'x + ky'/\sqrt{y'^2 + 1}$$

NOTA. — He aquí otro método para deducir la integral general y la solución singular: derivando [3], se tiene después de simplificar:

$$y''[x + \alpha'(y')] = 0$$

Si es $y'' = 0$, resultan las rectas ya obtenidas. La anulación del otro factor da otra ecuación; eliminando y' entre ella y la propuesta, resulta una curva, que según (243) es la *envolvente* del haz de rectas y se llama *integral singular.*

298. — Ecuaciones de Lagrange.

Si en la ecuación [3] el coeficiente de x no es precisamente y', sino una función de y', resulta la ecuación de Lagrange:

$$y = \alpha(y')x + \beta(y') \qquad [4]$$

Adoptemos como variable independiente $y' = t$, siendo, por tanto, x e y funciones de t; para determinarlas, derivemos respecto de x y resulta:

$$t = \alpha(t) + \alpha'(t)x.t' + \beta'(t).t'$$

Si ahora adoptamos t como variable independiente, es decir, si determinamos cada punto de una curva integral por su pendiente, es x función de t, siendo $x' = 1 : t'$, y la ecuación se transforma así:

$$(\alpha(t) - t)x' + \alpha'(t)x + \beta'(t) = 0$$

que es lineal y determina $x = x(t, c)$ como ya se explicó; teniendo despejada x, la ecuación [4] determina:

$$y = \alpha(t)x(t, c) + \beta(t)$$

y obtenemos así las curvas integrales en forma paramétrica.

Hay un caso de excepción: cuando sea $\alpha(t) = t$; es precisamente el caso, ya estudiado, de las ecuaciones de Clairaut.

EJEMPLO. — Sea $y = x . y'^2 + y'^3$. La ecuación lineal que determina x, es:

$$(t^2 - t)x' + 2t . x + 3t^2 = 0$$

o sea:

$$(t - 1)x' + 2x + 3t = 0$$

cuya solución general es:

$$x = (c + 3t^2/_2 - t^3) : (t - 1)^2$$

y las ecuaciones paramétricas de cada integral son:

$$x = (c + 2t^2 - 2t^3) : (t - 1)^2$$

$$y = t^3 + (c + 3t^2 - 2t^3)t^2 : 2(t - 1)^2$$

299. — Ecuaciones de Bernoulli.

Una generalización de las ecuaciones lineales incompletas es la siguiente de Bernoulli:

$$y' = A(x)y^n + B(x) . y \qquad [5]$$

un cambio de variable que ocurre inmediatamente es este:

$$y = z^m \quad \therefore \quad y' = m . z^{m-1} . z' \quad , \quad y^n = z^{mn}$$

Si dividimos por z^{m-1} queda despejada z' y el exponente de z se reduce a 1; sólo falta que desaparezca el exponente de z en el último término, para que la ecuación sea lineal y para ello basta elegir m de tal modo que

$$mn - (m - 1) = 0 \quad \therefore \quad m = -1 : (n - 1)$$

resultando la ecuación lineal completa:

$$m . z' = A(x) + B(x)z \qquad [6]$$

y una vez integrada ésta, se deduce inmediatamente y.

EJEMPLO. — Curvas tales que la ordenada del punto de intersección de la tangente con el eje y sea proporcional al cuadrado de la ordenada.

Como la abscisa del pie de la tangente es $y - xy'$, resulta la ecuación:

$$y - xy' = ky^2$$

que es del tipo $n = 2$ de Bernoulli; se reduce a lineal sustituyendo:

$$y = z^{-1} \quad \therefore \quad y' = -z^{-2} . z'$$

$$z^{-1} + xz^{-2} . z' = kz^{-2}$$

y multiplicando por z^2/x resulta la ecuación lineal:

$$z' + x^{-1} z = k x^{-1}$$

cuya solución general es

$$z = x^{-1}\left(\int k \, . \, dx + C \right) = k + C/x$$

luego las curvas que resuelven el problema son las hipérbolas

$$y(c + kx) = x$$

que tienen la asíntota fija $y = 1/k$ y la otra paralela al eje y.

300. — Ecuaciones de Riccati.

Ocurre inmediatamente hacer también la generalización de la ecuación lineal completa agregando un término y^n; pero tales ecuaciones ya no se pueden resolver por cuadraturas; ni aun siquiera en el caso más sencillo $n = 2$. Tales ecuaciones:

$$y' = A(x) y^2 + B(x) y + C(x) \tag{7}$$

se llaman de Riccati, y se pueden resolver completamente cuando se conoce una integral particular y_1; pues sustituyendo $y = y_1 + z$, resulta la nueva ecuación:

$$y'_1 + z' = A \, . \, y_1^2 + B \, . \, y_1 + C + 2A \, . \, y_1 \, . \, z + Az^2 + Bz$$

que se simplifica por satisfacer y_1 a la ecuación [7], resultando:

$$z' = (2Ay_1 + B) z + Az^2$$

que no es lineal. pero se hace lineal dividiendo por z^2 y poniendo $Y = 1/z$, pues se obtiene:

$$Y' = -(2Ay_1 + B) Y - A$$

Integrada ésta, se deduce la integral de [7] mediante la fórmula de transformación:

$$y = y_1 + 1/Y \tag{8}$$

Ejemplo. — Una solución particular de la ecuación

$$y' = x^{-2} - x^{-1} \, . \, y - y^2$$

es $y = -x^{-1}$, y con la sustitución $y = -1/x + 1/Y$ resulta la ecuación lineal:

$$Y' = 3x^{-1} \, . \, Y - 1$$

cuya solución general es

$$Y = x^3 (\tfrac{1}{2} x^{-2} + C) = \tfrac{1}{2} x + Cx^3$$

Nota. — Hay una gradación interesante en las ecuaciones lineal incompleta, lineal completa y de Riccati. En la primera el cociente de dos integrales cualesquiera $y_1 : y_2$ es constante; en la segunda es constante el cociente de diferencias o razón simple $(y_1 - y_2) : (y_1 - y_3)$; y, por tanto, la razón doble de cuatro integrales cualesquiera ,por ser cociente de dos razones simples; finalmente, como la transformación lineal [8] conserva los valores de las razones dobles, como hemos demostrado en la lección 28 resulta: *la razón doble de cada cuaterna de integrales de una ecuación de Riccati es constante.*

EJERCICIOS

Integrar las siguientes ecuaciones de Clairaut:

$y = y'x + y' - y'^2$ sol. singular: $4y = (x + 1)^2$

$y = y'x + \sqrt{1 + y'^2}$ „ „ $x^2 + y^2 = 1$

Lección 72

ECUACIONES GENERALES DE PRIMER ORDEN

301. — Integración de las diferenciales exactas.

Toda ecuación de primer orden $y' = f(x, y)$ puede ponerse en la forma:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \qquad [1]$$

se puede adoptar, por ejemplo:

$$P = f(x, y) \quad , \quad Q = -1$$

o bien, se puede multiplicar o dividir P y Q por cualquier constante o función de x, y, que no sea idéntica a cero. Precisamente en esta indeterminación, que permite multiplicar por un factor conveniente, se funda el método que se llama del *factor integrante.*

Consideremos primero el caso en que existe un potencial: es decir, que cumplida la condición de las derivadas cruzadas, exista una función U tal que: $U'_x = P$, $U'_y = Q$.

Entonces el binomio del primer miembro es una diferencial exacta: $dU(x, y) = 0$ y por tanto debe ser: $U(x, y) = c$. Como esta función satisface a la ecuación diferencial y contiene una constante arbitraria, es la integral general.

Ejemplo. — Sea la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 2xy}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$dx(x^2 - 2xy) - dy(x^2 + y^2 + 1) = 0.$$

Se cumple la condición: $P'_y = Q'_x$, luego [1] es diferencial exacta, y existe la función potencial U tal que:

[2] $$U'_y = -x^2 - y^2 - 1 \quad ; \quad U'_x = x^2 - 2xy$$

De [2] sacamos:

$$U = -x^2 y - y^3/3 - y + \varphi(x)$$

$$U'_x = -2xy + \varphi'(x) = x^2 - 2xy$$

de donde

$$x^2 = \varphi'(x); \quad \varphi(x) = x^3/3 + C$$

luego la integral general U es:

$$U = -x^2 y - y^3/3 - y + x^3/3 + C.$$

302. — Cálculo del factor integrante.

Cuando la expresión dada $Pdx + Qdy$ no es diferencial exacta, multiplicando por un factor conveniente $\varphi(x, y)$ se puede conseguir transformarla en diferencial exacta. El cálculo de dicho factor integrante no es fácil en general; pero hay casos en que se obtiene inmediatamente, como vemos en este ejemplo.

EJEMPLO 1.° — El primer miembro de la ecuación

$$x\,dy - y\,dx = 0,$$

no es diferencial exacta, pero multiplicado por $1/xy$ se convierte en:

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x}$$

que es la diferencial exacta de: $ly - lx$, luego la integral general de la ecuación dada es:

$$ly - lx = lc \quad , \quad \text{o sea:} \quad y = cx.$$

EJEMPLO 2.° — Más general: en las ecuaciones del tipo:

$$m.y.dx + n.x.dy = 0,$$

el primer miembro se hace diferencial exacta del producto $x^m y^n$ multiplicando por el factor $x^{m-1} y^{n-1}$, pues resulta:

$$(m.x^{m-1})\, y^n\, dx + x^m (n.y^{n-1})dy = d(x^m y^n) = 0$$

y la integral general es: $x^m y^n = C$.

Concepto de entropía. — Ejemplo de expresión que no es diferencial exacta es la obtenida en lección 65:

$$\Delta Q = (cv.dp + Cp.dv) : R$$

que expresa el incremento total de energía de un gas al pasar del estado (p, v) al $(p + dp, v + dv)$ por un camino prefijado; si no se fija éste, carece de sentido escribir dQ.

El factor integrante es en este caso inmediato:

$$\frac{1}{t} = \frac{R}{pv}$$

y multiplicando por él resulta la diferencial de la función $S = c.lp + C.lv$ que se llama *entropía*, y que es función del *estado*, es decir, de las coordenadas (v, p), estando determinado su valor salvo una constante aditiva.

303. — Integrales singulares de las ecuaciones de 1er. orden.

Cuando la ecuación $f(x, y, y') = 0$ da origen a dos o más funciones uniformes $y' = f_1(x, y)$; $y' = f_2(x, y)$, como ha sucedido en el ejemplo de (292), resulta que además de la solución general $y = \varphi(x, c)$ puede haber otra solución $y = \psi(x)$, que se llama *integral singular*.

Así, en dicho ejemplo segundo, las funciones $y = +1$, $y = -1$ satisfacen a la ecuación diferencial y, sin embargo, no están incluídas en la familia de circunferencias de radio 1 y centro en el eje x, definida por la integral general.

En efecto, obsérvese que al descomponer la ecuación diferencial en dos uniformes, resolviendo la ecuación de segundo grado respecto de y', hemos excluído el caso en que ambas raíces coincidan, es decir, los puntos en que sea:

$$\sqrt{1 - y^2} = 0 \qquad \text{o sea} \qquad y = \pm 1$$

Estas rectas son las *envolventes* del haz de circunferencias, es decir, son tangentes a todas ellas.

Más general: si la familia de curvas $\varphi(x, y, c) = 0$ está representada por la ecuación diferencial $f(x, y, y') = 0$, la envolvente de las curvas es una *integral singular*.

En efecto; por cada uno de estos puntos de la envolvente pasa una curva del haz, tangente a ella y por tanto: la x, la y, y la y', son las mismas de esta curva y por tanto satisfacen a la ecuación diferencial.

304. — Líneas de fuerza de un campo vectorial.

Dado un campo vectorial de componentes $[X(x,y),\ Y(x,y)]$ las líneas de fuerza están caracterizadas por la condición de que en cada punto la tangente es el vector correspondiente, es decir: tiene por coeficiente angular: $Y(x,y)/X(x,y)$ luego la ecuación diferencial de las líneas de fuerza del campo vectorial es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)}$$

o abreviadamente:

[1] $$Ydx - Xdy = 0$$

El caso más importante se presenta cuando se verifica:

[2] $$X'_y = Y'_x$$

pues entonces existe una función potencial U del campo, es decir, tal que las componentes son las derivadas parciales:

[3] $$X = U'_x \quad , \quad Y = U'_y$$

y la ecuación de las líneas equipotenciales es $U =$ constante.

La condición necesaria y suficiente para que la expresión [1] sea diferencial exacta es

[4] $$-Y'_y = X'_x$$

Entonces existe un potencial V tal que:

[5] $$-Y = V'_x, \ X = V'_y$$

y la ecuación de las líneas de fuerza es: $V =$ constante, y sustituyendo en [4] los valores [3] resulta:

$$U''_{x^2} + U''_{y^2} = 0 \quad \text{o simbólicamente:} \quad \Delta U = 0$$

Análogamente, sustituyendo en [2] los valores [5] resulta:

$$V''_{x^2} + V''_{y^2} = 0 \quad \text{o sea:} \quad \Delta V = 0$$

es decir: los dos potenciales (que se llaman conjugados) satisfacen a la ecuación de Laplace.

De [3] y [5] resulta: *las curvas equipotenciales $U =$ const. y las líneas de fuerza $V =$ const. son ortogonales.*

EJEMPLO. — Sea el campo vectorial:

$$X = x^2 - y^2 \qquad Y = -2\,xy$$

que cumple la condición de las derivadas cruzadas; luego existe un potencial U, tal que:

$$U'_x = x^2 - y^2 \quad , \quad U'_y = -2xy \quad \therefore \quad U = \tfrac{1}{3}x^3 - y^2x + c$$

También existe un potencial conjugado V, tal que:

$$V'_x = -2xy \quad , \quad V'_y = y^2 - x^2 \quad \therefore \quad V = -x^2y + \tfrac{1}{3}y^3 + C$$

Dibújense las curvas equipotenciales $U =$ const. y las líneas de fuerza $V =$ const.

NOTAS

Sobre el factor integrante.

Conviene aclarar el verdadero alcance de este concepto, pues pudiera creerse en su eficacia para la integración de ecuaciones de primer orden.

Suponiendo $Q = 1$, pues basta dividir por Q para lograrlo, la condición para que el producto $(P \cdot dx + dy)z$ sea diferencial exacta es:

$$z_x - P \cdot z_y = P_y \cdot z$$

ecuación lineal en derivadas parciales cuya resolución, como veremos en (325), se reduce a la de un sistema de ecuaciones ordinarias, una de las cuales es precisamente la propuesta.

Que en algunos casos se encuentra el factor, no es extraño; son aquellos en que se conoce la integral general $F(x, y) = C$, pues ambos problemas son equivalentes. Conocida F, la ecuación diferencial puede escribirse en la forma:

$$F_x \cdot dx + F_y \cdot dy = 0 \qquad \text{luego } z = F_y.$$

EJERCICIO. — Obtener el factor integrante de la ecuación lineal y de la ecuación homogénea.

INTEGRACION APROXIMADA DE ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

305. — Método del desarrollo en serie.

No existe método general para reducir una ecuación diferencial a *cuadraturas* (esto es, a *integraciones* ordinarias de funciones de una sola variable); pero la integral general existe siempre que se cumplan las condiciones (292) y está representada por la serie que allí hemos obtenido.

Cuando la ecuación dada no sea de ninguno de los tipos elementales integrados en la lección 69 por cuadraturas ,habrá de abordarse su integración mediante la serie [1] anterior, que siempre resulta convergente en un cierto intervalo, según el teorema fundamental arriba enunciado. Obtendremos, pues, un arco de curva integral a partir del punto inicial (x_0, y_0) a uno y otro lado ;tomaremos uno cualquiera de sus puntos (x_1, y_1) como inicial, y repitiendo el mismo método obtendremos otro arco y así sucesivamente.

El cálculo de las derivadas sucesivas se hace fácilmente:

$$y' = f; \quad y'' = f'_x + f'_y \cdot y' = f'_x + f'_y \cdot f$$

$$y''' = f''_{xx} + 2f''_{xy} \cdot f + f''_{yy} \cdot f^2 + f'_y \cdot f'_x + (f'_y)^2 \cdot f$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

y tenemos la fórmula final:

$$\Delta y = hf + \tfrac{1}{2}h^2\,[f'_x + f'_y \cdot f] +$$

$$+ h^3/3!\,[f''_{x^2} + 2f''_{xy}\,f + f''_{y^2} \cdot f^2 + f'_y(f'_x + f \cdot f'_y)] + \ldots \qquad [2]$$

que da el valor *exacto* de Δy correspondiente al $\Delta x = h$.

EJEMPLO. — **Ecuación:** $y' = y^2 + x$, **con las condiciones iniciales:** $x = 0$, $y = 0$.

$$\begin{aligned} y'' &= 2y\,y' + 1 \\ y''' &= 2y\,y'' + 2y'^2 \\ y^{\text{IV}} &= 2y\,y''' + 6y'\,y'' \\ y^{\text{V}} &= 2y\,y^{\text{IV}} + 8y'\,y''' + 6y''^2 \end{aligned}$$

de donde:

$$y_0' = 0,\ y_0'' = 1,\ y_0''' = 0,\ y_0^{\text{IV}} = 0,\ y_0^{\text{V}} = 0,\ \ldots$$

$$y = \tfrac{1}{2}x^2 + {}^1/_{20}x^5 + \ldots$$

una solución bastante aproximada es, pues, $\tfrac{1}{2}x^2$. En un interalo de 0,1 el error cometido tomando este arco de parábola es menor que 0,000001.

306. — Método de aproximación de Euler.

Como el método de desarrollar en serie tiene a veces el inconveniente de la lenta convergencia, o la pequeñez del intervalo de validez, se han ideado métodos más rápidos para el cálculo de la integral que pasa por un punto dado (x_0, y_0).

El cociente $\Delta y/\Delta x$ es igual al valor de la derivada en un punto intermedio del intervalo considerado; tendremos, pues, en el punto (x_0, y_0) un valor aproximado del Δy correspondiente a un incremento Δx admitiendo que y' varíe tan poco en el intervalo Δx que pueda considerarse como constante. Es decir:

$$\Delta y = y_1 - y_0 \sim (x_1 - x_0) \, . f(x_0, y_0)$$

Esto equivale a tomar como curva un segmento de tangente. Si en el punto (x_1, y_1) consideramos el valor que en él toma la derivada $y' = f(x_1, y_1)$, calcularemos el nuevo incremento:

$$\Delta y = (y_2 - y_1) \sim (x_2 - x_1) f(x_1, y_1)$$

y así sucesivamente.

Este método clásico de Euler no es admisible sino como aproximación grosera, pues la quebrada así formada se va separando más y más de la curva integral que buscamos.

EJEMPLO. — Si en una corriente uniforme de un canal se interpone un obstáculo (un muro por ejemplo) el fondo del canal no es paralelo a la superficie del agua, sino que ésta se eleva formando una curva; la diferencia de ordenadas y entre el fondo y la superficie es $y = f(x)$.

La ecuación diferencial de tal curva es:

$$\frac{j . dx}{dy} = \frac{y^3 - k^3}{y^3 - h^3}$$

siendo k un coeficiente de rozamiento, j la pendiente del fondo del canal y h una constante. La ecuación [1] puede integrarse por cuadraturas. Pero aproximadamente, puede integrarse así: la [1] según lo dicho más arriba es:

$$\Delta y \sim j . \Delta x \, \frac{y^3 - h^3}{y^3 - k^3}$$

para un punto x_0 se puede medir la altura y_0 del agua, y se tiene la condición inicial del problema. Se toma para Δx un cierto valor y se calcula el incremento Δy que le corresponde. Se tiene un nuevo punto (x_1, y_1) con el cual se vuelve a operar como si fuera inicial. Se determina así por puntos la curva de la superficie del agua.

307. —Método de Runge.

Partiendo del punto inicial (x_0, y_0) el incremento Δy correspondiente al $\Delta x = h$, viene expresado por la fórmula [2]. El método de Euler se limita a considerar su primer término, aproximación demasiado deficiente, mientras que el método de Runge da los dos primeros y aún los tres.

La primera fórmula de Runge es la siguiente:

$$k' = h.f(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ y_0 + \tfrac{1}{2}f.h) \qquad [3]$$

y su significado geométrico es éste: la tangente en A_0 a la curva integral corta a la recta $x = x_0 + \tfrac{1}{2}h$ en un punto A_1 que tiene las coordenadas $(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ y_0 + \tfrac{1}{2}f.h)$ al cual corresponde una tangente; la paralela por A_0 determina en la recta $x = x_0 + h$ un punto que aproximadamente pertenece a la curva integral de A_0.

En efecto, desarrollando por la fórmula de Taylor, resulta:

$$k' = hf + \tfrac{1}{2}h^2(f'_x + f'_y.f) + \tfrac{1}{8}h^3(f''_{x^2} + 2f''_{xy}.f + f''_{y^2}.f^2) + \ldots.$$

desarrollo que coincide con [2] en los términos h y h^2, siendo el error de tercer orden.

Ejemplo. — Aunque para funciones algebraicas es más ventajoso el desarrollo en serie, he aquí un ejemplo para indicar la marcha del cálculo. Sea integrar $y' = x^2 + y^2$ para $x = y = 0$ siendo $h = 0{,}2$

x	y	f	$x + \tfrac{1}{2}h$	$y + \tfrac{1}{2}hf$	f
0	0	0	0,1	0	0,002
0,2	0,002	0,04	0,3	0,006	0,018
0,4	0,020	0,160	0,5	0,036	0,025

Segunda fórmula de Runge. — Calcúlense sucesivamente:

$$k_1 = f(x_0, y_0).h \qquad k_2 = f(x_0 + h,\ y_0 + k_1).h \qquad k_3 = f(x_0 + h\ ,\ y_0 + k_2).h$$

es decir: se calcula el incremento por la fórmula de Euler; en el punto obtenido se aplica nuevamente, y otra vez en el mismo punto corregido con el nuevo incremento k_2 en vez del k_1. El promedio

$$k'' = \tfrac{1}{2}(k_1 + k_3) = \tfrac{1}{2}(f(x_0, y_0) + f(x_0 + h,\ y_0 + k_2)).h$$

da un valor del mismo orden que el k', es decir, da exactamente los términos primero y segundo del desarrollo. En efecto:

$$k_1 = h.f$$

$$k_2 = h.f + h^2(f'_x + f'_y.f) + \tfrac{1}{2}h^3(f''_{x^2} + 2f''_{xy}.f + f''_{y^2}.f^2) + \ldots.$$

$$k_3 = [f + h.f'_x + k_2 f'_y + \tfrac{1}{2}(h^2 f''_{x^2} + 2h\,k_2 f''_{xy} + k_2^2 f''_{y^2}) + \ldots.]\,h =$$

$$= h.f + h^2(f'_x + f'_y f) + \tfrac{1}{2}h^3(f''_{x^2} + 2f''_{xy}.f + f''_{y^2}.f^2) +$$

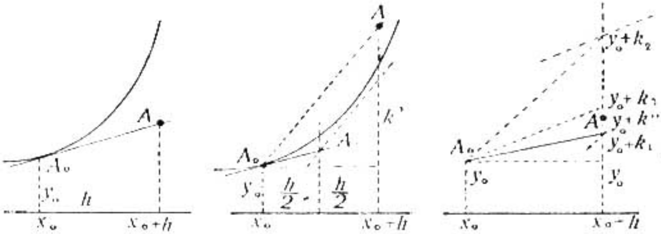
$$+ h^3\ (f'_x.f'_y + f'^2_y.f) + \ldots$$

y el promedio de k_1 y k_3 es:

$$k'' = h.f + \tfrac{1}{2}h^2(f'_x + f'_y.f) + \tfrac{1}{4}h^3(f''_{x^2} + 2f''_{xy}.f + f''_{y^2}.f^2) + \\ + \tfrac{1}{2}h^3(f'_x.f'_y + f'_{y^2}f) + \ldots .$$

que da un error de tercer orden; pero a nada conduciría obtener esta segunda fórmula del mismo orden que la más sencilla k', si no fuera porque combinadas ambas, resulta otra de orden superior, dada por la expresión:

$$K = (2k' + k''): 3 \qquad [4]$$



En efecto ,los términos comunes a k' y k'', subsisten en K; y los términos de tercer grado producen éste:

$$h^3(f''_{x^2} + 2f''_{xy}.f + f''_{y^2}.f^2 + f'_x.f'_y + f'_{y^2}.f): 6$$

que coincide con el que aparece en el desarrollo [2]. Luego el error de K es de cuarto orden.

EJERCICIOS

1. — Integrar por desarrollo en serie, la ecuación del péndulo:

$$\alpha'^2 = c + 2k.\cos\alpha$$

siendo α el ángulo con la vertical y $k = g/l$.

Obtener como primera aproximación la fórmula elemental $T = 2\pi : \sqrt{l}$.

2. — Siendo a la amplitud de la oscilación, póngase

$$k = \text{sen}\, \tfrac{1}{2}\, a \quad ; \quad \text{sen}\, t = \text{sen}\, \tfrac{1}{2}\,\alpha : \text{sen}\, \tfrac{1}{2} a$$

y resulta t expresado por una integral elíptica de primera especie.

Sea $a = 30°$; $l = g$; y resulta mediante la tabla final:

$t =$ 0,07	0,12	0,19	0,26	0,33	......	1,60
$\alpha =$ 2°	4°	6°	8°	10°	......	30°

3. — Aplíquese el método de Euler y el de Runge al ejemplo anterior, comparando los resultados.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

308. —Teorema general de existencia.

Las ecuaciones diferenciales de la Mecánica son de la forma: $y'' = f(t, y, y')$ siendo t el tiempo, y la coordenada que define el movimiento, y' la velocidad e y'' la aceleración.

Asimismo las ecuaciones diferenciales de la Geometría en que interviene la curvatura (línea elástica, catenaria, etc.) son de segundo orden ,es decir, relacionan la variable independiente, la función incógnita y sus derivadas primera y segunda.

