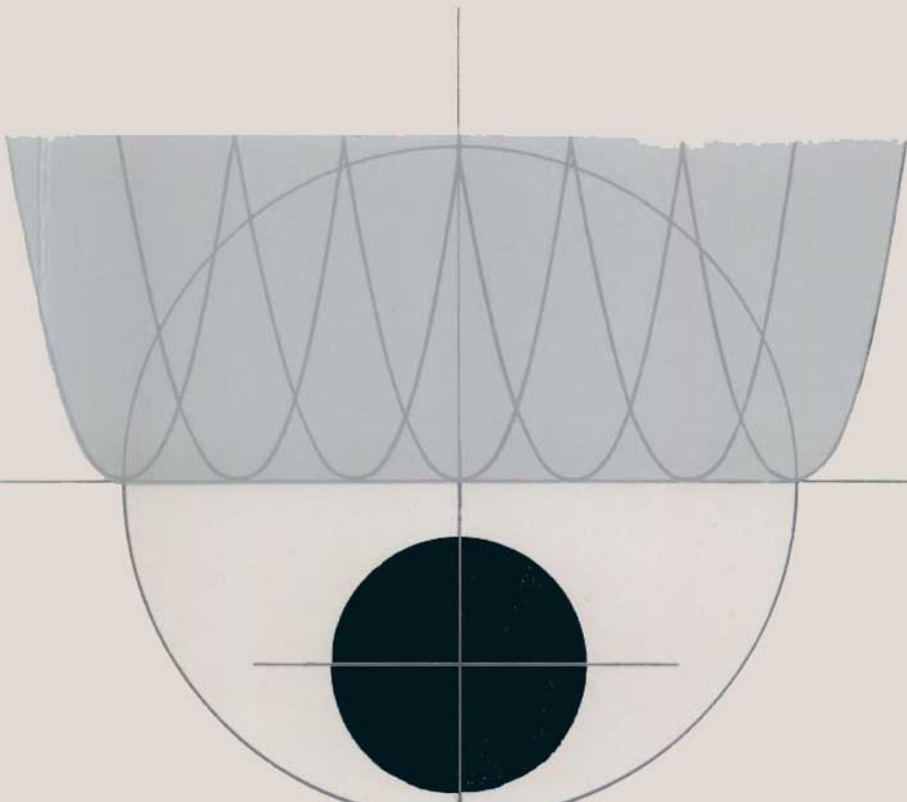
M.L. Krasnov G.I. Makarenko
A.I. Kiseliov

CÁLCULO VARIACIONAL

(ejemplos y problemas)



Editorial MIR

Los autores de este libro son Mijaíl Krasnov, Grigori Makarenko, candidatos a Doctores en Ciencias físico-matemáticas y docentes del Instituto Energético de Moscú, y Alexandr Kiseliov, colaborador científico superior del Instituto Unificado de Investigaciones Nucleares de la ciudad de Dubna.
Este compendio contiene problemas y ejercicios dedicados a ilustrar los diferentes principios de la teoría y los métodos de resolución de las ecuaciones por el cálculo de variaciones.

M. L. Krasnov, G. I. Makarenko,
A. I. Kiseliov

CÁLCULO VARIACIONAL

(ejemplos y problemas)

Traducido del ruso por Carlos Vega;
candidato a doctor en ciencias físico-matemáticas

Editorial MIR

I.S.B.N.: 84-604-1605-4
D.L.: M-5299-1992

Impresión: Gráficas Zenit - Madrid

BIBLIOGRAFÍA

1. *Courant R.* y *D. Hilbert*, Methoden der Mathematischen Physik (Métodos de la Física Matemática), vol. II, Springer, Berlín, 1937.
2. *L. Elsgoltz*, Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional, Editorial MIR, Moscú, 1969.
3. *И. М. Гельфанд и С. В. Фомин*, Вариационное исчисление, Физматгиз, 1961 (*I. M. Guelfand y S. V. Fomin*, Cálculo variacional).
4. *E. Goursat*, Cours d'analyse mathématique (Curso de Análisis Matemático), vol. III, 5ª ed., Gauthier-Villars, París, 1942.
5. *М. А. Лаврентьев и Л. А. Люстерник*, Курс вариационного исчисления, Гостехиздат, 1950 (*M. A. Lavrientiev y L. A. Lusternik*, Curso de cálculo variacional).
6. *J. Rey Pastor, P. Pi Calleja, y A. C. Trejo*, Análisis matemático, vol. III, 2ª ed., Kapelusz, Buenos Aires, 1961.
7. *L. C. Young*, Lectures on the calculus of variations and optimal control theory (Lecciones sobre el cálculo variacional y la teoria de control óptimo), Philadelphia, London, Toronto, 1969.

PREFACIO A LA EDICIÓN ESPAÑOLA

Hoy día todo ingeniero tropieza frecuentemente con problemas que requieren buenos conocimientos matemáticos y pericia en la aplicación de distintos métodos matemáticos. Se puede afirmar que la elevación de la cultura matemática de los ingenieros contribuye a nuevos logros en la Técnica.

El Cálculo variacional es uno de los capítulos del Análisis Matemático clásico más importante para las aplicaciones. Actualmente, en varios Institutos politécnicos el Cálculo variacional se incluye en el programa obligatorio del curso de Matemáticas superiores. Existen valiosos libros sobre el Cálculo variacional como, por ejemplo, los libros de L. Elsgoltz [2], de E. Goursat [4], de L. C. Young [7], etc. En cuanto a los problemas, muchos de ellos aparecen diseminados en numerosos textos o artículos científicos especiales dedicados a este tema. Pero, por lo que conocemos, no existe en la literatura correspondiente ningún libro de problemas dedicado especialmente al Cálculo variacional. Los autores se han planteado la tarea de preparar un cierto mínimo de problemas referentes a los capítulos principales del Cálculo variacional clásico (sin tocar las cuestiones relacionadas con la Teoría de dirección óptima).

El libro está escrito de forma que al principio de cada parágrafo se dan los elementos teóricos indispensables (definiciones, teoremas y fórmulas) y se analizan detalladamente ejemplos típicos.

El libro contiene más de 100 ejemplos resueltos y 230 problemas para el trabajo individual. Al final se dan las respuestas a todos problemas y, en algunos casos, las indicaciones correspondientes. Por eso, el libro puede servir tanto para estudiar asignatura individualmente como para profundizar en el material que se expone en las lecciones.

Consideramos deber nuestro agradecer al traductor Carlos Vega, candidato a doctor en ciencias físico-matemáticas, por el gran trabajo que se ha realizado al revisar los problemas y por las útiles observaciones que ha hecho contribuyendo al mejoramiento del libro.

M. L. Krasnov
G. I. Makarenko
A. I. Kiseliov

Moscú, 30 de Octubre de 1974.

OBSERVACIONES PRELIMINARES

1. Si A es un conjunto cualquiera de elementos, la proposición «*el elemento a pertenece al conjunto A*» se representa simbólicamente así: $a \in A$.

Si se escribe $a \notin A$ (o bien $a \overline{\in} A$), ello significa que el elemento a no pertenece al conjunto A.

Siendo A y B dos conjuntos, la proposición «*A es un subconjunto del conjunto B*» ($A \subset B$, simbólicamente) significa que todo elemento x del conjunto A también pertenece al conjunto B.

2. La unión y la intersección de dos conjuntos A y B se definen del modo siguiente:

la unión $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$ es la totalidad de los elementos x que pertenecen por lo menos a uno de los conjuntos A o B;

la intersección $A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$ es la totalidad de los elementos x que pertenecen tanto a A como a B.

3. Si A es un conjunto formado por números reales, se denomina *cota superior* (*cota superior exacta*) de A el menor número real M tal que $a \leqslant M$ para todo $a \in A$. En otras palabras, M es la cota superior de A si para todo $a \in A$ es $a \leqslant M$ y si para cualquier $\varepsilon > 0$, por pequeño que sea, existe como mínimo un elemento $b \in A$ tal que $M - \varepsilon < b$.

Si no existe tal número, convendremos en decir que la cota superior de A es $+\infty$.

En ambos casos designaremos la cota superior del conjunto A por $\sup A$.

Análogamente se define *la cota inferior del conjunto A* que se representa por $\inf A$.

4. Se denomina *espacio lineal* todo conjunto R de elementos $x, y, z, \ldots$ de naturaleza arbitraria para los cuales están definidas dos operaciones, de adición y de multiplicación por números, que cumplen los axiomas siguientes:

1) $x + y = y + x$;

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

3) existe un elemento 0 (elemento nulo) tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in R$;

4) para todo $x \in R$ existe un elemento $-x$ (elemento opuesto) tal que $x + (-x) = 0$;

5) $1 \cdot x = x$;

6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

5. *Un espacio lineal* R se llama *normado* si a todo elemento $x \in R$ le corresponde un número real no negativo $\| x \|$, llamado norma de este elemento, con la particularidad de que

1) $\| x \| = 0$ sólo si $x = 0$;
2) $\| \alpha x \| = | \alpha | \, \| x \|$;
3) $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$ (axioma triangular para las normas);

6. Un conjunto M de elementos $x, y, z, \ldots$ de naturaleza arbitraria se denomina *espacio métrico* si a todo par de elementos x, y de M le corresponde un número real no negativo $\rho(x, y)$ de modo que

1) $\rho(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$ (axioma de identidad);
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (axioma de simetría);
3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$ (axioma triangular).

El número $\rho(x, y)$ lleva el nombre de *distancia entre los elementos* x e y.

Todo espacio lineal normado es métrico: basta tomar $\rho(x, y) = \| x - y \|$.

7. *El espacio* $C[a, b]$ es el espacio formado por todas las funciones $y(x)$ continuas en $[a, b]$ donde

$$\| y \|_C = \max_{a \leqslant x \leqslant b} | y(x |.$$

El espacio $C_1[a, b]$ es el espacio formado por todas las funciones $y(x)$ que, a parte de ser continuas, tienen derivada primera continua en $[a, b]$ donde

$$\| y \|_{C_1} = \max_{a \leqslant x \leqslant b} | y(x) | + \max_{a \leqslant x \leqslant b} | y'(x) |.$$

El espacio $C_n[a, b]$ es el espacio formado por todas las funciones $y(x)$ que, a parte de ser continuas, tienen en $[a, b]$ derivadas continuas hasta de orden n-ésimo inclusive (n es un número natural fijo) donde

$$\| y \|_{C_n} = \sum_{k=0}^{n} \max_{a \leqslant x \leqslant b} | y^{(k)}(x) |.$$

A veces *la norma del elemento* $y(x)$ en $C_n[a, b]$ se define así:

$$\| y \|_{C_n} = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \{ | y(x) |, \ | y'(x) |, \ \ldots, \ | y^{(n)}(x) | \}.$$

Capítulo I

EXTREMO DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

§ 1. Extremo incondicionado

Sea $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, o brevemente $f(x)$, una función definida en un recinto D del espacio euclídeo E^n de n dimensiones.

Diremos que la función $f(x)$ *alcanza su valor máximo* (*mínimo*) en el punto $x_0 \in D$ si

$$f(x) \leqslant f(x_0) \qquad (f(x) \geqslant f(x_0))$$

cualquiera que sea el punto $x \in D$.

TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS. *Toda función continua en un recinto acotado cerrado alcanza en él sus valores máximo y mínimo.*

DEFINICIÓN 1. Sea $f(x)$ una función definida en un recinto $D \subset E^{(n)}$. Diremos que el punto $x^{(0)} = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$ es *un punto de máximo estricto* (*un punto de mínimo estricto*, respectivamente) de la función $f(x)$ si existe una vecindad $\Omega(x^{(0)})$ del punto $x^{(0)}$ tal que la desigualdad $f(x) < f(x^{(0)})$ (la desigualdad $f(x) > f(x^{(0)})$, respectivamente) se cumple para todos los puntos $x \in \Omega(x^{(0)}) \cap D$, $x \neq x^{(0)}$. Es decir, lo que caracteriza el punto de máximo estricto (el punto de mínimo estricto, respectivamente) es que

$$\Delta f = f(x) - f(x^{(0)}) < 0 \ (\Delta f > 0, \text{ respectivamente})$$

para todo $x \in \Omega(x^{(0)}) \cap D$, $x \neq x^{(0)}$.

En cambio, si para el punto $x^{(0)}$ existe una vecindad $\Omega(x^{(0)})$ tal que para todos los puntos $x \in \Omega(x^{(0)}) \cap D$ se cumple la desigualdad $f(x) \leqslant f(x^{(0)})$ (la desigualdad $f(x) \geqslant f(x^{(0)})$, respectivamente), se dice simplemente que el punto $x^{(0)}$ es *un punto de máximo* (*un punto de mínimo*, respectivamente).

DEFINICIÓN 2. Los puntos de máximo y de mínimo de la función $f(x)$ se denominan *puntos de extremo* de la misma.

1. Basándose en la definición, hallar los puntos de extremo de las funciones

a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$;

b) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 & \text{si} \quad x_1^2 + x_2^2 \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad x_1^2 + x_2^2 = 0; \end{cases}$

c) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^3$

en el recinto $D\,\{x_1^2 + x_1^2 \leqslant 1\}$.

TEOREMA 1 (condición necesaria de extremo). *Sea $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, una función definida en una vecindad del punto $x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Si este punto es un punto de extremo de la función $f(x)$ y si en él existen las derivadas $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, todas ellas son iguales a cero:*

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Si la función $f(x)$ es diferenciable en el punto de extremo $x^{(0)}$, su diferencial en este punto es igual a cero: $df(x^{(0)}) = 0$.

EJEMPLO 1. Hallar los puntos de extremo de la función $z = x^2 + y^2$.

SOLUCIÓN. Los puntos de extremo están entre los puntos para los cuales $dz = 0$. En nuestro caso, $dz = 2x\,dx + 2y\,dy$. La condición $dz = 0$ se cumple en el punto $x = 0$, $y = 0$ solamente. En efecto, si $x = y = 0$, tenemos $dz = 0$. Recíprocamente, sea $dz = 0$; basándonos en que dx y dy son arbitrarios, tomemos $dy = 0$ de modo que $0 = dz = 2x\,dx$ de donde, puesto que dx es arbitrario, resulta que $x = 0$; análogamente encontramos que también $y = 0$. En el punto $(0, 0)$ tenemos $z = 0$; en todos los demás puntos tenemos $z = x^2 + y^2 > 0$. Por eso, el punto $(0, 0)$ es un punto de mínimo estricto de la función $z = x^2 + y^2$.

Si se amplía la clase de funciones en la que se busca el extremo incluyendo en ella las funciones no diferenciables en algunos puntos, se llega a la siguiente *condición necesaria de extremo.*

Si $x^{(0)}$ es un punto de extremo de la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, cada una de las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es igual a cero o no existe en dicho punto.

EJEMPLO 2. Consideremos la parte superior $z \geqslant 0$ del cono $z^2 = x^2 + y^2$. Es obvio que la función z tiene mínimo en el punto $(0, 0)$. Pero las derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ no existen en este punto.

DEFINICIÓN 3. Los puntos en los que se cumple la condición necesaria de extremo de la función $f(x)$ se denominan *puntos críticos de la misma.*

Los puntos $x^{(0)}$ en los que $df(x^{(0)}) = 0$ se denominan *puntos estacionarios de la función $f(x)$.*

La condición $df(x^{(0)}) = 0$ es equivalente a la condición

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

La existencia de punto crítico no garantiza aún la existencia del extremo de una función. Por ejemplo, el punto $(0, 0)$ es un punto estacionario de la función $z = x^2 - y^2$ y, sin embargo, la función z no tiene extremo en él: en cualquier vecindad del punto $(0, 0)$, por pequeña que sea, la función toma valores tanto positivos como negativos.

1°. Condiciones suficientes de extremo estricto

DEFINICIÓN 4. Se dice que la forma cuadrática

$$A(x)=A(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j;$$
$$a_{ij}=a_{ji};\quad i, j=1, 2, \ldots, n;$$

es definida positiva (*definida negativa*, respectivamente) si $A(x)>0$ ($A(x)<0$ respectivamente) para todo punto $x\in E^n$, $x\neq 0$, y se anula sólo para $x=0$, o sea, para $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$.

La forma cuadrática se denomina *no negativa* si jamás toma valores negativos. Por ejemplo, las formas

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \text{ y } (x_1+x_2+\ldots+x_n)^2$$

son ambas no negativas. La primera es definida positiva ya que se anula sólo para $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$; en cambio la segunda no lo es ya que se anula, por ejemplo, para $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=x_4=\ldots=x_n=0$.

Una forma cuadrática definida positiva o definida negativa se denomina *forma cuadrática definida*.

Una forma cuadrática que toma valores tanto positivos como negativos se denomina *indefinida*.

TEOREMA 2. (condiciones suficientes de extremo estricto). *Sea $f(x)$ una función definida en una vecindad del punto $x^{(0)}=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ en la que son continuas sus segundas derivadas y sea $x^{(0)}$ un punto estacionario de la función $f(x)$. Si la forma cuadrática*

$$A(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i\,\partial x_j}dx_i\,dx_j, \qquad (1)$$

o sea, la segunda diferencial de la función f en el punto $x^{(0)}$, es definida positiva (definida negativa, respectivamente), el punto $x^{(0)}$ es punto de mínimo estricto (punto de máximo estricto, respectivamente); si la forma cuadrática (1) *es indefinida, no hay extremo en el punto $x^{(0)}$.*

CRITERIO DE SYLVESTER DE FORMAS CUADRÁTICAS DEFINIDAS POSITIVAS. *Condición necesaria y suficiente para que la forma cuadrática*

$$A(x)=A(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \qquad (2)$$

con $a_{ij} = a_{ji}$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$; sea definida positiva es que se cumpla

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots$$

$$\ldots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Condición necesaria y suficiente para que la forma cuadrática (2) *sea definida negativa es que se cumpla*

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \ \ldots$$

$$\ldots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} (-1)^n > 0.$$

CASO $n=2$. Sea $f(x, y)$ una función definida en una vecindad del punto (x_0, y_0) en la que son continuas sus derivadas parciales de segundo orden y sea (x_0, y_0) un punto estacionario, es decir, sea

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Entonces, si en el punto (x_0, y_0)

$$f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0,$$

hay extremo en este punto; a saber, máximo si en él

$$f''_{xx} < 0 \qquad (f''_{yy} < 0)$$

y mínimo si en él

$$f''_{xx} > 0 \qquad (f''_{yy} > 0).$$

Si en el punto (x_0, y_0)

$$f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 < 0,$$

no hay extremo en el punto (x_0, y_0). Por último, si en el punto (x_0, y_0)

$$f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 0,$$

en dicho punto puede haber extremo y puede no haberlo; este caso requiere un estudio complementario.

EJEMPLO 3. Consideremos las funciones $z = x^4 + y^4$, $z = -x^4 - y^4$ y $z = x^4 - y^4$. El punto (0, 0) es un punto estacionario de las tres y en él se tiene $z''_{xx}z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 0$ para cada una de las funciones.

Es fácil ver que el punto (0, 0) es un punto de mínimo de la primera función, un punto de máximo de la segunda y no es punto de extremo de la tercera. Efectivamente, en los tres casos tenemos $z(0, 0) = 0$; sin embargo, en cualquier vecindad del punto (0, 0), a excepción del propio punto, los valores de la función son positivos en el primer caso y negativos en el segundo mientras que en el tercer caso la función $z = x^4 - y^4$ toma, en cualquier vecindad del origen de coordenadas, valores tanto positivos (por ejemplo, si $x \neq 0$ e $y = 0$) como negativos (por ejemplo, si $x = 0$ e $y \neq 0$).

EJEMPLO 4. Hallar el extremo de la función de tres variables

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z.$$

SOLUCIÓN. Determinamos los puntos estacionarios de la función f. Consideremos con este fin el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - y + 1 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y - x = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 2z - 2 = 0; \end{aligned}\right\}$$

resolviéndolo, encontramos $x_0 = -\frac{2}{3}$, $y_0 = -\frac{1}{3}$ y $z_0 = 1$.

Consideremos la forma cuadrática (1) en el punto $P_0\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$. Tenemos

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= 2, & f''_{xy} &= -1, & f''_{xz} &= 0, \\ f''_{yx} &= -1, & f''_{yy} &= 2, & f''_{yz} &= 0, \\ f''_{zx} &= 0, & f''_{zy} &= 0, & f''_{zz} &= 2. \end{aligned}$$

En el punto P_0 encontramos

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2, & a_{12} &= -1, & a_{13} &= 0, \\ a_{21} &= -1, & a_{22} &= 2, & a_{23} &= 0, \\ a_{31} &= 0, & a_{32} &= 0, & a_{33} &= 2, \end{aligned}$$

de modo que

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0.$$

Basándose en el criterio de Sylvester, llegamos a la conclusión de que la forma cuadrática es definida positiva; por lo tanto, en virtud del teorema 2, el punto P_0 es un punto de mínimo estricto siendo $f(P_0) = -\frac{4}{3}$.

EJEMPLO 5. Hallar el extremo de la función de dos variables

$$z = x^3y^2(6 - x - y).$$

SOLUCIÓN. Determinamos los puntos estacionarios:

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= 18x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0, \\ z'_y &= 12x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2 = 0, \end{aligned}\right\}$$

de donde $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ y $x_2 = 3$, $y_2 = 2$. Hemos obtenido dos puntos estacionarios $P_1(0, 0)$ y $P_2(3, 2)$.

Calculemos las segundas derivadas de la función:

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= 36xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3, \\ z''_{yy} &= 12x^3 - 2x^4 - 6x^3y, \\ z''_{xy} &= 36x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2. \end{aligned}$$

En el punto P_1 tenemos $z''_{xx} = z''_{yy} = z''_{xy} = 0$ de modo que $z''_{xx}z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 0$ y queda pendiente el problema sobre la existencia de extremo en este punto; para resolverlo habrá que recurrir a las derivadas superiores.

En el punto P_2 tenemos $z''_{xx} = -144$, $z''_{yy} = -162$ y $z''_{xy} = -108$. Queda claro que $z''_{xx}z''_{yy} - (z''_{xy})^2 > 0$ y como $z''_{xx} < 0$, en el punto $P_2(3, 2)$ hay máximo siendo $z_{\text{máx}} = 108$.

Hallar los máximos y los mínimos de las funciones:

2. $f = (x - 1)^2 - 2y^2$.

3. $f = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

4. $f = (x^2 + y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$.

5. $f = \dfrac{1 + x - y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$.

6. $f = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

7. $f = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.

8. $f = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x + y)$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi)$

9. $f = x_1x_2^2 \ldots x_n^n (1 - x_1 - 2x_2 - \ldots - nx_n)$

$(x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ \ldots,\ x_n > 0)$.

10. Demostrar que la función $z = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ tiene una cantidad infinita de máximos y no tiene mínimos.

11. ¿Será condición suficiente para que la función $f(x, y)$ tenga mínimo en el punto $M_0(x_0, y_0)$ el que esta función tenga mínimo a lo largo de cualquier recta que pase por el punto M_0? Considerar la función $f(x, y) = (x - y^2) \times \times (2x - y^2)$.

12. Demostrar que (a diferencia de las funciones de una variable) incluso para las funciones de dos variables la existencia de un extremo único — máximo o mínimo — en un recinto D no significa aun que este extremo represente el valor máximo o mínimo de la función respecto a todo el recinto. Considerar los ejemplos:

a) $z = x^2 - y^2 + 2e^{-x^2}$,

$$-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty;$$

b) $z = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$,

$$D\{-5 \leqslant x \leqslant 5;\ -1 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

13. Sea $f(x)$ una función periódica con período 2π. Entre todos los polinomios trigonométricos de grado n

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx)$$

determinar, escogiendo convenientemente los coeficientes α_k y β_k, aquel que ofrece el valor mínimo para el error cuadrático definido por la igualdad

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx) \right]^2 dx.$$

2°. Método del gradiente. Supongamos que es preciso hallar el mínimo de la función $f(x)$, donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Tomemos un punto $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ y calculemos el gradiente de la función $f(x)$ en este punto

$$\operatorname{grad} f(x^0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} e_i,$$

donde $e_1, e_2, \ldots, e_n$ es una base ortonormal del espacio R^n.

Si se tiene $\operatorname{grad} f(x^0) \neq 0$, ponemos

$$x_k^1 = x_k^0 - h_1 (\operatorname{grad} f(x^0), e_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

donde $h_1 > 0$ es suficientemente pequeño. Si se tiene grad $f(x^1) \neq 0$, ponemos

$$x_k^2 = x_k^1 - h_2 (\text{grad } f(x^1), e_k), \quad (h_2 > 0);$$

en general, si se tiene grad $f(x^{n-1}) \neq 0$, ponemos

$$x_k^n = x_k^{n-1} - h_n (\text{grad } f(x^{n-1}), e_k)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m; \ h_n > 0).$$

Así obtenemos, si se cumplen determinadas condiciones, una sucesión monótona decreciente $\{f(x^n)\}$. Si $x^n \to \tilde{x}$ y $\tilde{x}$ es un punto de mínimo de la función $f(x)$, se tiene grad $f(x^n) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

EJEMPLO 6. Hallar el punto de mínimo de la función $f(x) = x^2$.

SOLUCIÓN. Tomemos, por ejemplo, el punto $x^0 = 1$. Tenemos

$$\text{grad } f(x^0) = 2x^0 i = 2i \neq 0.$$

Por eso, ponemos

$$x^1 = x^0 - h\,2 = 1 - 2h, \quad \text{donde } h > 0.$$

Tenemos ahora

$$\text{grad } f(x^1) = 2(1 - 2h)\, i.$$

Si $h \neq \frac{1}{2}$, es grad $f(x^1) \neq 0$ y ponemos

$$x^2 = x^1 - 2h(1 - 2h) = (1 - 2h)^2.$$

Continuando este proceso, encontramos

$$x^n = (1 - 2h)^n.$$

Es claro que, siendo $0 < h < 1$, se tiene $x^n \to 0$ para $n \to \infty$. El punto $x = 0$ es el punto de mínimo de la función $f(x) = x^2$. Si $h = \frac{1}{2}$, es $x^1 = 0$ y grad $f(x^1) = 0$ y obtenemos la sucesión estacionaria $\{0\}$ cuyo límite es el cero.