Consideremos la ecuación diferencial general de segundo orden: $F(x, y, y', y'') = 0$. Suponiendo que esta función cumple la condición de las funciones implícitas, determinamos: $y'' = f(x, y, y')$ como función de x, y, y'; por derivación pueden calcularse $y''', y^{IV}, y^{V}\ldots$ Fijemos un punto (x_0, y_0) y demos arbitrariamente el valor y'_0 a la derivada en él; las expresiones anteriores determinan: $y''_0, y'''_0, y^{IV}_0 \ldots$ y, por tanto, desarrollando en serie de Mac-Laurin, obtenemos:

$$y = y_0 + (x - x_0) y'_0 + \tfrac{1}{2}(x - x_0)^2 y''_0 + \cdots \qquad [1]$$

que, según demuestran todos los tratados de Análisis, converge en un cierto intervalo (*) y, por tanto, representa una función que satisface a la ecuación. Este método sirve, no sólo para demostrar la existencia de solución de la ecuación diferencial, sino también de regla práctica para calcularla.

Una ecuación diferencial de segundo orden tiene, pues, infinitas integrales y cada una queda determinada fijando un punto y la tangente en él, es decir: x, y, y'.

La expresión general, también llamada integral general, contiene, pues, dos constantes arbitrarias que pueden ser y_0, y'_0, o bien dos parámetros libres c_1, c_2, a condición de que se puedan determinar de tal modo que para un valor dado x_0 resulten los valores prefijados y_0, y'_0.

(*) Ver p. ej., GOURSAT, vol. II. Es condición *suficiente* para la convergencia de la serie [1] que la función dada $f(x, y, y')$ sea analítica regular, es decir, desarrollable en serie de potencias crecientes de sus tres variables en el entorno de los valores dados (x_0, y_0, y_0').

Una expresión $y = f(x, c_1, c_2)$ que satisface a la ecuación, pero no cumple esta condición de quedar determinados c_1, c_2, al fijar x_0, y_0, y'_0 no es la integral general.

309. — Tipos de ecuaciones incompletas.

He aquí los tipos más sencillos:

Ecuaciones $y'' = const.$ — Se resuelven por dos cuadraturas, integrando dos veces y resulta un trinomio de segundo grado.

EJEMPLO. — Ecuación del movimiento uniformemente acelerado. Si la aceleración es α, la ecuación es:

$$y'' = \alpha \quad \therefore \quad y' = \alpha t + a \quad \therefore \quad y = \tfrac{1}{2}\alpha t^2 + at + b.$$

Las constantes a, b se determinan conociendo los valores iniciales y, y', por ejemplo, la abscisa inicial para $t = 0$ es b; la velocidad inicial es a.

Ecuaciones $y'' = f(x)$. — Basta integrar dos veces sucesivas.

EJEMPLO. — Ecuaciones de un movimiento en que la aceleración crece uniformemente

$$y'' = \alpha t + \beta \quad \therefore \quad y' = \tfrac{1}{2}\alpha t^2 + \beta t + a \quad \therefore \quad y = \tfrac{1}{6}\alpha t^3 + \tfrac{1}{2}\beta t^2 + at + b$$

Ecuaciones $y'' = f(y)$. — Multiplicándola miembro a miembro por $y' \,.\, dx = dy$, resulta:

$$y'.dy' = f(y)dy \quad \therefore \quad \tfrac{1}{2}y'^2 = \int f(y)dy$$

y efectuada la integración se obtiene:

$$y' = \sqrt{\varphi(y) + c}$$

que se integra separando variables y aparece la segunda constante.

EJEMPLO. — La ecuación del movimiento de un punto atraído por otro con fuerza proporcional a la distancia es:

$$y'' = -k^2 y \quad \therefore \quad y'.dy' = -k^2 y.dy$$

e integrando sale:

$$y'^2 = -k^2 y^2 + (kc)^2$$

pues se puede dar esa forma a la constante arbitraria; y esta ecuación puede escribirse así:

$$\frac{dy}{k\sqrt{c^2 - y^2}} = dx \quad \therefore \quad kx + C = \text{arc sen } (y/c)$$

Resulta, pues, la integral general:

$$y = c.\text{sen } (kx + C)$$

A este mismo resultado llegaremos por otro camino en la lección próxima.

Ecuaciones $y'' = f(y, y')$. — La misma transformación anterior, que consiste en adoptar y como variable independiente conduce a una ecuación de primer orden respecto de la función y':

$$y'.dy' = f(y, y')dy$$

que, si se puede integrar ,expresa $y' = \varphi(y, c)$; e integrada esta nueva ecuación de primer orden, resulta la función y con dos constantes arbitrarias.

EJEMPLO. — Curvas en que el radio de curvatura es proporcional a la normal.

Resultan todas las circunferencias simétricas respecto del eje x.

Ecuaciones $y'' = f(x, y')$. — Adoptaremos $y' = z$ como función incógnita y se transforma en la ecuación de primer orden $z' = f(x, z)$; si se sabe integrar ésta, resulta z función de x con una constante arbitraria; y resultará otra al integrar z para despejar y.

En particular, si la ecuación dada no contiene x, siendo del tipo $y'' = f(y')$ la ecuación de primer orden $z' = f(z)$ se integra separando variables.

EJEMPLO. — Obtener las curvas cuya curvatura es constante en todos sus puntos. La ecuación se integra muy fácilmente con el cambio de variable utilizado en el párrafo siguiente, y resultan todas las circunferencias.

NOTA. — Por si el lector observa la ausencia del tipo $y'' = f(x, y)$, conviene advertir que aun en casos tan simples como $y'' = xy$, $y'' = x^2y$, ... su integración exige recursos de Análisis superior, pues y es suma de una función de Bessel y una de Neumann. En cambio, es muy elemental el tipo $y'' = ay +$ polin. en x.

310. — Ecuaciones lineales de coeficientes constantes.

Se llaman lineales las ecuaciones de la forma:

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad [2]$$

Si los coeficientes son funciones de x no se pueden integrar elementalmente, sino por series, que dan origen a funciones nuevas.

Si los coeficientes son constantes, ensayemos como integral particular la expresión $y = e^{rx}$ y vemos que la condición necesaria y suficiente que debe cumplir r para que satisfaga a la ecuación es:

$$ar^2 . e^{rx} + br . e^{rx} + c . e^{rx} = 0 \quad \text{o sea:} \quad ar^2 + br + c = 0 \qquad [3]$$

es decir: la expresión $y = e^{rx}$ es una integral particular de la ecuación si r es raíz de la ecuación algebraica [3], llamada *característica*.

Llamando r_1, r_2 a las dos raíces, cuando éstas son distintas, obtenemos infinitas integrales por las fórmulas: $c_1 . e^{r_1 x}$ y $c_2 . e^{r_2 x}$, pero por satisfacer cada una a la ecuación, también la suma es una integral, luego:

$$y = c_1 . e^{r_1 x} + c_2 . e^{r_2 x} \qquad [4]$$

es la integral general, ya que fijados x_0, y_0, y'_0 tenemos dos ecuaciones:

$$y_0 = c_1 . e^{r_1 x_0} + c_2 . e^{r_2 x_0}$$
$$y'_0 = c_1 . r_1 . e^{r_1 x_0} + c_2 . r_2 . e^{r_2 x_0}$$

que determinan una integral particular, despejando c_1, c_2, ya que el determinante del denominador es:

$$\begin{vmatrix} e^{r_1 x_0} & e^{r_2 x_0} \\ r_1 . e^{r_1 x_0} & r_2 . e^{x_0 r_2} \end{vmatrix}$$

y separados los factores exponenciales, queda:

$$r_2 - r_1 \neq 0.$$

Primer caso: *Raíces reales distintas.* — La curva tiene una rama y se extiende indefinidamente con un solo máximo o ninguno.

Segundo caso: *Raíces imaginarias.* — Aunque la expresión [4] fué definida suponiendo reales las raíces, veamos si en el caso de raíces imaginarias $\alpha \pm i\beta$, podrá utilizarse para él.

Recordemos del Algebra las definiciones:

$$e^{i\beta} = \cos\beta + i \operatorname{sen}\beta$$
$$e^{-i\beta} = \cos\beta - i \operatorname{sen}\beta.$$
$$e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha} . e^{i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)$$
$$e^{\alpha-i\beta} = e^{\alpha} . e^{-i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta - i \operatorname{sen}\beta)$$

la expresión [4] se transforma en:

$$y = (c_1 + c_2) e^{\alpha x} . \cos\beta x + i(c_1 - c_2) e^{\alpha x} . \operatorname{sen}\beta x$$

y llamando A y B a los coeficientes reales o imaginarios, resulta la integral general:

$$y = e^{\alpha x} [A \cos\beta x + B \operatorname{sen}\beta x] \qquad [5]$$

si en esta fórmula damos a A y B valores *reales arbitrarios*, obtenemos infinitas integrales de la ecuación dada (*).

(*) Sin necesidad de utilizar números complejos se ve directamente que [5] es la integral general, pues junta con la ecuación

$$y' = \alpha e^{\alpha x} [A \cos\beta x + B \operatorname{sen}\beta x] + \beta e^{\alpha x} [- A \operatorname{sen}\beta x + B \cos\beta x]$$
$$\text{o sea:} \quad y' = \alpha y + \beta e^{\alpha x} [- A \operatorname{sen}\beta x + B \cos\beta x]$$

determina A, B, fijados x_0, y_0, y'_0, ya que el determinante de los coeficientes, previa simplificación, vale 1.

NOTA. — A esta expresión puede dársele otra forma, eligiendo un ángulo φ definido por las relaciones

$$A = C.\operatorname{sen}\beta\varphi \quad , \quad B = C.\cos\beta\varphi$$

de donde $C = \sqrt{A^2 + B^2}$:

$$y = Ce^{\alpha x}.\,[\operatorname{sen}\beta\varphi\cos\beta x + \cos\beta\varphi\operatorname{sen}\beta x]$$

o sea

$$y = Ce^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta(x + \varphi)$$

donde las constantes son C y el ángulo φ.

Caso particular. — Si es $b = 0$, es decir, si la ecuación se reduce a: $y'' + cy = 0$, la ecuación característica es:

$$r^2 + c = 0, \qquad r = \pm i\sqrt{c}$$

y la integral se reduce a:

$$y = C\operatorname{sen}\beta(x + \varphi)$$

que es una función armónica.

TERCER CASO: *Raíces iguales.* — En tal caso sólo tenemos una integral particular: e^{rx}, de la que deducimos infinitas por la fórmula: ce^{rx}.

Otra integral es: $y = xe^{rx}$, pues resulta:

$$y' = rx\,e^{rx} + e^{rx}$$

$$y'' = r^2\,xe^{rx} + 2re^{rx}$$

y sustituyendo en la ecuación se verifica:

$$(ar^2 + br + c)xe^{rx} + (2ar + b)e^{rx} = 0$$

pues ambos paréntesis se anulan, ya que r no sólo es raíz de la ecuación característica, sino que también anula a su derivada $2ar + b$ por ser raíz doble. La expresión:

$$y = Ce^{rx} + C'\,xe^{rx}$$

es la integral general, puesto que se puede con ella satisfacer a condiciones iniciales arbitrariamente dadas (*).

(*) En efecto, el sistema:

$$Ce^{rx_0} + C'x_0\,e^{rx_0} = y_0$$

$$Cre^{rx_0} + C'(x_0\,re^{rx_0} + e^{rx_0}) = y'_0$$

tiene solución, puesto que el determinante de los coeficientes es distinto de 0.

311. — Ecuación de los movimientos vibratorios.

Estudiemos el movimiento de un punto sometido a una fuerza atractiva, desde un punto fijo O, cuando la fuerza es proporcional a la distancia. Tal sucede, por ejemplo, con un punto sujeto a O por una goma o un resorte análogo, cuya fuerza, entre ciertos límites de elasticidad, es proporcional a la distancia

La ecuación del movimiento es:

$$y'' = -k^2 y \quad \text{o sea:} \quad y'' + k^2 y = 0$$

llamando k^2 a la constante de proporcionalidad.

La ecuación característica es: $r^2 + k^2 = 0$ y la integral general:

$$y = e^{ikt} + e^{-tik} = A \cos kt + B \operatorname{sen} kt.$$

Si en el momento inicial el punto tiene la abscisa a y la velocidad nula, tenemos las condiciones iniciales:

$$A = a, \quad Bk = 0 \quad \text{de donde} \quad B = 0$$

y la ecuación del movimiento es: $y = a \cos kt$.

Luego el movimiento es periódico, con período: $2\pi/k$ y fase nula. La gráfica que lo representa respecto de los ejes t, y, es una cosinusoide de amplitud a.

Estudiemos ahora el caso general. Si hay rozamiento: $2h\,y'$ proporcional a la velocidad ,con un factor de proporcionalidad $2h$, (como sucede, por ejemplo, aproximadamente, con el movimiento en el aire o en otro medio resistente cualquiera) la ecuación del movimiento es:

$$y'' = -k^2 y - 2h\,y' \quad \text{o sea:} \quad y'' + 2h\,y' + k^2 y = 0$$

la ecuación característica es :

$$r^2 + 2hr + k^2 = 0 \quad \therefore \quad r = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}$$

PRIMER CASO: *Raíces imaginarias.* — Llamando

$$\Delta = k^2 - h^2 \qquad r = -h \pm i\sqrt{\Delta}$$

La integral general es:

$$y = e^{-ht}\,[A \cos t\sqrt{\Delta} + B \operatorname{sen} t\sqrt{\Delta}].$$

Si las condiciones iniciales son: $t = 0$, $y = 0$, $y' = 0$, como sucede en el caso del punto abandonado a la atracción de un resorte tenso, resulta como antes:

$$B = 0, \quad A = a, \quad y = e^{-ht}\,a \cos t\sqrt{\Delta}$$

que representa un movimiento *amortiguado*, cuya amplitud inicial a disminuye y tiende a cero al crecer t.

SEGUNDO CASO: *Raíces reales distintas.* — La ecuación característica tiene dos raíces reales r_1, r_2 y la ecuación del movimiento es:

$$y = C.e^{r_1 t} + C'.e^{r_2 t}$$

$$y' = r_1\,C.e^{r_1 t} + r_2\,C'.e^{r_2 t}$$

Las condiciones iniciales exigen que sea:

$$C + C' = a; \quad C r_1 + C' r_2 = 0$$

de donde se despejan C y C'; y según los valores de h y k resultará una curva distinta, pero siempre *aperiódica* y que para $t \to \infty$ se aleja indefinidamente.

TERCER CASO: *Raíces iguales.* — Entonces es: $r_1 = r_2 = -h$.

La integral general es:

$$y = C\,e^{-ht} + C'\,te^{-ht} = e^{-ht}(C + C'\,t).$$

312. — Ecuación diferencial de la línea elástica.

La ecuación de la línea elástica es, como se explicó anteriormente:

$$\frac{dy'}{[1+y'^2]^{\frac{3}{2}}} = f(x)\,dx.$$

separando las variables y' y x. Para integrarla ponemos: $y' = \operatorname{tg} t$

$$1 + y'^2 = 1/\cos^2 t \quad ; \quad dy' = dt/\cos^2 t$$

y la ecuación se reduce a: $\cos t . dt = f(x) . dx$.

Integrando resulta: $\operatorname{sen} t = \int f(x)dx + C = \varphi(x)$.

Despejando y', por ser

$$y' = \operatorname{tg} t = \operatorname{sen} t/\cos t$$

resulta en definitiva:

$$y' = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-\varphi(x)^2}}$$

$$y = \int \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-\varphi(x)^2}}\, dx + C'',$$

que es la ecuación exacta de la línea elástica, pero cuya integración sólo se podrá hacer elementalmente en casos muy especiales.

Por ejemplo: cuando $f(x) =$ constante $= 1/r$ y suponiendo $C = 0$, entonces resulta:

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2} + C$$

$$(y - C)^2 + x^2 = r^2,$$

que es una circunferencia de radio r, como era de esperar.

Comparación de la solución exacta y la aproximada. — Conviene llamar la atención sobre el carácter *aproximado* que tiene la solución dada en (149) al problema de la línea elástica. Para probar la diversa forma que resulta para la línea elástica según se haga la integración de la ecuación exacta o de la aproximada, consideremos el caso de una viga apoyada en sus extremos con dos pesos iguales equidistantes de ellos. Las reacciones de los apoyos son P Aplicado el método aproximado allí expuesto, resulta una curva compuesta de dos arcos de parábola cúbica y un arco de parábola de segundo grado.

En cambio, si tomamos la ecuación exacta ,resulta entre $-a$ y $+a$:

$$M(x) = Pl,$$

luego $r =$ constante, es decir, el trozo de línea elástica entre $-a$, $+a$ es un arco de circunferencia. En el intervalo (a, b) es $M(x) = P.x$ y resulta la integral elíptica.

EJERCICIOS

1. — Estudiar el movimiento de un paracaídas, cuya ecuación es

$$y'' = y - ky'^2$$

2. — Reducir al primer orden la ecuación del péndulo $\alpha'' + h.\operatorname{sen}\alpha = 0$.

Lección 75

ECUACIONES LINEALES DE ORDEN n

313. — Teorema general de existencia.

Dada una ecuación diferencial de orden n:

$$F(x, y, y', y'', \ldots . \; y^{(n)}) = 0 \qquad [1]$$

supongamos que despejando $y^{(n)}$ queda determinada

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'' \; \ldots . \; y^{(n-1)}) \qquad [2]$$

como función uniforme de $x, y, y' \; \ldots . \; y^{n-1}$; cuando resulten varias funciones uniformes se estudia cada una por separado. Por derivación de la expresión [2] se van calculando las derivadas sucesivas $y^{(n+1)}$, $y^{(n+2)}$ .... como funciones de $x, y, y' \; \ldots . \; y^{(n-1)}$.

Fijados arbitrariamente los valores:

$$y_0, y'_0, y''_0 \; \ldots . \; y_0^{(n-1)}$$

que corresponden a $x = x_0$, podremos, pues, calcular los valores $y_0^{(n)}$, $y_0^{(n+1)}$, ... de todas las derivadas en el mismo punto x_0 y el valor de y correspondiente a cualquiera de x viene dado por la serie de Taylor:

$$y = y_0 + (x - x_0)y'_0 + \tfrac{1}{2}(x - x_0)^2 y''_0 + \ldots .$$

Se demuestra en los tratados de Análisis que esta serie converge (si la función f es desarrollable en serie) y por tanto define en un cierto intervalo una función $y = \varphi(x)$ que satisface a la ecuación diferencial. Luego podemos enunciar:

Si en una ecuación diferencial de orden n la derivada $y^{(n)}$ es función analítica uniforme de $x, y, y' \; \ldots . \; y^{(n-1)}$, hay una función $y = \varphi(x)$ y sólo una que satisface a la ecuación diferencial y que para el valor dado $x = x_0$, ella y sus derivadas hasta la $y^{(n-1)}$ toman los valores prefijados: $y_0, y'_0 \; \ldots . \; y_0^{(n-1)}$.

Por tanto; si encontramos una función: $y = \varphi(x, C_1, C_2 \ldots C_n)$ con n constantes arbitrarias que satisface a la ecuación diferencial y que cumple la condición de que fijados valores cualesquiera $x_0, y_0, y'_0 \; \ldots . \; y_0^{(n-1)}$, se pueden elegir las constantes de modo que la función y sus $n - 1$ primeras derivadas tomen estos valores prefijados, resulta que toda integral de la ecuación queda incluída en la fórmula $y = \varphi(x, C_1, C_2 \; \ldots . \; C_n)$ dando a las constantes valores convenientes, y esta fórmula constituye la *integral general* de la ecuación diferencial.

314. — Ecuaciones lineales con coeficientes variables.

La ecuación diferencial lineal de orden n con segundo miembro es del tipo:

$$P_0(x) \cdot y^{(n)} + P_1(x) \cdot y^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(x) \cdot y' + P_n(x) \cdot y = Q(x)$$

donde $P_0(x)$, $P_1(x) \ldots P_n(x)$, $Q(x)$ son, en general, funciones de x.

En particular, es interesante el caso en que carece de segundo miembro, o sea $Q(x) = 0$

$$P_0(x) \cdot y^{(n)} + P_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x) \cdot y' + P_n(x) \cdot y = 0$$

Esta ecuación homogénea tiene las propiedades siguientes:

1.° Si y_1 es una integral particular, también lo es ky_1; pues al sustituir ky_1 en vez de y_1 el primer miembro queda multiplicado por k y por tanto se anula.

2.° Si y_1, y_2 *son integrales de la ecuación* también lo es la suma $y_1 + y_2$, pues las derivadas sucesivas de la suma, son las sumas de las derivadas sucesivas de las funciones y_1 e y_2 y el valor que toma el polinomio es suma de los valores que toma para y_1 y para y_2 es decir $0 + 0 = 0$.

Por tanto, conocidas n integrales particulares $y_1, y_2 \ldots y_n$ la expresión: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$, es también una integral de la ecuación. Mas, para asegurar que es la integral general, será preciso demostrar que se pueden determinar las constantes de modo que y y sus derivadas tomen los valores iniciales; es decir, para cada valor de x han de tomar los valores correspondientes prefijados: $y_0, y'_0, \ldots y_0^{(n-1)}$ (*).

(*) Estas condiciones son:

$$\begin{array}{l} C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_n y_n = y_0 \\ C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_n y'_n = y'_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \end{array}$$

y podrá asegurarse que hay un sistema de constantes $C_1, C_2 \ldots C_n$ que cumplen estas condiciones, si el determinante del sistema:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ldots\ldots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots\ldots\ldots & y'_n \\ y''_1 & y''_2 & \ldots\ldots\ldots & y''_n \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots\ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

es distinto de cero para todo valor de x. Este determinante suele llamarse *Wronskiano* de las n funciones $y_1, y_2 \ldots y_n$; y cuando se cumple esta condición $W \neq 0$ las n funciones se llaman *linealmente independientes*.

Si la ecuación tiene segundo miembro $Q(x)$ y es $y = \varphi(x)$ una integral particular, si se hace la sustitución $y = \varphi(x) + Y$ como el primer sumando da al primer miembro el valor Q, el segundo debe darle el valor 0, es decir, debe satisfacer a la ecuación sin segundo miembro. Por tanto: *se obtienen todas las integrales de la ecuación completa sumando a la integral particular $\varphi(x)$ la integral general de la ecuación incompleta.* La integral general de la ecuación completa es, por consiguiente:

$$y = \varphi(x) + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n.$$

NOTA. — Las ecuaciones lineales de coeficientes variables no son, en general, integrables por funciones elementales y dan, por tanto, origen, a nuevas funciones que se presentan con frecuencia en Física. Así, por ejemplo, dada la ecuación de Bessel:

$$y'' + y'/x + y = 0$$

se integra poniendo

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

e identificando los coeficientes de ambos miembros resulta con cálculo sencillo la función siguiente: $a_0\,[1 - x^2/(2.2) + x^4/(2.4)^2 - \dots]$.

La función entre paréntesis tiene frecuentes aplicaciones y se llama función de Bessel de orden cero representándose por $J_0(x)$. Nótese que para $x = 0$ sólo puede darse arbitrariamente $y_0 = a_0$ pero no y'_0 como sucede, en general, con las ecuaciones de segundo orden; en esta ecuación la derivada y'_0 es siempre nula y el teorema general no es aplicable porque la expresión y'/x tiene el punto singular $x = 0$.

315. — Ecuaciones lineales de coeficientes constantes.

Ante todo veamos algunos tipos con 2.° miembro $Q(x)$ quq permiten obtener fácilmente una integral particular de la ecuación completa:

1.°) Si $Q(x)$ es polinomio de grado q, escríbase $y =$ polinomio de grado q con coeficientes indeterminados que se calculan identificando ambos miembros. Si en la ecuación faltan los últimos h términos, deberá ponerse $y = x^h$. (Pol. de grado q).

2.°) Si $Q(x)$ es producto de e^{hx} por polinomio, póngase en vez de y una expresión del mismo tipo.

3.°) Si $Q(x) = e^{hx}(A \cos ax + B \operatorname{sen} ax)$, también y es del mismo tipo, con coeficientes que se determinarán por identificación.

Sea la ecuación de coeficientes constantes:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y = 0.$$

Generalizando el método seguido para las ecuaciones de segundo orden pongamos: $y = e^{rx}$ y el valor que toma el primer miembro es:

$$e^{rx}(r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \dots + p_{n-1} r + p_n) = 0$$

Para que e^{rx} satisfaga a la ecuación bastará, pues, elegir el exponente r de modo que sea raíz de la ecuación de grado n:

$$r^n + p_1 r^{n-1} + \dots + p_{n-1} r + p_n = 0,$$

llamada *ecuación característica* de la ecuación diferencial.

Calculadas sus n raíces tenemos la integral:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x},$$

que es la integral general (*).

Las raíces imaginarias conjugadas: $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$ dan origen a dos exponenciales:

$$C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x}$$

que agrupadas como se hizo en el caso de la ecuación de segundo orden dan una expresión:

$$e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x)$$

Si la raíz r es múltiple (por ej.: doble) el número de integrales particulares queda disminuído, pues dicha raíz nos da solamente e^{rx}, pero es fácil ver que también la función: $x e^{rx}$ es en este caso integral, pues se tiene:

$$\begin{aligned}
y &= x e^{rx} \\
y' &= r x e^{rx} + e^{rx} \\
y'' &= r^2 x e^{rx} + 2r e^{rx} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y^{(n)} &= r^n x e^{rx} + n r^{n-1} e^{rx}
\end{aligned}$$

Sustituyendo resulta:

$$\begin{aligned}
& x e^{rx}(r^n + p_1 r^{n-1} + \dots + p_n) + \\
& + e^{rx}(n r^{n-1} + p_1(n-1) r^{n-2} + \dots + 2p_{n-2} r + p_{n-1})
\end{aligned}$$

y como la raíz r no sólo satisface a la ecuación característica, sino

---

(*) El lector puede comprobar que el wronskiano de estas n funciones: $e^{r_1 x}, e^{r_2 x} \dots e^{r_n x}$ es:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{r} (r_2 - r_1)(r_3 - r_1)\dots(r_n - r_1) \\ (r_3 - r_2)\dots(r_n - r_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (r_n - r_{n-1}) \end{array} \right.$$

según se demuestra en Algebra, (ver p. ej. nuestro Análisis algebraico, p. 246, 2.ª ed.). Si todas las r_i son distintas, es por tanto $W \neq 0$.

también a su derivada (por ser raíz doble) se anula el paréntesis y por tanto $x\,e^{rx}$ es también integral de la ecuación diferencial.