EJEMPLO 7. Hallar el punto de mínimo de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.

SOLUCIÓN. Tomemos, por ejemplo, el punto $(1, 1)$, o sea, tomemos $x^0 = 1$ e $y^0 = 1$. Tenemos

$$\text{grad } f(1, 1) = 2i + 2j.$$

Puesto que grad $f(1, 1) \neq 0$, ponemos

$$\begin{aligned} x^1 &= x^0 - 2x^0 h = 1 - 2h, \\ y^1 &= y^0 - 2y^0 h = 1 - 2h. \end{aligned} \qquad (h > 0)$$

Tenemos

$$\text{grad } f(x^1, y^1) = 2(1 - 2h)\, i + 2(1 - 2h)\, j \neq 0 \qquad \left(h \neq \frac{1}{2}\right)$$

y, por eso, tomamos

$$\begin{aligned} x^2 &= x^1 - 2x^1 h = (1 - 2h)^2, \\ y^2 &= y^1 - 2y^1 h = (1 - 2h)^2. \end{aligned} \qquad \left(h > 0, \ h \neq \frac{1}{2}\right)$$

Continuando este proceso, encontramos

$$x^n = (1 - 2h)^n,$$
$$y^n = (1 - 2h)^n,$$

de modo que para $0 < h < 1$ obtenemos una sucesión de puntos $M_n (x^n, y^n)$ convergente al punto $M (0, 0)$ de mínimo de la función considerada. Es obvio que

$$\operatorname{grad} f (x^n, y^n) = 2 (1 - 2h)^n \, i + 2 (1 - 2h)^n \, j \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Es decir, el punto $(0, 0)$ es el punto de mínimo de la función $f (x, y) = x^2 + y^2$.

Empleando el método de gradiente, hallar el punto de mínimo de la función

$$z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5.$$

§ 2. Extremo condicionado

Sea $z = f (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una función de n variables definida de un recinto D del espacio E^n.

Supongamos, además, que las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ están ligadas por $(m < n)$ condiciones complementarias

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

que se denominan ecuaciones de enlace.

Sea $x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ un punto interior del recinto D.

Se dice que $f (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiene *máximo condicionado* (*mínimo condicionado*, respectivamente) en el punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ si la desigualdad

$$f (x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant f (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$$

(la desigualdad $f (x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant f (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, respectivamente) se cumple en una vecindad del punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ siempre que los puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ verifiquen las ecuaciones de enlace (1).

EJEMPLO 1. La función $z = x^2 + y^2$ tiene mínimo incondicionado, igual a cero, en el punto $(0, 0)$. Agreguemos la ecuación de enlace $x + y - 1 = 0$; se trata entonces de determinar el mínimo de las Z-coordenadas de los puntos de la superficie $z = x^2 + y^2$ considerando sólo aquellos valores de x y de y que satisfacen la ecuación $x + y - 1 = 0$. Este mínimo condicionado no se puede alcanzar en el punto $(0, 0)$ pues este último no satisface la ecuación de enlace. Resolviendo la ecuación de enlace $x + y - 1 = 0$ respecto a y e introduciendo la expresión obtenida $y = 1 - x$ en la ecuación de la superficie, encontramos $z = x^2 + (1 - x)^2$, o sea, obtenemos una función de una variable. Extremándola, encontramos $x_{cr} = \frac{1}{2}$ y $z_{\min} = \frac{1}{2}$. A partir de la ecuación de enlace, determinamos $y_{cr} = \frac{1}{2}$. El punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es el vértice de la parábola que corresponde a la intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con el plano $x + y - 1 = 0$.

Análogamente se puede proceder en situaciones más generales. Supongamos que se busca el extremo condicionado de la función $z = f(x, y)$ siendo $\varphi(x, y) = 0$ la ecuación de enlace. Supongamos que para los valores considerados de x y de y la ecuación $\varphi(x, y) = 0$ determina y como una función unívoca diferenciable $y = \psi(x)$. Sustituyendo y por $\psi(x)$ en la función $f(x, y)$, obtenemos una función de una variable x: $z = f(x, \psi(x)) = F(x)$. El extremo (incondicionado) de la función $F(x)$ será el extremo condicionado buscado de la función $f(x, y)$ con la condición de enlace $\varphi(x, y) = 0$. En la práctica este método resulta poco cómodo ya que para aplicarlo es preciso resolver la ecuación $\varphi(x, y) = 0$ respecto a una de las variables.

Para hallar los extremos de la función $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con las condiciones de enlace (1) se emplea el método de los multiplicadores de Lagrange.

MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE. Supongamos que

1) las derivadas parciales de primer orden de las funciones $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ son continuas en el recinto D;

2) $m < n$, siendo el rango de la matriz $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)$ $(i = 1, 2, \ldots, m;$ $j = 1, 2, \ldots, n)$ igual a m en todo punto del recinto D.

Consideramos una función nueva (función de Lagrange)

$$\Phi = f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i,$$

donde λ_i son factores constantes indeterminados.

Después analizamos el extremo incondicionado de la función $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, o sea, formamos el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0 \tag{2}$$

y, a partir de este sistema y de las m ecuaciones de enlace

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \ \ldots, \ \varphi_m = 0,$$

determinamos los valores de los parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ y las coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de los posibles puntos de extremo.

Las condiciones (2) son condiciones necesarias de extremo tanto para la función de Lagrange como para la función inicial $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Si el punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ es un punto de extremo condicionado de la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, será a la vez un punto estacionario de la función de Lagrange, o sea, en este punto será $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Para analizar el punto estacionario $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ en tanto que extremo condicionado de la función de Lagrange $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ habrá que considerar la forma cuadrática

$$B(dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n-m}) = \sum_{i,\, j=1}^{n-m} b_{ij}\, dx_i\, dx_j, \tag{3}$$

o sea, la segunda diferencial de la función de Lagrange, teniendo en cuenta las condiciones

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Si la forma cuadrática (3) es definida, en el punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ tendremos extremo condicionado estricto; a saber, máximo condicionado estricto si la forma cuadrática (3) es definida negativa, y mínimo condicionado estricto si la forma cuadrática (3) es definida positiva.

En cambio si la forma cuadrática (3) es indefinida, en el punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ no habrá extremo condicionado.

Por consiguiente, la existencia en el punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ de máximo (mínimo) incondicionado de la función de Lagrange (tomada con los valores encontrados para $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$) implica la existencia de este punto máximo (mínimo) condicionado de la función $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con las condiciones de enlace

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

La ausencia de extremo incondicionado de la función de Lagrange $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ no significa aún la ausencia de extremo condicionado de la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

EJEMPLO 2. Hallar el extremo de la función $z = xy$ con la condición $y - x = 0$.

SOLUCIÓN. Formamos la función de Lagrange

$$\Phi(x, y) = xy + \lambda(y - x)$$

y el sistema correspondiente para determinar λ y las coordenadas de los posibles puntos de extremo

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= y - \lambda = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= x + \lambda = 0, \\ y - x &= 0. \end{aligned}\right\}$$

La primera ecuación da $\lambda = y$. Teniéndolo en cuenta, encontramos la segunda ecuación $x + y = 0$. Es decir,

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0, \\ y - x &= 0, \end{aligned}\right\}$$

de donde $x = y = 0$ y, además, $\lambda = 0$. Por lo tanto, la función correspondiente de Lagrange es $\Phi(x, y) = xy$. La función $\Phi(x, y)$ no tiene extremo incondicionado en el punto $(0, 0)$.

Sin embargo, existe el extremo condicionado de la función $z = xy$ con la condición $y = x$: en efecto, tenemos en este caso $z = x^2$, de donde resulta que hay mínimo condicionado en el punto (0, 0).

EJEMPLO 3. Hallar el extremo condicionado de la función

$$f(x, y, z) = xyz$$

con las condiciones

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) = x + y - z - 3 = 0, \\ \varphi_2(x, y, z) = x - y - z - 8 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

SOLUCIÓN. Formamos la función de Lagrange

$$\Phi(x, y, z) = xyz + \lambda_1(x + y - z - 3) + \lambda_2(x - y - z - 8)$$

y el sistema de ecuaciones para determinar los parámetros λ_1 y λ_2 y las coordenadas de los posibles puntos de extremo

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = yz + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = xz + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = xy - \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ x + y - z - 3 = 0, \\ x - y - z - 8 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (5), obtenemos

$$\lambda_1 = \frac{11}{32}, \quad \lambda_2 = -\frac{231}{32}, \quad x = \frac{11}{4}, \quad y = -\frac{5}{2} \quad \text{y} \quad z = -\frac{11}{4}.$$

La segunda diferencial de la función $\Phi(x, y, z)$ es igual a

$$d^2\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \partial z^2 +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y} dx\, dy + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\, \partial z} dx\, dz + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\, \partial z} dy\, dz.$$

En nuestro caso,

$$d^2\Phi = 2z\, dx\, dy + 2y\, dx\, dz + 2x\, dy\, dz. \quad (6)$$

De las ecuaciones de enlace (4) encontramos

$$\left.\begin{aligned} dx + dy - dz = 0, \\ dx - dy - dz = 0, \end{aligned}\right\}$$

de donde $dx = dz$, $dy = 0$. Introduciendo estas expresiones en (6), obtenemos

$$B(dx) = 2y\, dx^2.$$

En el punto estacionario se tiene $B = -5\, dx^2 < 0$, o sea, en el punto $\left(\frac{11}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}\right)$ hay máximo, siendo $f_{\text{máx}} = \frac{605}{32}$.

EJEMPLO 4. Hallar el extremo de la función $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ con la condición

$$y - x = \frac{\pi}{4}.$$

SOLUCIÓN. Formamos la función de Lagrange

$$\Phi(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y + \lambda\left(y - x - \frac{\pi}{4}\right)$$

y el sistema de ecuaciones para determinar el parametro λ y las coordenadas de los posibles puntos de extremo

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial x} &= -2\cos x \operatorname{sen} x - \lambda = 0,\\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} &= -2\cos y \operatorname{sen} y + \lambda = 0,\\ y - x - \frac{\pi}{4} &= 0, \end{aligned}\right\}$$

es decir,

$$\operatorname{sen} 2x = -\lambda, \qquad (7)$$

$$\operatorname{sen} 2y = \lambda, \qquad (8)$$

$$y - x = \frac{\pi}{4}, \qquad (9)$$

De las ecuaciones (7) y (8) tenemos $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y = 0$, o sea,

$$2\operatorname{sen}(x + y)\cos(y - x) = 0. \qquad (10)$$

Debido a (9), tenemos $\cos(y - x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$ y, por eso, de (10) resulta $\operatorname{sen}(x + y) = 0$, es decir,

$$x + y = k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (11)$$

Resolviendo las ecuaciones (9) y (11), tendremos

$$x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, \quad y = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Determinamos las segundas derivadas de la función $\Phi(x, y)$:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = -2\cos 2x, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = -2\cos 2y.$$

En los puntos $P_k\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$ se tiene

$$\Phi''_{xx}\Phi''_{yy}-(\Phi''_{xy})^2=4\cos\left(k\pi-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$=2\cos 2k\pi=2>0.$$

Por consiguiente, hay extremo condicionado en los puntos P_k. Además, para $k=2n$ es

$$\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right|_{P_{2n}}=-\sqrt{2}<0$$

y, por eso, en los puntos P_{2n} se tiene máximo condicionado siendo

$$z_{\text{máx}}=1+\frac{\sqrt{2}}{2};$$

para $x=2n+1$ es

$$\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right|_{P_{2n+1}}=\sqrt{2}>0,$$

o sea, en los puntos P_{2n+1} tenemos mínimo condicionado siendo

$$z_{\text{mín}}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En los problemas que siguen hallar el extremo condicionado.

14. $f=xy$ siendo $x^2+y^2=1$.

15. $f=x^2+y^2$ siendo $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$.

16. $f=xyz$ siendo $x+y+z=5$ y $xy+yz+zx=8$.

17. $f=e^{xy}$ siendo $x+y=a$.

18. $f=6-4x-3y$ siendo $x^2+y^2=1$.

19. $f=x-2y+2z$ siendo $x^2+y^2+z^2=9$.

20. $f=\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z$ siendo $x+y+z=\frac{\pi}{2}$, $x>0$, $y>0$ y $z>0$.

21. Demostrar la desigualdad

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n,\quad n\geqslant 1,\quad x\geqslant 0 \text{ e } y\geqslant 0.$$

22. Hallar el valor máximo del producto $xyzt$ de cuatro números no negativos x, y, z y t si la suma de los mismos permanece constante: $x + y + z + t = 4c$.

23. Hallar la distancia mínima del punto M (1, 0) a la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$.

24. Hallar la distancia de la parábola $y = x^2$ a la recta $x - y = 5$.

25. Hallar los lados del rectángulo de área máxima inscrito en la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$.

26. Inscribir en la esfera de radio R el cilindro de máxima superficie total.

Capítulo II

EXTREMO DE FUNCIONALES

§ 3. Funcional. Variación de una funcional y sus propiedades

1°. Definición de funcional. Proximidad de curvas. Sea M una clase de funciones $y(x)$. Si a toda función $y(x) \in M$ le corresponde, según una regla, un número determinado J se dice que en la clase M está definida *la funcional* J y se escribe $J = J[y(x)]$.

La clase M de funciones $y(x)$ en la que está definida la funcional $J[y(x)]$ se denomina *campo de definición de la funcional.*

EJEMPLO 1. Sea $M = C[0, 1]$ el conjunto de todas las funciones continuas $y(x)$ definidas en el segmento $[0, 1]$ y sea

$$J[y(x)] = \int_0^1 y(x)\,dx\,[1]. \qquad (1)$$

Entonces $J[y(x)]$ es una funcional de $y(x)$: a toda función $y(x) \in C[0, 1]$ le corresponde un valor determinado $J[y(x)]$. Tomando en (1) funciones concretas en lugar de $y(x)$, obtendremos los valores correspondientes de $J[y]$. Por ejemplo, si $y(x) = 1$, tenemos

$$J[1] = \int_0^1 1 \cdot dx = 1\ ;$$

si $y(x) = e^x$, tenemos

$$J[e^x] = \int_0^1 e^x\,dx = e - 1;$$

si $y(x) = \cos \pi x$, tenemos

$$J[\cos \pi x] = \int_0^1 \cos \pi x\,dx = 0.$$

---

[1]) En adelante, al considerar funcionales integrales, escribiremos en el integrando y en lugar de $y(x)$, y' en lugar de $y'(x)$, y etc.

EJEMPLO 2. Sea $M = C_1[a, b]$ la clase de funciones $y(x)$ que tienen derivada continua en el segmento $[a, b]$ y sea

$$J[y(x)] = y'(x_0), \quad \text{donde} \quad x_0 \in [a, b].$$

Queda claro que $J[y(x)]$ es una funcional definida en la clase de funciones señalada: a toda función de esta clase le corresponde un número determinado, el valor de la derivada de esta función en el punto fijo x_0.

Siendo, por ejemplo, $a = 1$, $b = 3$ y $x_0 = 2$, tenemos para $y(x) = x^2$

$$J[x^2] = 2x\,|_{x=2} = 4;$$

para $y(x) = x^2 + 1$ encontramos $J[x^2 + 1] = 4$ y para $y(x) = \ln(1 + x)$ tendremos $J[\ln(1 + x)] = \left.\frac{1}{1+x}\right|_{x=2} = \frac{1}{3}$.

EJEMPLO 3. Sea $M = C[-1, 1]$ la clase de funciones $y(x)$ continuas en el segmento $[-1, 1]$ y sea $\varphi(x, y)$ una función definida y continua para todos los $-1 \leqslant x \leqslant 1$ y para todos los valores reales de y. Entonces,

$$J[y(x)] = \int_{-1}^{1} \varphi(x, y)\, dx$$

será una funcional definida de la clase de funciones indicada. Por ejemplo, si $\varphi(x, y) = \frac{x}{1+y^2}$, para la función $y(x) = x$ tendremos

$$J[x] = \int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{1+x^2} = 0 \text{ y para } y(x) = 1 + x$$

tendremos

$$J[1+x] = \int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{1+(1+x)^2} = \ln\sqrt{5} - \operatorname{arctg} 2.$$

EJEMPLO 4. Sea $M = C_1[a, b]$ la clase de funciones $y(x)$ que tienen derivadas continua $y'(x)$ en el segmento $[a, b]$. Entonces

$$J[y(x)] = \int_{a}^{b} \sqrt{1+y'^2}\, dx \tag{2}$$

será una funcional definida en esta clase de funciones. Desde el punto de vista geométrico, la funcional (2) representa la longitud del arco de la curva $y = y(x)$ cuyos extremos son los puntos $A(a, y(a))$ y $B(b, y(b))$.

Se denomina *variación o incremento* $\delta y(x)$ del argumento $y(x)$ de la funcional $J[y(x)]$ la diferencia entre dos funciones $y(x)$ e $y_0(x)$

pertenecientes a la clase considerada M de funciones:

$$\delta y(x) = y(x) - y_0(x)\ ^{1)}.$$

Para la clase de funciones k veces diferenciables tenemos

$$(\delta y)^{(k)} = \delta y^{(k)}(x).$$

Diremos que las curvas $y = y(x)$ e $y = y_1(x)$ definidas en el segmento $[a, b]$ *son cercanas en el sentido de proximidad de orden nulo* si es pequeña en $[a, b]$ la magnitud $|y(x) - y_1(x)|$. Desde el punto de vista geométrico, esto significa que *son próximas las ordenadas* de dichas curvas en $[a, b]$.

Diremos que las curvas $y = y(x)$ e $y = y_1(x)$ definidas en el segmento $[a, b]$ *son cercanas en el sentido de proximidad de primer orden* si son pequeñas en $[a, b]$ las magnitudes $|y(x) - y_1(x)|$ y $|y'(x) - y_1'(x)|$. Desde el punto de vista geométrico, esto significa que en $[a, b]$ son próximas tanto las ordenadas de dichas curvas como las direcciones de sus tangentes en los puntos correspondientes.

Las curvas $y = y(x)$ e $y = y_1(x)$ *son cercanas en el sentido de proximidad de k-ésimo orden* si son pequeñas en $[a, b]$ las magnitudes $|y(x) - y_1(x)|$, $|y_1'(x) - y_1'(x)|$, ..., $|y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)|$.

Si las curvas son cercanas en el sentido de proximidad de k-ésimo orden, con mayor razón lo serán en el sentido de proximidad de cualquier inferior.

EJEMPLO 5. La curva $y(x) = \dfrac{\operatorname{sen} n^2x}{n}$ con n suficientemente grande y la curva $y_1(x) = 0$ son cercanas en $[0, \pi]$ en el sentido de proximidad de orden nulo ya que

$$|y(x) - y_1(x)| = \left|\frac{\operatorname{sen} n^2 x}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n},$$

o sea, el valor absoluto de esta diferencia es pequeño en todo el segmento $[0, \pi]$ si n es suficientemente grande.

No hay proximidad de primer orden ya que

$$|y'(x) - y_1'(x)| = n\,|\cos n^2x|$$

y, por ejemplo, en los puntos $x = \dfrac{2\pi}{n^2}$ tendremos $|y'(x) - y_1'(x)| = n$, o sea, $|y'(x) - y_1'(x)|$ puede resultar tan grande como se quiera si n es suficientemente grande.

EJEMPLO 6. La curva $y(x) = \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$ con n suficientemente grande y la curva $y_1(x) = 0$ son cercanas en $[0, \pi]$ en el sentido de proximidad de primer orden ya que tanto

$$|y(x) - y_1(x)| = \left|\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

---

1) Para abreviar, en lo que sigue escribiremos simplemente δy en lugar de $\delta y(x)$.

como

$$|y'(x)-y_1'(x)|=\left|\frac{\cos nx}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}$$

son pequeños.

Determinar el orden de proximadad de las curvas en los problemas que siguen.

27. $y(x)=\dfrac{\cos nx}{n^2+1}$ e $y_1(x)\equiv 0$ en $[0, 2\pi]$.

28. $y(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{n}$ e $y_1(x)\equiv 0$ en $[0, \pi]$.

29. $y(x)=\operatorname{sen}\dfrac{x}{n}$ e $y_1(x)\equiv 0$ en $[0, 1]$.

Se denomina *distancia entre las curvas* $y=y(x)$ e $y=y_1(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, donde $y(x)$ e $y_1(x)$ son funciones continuas en $[a, b]$, el número no negativo ρ igual al máximo del módulo $|y_1(x)-y(x)|$ en el segmento $a\leqslant x\leqslant b$:

$$\rho=\rho[y_1(x), y(x)]=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|y_1(x)-y(x)|.$$

EJEMPLO 7. Hallar la distancia ρ entre las curvas $y(x)=x$ e $y_1(x)=x^2$ en el segmento $[0, 1]$ (fig. 1).

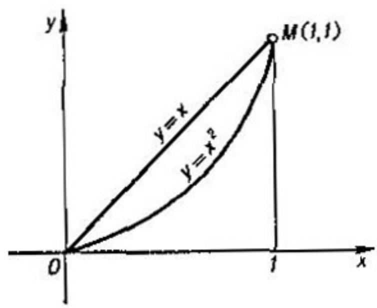


Fig. 1

SOLUCIÓN. Según la definición $\rho=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|x^2-x|$, o sea, $\rho=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}(x-x^2)$. La función $y=x-x^2$ se anula en los extremos del segmento $[0, 1]$. Determinemos el máximo de la función $y=x-x^2$ en el segmento $[0, 1]$.

Tenemos

$$y'=1-2x \quad \text{e} \quad y'=0 \quad \text{para } x=\frac{1}{2}$$

de modo que

$$\rho=\max_{0\leqslant x\leqslant 1} y=(x-x^2)\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}.$$

En los problemas que siguen hallar la distancia entre las curvas en los segmentos indicados.

30. $y(x) = xe^{-x}$ e $y_1(x) \equiv 0$ en $[0, 2]$.

31. $y(x) = \operatorname{sen} 2x$ e $y_1(x) = \operatorname{sen} x$ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

32. $y(x) = x$ e $y_1(x) = \ln x$ en $[e^{-1}, e]$.

Supongamos que las curvas $y = y(x)$ e $y = y_1(x)$ tienen en el segmento $[a, b]$ derivadas continuas de orden n.

Se llama *distancia de n-ésimo orden entre las curvas* $y = y(x)$ e $y = y_1(x)$ el mayor de los máximos de las expresiones

$$|y_1(x) - y(x)|, \quad |y_1'(x) - y'(x)|, \quad \ldots, \quad |y_1^{(n)}(x) - y^{(n)}(x)|$$

en el segmento $[a, b]$. Representemos esta distancia así

$$\rho_n = \rho_n[y_1(x), y(x)] = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |y_1^{(k)}(x) - y^{(k)}(x)|.$$

Desde este punto de vista se puede interpretar la distancia definida en la pág. 29 como distancia de orden nulo.

EJEMPLO 8. Hallar la distancia de primer orden entre las curvas $y(x) = x^2$ e $y_1(x) = x^3$ en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$.

SOLUCIÓN. Calculemos las derivadas de las funciones dadas: $y'(x) = 2x$ e $y_1'(x) = 3x^2$ y consideremos las funciones $y_2(x) = x^2 - x^3$ e $y_3(x) = 2x - 3x^2$. Determinamos sus máximos valores en el segmento $[0, 1]$. Tenemos $y_2' = 2x - 3x^2$.

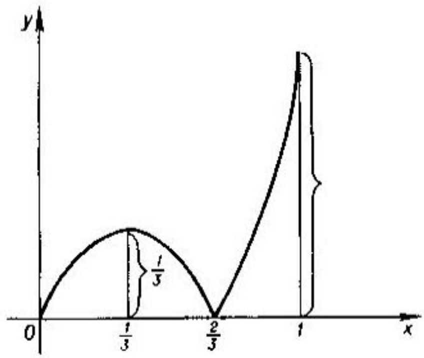


Fig. 2

Igualando esta derivada a cero, encontramos los puntos estacionarios de la función $y_2(x)$: $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{2}{3}$. Ahora bien, $y_2|_{x=0} = 0$, $y_2|_{x=\frac{2}{3}} = \frac{4}{27}$ y el valor de $y_2(x)$ en el extremo de la derecha es

$y_2(1) = 0$. Por eso,

$$\rho_0 = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |x^3 - x^2| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} (x^2 - x^3) = \frac{4}{27}.$$

Determinamos ahora la distancia $\widetilde{\rho}_0$ de orden nulo entre las derivadas $y'(x) = 2x$ e $y_1'(x) = 3x^2$:

$$\widetilde{\rho}_0 = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |y_3(x)| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |2x - 3x^2|.$$

Consideremos el gráfico de la función $y_4 = |2x - 3x^2|$ (fig. 2). Puede verse de él que $\widetilde{\rho}_0 = 1$. Por consiguiente, la distancia ρ_1 de primer orden entre las curvas $y(x) = x^2$ e $y_1(x) = x^3$ será igual a

$$\rho_1 = \max(\rho_0, \widetilde{\rho}_0) = 1.$$

33. Hallar la distancia de primer orden entre las curvas $y(x) = \ln x$ e $y_1(x) = x$ en el segmento $[e^{-1}, e]$.

34. Hallar la distancia de segundo orden entre las curvas $y(x) = x$ e $y_1(x) = -\cos x$ en el segmento $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

35. Hallar la distancia de 1001-ésimo orden entre las curvas $y(x) = e^x$ e $y_1(x) = x$ en el segmento $[0, 1]$.

Se llama *ε-vecindad de n-ésimo orden de la curva* $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ el conjunto de las curvas $y = y_1(x)$ cuyas distancias de n-ésimo orden a la curva $y = y(x)$ son menores que ε:

$$\rho_n = \rho_n[y(x), y_1(x)] < \varepsilon.$$

La ε-vecindad de orden nulo se denomina *ε-vecindad fuerte de la función* $y = y(x)$.

La ε-vecindad fuerte de la curva $y = y(x)$ está formada por todas las curvas comprendidas en la franja de 2ε de anchura construida a partir de la curva $y = y(x)$.