Más general: Si r es raíz múltiple de orden m, no sólo e^{rx} es integral de la ecuación, sino también: $x\,e^{rx}$, $x^2\,e^{rx}$ .... $x^{m-1}\,e^{rx}$, como puede comprobarse con cálculo análogo. Por tanto: cada raíz *múltiple* de la ecuación característica da m integrales particulares de la ecuación diferencial, y el número total de integrales particulares que obtenemos es siempre n.

310. — Ecuación de la viga apoyada en toda su longitud.

Se admite que la reacción del suelo es proporcional al hundimiento y, es decir, igual a $-4k^4y$, siendo k^4 un coeficiente positivo, que depende de la naturaleza del suelo.

Dada la función de cargas $y = p(x)$, la ecuación de la línea elástica es, por tanto (poniendo $EI = 1$, o suponiéndolo incluído en la constante y en la función de carga):

$$y^{\text{IV}} + 4k^4y = p(x)$$

La ecuación característica es:

$$r^4 + 4k^4 = 0 \qquad \text{de donde} \qquad r = k\sqrt{2}\,\sqrt{-1}$$

y como el número -1 tiene 4 raíces, se tienen los siguientes valores de r:

$$r_1 = k(1+i) \quad ; \quad r_2 = k(1-i);$$
$$r_3 = k(-1+i) \quad ; \quad r_4 = k(-1-i);$$

luego la integral general de la ecuación incompleta es:

$$y = (A\,.\cos kx + B\,.\operatorname{sen} kx)e^{kx} +$$
$$+ (C\,.\cos kx + D\,.\operatorname{sen} kx)e^{-kx}$$

Si la función de carga es de primero, segundo o tercer grado en x, una integral de la ecuación completa es evidentemente $y = p(x)/k^4$ que sumada a la expresión anterior da la integral general de la ecuación completa. Con las condiciones iniciales $y'' = 0$, $y''' = 0$, en ambos extremos, quedan determinadas las cuatro constantes A, B, C, D.

EJERCICIOS

1. — Integrar las ecuaciones de los tipos siguientes:

$$y^n = f(x) \quad , \quad y^n = f(y^{n-1}, x)$$

2. — Integrar la ecuación diferencial (89) que resulta al obtener los vértices de una curva. (Adóptese como variable independiente $y' = t$).

3. — Calcular la integral particular y la general de las ecuaciones lineales siguientes:

$$y'' + y = \cos x \quad , \quad y'' + y = \operatorname{sen} x.$$

(Soluciones particulares: $\frac{1}{2}x\,.\operatorname{sen} x$; $-\frac{1}{2}x\,.\cos x$).

$$y'' - 2y' + y = 2e^x.$$

(Solución particular: x^2e^x).

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

317. — Significado geométrico de los sistemas.

Así como una ecuación diferencial con una sola función incógnita y de una sola variable independiente x representa una familia de curvas *planas*, un sistema de dos ecuaciones diferenciales

$$\Phi(x, y, z, y', z' \ldots.) = 0, \quad \Psi(x, y, z, y', z' \ldots.) = 0,$$

que relacionan dos funciones incógnitas y, z, de una misma variable independiente x con sus derivadas sucesivas representa una familia de curvas alabeadas ,pues cada par de funciones $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, representa una curva referida a los ejes x, y, z.

Refiriéndonos para fijar las ideas al caso de dos ecuaciones de primer orden, sean éstas:

$$y' = \varphi(x, y, z) \qquad z' = \psi(x, y, z) \tag{1}$$

sistema que suele escribirse en forma simétrica:

$$\frac{dx}{X(x, y, z)} = \frac{dy}{Y(x, y, z)} = \frac{dz}{Z(x, y, z)} \tag{2}$$

pues de ésta se pasa a la anterior llamando φ, ψ a los cocientes de Y, Z por X. Las funciones X, Y, Z definen un campo vectorial.

Escrito en esta segunda forma, expresa la propiedad geométrica de que toda curva que lo satisfaga tiene como tangente en cada punto el vector (X, Y, Z) correspondiente, pues los cosenos directores de la tangente son proporcionales a dx, dy, dz. Es decir: las curvas integrales son las *líneas de fuerza* del campo vectorial. Ahora bien: dado éste arbitrariamente ¿existen tales líneas de fuerza, envolventes de sus vectores? Así resulta del teorema siguiente de existencia ,que resuelve este problema, planteado en (283).

318. — Integración de los sistemas de primer orden.

Fijado el punto inicial (x_0, y_0, z_0) en el campo en que las funciones $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ están definidas y carezcan de singularidades, las derivadas y'_0 z'_0 en ese punto están dadas por las mismas ecuaciones [1] y derivando se calculan y'', z''; mediante x, y, z, y', z', que ya están calculadas para dicho punto, se obtienen y''_0, z''_0, etc.

Conocidas así todas las derivadas de y para $x = x_0$, queda determinada esta función por la serie de Mac-Laurin y lo mismo la z. Queda por demostrar la convergencia de ambas series en un intervalo de x y ésta es la parte difícil de la demostración, que puede verse en los tratados de Análisis. Admitida esta convergencia, resulta el teorema fundamental:

Por cada punto (x_0, y_0, z_0) (que no sea singular para alguna de las *funciones* φ, ψ) *pasa una curva integral y solo una.* Lo mismo puede decirse del sistema [2], a condición de que no se anulen simultáneamente X, Y, Z en el punto elegido; basta que no se anule una, p. ej: $Z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, pues adoptando z como variable independiente las ecuaciones adoptarían la forma

$$x' = \varphi(x, y, z), \quad y' = \psi(x, y, z),$$

y estas funciones φ, ψ, no se hacen infinitas en el punto elegido.

Un sistema de curvas tal que por cada punto (x, y, z) pasa una sola se llama una *congruencia de curvas;* podemos, pues, expresar el teorema diciendo que el sistema [1] o el [2] representa una congruencia.

Recíprocamente: una familia de curvas doblemente infinita, es decir, con dos parámetros α, β, es una congruencia si por cada punto pasa una, es decir, si a cada terna x, y, z, corresponde un solo par α, β, que determina por tanto una sola curva; es decir: si se pueden despejar α, β, en la forma

$$u(x, y, z) = \alpha \qquad v(x, y, z) = \beta.$$

El sistema de ecuaciones diferenciales que representa esta congruencia se deduce inmediatamente diferenciando

$$u'_x . dx + u'_y . dy + u'_z . dz = 0$$
$$v'_x . dx + v'_y . dy + v'_z . dz = 0$$

de donde se despeja:

$$\frac{dx}{u'_y . v'_z - u'_z v'_y} = \frac{dy}{u'_z v'_x - u'_x v'_z} = \frac{dz}{u'_x v'_y - u'_y v'_x}$$

EJEMPLO 1. — Todas las rectas que pasan por el origen tienen las ecuaciones

$$x = \alpha z \quad , \quad y = \beta z$$

de donde

$$dx = \alpha dz \quad , \quad dy = \beta dz$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

La eliminación de los parámetros entre las ecuaciones y sus diferenciales, que arriba quedó hecha por la sola diferenciación, a causa de estar despejados α, β, se ha hecho aquí por división.

EJEMPLO 2. — Todas las rectas paralelas a la $x = az$, $y = bz$, tienen las ecuaciones

$$x = az + \alpha \quad , \quad y = bz + \beta$$

de donde

$$dx = adz \quad , \quad dy = bdz$$

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}$$

La eliminación ha quedado hecha por la diferenciación. He aquí, pues, las ecuaciones diferenciales de la congruencia de rectas paralelas.

319. — Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden.

Son los sistemas de integración más sencilla; el más simple es del tipo siguiente:

$$y' = p_1 y + p_2 z + p_3$$

$$z' = q_1 y + q_2 z + q_3$$

donde los coeficientes son, en general, funciones de la variable independiente x. Si Y, Z es una solución particular del sistema, las diferencias $y - Y$, $z - Z$ satisfacen al sistema que llamaremos *homogéneo*

$$y' = p_1 y + p_2 z$$

$$z' = q_1 y + q_2 z$$

y basta obtener la integral general de éste. Es decir: *la solución general del sistema no homogéneo se forma sumando una solución particular a la solución general del sistema homogéneo.*

Estudiemos especialmente los sistemas de ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes y ensayando soluciones del tipo:

$$y = \alpha e^{rx} \quad , \quad z = \beta e^{rx}$$

que sustituídas en el sistema conducen, después de simplificar, al sistema de ecuaciones algebraicas lineales:

$$\alpha r = p_1 \alpha + p_2 \beta \qquad\qquad (p_1 - r)\alpha + p_2 \beta = 0$$

$$\beta r = q_1 \alpha + q_2 \beta \qquad\qquad q_1 \alpha + (q_2 - r)\beta = 0$$

Condición de compatibilidad es la anulación del determinante de los coeficientes, o sea:

$$(p_1 - r)\ (q_2 - r) = q_1\ p_2$$

ecuación de 2.° grado que determina uno o dos valores de r; suponiendo que sean distintos, cada uno determina un sistema de soluciones y la suma de ambos es la integral general.

EJEMPLO. — Sea el sistema de ecuaciones homogéneas:

$$y' = y + 4z \quad , \quad z' = 2y - z.$$

El sistema de ecuaciones algebraicas características es:

$$\begin{array}{l} \alpha r = \alpha + 4\beta \\ \beta r = 2\alpha - \beta \end{array} \qquad \begin{vmatrix} 1 - r & 4 \\ 2 & -1 - r \end{vmatrix} = 0$$

como las raíces de esta ecuación $r^2 - 9 = 0$ son $+3$ y -3, las soluciones correspondientes son $\beta = \frac{1}{2}\alpha$. $\beta = -\alpha$ y la solución general del sistema propuesto:

$$y = \alpha_1 e^{3x} + \alpha_2 e^{-3x}$$
$$z = \tfrac{1}{2}\alpha_1 e^{3x} - \alpha_2 e^{-3x}$$

El caso de raíces iguales se resuelve obteniendo la 2.ª solución del tipo xe^{rx}.

CASO GENERAL. — Consideremos por ejemplo el sistema:

$$x' = p_1 x + p_2 y + p_3 z + p_4$$
$$y' = q_1 x + q_2 y + q_3 z + q_4$$
$$z' = s_1 x + s_2 y + s_3 z + s_4$$

donde los coeficientes pueden ser constantes o también funciones de t. Este sistema representa una congruencia de curvas en forma paramétrica.

Si las ecuaciones lineales son homogéneas ,es decir:

$$p_4 = q_4 = s_4 = 0$$

tienen las propiedades análogas a las ya estudiadas en el caso de una sola ecuación:

1.° Si x, y, z es una integral del sistema ,también las funciones Kx, Ky, Kz satisfacen al sistema. Las curvas son, pues, homotéticas respecto del origen.

2.° Si (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) son dos integrales del sistema, las funciones $(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2)$ también satisfacen al sistema.

Si los coeficientes son constantes, se obtienen integrales particulares del tipo

$$x = \alpha\, e^{rt}, \qquad y = \beta\, e^{rt}, \qquad z = \gamma\, e^{rt}$$

debiendo satisfacer r a una ecuación algebraica de tercer grado cada una de cuyas raíces determina los coeficientes α, β, γ; y las sumas de estas integrales, multiplicadas por constantes arbitrarias, también son integrales.

Cualesquiera que sean los coeficientes, derivando respecto de t dos veces, resultan seis ecuaciones lineales; si eliminamos entre las nueve ecuaciones las variables:

$$y, z, y', z', y'', z'', y''', z''',$$

resulta una ecuación lineal en x de tercer orden:

$$Ax''' + Bx'' + Cx' = D;$$

sustituída la función calculada x en las ecuaciones segunda y tercera tenemos un sistema de dos ecuaciones que determinan: y, z.

SISTEMAS DE ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR

320. — Sistemas de ecuaciones de 2° orden.

Un sistema de dos ecuaciones de segundo orden es del tipo:

$$y'' = \varphi(x, y, z, y', z') \qquad z'' = \psi(x, y, z, y', z')$$

y para determinar cada curva integral puede darse arbitrariamente x_0, y_0, z_0, y además y'_0, z'_0, es decir, un punto y su tangente; con estos datos iniciales quedan determinados y''_0, z''_0; derivando se calculan y'''_0, z'''_0, etc.; y la fórmula de Mac-Laurin determina las dos funciones y, z, de x; la integral general contiene, por tanto, cuatro constantes arbitrarias y recíprocamente toda familia de curvas con cuatro parámetros (dos en cada ecuación) se puede representar por un sistema de ecuaciones que se deducen derivando cada una dos veces y eliminando los cuatro parámetros; o bien, si una ecuación tiene un parámetro y tres la otra, habrá que derivar cada una tantas veces como parámetros tenga y resultará un sistema con ecuaciones de órdenes distintos.

EJEMPLO 1. — Las ecuaciones de todas las rectas no paralelas al plano y, z son:

$$y = ax + b \qquad z = cx + d$$

y derivando dos veces resulta el sistema $y'' = 0$; $z'' = 0$.

EJEMPLO 2. — Todas las circunferencias horizontales de radio fijo (es decir, situadas en planos paralelos al x, y) vienen expresadas así

$$z = c \qquad (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

derivando una vez la primera y dos veces la segunda resulta el sistema:

$$z' = 0 \qquad r^2 = (1 + y'^2)^3/y''^2$$

EJEMPLO 3. — Si las circunferencias son de radio cualquiera, hay que derivar una vez más la segunda ecuación y simplificando resulta el sistema

$$z' = 0 \qquad y'''(1 + y'^2) = 3y' y''^2$$

321. — Las ecuaciones de la Dinámica.

Los problemas de Mecánica de una sola dimensión, que hemos considerado en las lecciones anteriores, conducían a una sola ecuación diferencial, pero, en general, conducirán a dos o tres, según se trate del plano o del espacio; las funciones incógnitas son las coordenadas variables del punto móvil en función del tiempo; pues las ecuaciones del movimiento se obtienen igualando a las componentes de la fuerza ,las componentes de la aceleración multiplicada por la masa del punto móvil ,es decir:

$$mx'' = X, \quad my'' = Y, \quad mz'' = Z$$

donde las componentes X, Y, Z son funciones de t de x, y, z, y a veces también de las derivadas x', y', z componentes de la velocidad.

En el caso más elemental en que las ecuaciones son independientes, es decir, si en cada ecuación sólo figura una función desconocida, se integran por separado las diversas ecuaciones. Tal sucede en el ejemplo que sigue:

Movimiento de un proyectil en el vacío. — Las ecuaciones son: $m.x'' = 0$, $my'' = -gm$, que integradas separadamente dan:

$$x = at + a' \quad , \quad y = -\tfrac{1}{2}g\, t^2 + bt + b'$$

Condiciones iniciales: $t = 0$, $x = 0$, $y = 0$, de donde: $a' = 0$, $b' = 0$; por tanto las ecuaciones del movimiento son

$$x = at \qquad y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + bt$$

siendo (a, b) las componentes de la velocidad inicial.

La curva trayectoria resulta eliminando t y resulta una parábola que pasa por 0. El segundo punto intersección con el eje x es el de abscisa $x = 2b/g$.

Si hay rozamiento proporcional a la velocidad, aparecen en las ecuaciones nuevos términos en x', y'; y las ecuaciones lineales se integran como se explicó en los párrafos anteriores.

Movimiento gravitatorio. — He aquí otro ejemplo importante, en que la integración se hace por simplificaciones especiales. Dadas dos masas M y m que se atraen por la ley de Newton, el movimiento relativo de m respecto de M tiene por ecuaciones, adoptando ejes que pasan por M:

$$mx'' = -.k\, Fmx/r^3; \quad my'' = -k\, Mmy/r^3; \quad mz'' = -k\, Mmz/r^3$$

o abreviadamente:

$$x'' = -Kx/r^3; \quad y'' = -Ky/r^3; \quad z'' = -Kz/r^3.$$

Combinando las dos primeras resulta:

$$xy'' - yx'' = 0 \quad \text{e integrando sale:} \quad xy' - yx' = C_1$$

pues la derivada de ésta es aquélla. Análogamente:

$$yz' - zy' = C_2 \quad , \quad zx' - xz' = C_3$$

Multiplicando por z, x, y, y sumando, resulta:

$$C_2x + C_3y + C_1z = 0.$$

ecuación de un plano que pasa por M. Por tanto: *El movimiento de m respecto de M se verifica en un plano que pasa por M.*

Tomando el plano del movimiento como $x\,y$, el sistema se reduce a la ecuación

$$xy' - yx' = C$$

en que el primer miembro es la derivada del área A del sector, respecto del tiempo.

Resulta así: *La velocidad areolar del radio vector es constante.*

Pasando a coordenadas polares se integra la ecuación y resulta que la trayectoria es una cónica de foco M.

322. — Reducción del sistema a una sola ecuación.

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales que ligan las funciones x, y, z de la variable independiente t, con sus primeras, segundas, terceras, ..., derivadas, para reducirlo a una ecuación diferencial con una sola función desconocida x se derivan las ecuaciones un número suficiente de veces para poder eliminar entre las ecuaciones dadas y las así obtenidas, las funciones y, z y sus derivadas, resultando una ecuación diferencial:

$$F(t, x, x', x'' \ldots .) = 0$$

que una vez integrada determina x y de esta función se deducen las otras. Apliquemos este método a un ejemplo.

Ejemplo. — En la teoría del péndulo de Foucault se presenta el sistema:

$$x'' - 2ay' + bx = 0 \qquad [1]$$

$$y'' + 2ax' + by = 0 \qquad [2]$$

Derivando dos veces la ecuación [1] y una vez la ecuación [2] tenemos:

$$x^{\text{IV}} - 2ay''' + bx'' = 0 \qquad [4]$$

$$y''' + 2ax'' + by' = 0 \qquad [5]$$

Eliminando y''' entre [4] y [5] resulta:

$$x^{\text{IV}} + (4a^2 + b)x'' + 2\,a\,b\,y' = 0$$

Eliminando y' entre ésta y [1]

$$x^{\text{IV}} + (4a^2 + 2b)x'' + b^2 x = 0$$

que es una ecuación diferencial lineal de cuarto orden sin segundo miembro y con coeficientes constantes.

Resuelta esta ecuación mediante la ecuación característica, que es bicuadrada, da cuatro raíces: $r_1, -r_1, r_2, -r_2$, luego:

$$x = C_1\, e^{r_1 t} + C_2\, e^{-r_1 t} + C_3\, e^{r_2 t} + C_4\, e^{-r_2 t}$$

y el valor de y se despeja de [2]

$$y = -\frac{y''}{b} - \frac{2a\,.\,x'}{b}$$

sustituyendo y'' por su valor:

$$y'' = \frac{x'''}{2a} - \frac{bx'}{2a}$$

sacado de la ecuación que se obtiene derivando la [1].

EJERCICIOS

1. — Integrar el sistema de ecuaciones:

$$x''' = y + y' \quad , \quad y'' = x' + x''$$

(Eliminando y resulta: $x^{\text{V}} = x''' + 2x'' + x'$).

2. — Integrar las ecuaciones de Foucault, sabiendo que los coeficientes son:

$$a = w\,.\,\text{sen}\,\varphi \quad , \quad b = g/l$$

designando φ la latitud, $w = 0{,}000073$ la velocidad angular de la rotación terrestre, l la longitud del péndulo.

LECCIÓN 78

ECUACIONES LINEALES EN DERIVADAS PARCIALES

323. — Definiciones y notaciones.

Se llama ecuación en derivadas parciales a toda ecuación diferencial que relaciona una o varias funciones de varias variables independientes, con sus derivadas parciales respecto de éstas. Vamos a estudiar solamente las de primer orden con dos variables independientes x, y; si z es la función desconocida de x, y, y para abreviar llamamos p y q a las derivadas

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

la ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden es del tipo

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

La ecuación se llama *lineal* cuando p y q figuran en primera potencia sin multiplicar entre sí, es decir, toda ecuación del tipo:

$$X(x, y, z) \cdot p + Y(x, y, z) \cdot q = Z(x, y, z) \qquad [1]$$

Así como las ecuaciones diferenciales ordinarias de una sola variable independiente resultan engendradas por las familias de curvas en el plano, las ecuaciones en derivadas parciales resultan de las familias de superficies. Vamos a estudiarlas y clasificarlas.

324. — Generación de superficies mediante curvas.

Una superficie está engendrada por una curva que se mueve; pero como al moverse varía, hay que definir lo que se entiende por movimientos de una curva. Supongamos dada una "congruencia" de curvas, o sea una familia "doblemente infinita" de curvas, es decir, dos ecuaciones $u(x, y, z) = \alpha$; $v(x, y, z) = \beta$ con dos parámetros arbitrarios α y β. Si imponemos alguna condición geométrica que ligue estos parámetros por una cierta relación $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ la familia se llama "simplemente infinita" o "haz de curvas" y eliminando α, β entre las tres ecuaciones resulta una ecuación

$$\varphi\,[u(x, y, z), v(x, y, z)] = 0, \qquad \text{o sea} \qquad F(x, y, z) = 0$$

que contiene todos los puntos de todas las curvas de esta familia, y por lo tanto representa la superficie que engendran.

La condición más frecuente que suele imponerse, es que la generatriz corte a una curva fija, llamada *directriz;* eliminando x, y, z entre las ecuaciones de ésta y las de la generatriz, resulta la condición buscada: $\varphi(\alpha, \beta) = 0$. Otras veces la condición será la de ser tangente a una superficie, etc. He aquí algunos ejemplos:

Superficies cilíndricas. — Consideremos la recta

$$x = az + \alpha \quad , \quad y = bz + \beta$$

Como tiene cuatro parámetros, es una familia cuádruplemente infinita, pero si fijamos a y b, es decir, si las rectas se consideran paralelas a una dirección, la familia es doblemente infinita.

Elijamos una directriz cualquiera $\varphi(x, y) = 0$ en el plano xy. La traza de cada recta sobre este plano es $x = \alpha$, $y = \beta$, luego la condición para que se apoye en dicha directriz es $\varphi(\alpha, \beta) = 0$. Cualquiera que sea el punto de la recta es:

$$\alpha = x - az \quad ; \quad \beta = y - bz,$$

luego todos los puntos de las rectas que se apoyan en la directriz satisfacen a la ecuación:

$$\varphi(x - az,\ y - bz) = 0. \qquad [2]$$

Esta es, por tanto, la ecuación del cilindro definido por aquella directriz. Al variar arbitrariamente la función φ resultan los infinitos cilindros. La ecuación [2] representa, pues, todos los cilindros de dirección dada (a, b) no paralela al plano xy.

Superficies cónicas. — Las ecuaciones de una recta cualquiera que pasa por el origen de coordenadas son:

$$x = \alpha z \quad ; \quad y = \beta z. \qquad [3]$$

Dada una directriz cualquiera, expresando que la recta [3] se apoya en ella resulta una ecuación $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ y como en todos los puntos de todas las rectas [3] es:

$$\alpha = x/z \quad , \quad \beta = y/z$$

todas ellas satisfacen a la ecuación $\varphi(x/z,\ y/z) = 0$, que representa todos los conos de vértice O.

Obsérvese que esta ecuación es homogénea respecto de x, y, z, es decir, al multiplicar por un coeficiente λ cualquiera, sigue satisfaciéndose la ecuación. Análogamente, las superficies cónicas de vértice (a, b, c) están representadas por la ecuación

$$\varphi(x - a/z - b,\ y - b/z - c) = 0. \qquad [4]$$

Obténgase la ecuación de la superficie cónica que proyecta la intersección de dos superficies dadas por sus ecuaciones.

Superficies de revolución. — Una circunferencia de plano paralelo al xy, a la distancia α y radio r viene expresada así:

$$x^2 + y^2 = \beta = r^2 \quad , \quad z = \alpha.$$

Dada una directriz cualquiera por sus dos ecuaciones, la condición para que se corten se obtiene eliminando x, y, z entre las cuatro ecuaciones y resulta $\varphi(\alpha, \beta) = 0$.

Sustituyendo α, β por sus expresiones, se obtiene:

$$\varphi(z, x^2 + y^2) = 0$$

que representa todas las superficies de revolución de eje z.

325. — Integración de las ecuaciones lineales.

La integración de la ecuación lineal

$$Xp + Yq = Z \tag{5}$$

en la cual X, Y, Z son funciones de x, y, z; es decir, la obtención de todas las superficies $z = f(x, y)$ que satisfacen a la ecuación, se reduce a la integración del sistema de dos ecuaciones ordinarias:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \tag{6}$$

En efecto, este sistema representa, como ya se demostró, una congruencia de curvas que se obtendrán integrando el par de ecuaciones

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X} \quad , \quad \frac{dz}{dx} = \frac{Z}{X}$$

(suponiendo $X \neq 0$) y así resultará

$$u(x, y, z) = \alpha \qquad v(x, y, z) = \beta.$$

Esta familia de curvas doblemente infinita está formada precisamente por las líneas de fuerza del campo vectorial de componentes X, Y, Z; pues la tangente en cada punto tiene cosenos proporcionales a X, Y, Z. Tales curvas se llaman *características*.

Toda superficie formada por estas curvas características tiene la propiedad de que la tangente a cada curva, es decir, la recta

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}$$

está en el plano tangente a la superficie

$$z - z_0 = (x - x_0)p + (y - y_0)q$$

luego substituyendo los numeradores por los denominadores, resulta

$$Xp + Yq = Z$$

es decir: *toda superficie*

$$\varphi\,[u(x, y, z),\ v(x, y, z)] = 0$$

formada por curvas características satisface a la ecuación lineal.

Recíprocamente, dada una superficie cualquiera: $z_1 = f(x, y)$ que satisfaga a la ecuación [5], si consideramos la curva característica

$$y = y(x), \qquad z = z(x)$$

que pasa por un punto cualquiera $A(x_0, y_0, z_0)$ tomado en dicha superficie y formamos la ecuación diferencial en x, y:

$$\frac{dx}{X(x, y, z_1)} = \frac{dy}{Y(x, y, z_1)}$$

ésta define en el plano x, y una curva que pasa por el punto (x_0, y_0), la cual es proyección de una curva C_1 de la superficie, que pasa por el punto $A(x_0, y_0, z_0)$ y satisface a las relaciones lineales:

$$p.dx + q.dy = dz_1$$

$$p.X + q.Y = Z$$

aplicadas éstas a la proporción anterior, resulta una 3.ª razón dz/Z igual a aquellas dos. Resulta, pues, que la curva C_1 satisface al sistema [6], luego es la curva característica que pasa por A.

Queda así demostrado este teorema recíproco del anterior: *Toda superficie integral de la ecuación* [1] *está formada por curvas características.*

Por tanto, la integral general de la ecuación es:

$$\varphi\,[u(x, y, z),\ v(x, y, z)] = 0$$

siendo φ una función arbitraria.

Cada integral está determinada por una curva cualquiera que no sea característica; pues esta directriz determina, como se demostró en (320), una superficie formada por las curvas características que se apoyan en ella.

Menos fácil es determinar la superficie por una directriz que también sea superficie, a la que deban ser tangentes las curvas características.

Ejemplo 1.° — Sea la ecuación $ap + bq = 1$.

El sistema equivalente es

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}$$

que integrado da: $x = az + \alpha$; $y = bz + \beta$.

La integral general de la ecuación es, por tanto:

$$\varphi(x - az,\ y - bz) = 0$$

que representa todos los cilindros de dirección (a, b).

Ejemplo 2.° — La ecuación $px + qy = z$ se reduce al sistema

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

cuya integral general es: $x = \alpha z$; $y = \beta z$
luego la integral general de la ecuación lineal es

$$\varphi(x/z,\ y/z) = 0$$

que representa todos los conos de vértice O.

Ejemplo 3.° — La ecuación diferencial de todas las superficies de revolución de eje z se obtendrá formando las ecuaciones diferenciales de la familia de circunferencias antes dada. (388).

$$x^2 + y^2 = \beta \quad ; \quad z = \alpha$$

y resulta diferenciando:

$$x\,dx + y\,dy = 0 \quad ; \quad dz = 0$$ que se puede escribir así:

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}$$

Luego la ecuación que representa las superficies de revolución de eje z es: $py - qx = 0$.

EJERCICIOS

1. — Obtener las superficies ortogonales de las esferas que pasan por O y tienen el centro en el eje x.

Resulta la ecuación diferencial: $(x^2 - y^2 - z^2)p + 2xyq = 2xz$.

2. — Ecuación diferencial de las superficies de revolución en torno de la recta de coeficientes directores (a, b, c) que pasa por O.

Adóptense como curvas generatrices las circunferencias normales al eje, determinadas por planos y esferas de centro O.

ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN EN DERIVADAS PARCIALES

326. — Definiciones, notaciones y ejemplos.

Si llamamos r, s, t, a las derivadas segundas de z, la ecuación general de segundo orden con dos variables independientes x, y, es del tipo:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

siendo $r = z''_{xx}$, $s = z''_{xy}$, $t = z''_{yy}$; y su estudio completo es objeto del Análisis superior (v. Goursat, t. III).

Así como en la integración de las ecuaciones de primer orden estudiadas en la lección anterior, aparecía una función arbitraria, en estas ecuaciones de segundo orden aparecen *dos* funciones arbitrarias. En aquellas bastaba dar una curva para determinar la superficie integral; en éstas hay que dar la curva y los planos tangentes a lo largo de ella a la superficie buscada, es decir, hay que dar una de las derivadas de z respecto de x o y a lo largo de la curva dada como directriz.

A modo de ejemplo ,sea la ecuación $s = 0$; escrita en la forma

$$\frac{\partial z'_x}{\partial y} = 0 \quad , \quad \text{o bien} \quad (z'_x)'_y = 0$$

resulta integrando $z'_x = f(x)$ arbitraria. Integrando de nuevo, y llamando F a una primitiva de f, resulta:

$$z = \int f(x)dx + \Phi(y) = F(x) + \Phi(y).$$

La integral general de la ecuación dada se obtiene, pues, sumando una función arbitraria de x con una función arbitraria de y. La determinación de estas funciones la haremos en el párrafo siguiente.

327. — La ecuación de d'Alembert.

Sea la ecuación clásica:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Efectuemos el cambio de variables:

$$X = x + at \qquad Y = x - at$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial X} + \frac{\partial z}{\partial Y} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \left[\frac{\partial z}{\partial X} - \frac{\partial z}{\partial Y}\right] a$$

Derivando otra vez

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial X . \partial Y} + \frac{\partial^2 z}{\partial Y . \partial X} + \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2} + \frac{2 . \partial^2 z}{\partial X . \partial Y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \left[\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} - \frac{2\partial^2 z}{\partial X . \partial Y} + \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}\right]$$

Al sustituir en la ecuación dada se reduce a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial X . \partial Y} = 0$$

cuya integral general es:

$$z = \Phi(X) + \Psi(Y) \qquad \text{o sea:} \quad z = \Phi(x + a\,t) + \Psi(x - a\,t) \qquad [1]$$

Veamos cómo se determinan estas funciones Φ, Ψ, de modo que se cumplan las condiciones iniciales para $t = 0$, es decir, que la función y su derivada coincidan con funciones dadas $f(x)$ y $f_1(x)$:

$$\Phi\,(x) + \Psi\,(x) = f(x)$$

$$\Phi'(x) - \Psi'(x) = f_1(x) : a$$

e integrando la segunda sale:

$$\Phi\,(x) - \Psi\,(x) = F(x).$$

siendo F una primitiva cualquiera de $f_1(x) : a$.

De la primera y tercera resulta:

$$2\Phi(x) = f(x) + F(x)$$

$$2\Psi(x) = f(x) - F(x)$$

luego la integral general es:

$$z = \tfrac{1}{2}\,[f(x + at) + f(x - at) + F(x + at) - F(x - at)] \qquad [2]$$

328. — El problema de la cuerda vibrante.

Adoptada la recta de la cuerda tensa como eje x, la perpendicular en uno de los extremos como eje z, la ecuación de una cuerda que vibra es de la forma $z = f(x, t)$; para cada valor de t resulta la ecuación de la curva en dicho momento y para cada valor de x la ecuación define el movimiento vibratorio del punto que tiene esa abscisa. La ecuación diferencial de la cuerda vibrante es precisamente la de D'Alembert, que hemos estudiado en el párrafo anterior, siendo a una constante que depende del módulo de elasticidad del material, de la longitud y de la masa. Aunque hemos dado la integral general en el párrafo anterior, son importantes las integrales particulares sinusoidales.

Una integral particular se ve inmediatamente:

$$z = k \, . \cos m (t - \alpha) \, . \operatorname{sen} {}^{m}/_{a} \, x \qquad [3]$$

siendo k, m y α números arbitrarios; pues al derivar dos veces respecto de t resulta la misma función, cambiada de signo y multiplicada por m^2, y al derivar dos veces respecto de x, resulta la misma función cambiada de signo multiplicada por m^2/a^2; luego dicha función satisface a la ecuación diferencial.

Para $x = 0$ resulta $z = 0$, como debe ser; y también debe ser $z = 0$ para $x = l$, puesto que ambos extremos se suponen fijos. Tenemos, por consiguiente, la condición de *ligadura*:

$$\operatorname{sen} ml/a = 0 \quad \therefore \quad m \, l = n \, a \, \pi, \quad m = a \, n \, \pi / l$$

luego una función que satisface a la ecuación diferencial ,o mejor un tipo de funciones integrales, suponiendo $l = 1$, es:

$$z = k \, . \cos n \, \pi \, a (t - \varphi) \, . \operatorname{sen} n \, \pi \, x \qquad [4]$$

Esta es la ley más sencilla de movimiento; cuando la cuerda vibra según esta ley, el movimiento es periódico; el *período* es: $T = 2l/a \, n$, o sea el tiempo que dura cada vibración completa.

Significado físico. — El número de vibraciones por unidad de tiempo es, pues, el recíproco $w = \frac{1}{2} \, an/l$ llamado *pulsación*.

El tono del sonido depende de este número de vibraciones. Cuanto menor sea l mayor w y más alta la nota; el menor valor posible de n es $n = 1$; ningún punto de la cuerda, salvo los extremos, queda fijo, pues para todos es $z \neq 0$, excepto para los valores de t en que anulándose el coseno toda la cuerda pasa momentáneamente por el eje x.

Para $n = 2$ no sólo quedan fijos los extremos sino también el punto medio $x = \frac{1}{2} \, l$; el número de vibraciones w es doble del fundamental y resulta la *octava de la nota fundamental*.

Para $n = 3$ quedan fijos dos puntos intermedios $x = 1/_3\, l$, $x = 2/_3\, l$, la nota es la quinta de la octava; para $n = 4$ resulta la segunda octava ,etc. A los puntos fijos se les llama *nodos*. En estos casos cada trozo de la cuerda vibra independientemente y la nota es más alta por ser menor la longitud.

Para $t = 0$ debe resultar una sinusoide si $n = 1$ y una sinusoide reducida para $n > 1$; pero cuando se pulsa de cualquier otro modo, la expresión [4] no puede representar el movimiento. Sumando integrales del tipo (4) resulta una *integral más general (haciendo $l = 1$ para mayor sencillez):*

$$z = (a_1 . \cos \pi a t + b_1 . \operatorname{sen} \pi a t) \operatorname{sen} \pi x +$$
$$+ (a_2 . \cos 2 \pi a t + b_2 . \operatorname{sen} 2 \pi a t) \operatorname{sen} 2 \pi x + \dots . \qquad [5]$$

Si se logra determinar los coeficientes de modo que se verifiquen las condiciones iniciales, es decir, que para $t = 0$ la cuerda tenga la forma arbitraria que se le da y la velocidad inicial sea la dada, esta expresión será la integral general. Tal es el método de integración de Bernoulli.

Sean las condiciones iniciales:

$$z = f(x) \quad ; \quad z'_t = F(x) ;$$

para $t = 0$, es decir, se da la curva inicial y la velocidad inicial de cada punto: es preciso determinar los coeficientes de [5] de modo que sea:

$$a_1 . \operatorname{sen} \pi x + a_2 . \operatorname{sen} 2 \pi x + a_3 . \operatorname{sen} 3 \pi x + \dots . = f(x) .$$
$$\pi a (b_1 . \operatorname{sen} \pi x + 2 b_2 . \operatorname{sen} 2 \pi x + 3 b_3 . \operatorname{sen} 3 \pi x + \dots .) = F(x) .$$

Ahora bien, esto no se logra con un número finito de términos; pero, si adoptamos series indefinidas, entonces cualquiera que sea la función continua $f(x)$ con la sola condición de que sea finito el número de sus máximos y *mínimos, existe un desarrollo y solo uno en serie de Fourier y determinados* los coeficientes a_n y análogamente los b_n mediante el desarrollo de $F(x)$, se tiene la integral general en la forma [5].

Quizás vea el lector en la forma *impar* de estos desarrollos una restricción imposible de cumplir; pero variando x en $(0, 1)$ y el arco πx en $(0, \pi)$ basta suponer completadas las funciones en $(-1, 0)$ poniendo $f(-x) = -f(x)$, $F(-x) = -F(x)$.

EJERCICIOS

1. — Integrar las ecuaciones de segundo orden:

$$z''_{xy} = c \quad , \quad z''_{xx} = c \quad , \quad z''_{xx} = f(x) + \varphi(y)$$

2. — Integrar la ecuación de la cuerda vibrante de longitud $l = 1$, que se pulsa en su punto medio, con una púa, sin velocidad inicial.

El significado físico del coeficiente a es

$$a^2 = P g^2 / p$$

siendo P la tensión inicial, p el peso de la cuerda y g la aceleración de la gravedad.

CAPITULO XIII

CALCULO DE VARIACIONES

LECCIÓN 80

ELEMENTOS DE CALCULO DE VARIACIONES

329. — Problema fundamental.

Tiene por principal objeto la determinación de funciones que sustituídas en una integral definida le den valor mínimo o máximo relativo, es decir, menor (mayor) que cualquiera otra función suficientemente próxima.

Este problema difiere esencialmente de los problemas de máximos y mínimos ordinarios; pues, así como allí se trataba de determinar un valor numérico de x que diera valor máximo o mínimo a una función conocida y, aquí se trata de determinar una función $y(x)$, que sustituída en una cierta integral definida, del tipo:

$$\int_a^b f(x, y, y')\, dx$$

le dé un valor máximo o mínimo relativo; tales problemas son p. ej.:

1.° Entre dos puntos de una superficie cualquiera, determinar cuál es la curva de longitud mínima; ésta se llama *geodésica*.

2.° Entre todas las curvas que pasan por dos puntos del plano determinar la que engendra la superficie de área mínima al girar en torno de un eje.

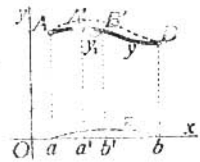
En estos y otros ejemplos el elemento geométrico (longitud, área, etc.), que se desea hacer mínimo, viene expresado por una integral donde figura la función desconocida $y(x)$ y su derivada $y'(x)$.

Si la función $y(x)$ hace *mínima o máxima una integral en el intervalo* (a, b) *tiene esta misma propiedad en cada intervalo parcial* (a', b'). En efecto, si la función $y(x)$ no hace mínima, por ejemplo, a la integral en el intervalo parcial, y es $y_1(x)$, resultará una nueva función o arco $AA'C'B'B$ en el cual la integral toma un valor menor que para la función $y(x)$, contra lo supuesto. Así, por ejemplo, las curvas geodésicas de una superficie son geodésicas entre dos cualesquiera de sus puntos.

330. — Ecuación de Euler.

Designaremos por y la función desconocida que para $x=a$, $y=b$, toma los valores prefijados $y(a)=A$, $y(b)=B$, es decir, representa la curva buscada que pasa por los puntos dados A, B.

Consideremos las funciones del tipo $y(x)+t.z(x)$ siendo z una función continua de x que se anula para $x=a$, $x=b$. Elegida arbitrariamente dicha función $z(x)$, al dar valores reales a t van resultando infinitas curvas que pasan por A, B. Entre ellas, para $t=0$, resulta la misma $y(x)$. Este incremento $t.z(x)$ que se le da a y suele llamarse la *variación* de y, representándose así: δy. Entiéndase que esta letra δ indica simplemente la diferencia entre la función $y(x)$ y cualquier otra que tome los mismos valores en los extremos, es decir, su gráfica está formada por la diferencia de ordenadas entre la curva $y(x)$ y cualquier otra que pase por A y B. Así como el incremento Δy es la diferencia de valores de una *misma* función para diversos valores de x, la variación δy es la diferencia de valores de dos funciones para cada valor de x.



El valor que toma la integral [1] para cualquiera de dichas infinitas funciones $y+tz$ es:

$$J=\int_a^b f(x, y+tz, y'+tz')\,dx.$$

que depende de la función z y del número real t, pero una vez elegida $z(x)$, es J función de t.

Elegida arbitrariamente la función $z(x)$ tenemos infinitas curvas al variar t y la integral es función de t; su valor debe ser mínimo para $t=0$, luego su derivada debe ser nula para $t=0$; dicha derivada resulta derivando bajo el signo integral:

$$J'_t=\int_a^b (f'_y.z+f'_{y'}.z')\,dx=0. \qquad [2]$$

El segundo sumando contiene la diferencial exacta $z'.dx=dz$ e integrándolo por partes resulta:

$$\int_a^b f'_{y'}.z'.dx=z.f'_{y'}\Big|_a^b-\int_a^b z.D_x f'_{y'}.dx \qquad [3]$$

pero z es nula para $x=a$ y para $x=b$, luego se anula el minuendo y sustituyendo el valor [3] en la [2] resulta:

$$\int_a^b z(f'_y - D_x f'_{y'})dx = 0 \qquad [4]$$

Esta integral debe, pues, anularse cualquiera que sea la función z y para ello es necesario que se anule en todo el intervalo propuesto (a, b) la expresión de Euler:

$$\boxed{f'_y - D_x f'_{y'} = 0} \qquad [5]$$

Demostración. — Las soluciones de [5] son las únicas funciones que cumplen la condición [4], es decir: si la integral [4] es nula cualquiera que sea la función z, debe ser nula la expresión [5] en todo el intervalo (a, b). Pues si en algún punto fuese positiva, por ejemplo, se conservaría positiva en todo un intervalo parcial (por la continuidad) y elegida z positiva, la integral en dicho intervalo sería positiva también, mientras que debe ser nula, por cumplirse la condición del mínimo en todo intervalo parcial, según se ha explicado en el párrafo anterior.

La determinación de la función $y(x)$ que hace mínima o máxima la integral J se reduce, pues, a integrar la ecuación [5] con las condiciones iniciales $y(a) = A$, $y(b) = B$.

He aquí, pues, una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden (pues al derivar $f'_{y'}$ aparecerá y'') a la cual debe satisfacer la función buscada $y(x)$. Si la función integrando $f(x, y, y')$ carece de y, la integración reduce a la de ésta:

$$D_x f'_{y'} = 0 \quad \text{de donde:} \quad f'_{y'} = C;$$

e integrando esta ecuación de primer orden aparece una segunda constante arbitraria. Ambas constantes se determinarán por las condiciones iniciales $y(a) = A$, $y(b) = B$.

En el caso general en que bajo el signo integral figuren x, y, y' la ecuación [5] desarrollada es:

$$f'_y - f''_{xy'} - f''_{yy'} \cdot y' - f''_{y'y'} \cdot y'' = 0 \qquad [6]$$

ecuación *no lineal* en y', pues ésta figura en los coeficientes, que deben deducirse derivando la función $f(x, y, y')$. La integración conducirá a una función con dos constantes arbitrarias, que se determinarán como arriba se ha dicho.

Nota. — Esta función $y(x)$ así determinada anula, pues, a la derivada J'_t y según que haga positiva o negativa a la derivada segunda, dará a la integral un valor menor o mayor que todas las funciones $y + tz$ de un cierto entorno $|t| < 6$, suponiendo fijada la función auxiliar $z(x)$. En la práctica no suele ser necesario recurrir a la derivada segunda, pues la índole del problema indica si se trata de máximo o mínimo; y como las únicas funciones que pueden satisfacer al problema son las que anulen a la expresión [5], sólo podrá haber ambigüedad cuando haya más de una solución que satisfaga a las condiciones iniciales, como sucede en el ejemplo 3.°.

Pudiera creerse, por analogía con la teoría de los máximos y mínimos ordinarios, que el análisis de las derivadas sucesivas (*) permitirá resolver completamente el problema; pero no acontece así, como puede verse en las *Notas*.

331. — Problemas clásicos de cálculo de variaciones.

EJEMPLO 1. — Determinar las funciones $y(x)$ que hagan mínima la integral:

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Siendo $f(x,y,y') = \sqrt{1+y'^2}$ igualando a cero la variación primera, resulta la ecuación de Euler [5], que, por no figurar y en la integral, se reduce a ésta:

$$D_x f'_{y'} = 0 \quad \text{de donde} \quad F'_{y'} = c, \quad \text{o sea:}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c \quad \therefore \quad y' = C \quad \therefore \quad y = Cx + C_1$$

es decir, una función lineal cuyas constantes se determinan por la condición de pasar la recta por los puntos dados. Dado el significado geométrico de la integral, el resultado era *a priori* conocido.

EJEMPLO 2. — Curva entre dos puntos, que engendra el cuerpo de revolución de volumen mínimo al girar alrededor del eje x.

$$V = \pi\int_a^b y^2.dx, \quad \text{siendo} \quad f(x,y,y') = y^2.$$

La ecuación de Euler es en este caso:

$$f'_y - D_x f'_{y'} = 2y = 0$$

luego la curva coincide con el segmento (a, b) del eje x, más las ordenadas extremas, como era de esperar, dadas las condiciones del problema.

EJEMPLO 3. — *Superficies de revolución de área mínima.* — Entre todas las curvas de extremos dados determinar la que engendra la superficie de revolución de menor área al girar alrededor del eje x. La expresión del área es:

$$S = 2\pi\int y\sqrt{dx^2+dy^2} = 2\pi\int y\sqrt{1+x'^2}\,dy \quad ; \quad f(y,x,x') = y\sqrt{1+x'^2}$$

(*) Como la integral J es función de t, desarrollada por la fórmula de Taylor resulta:

$$J(t) = J(0) + \frac{t}{1!}\,\frac{dJ}{dt} + \frac{t^2}{2!}\,\frac{d^2J}{dt^2} + \dots$$

Sólo hemos considerado el término llamado variación primera: $\delta J = t.J'$; el estudio completo exigiría considerar las variaciones sucesivas:

$$\delta^2 J = t^2 J'' \quad , \quad \delta^3 J = t^3 J''' \quad , \quad \dots$$

pero ya anunciamos arriba que no es suficiente para vencer totalmente la dificultad del problema.

habiendo adoptado y como variable independiente y x como función desconocida, para simplificar; pues la ecuación de Euler, con este cambio de variables, es:

$$f'_x - D_y f'_{x'} = 0 \quad \text{que se reduce a} \quad D_y f'_{x'} = 0$$

e integrando resulta:

$$f'_{x'} = \alpha, \quad \text{o sea:} \quad \frac{y\, x'}{\sqrt{1 + x'^2}} = \alpha.$$

de donde:

$$x'^2 (y^2 - \alpha^2) = \alpha^2 \quad \text{y separando variables} \quad dx = \frac{\alpha\, dy}{\sqrt{y^2 - \alpha^2}}$$

Hagamos el cambio de variable $y = \alpha . chz$; entonces:

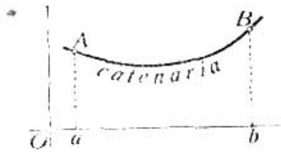
$$dy = \alpha . shz . dz \qquad \sqrt{y^2 - a^2} = \alpha . shz.$$

La ecuación se reduce a

$$dx = a . dz \quad \text{de donde} \quad z = \frac{x + C}{\alpha}$$

y la curva buscada es la catenaria cuya base es el eje x:

$$y = \alpha . ch \frac{x + C}{\alpha}$$



Las constantes α y C se determinan por la condición de que la curva pase por los dos puntos dados. En particular, si éstos son simétricos respecto del eje x, para $x = \pm a$ deben resultar valores iguales de y; como el ch es función monótona par, deben ser opuestos los arcos $a + C$, $- a + C$, luego $C = 0$.

Un estudio completo permite discutir los tres casos que pueden presentarse, según que por los dos puntos pasen dos catenarias, una o ninguna. (Ver, p. ej., *Curso cíclico*, t. II).

EJEMPLO 4. — *Problema de la braquistócrona.* — Un grave cae desde O a A por una curva $O\,A$ y se trata de encontrar ésta de modo tal, que el tiempo invertido en recorrerla sea mínimo.

La velocidad, después de haber descendido la ordenada y, es:

$$v = \sqrt{2\,gy} \quad \text{luego} \quad dt = \frac{ds}{\sqrt{2\,g\,y}}$$

y el tiempo trascurrido es:

$$T = \int_0^A ds / \sqrt{2\,gy} = \tfrac{1}{2} \int_0^A \sqrt{1 + x'^2}\, dy / gy$$

Para obtener la función que hace mínima la integral, hemos adoptado y como variable independiente y la ecuación de la variación primera que es:

$$f'_x - D_y f'_{x'} = 0$$

se reduce a $f'_{x'} = const$; *o sea, poniendo la constante en la forma* $1 : \sqrt{2r}$, *se* tiene:

$$\frac{x'}{\sqrt{y(1 + x'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2\,r}}$$

$$\text{de donde} \quad x' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2\,r - y}}$$

Pongamos para racionalizar:

$$y = r(1 - \cos t) = 2r \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}t$$

y el segundo miembro se simplifica así:

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2r - y}} = \frac{\sqrt{2r \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t}}{\sqrt{2r \cos^2 \frac{1}{2} t}}$$

que se reduce a $\operatorname{tg} \frac{1}{2}t$; por otra parte:

$$dy = r \operatorname{sen} t \,.\, dt = 2r \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}t \cos \tfrac{1}{2}t \,.\, dt$$

luego la ecuación se transforma en ésta:

$$dx = 2r \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}t \,.\, dt = r(1 - \cos t)dt$$

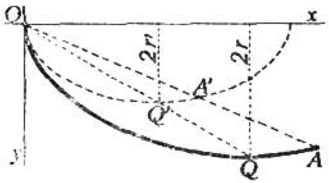
cuya integral general es:

$$x = r(t - \operatorname{sen} t) + C.$$

y esta constante debe ser nula, pues para $y = 0$, $t = 0$ debe ser $x = 0$. Resultan así las ecuaciones:

$$x = r(t - \operatorname{sen} t)$$
$$y = r(1 - \cos t)$$

que representan una cicloide, cuya base es el eje x.



Esta rampa cicloidal se llama *curva braquistócrona*, que significa: *curva de tiempo mínimo*.

¿Cómo construir o determinar la cicloide que pasa por O y A? No es fácil resolver este problema algebraicamente, pero en cambio es muy sencilla la solución gráfica representada en la figura. Dibújese una onda cualquiera de cicloide y determínese el punto A' de intersección con la semirrecta OA. La homotecia de centro O que transforma A' en A da el arco de cicloide OA que resuelve el problema. La figura indica asimismo cómo se determina su radio r y se deduce fácilmente el argumento t que corresponde al punto A.

EJERCICIOS

1. — Dibujada la curva $y = ch\, x$ construir gráficamente el arco de catenaria de extremos A, B que engendra la superficie de revolución de área mínima.

2. — Calcular la pendiente que debe tener OA para que el punto móvil llegue horizontalmente a A; ídem ascendentemente (como en la figura); ídem en sentido descendente.

COMPLEMENTOS DE CALCULO DE VARIACIONES

332. — Casos especiales de la ecuación de Euler.

Ya hemos visto que si la función integrando $f(x, y, y')$ no contiene la y, es inmediata una primera integración de la ecuación de Euler, la cual se reduce a una de primer orden.

Si el integrando no contiene la x, hemos reducido este caso al anterior permutando las variables; pero este artificio exige que x sea función de y en el intervalo (A, B); es decir, que la solución buscada sea función monótona, y tal condición puede no cumplirse, por desgracia, en los dos problemas de la superficie mínima y de la braquistócrona. Veamos la solución rigurosa.

Si la función integrando carece de x, es decir, es del tipo $f(y, y')$ la ecuación de Euler [6] se reduce a ésta:

$$f'_y - f''_{yy'} \cdot y' - f''_{y'y'} \cdot y'' = 0 \tag{1}$$

Designando por D la derivación total, respecto de la única variable independiente x, y comparando [1] con las expresiones:

$$Df = f'_y \cdot y' + f'_{y'} \cdot y''$$

$$D(f'_{y'} \cdot y') = f'_{y'} \cdot y'' + f''_{y'y} \cdot y'^2 + f''_{y'y'} \cdot y'y''$$

se ve que la diferencia de éstas es precisamente aquel trinomio multiplicado por y'; luego de la ecuación [1] se deduce

$$D(f - f'_{y'}\, y') = 0 \qquad \therefore \qquad f - f'_{y'} \cdot y' = a \tag{2}$$

ecuación de primer orden que suministra la integral general, con dos constantes a, b.