La ε-vecindad de primer orden se denomina *ε-vecindad débil de la función* $y = y(x)$.

2°. Continuidad de una funcional. Una funcional $J[y(x)]$ definida en la clase M de funciones $y(x)$ se llama *continua* en $y = y_0(x)$ en el sentido de proximidad de n-ésimo orden si cualquiera que sea el número $\varepsilon > 0$ existe un número $\eta > 0$ tal que la desigualdad $|J[y(x)] - J[y_0(x)]| < \varepsilon$ se cumple para todas las funciones admisibles $y = y(x)$, o sea, para todas las funciones que satisfacen las condiciones

$$|y(x) - y_0(x)| < \eta, \quad |y'(x) - y_0'(x)| < \eta, \ \ldots$$
$$\ldots, \ |y^{(n)}(x) - y_0^{(n)}(x)| < \eta.$$

En otras parabras, si se tiene $|J[y(x)] - J[y_0(x)]| < \varepsilon$ siempre que

$$\rho_n[y(x), y_0(x)] < \eta.$$

Toda funcional que no sea continua en el sentido de proximidad de n-ésimo orden se denominará *discontinua* en este sentido de proximidad. Poniendo

$$y^{(k)}(x) = y_0^{(k)}(x) + \alpha\omega^{(k)}(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

donde α es un parámetro y $\omega(x)$ es una función cualquiera de la clase M, podemos persuadirnos de que

$$\lim_{\alpha\to 0} y^{(k)}(x) = y_0^{(k)}(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

y, por eso, podemos definir la continuidad de la funcional $J[y(x)]$ en $y = y_0(x)$ de la forma siguiente

$$\lim_{\alpha\to 0} J[y_0(x)+\alpha\omega(x)] = J[y_0(x)].$$

EJEMPLO 9. Demostrar que la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^1 (y+2y')\,dx$$

considerada en el espacio $C_1[0, 1]$ es continua en la funcian $y_0(x) = x$ en el sentido de proximidad de primer orden.

SOLUCIÓN. Tomemos un número cualquiera $\varepsilon > 0$ y demostremos que existe un número $\eta > 0$ tal que $|J[y(x)] - J[x]| < \varepsilon$ siempre que $|y(x) - x| < \eta$ y $|y'(x) - 1| < \eta$. Tenemos

$$|J[y(x)] - J[x]| = \left|\int_0^1 (y+2y'-x-2)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 |y-x|\,dx + 2\int_0^1 |y'-1|\,dx.$$

Tomemos $\eta = \frac{\varepsilon}{3}$. Entonces, para todas las funciones $y(x) \in C_1[0, 1]$ tales que

$$|y(x)-x| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad |y'(x)-1| < \frac{\varepsilon}{3}$$

tendremos

$$|J[y(x)] - J[x]| < \varepsilon.$$

Es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\eta > 0$ $\left(\text{por ejemplo, } \eta = \frac{\varepsilon}{3}\right)$ tal que $|J[y(x)] - J[x]| < \varepsilon$ siempre que $\rho_1[y(x), x] < \eta$. Pero, según la definición, esto significa precisamente que nuestra funcional es continua en la función $y_0(x) = x$ en el sentido de proximidad de primer orden. Es fácil ver que esta funcional es continua e el sentido de proximidad de primer orden en cualquier curva $y(x) \in C_1[0, 1]$.

EJEMPLO 10. Consideremos la funcional

$$J[y(x)] = y'(x_0),$$

donde las funciones $y(x) \in C_1[a, b]$ y $x_0 \in [a, b]$.

Esta funcional es discontinua en el sentido de proximidad de orden nula en cualquier función $y(x)$. Efectivamente, escogemos $\varphi(x)$ de modo que $\varphi'(x_0) = 1$ y que $|\varphi(x)| < \eta$ en el segmento $[a, b]$. Consideremos la función $y(x) = y_0(x) + \varphi(x)$, donde $y_0(x) \in C_1[a, b]$. Entonces tendremos $y'(x_0) = y_0'(x_0) + 1$. Es obvio que $\rho[y(x), y_0(x)] < \eta$, o sea, que las curvas $y(x)$ e $y_0(x)$ son cercanas en el sentido de proximidad de orden nulo. Al mismo tiempo $J[y(x)] - J[y_0(x)] = 1$, es decir, los valores de la funcional no son próximos por cercanos que sean, en el sentido de proximidad de orden nula, los argumentos $y(x)$ e $y_0(x)$.

Hablando con más precisión, existe un $\varepsilon > 0$ (por ejemplo, cualquier $\varepsilon < 1$) tal que para cualquier $\eta > 0$ existirán funciones $y(x)$ para las cuales
$\rho_0[y(x), y_0(x)] < \eta$ y, sin embargo, $|J[y(x)] - J[y_0(x)]| \geqslant \varepsilon$. Esto significa precisamente que la funcional $J[y(x)]$ es discontinua en el sentido de proximidad de orden nulo.

Demostremos que esta funcional es continua en el sentido de proximidad de primer orden.

Tomemos un $\varepsilon > 0$ cualquiera. Tendremos

$$|J[y(x)] - J[y_0(x)]| = |y'(x_0) - y_0'(x_0)|.$$

Queda claro que tomando $\eta = \varepsilon$ tendremos

$$|J[y(x)] - J[y_0(x)]| < \varepsilon$$

siempre que $\rho_1[y(x), y_0(x)] < \eta$ que es lo que se quería demostrar. Este ejemplo permite ver que de la continuidad de la funcional en el sentido de proximidad de n-ésimo orden no implica, hablando en términos generales, su continuidad en el sentido de proximidad de orden inferior.

EJEMPLO 11. Consideremos la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^{\pi} y'^2\, dx$$

definida en el espacio $C_1[0, \pi]$. Demostremos que es discontinua en la función $y_0(x) \equiv 0$ en el sentido de proximidad de orden nulo.

En efecto, sea $y_0(x) \equiv 0$ en $[0, \pi]$ y sea $y_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$. Entonces, $\rho_0[y_0(x), y_n(x)] = \frac{1}{n}$ de modo que $\rho_0 \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Por otro lado, la diferencia

$$J[y_n(x)] - J(y_0(x)] = \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 nx}{n}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

no depende de n. Es decir, $J[y_n(x)]$ no tiende hacia $J[y_0(x)] = 0$ cuando $n \to \infty$ y, por consiguiente, nuestra funcional es discontinua en la función $y_0(x) \equiv 0$ en el sentido de proximidad de orden nulo.

Proponemos al lector demostrar que esta funcional es continua en la función $y_0(x) \equiv 0$ en el sentido de proximidad de primer orden.

Analizar la continuidad de las funcionales siguientes

36. $J[y(x)] = y(x_0)$, donde $y(x) \in C[a, b]$ y $x_0 \in [a, b]$, en el sentido de proximidad de orden nulo

37. $J[y(x)] = \text{máx}\, | y(x) |$, donde $y(x)$ son funciones continuas en el segmento $[a, b]$, en el sentido de proximidad de orden nulo.

38.

$$J[y(x)] = \begin{cases} 0 \text{ si } y(x) \text{ toma al menos un valor negativo,} \\ \frac{1}{2} \text{ si } y(x) \equiv 0, \\ 1 \text{ si } y(x) \geqslant 0 \text{ e } y(x) \not\equiv 0, \end{cases}$$

en el sentido de proximidad de orden nulo

39. $J[y(x)] = \int_0^1 |y'|\, dx$, donde las funciones $y(x)$ tienen primera derivada continua en el segmento $[0, 1]$:

a) en el sentido de proximidad de orden nulo;

b) en el sentido de proximidad de primer orden.

40. $J[y(x)] = \int_0^{\pi} \sqrt{1+y'^2}\, dx$ en la función $y_0(x) \equiv 0$, donde $y(x) \in C_1[0, \pi]$: 0

a) en el sentido de proximidad de orden nulo;

b) en el sentido de proximidad de primer orden

41. $J[y(x)] = \int_0^{\pi} (1 + 2y'^2)\, dx$ en la función $y_0(x) \equiv 0$, donde $y(x) \in C_1\,[0, \pi]$, en el sentido de proximidad de primer orden.

EJEMPLO 12. Demostrar que la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^1 x^3 \sqrt{1+y^2}\,dx$$

definida en el conjunto de las funciones $y(x) \in C\,[0, 1]$ es continua en la función $y_0(x) = x^2$ en el sentido de proximidad de orden nulo.

SOLUCIÓN. Pongamos $y(x) = x^2 + \alpha\eta(x)$, donde $\eta(x) \in C\,[0, 1]$ y α es tan pequeño como se quiera, tenemos

$$J[y(x)] = J[x^2 + \alpha\eta(x)] = \int_0^1 x^3 \sqrt{1+(x^2+\alpha\eta)^2}\,dx =$$

$$= \int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^4+2\alpha x^2\eta+\alpha^2\eta^2}\,dx.$$

Pasando al límite cuando $\alpha \to 0$, obtenemos de esta igualdad

$$\lim_{\alpha\to 0} J[y(x)] = \int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^4}\,dx = J[x^2]$$

lo que equivale a la continuidad de la funcional en la función $y_0(x) = x^2$.

DEFINICIÓN. Sea M un espacio lineal normado formado por las funciones $y(x)$.

La funcional $L[y(x)]$ definida en el espacio M se denomina *lineal* si satisface las condiciones

1) $$L[cy(x)] = cL[y(x)],$$

donde c es una constante cualquiera y

2) $$L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)],$$

donde $y_1(x) \in M$ e $y_2(x) \in M$.

Por ejemplo, la funcional

$$L[y(x)] = \int_a^b (y' + y)\,dx$$

definida en el espacio $C_1\,[a, b]$ es, obviamente, lineal.

Existe otra definición de funcional lineal:

La funcional $L[y(x)]$ se denomina *lineal* si 1) es continua y 2) satisface la condición

$$L[y_1(x)+y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)]$$

cualquiera que sean $y_1(x) \in M$ e $y_2(\bar{x}) \in M$.

42. Demostrar la equivalencia de las dos definiciones de funcional lineal.

43. Demostrar que la funcional $L[y(x)] = y(x_0)$ es lineal.

44. Sea $L[(y(x)]$ una funcional lineal. Demostrar que si la razón $\frac{L[y(x)]}{\|y(x)\|} \to 0$ cuando $\|y(x)\| \to 0$, es $L[y(x)] \equiv 0$.

3°. Variación de una funcional. Sea $J[y(x)]$ una funcional definida en el conjunto M de funciones $y(x)$. La magnitud

$$\Delta J = \Delta J[y(x)] = J[y(x)+\delta y] - J[y(x)]$$
$$(\delta y = \widetilde{y}(x) - y(x), \text{ donde } y(x) \in M \text{ e } \widetilde{y}(x) \in M)$$

se denomina *incremento de la funcional* $J[y(x)]$ correspondiente al incremento δy del argumento.

EJEMPLO 13. Hallar el incremento de la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^1 yy'\,dx$$

definida en el espacio $C_1[a, b]$ si $y(x) = x$ e $y_1(x) = x^2$.

SOLUCIÓN. Tenemos

$$\Delta J = J[x^2] - J[x] = \int_0^1 x^2\,2x\,dx - \int_0^1 x\cdot 1\cdot dx = \int_0^1 (2x^3 - x)\,dx = 0.$$

45. Hallar el incremento de la funcional del ejemplo 13 siendo $y(x)\ e^x$ e $y_1(x) = 1$.

DEFINICIÓN. Si el incremento de la funcional $J[y(x)]$

$$\Delta J = J[y(x)+\delta y] - J[y(x)]$$

se puede representar en la forma

$$\Delta J = L[y(x), \delta y] + \beta(y(x), \delta y)\,\|\delta y\|,$$

donde $L[y(x), \delta y]$ es una funcional lineal respecto a δy y $\beta(y(x), \delta y) \to 0$ cuando $\|\delta y\| \to 0$, entonces la parte del incremento lineal respecto a δy, o sea, $L[y(x), \delta y]$, se llama *variación de la funcional* y se representa por δJ. Se dice en este caso que la funcional $J[y(x)]$ es *diferenciable* en el punto $y(x)$.

46. Demuéstrese que la variación δJ de la funcional $J[y(x)]$ se determina unívocamente (si es que existe).

EJEMPLO 14. Demuéstrese que la funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b y\,dx$$

definida en el espacio $C[a, b]$ es diferenciable en todo punto $y(x)$ de este espacio.

SOLUCIÓN. Tenemos

$$\Delta J = J[y(x) + \delta y] - J[y(x)] = \\ = \int_a^b (y + \delta y)\,dx - \int_a^b y\,dx = \int_a^b \delta y\,dx.$$

Es decir, $\Delta J = \int_a^b \delta y\,dx$. Pero ésta es una funcional lineal respecto a δy. Todo el incremento se ha reducido en nuestro caso a una funcional lineal respecto a δy. La funcional considerada es diferenciable en todo punto $y(x)$ y su variación es $\delta J = \int_a^b \delta y\,dx$.

47. Demostrar que toda funcional $J[y(x)]$ lineal continua es siempre diferenciable.

EJEMPLO 15. Demostrar que la funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b y^2\,dx$$

definida en el espacio $C[a, b]$ es diferenciable en todo punto $y(x)$.

SOLUCIÓN. Tenemos

$$\Delta J = \int_a^b (y + \delta y)^2\,dx - \int_a^b y^2\,dx = \int_a^b 2y\,\delta y\,dx + \int_a^b (\delta y)^2\,dx. \qquad (3)$$

En el último miembro de (3) la primera integral representa la funcional lineal respecto a δy cualquiera que sea la función fija $y(x)$. Estimemos la segunda integral de este miembro. Tenemos

$$\int_a^b (\delta y)^2\,dx = \int_a^b |\delta y|^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\max_{a\leqslant x\leqslant b} |\delta y|\right)^2 \int_a^b dx = (b-a)\,\|\delta y\|^2 = [(b-a)\,\|\delta y\|]\,\|\delta y\|.$$

Si $\|\delta y\| \to 0$, la magnitud

$$(b-a)\,\|\delta y\| \to 0.$$

Es decir, hemos logrado representar el incremento ΔJ de la funcional como la suma de $L\{y(x), \delta y\}$ y de una magnitud infinitésima de segundo orden con respecto a $\|\delta y\|$. Según nuestra definición, la funcional considerada es diferenciable en el punto $y(x)$ y su variación es

$$\delta J = 2\int_a^b y\,\delta y\,dx.$$

48. En la funcional $J[y(x)] = \int_0^1 y^2 dx$ tomar $y = 2x$ y $\delta y = \alpha x^2$; comparar δJ y ΔJ para $\alpha = 1$; $-0{,}1$ y $0{,}01$.

49. En la funcional $J[y(x)] = \int_0^1 xy^3 dx$ tomar $y = e^x$ y $\delta y = \alpha x$; comparar ΔJ y δJ para $\alpha = 1$; $0{,}1$ y $0{,}01$.

50. Analizar si son o no diferenciables las funcionales siguientes:

1) $J[y(x)] = y(a)$ en el espacio $C[a, b]$.
2) $J[y(x)] = y(a)$ en el espacio $C_1[a, b]$.
3) $J[y(x)] = \sqrt{1 + y'^2(a)}$ en el espacio $C_1[a, b]$.
4) $J[y(x)] = |y(a)|$ en el espacio $C[a, b]$.

51. Demostrar que la funcional $J^2[y(x)]$ es diferenciable si lo es $J[y(x)]$. Hallar la variación de $J^2[(y(x)]$.

52. Sea $F(x, y)$ una función continua de sus argumentos con derivadas parciales continuas hasta de segundo orden inclusive en el recinto $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < y < +\infty$. Demostrar que la funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y)\,dx$$

definida en el espacio $C[a, b]$ es diferenciable y que su variación es

$$\delta J = \int_a^b \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \partial y \, dx.$$

EJEMPLO 16. Consideramos la funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') \, dx$$

definida en el espacio $C_1[a, b]$ de funciones $y(x)$ que son continuas en el segmento $[a, b]$ y que tienen en él derivada continua de primer orden. La función $F(x, y, y')$ es continua respecto a todos sus argumentos y tiene derivadas parciales continuas hasta de segundo orden inclusive en el recinto

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < y' < +\infty.$$

Determinamos el incremento ΔJ de la funcional correspondiente al incremento δy del argumento siendo $\delta y \in C_1[a, b]$. Tenemos

$$\Delta J[y(x)] = \int_a^b [F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')] \, dx. \tag{4}$$

Según la fórmula de Taylor

$$F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y') = \\ = \frac{\partial F}{\partial y} \partial y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + R(x, y, y', \delta y, \delta y'), \tag{5}$$

donde $R(x, y, y', \delta y, \delta y')$ es el término complementario de la fórmula de Taylor. Introduciendo (5) en (4), obtenemos

$$\Delta J[y(x)] = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx + \int_a^b R(x, y, y', \delta y, \delta y') \, dx. \tag{6}$$

El primer sumando en el segundo miembro de (6) es lineal respecto a δy y $\delta y'$. Supongamos que las segundas derivadas parciales de la función $F(x, y, y')$ respecto a y e y' no pasan, en valor absoluto, de una constante $M > 0$ en un recinto acotado respecto a y e y'. Tendremos entonces

$$\int_a^b | R(x, y, y', \delta y, \delta y') | \, dx \leqslant 2M \int_a^b \| \delta y \|^2 \, dx = 2M(b-a) \| \delta y \|^2.$$

donde $\|\delta y\| = \max\limits_{a \leq x \leq b} (|\delta y|, \ |\delta y'|)$. Por consiguiente, el segundo sumando del segundo miembro de (6) es una infinitésima de segundo orden respecto a $\|\delta y\|$. Es decir, en virtud de la definición, la funcional $J[y(x)]$ es diferenciable en el espacio $C_1[a, b]$ y su variación es

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx \tag{7}$$

EJEMPLO 17. Hallar la variación de la funcional

$$J[y(x)] = \int_{-1}^{1} (y'e^y + xy^2)\, dx.$$

SOLUCIÓN. La función $F(x, y, y') = y'e^y + xy^2$ es, evidentemente, continua respecto a todas las derivables x, y e y' en conjunto y sus derivadas parciales de cualquier orden respecto a y e y' son acotados en cualquier recinto acotado de variación de y e y'. Por esto, la funcional considerada es diferenciable en $C_1[-1, 1]$ y, según la fórmula (7), su variación es

$$\delta J = \int_{-1}^{1} [(y'e^y + 2xy)\,\delta y + e^y \delta y']\, dx.$$

53. En la funcional

$$J[y(x)] = \int_1^e (y'y + xy'^2)\, dx$$

tomar $y = \ln x$ y $\delta y = \frac{k(x-1)}{e-1}$; comparar ΔJ y δJ para $k = 1$; 0,1 y 0,01.

54. En la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^1 (x^2 y'^2 - y^2)\, dx$$

tomar $y = x^2$ y $\delta y = kx^3$; comparar ΔJ y δJ para $k = 1$; 0,1 y 0,01.

55. En la funcional $J[y(x)] = \int\limits_0^\pi y'^2 \operatorname{sen} x\, dx$ tomar $y = \operatorname{sen} x$ y $\delta y = k \cos x$; comparar ΔJ y δJ para $k = -1$; 0,3 y 0,03.

56. Las derivadas parciales de segundo orden de la función $F(x, z_1, z_2, \ldots, z_{m+1})$ respecto a todos los argumentos son continuas en el recinto $a \leqslant x \leqslant b$ y $-\infty < z_k < +\infty$ $(k = 1, 2, \ldots, m+1)$. Demostrar que la funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y', \ldots, y^{(m)})\, dx$$

es diferenciable en el espacio $C_m[a, b]$ y que su variación es

$$\delta J = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y^{(m)}}\delta y^{(m)} \right] dx.$$

4°. Segunda definición de la variación de una funcional. Se llama *variación de la funcional* $J[y(x)]$ en el punto $y = y(x)$ el valor que toma en $\alpha = 0$ la derivada de la funcional $J[y(x) + \alpha\delta y]$ (considerada en tanto que función de α) respecto al parámetro α:

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y(x) + \alpha\delta y]\,|_{\alpha=0}.$$

Si existe la variación de la funcional en tanto que parte principal lineal de su incremento (o sea, si existe la variación en el sentido de la primera definición), también existe la variación en tanto que valor en $\alpha = 0$ de la derivada respecto al parámetro α y ambas variaciones coinciden.

EJEMPLO 18. Empleando la segunda definición, hallar la variación de la funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b y^2\, dx.$$

SOLUCIÓN. La variación de esta funcional en el sentido de la primera definición es

$$\delta J = 2\int_a^b y\,\delta y\, dx$$

(véase el ejemplo 15). Determinemos la variación de la funcional $J[y(x)]$ basándonos en la segunda definición. Tenemos

$$J[y(x) + \alpha\delta y] = \int_a^b (y + \alpha\delta y)^2\, dx.$$

Por eso,

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} J[y(x)+\alpha\delta y]=2\int_a^b (y+\alpha\delta y)\,\delta y\,dx$$

de modo que

$$\delta J=\frac{\partial}{\partial\alpha} J[y(x)+\alpha\delta y]|_{\alpha=0}=2\int_a^b y\delta y\,dx,$$

Las variaciones de la funcional en el sentido de la primera y de la segunda definiciones coinciden.

Para las funcionales que siguen hallar, en los espacios correspondientes, sus variaciones en el sentido de la segunda definición.

57. $J[y(x)]=\int_a^b (x+y)\,dx.$

58. $J[y(x)]=\int_a^b (y^2-y'^2)\,dx.$

59. $J[y(x)]=y^2(0)+\int_0^1 (xy+y'^2)\,dx.$

60. $J[y(x)]=\int_0^\pi y'\operatorname{sen} y\,dx.$

61. $J[y_1, y_2, \ldots, y_n]=\int_a^b F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots$

$\ldots, y_n')\,dx,$

donde F es una función continua de sus argumentos y sus derivadas parciales respecto a todos los argumentos son continuas en un recinto acotado G de variación de los mismos.

OBSERVACIÓN. La segunda definición de la variación de una funcional es en cierto sentido más amplia que la primera pues existen funcionales que tienen variación en el sentido de la segunda definición aun cuando no se pueda despejar la parte principal lineal en el incremento de las mismas. Para explicarlo recurriremos a las funciones;

en este caso nuestra afirmación equivale a que la existencia de las derivadas en cualquier dirección no basta para la existencia de la diferencial de la función.

Sea

$$f(x, y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\rho}{2}\operatorname{sen} 2\varphi, \quad (x^2+y^2\neq 0),$$

donde ρ y φ son las coordenadas polares del punto (x, y). Las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen en todo punto y son iguales a cero en el origen de coordenadas; sin embargo, no existe la diferencial df en el origen de coordenadas. Efectivamente, supongamos que df existe. En este caso el gradiente de la función f sería igual a cero en el origen de coordenadas y, por eso, la derivada $\frac{df(0, 0)}{dl}$ en cualquier dirección también sería igual a cero. Pero es fácil persuadirse de que

$$\frac{df(0, 0)}{dl}=\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\varphi$$

lo que, en general, es diferente de cero. Aguí φ es el ángulo entre el vector l y el eje Ox.

5°. Segunda variación de una funcional. Una funcional $J[x, y]$ dependiente de los elementos x e y (que pertenecen ambos a un espacio lineal) se denomina bilineal si es una funcional lineal en y para x fijo y una funcional lineal en x para y fijo. O sea, la funcional $J[x, y]$ es bilineal si

$$J[\alpha_1x_1+\alpha_2x_2, y]=\alpha_1J[x_1, y]+\alpha_2J[x_2, y],$$
$$J[x, \beta_1y_1+\beta_2y_2]=\beta_1J[x, y_1]+\beta_2J[x, y_2].$$

Poniendo en la funcional bilineal $y=x$ obtenemos la expresión $J[x, x]$ llamada funcional cuadrática.

Toda funcional bilineal definida en un espacio de dimensión finita se denomina *forma bilineal*.

Una funcional cuadrática $J[x, x]$ se denomina *definida positiva* si $J[x, x]>0$ cualquiera que sea el elemento no nulo x.

Por ejemplo,

1) la expresión

$$J[x, y]=\int_a^b A(t)\,x(t)\,y(t)\,dt,$$

donde $A(t)$ es una función continua fija, representa una funcional bilineal en el espacio $C[a, b]$ mientras que la expresión $\int_a^b A(t)\,x^2(t)\,dt$ representa, en este mismo espacio, una funcional cuadrática que resulta definida positiva si $A(t)>0$ para todo $t\in[a, b]$;

2) la expresión

$$J[x, x] = \int_a^b [A(t)\, x^2(t) + B(t)\, x(t)\, x'(t) + C(t)\, x'^2(t)]\, dt$$

es un ejemplo de una funcional cuadrática definida para todas las funciones pertenecientes al espacio $C_1[a, b]$;

3) la expresión

$$J[x, y] = \int_a^b \int_a^b K(s, t)\, x(s)\, y(t)\, ds\, dt,$$

donde $K(s,t)$ es una función fija de dos variables, representa una funcional bilineal en $C[a, b]$.

DEFINICIÓN. Sea $J[y(x)]$ una funcional definida en un espacio lineal normado. Diremos que la funcional $J[y(x)]$ tiene segunda variación si su incremento $\Delta J = J[y(x) + \delta y] - J[y(x)]$ puede ser representado en la forma

$$\Delta J = L_1[\delta y] + \frac{1}{2} L_2[\delta y] + \beta \|\delta y\|^2,$$

donde $L_1[\delta y]$ es una funcional lineal, $L_2[\delta y]$ es una funcional cuadrática y $\beta \to 0$ cuando $\|\delta y\| \to 0$.

La funcional cuadrática $L_2[\delta y]$ se denomina *segunda variación* (o segunda diferencial) de la funcional $J[y(x)]$ y se designa por $\delta^2 J$.

La segunda variación de una funcional se determina unívocamente (si es que existe).