Ejercicio. — Aplíquese la ecuación [1] al problema de la superficie de área mínima y al de la braquistócrona.

Nota. — Fácilmente se pasa de este método al aplicado en (333), quedando así justificada la permutación de variables. En efecto, allí procedíamos así:

$$\int f(y, y')\, dx = \int \varphi(y, x')\, dy$$

y suponiendo que $x = x(y)$ fuera uniforme en el intervalo (A, B) obteníamos como integral de la ecuación de Euler $\varphi'_{x'} = c$; pero siendo:

$$\varphi = f.x' \qquad \therefore \qquad \varphi'_{x'} = f + f'_{x'}.x'$$

y como $y' = 1/x'$, este binomio vale:

$$f + f'_{y'}.x'(-1/x'^2) \quad \text{o sea} \quad f - f'_{y'}.y'$$

Por ambos métodos se llega, por tanto, a la misma ecuación diferencial, quedando así justificado aquél, si es y función uniforme de x, aunque no exista función inversa.

333. — Geodésicas de una superficie.

Problema muy importante en Geometría y en Física relativista es el de las *geodésicas* de un espacio curvo. En el caso más sencillo, que es el de las superficies del espacio euclidiano, la expresión de la diferencial de arco (235) es

$$ds = \sqrt{E\,du^2 + 2Fu.dv + G\,dv^2}$$

adoptando u como variable independiente, la función integrando es:

$$f = \sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}$$

y la ecuación diferencial de las geodésicas resulta inmediatamente aplicando la ecuación de Euler:

$$(E'_v + 2F'_v.v' + G'_v.v'^2) : 2f = D_u\,[(F + Gv') : f]$$

EJEMPLO 1. — Si la superficie es plana, $E = G = 1$, $F = 0$, la ecuación se reduce a ésta:

$$D_u\,[v' : \sqrt{1 + v'^2}] = 0 \quad \therefore \quad v' = a \quad \therefore \quad v = au + b$$

es decir, las geodésicas son rectas.

EJEMPLO 2. — *Geodésicas de la superficie esférica.*

Si u es la latitud y v la longitud, el elemento de arco en la superficie esférica de radio 1 es:

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \cos^2 u. \qquad ds^2 = du^2 + \cos^2 u.dv^2$$

Más sencillo: efectúese el cambio de coordenadas, como ya se indicó en la Nota de (260).

Como no contiene la variable v, la ecuación de Euler, después de una primera integración, da:

$$\frac{v'.\cos^2 u}{\sqrt{1 + v'^2 \cos^2 u}} = \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}}$$

poniendo en esta forma la constante para facilitar la integración.

Despejando:

$$v'^2 = \frac{1}{(1 + c^2)\cos^4 u - \cos^2 u}$$

la integral es inmediata con el cambio de variable $\operatorname{tg} u = t$ y resulta:

$$c.\operatorname{sen}(v + \alpha) = \operatorname{tg} u \quad \text{o bien} \quad a \cos v + b \operatorname{sen} v = \operatorname{tg} u$$

que representa un arco de circunferencia máxima, sección por el plano $ax + by = z$.

334. — Curvas extremales en forma paramétrica.

La teoría que hemos expuesto es muy restringida, por considerar solamente aquellos arcos de extremos A, B, que son cortados en un solo punto por cada recta paralela al eje y. Para poder considerar todos los arcos $A\,B$ es preciso adoptar la forma paramétrica:

$$x = x(t) \qquad y = y(t)$$

y considerar las integrales del tipo:

$$\int f(x, y, x', y')\,dt \qquad [3]$$

Al cambiar el parámetro t por el u la diferencial queda dividida por u', mientras que x' y' quedan multiplicadas por u'. Para que la integral tenga significado intrínseco, independiente del parámetro elegido para representar el arco, es preciso que la función $f(x, y, x', y')$ quede multiplicada por u'; y como esto vale para todo número u', *debe ser homogénea de grado 1 respecto de las variables* x', y'.

Ejemplos. — La función integrando para la longitud del arco es $\sqrt{x'^2 + y'^2}$, que cumple esta condición de homogeneidad.

Lo mismo sucede a la función $y\sqrt{x'^2 + y'^2}$ que aparece en el área de la superficie de revolución.

Para hacer variar el arco AB incrementaremos las coordenadas poniendo $x + r_1 z_1$, $y + r_2 z_2$ en lugar de x, y. Las funciones $z_1(t)$, $z_2(t)$ son continuas, nulas en los extremos A, B, y por comodidad las supondremos positivas en los puntos intermedios. Los números r_1, r_2, son reales y al anularse determinan el arco AB.

La integral [3] es una función $\Phi(r_1, r_2)$ de los parámetros r_1, r_2, y sus derivadas parciales primeras respecto de ellos deben anularse para $r_1 = 0$, $r_2 = 0$, si es máxima o mínima en el arco AB la integral [3]. Es decir, debe verificarse:

$$\Phi'_1(0, 0) = \int (f'_x . z_1 + f'_{x'} . z'_1)\,dt = 0$$
$$\Phi'_2(0, 0) = \int (f'_y . z_2 + f'_{y'} . z'_2)\,dt = 0$$

Transformando por partes el 2.° sumando de la 2.ª integral resulta como ya se vió (332) la condición [5] de Euler; y lo mismo para la 1.ª integral. Resulta así el par de ecuaciones diferenciales de 2.° orden

$$\boxed{f'_x - Df'_{x'} = 0 \quad ; \quad f'_y - Df'_{y'} = 0.} \qquad [4]$$

donde el signo D indica derivación respecto de t.

NOTA. — Como consecuencia de la homogeneidad de $f(x, y, x', y')$ se verifica la identidad fácil de demostrar:

$$(f'_x - Df'_{x'})x' = -(f'_y - Df'_{y'})y'$$

y por tanto, basta resolver una de las ecuaciones.

La demostración se reduce a derivar respecto de t los dos miembros de la igualdad:

$$f = x' f'_{x'} + y' f'_{y'}$$

que expresa la homogeneidad de f por el teorema de Euler (198), y simplificando la igualdad obtenida por reducción de los términos $x''f'_{x'} + y''f'_{y'}$ que aparecen en ambos miembros, resulta la igualdad propuesta.

He aquí un problema clásico cuya resolución completa no sería posible por el método expuesto en la lección anterior:

PROBLEMA DE NEWTON. — *Determinar el cuerpo de revolución que al moverse en la dirección de su eje en un flúido encuentra resistencia mínima; suponiendo que la resistencia normal es proporcional al cuadrado de la componente normal de la velocidad.*

El área engendrada por el elemento ds, al girar al rededor del eje x, es $2\pi y.ds$; la componente normal de la velocidad v es $v.dy/ds$, luego la resistencia de la corona de superficie es $2\pi v^2 y.dy^2/ds$ por un factor numérico.

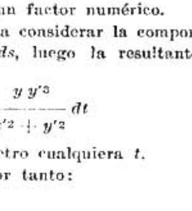
Como la componente normal al eje es nula, basta considerar la componente paralela, la cual se obtiene multiplicando por dy/ds, luego la resultante de todas es la integral

$$2\pi v^2 \int y.dy^3.ds^{-2} = 2\pi \int \frac{y\,y'^3}{x'^2 + y'^2}\,dt$$

expresando las coordenadas en función de un parámetro cualquiera t.

La ecuación de Euler que debe integrarse es por tanto:

$$\frac{y\,x'\,y'^3}{(x'^2 + y'^2)^2} = a$$



y adoptando como parámetro $t = x'/y'$ resulta inmediatamente:

$$y = a(t^2 + 1)^2 : t$$

cuya derivada:

$$y' = a(t^2 + 1)(3t^2 - 1) : t^2$$

permite despejar:

$$x' = a(t^2 + 1)(3t^2 - 1) : t = a(3t^3 + 2t - t^{-1})$$

e integrando resulta:

$$x = a(\tfrac{3}{4}\,t^4 + t^2 - \log t) + b.$$

Estas expresiones paramétricas indican que y no puede anularse, es decir, la curva no corta al eje x. El estudio de la curva (v. p. ej. *Vivanti*) permite construirla y la figura muestra claramente que el arco buscado debe pertenecer a una sola rama de la curva. Dados los extremos A, B, la construcción del arco AB puede hacerse gráficamente por semejanza.

335. — Principios extremales de la Física.

Desde la antigüedad se ha intentado edificar la Física sobre postulados de carácter extremal, de los cuales se deducen las ecuaciones y leyes fundamentales, y esta tendencia se acentúa más cada día. He aquí los más importantes:

PRINCIPIO DE MAUPERTUIS DE LA ACCIÓN MÍNIMA. (1740). *Un punto móvil de A a B sigue el camino tal que la integral de la velocidad a lo largo del mismo, es decir, $\int v.ds$, es mínima.*

De este principio, perfeccionado por Euler y modernamente generalizado por Hölder (1896) pueden deducirse las ecuaciones de la Mecánica. Por ejemplo, para el movimiento libre, las ecuaciones de Euler aplicadas a la integral que expresa la acción $\int (x'^2 + y'^2)dt$ dan $x' = a$, $y' = b$, es decir, el principio de inercia de Gálileo.

PRINCIPIO DE FERMAT (1629). — Una generalización importante del problema de la braquistócrona es ésta, que llamaremos problema de Fermat:

Siendo la velocidad de un móvil una función conocida $v(x, y)$, determinar el camino más breve entre dos puntos A, B, es decir, el arco tal que sea mínimo el tiempo total:

$$T = \int \frac{ds}{v(x, y)}$$

En el problema de Bernoulli, que conduce a la braquistócrona, esta velocidad es proporcional a $\sqrt{y}$, pero en el de Fermat es una función cualquiera. Si v es la velocidad de propagación de la luz (es decir, si $1/v$ es el índice de refracción) se tiene el auténtico principio de Fermat (o de Heron), fundamental en Optica, y que permite demostrar fácilmente las leyes de la reflexión y de la refracción. (V. *Curso Cíclico*, II).

PRINCIPIO DE HAMILTON (1834) Y ECUACIONES DE LAGRANGE (1788).

Un sistema mecánico con n grados de libertad está caracterizado por n parámetros o coordenadas: $q_1, q_2, \ldots, q_n$ funciones del tiempo. La *energía potencial* U es función de ellos; la *energía cinética* o *fuerza viva* L es función de ellos y de sus n derivadas respecto de t; la diferencia $L - C$ se llama *potencial cinético*, y con esta denominación, se enuncia así el *principio de Hamilton*:

Entre todos los movimientos posibles que en un tiempo dado hacen pasar un sistema de uno a otro estado, se realiza aquel movimiento para el cual es estacionario el potencial cinético medio:

$$\int_{t_0}^{t_1} (L - U)dt$$

Las ecuaciones de Euler [4] son en este caso las n siguientes:

$$DL_{q}' - (T'_q - U'_q) = 0 \qquad (q = q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

que son precisamente las *ecuaciones dinámicas de* LAGRANGE.

Las ecuaciones de la Estática resultan como corolario:

$$C'_q = 0 \qquad (q = q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

es decir: *Condición necesaria y suficiente para que un sistema mecánico de* *energía potencial $U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ está en equilibrio para ciertos valores de presentativa en el espacio de 3n dimensiones formada por los puntos cuyas estas coordenadas, es que la energía potencial sea estacionaria para esos valores.*

Otros principios, también importantes en Mecánica, son éstos:

PRINCIPIO DE GAUSS DEL ESFUERZO MÍNIMO. — *El movimiento de un sistema material con vínculos bilaterales, está caracterizado entre todos los movimientos compatibles con los vínculos por la condición de esfuerzo mínimo de éstos.*

PRINCIPIO DE HERTZ. — *El movimiento de un sistema material de n puntos con vínculos bilaterales independientes del tiempo y no solicitado por fuerzas, se verifica con velocidad constante y con curvatura mínima de la gráfica recoordenadas son las coordenadas de los n puntos por las respectivas raíces cuadradas de sus masas.*

336. — Variación de las integrales múltiples.

El problema fundamental es análogo al resuelto en la lección anterior. Entre todas las funciones $u(x, y)$ definidas en un recinto D, que toman valores prefijados en el contorno c, determinar aquellas que dan valor máximo o mínimo relativo a la integral:

$$\int\int_D f(x, y, u, u'_x, u'_y)\,dx\,.dy \qquad [5]$$

Geométricamente: determinar los casquetes de contorno dado C que hacen máxima o mínima a la integral. Haciendo variar u, es decir, poniendo $u + rw$, donde r es un número real y $w(x, y)$ una función continua que se anula en el contorno C, la integral es función de la variable real r y anulando su derivada se llega a la condición necesaria de Euler:

$$\boxed{f'_u = D_x f'_p + D_y f'_q} \qquad [6]$$

$$(p = u'_x,\ q = u'_y)$$

He aquí algunos ejemplos muy importantes:

SUPERFICIES DE ÁREA MÍNIMA. — Aplicando la condición [6] al área de un casquete de contorno C

$$S = \int\int \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,.dx\,.dy = \int\int \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,.dx\,.dy$$

resulta inmediatamente la ecuación de las superficies de área mínima:

$$z''_{xx}(1 + z'_y) - 2z''_{xy}.z'_x.z'_y + z''_{yy}(1 + z'^2_x) = 0$$

Compruébase que la satisface la ecuación de las superficies mínimas de revolución (superficies *catenoides*), obtenida en (333).

PRINCIPIO DE DIRICHLET. — Dado un recinto A, cualquiera que sea la función $u(x, y)$ que en el contorno tome valores prefijados, hace positiva a la integral:

$$I = \int\int [(u'_x)^2 + (u'_y)^2]\, dx\, dy$$

luego el conjunto de valores de I tiene un mínimo. ¿Será accesible, es decir, existirá alguna función u que dé a la integral I ese valor mínimo? Este postulado famoso se llama *principio de Dirichlet*. Tal función debe satisfacer a la ecuación [6] de Euler, que en este caso es:

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0 \quad ; \qquad [7]$$

pero aun demostrada la existencia de solución de esta ecuación de Laplace, no queda probado que haga mínima a la integral. En cambio, admitido el principio de Dirichlet (que se puede demostrar directamente) se deduce, como hizo Riemann, la solución de [7].

EQUILIBRIO Y MOVIMIENTO DE CUERDAS, MEMBRANAS Y PLACAS.

Si se alabea el contorno de una membrana elástica situada en el plano xy, el área de la superficie $z = f(x, y)$ que forma la membrana es:

$$\int\int \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx \,.\, dy \sim \int\int dx \,.\, dy + \tfrac{1}{2} \int\int [(z'_x)^2 + (z'_y)^2]\, dx \,.\, dy$$

tomando solamente los dos primeros términos en el desarrollo de la raíz cuadrada. La dilatación sufrida por la membrana viene expresada por el 2.º sumando; y como la energía potencial es proporcional a la dilatación, resulta como condición de equilibrio: la función z debe hacer mínima la integral:

$$\int\int [(z'_x)^2 + (z'_y)^2]\, dx \,.\, dy$$

La ecuación de Euler [6], aplicada a esta integral, es:

$$z''_{xx} + z''_{yy} = 0$$

es decir, la ecuación de Laplace.

Análogamente resulta la ecuación de equilibrio de la placa elástica: $\Delta\Delta z + f(x, y) = 0$, siendo f la fuerza exterior y representando Δ el laplaciano que, al aplicarlo dos veces, da una ecuación de 4.º orden.

También conduce el Cálculo de variaciones a las ecuaciones de los movimientos vibratorios de cuerdas, placas y membranas; la primera, que es la de l'Alembert, ha sido ya estudiada en la lección 79:

Ecuación de la cuerda vibrante:

$$\rho \,.\, z_{tt} = \mu z_{xx}$$

Ecuación de la membrana vibrante:

$$\rho \,.\, z_{tt} - f(x, y, t) = \mu \,.\, \Delta z$$

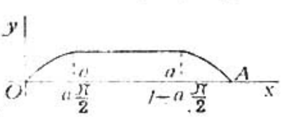
Ecuación de la placa vibrante:

$$\rho \,.\, z_{tt} + f(x, y, t) + \mu \,.\, \Delta\Delta z = 0.$$

NOTAS

La teoría expuesta en la Lección 80 tiene toda la sencillez y toda la imperfección lógica de la Matemática del siglo XVIII; y aunque es suficiente para llegar a las fórmulas prácticas que necesita el técnico, conviene señalar sus lagunas e indicar, siquiera sea someramente, el modo de llenarlas.

Ya hemos advertido que la ecuación de Euler da una condición *necesaria* para las funciones extremales (que hacen máxima o mínima la integral); pero *no suficiente* ni siquiera ampliándola con las condiciones de signo relativas a las derivadas sucesivas; pues el ser mínima la integral para cada tipo de variación, es decir, dentro del haz $y + tz$, siendo z una función prefijada no implica que lo sea para el conjunto de todas ellas; de igual modo que acontecía con la teoría ordinaria, en ejemplos como el puesto en (215); pero aquí el conjunto de direcciones de variación, es decir, el conjunto de funciones z, es mucho más amplio y el problema mucho más complejo.



EJEMPLO. — Determinar la curva de extremos 0 1, que haga máxima o mínima a la integral siguiente:

$$\int (y'^2 - 4y^3)\,dx$$

La ecuación de Euler se reduce en este caso a la siguiente:

$$-12y^2 - D(2y') = 0 \quad ; \quad -12y^2 - 2y'' = 0$$

que se satisface por la solución $y = 0$, la cual cumple, en efecto, la condición de hacer mínima la integral para variaciones del tipo $t \cdot z(x)$, pues cualquiera que sea la función elegida $z(x)$, con derivada finita en (0,1), tomando t suficientemente pequeño, es la integral positiva. Sin embargo, existen funciones tan próximas a 0 como se quiera, que hacen negativa la integral. Basta construir curvas como la indicada en la figura, formada por un segmento rectilíneo al arco de sinusoide $y = a$ sen x/a, y el análogo en el otro extremo. Un cálculo fácil conduce a este resultado:

$$\int y^2 \cdot dx = a(\pi + \tfrac{1}{2}) \qquad \int y^3\,dx > a(1 - 2\pi a)$$

luego para valores de a suficientemente pequeños, la integral resulta negativa.

Note el lector que la distinción entre entorno y aproximación radial es la misma estudiada en (215).

CONDICIÓN DE LEGENDRE. — Para poder aplicar a la ecuación de Euler los métodos generales de las ecuaciones de 2.° orden p. ej. el desarrollo en serie (310) es necesario despejar y'', operación posible si $f''_{y'y'} \neq 0$. Esta condición de Legendre se puede afinar, considerando la variación 2.ª y así resulta este doble criterio para que la solución de la ecuación de Euler haga mínima la integral:

Condición necesaria: $f''_{y'y'} > 0$

Condición suficiente: $f''_{y'y'}\, f''_{yy} - (f_{yy'})^2 \geqq 0$

EJERCICIOS

1. — Determinar las geodésicas de las superficies cilíndricas y cónicas.

2. — Resolver en forma paramétrica el problema de la catenaria y el de la braquistócrona, para ver si existen curvas no uniformes respecto de x, que satisfagan a las condiciones impuestas en estos problemas.

APENDICE

TEORIA DE LOS ERRORES FORTUITOS DE OBSERVACION

1. — Errores sistemáticos y accidentales.

Al efectuar repetidamente la medida de una magnitud resultan números distintos de la verdadera medida de ésta; unas causas de error son conocidas y actúan en un sentido conocido; tal sucede, por ejemplo, si se mide una distancia llevando reiteradamente una regla, sin estar bien alineados los puntos intermedios, en cuyo caso resulta un error por exceso; o si la regla tiene un error por defecto o por exceso;... En general, todos los errores debidos a defectos del instrumento, se llaman *sistemáticos* y pueden calcularse aproximadamente; los números obtenidos en las medidas deberán corregirse de estas causas sistemáticas de error; pero aun hechas estas correcciones, los números así corregidos difieren del verdadero, unos por defecto y otros por exceso. Estos errores debidos a causas tan complejas que no es posible conocer ni evaluar, se llaman *errores accidentales,* y cuando el número de observaciones es muy grande tienden a compensarse, verificándose estas condiciones:

1.° Los errores son tanto más frecuentes cuanto más pequeños.

2.° Su promedio tiende hacia cero al crecer el número de obobservaciones.

3.° El número de errores superiores a cierto número es sensiblemente nulo.

Cuando el promedio de los errores tiende hacia un valor distinto de 0, es preciso buscar alguna causa de error sistemático; y si no tiende hacia ningún valor, se dice que el sistema no es normal.

Estas o análogas condiciones, igualmente insuficientes, suelen tomarse para caracterizar los errores *accidentales* o *fortuitos;* prescindamos de ellas y después daremos la definición rigurosa.

2. — Errores medio y promedio.

Sea X el valor exacto de la magnitud desconocida y x_r los n valores observados. Llamaremos *errores verdaderos* a los números $\delta_r = x_r - X$, y designaremos por δ el *promedio de los errores,* o sea:

$$\delta = \Sigma\delta_r : n = \Sigma(x_r - X) : n \qquad [1]$$

Si formamos la media aritmética M de los valores observados, como es:

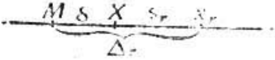
$$\Sigma x_r = nM \quad \therefore \quad \delta = (nM - nX) : n = M - X \qquad [2]$$

Es decir: *el promedio de los errores verdaderos es igual al error del promedio de los valores observados.*

Llamaremos *errores aparentes* a las diferencias conocidas entre los valores observados y su media M, es decir:

$$\Delta_r = x_r - M \quad \therefore \quad \Sigma\Delta_r = \Sigma x_r - n \, . \, M = 0 \qquad [3]$$

Este número M está, pues, caracterizado por la condición $\Sigma(x_r - M) = 0$; pero además tiene la propiedad de hacer mínima la suma de cuadrados de diferencias con los n valores x_r. En efecto, siendo $\delta_r = \Delta_r - \delta$ al sumar los n cuadrados resulta:



$$\Sigma\delta_r^2 = \Sigma\Delta_r^2 + n\delta^2 \qquad [4]$$

pues el doble producto se anula, por ser $\Sigma\Delta_r = 0$; luego, cualquiera que sea X, la suma de cuadrados de distancias a las puntos x_r es mayor que para el punto M, y solamente es igual si $\delta = 0$, es decir: si $X = M$.

Distingamos dos problemas: 1.º) Conocido el valor exacto X, expresar por un número la precisión de la serie de medidas x_r. 2.º) Si se desconoce el valor exacto, acotar el error más probable del promedio M y el grado de precisión de las medidas x_r.

El 1.º se resuelve adoptando la medida siguiente:

Se llama *error medio cuadrático* o simplemente *error medio* de un sistema de valores a la raíz cuadrada del promedio de cuadrados de sus errores verdaderos, es decir, pondremos:

$$\mu^2 = \Sigma\delta_r^2 : n \qquad \text{y análogamente} \qquad m = \Sigma\Delta^2_r : n \qquad [5]$$

La relación [4] adopta así esta forma importante:

$$\boxed{\mu^2 = m^2 + \delta^2} \qquad [6]$$

en la cual es conocido m, promedio de los errores aparentes.

Conoceremos, pues, el promedio δ de errores, si conocemos el error medio μ; y recíprocamente. Para poder determinar uno y otro, se precisa otra relación, y ésta resulta de la igualdad,

$$(\Sigma\delta_r)^2 = \Sigma(\delta_r^2) + s$$

que se obtiene desarrollando el cuadrado de la suma $\Sigma\delta_r$ y designando por $s = \Sigma\, \delta_r\, \delta_s$. Dividiendo [7] por n^2 resulta la relación buscada:

$$\delta^2 = \frac{\mu^2}{n} + \frac{s}{n^2} \qquad [7]$$

De [6] y [7] se despeja inmediatamente:

$$\mu^2 = \frac{nm^2}{n-1} + \frac{s}{n(n-1)}$$

Hasta aquí no hemos hecho hipótesis ninguna sobre los errores; ni aun haciéndolas podríamos decir nada sobre el número s, pues aun con ellas cabe que la 2.ª fracción llegue hasta valer μ^2 (si $m = 0$, o sea $x_r = M$); y es, por tanto, aventurado el despreciarla, como suele hacerse; pero si consideramos, no una serie de medidas de X, sino muchas, los valores de s son unos positivos y otros negativos, y se admite que *su valor más probable es* 0; resultando así las fórmulas fundamentales:

$$\mu_0^2 = \frac{nm^2}{n-1} = \frac{\Sigma\Delta_r^2}{n-1}$$

$$\delta_0^2 = \frac{m^2}{n-1} = \frac{\Sigma\Delta_r^2}{n(n-1)}$$

que expresan el *error absoluto más probable* δ_0 del valor M, y el *error cuadrático más probable* μ_0 de la serie de medidas. Pero este concepto exige algunas nociones de probabilidades.

EJEMPLO 1. — En una triangulación geodésica se midieron los ángulos de 9 triángulos, resultando estas discrepancias respecto de 180° para la suma de sus ángulos, que expresamos en segundos, ordenándolos de menor a mayor:

$$-2{,}780 \;;\; -2{,}352 \;;\; -1{,}349 \;;\; -0{,}764 \;;\; +0{,}009 \;;\; +1{,}246 \;;\; +1{,}613 \;;$$
$$+1{,}900 \;;\; +2{,}471$$

Fácilmente se calcula:

$$M = 1{,}609 \quad , \quad \Sigma\delta_r = -0{,}006 \quad , \quad \mu = 1{,}811$$

La pequeñez de $|\delta| = 0{,}006 : 9 < 0{,}0007$ indica que están muy compensados, pero ello carece de valor; pues si se prescinde, p. ej., de los dos primeros triángulos aumenta considerablemente. La medida de la precisión la da μ.

EJEMPLO 2. — Las medidas de una longitud (desconocida) expresada en metros, son:

$$423{,}35 \;;\; 423{,}43 \;;\; 423{,}30 \;;\; 423{,}30 \;;\; 423{,}27$$

El promedio es: $M = 423{,}33$.

Errores aparentes:	-2 ,	-10 ,	$+3$,	$+3$,	$+6$
Cuadrados:	4 ,	100 ,	9 ,	9 ,	36

Valores más probables: $\delta_0 = 2{,}81$; $\mu_0 = 6{,}28$; $X_0 = 423{,}33 \pm 0{,}03$

EJEMPLO 3. — Se han obtenido estas medidas de un segmento:
1,280; 1,282; 1,280; 1,283; 1,280; 1,290; 1,280; 1,290; 1,285; 1,290; 1,280.

El promedio es $M = 1{,}2836$; restando de cada uno y formando la suma de cuadrados es $\Sigma\Delta_r^2 = 0{,}000192$; el error medio y el promedio de errores son:

$$\mu_0 = \sqrt{0{,}0000192} = 0{,}0044 \quad ; \quad \delta_0 = 0{,}0044 : \sqrt{11} = 0{,}0013$$

y el valor más probable: $X_0 = 1{,}2836 \pm 0{,}0013$

3. — Definición de probabilidad.

Recordemos algunas definiciones de probabilidades: Cuando entre n casos posibles, nos fijamos en m casos especiales (que se llaman *favorables*), se llama probabilidad de éstos al cociente $m/n \leq 1$. Cuando es infinito el número de casos posibles y es finito el de casos favorables, su probabilidad es nula. Por ejemplo: en un número grande de disparos, la probabilidad de dar en el blanco, considerado como punto matemático es nula. La probabilidad de que el error de una observación sea 0,02 es también nula.

En cambio es un número finito la probabilidad de que el disparo quede a una distancia del blanco entre 3 cm. y 4 cm. o que el error de la medición hecha esté comprendido entre 0,02 y 0,03.

Ahora bien, si en vez del intervalo 3 cm. a 4 cm. consideramos de 10 cm a 11 cm. de igual magnitud, se observa que el número de disparos contenidos en esa zona es menor que en la otra; y si consideramos un intervalo mucho más lejano, el número de errores en él comprendido es sensiblemente nulo, de acuerdo con las leyes (1).

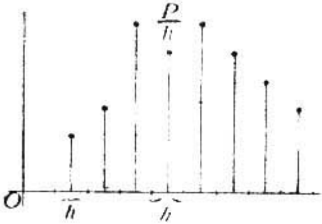
Según la definición de probabilidad resulta que ésta tiene la *propiedad aditiva*, es decir: la probabilidad en un intervalo suma de dos intervalos, es la suma de las probabilidades en ambos.

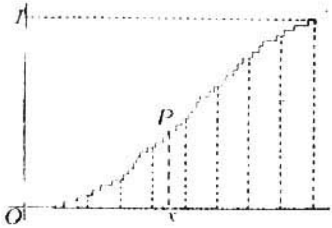
4. — Ley de distribución de los errores.

Si efectuamos numerosas medidas de una magnitud y llevamos como abscisas los números obtenidos x_r, se observa que se condensan hacia un cierto punto, espaciándose tanto más cuanto más se alejan de él. Si todos fueran equidistantes, se llamaría *densidad* por unidad de longitud a la parte alícuota ν/n del número total de puntos contenida en la unidad, o sea, elegido un segmento h, al cociente ν/nh, siendo ν el número de puntos contenidos en el segmento h. Como la distribución no es uniforme, este cociente varía con el segmento elegido $(x, x + h)$, y a esta función de x, h, la llamaremos *densidad* en dicho intervalo.

Como el cociente ν/n es la probabilidad de que un valor observado esté en el intervalo $(x, x + h)$ resulta:

$$\textit{densidad} = \text{probabilidad}/h = P/h$$



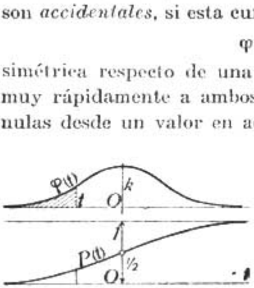


La función $f(x) =$ num.° de valores $x_r < x$, está representada por una línea escalonada cuyo máximo es el número total n; si dividimos por n, es decir, si adoptamos la ordenada $P(x) =$ probabilidad de los valores x, $< x$, la ordenada máxima es 1 y la gráfica se llama de *probabilidades totales*.

Dividida la recta en intervalos h, si en el punto medio de cada uno llevamos como ordenada la densidad P/h, se obtiene una gráfica, que, al decrecer h y aumentar n, se va aproximando a una curva continua de forma campaniforme, y diremos que los errores son *accidentales*, si esta curva es del tipo llamado *normal* o de Gauss:

$$\varphi(x) = K \,.\, e^{-k^2(x-c)^2} \qquad [8]$$

simétrica respecto de una recta $x = c$, y cuyas ordenadas decrecen muy rápidamente a ambos lados del punto c, siendo sensiblemente nulas desde un valor en adelante. Este número c, promedio o baricentro de los x_r es, por tanto, el valor *más probable*, esto es, el de *densidad máxima*. Poniendo $x - c = t$, el número de errores Δ_r contenidos en el intervalo $(t, t + h)$ es igual al de valores x_r en el intervalo $(x, x + h)$.



y su densidad viene expresada por la función de Gauss [8] que se reduce a:

$$\varphi(t) = Ke^{-k^2 t^2} \qquad [9]$$

Para $n \to \infty$ la probabilidad $P = \nu/n$ en el intervalo $(-\infty, t)$ tiene por hipótesis un límite $P(t)$, que llamaremos la *probabilidad total;* la probabilidad en $(t, t + h)$ es: $\Delta P(t) = P(t + h) - P(t)$ y la densidad en el punto t es:

$$\varphi(t) = \text{lím.}\ \Delta P(t) : h = P'(t)$$

la cual suponemos que viene expresada por la ley exponencial de Gauss; siendo, por tanto, la probabilidad de que un error esté comprendido entre a y b:

$$P(b) - P(a) = \int_a^b \varphi(t)\,dt = K \int_a^b e^{-k^2 t^2}\,dt \qquad [10]$$

Para el intervalo $-\infty, +\infty$ la probabilidad es 1, y como la integral, según se calculó en (282), vale $\sqrt{\pi} : k$, resulta $K = kc\sqrt{\pi}$.

Cuanto mayor es k, tanto más se eleva la curva en su parte central, y más rápidamente tiende a 0, estrechándose el intervalo de los errores posibles; es decir, aumenta la frecuencia de los pequeños errores y se hacen imposibles los grandes. Por esto se llama k la *medida de la precisión* del sistema considerado de medidas.

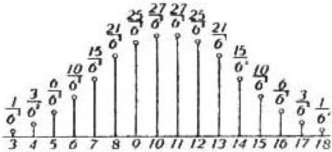
La definición basada en la función [8], que aparece en muchas cuestiones, no es arbitraria y puede justificarse así:

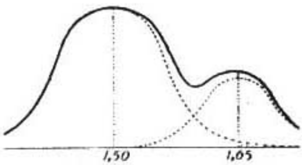
EJEMPLO 1. — Si se anotan las frecuencias de las sumas 2 hasta 12 logradas lanzando dos dados se observa que 2 y 12 son las menos frecuentes, porque sólo aparecen en los casos 1 + 1 y 6 + 6; mientras que las sumas intermedias se pueden formar de varios modos y este número es máximo para la suma.

$$7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1.$$

La gráfica de estas frecuencias tiene la forma campaniforme (la figura representa el caso de 3 dados) y al crecer el número de dados tiende, como se puede demostrar, a una curva de Gauss.

Este ejemplo es importante, porque señala el camino para *demostrar* que las frecuencias de los errores accidentales obedecen a la ley asintótica de Gauss, si se supone que resultan de la superposición de numerosos sumandos, llamados *errores elementales*, que se combinan de todos los modos posibles. Es preferible, sin embargo, desistir de tales demostraciones, siempre basadas en propiedades desconocidas de los errores accidentales y adoptar la ley normal como *definición* de éstos.





EJEMPLO 2. — Si se examinan las tallas de los conscriptos en un país de población homogénea y se divide el eje x en cm, llevando en el punto medio de cada uno como ordenada el número de reclutas cuya estatura está comprendida entre ambos números consecutivos, resulta una gráfica con un eje de simetría que corresponde a la estatura media $x = c$. Si se dividiera el eje x en mm. (suponiendo que sea posible apreciar el mm. en las tallas) las frecuencias serían aproximadamente 10 veces menores; pero si en lugar del número y llevamos tos de la gráfica tienden a formar una curva; si ésta es del tipo [8], se dice que la población es *normal*.

En cambio, si en un país hay un núcleo extranjero, la gráfica no será una curva normal o de Gauss, sino que presentará una forma como la indicada en la figura 2.ª. Hay métodos para descomponer tal función en suma de funciones normales y la figura indica que en este caso hay dos sumandos. La interpretación es clara: la estatura media de la mayoría del país es 1,50; y la estatura media de la minoría extraña es 1,65, siendo esta minoría aproximadamente ¼ de la población total, como se ve comparando las áreas.

5. — Errores de diversos órdenes.

La determinación de una magnitud por observaciones se puede comparar con un juego en el que solamente hay pérdidas, pues los valores observados siempre difieren del valor exacto, y el error, sea positivo o negativo, puede considerarse como una pérdida; es un juego en que sólo puede aspirarse a perder lo menos posible, y de igual modo que en los juegos de azar se mide el *riesgo* por la *esperanza de pérdida*, es decir, por el producto de la cantidad arriesgada por la probabilidad de perderla, en la teoría de errores se puede definir el *riesgo de error* como suma de los diversos errores posibles δ_i por sus respectivas probabilidades, es decir, por la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\delta| \, \varphi(\delta) \, d\delta \qquad [11]$$

la cual no es sino el límite del promedio de valores absolutos $\Sigma \, | \delta | : n$ (*).

Por tanto, la integral [11] es aproximadamente igual al *promedio absoluto* de los errores, es decir, a la media aritmética de los valores absolutos de los errores.

Esta medida del riesgo de error no es la más satisfactoria, pues la importancia de cada error no debe medirse por su cuantía, sino por una función de esa cuantía, y según cual sea esa función $F(\delta)$ que se elija, resulta una medida distinta del riesgo de error.

Si adoptamos la función δ^2 el riesgo es el promedio de los cuadrados δ^2 de los errores, cuya raíz cuadrada hemos llamado *error medio cuadrático*: μ.

Si se adoptan δ^3 o δ^4 resultan los errores medios cúbico y bicuadrático μ_3 y μ_4 de uso menos frecuente que los anteriores.

Adoptada la ley de Gauss, resultan relaciones notables entre los errores medios y la precisión k. En efecto, las integrales respectivas se calculan directamente, o se deducen fácilmente (**) de la ya calculada:

$$2 \int_0^\infty e^{-k^2x^2} . \, dx = \sqrt{\pi}/k \qquad [12]$$

y son las siguientes:

$$2 \int_0^\infty x \; e^{-k^2x^2} . \, dx = 1/k^2 \qquad [13]$$

$$4 \int_0^\infty x^2 . \, e^{-k^2x^2} . \, dx = \sqrt{\pi}/k^3 \qquad [14]$$

$$2 \int_0^\infty x^3 . \, e^{-k^2x^2} . \, dx = 1/k^4 \qquad [15]$$

$$2 \int_0^\infty x^4 . \, e^{-k^2x^2} . \, dx = 3/4 \, \sqrt{\pi}/k^5 \qquad [16]$$

(*) **Más general:** cualquiera que sea la función continua $F(x)$ la suma de valores de $F(x)$ en los ν puntos δ_r del intervalo h es igual a ν veces su **media aritmética, la cual, por la continuidad, es uno de los valores $F(\xi)$ en el intervalo; luego para dicho intervalo es $\Sigma F(x)/n = \nu F(\xi)/n = P . F(\xi)$; y como la probabilidad P es la frecuencia por h, en el límite resulta la integral como límite de $\Sigma F(x)/n$ extendida a todo el campo de variación de x.**

(**) **La integral [13] es inmediata, haciendo $kx = t$; la [14] resulta derivando [12] respecto del parámetro k; y derivando la [14] sale la [16]; análogamente, derivando [13] sale [15]. Aunque sólo hemos demostrado (20) la regla para intervalo finito, también es válida en este caso.**

Multiplicando todas por $K = k/\sqrt{n}$, los primeros miembros son aproximadamente (véase la nota de página anterior): el error *promedio absoluto* μ_1; el cuadrado del error *medio cuadrático* μ_2^2 (o μ^2 sin subíndice); el cubo del error *medio cúbico* μ_3^3; y el bicuadrado del error *medio cuártico* μ_4^4.

Llamando $\lambda = 1/k$ (puede considerarse como medida de la imprecisión) resultan, por tanto, estas relaciones:

$$\mu_1 \sim \lambda : \sqrt{\pi} \quad \therefore \quad \mu_1 \sim \lambda . 0{,}564 \qquad [17]$$

$$\mu_2^2 \sim \lambda^2 : 2 \quad \therefore \quad \mu_2 \sim \lambda . 0{,}707 \qquad [18]$$

$$\mu_3^3 \sim \lambda^3 : \sqrt{\pi} \quad \therefore \quad \mu_3 \sim \lambda . 0{,}827 \qquad [19]$$

$$\mu_4^4 \sim \lambda^4 \ 3/4 \quad \therefore \quad \mu_4 \sim \lambda . 0{,}930 \qquad [20]$$

He aquí, pues, cuatro procedimientos para calcular la medida k de la precisión del sistema de observaciones, o su recíproco λ; y conviene utilizar los cuatro para juzgar si los errores son efectivamente fortuitos. (*).

EJEMPLO. — En la serie de medidas indicadas en el ejemplo 3 (p. 405) es:

$$\Sigma \mid \delta_r \mid \sim 0{,}0408 \quad \therefore \quad \mu_1 \sim 0{,}0037$$

Aplicando la primera fórmula [17] para la precisión resulta $\lambda \sim 0{,}0065$. En cambio, utilizando el valor ya calculado, $\mu_0 \sim 0{,}0044$

6. — Error probable de un sistema de observaciones.

La probabilidad de que un error esté comprendido entre $-x$ y x viene expresada por la integral:

$$(2k/\sqrt{\pi}) \int_0^x e^{-k^2 x^2} . dx$$

la cual tiene las variables x y k; pero si hacemos el cambio de variable $kx = t$, se convierte en esta otra:

$$(2/\sqrt{\pi}) \int_0^{kx} e^{-t^2} . dt = \Theta(kx)$$

llamando $\Theta(t)$ a la función primitiva de e^{-t^2}, por la constante $2/\sqrt{\pi}$. Esta función se ha tabulado al final y con esa tabla se puede calcular la probabilidad, conocida la precisión k.

Tiene especial interés aquel valor $x = r$ tal que la probabilidad de que sea $| \delta_n | < r$ es igual a la probabilidad de que $| \delta_n | > r$. O sea: la probabilidad para el intervalo $(-r, r)$ debe ser $1/2$, es decir: $\Theta(kr) = 1/2$.

(*) Dice Bertrand: "Estas fórmulas singulares merecen tanta confianza, que un calculador que examine una serie de observaciones y encuentre que no satisfacen a estas relaciones, puede tener como seguro que han sido retocados y alterados los resultados de la experiencia."

Tratándose de fórmulas aproximadas, esta afirmación tan rotunda sólo es admisible cuando se excede cierto límite en las alteraciones.

Este número r se llama *error probable* o mejor *error mediano*, y mediante la tabla se calcula fácilmente que debe ser:

$$kr = 0{,}477 \quad \therefore \quad r = \lambda . 0{,}477 \qquad [21]$$

o bien, expresado en función del error medio:

$$r = \mu . 0{,}675 \qquad [22]$$

He aquí, pues, una nueva medida de la precisión del sistema de observaciones también proporcional inversamente a la precisión k.

A veces se toma como referencia el error probable. Si éste es, por ejemplo, 0,25, e interesa saber la probabilidad de que el error sea menor que dos veces éste, podemos calcularla de dos modos: con la tabla de $\Theta(t)$ pondremos $t = k\ 2 . 0{,}25$, y como según [21] $k . 0{,}25 = 0{,}477$, buscaremos en la columna de Θ el valor para $t = 2 . 0{,}477$. Se evita este trabajo con la tabla especial de la última columna, donde para $t = 2$, leemos: 0,823.

7. — Método general de cuadrados mínimos.

Cuando las magnitudes desconocidas x, y, z, no se miden directamente, sino que se calculan mediante una ecuación cuyos coeficientes se conocen por obsèrvación directa, y se repiten un gran numero de veces, se tiene un sistema de muchas ecuaciones de las cuales hay que despejar, no un sistema de valores de x, y, z que las satisfagan exactamente, ya que esto es imposible, sino el conjunto x, y, z que las satisfagan con mayor aproximación, y como medida de esta aproximación se adopta el error medio. Es decir: si las ecuaciones son $f_r(x, y, z) = 0$, llamaremos solución más probable a la que hace $\Sigma\delta_r^2$ mínimo, siendo δ_r el valor que toma f_r para dicha solución.

Si la función no es lineal, se desarrolla en serie, tomando solamente los términos lineales como aproximación, que en muchos casos es suficiente. Supondremos, pues, un sistema de ecuaciones lineales, por ejemplo con tres incógnitas:

$$a_r x + b_r y + c_r z = l_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Se llama sistema *normal* el sistema determinado:

$$\begin{aligned}(aa)x + (ab)y + (ac)z &= (al)\\ (ba)x + (bb)y + (bc)z &= (bl)\\ (ca)x + (cb)y + (cc)z &= (cl)\end{aligned}$$

designando $\Sigma a_r b_r = (a\,b)$ y análogamente las otras sumas.

Es fácil comprobar que su solución x_0, y_0, z_0 es la que hace mínima la suma

$$\Sigma\delta^2 = \Sigma(a_r x + b_r y + c_r z - l_r)^2$$

pues si se sustituye $x = x_0 + \alpha$, $y = y_0 + \beta$, $z = z_0 + \gamma$, y se tienen en cuenta las ecuaciones a que satisfacen (x_0, y_0, z_0) resulta la anterior suma de cuadrados más otra suma de cuadrados (por anularse los dobles productos). O bien puede demostrarse formando las derivadas.

EJEMPLO. — Calcular la velocidad inicial y la aceleración de un movimiento uniformemente acelerado, conocidos los espacios recorridos en los tiempos siguientes:

$t = 0$	1	3	5	7	10
$e = 0$	5	20	38	58,5	101

La ecuación es: $e = vt + \frac{1}{2}\gamma t^2 \quad \therefore \quad vt + \frac{1}{2}\gamma t^2 - e = 0$

y las incógnitas son v, γ; los coeficientes son t, $\frac{1}{2}t^2$, e.

El sistema normal es:

$$184\,v + 748\,\gamma = 1674,5$$

$$748\,v + 3277\,\gamma = 7050,75$$

de donde se despeja la solución probable $v = 1,9$, $\gamma = 1,03$.

TABLA PARA CÁLCULO DE ERRORES

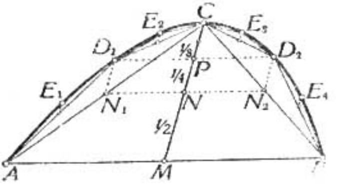
t	$\varphi(t) = e^{-t^2} : \sqrt{\pi}$	$\Theta(t) = 2/\sqrt{\pi}\int_0^t e^{-t^2}.dt$	$2/\sqrt{\pi}\int_0^{0,477\,t} e^{-t^2}.dt$
0,0	0,564	0,000	0,000
0,1	0,559	0,112	0,054
0,2	0,542	0,223	0,107
0.3	0,516	0,329	0,160
0,4	0,481	0,428	0,213
0,5	0,439	0,520	0,264
0,6	0,394	0,604	0,314
0,7	0,346	0,678	0,363
0,8	0,297	0,742	0,411
0,9	0,251	0,797	0,456
1,0	0,208	0,843	0,500
1,1	0,168	0,880	0,542
1,2	0,134	0,910	0,582
1,3	0,104	0,934	0,619
1,4	0,079	0,952	0,655
1,5	0,059	0,966	0,688
1,6	0,044	0,976	0,719
1,7	0,031	0,984	0,748
1,8	0,022	0,989	0,775
1,9	0,010	0,993	0,800
2,0	0,007	0,995	0,823
2,1	0,004	0,997	0,843
2,2	0,003	0,998	0,862
2,3	0,002	0,999	0,879
2,4	0,001	0,999	0,895
2,5	0,001	1,000	0,908
2,6	0,000	1,000	0,921
2,7	0,000	1,000	0,931

EVOLUCION DEL CALCULO INFINITESIMAL

PRECURSORES DEL CALCULO INTEGRAL

Suele considerarse a Arquímedes como el iniciador del método infinitesimal para el cálculo de áreas, que había de conducir al cabo de los siglos al Cálculo integral, pero en verdad corresponde tal honor a su antecesor **Antifonte**, que hacia el año -430 define el área del círculo mediante una sucesión de polígonos regulares inscriptos cuyo número de lados crece suficientemente. En realidad el concepto de límite, es decir, la idea de crecimiento indefinido, no aparece todavía; y lo mismo acontece a su contemporáneo Brison, que completó el concepto, considerando también los polígonos circunscriptos y creyendo, equivocadamente, que el área del círculo es el promedio de las áreas de cada par de polígonos correspondientes.

Tanto estos precursores, como el propio Arquímedes (-287 -212) en su famosa cuadratura de la parábola, no utilizan el método qué hoy llamaríamos de la **integral**, sino el método de **exhaucción**, que consiste en descomponer la figura en una serie convergente de trozos y la suma de la serie de medidas de ellos da la extensión de la figura total. Así p. ej. la simple inspección de la figura indica claramente cómo llega Arquímedes a la serie geométrica:



$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{4}{3}$$

Esta la primera serie convergente que aparece en la Historia y Arquímedes logró calcular su suma tomando como unidad el área del triángulo A B C.

Su mérito sobresaliente es el de haber establecido además los fundamentos del Cálculo integral, con otro método de cuadratura de la parábola que no figura en la gran Historia de Cantor y que equivale en esencia al cálculo de la integral de x^2.

Juan Kepler (1571-1640). En los 19 siglos que separan a Arquímedes de Kepler no se encuentran progresos esenciales en la vía abierta por el siracusano. Fué un problema práctico (con motivo de la gran cosecha de uva en Austria, donde Kepler se encontraba) el que le indujo a estudiar la cubicación de toneles y en 1615 aparece su famosa **Stereometría doliorum** que contiene toda una teoría, muy imperfecta sin duda, de la cubicación de sólidos de revolución, resolviendo el problema para 92 tipos, que designa con los nombres de las frutas a que se asemejan.

Por consideraciones nada rigurosas, descomponiéndolo en pequeñas cuñas o husos por planos meridianos, llega a cubicar el toro; y también aborda el problema para los cuerpos de revolución engendrados por un segmento circular que gira alrededor de su cuerda, cuerpos que llama **meliformes** o **citriformes**, según que el segmento sea mayor o menor que un semicírculo, logrando obtener cilindros equivalentes. Finalmente enuncia una ley errónea que sospecha exacta para este 2º. caso: los volúmenes engendrados por el segmento circular al girar alrededor de su cuerda y de su eje de simetría son entre sí como la altura y la semicuerda del segmento circular.

En la misma obra hay atisbos del problema inverso de la tangente, que había de dar origen al Cálculo integral; se trata de distinguir la clase de cada cónica entre las diversas que pasan por un punto, según sea la posición de la tangente en él. También vislumbra el método infinitesimal para los máximos y mínimos, y por consideraciones infinitesimales logra probar que entre todos los poliedros inscriptos en la esfera el cubo tiene volumen máximo.

Finalmente, con motivo de sus famosas leyes planetarias, aborda la rectificación de la elipse, llegando a la fórmula aproximada π (a+b), y por artificios ingeniosos logra calcular la integral definida de la función sen x entre o y x, obteniendo el resultado exacto 1—cos x.

Buenaventura **Cavalieri** (1591?-1647), es otro gran precursor del Cálculo integral y su **Geometría indivisibilibus** (1645) significa progreso considerable en dirección distinta a la de Kepler. Mientras el gran astrónomo alemán persiste en la vía arquimediana de sumar los elementos infinitesimales en que se descompone cada figura, vano empeño casi siempre, el jesuata italiano evita la sumación directa y se limita a comparar dos figuras para deducir la extensión de una mediante la otra. Cada recinto plano lo considera como suma de infinitos segmentos paralelos y cada cuerpo como suma de sus infinitas secciones paralelas. Tales segmentos y tales secciones planas son los **indivisibles** de Cavalieri. Cuáles fueran los indivisibles de Galileo, que también estaba en posesión de una teoría análoga, es cosa ignorada, pues nada llegó a publicar, pero en sus **Discorsi** (1638) efectúa una verdadera integración de la función gt para llegar a la ley de caída de los graves: $^1/_2$ gt^2.

El resultado capital de la Geometría de Cavalieri es su famoso principio: **Dos figuras planas o espaciales que tienen equivalentes sus secciones paralelas son equivalentes.** Con él logra cubicar los conos, cuadrar la parábola, la elipse y la espiral de Arquímedes, problemas ya resueltos por el siracusano; pero estimulado por los ataques de sus competidores, llega a perfeccionar el método comparando figuras cuyas secciones son tales que la extensión de una es potencia de la otra y así llega (1649) a resultados que equivalen, con el tecnicismo actual, a calcular las integrales de las potencias x^n de exponente natural.

Su exposición ha sido muy censurada, llegando a decir Marie que si hubiera premios para la oscuridad, lo ganaría sin disputa. Tal oscuridad, agregamos por nuestra parte, perdura a través de Newton y hasta nubla muchos tratados actuales por su fecha, aunque no por su contenido; oscuridad inevitable mientras se pretende descomponer las figuras en elementos **invariables**, sean **indivisibles** o **infinitésimos**. Tales tratados, escritos especialmente para técnicos, que hablan de puntos **consecutivos** de una curva, y definen la tangente por la condición de tener dos puntos de la curva **confundidos** en uno, y dan definiciones metafísicas de los infinitésimos (cuando tan fácil es en nuestro tiempo darla sencilla y rigurosa) están conceptualmente atrasados respecto de Cavalieri, quien con excelente sentido, no pretende definir los indivisibles, ni explicar la paradoja del continuo, limitándose a dar imágenes intuitivas y a enunciar con todo rigor y claridad su fecundo principio.