EJEMPLO 19. Hallar la segunda variación de la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^1 (xy^2 + y'^3)\, dx$$

definida en el espacio $C_1[0, 1]$ de las funciones $y(x)$.

SOLUCIÓN. Tenemos

$$\begin{aligned}\Delta J &= J[y(x) + \delta y] - J[y(x)] = \\ &= \int_0^1 [x(y+\delta y)^2 + (y' + \delta y')^3 - xy^2 - y'^3]\, dx = \\ &= \int_0^1 [2xy\delta y + x(\delta y)^2 + 3y'^2 \delta y' + 3y'(\delta y')^2 + (\delta y')^3]\, dx = \\ &= \int_0^1 (2xy\delta y + 3y'^2 \delta y')\, dx + \int_0^1 [x(\delta y)^2 + 3y'(\delta y')^2]\, dx + \int_0^1 (\delta y')^3\, dx. \quad (8)\end{aligned}$$

Fijemos $y(x)$. El primer sumando del último miembro de (8) será entonces una funcional lineal respecto a δy; el segundo sumando de este miembro será una funcional cuadrática; finalmente, el último, tercer, sumando de este miembro puede ser estimado así

$$\left| \int_0^1 (\delta y')^3 \, dx \right| \leqslant (\text{máx} \, |\delta y'|)^2 \int_0^1 |\delta y'| \, dx \leqslant \left(\int_0^1 |\delta y'| \, dx \right) \| \delta y \|^2$$

(la norma se toma en el sentido del espacio $C_1[0, 1]$), o sea, podrá ser representado en la forma $\beta \| \delta y \|^2$, donde $\beta \to 0$ cuando $\| \delta y \| \to 0$. Por definición, para nuestra funcional existe la segunda variación $\delta^2 J$ igual a

$$\delta^2 J = 2 \int_0^1 [x (\delta y)^2 + 3y' (\delta y')^2] \, dx.$$

62. Hallar la segunda variación de una funcional cuadrática.

63. Hallar la segunda variación de la funcional $e^{F(y)}$ siendo $F(y)$ una función dos veces diferenciable.

64. Demostrar que las funcionales de tipo

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') \, dx$$

definidas en el espacio $C_1[a, b]$ son dos veces diferenciables si la función integrando F tiene derivadas continuas hasta de tercer orden inclusive. Hallar la fórmula para la segunda variación.

Consideremos la función $\Phi(\alpha) = J[y(x) + \alpha \delta y]$. La segunda variación $\delta^2 J$ de la funcional $J[y(x)]$ se define también mediante el valor de la segunda derivada de la función $\Phi(\alpha)$ en el punto $\alpha = 0$:

$$\delta^2 J = \left. \frac{d^2 \Phi(\alpha)}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0}.$$

Para las funcionales de tipo integral (que predominarán en nuestras consideraciones) ambas definiciones coinciden.

Hallar la segunda variación.

65. $J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y', \ldots, y^{(m)}) \, dx.$

66. $J[z(x, y)] = \iint\limits_{G} F(x, y, z, z_x, z_y)\,dx\,dy.$

67. $J[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int\limits_a^b F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots$
$\ldots, y_n')\,dx.$

6°. Extremo de una funcional. Condición necesaria de extremo. Diremos que la funcional $J[y(x)]$ alcanza su *máximo* en la curva $y = y_0(x)$ si los valores que toma la funcional $J[y(x)]$ en cualesquiera curvas próximas a $y = y_0(x)$ no son mayores que $J[y_0(x)]$, o sea, si

$$\Delta J = J[y(x)] - J[y_0(x)] \leqslant 0.$$

Si $\Delta J \leqslant 0$ y $\Delta J = 0$ sólo para $y(x) = y_0(x)$, diremos que se alcanza *máximo estricto* en la curva $y = y_0(x)$.

Análogamente se define la curva $y = y_0(x)$ en la que se alcanza *un mínimo*. En este caso se tiene $\Delta J \geqslant 0$ para todas las curvas próximas a la curva $y = y_0(x)$.

EJEMPLO 20. Demostrar que la funcional

$$J[y(x)] = \int\limits_0^1 (x^2 + y^2)\,dx$$

alcanza mínimo estricto en la curva $y(x) \equiv 0$.

SOLUCIÓN. Cualquiera que sea la función $y(x)$ continua en $[0, 1]$, tenemos

$$\Delta J = J[y(x)] - J[0] = \int\limits_0^1 (x^2 + y^2)\,dx - \int\limits_0^1 x^2\,dx = \int\limits_0^1 y^2\,dx \geqslant 0;$$

además, el signo de igualdad se da sólo para $y(x) \equiv 0$.

EXTREMOS FUERTE Y DÉBIL. Diremos que la funcional $J[y(x)]$ alcanza su *máximo relativo fuerte* en la curva $y = y_0(x)$ si

$$J[y(x)] \leqslant J[y_0(x)]$$

para todas las curvas admisibles $y = y(x)$ pertenecientes a una ε-vecindad de orden nulo de la curva $y = y_0(x)$. Análogamente se define el *mínimo relativo fuerte* de una funcional.

Diremos que la funcional $J[y(x)]$ alcanza su *máximo relativo débil* en la curva $y = y_0(x)$ si

$$J[y(x)] \leqslant J[y_0(x)]$$

para todas las curvas admisibles $y = y(x)$ pertenecientes a una ε-vecindad de primer orden de la curva $y = y_0(x)$. Análogamente se define *el mínimo relativo débil de una funcional.*

Los máximos y mínimos (fuertes y débiles) de la funcional $J[y(x)]$ se denominan *extremos relativos*.

Todo extremo fuerte es al mismo tiempo extremo débil pero no viceversa.

El extremo de la funcional $J[y(x)]$ referente a la totalidad de las funciones en las que está definida la funcional se denomina *extremo absoluto*.

Todo extremo absoluto es al mismo tiempo extremo relativo fuerte y débil pero no todo extremo relativo será extremo absoluto.

EJEMPLO 21. Consideremos la funcional

$$J[y(x)]=\int_0^{\pi} y^2(1-y'^2)\,dx$$

en el espacio de funciones $y(x)\in C_1[0,\pi]$ que satisfacen la condición $y(0)=y(\pi)=0$. En el segmento $[0,\pi]$ del eje Ox hay mínimo débil de J. En efecto, tenemos $J=0$ si $y=0$; por otra parte, para las curvas pertenecientes a una ε-vecindad de primer orden de este segmento, donde ε es cualquier número positivo menor que 1, se tiene $|y'|<1$ de modo que el integrando es positivo para $y\neq 0$ y, por consiguiente, la funcional se anula sólo si $y=0$. Es decir, la funcional alcanza mínimo débil en la curva $y=0$.

Mínimo fuerte no hay. Basta tomar

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{sen} nx$$

En este caso

$$J[y(x)]=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2 nx\,(1-n\cos^2 nx)\,dx=$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2 nx\,dx-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2 2nx\,dx=\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8},$$

o sea, $J<0$ en estas curvas si n es suficientemente grande. Por otra parte, siendo n suficientemente grande, todas estas curvas se encuentran en una vecindad tan pequeña como se quiera de orden nulo de la curva $y=0$. Por consiguiente, no se alcanza mínimo fuerte en $y=0$.

EJEMPLO 22. (Weierstrass). Consideremos la funcional

$$J[y(x)]=\int_{-1}^{1} x^2y'^2\,dx;\qquad y(-1)=-1,\qquad y(1)=1.$$

En el segmento $[-1,1]$ tenemos $J[y(x)]\geqslant 0$ y, además, $J[y(x)]=0$ sólo si $y'(x)=0$, o sea, si $y(x)=C=\text{const}$. La función $y(x)=C$ pertenece a la clase $C_1[-1,1]$ de las funciones que tienen primera derivada continua en el segmento $[-1,1]$, pero no satisface las condiciones de frontera dadas. Por consiguiente, $J[y(x)]>0$ para todas las funciones $y(x)\in C_1[-1,1]$ que satisfacen las condiciones $y(-1)=-1$

e $y(1) = 1$. En otras palabras, la funcional tiene cota inferior pero ésta no se alcanza en las curvas $y(x) \in C_1[-1, 1]$. Efectivamente, consideremos la familia monoparamétrica de curvas

$$y_\alpha(x) = \frac{\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\alpha}}{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\pi}}, \quad \alpha > 0.$$

Todas ellas satisfacen las condiciones de frontera: $y_\alpha(-1) = -1$ e $y_\alpha(1) = 1$. Pasando al límite para $\alpha \to 0$, obtenemos la función

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} -1, & \text{si} \quad -1 \leqslant x < 0, \\ 0, & \text{si} \quad x = 0, \\ +1, & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

es decir, $\tilde{y}(x) = \operatorname{sg} x$ (fig. 3). Esta función pertenece a la clase de funciones diferenciables a trozos en el segmento $[-1, 1]$.

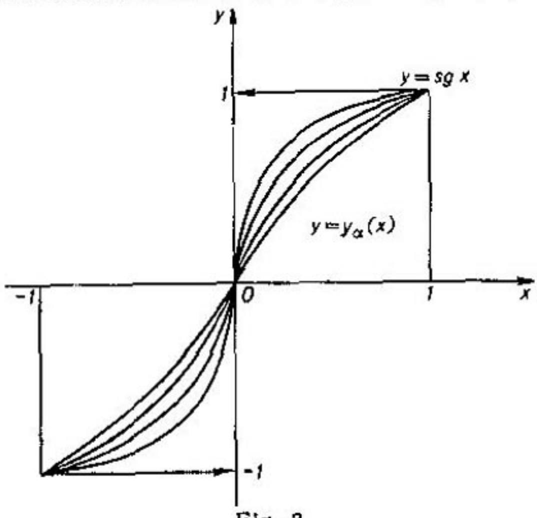


Fig. 3

Tenemos

$$J[y_\alpha(x)] = \int_{-1}^{1} \frac{\alpha x^2\, dx}{(\alpha^2 + x^2)\operatorname{arctg}^2 \dfrac{1}{\alpha}} =$$

$$= \frac{2\alpha}{\operatorname{arctg}^2 \dfrac{1}{\alpha}} \int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{2\alpha}{\operatorname{arctg}^2 \dfrac{1}{\alpha}} \left(1 - \alpha \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha}\right).$$

Queda claro que $J[y_\alpha(x)] \to 0$ cuando $\alpha \to 0$. En la función límite $\tilde{y}(x)$, que satisface las condiciones de frontera $\tilde{y}(-1) = -1$ e $\tilde{y}(1) = 1$, el valor de la funcional $J[y(x)]$ es igual a cero: $J[\tilde{y}(x)] = 0$.

Por consiguiente, la funcional $J[y(x)]$ alcanza su valor mínimo en la curva $\tilde{y}(x) = \operatorname{sg} x$ que pertenece a la clase de funciones diferenciables a trozos en el segmento $[-1, 1]$ pero no pertenece a la clase $C_1[-1, 1]$.

TEOREMA (condición necesaria de extremo de la funcional). *Si la funcional diferenciable $J[y(x)]$ alcanza su valor extremo en la curva $y = y_0(x)$, donde $y_0(x)$ es un punto interior del campo de definición de la funcional, entonces en $y = y_0(x)$ se tiene*

$$\delta J[y_0(x)] = 0. \tag{9}$$

Las funciones para las cuales $\delta J = 0$ se denominarán *funciones estacionarias.*

Hallar las ecuaciones funcionales para las funciones estacionarias de las funcionales que siguen, empleando la condición necesaria de extremo (9) y los lemas fundamentales del Cálculo variacional.

68. $$J[\varphi(s)] = \int_a^b \int_a^b K(s, t)\, \varphi(s)\, \varphi(t)\, ds\, dt + \int_a^b \varphi^2(s)\, ds - 2\int_a^b \varphi(s)\, f(s)\, ds,$$

donde $K(s, t)$ es una función continua simétrica de s y t en el recinto $D\begin{Bmatrix} a \leqslant s \leqslant b \\ a \leqslant t \leqslant b \end{Bmatrix}$, $f(s)$ es una función continua en $[a, b]$ y $\varphi(s)$ es el argumento funcional continuo incógnito.

69. $$J[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [p(x)\, \varphi'^2(x) + 2\varphi(x+1) \times \varphi(x-1) - \varphi^2(x) - 2\varphi(x)\, f(x)]\, dx,$$

donde el argumento funcional $\varphi(x)$, es continuo y tiene derivadas continuas a trozos en todo el intervalo $-\infty < x < +\infty$, $p(x)$ tiene derivada continua y $f(x)$ es continua.

70. $$J[\varphi(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [p(x)\, \varphi'^2(x) + q(x)\, \varphi^2(x) - 2\varphi(x)\, f(x)]\, dx,$$

$$\varphi(x_0) = \varphi_0, \quad \varphi(x_1) = \varphi_1,$$

donde $p(x)$ tiene derivada continua, $q(x)$ y $f(x)$ son continuas y el argumento funcional $\varphi(x)$ tiene dos derivadas continuas.

§ 4 Problema elemental del Cálculo variacional. Ecuación de Euler

Supongamos que la función $F(x, y, y')$ tiene derivadas parciales continuas hasta de segundo orden inclusive respecto a todos sus argumentos.

El problema elemental del Cálculo variacional es el siguiente: entre todas las funciones $y(x)$ que tienen derivada continua y que satisfacen las condiciones de frontera

$$y(a) = A \quad \text{e} \quad y(b) = B \tag{1}$$

hallar la función que ofrece extremo débil a la funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')\,dx. \tag{2}$$

En otras palabras, el problema elemental del Cálculo variacional consiste en hallar el extremo débil de la funcional de tipo (2) en el conjunto de todas las curvas suaves que unen dos puntos fijos $P_1(a, A)$ y $P_2(b, B)$.

TEOREMA 1. *Condición necesaria*[1]) *para que la funcional* (2), *definida en el conjunto de todas las funciones $y = y(x)$ que tienen derivada continua y que satisfacen las condiciones de frontera* (1), *alcance su valor extremo en la función $y(x)$ es que esta función verifique la ecuación de Euler*

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \tag{3}$$

Las curvas integrales de la ecuación de Euler se denominan *extremales* (o curvas de Lagrange).

En forma desarrollada la ecuación de Euler da

$$y''(x) F_{y'y'} + y'(x) F_{yy'} + F_{xy'} - F_y = 0 \qquad (F_{y'y'} \neq 0)$$

y representa una ecuación diferencial de segundo orden de modo que su solución general comprenderá dos constantes arbitrarias cuyos valores se determinan, hablando en términos generales, de las condiciones de frontera (1).

La funcional (2) puede alcanzar extremo sólo en las extremales que satisfacen las condiciones (1).

---

[1]) Esta condición es necesaria para el extremo débil. Como quiera que todo extremo fuerte es al mismo tiempo un extremo débil, cualquier condición necesaria para el extremo débil también será necesaria para el extremo fuerte.

El problema de contorno

$$\left.\begin{aligned} F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \\ y(a) = A, \quad y(b) = B \end{aligned}\right\}$$

no siempre tiene solución y si la solución existe, puede no ser única.

EJEMPLO 1. ¿En qué curvas puede alcanzar su extremo la funcional

$$J[y(x)] = \int_1^2 (y'^2 - 2xy)\,dx; \quad y(1) = 0, \quad y(2) = -1?$$

SOLUCIÓN. Aquí tenemos $F(x, y, y') = y'^2 - 2xy$ de modo que la ecuación de Euler da $y'' + x = 0$. Su solución general es

$$y = -\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

Utilizando las condiciones de frontera, obtenemos para C_1 y C_2 el seguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 &= \frac{1}{6}, \\ 2C_1 + C_2 &= \frac{2}{6}. \end{aligned}\right\}$$

De aquí resulta $C_1 = \frac{1}{6}$ y $C_2 = 0$. Por consiguiente, el extremo puede alcanzarse sólo en la curva

$$y = \frac{x}{6}(1 - x^2).$$

EJEMPLO 2. Hallar las extremales de la funcional

$$J[y(x)] = \int_1^3 (3x - y)\,y\,dx$$

que satisfagan las condiciones de frontera $y(1) = 1$ e $y(3) = 4\frac{1}{2}$.

SOLUCIÓN. La ecuación de Euler es $3x - 2y = 0$, de donde $y = \frac{3}{2}x$.

La extremal $y = \frac{3}{2}x$ no satisface la condición $y(1) = 1$ y, por eso, nuestro problema variacional no tiene solución.

EJEMPLO 3. Hallar las extremales de la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2)\,dx$$

que satisfagan las condiciones de frontera $y(0) = 1$ e $y(2\pi) = 1$.

SOLUCIÓN. La ecuación de Euler tiene la forma $y'' + y = 0$; su solución general es

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x.$$

Utilizando las condiciones de frontera, encontramos

$$y = \cos x + C \operatorname{sen} x,$$

donde C es una constante arbitraria. Es decir, el problema variacional considerado tiene un conjunto infinito de soluciones.

Hallar las extremales de las funcionales siguientes.

71. $J[y(x)] = \int\limits_{-1}^{0} (12xy - y'^2)\, dx; \quad y(-1) = 1, \quad y(0) = 0.$

72. $J[y(x)] = \int\limits_{1}^{2} (y'^2 + 2yy' + y^2)\, dx; \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 0.$

73. $J[y(x)] = \int\limits_{0}^{1} \sqrt{y(1 + y'^2)}\, dx; \quad y(0) = y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

74. $J[y(x)] = \int\limits_{0}^{1} yy'^2\, dx; \quad y(0) = 1, \quad y(1) = \sqrt[3]{4}.$

75. $J[y(x)] = \int\limits_{0}^{\pi} (4y \cos x + y'^2 - y^2)\, dx;$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

76. $J[y(x) = \int\limits_{0}^{1} (y'^2 - y^2 - y)\, e^{2x}\, dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = e^{-1}.$

77. $J[y(x)] = \int\limits_{-1}^{1} (y'^2 - 2xy)\, dx; \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 1.$

78. $J[y(x)] = \int\limits_{-1}^{0} (y'^2 - 2xy)\, dx; \quad y(-1) = 0, \quad y(0) = 2.$

79. $J[y(x)] = \int\limits_{1}^{e} (xy'^2 + yy')\, dx; \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 1.$

La ecuación de Euler (3) para la funcional (2) es una ecuación diferencial de segundo orden y, por eso, la solución $y = y(x)$ de la ecuación de Euler debe tener segunda derivada $y''(x)$. Sin embargo, se dan casos en que la función que ofrece el extremo a la funcional $J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$ no tiene segunda derivada.

EJEMPLO 4. La funcional

$$J[y(x)] = \int_{-1}^{1} y^2 (1 - y')^2\,dx$$

con las condiciones de frontera

$$y(-1) = 0 \quad \text{e} \quad y(1) = 1$$

alcanza su valor mínimo, igual a cero, en la función

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0, \\ x & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

Aun cuando la función $v(x)$ no tiene segunda derivada, satisface la ecuación de Euler correspondiente.

Efectivamente, tenemos $F(x, y, y') = y^2(1 - y')^2$ y, poniendo $y = v(x)$, obtenemos la ecuación de Euler

$$2v(1 - v')^2 + \frac{d}{dx}[2v^2(1 - v')] = 0. \tag{4}$$

Pero, según la definición de la función $v(x)$, en $[-1, 1]$ tenemos $F_{v'} = -2v^2(1 - v') \equiv 0$ y, por consiguiente, también $\frac{d}{dx} F_{v'} = 0$; o sea, a pesar de que la ecuación de Euler (4) es formalmente de segundo orden y a pesar de que $v''(x)$ no existe, la ecuación de Euler se convierte en identidad al sustituir en ella $v(x)$.

TEOREMA 2. *Sea $y = y(x)$ solución de la ecuación de Euler*

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Si la función $F(x, y, y')$ tiene derivadas parciales continuas hasta de segundo orden inclusive, entonces la función $y = y(x)$ tiene segunda derivada continua en todos los puntos (x, y) para los cuales

$$F_{y'y'}[x, y(x), y'(x)] \neq 0.$$

COROLARIO. *La extremal $y = y(x)$ puede tener puntos angulares sólo en aquellos puntos en los que $F_{y'y'} = 0$.*

Así, en el ejemplo 4 tenemos que $F_{y'y'} = 2y^2$ se anula en los puntos del eje Ox; la extremal tiene punto angular en $x = 0$.

TEOREMA 3. (Bernstein). *Supongamos que en la ecuación*

$$y'' = f(x, y, y') \tag{5}$$

las funciones f, f_y y $f_{y'}$, son continuas en todo punto finito (x, y) para cualquier valor finito de y' y supongamos que existe una constante $k > 0$ y unas funciones

$$\alpha = \alpha(x, y) \geqslant 0 \quad \text{y} \quad \beta = \beta(x, y) \geqslant 0,$$

acotadas en cualquier porción finita del plano, tales que

$$f_y(x, y, y') > k \quad \text{y} \quad |f(x, y, y')| \leqslant \alpha y'^2 + \beta. \tag{6}$$

Entonces, por dos cualesquiera puntos del plano (a, A) y (b, B) de abscisas distintas ($a \neq b$) pasa una curva integral $y = \varphi(x)$ de la ecuación (6), y sólo una.

EJEMPLO 5. Demostrar que por dos cualesquiera puntos del plano de abscisas distintas pasa una extremal única de la funcional

$$J[y(x)] = \int e^{-2y^2}(y'^2 - 1)\,dx.$$

SOLUCIÓN. La ecuación de Euler para la funcional considerada es

$$y'' = 2y(1 + y'^2)$$

de modo que se puede aplicar el teorema 3. En efecto, tenemos en este caso

$$f(x, y, y') = 2y(1 + y'^2) \quad \text{y} \quad f_y = 2(1 + y'^2) \geqslant 2 = k.$$

Además,

$$|f(x, y, y')| = |2y(1 + y'^2)| \leqslant 2|y|y'^2 + 2|y|,$$

o sea, $\alpha = \beta = 2|y| \geqslant 0$.

EJEMPLO 6. Demostrar que no hay extremal de la funcional

$$I[y(x)] = \int \left(y^2 + \sqrt{1 + y'^2}\right) dx$$

que pase por dos cualesquiera puntos del plano de abscisas distintas.

SOLUCIÓN. La ecuación de Euler tiene la forma

$$y'' = 2y(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} \tag{7}$$

y el teorema 3 no se puede aplicar ya que no se cumple la segunda de las condiciones (6) (debido a que $f(x, y, y')$ crece, respecto a y', más rápido que la segunda potencia de y'). Las condiciones del teorema 3 son de carácter suficiente. O sea, si estas condiciones no se cumplen, de ello no se puede deducir que no hay extremal que pase por dos puntos cualesquiera de abscisas diferentes. Demostremos que por los puntos $A(0, 0)$ y $B\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ no pasa ninguna extremal de la funcional considerada.

Tomando en la ecuación (7)

$$y' = p \quad \text{e} \quad y'' = p\frac{dp}{dy},$$

obtenemos

$$p\,\frac{dp}{dy}=2y\,(1+p)^{2^{\frac{3}{2}}},\quad \text{o sea,}\quad \frac{p\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=2y\,dy.$$

Integrando, encontramos

$$-\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}=y^2-C,\quad \text{o sea,}$$

$$(C-y^2)\sqrt{1+y'^2}=1$$

de modo que

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-(C-y^2)^2}}{C-y^2},$$

donde C es una constante real. Separando las variables en la última ecuación e integrando del punto A al punto B, obtenemos

$$\frac{1}{2}=\int_0^2 \frac{C-y^2}{\sqrt{1-(C-y^2)^2}}\,dy. \tag{8}$$

Cualquiera que sea el número real C, el denominador del integrando de (8) será complejo en cierto intervalo $(\alpha,\ \beta)\subset(0,\ 2)$ de variación de la variable y. Por consiguiente, la igualdad (8) es imposible. Esto quiere decir que no se puede trazar extremal alguna por los puntos $A\ (0,\ 0)$ y $B\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$.

80. Demostrar que por dos cualesquiera puntos del plano pasa una y sólo una extremal de la funcional

$$J\,[y\,(x)]=\int \sqrt{1+y^2+y'^2}\,dx.$$

EJEMPLO 7. Demostrar que toda ecuación

$$y''\,(x)=f\,(x,\ y,\ y') \tag{9}$$

es ecuación de Euler para cierta funcional

$$J\,[y\,(x)]=\int F\,(x,\ y,\ y')\,dx.$$

1) ¿Cómo se determina la función $F\,(x,\ y,\ y')$ a partir de la función $f\,(x,\ y,\ y')$?

2) Hallar todas las funcionales cuyas extremales son las rectas

$$y=C_1x+C_2.$$

SOLUCIÓN. Busquemos la funcional cuya ecuación de Euler

$$F_y-E_{y'x}-F_{y'y}y'-F_{y'y'}y''=0$$

coincida con la ecuación (9). Es decir, debe cumplirse la identidad en x, y e y'

$$F_y - F_{y'x} - F_{y'y}y' - F_{y'y'}f(x, y, y') \equiv 0.$$

Derivando respecto a y', obtenemos

$$F_{y'y'x} + F_{y'y'y}y' + F_{y'y'y'}f + F_{y'y'}f_{y'} = 0.$$

Tomando $u = F_{y'y'}$, obtenemos para la función u una ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y' \frac{\partial u}{\partial y} + f \frac{\partial u}{\partial y'} + f_{y'} \; u = 0 \tag{10}$$

Por consiguiente, la búsqueda de la funcional, o sea, de la función $F(x, y, y')$, se reduce a la integración de la ecuación lineal en derivadas parciales (10) y a la cuadratura sucesiva.

Consideremos la segunda cuestión. En este caso la ecuación de Euler debe ser $y'' = 0$ y para la función u se obtiene, de acuerdo con (10), la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y' \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{11}$$

Integremos esta ecuación.

La ecuación de las características tiene la forma

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y'} = \frac{dy'}{0}.$$

Integrando este sistema, encontramos

$$y' = C_1 \quad \text{e} \quad y = C_1 x + C_2,$$

de donde $C_2 = y - xy'$. Por eso, la solución general de la ecuación (11) es

$$u(x, y, y') = \Phi(y', y - xy'),$$

donde Φ es una función arbitraria diferenciable de sus argumentos. De aquí

$$F(x, y, z) = \alpha(x, y) + z\beta(x, y) + \int_0^z (z - t)\,\Phi(t, y - tx)\,dt,$$

donde $\alpha(x, y)$ y $\beta(x, y)$ son funciones arbitrarias de sus argumentos que cumplen la relación

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x}.$$

Se puede ver de la solución que existe una cantidad infinita de problemas variacionales que tienen la ecuación (9) como ecuación de Euler.

CASOS ELEMENTALES DE INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN DE EULER.

1°. F no depende de y', o sea, $F = F(x, y)$.
En este caso la ecuación de Euler tiene la forma

$$F_y(x, y) = 0. \tag{12}$$

La solución de esta ecuación finita (no diferencial) no contiene elementos arbitrarios y, por eso, no satisface, hablando en términos generales, las condiciones de frontera $y(a) = A$ e $y(b) = B$.

Sólo en casos excepcionales, cuando la curva (12) pase por los puntos de frontera (a, A) y (b, B), existirá una curva en la que podrá alcanzarse el extremo.

EJEMPLO 8. Hallar las extremales de la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(2x-y)\,dx; \quad y(0)=0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

SOLUCIÓN. La ecuación de Euler tiene la forma $2x - 2y = 0$, o sea, $y = x$. Puesto que las condiciones de frontera se satisfacen, la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(2x - y)\,dx$ puede alcanzar su extremo en la recta $y = x$. Para otras condiciones de frontera, por ejemplo, $y(0) = 0$ e $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, la extremal $y = x$ no pasará por los puntos frontera $(0, 0)$ y $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ de modo que el problema variacional con estas condiciones de frontera no tendrá solución.

2°. F depende de y' en forma lineal, o sea,

$$F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)\,y'.$$

En este caso la ecuación de Euler tiene la forma

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

Igual que en el caso 1°, la ecuación obtenida es finita y no diferencial. En general, la curva determinada por la ecuación $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$ no satisface las condiciones de frontera y, por consiguiente, el problema variacional no tiene, como regla, solución en la clase de funciones continuas. Por otra parte, si en un recinto D del plano xOy se tiene $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$, la expresión $F(x, y, y') = $ $= M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ es una diferencial total exacta y la funcional

$$J[y(x)]=\int_a^b F(x, y, y')\,dx=\int_{(a, A)}^{(b, B)}(M\,dx+N\,dy)$$

no depende del camino seguido en la integración: el valor de la funcional $J[y(x)]$ es el mismo en todas las curvas admisibles. El problema variacional carece de sentido.

EJEMPLO 9. Analizar el extremo de la funcional

$$J[y(x)]=\int_a^b (y^2+2xyy')\,dx; \quad y(a)=A, \quad y(b)=B.$$

SOLUCIÓN. Aquí F depende de y' en forma lineal. Tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2y, \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2y \quad \text{y} \quad \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\equiv 0,$$

o sea, el integrando $(y^2+2xyy')\,dx$ es una diferencial exacta. Por consiguiente, la integral no depende del camino seguido en la integración:

$$J[y(x)]=\int_a^b (y^2\,dx+2xy\,dy)=\int_{(a, A)}^{(b, B)} d(xy^2)=xy^2\Big|_{x=a}^{x=b}=bB^2-aA^2$$

para cualquier curva de integración $y(x)$ que pase por los puntos (a, A) y (b, B). El problema variacional carece de sentido.

3°. F depende sólo de y', o sea, $F=F(y')$.

La ecuación de Euler tiene la forma

$$F_{y'y'}y''=0.$$

En este caso las extremales son todas las rectas posibles

$$y=C_1x+C_2,$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

EJEMPLO 10 Hallar las extremales de la funcional

$$J[y(x)]=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx; \quad y(a)=A, \quad y(b)=B.$$

Esta funcional determina la longitud de la curva que une los puntos (a, A) y (b, B). Desde el punto de vista geométrico, el problema consiste en hallar la curva de longitud mínima que une dos puntos fijos.

SOLUCIÓN. La ecuación de Euler tiene la forma $y''=0$. Su solución general es

$$y=C_1x+C_2.$$

La extremal que satisface las condiciones de frontera $y(a)=A$ e $y(b)=B$ es, obviamente, la recta que pasa por los puntos (a, A) y (b, B):

$$y=\frac{B-A}{b-a}(x-a)+A.$$

4°. F no depende de y, o sea, $F=F(x, y')$.

En este caso la ecuación de Euler es $\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y')=0$, de donde resulta

$$F_{y'}(x, y')=C_1 \qquad (13)$$

siendo C_1 una constante arbitraria.

La ecuación (13) es una ecuación diferencial de primer orden. Integrándola, encontramos las extremales del problema.

EJEMPLO 11. Entre las curvas que unen los puntos $A(1, 3)$ y $B(2, 5)$ hallar la curva en la que puede alcanzar su extremo la funcional

$$J[y(x)]=\int_1^2 y'(1+x^2y')\,dx.$$

SOLUCIÓN. Puesto que F no depende de y, la ecuación de Euler tiene la forma $\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y')=0$, o sea, $\frac{d}{dx}(1+2x^2y')=0$ de donde

$$1+2x^2y'=C_1.$$

Entonces, $y'=\frac{C_1-1}{2x^2}$ de modo que $y=\frac{C_1^*}{x}+C_2$, donde $C_1^*=\frac{1-C_1}{2}$. Por consiguiente, las extremales representan una familia de hipérbolas. Determinemos la extremal que pasa por los puntos fijos. Para hallar los valores de las constantes C_1^* y C_2 formamos el sistema

$$\left.\begin{aligned} 3&=C_1^*+C_2,\\ 5&=\frac{C_1^*}{2}+C_2, \end{aligned}\right\}$$

de donde resulta $C_1^*=-4$ y $C_2=7$. La extremal buscada es $y=7-\frac{4}{x}$.

5°. F no depende explícitamente de x, o sea, $F=F(y, y')$. En este caso la ecuación de Euler tiene la forma

$$F_y-F_{yy'}y'-F_{y'y'}y''=0.$$

Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por y', obtendremos en el primer miembro la derivada exacta $\frac{d}{dx}(F-y'F_{y'})$, o sea, la ecuación será $\frac{d}{dx}(F-y'F_{y'})=0$, de donde

$$F-y'F_{y'}=C_1 \tag{14}$$

siendo C_1 una constante arbitraria. Esta ecuación puede ser integrada resolviéndola respecto a y' y separando las variables o introduciendo un parámetro.

EJEMPLO 12 (cuerpo de resistencia mínima en un fluido). Determinar la forma del cuerpo sólido que, al moverse en un fluido de gas,

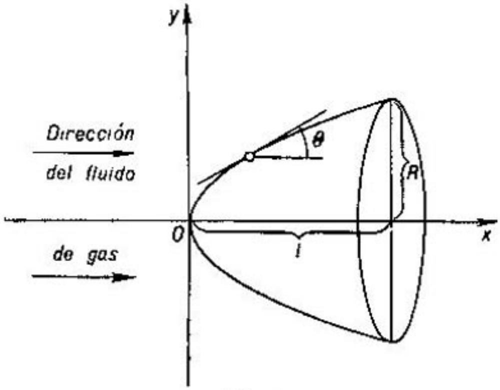


Fig. 4

encuentra resistencia mínima. Para simplificar consideraremos el cuerpo de revolución (fig. 4).

SOLUCIÓN. Suponiendo que la densidad del gas es suficientemente pequeña y que las moléculas, al chocar con la superficie del cuerpo, se reflejan de forma especular, obtenemos para la componente normal de la presión

$$p = 2\rho v^2 \operatorname{sen}^2 \theta,$$

donde ρ es la densidad del gas, v es la velocidad del gas respecto al cuerpo y θ es el ángulo entre la velocidad y su componente tangencial. La presión es perpendicular a la superficie de modo que la componente según el eje Ox de la fuerza que actúa sobre un anillo de anchura $(1+y'^2)$ 1/2 dx y de radio $y(x)$ se puede representar en la forma

$$dF=2\rho v^2 \operatorname{sen}^2\theta\,[2\pi y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}]\operatorname{sen}\theta\,dx.$$

La fuerza resultante que actúa en la dirección positiva del eje Ox es igual a

$$F=\int_0^l 4\pi\rho v^2 \operatorname{sen}^3\theta y\,(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

Supongamos, para simplificar el problema, que

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}\approx y'.$$

Entonces, la fuerza de resistencia será igual a

$$F=4\pi\rho v^2\int_0^l y'^3 y\,dx. \tag{15}$$

El problema consiste en hallar la función $y\ (x)$ en la que F alcanza su valor menor posible siendo

$$y\ (0)=0 \quad \text{e} \quad y\ (l)=R. \tag{16}$$

La ecuación de Euler para la funcional (15) tiene la forma

$$y'^3-3\frac{d}{dx}(yy'^2)=0. \tag{17}$$

La solución particular $y=0$ de esta ecuación debe ser rechazada en virtud de las condiciones de frontera (16). La ecuación (17) puede ser representada así:

$$y'^3+3yy'y''=0. \tag{18}$$

Multiplicando por y' ambos miembros de (18), vemos que el primer miembro es $(y'^3y)'$. Integrando, encontramos

$$y'^3y=\tilde{C}_1^3,$$

de donde resulta

$$y'=\frac{\widetilde{C}_1}{\sqrt[3]{y}} \quad \text{e} \quad y=(C_1x+C_2)^{\frac{3}{4}}.$$

Utilizando las condiciones de frontera (16), obtenemos

$$C_1=\frac{R^{\frac{4}{3}}}{l} \quad \text{y} \quad C_2=0$$

de modo que

$$y=R\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{3}{4}},$$

o sea, el contorno con extremos fijos que corresponde a la resistencia mínima del cuerpo es una parábola de grado $\frac{3}{4}$.

EJEMPLO 13. Hallar la extremal de la funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx$$

que pasa por dos puntos fijos (a, A) y (b, B) pertenecientes al semiplano superior.

SOLUCIÓN. Puesto que la función integrando no contiene explícitamente x, la ecuación de Euler, según (14), da

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - y'\,\frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}} = C_1.$$

Después de simplificar, encontramos $y\sqrt{1+y'^2} = \widetilde{C}_1$, donde $\widetilde{C}_1 = \frac{1}{C_1}$. Integrando la última ecuación, encontramos $(x+C_2)^2 + y^2 = \widetilde{C}_1^2$, o sea, una familia de circunferencias con centros en el eje Ox. La extremal pedida será la que pase por los puntos fijos. El problema tiene solución única ya que por dos puntos cualesquiera del semiplano superior pasa una y sólo una semicircunferencia con centro en el eje Ox.

OBSERVACIÓN. Según el principio de Fermat, el camino que recorre un rayo de luz al propagarse con la velocidad $v(x, y)$ en un medio bidimensional no homogéneo constituye una extremal de la funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x, y)}\,dx.$$

Como hemos visto en el ejemplo anterior, si la velocidad de la luz v es proporcional a y, los rayos de luz representan arcos de circunferencias con centros en el eje Ox.

Sea q una curva. Denominaremos *longitud óptica de la curva* q el tiempo $T(q)$ que se precisa para recorrerla al moverse según esta curva con la velocidad de la luz $v(x, y)$.

Supongamos que el semiplano superior $y > 0$ es un medio óptico en el que la velocidad de la luz en todo punto es igual a la ordenada del mismo: $v = y$. Como hemos visto, los rayos de luz en este medio serán semicircunferencias con centros en el eje Ox. Se puede demostrar que, si uno de los extremos del arco AD de la semicircunferencia q se halla en el eje Ox, su longitud óptica es infinita (fig. 5). Por eso, diremos que los puntos del eje Ox *están en el infinito*. Consideremos que las semicircunferencias con centros en el eje Ox son *rectas*, que las longitudes ópticas de los arcos de estas semicircunferencias son *las longitudes* de dichas rectas y que *los ángulos* entre las tangentes a las semicircunferencias en el punto de intersección de las mismas son los ángulos entre dichas rectas. Obtenemos una Geometría plana en la que se conservan muchas proposiciones de la Geometría habitual. Por ejemplo, por dos puntos fijos se puede trazar una *recta* y sólo una (ya que

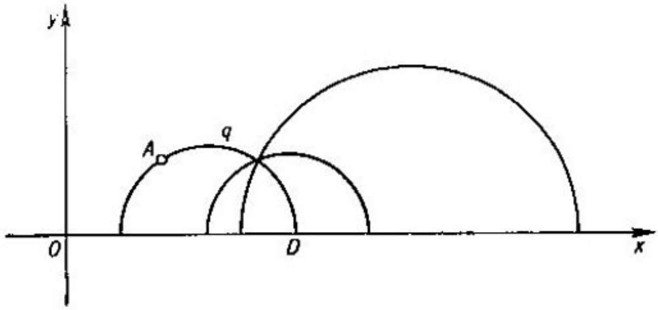


Fig. 5

por dos puntos del semiplano se puede trazar sólo una semicircunferencia con centro en el eje Ox). Dos *rectas* se consideran *paralelas* si tienen un punto infinito común (o sea, si las dos semicircunferencias

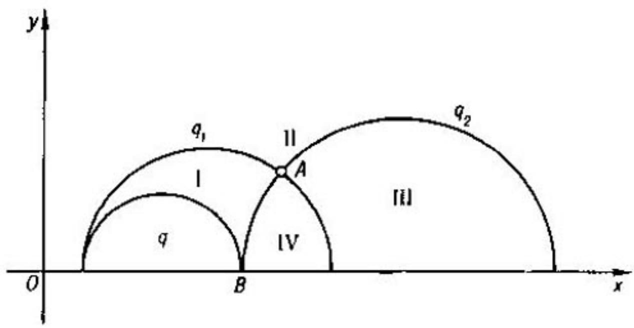


Fig. 6

son tangentes en un punto B perteneciente al eje Ox). Entonces, por todo punto A que no se halle en la *recta* q se pueden trazar dos rectas q_1 y q_2 paralelas a q. Las *rectas* que pasan por el punto A y que se encuentran en los ángulos verticales I y III, cortan la *recta* q mientras que las rectas que se encuentran en los ángulos II y IV no la cortan.

Hemos obtenido el modelo de Poincaré de la Geometría plana de Lobachevski (fig. 6).

Hallar las extremales de las funcionales:

81. $J[y(x)] = \int\limits_a^b [2xy + (x^2 + e^y) y'] \, dx; \; y(a) = A,$

$$y(b) = B.$$

82. $J[y(x)] = \int\limits_0^1 (e^y + xy') \, dx; \; y(0) = 0, \; y(1) = \alpha.$

83. $J[y(x)] = \int\limits_0^{\pi/4} (y'^2 - y^2) \, dx; \; y(0) = 1, \; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

84. $J[y(x)] = \int\limits_0^{\pi} (y'^2 - y^2) \, dx; \; y(0) = 1, \; y(\pi) = -1.$

85. $J[y(x)] = \int\limits_0^1 (x + y'^2) \, dx; \; y(0) = 1, \; y(1) = 2.$

86. $J[y(x)] = \int\limits_0^1 (y^2 + y'^2) \, dx; \; y(0) = 0, \; y(1) = 1.$

87. $J[y(x)] = \int\limits_0^1 (y'^2 + 4y^2) \, dx; \; y(0) = e^2, \; y(1) = 1.$

88. $J[y(x)] = \int\limits_0^1 (2e^y - y^2) \, dx; \; y(0) = 1, \; y(1) = e.$

89. $J[y(x)] = \int\limits_a^b (xy' + y'^2) \, dx.$

90. $J[y(x)] = \int\limits_a^b \left(y + \frac{y^3}{3}\right) dx.$

91. Demostrar que no tiene extremos la funcional lineal

$$J[y(x)] = \int\limits_a^b [p(x) y' + q(x) y + r(x)] \, dx,$$

donde $p(x) \in C_1[a, b]$, $q(x) \in C[a, b]$ y $r(x) \in C[a, b]$.

92. Consideremos la funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$$

con las condiciones de frontera $y(a) = A$ e $y(b) = B$. Demostrar que la ecuación de Euler subsiste al agregar al integrando $F(x, y, y')\,dx$ la diferencial total de cualquier función $u = u(x, y)$.

93. $J[y(x)] = \int_a^b (y^2 + y'^2 + 2ye^x)\,dx$.

94. $J[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y^2 - y'^2 - 8y \operatorname{ch} x)\,dx;$

$$y(0) = 2, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2}.$$

95. Hallar las extremales de la funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b x^n y'^2\,dx$$

y probar que para $n \geqslant 1$ no existen extremales que pasen por dos puntos situados a distintos lados del eje Oy.

PROBLEMAS VARIACIONALES EN FORMA PARAMÉTRICA. En muchos problemas es cómodo, y a veces imprescindible, emplear la representación paramétrica de las líneas

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

donde $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son funciones continuas con derivadas continuas a trozos siendo, además, $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \neq 0$.

Consideremos la funcional

$$J_C = \int_C F(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})\,dt = \int_{t_2}^{t_1} F(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})\,dt, \qquad (19)$$

donde $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ e $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$.

Para que los valores de la funcional (19) dependan sólo de la línea, y no de su parametrización que puede efectuarse de distintos modos, es necesario y suficiente que la función integrando no contenga explícitamente el parámetro t y sea positivamente homogénea de grado uno respecto a los argumentos $\dot{x}$ e $\dot{y}$:

$$F(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = kF(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \qquad k > 0.$$

Por ejemplo, en la funcional

$$J_C = \int_C x\,dy - y\,dx$$

la función integrando es positivamente homogénea de primer grado. Efectivamente, tenemos

$$F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = x\dot{y} - y\dot{x}$$

y es obvio que

$$F(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = kF(x, y, \dot{x}, \dot{y}).$$

Si la curva $\tilde{C}$

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{array}\right\} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

ofrece el extremo a la funcional J_C en la clase de líneas C que unen los puntos fijos (x_0, y_0) y (x_1, y_1), las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ satisfacen *las ecuaciones de Euler*

$$\left.\begin{array}{l} F_x - \dfrac{d}{dt}(F_{\dot{x}}) = 0, \\ F_y - \dfrac{d}{dt}(F_{\dot{y}}) = 0. \end{array}\right\} \tag{20}$$

Una de las ecuaciones (20) es consecuencia de la otra.

Las ecuaciones de Euler se pueden representar *en la forma de Weierstrass*

$$\frac{1}{r} = \frac{F_{x\dot{y}} - F_{y\dot{x}}}{F_1(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{21}$$

donde r es el radio de curvatura de la extremal y F_1 es el valor común de las razones

$$F_1 = \frac{F_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2} = \frac{F_{\dot{y}\dot{y}}}{\dot{x}^2} = \frac{F_{\dot{x}\dot{y}}}{-\dot{x}\dot{y}}.$$

EJEMPLO 14. Hallar las extremales de la funcional

$$J_C=\int\limits_{(0,\,0)}^{(x_1,\,y_1)} y^2y'^2\,dx.$$

SOLUCIÓN. Puesto que puede haber extremales que se cortan con las rectas paralelas al eje Oy en más de un punto, consideraremos el problema en forma paramétrica.

Poniendo $x=x(t)$ e $y=y(t)$, encontramos que la función integrando tiene la forma $y^2\frac{\dot y^2}{\dot x^2}\dot x$, o sea, es positivamente homogénea de primer grado respecto a $\dot x$ e $\dot y$.

La primera de las ecuaciones (20) da

$$\frac{d}{dt}\left(y^2\frac{\dot y^2}{\dot x^2}\right)=0,$$

de donde

$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=C_1^2.$$

Integrando la última ecuación, encontramos

$$y^2=2C_1x+C_2.$$

Puesto que la extremal debe pasar por el origen de coordenadas, tenemos $C_2=0$. La segunda condición de frontera da $C_1=\frac{y_1^2}{2x_1}$, o sea, en definitiva,

$$y^2=\frac{y_1^2}{x_1}\,x,$$

EJEMPLO 15. Hallar las extremales de la funcional

$$J_C=\int\limits_{t_0}^{t_1}[\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}+a^2(x\dot y-y\dot x)]\,dt.$$

SOLUCIÓN. Poniendo

$$F(x,\ y,\ \dot x,\ \dot y)=\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}+a^2(x\dot y-y\dot x),$$

vemos que la función F es positivamente homogénea de primer grado respecto a $\dot x$ e $\dot y$. Empleemos las ecuaciones de Euler en la forma de

Weierstrass. Tenemos

$$F_{x\dot{y}}=a^2,\quad F_{y\dot{x}}=-a^2 \quad \text{y} \quad F_1=\frac{F_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2}=\frac{1}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Por eso, la ecuación (21) tiene en nuestro caso la forma

$$\frac{1}{r}=2a^2.$$

Es decir, la curvatura $\frac{1}{r}$ de la extremal es constante. Por lo tanto, las extremales son arcos de circunferencias; en particular, se tienen circunferencias completas si

$$\left.\begin{aligned} x(t_0)&=x(t_1),\\ y(t_0)&=y(t_1). \end{aligned}\right\}$$

Hallar las extremales de las funcionales:

96. $$J_C=\int_{(0,\,0)}^{(x_1,\,y_1)}\frac{\dot{y}^2-y^2\dot{x}^2}{\dot{x}}\,dt.$$

97. $$J_C=\int_{(0,\,0)}^{(1,\,2)}\frac{\dot{y}^2-3e^{\dot{y}/\dot{x}}\dot{x}^2}{\dot{x}}\,dt.$$

98. $$J_C=\int_{(-1,\,0)}^{(1,\,0)}(K\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}-\dot{x}y)\,dt,$$

donde $K>0$ es una constante.

§ 5 Generalizaciones del problema elemental del Cálculo variacional

1°. Funcionales que dependen de derivadas de órdenes superiores. Supongamos que se tiene la funcional

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F[x,\ y(x),\ y'(x),\ \ldots,y^{(n)}(x)]\,dx, \tag{1}$$

donde F es una función diferenciable $n+2$ veces respecto a todos los argumentos e $y(x)\in C_n[x_0,\ x_1]$, y supongamos que las condiciones de frontera tienen la forma

$$\left.\begin{aligned} y(x_0)&=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ \ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},\\ y(x_1)&=y_1,\ y'(x_1)=y'_1,\ \ldots,y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Las extremales de la funcional (1) con las condiciones (2) son las curvas integrales *de la ecuación de Euler — Poisson*

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}-\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0.$$

EJEMPLO 1. Hallar la extremal de la funcional

$$J[y(x)]=\int_0^1(360x^2y-y''^2)\,dx;$$

$$y(0)=0,\quad y'(0)=1,\quad y(1)=0,\quad y'(1)=2{,}5.$$

SOLUCIÓN. La ecuación de Euler — Poisson tiene la forma

$$360x^2+\frac{d^2}{dx^2}(-2y'')=0,\ \text{o sea,}\ y^{\text{IV}}=180x^2,$$

y su solución general es

$$y=\frac{1}{2}x^6+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4.$$

Empleando las condiciones de frontera, encontramos

$$C_1=\frac{3}{2},\quad C_2=-3,\quad C_3=1\quad \text{y}\quad C_4=0.$$

La extremal pedida es

$$y=\frac{1}{2}x^6+\frac{3}{2}x^3-3x^2+x.$$

Consideremos el caso cuando en la frontera no se dan todas las condiciones (2) sino un número de las mismas de modo que, después de emplear las condiciones de frontera, en la solución general de la ecuación de Euler — Poisson contienen todavía constantes arbitrarias. Para resolver este problema es preciso hallar la variación de la funcional (1), transformarla tomando en consideración las condiciones de frontera dadas y obtener condiciones complementarias en la frontera igualando la variación a cero.

EJEMPLO 2. Hallar la curva $y=y(x)$ que ofrece valor extremal a la funcional

$$J[y(x)]=\frac{1}{2}\int_a^b y''^2\,dx \tag{3}$$

con las condiciones

$$y(a)=0\quad \text{e}\quad y(b)=0. \tag{4}$$

SOLUCIÓN. La ecuación de Euler — Poisson tiene la forma

$$y^{\text{IV}}=0.$$

Su solución general

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 \tag{5}$$

contiene cuatro constantes arbitrarias C_i ($i = 1, 2, 3$ y 4) y las condiciones de frontera (4) no bastan para determinarlas. Por eso, como hemos explicado, calculamos la variación de la funcional (3). Tenemos

$$\delta J = \int_a^b y''\delta y''\,dx. \tag{6}$$

Integrando (6) por partes dos veces, obtenemos

$$\delta J = y''(x)\ \delta y'(x)\ \Big|_a^b - \int_a^b y'''\delta y'\,dx =$$

$$= y''(x)\,\delta y'(x)\Big|_a^b - y'''(x)\,\delta y(x)\Big|_a^b + \int_a^b y^{IV}\delta y\,dx. \tag{7}$$

La expresión (7) debe anularse en la extremal $y(x)$ de la funcional (3). Debido a la arbitrariedad de la función δy, resulta que $y^{IV} = 0$; ésta es la ecuación de Euler — Poisson para la funcional (3). Pero si la integral del útimo miembro de (7) se anula, *la expresión de frontera*

$$[y''(x)\,\delta y'(x) - y'''(x)\,\delta y(x)]\Big|_a^b$$

también debe ser igual a cero idénticamente. Puesto que $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$ (extremos fijos), resulta que debe ser

$$y''(b)\,\delta y'(b) - y''(a)\,\delta y'(a) = 0.$$

En virtud de la arbitrariedad de las magnitudes $\delta y'(b)$ y $\delta y'(a)$, obtenemos necesariamente

$$y''(a) = 0 \quad \text{e} \quad y''(b) = 0. \tag{8}$$

Las condiciones (8) conjuntamente con las condiciones (4) determinan unívocamente la extremal en la familia (5): $y \equiv 0$.