El uso de indivisibles curvos (que hoy llamamos cuadratura en coordenadas polares) permitió a Cavalieri hacia 1623 y poco después al P. San Vicencio, calcular el área definida por la espiral de Arquímedes. A este jesuata se debe también la cubicación de ciertos cuerpos que hoy hacemos con integrales dobles.

Pablo Guldin (1577-1643), religioso como Cavalieri, pero declarado enemigo suyo, publicó en 1645 su obra titulada **Centrobaryca**, que contiene multitud de determinaciones de baricentros; y en su segundo tomo (1640) da los dos teoremas que le han dado celebridad; el 4º volumen está dedi-Cavalieri de haber plagiado a Kepler, acusación sumamente injusta, pues mientras los indivisibles carecen de espesor y son innumerables, los elementos de Kepler son pequeños trozos de la figura, como hace notar Cavalieri en su réplica; el cual, siguiendo la vieja táctica de defenderse atacando, acusa a su vez a Guldin de haber tomado de Kepler sus dos famoses reglas, acusación igualmente injusta. Perdió en cambio una mortífera arma arrojadiza, por desconocer Cavalieri los escritos del griego Pappo (s. III) (que Guldin conocía en cambio muy bien) y en los cuales se encuentra el teorema del volumen del sólido de revolución, como producto del área del recinto por el camino del baricentro.

Otra figura muy digna de mención entre los precursores del Cálculo integral es Gil Persone, conocido por Roberval (1602-75), nombre de la aldea en que nació. De él habremos de ocuparnos al tratar del Cálculo Diferencial. De sus pretensiones de haber descubierto el método de los indivisibles y resuelto el problema de la tangente a toda curva, hay mucho que descontar; pero quedan como apreciables aportaciones la cuadratura de la cicloide (1636), también lograda por Descartes en 1638; la rectificación de la misma y la cubicación de los dos cuerpos de revolución que engendra al girar alrededor de su base o de su eje de simetría.

Blas Pascal (1623-62), discípulo de Roberval, dejó también en el Cálculo integral huellas de su genio, aclarando el concepto de integral, calculando algunas áreas que equivalen a las integrales definidas entre O y a de las potencias de $\sqrt{a^2 - x^2}$, y otras funciones que hoy conducen a integrales de productos de senos y cosenos. Pero sobre todo llegó a las fórmulas que hoy llamamos de *integración por partes*, y cálculo de *integrales dobles*, por dos integraciones simples.

Cuadraturas análogas a las hechas por Pascal, realizó Fermat (1657), quien integró la potencia de exponente fraccionario o negativo; además cuadró el folio cartesiano y la curva que después se llamó *versiera*:

$$y = 1/(1 + x^2).$$

Gran progreso estaba reservado a la incipiente disciplina por obra de Juan Wallis (1616-1703), que abandona el método geométrico de los matemáticos continentales, abordando la integración aritméticamente; y para poner de manifiesto su designio, titula su obra *Arithmetica infinitorum* (1655). He aquí los más importantes progresos debidos al genial inglés: integración de potencias de cualquier exponente (aunque sin utilizar el simbolismo); integral de $\sqrt{1 - x^2}$, esto es, área del círculo en forma de producto de infinitos factores; de otro modo: desarrollo de π en producto infinito, fórmula cuya importancia bastaría para inmortalizarlo; demostración de la cuadratura dada por Huygens para la cisoide, etc.

Pero con ser importantes estos hallazgos afortunados, el mérito más trascendental de Wallis reside en haber establecido claramente la noción de *límite*, en la clara y rigurosa forma hoy vigente, esto es, con la condición de que la diferencia entre la variable y el límite sea *quavis assignabili minor*.

Precursores de Wallis en el concepto de límite, pero en forma geométrica muy confusa, fueron los jesuitas San Vicencio y Tacquet.

Deber de justicia es citar asimismo al portugués **Alvaro Thomas** que hacia 1500 logró sumar diversas series convergentes, avanzando siglo y medio respecto de su época. Entre las muchas series que logró sumar este genial escolástico en su **Liber de triplice motu** (1509), que brillan como piedras preciosas en la frondosa hojarasca tomística que llena el grueso volumen, están las potencias de series geométricas; y aunque fracasa al abordar la serie logarítmica, obtiene ingeniosas acotaciones.

Creado el concepto de límite, la teoría de las series, que tiene su natural origen en las progresiones geométricas, evoluciona rápidamente. El italiano **Mengoli** (1659), y más tarde e independientemente el alemán **Mercator** (1668), desarrollan la función logarítmica y su integral. El inglés **Lord Brouncker** en el mismo año 1668 obtiene como área del trapezoide de hipérbola el valor log 2 en forma de serie y entre todos preparan el advenimiento de Newton que da formidable impulso a la teoría de las series.

La figura de Mengoli, descubierta muy recientemente, está llamada a ocupar un altísimo lugar en la Historia del Análisis. Contemporáneo de Wallis creó la teoría de límites, definió claramente la convergencia de series, sumó muchas de ellas, y estableció con todo rigor el concepto de integral, anticipándose casi dos siglos a Cauchy.

PRECURSORES DEL CALCULO DIFERENCIAL

Mientras los geómetras citados prosiguen la vía abierta por Arquímedes, las dos figuras matemáticas más eminentes de la 1ª mitad del siglo colocan los cimientos de la disciplina que había de dar origen al Cálculo diferencial.

Pedro **Fermat** (1601-65) descubre hacia 1629 un método para calcular los máximos y mínimos de funciones de una variable: se sustituye $\mathbf{x}$ por $\mathbf{x + h}$, se igualan $\mathbf{f(x)}$ y $\mathbf{f(x + h)}$, se simplifica la igualdad suprimiendo términos comunes y dividiendo por $\mathbf{h}$; se hace $\mathbf{h = 0}$ y la ecuación permite despejar $\mathbf{x}$. Por ejemplo, si la función es $\mathbf{x^2 + 2x}$ escribiremos sucesivamente con notaciones actuales:

$$(x + h)^2 + 2(x + h) = x^2 + 2x$$

$$2xh + h^2 + 2h = 0 \quad \therefore \quad 2x + 2 = 0 \quad , \quad x = -1.$$

Asoma en este artificio el concepto de cociente de incrementos y su valor límite para $\mathbf{h = 0}$, esto es, la derivada; pero Fermat no llegó a tener la idea de límite y así resulta artificiosa su determinación de tangentes, que reduce a un problema de máximo.

Renato DESCARTES (1596-1650), se preocupa exclusivamente de las curvas algebraicas y en su inmortal *Geometría* (1637) determina la tangente en cada punto imponiendo la condición de que la resultante de ambas ecuaciones tenga una raíz doble. Este método algebraico ha perdurado en la Geometría algebraica, conjuntamente con el **infinitesimal** de Fermat, que pronto había de perfeccionarse y que para las curvas no algebraicas es el único eficaz, salvo excepciones como la cicloide, cuyas tangentes pueden deducirse también por consideraciones cinemáticas. Tenemos así el tercero de los métodos para la determinación de tangentes, que parecen haber descubierto simultánea e independientemente Descartes, Roberval y Torricelli hacia 1644.

Claramente planteado el problema y resuelto en principio por tres vías diferentes, quedó emparejado su progreso con el del Cálculo integral: pero hay un capítulo de éste en cierto modo intermedio entre ambas disciplinas que quedó retrasado, por su mayor dificultad; es el de la rectificación de curvas, que talentos eximios como Descartes consideraban imposible, por la heterogeneidad sustancial de recta y curva. Fué TORRICELLI quien abrió el camino con su rectificación de la espiral logarítmica (1640); el inglés **Neil** rectificó después la parábola semicúbica (1657); su compatriota **Wren** la cicloide (1658), y **Huygens** la parábola, llegando además a la cuadratura de ciertas superficies de revolución, o al menos a su reducción a áreas planas.

BARROW, NEWTON Y LEIBNIZ

Contemplamos en esta breve reseña dos ríos caudalosos de ideas que avanzan paralelos. Uno tiene su origen en el **problema del área** y va incorporando a sus aguas otros problemas análogos, para formar un cuerpo de doctrina que se puede llamar Cálculo integral, el cual avanza lentamente, resolviendo los problemas uno a uno, con artificios especiales, a veces ingeniosísimos, porque la sumación se presenta de modo distinto en cada uno, y se carece de método general. El otro caudal de ideas está formado por las numerosas aportaciones al **problema de la tangente**; se persigue un procedimiento general válido para todas las curvas y cada matemático inventa uno distinto en apariencia, pero todos basados en el cálculo con infinitésimos: Fermat (1630), De Sluse (1652), y más tarde Tschirnhaus (1682), Huygens (1693), Roberval y Torricelli (1644), ...; sin contar los métodos algebraicos de Descartes y Hudde.

Cada país del continente dispara su flecha sin dar plenamente en el blanco, gloria reservada a un teólogo inglés, aficionado a las matemáticas, el cual ideó la determinación de la tangente por el cociente de incrementos. Tal es la sencilla idea de Barrow, que oscureció a todas las demás.

El Cálculo diferencial encontró su cauce con Isaac **Barrow** (1630-77), pero sus aguas habrían corrido estérilmente, mientras el Cálculo integral, incomparablemente más fecundo, quedaba estancado en su progreso. Faltaba la idea genial que fundiese en uno ambos caudales de pensamiento y también fué Barrow quien dió la solución. El área es una función primitiva del integrando; o bien, con el lenguaje de entonces: el problema del área es inverso del problema de la tangente. El dificilísimo problema de la sumación de elementos quedaba así reducido al cálculo de tangentes, mucho más sencillo. Y el mismo año memorable de 1669 en que desata este nudo inextricable con el que forcejearon cientos de gigantes durante dos mil años, cede su cátedra de Geometría a su discípulo predilecto Newton y se consagra de nuevo a la Teología.

Desde ese momento culminante en que confluyen las dos grandes corrientes, solo falta elaborar el algoritmo diferencial, ir complicando los problemas, crear la notación adecuada. Todo ello es simple cuestión de tecnicismo; y si a la técnica se suma el genio se comprende cómo pudo crecer inconmensurablemente en tan breve período, en manos de **Isaac Newton** (1642-1727) y de Guillermo **Leibniz** (1646-1716).

Comienza Newton por elaborar la teoría de las series de potencias y ya en 1670 logra desarrollar la exponencial, el logaritmo, la potencia del binomio cualquiera que sea el exponente, las funciones circulares sen x, cos x, arc sen x, es decir, toda la materia expuesta en los actuales tratados de Cálculo, salvo el desarrollo de arc tg x (y por tanto de π) que es de **Mengoli** (1659), obtenido después por Gregory (1671).

En el Cálculo integral resuelve los problemas de rectificación de arcos y cuadratura de superficies y construye tablas de integrales para facilitar la resolución efectiva de tales cuestiones (casi todas las de nuestra tabla y algunas otras). En el Cálculo diferencial resuelve los problemas de máximos y mínimos, concavidad, convexidad e inflexión, calcula el radio de curvatura, etc. En la teoría de ecuaciones diferenciales plantea el doble problema de formar la ecuación diferencial de una familia de curvas o de superficies y el de la integración, que resuelve en algunos casos.

Newton era ante todo físico y como tal le interesaba el Cálculo como instrumento de investigación, sin preocuparse de la pureza de sus conceptos. Así define la tangente por la condición de contener dos puntos consecutivos de la curva, y el círculo osculador tres puntos consecutivos; así es metafísico su concepto de fluxión. En cambio su contrincante Leibniz es filósofo y se interesa ante todo por el rigor lógico y pureza de los concep-

tos: sus definiciones de función algebraica y trascendente, de parámetros, de coordenadas curvilíneas, son intachables; su definición de diferencial es perfecta y sus notaciones son las que han perdurado **hasta nuestros días. Esta notación diferencial es** el resorte **que ha impulsado al Cálculo** en su rápido progreso.

Independientemente de Newton obtuvo Leibniz muchos de sus resultados, dando origen tal coincidencia a una lamentable polémica que más bien fué guerra a muerte entre dos escuelas, dos países y dos tendencias políticas. Otros resultados suyos no obtenidos por Newton son: la convergencia de las series alternadas, derivación parcial, diferenciación de productos, cocientes y exponenciales, derivada n-sima e integral n-sima de un producto, ecuación explícita de la cicloide, derivación de integrales respecto de parámetros, cálculo de envolventes, ecuación de las curvas paralelas ,evolutas y evolventes, resolución del **problema florentino o de** Viviani (esto es: construir en una bóveda hemisférica ventanales cuadrables) integración de funciones racionales por descomposición en fracciones simples, etc.

A modo de ilustración damos el cuadro de notaciones usadas por ambos egregios contrincantes:

Notaciones de Newton	**Notaciones de Leibniz**	**Notaciones actuales**
Quantitas correlata		Variable independiente: **t**
Fluente		Función: **y**
o	dt (antes **t/d**)	Incremento: **dt**
Fluxión: **y**	dy/dx	Derivada: **y' = dy/dx**
Momento: $\dot{y}$. **o**	Diferencial: dy	Diferencial: **dy**
Integral: $\overset{\prime}{y}$	Omnia: $\int l$; $\int$ y . dx.	Integral: $\int$ **y . dx**

PROGRESOS DEL CALCULO INFINITESIMAL EN EL SIGLO XVIII

La nueva ciencia fué acogida muy diversamente por los matemáticos de fines del siglo XVII. Christian **Huygens** (1629-95), el genial **holandés, se esforzó en su famoso tratado de los relojes de péndulo (1673) en eludir el nuevo algoritmo, usando con preferencia los métodos clásicos. Así estudia las evolutas y evolventes, y descubre el tautocronismo de la cicloide, esto es, la notable** propiedad de que todo **punto abandonado sobre ella en cualquier punto,** tarda el mismo tiempo en **llegar al vértice o punto más bajo de la curva,** propiedad descubierta simultáneamente **por el jesuita Pardies. También resolvió este problema propuesto como desafío a diversos matemáticos:** curva descrita por un **grave arrastrado con una cadena cuyo otro** extremo recorre una recta; tal **curva fué llamada tractoria por Huygens** y después se llamó **tractriz.**

El aristócrata francés Guillermo François, marqués de l'Hospital, (1661-1764), fué uno de los más entusiastas propagandistas del nuevo método, abandonando la vida mundana para consagrarse a él; su tratado de 1696 fué el primero de Cálculo diferencial y en él aparece la famosa fórmula que lleva su nombre, aunque Juan Bernoulli reclamó su prioridad, al parecer con fundamento. Su nomenclatura es extraña: la coupée es la abscisa; cercle baisant es el círculo osculador; diferencial es la derivada.

Figuras de segundo orden, a las que se debe sin embargo aportaciones dignas de nota, son entre otras las siguientes:

Brook Taylor (1685-1731), matemático, músico, pintor, publicó en 1715 un folleto que con su centenar de páginas ha ejercido perdurable influjo en el desarrollo del Análisis, a pesar de la oscuridad de su estilo y de su impresión. En él está contenida la famosa fórmula que lleva su nombre y también la que se designa como de Mac-Laurin, a pesar de que este insigne geómetra la cita en su tratado (1742) como debida a Taylor. Ni uno ni otro se preocupan de la convergencia ni de la evaluación del resto o **mantisa.**

Abraham De Moivre (1667-1754), francés emigrado a Inglaterra, que estudió las series recurrentes (1722) y perfeccionó la integración de las funciones racionales.

James **Stirling** (1696-1770), célebre por la importante fórmula asintótica para la factorial **n!** (1730).

Al lado de estos continuadores de Newton, es oportuno citar al famoso obispo Berkeley, que sometió el Cálculo de fluxiones a duras críticas, en gran parte justificadas. Tal es por ejemplo la que señala una evidente contradicción en el método newtoniano, donde el incremento se designa por la letra **o** (que no debe confundirse con el **cero**) pero al final se hace $o = 0$.

Propulsor máximo del Cálculo infinitesimal fué Jacobo **Bernoulli** (1654-1705). Su primera contribución (1690) fué la integración de la **curva isocrona**; llamaba así Leibniz a la rampa que amortigua la caída acelerada haciéndola uniforme, es decir, la curva tal que un punto cae sobre ella con movimiento uniforme respecto de la coordenada vertical. Su ecuación, ingrada por Jacobo es:

$$\sqrt{b^2y - a^3}\,.dy = \sqrt{a^3}\,.dx$$

y en esta memoria introduce por primera vez la palabra **integral**, que ha perdurado.

Otro problema resuelto por Jacobo fué el de la línea elástica, que designó con el nombre de **lemniscata**, después usado en otro sentido.

El problema de la **catenaria**, que ya preocupó a Galileo, sospechando que era parabólica, fué propuesto por Jacobo y con noble emulación lo atacaron Huygens, con recursos clásicos, mientras lo resolvían mediante el Cálculo integral Leibniz y Juan Bernoulli, hermano menor y discípulo de Jacobo, que así inicia su brillante carrera.

Con ser tan importantes los descubrimientos de Jacobo, en la teoría de series (baste recordar los números que llevan su nombre) y sobre todo su creación del Cálculo de probabilidades, estaba orgulloso de las propiedades de la espiral logarítmica que llamaba **curva maravillosa** porque engendra curvas análogas ligadas a ella (como también acontece con la cicloide) y por ello pidió que fuese grabada sobre su tumba, con esta leyenda: **eadem mutata resurgo.**

La obra de Juan **Bernoulli** (1667-1748), es también importante. Baste un ligero índice: separación de variables en las ecuaciones diferenciales (1694), integración de las ecuaciones homogéneas en **x, y**; ecuación de las trayectorias isogonales y en particular ortogonales, de las familias de curvas (1697); resolución de las ecuaciones diferenciales que llevan el nombre de Bernoulli y que en verdad pertenecen a ambos, pues fué propuesto el problema por Jacobo.

La emulación científica entre ambos degeneró en violenta lucha en que las armas esgrimidas eran problemas matemáticos y de la que salió gananciosa la ciencia, pues así nació el cálculo de variaciones. El problema de la curva de tiempo mínimo fué propuesto por Juan en 1696 y fué resuelto por su hermano así como también por l'Hospital y por Leibniz, quien propuso el nombre de **tachystoptota**; pero predominó el de **braquis-**

tócrona propuesto por Juan Bernoulli. Otro problema propuesto como desafío por Jacobo y resuelto inmediatamente por Juan, fué éste: encontrar la cicloide de base dada tal que por ella llegue el punto en el tiempo mínimo a una vertical prefijada; otro, propuesto por éste y resuelto por aquél es el de las **geodésicas** de una superficie convexa; y así muchos otros problemas cuya dificultad puede sospecharse por la intención y categoría de los proponentes.

Después de estas figuras que atacan problemas concretos aparece el coloso de la nueva técnica, Leonardo **Euler** (1707-83), que no deja capítulo alguno por explorar; y no sólo en el Cálculo y en el Algebra, sino también en la Física matemática. Su obra inmensa desborda los estrechos límites de este libro, pero en diversos capítulos hemos encontrado su nombre. Comenzando por el concepto clásico de función, como expresión compuesta con la variable por los signos aritméticos (incluso el límite) y la notación f (x) hoy usada en lugar de la **fx** de Bernoulli; la expresión de la exponencial como límite de la potencia $(1+x/n)^n$; la representación por la letra **e** de la base de logaritmos naturales, y de la letra **i** para la unidad imaginaria, la relación entre la exponencial y las funciones circulares; las reglas para calcular límites indeterminados que completan la de l'Hospital; la teoría completa de máximos y mínimos para varias variables; las integrales elípticas; las integrales eulerianas (entre ellas la función que después fué llamada **gamma**); la integración aproximada de las ecuaciones de primer orden; las ecuaciones características de las funciones analíticas (impropiamente llamadas de Cauchy-Riemann); la ecuación fundamental del Cálculo de variaciones; etc., etc. Pero este índice no da idea de la infinidad de contribuciones eulerianas que en este libro no han tenido cabida.

Podríamos decir, en resumen, que toda la materia de este libro era conocida y en gran parte creada por Euler, si no hubiera algunas excepciones: las soluciones singulares, descubiertas ya por Taylor fueron estudiadas por **Clairaut** (1713-65), genio precoz al que mucho debe la teoría de ecuaciones diferenciales, no siendo lo más importante la ecuación que lleva su nombre; los sistemas de ecuaciones diferenciales fueron estudiados por **d'Alembert** (1747) y sabido es que lleva su nombre el problema de la cuerda vibrante, propuesto por Taylor y resuelto por caminos diversos por d'Alembert y por **Daniel Bernoulli** (hijo de Juan), que con Nicolás I y II y Juan III. completan la dinastía de los seis Bernoulli matemáticos.

Pero si toda la materia de esta obra fué obra de los siglos anteriores al XIX, el espíritu crítico novecentista asoma en varios de sus capítulos, en la medida que consiente su finalidad práctica. El concepto euleriano de funcion no permite explicar el problema de la cuerda vibrante, la cual puede adoptar forma inicial arbitraria no representable por una expresión aritmética; y fué precisamente esta contradicción, que dejó perplejo a Euler, sin atinar con la solución, la que señala el comienzo de la Matemática moderna, edificada sobre el concepto de función debido a Dirichlet, que es el adoptado en toda esta obra, y que permite llegar al magno descubrimiento de **Fourier** (1822). Este mismo concepto de función ha permitido abordar el problema de las funciones implícitas, los teoremas de existencia de las ecuaciones diferenciales y otras cuestiones capitales que fueron oscuramente esbozadas en el siglo XVIII y sobre las cuales arrojó la centuria siguiente vivísima luz.

La magna trinidad de matemáticos franceses que brilla en los confines de los siglos XVIII y XIX: **Lagrange**, **Legendre**, **Laplace**, y los no menos excelsos nombres de **Gauss**, **Cauchy**, **Riemann**, **Weierstrass**, que llenan el siglo XIX, aparecen más de una vez en estas páginas, proyectando sobre ellas la sombra de algunas de sus creaciones inmortales.

TABLA DE FUNCIONES PRIMITIVAS

Funciones racionales

Función derivada	*Función primitiva*
$\dfrac{A x + B}{x - a}$	$A x + (A a + B)\, l(x - a)$
$\dfrac{A x + B}{(x - a)\,(x - b)}$	$\dfrac{A a + B}{a - b}\, l(x - a) - \dfrac{A b + B}{a - b}\, l(x - b)$
$\dfrac{A x^2 + B x + C}{(x - a)\,(x - b)\,(x - c)}$	$\dfrac{f(a)\, l(x - a)}{(a - b)\,(a - c)} + \dfrac{f(b)\, l(x - b)}{(b - a)\,(b - c)} + \dfrac{f(c)\, l(x - c)}{(c - a)\,(c - b)}$
$\dfrac{1}{(x^2 + a^2)n}$	$\dfrac{x}{(2n - 2)a^2(x^2 + a^2)^{n-1}} + \dfrac{2n - 3}{2n - 2}\,\dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int \dfrac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}}$

Funciones circulares.

$\operatorname{sen}^2 x$;	$-\frac{1}{2}\operatorname{sen} x.\cos x \quad \frac{1}{2}x$	$\cos^2 x$;	$\frac{1}{2}\cos x.\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}x$
$\operatorname{sen}^3 x$;	$-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^2 x.\cos x + {}^2/_3\operatorname{sen} x$	$\cos^3 x$;	$\frac{1}{3}\cos^2 x.\operatorname{sen} x + {}^2/_3\cos x$
$\operatorname{sen}^4 x$;	$-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^3 x.\cos x - \frac{3}{8}\operatorname{sen} x.\cos x + \frac{3}{8}x$	$\cos^4 x$;	$\frac{1}{4}\cos^3 x.\operatorname{sen} x + \frac{3}{8}\cos x.\operatorname{sen} + \frac{3}{8}x$
$\operatorname{sen}^n x$;	$-{}^1/_n\operatorname{sen}^{n-1} x.\cos x + \dfrac{n-1}{n}\displaystyle\int \operatorname{sen}^{n-2} x.dx$	$\cos^n x$;	${}^1/_n\cos^{n-1} x.\operatorname{sen} x + \dfrac{n-1}{n}\displaystyle\int \cos^{n-2} x.dx$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x}\ ; \quad l \operatorname{tg} x/_2$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\ ; \quad -\cot x$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^3 x}\ ; \quad -\tfrac{1}{2} \cos x/\operatorname{sen}^2 x + \tfrac{1}{2}\, l \operatorname{tg} x/_2$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}\ ; \quad l \operatorname{tg} x$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^4 x}\ ; \quad -\cos x - \tfrac{1}{3} \cos^3 x$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^6 x}\ ; \quad -\cos x - {}^2/_3 \cos^3 x - {}^1/_5 \cos^5 x$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^n x}\ ; \quad -\frac{1}{n-1}\,\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{n-2} x}$$

$$\frac{1}{\cos x}\ ; \quad l \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}\ ; \quad \operatorname{tg} x$$

$$\frac{1}{\cos^3 x}\ ; \quad \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \tfrac{1}{2}\, l \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{\cos^4 x}\ ; \quad \operatorname{tg} x + \tfrac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x$$

$$\frac{1}{\cos^6 x}\ ; \quad \operatorname{tg} x + {}^2/_3 \operatorname{tg}^3 x + {}^1/_5 \operatorname{tg}^5 x$$

$$\frac{1}{\cos^n x}\ ; \quad \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

$$\frac{1}{\cos^{2m} x}\ ; \quad \operatorname{tg} x + \frac{m-1}{1!\,3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{(m-1)(m-2)}{2!\,5} \operatorname{tg}^5 x + \ldots$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^{2m} x}\ ; \quad -\cot x - {}^2/_3 \cot^3 x - \frac{(m-1)(m-2)}{2!\,5} \cot^5 x + \ldots\ldots$$

$\operatorname{tg} x$; $\quad -l \cos x$

$\operatorname{tg}^2 x$; $\quad \operatorname{tg} x - x$

$\operatorname{tg}^3 x$; $\quad \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + l \cos x$

$\operatorname{tg}^4 x$; $\quad \tfrac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$

$\operatorname{tg}^5 x$; $\quad \tfrac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - l \cos x$

$\operatorname{tg}^6 x$; $\quad {}^1/_5 \operatorname{tg}^5 x - \tfrac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - x$

$$\operatorname{tg}^n x\ ; \quad \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \,.\, dx$$

$\cot x$; $\quad l \operatorname{sen} x$

$\cot^2 x$; $\quad -\cot x - x$

$\cot^3 x$; $\quad -\tfrac{1}{2} \cot^2 x - l \operatorname{sen} x$

$\cot^4 x$; $\quad -\tfrac{1}{3} \cot^2 x + \cot x + x$

$\cot^5 x$; $\quad -\tfrac{1}{4} \cot^4 x + \tfrac{1}{2} \cot^2 x + l \operatorname{sen} x$

$\cot^6 x$; $\quad -{}^1/_5 \cot^5 x + \tfrac{1}{3} \cot^3 x - \cot x - x$

$$\cot^n x\ ; \quad -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x \,.\, dx$$

$$\operatorname{sen} m x \,.\, \cos n x\ ; \quad -\frac{\cos (m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos (m-n)x}{2(m-n)}$$

$$\operatorname{sen} m x \,.\, \operatorname{sen} n x\ ; \quad \frac{\operatorname{sen} (m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\operatorname{sen} (m-n)x}{2(m-n)}$$

$$\cos m x \,.\, \cos n x\ ; \quad \frac{\operatorname{sen} (m-n)x}{2(m-n)} + \frac{2(m+n)}{\operatorname{sen} (m+n)x}$$

TABLA DE FUNCIONES PRIMITIVAS

Funciones racionales

Función derivada	*Función primitiva*
$\dfrac{A\,x+B}{x-a}$	$A\,x+(A\,a+B)\,l(x-a)$
$\dfrac{A\,x+B}{(x-a)\,(x-b)}$	$\dfrac{A\,a+B}{a-b}\,l(x-a)-\dfrac{A\,b+B}{a-b}\,l(x-b)$
$\dfrac{A\,x^2+B\,x+C}{(x-a)\,(x-b)\,(x-c)}$	$\dfrac{f(a)\,l(x-a)}{(a-b)\,(a-c)}+\dfrac{f(b)\,l(x-b)}{(b-a)\,(b-c)}+$ $+\dfrac{f(c)\,l(x-c)}{(c-a)\,(c-b)}$
$\dfrac{1}{(x^2+a^2)n}$	$\dfrac{x}{(2\,n-2)a^2(x^2+a^2)^{n-1}}+\dfrac{2\,n-3}{2\,n-2}\,\dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int\dfrac{d\,x}{(x^2+a^2)^{n-1}}$

Funciones circulares.