2°. **Funcionales que dependen de m funciones.** En el caso de una funcional que depende de m funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$

$$J[y_1, y_2, \ldots, y_m] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, y_1', y_2', \ldots, y_m')\,dx$$

y con las condiciones de frontera de tipo

$$y_k(x_0) = y_k^0, \quad y_k(x_1) = y_k^1 \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

las extremales se determinan del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$F_{y_k}-\frac{d}{dx}F_{y'_k}=0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m) \tag{9}$$

que se denomina *sistema de ecuaciones de Euler.*

EJEMPLO 3. Hallar las extremales de la funcional

$$J\left[y(x),\ z(x)\right]=\int_1^2 (y'^2+z^2+z'^2)\,dx$$

con las condiciones de frontera

$$y(1)=1,\quad y(2)=2,\quad z(1)=0,\quad z(2)=1.$$

SOLUCIÓN. En este caso el sistema de ecuaciones (9) tiene la forma

$$\left.\begin{aligned} y''&=0,\\ z-z''&=0. \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo este sistema, encontramos

$$y=C_1x+C_2 \quad \text{y} \quad z=C_3e^x+C_4e^{-x}.$$

En virtud de las condiciones de frontera, tenemos

$$C_1=1,\quad C_2=0,\quad C_3=\frac{1}{e^2-1} \quad \text{y} \quad C_4=-\frac{e^2}{e^2-1}$$

de modo que la extremal pedida

$$\left.\begin{aligned} y&=x,\\ z&=\frac{\operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh}1} \end{aligned}\right\}$$

es una curva alabeada que constituye la intersección de dos superficies cilíndricas.

EJEMPLO 4. Hallar las extremales de la funcional

$$J\left[y(x),\ z(x)\right]=\int_0^\pi (2yz-2y^2+y'^2-z'^2)\,dx$$

si

$$y(0)=0,\quad y(\pi)=1,\quad z(0)=0 \quad \text{y} \quad z(\pi)=-1.$$

SOLUCIÓN. El sistema de ecuaciones (9) tiene la forma

$$\left.\begin{aligned} y''+2y-z&=0,\\ z''+y&=0, \end{aligned}\right\}$$

de donde, eliminando la función z, obtenemos

$$y^{\mathrm{IV}}+2y''+y=0.$$

La solución general de esta ecuación tiene la forma

$$y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen}x+x\,(C_3\cos x+C_4\operatorname{sen}x).$$

En virtud de las condiciones de frontera $y(0) = 0$ e $y(\pi) = 1$, tenemos $C_1 = 0$ y $C_3 = -\frac{1}{\pi}$ de modo que

$$y = C_2 \operatorname{sen} x + C_4 x \operatorname{sen} x - \frac{x}{\pi} \cos x.$$

La función z se determina de la condición $z = y'' + 2y$. Tenemos

$$z = C_2 \operatorname{sen} x + C_4 (2 \cos x + x \operatorname{sen} x) + \frac{1}{\pi} (2 \operatorname{sen} x - x \cos x).$$

Las constantes C_2 y C_4 se determinan de las condiciones de frontera $z(0) = 0$ y $z(\pi) = -1$, de donde resulta que $C_4 = 0$ y que C_2 es arbitrario. Entonces,

$$z = C_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{\pi} (2 \operatorname{sen} x - x \cos x).$$

La familia de extremales es

$$\left.\begin{aligned} y &= C_2 \operatorname{sen} x - \frac{x}{\pi} \cos x, \\ z &= C_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{\pi} (2 \operatorname{sen} x - x \cos x), \end{aligned}\right\}$$

donde C_2 es una constante arbitraria.

3°. Funcionales que dependen de funciones de varias variables independientes. Consideremos la funcional

$$J[z(x, y)] = \iint\limits_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, \partial y, \qquad (10)$$

donde F es una función diferenciable tres veces respecto a sus argumentos, y supongamos que se pide hallar la función $z = z(x, y)$ que sea continua conjuntamente con sus derivadas hasta de segundo orden inclusive en el recinto D, que tome valores fijos en la frontera Γ del recinto D y que realice el extremo de la funcional (10).

Si el extremo de la funcional (10) se alcanza en la superficie $z = z(x, y)$, la función $z = z(x, y)$ satisface *la ecuación de Euler — Ostrogradski*

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = 0, \qquad (11)$$

donde $\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\}$ y $\frac{\partial}{\partial y} \{F_q\}$ son las derivadas parciales completas respecto a x e y, respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} = F_{px} + F_{pz} \frac{\partial z}{\partial x} + F_{pp} \frac{\partial p}{\partial x} + F_{pq} \frac{\partial q}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = F_{qy} + F_{qz} \frac{\partial z}{\partial y} + F_{qp} \frac{\partial p}{\partial y} + F_{qq} \frac{\partial q}{\partial y};$$

aquí se ha tomado, para abreviar, $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = q$.

La ecuación (11) representa la condición necesaria de extremo de la funcional (10). Es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden; se busca su solución $z = z(x, y)$ que toma valores fijos en la frontera Γ.

EJEMPLO 5. Escribir la ecuación de Euler — Ostrogradski para la funcional

$$J[z(x, y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy.$$

SOLUCIÓN. Tenemos $F(x, y, z, p, q) = p^2 - q^2$ y, según (11), encontramos $-\frac{\partial}{\partial x}(2p) - \frac{\partial}{\partial y}(-2q) = 0$, o sea,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Para la funcional

$$J[z(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = \iint_D \ldots \int F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

donde $p_k = \frac{\partial z}{\partial x_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, la condición necesaria de extremo viene dada por la siguiente *ecuación de Euler — Ostrogradski*

$$F_z - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\{F_{p_i}\} = 0,$$

o, en forma desarrollada,

$$F_z - \sum_{i=1}^{n}\left(F_{x_i p_i} + F_{z p_i} p_i + \sum_{j=1}^{n} F_{p_i p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_i}\right) = 0. \qquad (12)$$

La función $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, solución de esta ecuación, debe satisfacer en la frontera Γ del recinto n-dimensional D las condiciones de frontera dadas.

EJEMPLO 6. Hallar las condiciones que debe cumplir la función $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para que la integral de Dirichlet

$$D[z(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = \iint_Q \ldots \int \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

alcance en ella su mínimo si dicha función toma valores determinados en la frontera Γ del recinto Q.

SOLUCIÓN. En este caso $F=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2$, o sea, F no depende explícitamente de $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. Por lo tanto,

$$F_z=F_{zp_i}=F_{x_ip_i}=0,$$

$$F_{p_ip_j}=\begin{cases} 2 \text{ si } i=j, \\ 0 \text{ si } i\neq j \end{cases}$$

y, aplicando la fórmula (12), obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 z}{\partial x_j^2}=0 \quad \text{ó} \quad \Delta z=0$$

(ecuación n-dimensional de Laplace).

OBSERVACIÓN. Si bajo el signo de la integral figuran las derivadas de la función $z(x, y)$ hasta de orden n, *la ecuación de Euler — Ostrogradski* tiene la forma

$$F_z-\frac{\partial}{\partial x}\{F_{z_x}\}-\frac{\partial}{\partial y}\{F_{z_y}\}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{F_{z_{xx}}\}+2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\{F_{z_{xy}}\}+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{F_{z_{yy}}\}-\ldots+(-1)^n\frac{\partial^n}{\partial y^n}\{F_{z_{\underbrace{yy\ldots y}_{n}}}\}=0. \qquad (13)$$

EJEMPLO 7. Escribir la ecuación de Euler — Ostrogradski para la funcional

$$J[z(x, y)]=\iint_D\left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2+\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2-2zf(x, y)\right]dx\,dy.$$

SOLUCIÓN. Tenemos

$$F=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2-2zf(x, y).$$

Aplicando la fórmula (13), encontramos

$$-2f(x, y)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+$$
$$+2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)=0,$$

o sea,

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}=f(x, y).$$

La última ecuación se representa brevemente así:

$$\Delta\Delta z = f(x, y).$$

Hallar las extremales de las funcionales siguientes:

99. $J[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + 2y'^2 + y''^2)\, dx;$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad \text{e} \quad y'(1) = -\operatorname{sh} 1.$$

100. $J[y(x)] = \int_{-1}^{0} (240y - y'''^2)\, dx;$

$$y(-1) = 1, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(-1) = -4{,}5,$$
$$y'(0) = 0, \quad y''(-1) = 16, \qquad y''(0) = 0.$$

101. $J[y(x)] = \int_a^b (y + y'')\, dx;$

$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1, \quad y'(a) = y_0', \quad y'(b) = y_1'.$$

102. $J[y(x)] = \int_a^b (y'^2 + yy'')\, dx;$

$$y(a) = A_1, \quad y'(a) = A_2, \quad y(b) = B_1, \quad y'(b) = B_2.$$

103. $J[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + y''^2)\, dx;$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = \operatorname{sh} 1, \quad y'(0) = 1, \quad y'(1) = \operatorname{ch} 1.$$

104. Hallar la extremal de la funcional

$$J[y(x)] = \frac{1}{2} \int_0^1 y''^2\, dx$$

con las condiciones

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

105. $J[y(x), z(x)] = \int_0^{\pi/4} (2z - 4y^2 + y'^2 - z'^2)\, dx;$

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad z(0) = 0, \quad z\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

106. $J[y(x), z(x)] = \int\limits_{-1}^{1} \left(2xy - y'^2 + \frac{z'^3}{3}\right) dx;$

$$y(1) = 0, \quad y(-1) = 2, \quad z(1) = 1, \quad z(-1) = -1.$$

107. $J[y(x), z(x)] = \int\limits_{0}^{\pi/2} (y'^2 + z'^2 - 2yz)\, dx;$

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad z(0) = 0, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

108. $J[y(x), z(x)] = \int\limits_{0}^{1} (y'^2 + z'^2 + 2y)\, dx;$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = \frac{3}{2}, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 1.$$

109. Probar que la ecuación de Euler de la funcional

$$J[y(x), z(x)] = \int\limits_{a}^{b} F(x, y, z, y', z')\, dx$$

tiene las siguientes primeras integrales:

1) $\frac{\partial F}{\partial y'} = C$ si F no comprende y;

2) $F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} - z' \frac{\partial F}{\partial z'} = C$ si F no comprende x.

Escribir la ecuación de Euler—Ostrogradski para las funcionales:

110. $J[z(x, y)] = \iint\limits_{D} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^4 + \right.$

$$\left. + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^4 + 12zf(x, y)\right] dx\, dy.$$

111. $J[z(x, y)] = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 dx\, dy.$

112. $J[z(x_1, x_2, \ldots, x_n)] =$

$$= \iint\limits_{D} \cdots \int \left[\sum_{j=1}^{n} a_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \left(\frac{\partial z}{\partial x_j}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - c(x_1, x_2, \ldots, x_n) z^2 + 2zf(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right] dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

113. Deducir la ecuación diferencial de las superficies de área mínima.

114. Hallar la extremal de la funcional

$$J[z(x, y)] = \int_0^1 \int_0^1 e^{zy} \operatorname{sen} z_y \, dx \, dy$$

con las condiciones $z(x, 0) = 0$ y $z(x, 1) = 1$.

§ 6. Invariancia de la ecuación de Euler

Si la funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') \, dx$$

se transforma efectuando una sustitución de la variable independiente o una sustitución simultánea de la función incógnita y de la variable independiente, las extremales continúan determinándose de la ecuación de Euler que se obtiene a partir del integrando transformado. En esto consiste la invariancia de la ecuación de Euler.

Sea $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ con la particularidad de que

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces

$$\int F(x, y, y') \, dx = \int F\left[x(u, v), y(u, v), \frac{y_u + y_v v'_u}{x_u + x_v v'_u}\right] \times$$
$$\times (x_u + x_v v'_u) \, du = \int \Phi(u, v, v'_u) \, du$$

y las extremales de la funcional inicial se determinan de la ecuación de Euler para la funcional $\int \Phi(u, v, v'_u) \, du$:

$$\Phi_v - \frac{d}{du} \Phi_{v'} = 0.$$

EJEMPLO 1. Hallar las extremales de la funcional

$$J[r(\varphi)] = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + r'^2} \, d\varphi.$$

SOLUCIÓN. La ecuación de Euler para esta funcional es

$$\frac{r}{\sqrt{r^2+r'^2}}-\frac{d}{d\varphi}\frac{r'}{\sqrt{r^2+r'^2}}=0.$$

La sustitución de variables $x=r\cos\varphi$ e $y=r\operatorname{sen}\varphi$ da

$$\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi=\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

y lleva a la funcional

$$J[y(x)]=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

cuya ecuación de Euler es $y''=0$ de modo que

$$y=C_1x+C_2.$$

Por consiguiente, las extremales de la funcional inicial vienen dadas por la ecuación

$$r\operatorname{sen}\varphi=C_1r\cos\varphi+C_2,$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

EJEMPLO 2. Hallar las extremales de la funcional

$$J[y(x)]=\int_0^{\ln 2}(e^{-x}y'^2-e^xy^2)\,dx.$$

SOLUCIÓN. La ecuación de Euler para la funcional considerada tiene la forma

$$y''-y'+e^{2x}y=0.$$

Realicemos la sustitución de variables

$$\left.\begin{aligned}x&=\ln u,\\ y&=v.\end{aligned}\right\}$$

La funcional inicial se transforma entonces en

$$J_1[v(u)]=\int_1^2(e^{-\ln u}u^2v'^2-e^{\ln u}v^2)\frac{du}{u}=\int_1^2(v'^2-v^2)\,du$$

y su ecuación de Euler $v''+v=0$ se integra fácilmente:

$$v=C_1\cos u+C_2\operatorname{sen}u.$$

Volviendo a las coordenadas iniciales x e y, obtenemos la ecuación de las extremales en la forma

$$y=C_1\cos e^x+C_2\operatorname{sen}e^x.$$

115. Hallar las extremales de la funcional

$$J[r(\varphi)]=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r\operatorname{sen}\varphi\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi.$$

116. Probar que las extremales de la funcional

$$J[r(\varphi)]=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(r\operatorname{sen}\varphi)\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$$

se determinan por cuadraturas.

117. Hallar las extremales de la funcional

$$J[y(x)]=\int_a^b\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Igual que en el caso de una variable, la ecuación de Euler — Ostrogradski es *invariante* respecto a las transformaciones de coordenadas.

EJEMPLO 3. Escribir la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

en coordenadas polares.

SOLUCIÓN. Consideremos la funcional

$$D[z(x,\ y)]=\iint_G (z_x^2+z_y^2)\,dx\,dy.$$

La ecuación de Euler — Ostrogradski para esta funcional es precisamente la ecuación (1). Pasemos en la funcional de las coordenadas cartesianas $(x,\ y)$ a las coordenadas polares $(\rho,\ \varphi)$: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\operatorname{sen}\varphi$. Tenemos

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\cos\varphi,\quad \frac{\partial\rho}{\partial y}=\operatorname{sen}\varphi,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\cos\varphi}{\rho}$$

y, por eso,

$$D[z(\rho,\ \varphi)]=\iint_G\left[\left(z_\rho\frac{\partial\rho}{\partial x}+z_\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(z_\rho\frac{\partial\rho}{\partial y}+z_\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]\rho\,d\rho\,d\varphi=\iint_G\left(\rho z_\rho^2+\frac{1}{\rho}z_\varphi^2\right)d\rho\,d\varphi.$$

Formando la ecuación de Euler — Ostrogradski para esta última integral, obtendremos la ecuación de Laplace en coordenadas polares:

$$\frac{1}{\rho}z_{\varphi\varphi}+\rho z_{\rho\rho}+z_\rho=0.$$

§ 7. Campo de extremales

La familia de curvas $y = y(x, c)$ forma *un campo propio en el recinto* D del plano xOy si por cada punto (x, y) de este recinto pasa una y sólo una curva de la familia $y = y(x, c)$.

El coeficiente angular $p(x, y)$ de la tangente a la curva de la familia $y = y(x, c)$ que pasa por el punto (x, y) se denomina *inclinación del campo en el punto* (x, y).

La familia de curvas $y = y(x, c)$ forma un campo *central* en el recinto D del plano xOy si estas curvas cubren sin cruzarse todo el

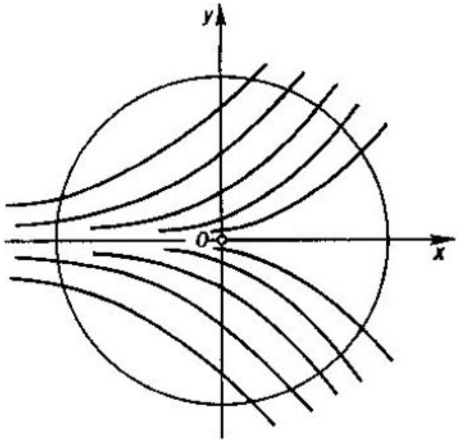


Fig. 7

recinto D y arrancan de un mismo punto (x_0, y_0) que no pertenece al recinto D. El punto (x_0, y_0) se llama *centro* del haz de curvas.

EJEMPLO 1. Dentro del círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$ la familia de curvas $y = Ce^x$, donde C es una constante arbitraria y, en particular, $C = 0$, forma un campo propio ya que estas curvas no se cortan en ningún punto y por todo punto (x, y) del círculo pasa una y sólo una curva de esta familia (fig. 7). La inclinación del campo en un punto cualquiera (x, y) es igual a

$$p(x, y) = Ce^x = y.$$

EJEMPLO 2. La familia de parábolas $y = (x + C)^2$ no forma campo propio dentro del círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$ porque distintas curvas de la familia se cortan dentro del círculo y no cubren todo el recinto (fig. 8).

EJEMPLO 3. La familia de curvas $y = Cx$ forma un campo central en el recinto $x > 0$.

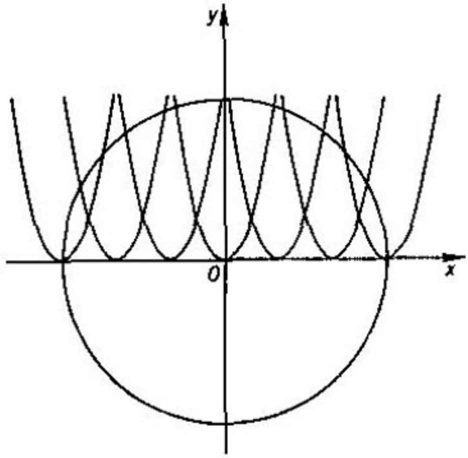


Fig. 8

¿Forman campo (propio o central) en los recintos indicados las siguientes familias de curvas?

118. $y=C\operatorname{tg} x;\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4},\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}.$

119. $y=C\cos x;$

a) $|x|<\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi$; c) $|x|\leqslant\pi$.

120. $y=(x-C)^3;\quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1.$

121. $y=C(x^2-2x);$

a) $0\leqslant x<1$; b) $-1\leqslant x\leqslant 3$; c) $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$.

122. $y=C\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right);$

a) $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\pi$; c) $\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant 2\pi$.

123. $y=e^{x+C};\quad x^2+y^2\leqslant 1.$

Si el campo (propio o central) está formado por una familia de extremales de cierto problema variacional, se denomina *campo de extremales*.

EJEMPLO 4. Consideremos la funcional

$$J[y(x)]=\int_0^1 y'^2\,dx.$$

Sus extremales son las rectas $y=C_1x+C_2$. La familia de extremales $y=C_2$ forma un campo propio y la familia de extremales $y=C_1x$ forma un campo central con centro en el origen de coordenadas.

124. Determinar para la funcional

$$J[y(x)]=\int_0^a (y'^2+y^2)\,dx$$

los campos de extremales propio y central.

125. Lo mismo para la funcional

$$J[y(x)]=\int_0^{\pi/4} (y'^2-y^2+x^2+4)\,dx.$$

Supongamos que la curva $y=y(x)$ es la extremal de la funcional

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,\partial x$$

que pasa por los puntos $A(x_0,\ y_0)$ y $B(x_1,\ y_1)$.

Se dice que la extremal $y=y(x)$ *está incluida en un campo propio de extremales* si existe una familia de extremales $y=y(x,\ C)$ que forma un campo y que comprende la extremal $y=y(x)$ para cierto valor $C=C_0$ y si, además, esta extremal $y=y(x)$ no pertenece a la frontera del recinto D en el que la familia $y=y(x,\ C)$ forma campo.

Si existe un haz de extremales, con centro en el punto $(x_0,\ y_0)$, que forma un campo en una vecindad de la extremal $y=y(x)$ que pasa por dicho punto, se dice que *se ha encontrado un campo central* que incluye la extremal considerada $y=y(x)$. Como parámetro de la familia $y=y(x,\ C)$ se toma el coeficiente angular de la tangente a las curvas del haz en el punto $(x_0,\ y_0)$.

EJEMPLO 5. Consideremos el problema variacional elemental para la funcional

$$J[y(x)]=\int_0^2 (y'^3+\operatorname{sen}^2 x)\,dx.$$

a) Sea $y(0)=1$ e $y(2)=1$. La familia de extremales de nuestra funcional viene dada por la ecuación $y=C_1x+C_2$. La extremal que satisface las condiciones de frontera es $y=1$. Dicha extremal se puede incluir en el campo propio de extremales $y=C_2$, donde C_2 es una constante arbitraria.

b) Sea $y(0)=0$ e $y(2)=4$. La extremal que responde a estas condiciones de frontera es la recta $y=2x$ que puede ser incluida en el campo central de extremales $y_1=C_1x$ (C_1 es una constante arbitraria) con centro en el punto O (0, 0).

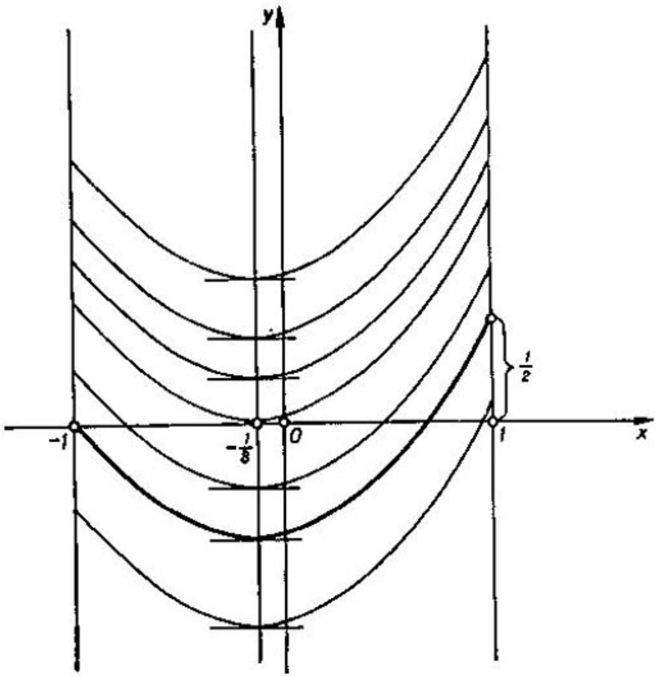


Fig. 9

EJEMPLO 6. Consideremos el problema variacional elemental

$$J[y(x)]=\int_{-1}^{1} y'\left(2x-\frac{1}{2}y'\right)dx;$$

$$y(-1)=0, \quad y(1)=\frac{1}{2}.$$

La solución de la ecuación de Euler tiene la forma $y=x^2+C_1x+$ $+C_2$. La extremal de este problema $y=x^2+\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$ se puede incluir en el campo propio de extremales $y=x^2+\frac{x}{4}+C_2$ (fig. 9).

Probar que las extremales de los siguientes problemas variacionales elementales se pueden incluir en un campo de extremales (propio o central).

126. $J[y(x)] = \int\limits_0^1 (y'^2 - 2xy)\,dx; \quad y(0) = y(1) = 0.$

127. $J[y(x)] = \int\limits_0^1 (2e^x y + y'^2)\,dx; \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e.$

128. $J[y(x)] = \int\limits_0^a (y^2 - y'^2)\,dx \quad (a \neq k\pi);$

$$y(0) = 0, \quad y(a) = 0$$

129. $J[y(x)] = \int\limits_0^2 (y'^2 + x^2)\,dx; \quad y(0) = 1, \quad y(2) = 3.$

DEFINICIÓN. Sea $\Phi(x, y, C) = 0$ una familia de curvas planas. Se llama *C-discriminante de esta familia* el lugar geométrico de los puntos determinado por el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x, y, C) &= 0, \\ \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

En el caso general, el C-discriminante comprende la envolvente de la familia, el lugar geométrico de los puntos múltiples y el lugar geomé trico de los puntos de retroceso.

La envolvente de la familia $\Phi(x, y, C) = 0$ es la curva que en cada uno de sus puntos es tangente a cierta curva de la familia considerada y tal que cada una de sus partes es tangente a un conjunto infinito de curvas de la familia.

Si se tiene un haz de curvas con centro en el punto $A(x_0, y_0)$, el centro del haz pertenece al C-discriminante.

EJEMPLO 7. Hallar el C-djscriminante de la familia de curvas $y = (x - C)^2$.

SOLUCIÓN. Las ecuaciones (1) tienen en este caso la forma

$$\left.\begin{aligned} y - (x - C)^2 &= 0, \\ 2(x - C) &= 0, \end{aligned}\right\}$$

de donde $y = 0$ Es fácil ver que la línea $y = 0$ es la envolvente de esta familia. Efectivamente, en cada uno de sus puntos $x = x_0$ la línea $y = 0$ tiene tangente común con la curva correspondiente $y =$

$= (x - x_0)^2$ de la familia. Además, si tomamos una parte de la línea $y = 0$, por pequeña que sea, habrá un conjunto infinito de curvas de la familia tangentes a esta parte. En el caso considerado el C-discriminante consta de la envolvente nada más.

En los problemas siguientes hallar los C-discriminantes de las familias dadas.

130. $y = Cx + C^2$.

131. $y(C - x) - C^2 = 0$.

132. $(x - C)^2 + y^2 = 1$.

Si el arco AB de la curva $y = y(x)$ tiene un punto común A^*, distinto del punto A, con el C-discriminante del haz $y = y(x, C)$ que tiene su centro en el punto A y que comprende la curva considerada, se dice que el punto A^* es *conjugado* del punto A.

EJEMPLO 8. Consideremos la familia monoparamétrica de curvas $y = C \operatorname{sen} x$. El C-discriminante de esta familia se determina por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} y - C \operatorname{sen} x &= 0, \\ -\operatorname{sen} x &= 0, \end{aligned}\right\}$$

o sea, representa un conjunto discreto de puntos $(k\pi, 0)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (que son los puntos de intersección de la sinusoide y del eje

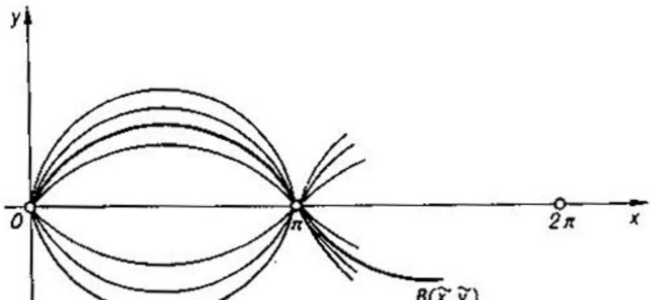


Fig. 10

Ox). Tomando, por ejemplo, $C = 2$, obtenemos la curva $y = 2 \operatorname{sen} x$ que pertenece al haz de sinusoides con centro en el punto $O(0, 0)$. Si el otro extremo B (fig. 10) del arco de la curva $y = 2 \operatorname{sen} x$ tiene la abscisa $\tilde{x} \in (\pi, 2\pi)$, el arco OB tendrá otro punto (a parte del punto $O(0, 0)$) perteneciente al C-discriminante, a saber el punto $O^*(\pi, 0)$, que será conjugado del punto $O(0, 0)$. Si es $0 < \tilde{x} < \pi$, en el arco OB no habrá puntos conjugados del punto $O(0, 0)$.

133. Se tiene la familia de curvas $y = C(x-1)x$. Hallar el punto conjugado del punto $O(0, 0)$.

134. Se tiene la familia de curvas $y = C \operatorname{sh} x$. Hallar el punto conjugado del punto $O(0, 0)$.

1°. Condición suficiente de Jacobi para poder incluir la extremal en un campo central de extremales. *Condición suficiente para que el arco AB de una extremal pueda ser incluido en un campo central de extremales con centro en el punto $A(x_0, y_0)$, es que el punto A^* conjugado del punto A no pertenezca al arco AB.*

EJEMPLO 9. Consideremos la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^a (y'^2 - 9y^2 + e^{x^2} - 1)\,dx;$$

$$y(0) = 0, \quad y(a) = 0.$$

Analizar la posibilidad de incluir la extremal $y = 0$ en un campo central de extremales con centro en el punto $O(0, 0)$.

SOLUCIÓN. La ecuación de Euler para la funcional considerada tiene la forma $y'' + 9y = 0$ y su solución general es $y = C_1 \operatorname{sen} 3x + C_2 \cos 3x$.

Si $a \neq \frac{k\pi}{3}$, donde k es un número entero, la extremal que satisface las condiciones de frontera es la recta $y = 0$. Consideremos la familia monoparamétrica de extremales $y = C_1 \operatorname{sen} 3x$; es fácil ver que el C-discriminante de esta familia consta de los puntos $\left(\frac{k\pi}{3}, 0\right)$, donde k es un número entero; por eso, si $a < \frac{\pi}{3}$, en la extremal $y = 0$ no habrá punto conjugado del punto $O(0, 0)$ y entonces esta extremal se podrá, obviamente, incluir en un campo central de extremales con centro en el punto $O(0, 0)$. En cambio, si $a \geqslant \frac{\pi}{3}$, en la extremal $y = 0$ habrá como mínimo un punto conjugado del punto $O(0, 0)$ y no se cumplirá la condición suficiente de Jacobi; en este caso las extremales $y = C_1 \operatorname{sen} 3x$ no forman campo.

FORMA ANALÍTICA DE LA CONDICIÓN DE JACOBI. Consideremos el problema variacional elemental

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx; \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

Si la solución $u = u(x)$ de la ecuación de Jacobi

$$\left(F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'}\right) u - \frac{d}{dx}(F_{y'y'}u') = 0 \tag{2}$$

que satisface la condición $u(x_0) = 0$ se anula también en algún otro punto del intervalo $x_0 < x < x_1$, el punto A^* conjugado del punto $A(x_0, y_0)$ pertenece al arco AB de la extremal (el punto B tiene las coordenadas (x_1, y_1)).

Si existe una solución $u(x)$ de la ecuación de Jacobi que satisface la condición $u(x_0) = 0$ y que no se anula en ningún otro punto del semiintervalo $x_0 < x \leqslant x_1$, en el arco AB no habrá puntos conjugados del punto A. En este caso el arco AB de la extremal se puede incluir en un campo central de extremales con centro en el punto $A(x_0, y_0)$.

En la ecuación (2) hay que tomar en las funciones $F_{yy}(x, y, y')$, $F_{yy'}(x, y, y')$ y $F_{y'y'}(x, y, y')$ en lugar de $y(x)$ el segundo miembro de la ecuación de la extremal $y = y(x, C_0)$.

EJEMPLO 10. ¿Se cumple la condición de Jacobi para la extremal de la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^a (y'^2 + x^2)\,dx$$

que pasa por los puntos $O(0, 0)$ y $B(a, 3)$?

SOLUCIÓN. En este caso la ecuación de Jacobi tiene la forma $u'' = 0$. Su solución general es $u = C_1x + C_2$. De la condición $u(0) = 0$ encontramos $C_2 = 0$ de modo que $u = C_1x$. Estas soluciones $u = C_1x$ $(C_1 \neq 0)$ no se anulan para ningún valor de $a > 0$. Por consiguiente, en el arco OB de la extremal no habrá punto conjugado del punto $O(0, 0)$. Es decir, este arco se puede incluir en un campo central de extremales con centro en el punto $O(0, 0)$. Es fácil ver que la extremal buscada es la recta $y = \frac{3}{a}x$ que se puede incluir, obviamente, en el campo central de extremales $y = C_1x$.

EJEMPLO 11. ¿Se cumple la condición de Jacobi para la extremal de la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^a (y'^2 - 4y^2 + e^{-x^2})\,dx \quad \left(a \neq \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$$

que pasa por los puntos $A(0, 0)$ y $B(a, 0)$?

SOLUCIÓN. La ecuación de Jacobi tiene la forma $u'' + 4u = 0$ y su solución general es $u = C_1 \operatorname{sen} 2x + C_2 \cos 2x$. De la condición $u(0) = 0$ encontramos $C_2 = 0$ de modo que $u = C_1 \operatorname{sen} 2x$. Si a $< \frac{\pi}{2}$, la función u no se anula para $0 < x \leqslant a$ y la condición de Jacobi se cumple; en cambio, si $a > \frac{\pi}{2}$, la solución $u = C_1 \operatorname{sen} 2x$ de la ecuación de Jacobi se anula en el punto $x = \frac{\pi}{2}$ perteneciente al segmento $[0, a]$ y en el arco de la extremal $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$ hay un punto conjugado del punto $A(0, 0)$. Por consiguiente, si $a > \frac{\pi}{2}$, no existe campo central de extremales que comprenda la extremal dada.

En los problemas siguientes analizar si se cumple o no la condición de Jacobi.

135. $J[y(x)]=\int\limits_{-1}^{1}(12xy+y'^2+x^2)\,dx;$

$$y(-1)=-2,\quad y(1)=0.$$

136. $J[y(x)]=\int\limits_{0}^{a}(y'^2+9y^2-3x)\,dx;$

$$y(0)=0,\quad y(a)=0.$$

137. $J[y(x)]=\int\limits_{0}^{1}(1+y'^2)\,dx;\quad y(0)=y(1)=0.$

138. $J[y(x)]=\int\limits_{0}^{a}y'e^{y'}\,dx;\quad y(0)=1,\quad y(a)=b.$

139. $J[y(x)]=\int\limits_{0}^{2\pi}(y'^2-y^2)\,dx;\quad y(0)=0,\quad y(2\pi)=1.$

140. Demostrar que si la función integrando de la funcional

$$J[y(x)]=\int\limits_{a}^{b}F(x,\,y')\,dx$$

no contiene y explícitamente, cualquier extremal puede ser siempre incluida en un campo de extremales.

OBSERVACIÓN. La condición de Jacobi es necesaria para que la funcional $J[y(x)]$ alcance su valor extremo; o sea, cuando la extremal AB realiza el extremo, el punto conjugado de A no puede estar en el intervalo $x_0<x<x_1$. Por ejemplo, la funcional

$$J[y(x)]=\int\limits_{0}^{a}(y'^4+1)\,dx;\qquad y(0)=y(a)=0;$$

alcanza su valor mínimo en la extremal $y\equiv 0$. En esta extremal no hay puntos conjugados del punto $O(0,\,0)$.

EJEMPLO 12. La funcional

$$J[y(x)]=\int\limits_{0}^{\frac{5}{4}\pi}(y^2-y'^2)\,dx;\quad y(0)=0,\quad y\left(\frac{5}{4}\pi\right)=0;$$

no alcanza extremo en la extremal $y \equiv 0$ porque en el intervalo $\left(0, \frac{5}{4}\pi\right)$ está el punto O^* $(\pi, 0)$ conjugado del punto O $(0, 0)$ (ya que la solución de la ecuación de Jacobi que se anula en $x = 0$ es $u = C_1 \operatorname{sen} x$ y u se anula también en el punto $x = \pi \in \left(0, \frac{5}{4}\pi\right)\Big)$.

Efectivamente, tomemos como curva «próxima» a $y \equiv 0$ la curva $y_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} \frac{4}{5} nx}{n^2}$; para esta curva se cumplen obviamente las condiciones $y(0) = y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 0$ e $y'_n(x) = \frac{4}{5n} \cos n \frac{4}{5} x$. Entonces tenemos $J[0] = 0$ y

$$J\left[\frac{\operatorname{sen} \frac{4}{5} nx}{n^2}\right] = \int_0^{\frac{5}{4}\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{4n}{5} x\right)}{n^4}\, dx -$$

$$- \int_0^{\frac{5}{4}\pi} \left(\frac{4}{5n}\right)^2 \cos^2\left(\frac{4n}{5} x\right) dx = \frac{5\pi}{8n^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{16}{25}\right) < 0$$

para todo entero $n \geqslant 2$. Por consiguiente, la extremal $y \equiv 0$ no realiza el mínimo de la funcional considerada ya que existen curvas próximas a $y \equiv 0$ en las que son negativos los valores de la funcional. Consideremos ahora la familia de curvas $y_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{4}{5} x$ cercanas a la curva $y \equiv 0$ en el sentido de proximidad de orden cualquiera. Es fácil ver que

$$J[y_n(x)] = \int_0^{\frac{5}{4}\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{4}{5} x}{n^2}\, dx - \int_0^{\frac{5}{4}\pi} \frac{16}{25n^2} \cos^2 \frac{4}{5} x\, dx = \frac{9\pi}{40n^2} > 0.$$

Por consiguiente, la extremal $y \equiv 0$ tampoco realiza el máximo de la funcional considerada.

141. Supongamos que en la funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

la función integrando F tiene derivadas parciales acotadas de tercer orden respecto a las variables y e y' en cualquier recinto acotado de variación de y e y'. Sean $y = y(x)$ e $y = y(x) + \eta(x)$ dos extremales cercanas. Demostrar que la función $\eta(x)$ satisface la ecuación de Jacobi

$$F_{yy}\eta + F_{yy'}\eta' - \frac{d}{dx}(F_{yy'}\eta + F_{y'y'}\eta') = 0$$

salvo una infinitésima de orden superior respecto a la distancia de primer orden entre estas extremales.

2°. Condiciones suficientes de Legendre. Condición suficiente para que la extremal de la funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx; \qquad y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1;$$

se pueda incluir en un campo de extremales es que se cumpla *la condición reforzada de Legendre*. Esta consiste en que la desigualdad

$$F_{y'y'} > 0$$

se cumpla en todos los puntos de la extremal considerada (o sea, para todos los $x \in [x_0, x_1]$).

EJEMPLO 13. Consideremos la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^2 (y'^4 + y'^2)\,dx; \qquad y(0) = 1, \qquad y(2) = 5.$$

Sus extremales son las rectas $y = C_1x + C_2$. La extremal buscada que satisface las condiciones de frontera es la recta $y = 2x + 1$.

En este caso $F_{y'y'} = 12y'^2 + 2$ y en todos los puntos de la extremal $y = 2x + 1$ tenemos $F_{y'y'} = 50 > 0$. Se cumple la condición reforzada de Legendre y, por consiguiente, la extremal $y = 2x + 1$ se puede incluir en un campo de extremales.

Esto se ve también directamente. La extremal $y = 2x + 1$ queda comprendida en la familia monoparamétrica de extremales $y = 2x + \alpha$ (α es el parámetro) que forma un campo propio.

EJEMPLO 14. Consideremos la funcional

$$J[y(x)] = \int_{-1}^{1} (x^2y'^2 + 12y^2)\,dx;$$

$$y(-1) = -1, \qquad y(1) = 1.$$

La ecuación de Euler para esta funcional tiene la forma

$$x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$$

y su solución general es

$$y = C_1x^3 + C_2x^{-4}.$$

La extremal que satisface las condiciones de frontera consideradas es

$$y = x^3.$$

No puede ser incluida en un campo. La única familia monoparamétrica de extremales que la contiene es $y = \alpha x^3$. Pero esta familia no cubre el recinto que contiene el punto de abscisa $x = 0$ (porque las extremales de esta familia no pasan por los puntos del eje Oy con ordenadas distintas de cero).

En este caso tenemos $F_{y'y'} = 2x^2$ y la condición de Legendre no se cumple para $x = 0$.

Analizar la posibilidad de incluir la extremal en un campo para las funcionales siguientes

142. $J[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 - yy'^3)\,dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

143. $J[y(x)] = \int_0^a y'^3\,dx; \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b > 0.$

144. $J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} n(y)\sqrt{1+y'^2}\,dx;$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad n(y) > 0.$$

145. $J[y(x)] = \int_0^a (6y'^2 - y'^4)\,dx;$

$$y(0) = 0, \quad y(a) = b, \quad b > 0.$$

§ 8. Condiciones suficientes de extremo de una funcional

Se considera el problema variacional elemental, o sea, se considera la funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx \tag{1}$$

con las condiciones de frontera

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1. \tag{2}$$

1°. Condiciones suficientes de Weierstrass. Se denomina *función de Weierstrass* $E(x, y, p, y')$ la función definida mediante la igualdad

$$E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)\,F_p(x, y, p),$$

donde $p = p(x, y)$ es la inclinación, en el punto (x, y), del campo de extremales del problema variacional (1) y (2).

CONDICIONES SUFICIENTES DE EXTREMO DÉBIL.

La curva C realiza el extremo débil de la funcional (1) *si:*
1) *la curva C es una extremal de la funcional* (1) *que satisface las condiciones de frontera* (2), *o sea, es la solución de la ecuación de Euler para la funcional* (1) *que satisface las condiciones* (2);
2) *la extremal C puede ser incluida en un campo de extremales (esto tendrá lugar, en particular, si se cumple la condición de Jacobi)*;
3) *la función de Weierstrass* $E(x, y, p, y')$ *conserva su signo en todos los puntos* (x, y) *próximos a la extremal C y para valores de* y' *próximos a* $p(x, y)$. *La funcional* $J[y(x)]$ *tendrá máximo en C si* $E \leqslant 0$ *y mínimo si* $E \geqslant 0$.

CONDICIONES SUFICIENTES DE EXTREMO FUERTE.

La curva C realiza el extremo fuerte de la funcional (1) *si:*
1) *la curva C es una extremal de la funcional* (1) *que satisface las condiciones de frontera* (2);
2) *la extremal C puede ser incluida en un campo de extremales*;
3) *la función de Weierstrass* $E(x, y, p, y')$ *conserva su signo en todos los puntos* (x, y) *próximos a la extremal C y para valores cualesquiera de* y'. *Si* $E \leqslant 0$, *se tendrá máximo y, si* $E \geqslant 0$, *se tendrá mínimo.*

OBSERVACIÓN. La condición de Weierstrass es necesaria para que exista el extremo en el sentido siguiente: si para ciertos valores de y' la función E tiene signos opuestos en los puntos de la extremal, no se alcanza el extremo fuerte; si esto ocurre para cualesquiera valores de y' por próximos que sean a p, tampoco se alcanza el extremo débil.

EJEMPLO 1. Analizar el extremo de la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^1 (y'^3 + y')\,dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2.$$

SOLUCIÓN. La ecuación de Euler para la funcional considerada tiene la forma $y'y'' = 0$ de modo que las extremales son las rectas $y = C_1x + C_2$. La extremal que satisface las condiciones de frontera es la recta $y = 2x$. La inclinación del campo en los puntos de esta extremal es $p = 2$. Es evidente que la extremal $y = 2x$ se puede incluir en el campo central de extremales $y = Cx$ con centro en el punto $O(0, 0)$. Es fácil probar así mismo que en este caso se cumple la condición de Jacobi. La ecuación de Jacobi es en este caso $-\frac{d}{dx}(6y'u') = 0$, donde, debido a la ecuación de la extremal, hay que poner $y' = 2$. Por consiguiente, la ecuación de Jacobi toma la forma $u'' = 0$ de modo que $u = C_1x + C_2$. De la condición $u(0) = 0$ obtenemos $C_2 = 0$. Puesto que para $C_1 \neq 0$ esta solución $u = C_1x$ no se anula en ningún punto a excepción del punto $x = 0$, la condición de Jacobi se cumple.

Formamos la función de Weierstrass

$$E(x, y, p, y') = y'^3 + y' - p^3 - p - (y' - p)(3p^2 + 1) = \\ = (y' - p)^2 (y' + 2p).$$

El primer factor es no negativo cualesquiera que sean los valores de y' y el segundo es positivo para valores de y' próximos a 2. Por consiguiente, se cumplen todas las condiciones de mínimo débil. Además, es fácil ver que para $y' < -4$ la función E será negativa y no se cumplirá la condición suficiente de extremo fuerte ya que para el extremo fuerte se exige que la función de Weierstrass E conserve su signo para valores cualesquiera de y'. Si se tiene en cuenta la observación de la pág. 92, se puede llegar a la conclusión de que en este caso no hay extremo fuerte.

EJEMPLO 2. Analizar el extremo de la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^1 \left(x + 2y + \frac{1}{2} y'^2\right) dx;$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

SOLUCIÓN. La ecuación de Euler para esta funcional tiene la forma $y'' = 2$. Las extremales son las parábolas $y = x^2 + C_1 x + C_2$. La extremal que satisface las condiciones de frontera es $y = x^2 - x$. Formamos la ecuación de Jacobi $-\frac{d}{dx} u' = 0$, o sea, $u'' = 0$. Su solución general es $u = C_1 x + C_2$. La condición $u(0) = 0$ da $C_2 = 0$ y la condición Jacobi se cumple ya que $u = C_1 x$ con $C_1 \neq 0$ no se anula en ningún punto del segmento $[0, 1]$ a excepción del punto $x = 0$; es decir, la extremal $y = x^2 - x$ se puede incluir en un campo central de extremales con centro en el punto $O(0, 0)$, a saber, en el campo $y = x^2 + Cx$ (fig. 11). La función de Weierstrass tiene la forma $E(x, y, p, y') = \frac{1}{2}(y' - p)^2$. Se puede ver de aquí que $E = \frac{1}{2}(y' - p)^2 \geqslant 0$ para cualesquiera valores de y' Por consiguiente, la funcional considerada alcanza en la extremal $y = x^2 - x$ mínimo fuerte igual a $J[x^2 - x] = \frac{1}{3}$.

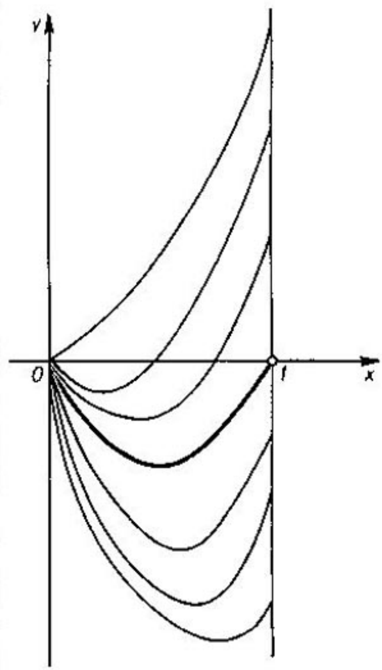


Fig. 11

Analizar el extremo de las funcionales siguientes.

146. $J[y(x)]=\int\limits_0^1 e^x\left(y^2+\frac{1}{2}y'^2\right)dx;\quad y(0)=1,\quad y(1)=e.$

147. $J[y(x)]=\int\limits_0^1 e^y y'^2\,dx;\quad y(0)=0,\quad y(1)=\ln 4.$

148. $J[y(x)]=\int\limits_1^2 \frac{x^3}{y'^2}\,dx;\quad y(1)=1,\quad y(2)=4.$

149. $J[y(x)]=\int\limits_0^a \frac{dx}{y'};\quad y(0)=0,\quad y(a)=b,\quad b>0.$

150. $J[y(x)]=\int\limits_0^1 (1+x)\,y'^2\,dx;\quad y(0)=0,\quad y(1)=1.$

151. $J[y(x)]=\int\limits_0^{\pi/2} (y^2-y'^2)\,dx;\quad y(0)=1,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

152. $J[y(x)]=\int\limits_{-1}^2 y'(1+x^2y')\,dx;\quad y(-1)=1,\quad y(2)=4.$

153. $J[y(x)]=\int\limits_{-1}^1 (y'^3+y'^2)\,dx;\quad y(-1)=-1,\quad y(1)=3.$

2º. Condiciones suficientes de Legendre. Supongamos que la derivada parcial $F_{y'y'}(x, y, y')$ de la función $F(x, y, y')$ es continua y que la extremal C está incluida en un campo de extremales.

Si en la extremal C se tiene $F_{y'y'}>0$, en la curva C se alcanza mínimo débil; si en la extremal C se tiene $F_{y'y'}<0$, en ella se alcanza el máximo débil de la funcional (1). Estas condiciones se llaman *condiciones reforzadas de Legendre.*

En el caso en que $F_{y'y'}(x, y, y')\geqslant 0$ en todos los puntos (x, y) próximos a la extremal C y para cualesquiera valores de y', se tiene mínimo fuerte y en el caso en que $F_{y'y'}(x, y, y')\leqslant 0$ para estos valores de los argumentos, se tiene máximo fuerte.

EJEMPO 3. Analizar el extremo de la funcional

$$J[y(x)]=\int_0^1 (y'^3-\alpha y')\,dx; \qquad y(0)=0, \qquad y(1)=-2$$

(α es un número real cualquiera).

SOLUCIÓN. Puesto que la función integrando depende sólo de y', las extremales son las rectas $y=C_1x+C_2$. La extremal que satisface las condiciones de frontera es la recta $y=-2x$ que se puede incluir en el campo central de extremales $y=Cx$. La inclinación del campo en esta extremal es $p=-2$. A continuación, calculamos $F_{y'y'}=6y'$. En la extremal tenemos $F_{y'y'}=-12<0$, o sea, la funcional alcanza máximo débil en la línea $y=-2x$. Para valores arbitrarios de y' el signo de $F_{y'y'}$ no se conserva y, por consiguiente, no se cumplen las condiciones suficientes de máximo fuerte.

En este caso la función de Weierstrass $E(x, y, p, y')$ tiene la forma

$$E(x, y, p, y')=(y'-p)^2(y'+2p)$$

y para determinados valores de y' tiene signos opuestos. Teniendo en cuenta la observación de la pág. 92, deducimos que no hay máximo fuerte.

EJEMPLO 4. Analizar el extremo de la funcional

$$J[y(x)]=\int_0^2 (e^{y'}+3)\,dx; \qquad y(0)=0, \qquad y(2)=1.$$

SOLUCIÓN. Las extremales son las rectas $y=C_1x+C_2$. La extremal que satisface las condiciones de frontera es la recta $y=\frac{x}{2}$; puede ser incluida en el campo central de extremales $y=Cx$. Tenemos, además, $F_{y'y'}(x, y, y')=e^{y'}>0$ para cualesquiera valores de y'. Por consiguiente, la funcional tiene mínimo fuerte en la extremal $y=\frac{x}{2}$.

EJEMPLO 5. Analizar el extremo de la funcional

$$J[y(x)]=\int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx; \qquad y(0)=0, \qquad y(a)=y_1.$$

SOLUCIÓN. La función integrando no depende explícitamente de x y, por eso, tenemos $F-y'F_{y'}=\widetilde{C}_1$ o, en nuestro caso,

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-\frac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}=\widetilde{C}_1,$$

de donde

$$\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}=\widetilde{C}_1 \quad \text{ó} \quad y(1+y'^2)=C_1,$$

donde $C_1=\left(\frac{1}{\widetilde{C}_1}\right)^2$. Pongamos $y'=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$. Tendremos $y=C_1\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}=$ $=\frac{C_1}{2}(1-\cos t)$. Además,

$$dx=\frac{dy}{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}=\frac{C_1\operatorname{sen} t\,dt}{2\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}=C_1\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}\,dt$$

e, integrando, encontramos

$$x=C_1\int\frac{(1-\cos t)\,dt}{2}=\frac{C_1}{2}(t+\operatorname{sen} t)+C_2.$$

Tenemos pues $\left(C=\frac{C_1}{2}\right)$

$$\left.\begin{aligned} x&=C(t-\operatorname{sen} t)+C_2,\\ y&=C(1-\cos t),\end{aligned}\right\}$$

o sea, las ecuaciones paramétricas de una familia de cicloides. De la

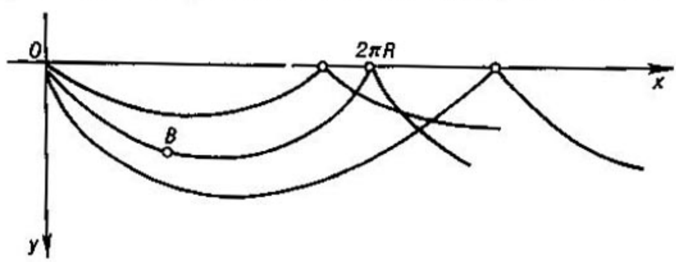


Fig. 12

condición $y(0)=0$ encontramos $C_2=0$. El haz de icloides

$$\left.\begin{aligned} x&=C(t-\operatorname{sen} t),\\ y&=C(1-\cos t)\end{aligned}\right\}$$

forma un campo central con centro en el punto $O(0, 0)$ que comprende la extremal

$$\left.\begin{aligned} x&=R(t-\operatorname{sen} t),\\ y&=R(1-\cos t),\end{aligned}\right\}$$

donde R se determina de la condición de que la cicloide pase por el segundo punto frontera $B(a, y_1)$, si $a<2\pi R$ (fig. 12).