$\mathbf{sen^2\,x}$;	$-\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,x\,.\cos x\quad \frac{1}{2}\,x$	$\cos^2 x$;	$\frac{1}{2}\cos x\,.\,\mathrm{sen}\,x+\frac{1}{2}\,x$ ..
$\mathbf{sen^3\,x}$;	$-\frac{1}{3}\,\mathrm{sen}^2 x\,.\cos x+{}^2/_3\,\mathrm{sen}\,x$	$\cos^3 x$;	$\frac{1}{3}\cos^2 x\,.\,\mathrm{sen}\,x+{}^2/_3\cos x$
$\mathbf{sen^4\,x}$;	$-\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}^3 x\,.\cos x-$ $-\frac{3}{8}\,\mathrm{sen}\,x\,.\cos x+\frac{3}{8}\,x$	$\cos^4 x$;	$\frac{1}{4}\cos^3 x\,.\,\mathrm{sen}\,x+$ $+\frac{3}{8}\cos x\,.\,\mathrm{sen}+\frac{3}{8}\,x$
$\mathbf{sen^n\,x}$;	$-{}^1/_n\,\mathrm{sen}^{n-1} x\,.\cos x+$ $+\dfrac{n-1}{n}\displaystyle\int \mathrm{sen}^{n-2} x\,.\,dx$	$\cos^n x$;	${}^1/_n\cos^{n-1} x\,.\,\mathrm{sen}\,x+$ $+\dfrac{n-1}{n}\displaystyle\int\cos^{n-2} x\,.\,dx$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x}\ ; \quad l \operatorname{tg} x/2$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\ ; \quad -\cot x$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^3 x}\ ; \quad -\tfrac{1}{2} \cos x/\operatorname{sen}^2 x + \tfrac{1}{2}\, l \operatorname{tg} x/2$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}\ ; \quad l \operatorname{tg} x$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^4 x}\ ; \quad -\cos x - \tfrac{1}{3} \cos^3 x$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^6 x}\ ; \quad -\cos x - \tfrac{2}{3} \cos^3 x - \tfrac{1}{5} \cos^5 x$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^n x}\ ; \quad -\frac{1}{n-1}\,\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{n-2} x}$$

$$\frac{1}{\cos x}\ ; \quad l \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}\ ; \quad \operatorname{tg} x$$

$$\frac{1}{\cos^3 x}\ ; \quad \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \tfrac{1}{2}\, l \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{\cos^4 x}\ ; \quad \operatorname{tg} x + \tfrac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x$$

$$\frac{1}{\cos^6 x}\ ; \quad \operatorname{tg} x + \tfrac{2}{3} \operatorname{tg}^3 x + \tfrac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x$$

$$\frac{1}{\cos^n x}\ ; \quad \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

$$\frac{1}{\cos^{2m} x}\ ; \quad \operatorname{tg} x + \frac{m-1}{1\,!\,3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{(m-1)(m-2)}{2\,!\,5} \operatorname{tg}^5 x + \ldots$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^{2m} x}\ ; \quad -\cot x - \tfrac{2}{3} \cot^3 x - \frac{(m-1)(m-2)}{2\,!\,5} \cot^5 x + \ldots\ldots$$

$\operatorname{tg} x$; $\quad -l \cos x$

$\operatorname{tg}^2 x$; $\quad \operatorname{tg} x - x$

$\operatorname{tg}^3 x$; $\quad \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + l \cos x$

$\operatorname{tg}^4 x$; $\quad \tfrac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$

$\operatorname{tg}^5 x$; $\quad \tfrac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - l \cos x$

$\operatorname{tg}^6 x$; $\quad \tfrac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x - \tfrac{1}{3}\, tg^3 x + \operatorname{tg} x - x$

$$\operatorname{tg}^n x\ ; \quad \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \,.\, dx$$

$\cot x$; $\quad l \operatorname{sen} x$

$\cot^2 x$; $\quad -\cot x - x$

$\cot^3 x$; $\quad -\tfrac{1}{2} \cot^2 x - l \operatorname{sen} x$

$\cot^4 x$; $\quad -\tfrac{1}{3} \cot^2 x + \cot x + x$

$\cot^5 x$; $\quad -\tfrac{1}{4} \cot^4 x + \tfrac{1}{2} \cot^2 x + l \operatorname{sen} x$

$\cot^6 x$; $\quad -\tfrac{1}{5} \cot^5 x + \tfrac{1}{3} \cot^3 x -$
$\quad - \cot x - x$

$$\cot^n x\ ; \quad -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x \,.\, dx$$

$$\operatorname{sen} m x \,.\, \cos n x\ ; \quad -\frac{\cos (m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos (m-n)x}{2(m-n)}$$

$$\operatorname{sen} m x \,.\, \operatorname{sen} n x\ ; \quad \frac{\operatorname{sen} (m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\operatorname{sen} (m-n)x}{2(m-n)}$$

$$\cos m x \,.\, \cos n x\ ; \quad \frac{\operatorname{sen} (m-n)x}{2(m-n)} + \frac{2(m+n)}{\operatorname{sen} (m+n)x}$$

Irracionales cuadráticos

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}; \quad \text{arc sen } x/a$$

$$\frac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}; \quad -\frac{y}{a^2 x}$$

$$\frac{1}{x^4\sqrt{a^2-x^2}}; \quad -\frac{y}{3a^2x^3}-\frac{2y}{3a^4x}$$

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}; \quad \sqrt{a^2+x^2}=y$$

$$\frac{x^3}{\sqrt{a^2+x^2}}; \quad 1/3\, x^2 y - 2/3\, a^2 y$$

$$\frac{x^5}{\sqrt{a^2+x^2}}; \quad 1/5\, x^4 y - 4/15\, a^2 x^2 y + 8/15\, a^4 y$$

$$\frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}; \quad -1/a\, l\,(a+y) + 1/a\, l\, x$$

$$\frac{1}{x^3\sqrt{a^2+x^2}}; \quad \frac{y}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\, l\, \frac{x}{a+y}$$

$$\frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}; \quad -\frac{1}{a}\, l\, \frac{a+y}{x}$$

$$\frac{1}{x^3\sqrt{a^2-x^2}}; \quad \frac{y}{2a^2x^2}-\frac{y}{2a^3}\, l\, \frac{a+y}{x}$$

$$\frac{1}{x^n\sqrt{a^2-x^2}}; \quad -\frac{y}{(n-1)\,a^2x^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)\,a^2}\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}; \quad l\,(x+y)$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}; \quad 1/2\, x y - 1/2\, a^2\, l\,(x+y)$$

$$\frac{x^n}{\sqrt{a^2+x^2}}; \quad 1/n\, x^{n-1} y - \frac{n-1}{n}\, a^2 \int \frac{x^{n-2}}{\sqrt{a^2+x^2}}\, dx$$

$$\frac{1}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}; \quad \frac{y}{a^2x}$$

$$\frac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}; \quad \frac{y}{3a^2x^3}-\frac{2y}{3a^4x}$$

$$\frac{1}{x^n\sqrt{a^2+x^2}}; \quad \frac{y}{(n-1)\,a^2x^{n-1}} - \frac{n-2}{(n-1)\,a^2}\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}; \quad -\sqrt{a^2-x^2}=y$$

$$\frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}}; \quad -a^2y + 1/3\, y^3$$

$$\frac{x^5}{\sqrt{a^2-x^2}}; \quad -a^4 y + 2/3\, a^2 y^3 - 1/5\, y^5$$

$$\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{a^2-x^2}}; \quad -a^{2n} y + n/3\, a^{2(n-1)} y^3 - \frac{n\,(n-1)}{2\,!\,5}\, a^{2(n-2)} y^5 + \dots \pm \frac{y^{2n+1}}{2n+1}$$

Funciones racionales de x, sen x, cos x

$x \operatorname{sen} x$; $\quad -x \cos x + \operatorname{sen} x$

$x^2 \operatorname{sen} x$; $\quad -x^2 \cos x + 2x . \operatorname{sen} x + 2 \cos x$

$x^n \operatorname{sen} x$; $\quad -x^n \cos x + n \int x^{n-1} . \cos x . dx$

$\dfrac{1}{1 + \cos x}$; $\quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x$

$x \cos x$; $\quad -x \operatorname{sen} x + \cos x$

$x^2 \cos x$; $\quad x^2 \operatorname{sen} x + 2x . \cos x - 2 \operatorname{sen} x$

$x^n \cos x$; $\quad x^n \operatorname{sen} x - n \int x^{n-1} . \operatorname{sen} x . dx$

$\dfrac{1}{1 - \cos x}$; $\quad -\cot \tfrac{1}{2} x$

$$\frac{1}{a + b \cos x}; \quad \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \operatorname{tg} x/_2 \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \; l \; \frac{b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} . \operatorname{sen} x}{a + b \cos x} \quad \text{si} \quad a^2 < b^2$$

$$\frac{\cos x}{a + b \cos x}; \quad \frac{x}{b} \quad \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a + b \cos x}$$

$$\frac{x + \operatorname{sen} x}{1 + \cos x}; \quad x \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x$$

$$\frac{1}{1 - a^2 \operatorname{sen}^2 x}; \quad \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{1 - a^2} . \operatorname{tg} x \right) \quad \text{si} \quad a^2 < 1$$

arc sen x; $\quad x . \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1 - x^2}$

x . arc sen x; $\quad \tfrac{1}{4} (2x^2 - 1) \operatorname{arc\,sen} x + \tfrac{1}{4} x \sqrt{1 - x^2}$

x . arc cos x; $\quad \tfrac{1}{4} (2x^2 - 1) \operatorname{arc\,cos} x - \tfrac{1}{4} x \sqrt{1 - x^2}$

x . arc tg x; $\quad \tfrac{1}{2} (x^2 + 1) \operatorname{arc\,tg} x - \tfrac{1}{2} x$

x . arc cot x; $\quad \tfrac{1}{2} (x^2 + 1) \operatorname{arc\,cot} x + \tfrac{1}{2} x$.

Exponenciales y potencias

$x . e^x$; $\quad x . e^x - e^x$

$x^2 e^x$; $\quad x^2 e^x - 2 x . e^x + 2 e^x$

$x^3 e^x$; $\quad x^3 e^x - 3 x^2 e^x + 6 x e^x - 6 e^x$

....

$x^n e^x$; $\quad x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$.

$x^n e^{\alpha x}$; $\quad e^{\alpha x} [(\alpha x)^n - n(\alpha x)^{n-1} + n(n-1) (\alpha x)^{n-2} - \ldots . \pm n!] \alpha^{-n-1}$

$x^n a^x = x^n e^{x \, l \, a}$ $\quad$ póngase $\quad \alpha = l \, a$.

$$\frac{e^x}{x^n}; \quad -\frac{1}{n-1} \frac{e^x}{x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^x \, dx}{x^{n-1}}$$

Potencias, exponenciales, logaritmos y circulares.

$l\,x;\quad x(l\,x - 1)$

$x\,l\,x;\quad \tfrac{1}{2}x^2\,(l\,x - \tfrac{1}{2})$

$x^2\,l\,x;\quad \tfrac{1}{3}x^3\,(l\,x - \tfrac{1}{3})$

$x^3\,l\,x;\quad \tfrac{1}{4}x^4\,(l\,x - \tfrac{1}{4})$

$x^n\,l\,x;\ \dfrac{1}{n+1}\,x^{n+1}\left(l\,x - \dfrac{1}{n+1}\right)$

$(l\,x)^2;\quad x\,(l\,x)^2 - 2\,x.l\,x + 2\,x$

$(l\,x)^3;\quad x(l\,x)^2 - 3\,x(l\,x)^2 + 6\,x.l\,x - 6\,x$

$(l\,x)^n;\quad x\,(l\,x)^n - n\int (l\,x)^{n-1}\,dx$

$\dfrac{l\,x}{x};\quad \tfrac{1}{2}\,(l\,x)^2$

$\dfrac{l\,x}{x^2};\quad -\dfrac{l\,x+1}{x}$

$\dfrac{l\,x}{x^3};\quad -\dfrac{l\,x+\tfrac{1}{2}}{2\,x^2}$

$\dfrac{l\,x}{x^n};\quad -\dfrac{l\,x+1/(n-1)}{(n-1)\,x^{n-1}}$

$\dfrac{(l\,x)^2}{x};\quad \dfrac{(l\,x)^3}{3}$

$\dfrac{(l\,x)^3}{x};\quad \dfrac{(l\,x)^4}{4}$

$\dfrac{(l\,x)^n}{x};\quad \dfrac{(l\,x)^{n+1}}{n+1}$

$$\frac{1}{1+e^x};\quad x - l\,(1+e^x)$$

$$\frac{1}{a+b\,e^{m\,x}};\quad \frac{1}{am}[m\,x - l\,(a+b.e^{m\,x})]$$

$e^{a\,x}.\mathrm{sen}\,b\,x;\quad \dfrac{a\,\mathrm{sen}\,b\,x - b\cos b\,x}{a^2+b^2}e^{a\,x}$

$e^{a\,x}.\cos b\,x;\quad \dfrac{a\cos b\,x + b\,\mathrm{sen}\,b\,x}{a^2+b^2}e^{a\,x}$

$\mathrm{sen}\,(l\,x);\quad \tfrac{1}{2}\,x\,[\mathrm{sen}\,(l\,x) - \cos l\,x)]$

$\cos\,(l\,x);\quad \tfrac{1}{2}\,x\,[\mathrm{sen}\,(l\,x) + \cos\,(l\,x)]$

Integrales definidas.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}^{2n}x\,d\,x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}x\,d\,x = \frac{(2n-1)\,(2n-3)\,\ldots 5\,.\,3\,.\,1}{2n\,(2n-2)\,\ldots\,.\,6\,.\,4\,.\,2}\,.\,\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}^{2n+1}x.\,d\,x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}x.\,d\,x = \frac{2n\,(2n-2)\,\ldots\,.\,4\,.\,2}{(2n+1)\,(2n-1)\,\ldots\,.\,3\,.\,1}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,d\,x = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \qquad \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,d\,x = \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\,b\,x}{x}\,d\,x = \tfrac{1}{2}\,\pi \qquad (b>0) \qquad \int_0^{\infty} \frac{\cos b\,x}{x}\,d\,x = \infty$$

TABLA DE INTEGRALES ELÍPTICAS DE PRIMERA ESPECIE

$\alpha =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$t =$ 2°	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035
4	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070
6	0.105	0.105	0.105	0.105	0.105	0.105	0.105	0.105	0.105	0.105
8	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140
10	0.175	0.175	0.175	0.175	0.175	0.175	0.175	0.175	0.175	0.175
12	0.209	0.209	0.210	0.210	0.210	0.210	0.211	0.211	0.211	0.211
14	0.244	0.244	0.245	0.245	0.245	0.246	0.246	0.247	0.247	0.247
16	0.279	0.279	0.280	0.280	0.281	0.281	0.282	0.282	0.283	0.283
18	0.314	0.314	0.315	0.315	0.316	0.317	0.318	0.319	0.319	0.320
20	0.349	0.349	0.350	0.351	0.352	0.353	0.354	0.355	0.356	0.356
22	0.384	0.384	0.385	0.386	0.388	0.390	0.391	0.393	0.394	0.394
24	0.419	0.419	0.420	0.422	0.424	0.426	0.428	0.430	0.431	0.432
26	0.454	0.454	0.456	0.458	0.460	0.463	0.466	0.468	0.470	0.470
28	0.489	0.489	0.491	0.493	0.497	0.500	0.504	0.507	0.509	0.509
30	0.524	0.524	0.526	0.529	0.533	0.538	0.542	0.546	0.548	0.549
32	0.558	0.559	0.562	0.566	0.570	0.576	0.581	0.586	0.589	0.590
34	0.593	0.594	0.597	0.602	0.608	0.614	0.621	0.626	0.630	0.632
36	0.628	0.629	0.633	0.638	0.645	0.653	0.661	0.668	0.673	0.674
38	0.663	0.665	0.669	0.675	0.683	0.693	0.702	0.710	0.716	0.718
40	0.698	0.700	0.704	0.712	0.721	0.732	0.744	0.753	0.760	0.763
42	0.733	0.735	0.740	0.749	0.760	0.773	0.786	0.798	0.806	0.809
44	0.768	0.770	0.776	0.786	0.799	0.814	0.829	0.843	0.853	0.857
46	0.803	0.805	0.812	0.823	0.838	0.855	0.873	0.890	0.902	0.906
48	0.838	0.840	0.848	0.861	0.877	0.897	0.918	0.938	0.952	0.958
50	0.873	0.876	0.884	0.898	0.917	0.940	0.965	0.988	1.004	0.011
52	0.908	0.911	0.920	0.936	0.958	0.984	1.012	1.039	1.059	1.066
54	0.942	0.946	0.957	0.974	0.998	1.028	1.060	1.092	1.115	1.124
56	0.977	0.981	0.993	1.012	1.039	1.073	1.110	1.146	1.174	1.185
58	1.012	1.017	1.030	1.051	1.081	1.118	1.161	1.203	1.236	1.249
60	1.047	1.052	1.066	1.090	1.123	1.164	1.213	1.262	1.301	1.317
62	1.082	1.087	1.103	1.128	1.165	1.211	1.266	1.323	1.370	1.389
64	1.117	1.122	1.139	1.167	1.207	1.259	1.321	1.387	1.443	1.466
66	1.152	1.158	1.176	1.206	1.250	1.308	1.377	1.454	1.520	1.549
68	1.187	1.193	1.213	1.246	1.294	1.357	1.435	1.523	1.603	1.638
70	1.222	1.229	1.250	1.285	1.337	1.407	1.494	1.596	1.692	1.735
72	1.257	1.264	1.286	1.325	1.381	1.457	1.555	1.672	1.788	1.843
74	1.291	1.299	1.323	1.365	1.425	1.509	1.618	1.752	1.892	1.962
76	1.327	1.335	1.360	1.404	1.470	1.561	1.681	1.835	2.005	2.097
78	1.361	1.370	1.397	1.444	1.515	1.613	1.746	1.921	2.129	2.253
80	1.396	1.406	1.434	1.485	1.560	1.666	1.813	2.012	2.265	2.436
82	1.431	1.441	1.472	1.525	1.605	1.719	1.880	2.106	2.416	2.660
84	1.466	1.477	1.509	1.565	1.650	1.773	1.948	2.202	2.581	2.949
86	1.501	1.512	1.546	1.605	1.696	1.827	2.017	2.302	2.761	3.355
88	1.536	1.547	1.583	1.646	1.741	1.881	2.087	2.403	2.954	4.048
90	1.571	1.583	1.620	1.686	1.787	1.936	2.157	2.505	3.153	∞

Tabla de integrales elípticas de segunda especie

$\alpha =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$t =$ 2°	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035
4	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070
6	0.105	0.105	0.105	0.105	0.105	0.105	0.105	0.105	0.105	0.105
8	0.140	0.140	0.140	0.140	0.139	0.139	0.139	0.139	0.139	0.139
10	0.175	0.175	0.174	0.174	0.174	0.174	0.174	0.174	0.174	0.174
12	0.209	0.209	0.209	0.209	0.209	0.209	0.208	0.208	0.208	0.208
14	0.244	0.244	0.244	0.244	0.243	0.243	0.243	0.242	0.242	0.242
16	0.279	0.279	0.279	0.278	0.278	0.277	0.277	0.276	0.276	0.276
18	0.314	0.314	0.314	0.313	0.312	0.311	0.310	0.310	0.309	0.309
20	0.349	0.349	0.348	0.347	0.346	0.345	0.344	0.343	0.342	0.342
22	0.384	0.384	0.383	0.382	0.380	0.378	0.377	0.376	0.375	0.375
24	0.419	0.418	0.417	0.416	0.414	0.412	0.410	0.408	0.407	0.407
26	0.454	0.453	0.452	0.450	0.448	0.445	0.442	0.440	0.439	0.438
28	0.489	0.488	0.486	0.484	0.481	0.478	0.474	0.472	0.470	0.469
30	0.524	0.523	0.521	0.518	0.514	0.510	0.506	0.503	0 501	0.500
32	0.558	0.558	0.555	0.552	0.547	0.542	0.537	0.533	0.531	0.530
34	0.593	0.592	0.590	0.585	0.580	0.574	0.568	0.563	0.560	0.559
36	0.628	0.627	0.624	0.619	0.612	0.605	0.598	0.593	0.589	0.588
38	0.663	0.662	0.658	0.652	0.644	0.636	0.628	0.622	0.617	0.616
40	0.698	0.697	0.692	0.685	0.676	0.667	0.657	0.650	0.645	0.643
42	0.733	0.731	0.726	0.718	0.708	0.697	0.686	0.677	0.671	0.669
44	0.768	0.766	0.760	0.751	0.739	0.727	0.714	0.704	0.697	0.695
46	0.803	0.800	0.794	0.783	0.770	0.756	0.742	0.730	0.722	0.719
48	0.838	0.835	0.828	0.816	0.801	0.785	0.769	0.755	0.746	0.743
50	0.873	0.870	0.861	0.848	0.832	0.813	0.795	0.780	0.770	0.766
52	0.908	0.904	0.895	0.880	0.862	0.841	0.821	0.804	0.792	0.788
54	0.942	0.939	0.929	0.912	0.892	0.869	0.846	0.827	0.814	0.809
56	0.977	0.973	0.962	0.944	0.922	0.896	0.871	0.849	0.834	0.829
58	1.012	1.008	0.996	0.976	0.951	0.923	0.895	0.871	0.854	0.848
60	1.047	1.043	1.029	1.008	0.980	0.949	0.918	0.891	0.873	0.866
62	1.082	1.077	1.062	1.039	1.009	0.975	0.941	0.911	0.890	0.883
64	1.117	1.112	1.095	1.070	1.038	1.007	0.963	0.930	0.903	0.899
66	1.152	1.146	1.129	1.101	1.066	1.026	0.985	0.949	0.923	0.914
68	1.187	1.180	1.162	1.132	1.094	1.051	1.006	0.966	0.938	0.927
70	1.222	1.215	1.195	1.163	1.122	1.075	1.027	0.983	0.951	0.940
72	1.257	1.249	1.228	1.194	1.150	1.099	1.047	0.999	0.964	0.951
74	1.291	1.284	1.261	1.225	1.177	1.123	1.066	1.014	0.976	0.961
76	1.327	1.318	1.294	1.255	1.205	1.146	1.085	1.029	0.987	9.970
78	1.361	1.353	1.327	1.286	1.232	1.169	1.104	1.043	0.996	0.978
80	1.396	1.387	1.360	1.316	1.259	1.193	1.122	1.057	1.005	0.985
82	1.431	1.421	1.392	1.346	1.286	1.215	1.141	1.069	1.013	0.990
84	1.466	1.456	1.425	1.377	1.313	1.238	1.158	1.082	1.021	0.995
86	1.501	1.490	1.458	1.407	1.340	1.261	1.176	1.094	1.028	0.993
88	1.536	1.525	1.491	1.437	1.336	1.283	1.194	1.106	1.034	0.999
90	1.571	1.559	1.524	1.467	1.393	1.305	1.211	1.118	1.040	1.000

ÍNDICE ONOMÁSTICO

Las cifras indican las páginas en que está citado cada autor o las fórmulas, teoremas o métodos que llevan su nombre.

INDICE ALFABETICO DE TEMAS

Las cifras designan números de párrafo.

INDICE GENERAL

CAPITULO I. — Límites de las funciones de una variable.

CAPITULO II. — Derivadas de las funciones de una variable.

CAPITULO III. — Derivadas y diferenciales sucesivas.

CAPITULO IV. — Las series de potencias.

CAPITULO V. — Integrales simples y sus aplicaciones geométricas.

CAPITULO VI. — Funciones periódicas y series de Fourier.

Terminóse la impresión el día 30
de noviembre de 1944 en la
"Editorial Mayo", Callao 335,
Buenos Aires.