Empleamos la condición de Legendre. Tenemos

$$F_{y'y'}=\frac{1}{\sqrt{y}\,(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}>0$$

para cualesquiera valores de y'. Es decir, para $a<2\pi R$ la funcional considerada tiene mínimo fuerte en la cicloide

$$\left.\begin{aligned} x&=R\,(t-\operatorname{sen} t),\\ y&=R\,(1-\cos t).\end{aligned}\right\}$$

Empleando la condición de Legendre, analizar el extremo de las funcionales siguientes:

154. $J[y(x)]=\int\limits_0^1 (y'^2+x^2)\,dx;\quad y(0)=-1,\quad y(1)=1.$

155. $J[y(x)]=\int\limits_2^3 \frac{x^3}{y'^2}\,dx;\quad y(2)=4,\quad y(3)=9.$

156. $J[y(x)]=\int\limits_1^2 (xy'^4-2yy'^3)\,dx;\quad y(1)=0,\quad y(2)=1.$

157. $J[y(x)]=\int\limits_0^a (1-e^{-y'^2})\,dx;\quad y(0)=0,\quad y(a)=b.$

158. $J[y(x)]=\int\limits_0^1 yy'^2\,dx;\quad y(0)=p>0,\quad y(1)=q>0.$

159. Analizar el extremo de la funcional

$$J[y(x)]=\int\limits_0^1 (\varepsilon y'^2+y^2+x^2)\,dx;\quad y(0)=0,\quad y(1)=1;$$

para distintos valores del parámetro ε.

EJEMPLO 6 (problema de Euler). Una barra vertical de longitud l se somete a una carga axial P. Para un valor determinado de P (fuerza crítica de Euler) la barra se comba. Se pide determinar el valor mínimo de la fuerza P que provoca la flexión longitudinal.

SOLUCIÓN. Sea E el módulo de elasticidad, sea I el momento de inercia mínimo de las secciones transversales de la barra, sea ρ el radio de curvatura y sea φ el ángulo entre la tangente y el eje.

La energía potencial de la flexión se determina mediante la fórmula

$$U_1=\frac{1}{2}EI\int_0^l \frac{dS}{\rho^2}.$$

Si el extremo de la barra desciende en

$$\sigma=\int_0^l (1-\cos\varphi)\,dS,$$

la energía potencial de la barra disminuye en

$$U_2=P\sigma=Pl-P\int_0^l \cos\varphi\,dS.$$

Si antes de la deformación la energía potencial es igual a cero, después de la deformación estará dada por la fórmula

$$U=U_1-U_2=\int_0^l \left(\frac{1}{2}EI\frac{1}{\rho^2}+P\cos\varphi\right)dS-Pl.$$

Puesto que $\rho=\frac{dS}{d\varphi}$ y (para pequeños valores de φ) $\cos\varphi\approx 1-\frac{\varphi^2}{2}$, se tiene

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l \left[EI\left(\frac{d\varphi}{dS}\right)^2-P\varphi^2\right]dS\approx\frac{1}{2}\int_0^l \left[EI\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2-P\varphi^2\right]dx.$$

En el caso de equilibrio, la energía potencial toma su valor mínimo. Por eso, el problema se reduce a la determinación del mínimo de la integral

$$J[\varphi(x)]=\int_0^l \left[EI\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2-P\varphi^2\right]dx.$$

En este caso

$$F=EI\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2-P\varphi^2$$

y la ecuación de Euler tiene la forma

$$\varphi''+\alpha^2\varphi=0,\quad \text{donde}\quad \alpha^2=\frac{P}{EI}.$$

La solución general de esta ecuación es

$$\varphi=C_1\operatorname{sen}\alpha x+C_2\cos\alpha x.$$

Puesto que $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$ para valores pequeños de φ y como, además, $\operatorname{tg} \varphi = y'$, se tiene

$$y' = C_1 \operatorname{sen} \alpha x + C_2 \cos \alpha x,$$

de donde

$$y = -\frac{C_1 \cos \alpha x}{\alpha} + \frac{C_2 \operatorname{sen} \alpha x}{\alpha} + C.$$

Si el extremo inferior de la barra está en el origen de coordenadas, será $y = 0$ para $x = 0$, o sea, $C_1 = C = 0$:

$$y = \frac{C_2}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha x.$$

Veamos si se cumplen las condiciones de Legendre y de Jacobi. Es obvio que la condición de Legendre se cumple:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi'^2} = 2EI > 0.$$

La ecuación de Jacobi tiene la forma

$$EIz'' + Pz = 0 \quad \text{ó} \quad z'' + \alpha^2 z = 0$$

con la particularidad de que $z(0) = 0$. Por eso, la solución de la ecuación de Jacobi será

$$z = A \operatorname{sen} \alpha x.$$

La función z se anula para $x_k = \frac{k\pi}{\alpha}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ de modo que la condición de Jacobi se cumplirá si $l \geqslant \frac{\pi}{\alpha}$. De aquí

$$P \geqslant \frac{\pi^2}{l^2} EI.$$

El valor mínimo de la fuerza crítica de Euler será

$$P_{\text{mín}} = \frac{\pi^2}{l^2} EI$$

y la ecuación de la curva de flexión será

$$y = \frac{C_2}{\alpha} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}.$$

3°. Figuratriz. Sea dada la funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx.$$

Tomando x e y como parámetros, consideremos la función $y = F(x, y, y')$ en tanto que función del argumento y'. El gráfico de esta función en el plano de las variables (y', Y) se denomina *figuratriz.*

Es fácil probar que la función de Weierstrass $E(x, y, p, y')$ representa la diferencia entre las ordenadas de la figuratriz y las ordenadas de la tangente a la figuratriz trazada por el punto de abscisa $y' = p$. Si la función de Weierstrass conserva su signo para ciertos valores de y', ello significa que la figuratriz está por encima o por debajo de la tangente para esos valores de y'. En este caso hay mínimo débil. Si la figuratriz está a un lado de la tangente para todos los valores de y' y para los valores de los parámetros x e y próximos a los puntos de la extremal, hay extremo fuerte.

La condición suficiente de Legendre se expresa en estos términos así: *si para todos los puntos (x, y) próximos a la extremal la figuratriz es cóncava hacia las Y positivas o negativas, hay extremo fuerte.*

EJEMPLO 7. Analizar el extremo de la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^a y'^2\,dx; \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b, \quad b > 0.$$

SOLUCIÓN. Las extremales son las rectas $y = C_1x + C_2$. La extremal buscada viene dada por la ecuación $y = \frac{b}{a}x$. Puede ser incluida

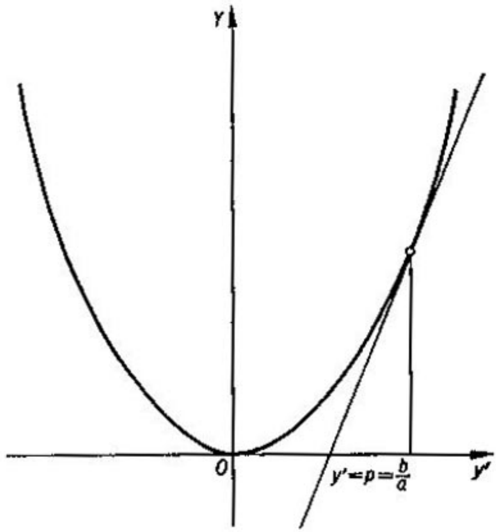


Fig. 13

en un campo central de extremales. La figuratriz es la parábola $Y = y'^2$ (fig. 13). Es fácil ver que toda la figuratriz está por encima de la tangente trazada a la misma en el punto $p = \frac{b}{a}$ cualesquiera que sean a y b ($a \neq 0$). Por consiguiente, la funcional considerada tiene mínimo fuerte en la extremal $y = \frac{b}{a}x$.

EJEMPLO 8. Analizar el extremo de la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^a y'^3\,dx; \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b, \quad b > 0.$$

SOLUCIÓN. La extremal buscada es la recta $y = \frac{b}{a}x$ que se puede incluir en el campo central de extremales $y = Cx$ con centro en el

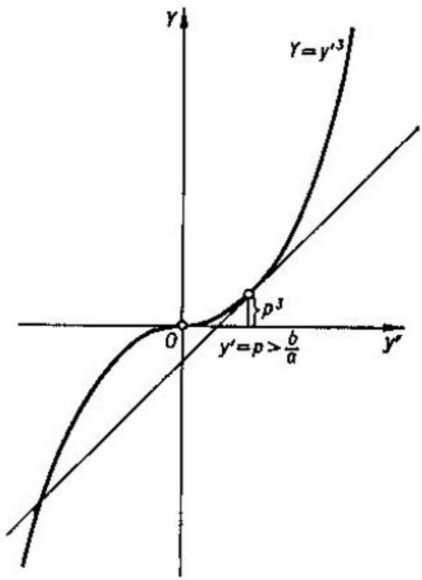


Fig. 14

punto O (0, 0). La fuguratriz es la parábola cúbica $Y = y'^3$ (fig. 14). Para valores de y' suficientemente próximos al valor $p = \frac{b}{a}$ la figuratriz está sobre la tangente a la misma en el punto de abscisa $y' = \frac{b}{a}$. De la fig. 14 se puede ver que la figuratriz corta la tangente en el punto de abscisa $y' = -\frac{2b}{a}$ y a la izquierda de este punto aparece por debajo de la tangente. Por lo tanto, hay mínimo débil en la extremal $= \frac{b}{a} x$.

Nótese que para $p = 0$ (esto corresponde al caso $b = 0$ en el que la extremal es un segmento del eje Ox) la tangente a la figuratriz es el eje Oy' y el punto O (0, 0) es un punto de inflexión de la figuratriz. Teniendo en cuenta la observación de la pág. 92, vemos que en cualquier vecindad del punto O (0, 0), por pequeña que sea, la figuratriz tiene ordenadas tanto positivas como negativas. Por lo tanto, la función de Weierstrass E tiene signos opuestos para valores de y' tan próximos a $p = 0$ como se quiera y, por consiguiente, en esto caso no se alcanza ni siquiera el extremo débil.

EJEMPLO 9. Probar que la extremal $y = 0$ del problema variacional

$$J[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 - yy'^3)\,dx; \qquad y(0) = y(1) = 0;$$

realiza el mínimo débil de la funcional.

SOLUCIÓN. En este caso la condición de Legendre da

$$F_{y'y'}|_{y=0} = (2 - 6yy')|_{y=0} = 2 > 0,$$

o sea, se alcanza mínimo débil en la extremal $y = 0$. Demostremos que en esta extremal no se alcanza el mínimo fuerte. Consideremos la

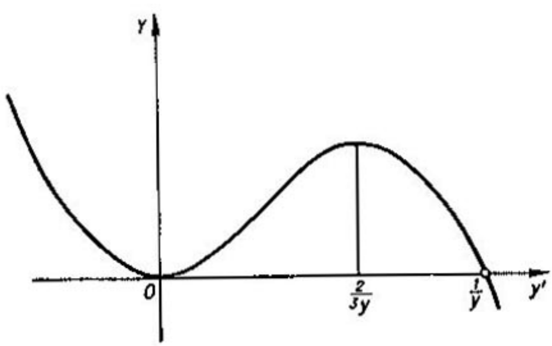


Fig. 15

figuratriz $Y = y'^2 - yy'^3$ para los valores $y > 0$ (fig. 15). De la fig. 15 se ve que la tangente a la figuratriz en el punto de abscisa $p = 0$ corta la figuratriz en el punto $y' = \frac{1}{y}$. Es decir, para los puntos (x, y), con $y > 0$, próximos a los puntos de la extremal $y = 0$, la función de Weierstrass E es positiva para valores de y' menores que $\frac{1}{y}$ y es negativa para $y' > \frac{1}{y}$. Según la observación de la pág. 92, no hay mínimo fuerte. Una situción semejante se tiene también para $y < 0$.

Lo que destaca este ejemplo es que en él la condición $F_{y'y'} > 0$ se cumple en la extremal para cualesquiera y' y, sin embargo, ello no implica la existencia de extremo fuerte.

Empleando la figuratriz analizar el extremo de las funcionales siguientes:

160. $J[y(x)] = \int_0^1 (1+x) y'^2 \, dx; \quad y(0)=0, \quad y(1)=-2.$

161. $J[y(x)] = \int_{-1}^2 y'(1+x^2y') \, dx; \quad y(-1)=y(2)=1.$

162. $J[y(x)] = \int_0^a (1-e^{-y'^4}) \, dx;$

$$y(0)=0, \quad y(a)=b, \quad (b>0).$$

163. $J[y(x)] = \int_0^a (6y'^2 - y'^4 + yy') \, dx;$

$$y(0)=0, \quad y(a)=b \quad (b>0).$$

OBSERVACIÓN. La no negatividad de la segunda variación es condición necesaria, pero no suficiente, para que la funcional $J[y(x)]$ alcance mínimo en la curva.

EJEMPLO 10. Consideremos la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^1 y^2(x-y) \, dx$$

en el espacio $C[0, 1]$. La ecuación de Euler tiene la forma $F_y = 0$ ó $y = 0$. Para $0 \leqslant x \leqslant 1$ la segunda variación de la funcional en la extremal $y = 0$

$$\delta^2 J[0, \delta y] = \int_0^1 x(\delta y)^2 \, dx$$

es positiva para todo $\delta y \neq 0$. Sin embargo, en cualquier vecindad del cero la funcional $J[y(x)]$ toma también valores negativos; basta fijar

$\varepsilon > 0$ y considerar la función

$$y_\varepsilon(x) = \begin{cases} -x+\varepsilon, & 0 \leqslant x < \varepsilon, \\ 0, & x \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Entonces tendremos $J[y_\varepsilon(x)] = -\dfrac{\varepsilon^4}{6} < 0$ para cualquier $\varepsilon > 0$.

DEFINICIÓN. Se dice que la funcional cuadrática $L_2[h]$ definida en un espacio normado es *fuertemente positiva* si existe una constante $k > 0$ tal que

$$L_2[h] \geqslant k \| h \|^2$$

para todo h.

CONDICIÓN SUFICIENTE DE MÍNIMO. *Condición suficiente para que la funcional $J[y(x)]$ definida en un espacio normado tenga mínimo en el punto estacionario $y = y_0$ es que su segunda variación sea fuertemente positiva en $y = y_0$, o sea, que se cumpla la condición*

$$\delta^2 J[y_0, \delta y] \geqslant k \| \delta y \|^2,$$

donde $k = \text{const}$, $k > 0$.

4°. Supongamos que se busca el extremo de la funcional

$$J[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx, \quad (3)$$

que depende de n funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, con las condiciones de frontera

$$y_k(x_0) = y_{k0}, \quad y_k(x_1) = y_{k1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

La condición reforzada de Legendre consiste en que las desigualdades

$$F_{y_1'y_1'} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots,$$

$$\begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} & \ldots & F_{y_1'y_n'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} & \ldots & F_{y_2'y_n'} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{y_n'y_1'} & F_{y_n'y_2'} & \ldots & F_{y_n'y_n'} \end{vmatrix} > 0 \quad (4)$$

se cumplan en todos los puntos de la extremal considerada de la funcional (3).

La condición reforzada de Jacobi consiste en que el segmento $[x_0, x_1]$ no contenga punto conjugado del punto x_0.

La condición reforzada de Legendre (4) conjuntamente con la condición reforzada de Jacobi garantizan por lo menos la existencia del mínimo débil de la funcional (3).

EJEMPLO 11. Analizar el extremo de la funcional

$$J[y(x), z(x)] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2)\, dx; \tag{5}$$

$$\left.\begin{array}{ll} y(0)=0, & z(0)=0, \\ y(1)=1, & z(1)=2. \end{array}\right\} \tag{6}$$

SOLUCIÓN. Las ecuaciones de Euler para la funcional (5) son

$$y'' = 0, \quad z'' = 0,$$

de modo que

$$\left.\begin{array}{l} y = C_1 + C_2 x, \\ z = C_3 + C_4 x. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Empleando las condiciones (6), obtenemos

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1, \quad C_3 = 0 \quad \text{y} \quad C_4 = 2.$$

La extremal buscada

$$\left.\begin{array}{l} y = x, \\ z = 2x \end{array}\right\} \tag{8}$$

representa una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Tenemos

$$F_{y'y'} = 2, \quad F_{y'z'} = 0, \quad F_{z'y'} = 0 \quad \text{y} \quad F_{z'z'} = 2.$$

La condición reforzada de Legendre se cumple:

$$F_{y'y'} = 2 > 0, \quad \begin{vmatrix} F_{y'y'} & F_{y'z'} \\ F_{z'y'} & F_{z'z'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Veamos si se cumple la condición reforzada de Jacobi.

Una de las definiciones de punto conjugado es la siguiente (véase [3]).

Supongamos que se tiene una familia de extremales de la funcional (3) que arrancan del punto inicial $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$ en direcciones próximas pero linealmente independientes. Se dice que el punto $x^* \in [x_0, x_1]$ es *conjugado del punto* x_0 si existe una sucesión de extremales, que arrancan todas del punto inicial y que son tan próximas como se quiera a la extremal considerada, tal que cada una de estas extremales corta la extremal considerada con la particularidad de que las abscisas de los puntos de intersección convergen hacia el punto x^*.

En nuestro caso las extremales son las rectas (7). Todas las extremales que arrancan del punto (0, 0, 0) cortan la extremal (8) en este punto solamente. Por lo tanto, el segmento $[0, 1]$ de variación de x no contiene punto conjugado del punto $x_0 = 0$. Es decir, se cumple tanto la condición reforzada de Legendre como la condición reforzada de Jacobi de modo que la extremal (8) realiza el mínimo débil de la funcional (5).

Analizar el extremo de las funcionales siguientes:

164. $$J[y(x), z(x)] = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx;$$
$$y(0)=0,\quad y(1)=2,\quad z(0)=0,\quad z(1)=4.$$

165. $$J[y(x), z(x)] = \int_0^1 (y'^2+z'^2+4z)\,dx;$$
$$y(0)=0,\quad y(1)=1,\quad z(0)=0,\quad z(1)=0.$$

§ 9. Extremo condicionado

1°. Problema isoperimétrico. Sean $F(x, y, y')$ y $G(x, y, y')$ dos funciones.

El problema isoperimétrico consiste en lo siguiente: entre todas las curvas $y = y(x) \in C_1[x_0, x_1]$ a lo largo de las cuales la funcional

$$K[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\,dx$$

tiene un valor fijo l hallar la curva en la que la funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

alcanza su valor extremo.

Suponemos que las funciones F y G tienen derivadas parciales continuas de primer y de segundo órdenes para $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ y para valores cualesquiera de las variables y e y'.

TEOREMA DE EULER. *Si la curva $y = y(x)$ realiza el extremo de la funcional*

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

con las condiciones

$$K[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\,dx = l, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1,$$

y si $y = y(x)$ no es extremal de la funcional K existe una constante λ tal que la curva $y = y(x)$ es extremal de la funcional

$$L[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y')]\,dx.$$

EJEMPLO 1 (problema de Dido). Entre todas las curvas cerradas de longitud $2l$ hallar la curva que comprende el área máxima.

SOLUCIÓN. Observemos, ante todo, que dicha curva debe ser convexa. Efectivamente, de lo contrario encontraríamos una recta L

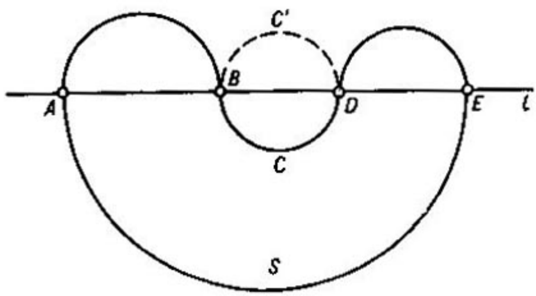


Fig. 16

(fig. 16) tal que, al reflejar en ella la parte BCD de la frontera, obtendríamos un recinto de área mayor que el inicial siendo la longitud de la frontera la misma que antes.

Observemos también que toda recta que divide por la mitad la cerrada que comprende el área máxima ha de dividir por la mitad la propia área. Efectivamente, supongamos lo contrario y sea L_1 una recta que no cumple esta propiedad. Reflejando en L_1 la parte de la figura de área mayor, obtendremos una curva de idéntica longitud pero que comprende un área mayor.

Tomemos como eje Ox cualquiera de las rectas que dividen por la mitad la curva; llegamos entonces al problema siguiente.

Hallar la línea $y = y(x)$, $y(-a) = y(a) = 0$, de longitud fija $l > 2a$ que conjuntamente con el segmento $-a \leqslant x \leqslant a$ del eje Ox encierre el área máxima. Por lo tanto, el problema se reduce a hallar el extremo de la funcional

$$J[y(x)] = \int_{-a}^{a} y\,dx; \quad y(-a) = y(a) = 0;$$

con la condición complementaria de que

$$K[y(x)]=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+y'^2}\,dx=l \qquad (l>2a). \tag{1}$$

Formemos la función auxiliar

$$H=F+\lambda G=y(x)+\lambda\sqrt{1+y'^2(x)}$$

y consideremos la funcional auxiliar

$$L[y(x)]=\int_{-a}^{a}H(x,\ y,\ y')\,dx. \tag{2}$$

La ecuación de Euler para la funcional (2) tiene la forma

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=1,$$

de donde

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}=x+C_1.$$

Resolviendo la última ecuación respecto a y', encontramos

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+C_1}{\sqrt{\lambda^2-(x+C_1)^2}}. \tag{3}$$

Integrando la ecuación (3), obtenemos

$$(x+C_1)^2+(y+C_2)^2=\lambda^2,$$

o sea, la circunferencia de radio λ con centro en el punto $(-C_1,\ -C_2)$. Las constantes C_1 y C_2 así como el parámetro λ se determinan de las condiciones de frontera $y(-a)=y(a)=0$ y de la condición isoperimétrica (1). Tenemos

$$\left.\begin{aligned}C_2^2&=\lambda^2-(C_1-a)^2,\\ C_2^2&=\lambda^2-(C_1+a)^2,\end{aligned}\right\}$$

de donde

$$C_1=0 \quad \text{y} \quad C_2=\sqrt{\lambda^2-a^2}$$

de modo que

$$y=\sqrt{\lambda^2-x^2}-\sqrt{\lambda^2-a^2} \quad \text{e} \quad y'=-\frac{x}{\sqrt{\lambda^2-x^2}}.$$

La condición (1) da entonces

$$l=\int_{-a}^{a}\frac{\lambda\,dx}{\sqrt{\lambda^2-x^2}}=\lambda\arcsen\frac{x}{\lambda}\Big|_{x=-a}^{x=a}=2\lambda\arcsen\frac{a}{\lambda}$$

o sea,

$$\frac{a}{\lambda}=\operatorname{sen}\frac{l}{2\lambda}.$$

Resolviendo respecto a λ esta ecuación trascendente, encontramos un valor determinado $\lambda=\lambda_0$ y después encontramos el valor de $C_2=$ $=\sqrt{\lambda_0^2-a^2}$.

Es fácil persuadirse de que la ecuación $\frac{a}{\lambda}=\operatorname{sen}\frac{l}{2\lambda}$ tiene siempre solución. Efectivamente, tomando $\frac{l}{2\lambda}=t$, esta ecuación quedará reducida a $\operatorname{sen} t=\frac{2a}{l}t$, donde $\frac{2a}{\lambda}=\alpha<1$ por hipótesis del problema. La inclinación de la tangente a la función $y=\operatorname{sen} t$ en el punto $t=0$ es $\frac{\pi}{4}$ mientras que la inclinación de la función $y=\alpha t$ es menor. Por consiguiente, los gráficos de estas funciones tienen un punto de intersección como mínimo, a parte del punto O (0, 0).

PRINCIPIO DE RECIPROCIDAD EN EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO. *Las extremales de la funcional*

$$J[y(x)]=\int_{x_2}^{x_1}F(x,\ y,\ y')\,dx$$

con la condición complementaria

$$K[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}G(x,\ y,\ y')\,dx=\text{const}$$

coinciden con las extremales de la funcional $K[y(x)]$ *con la condición* $J[y(x)]=\text{const}$.

Basándonos en el principio de reciprocidad, deducimos del problema de Dido el resultado siguiente: *entre todas las curvas cerradas que comprenden un área fija, la circunferencia es la curva de longitud mínima.*

Es fácil obtener este resultado directamente si se recurre a la forma paramétrica del problema variacional.

Sean

$$\left.\begin{array}{ll}x=x(t), & x(t_0)=x(t_1),\\ y=y(t), & y(t_0)=y(t_1),\end{array}\right\}\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1,$$

las ecuaciones de una curva cerrada. El problema consiste en hallar el extremo de la funcional

$$\int (\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}\,dt$$

con la condición

$$\int (x\dot{y}-y\dot{x})\,dx=C.$$

Introduciendo la función

$$F=(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}+\lambda\,(x\dot{y}-y\dot{x}),$$

encontramos (véase la pág. 68) que la curvatura $\frac{1}{r}$ de la curva que realiza el extremo es constante:

$$\frac{1}{r}=\lambda.$$

Por consiguiente, la extremal buscada es una circunferencia.

Utilizando el principio de reciprocidad, se pueden resolver, sin realizar cálculos, algunos problemas «variacionales» de la Geometría elemental.

EJEMPLO 2. Demostrar que: 1) entre todos los triángulos de base y perímetro fijos, el de área máxima es el triángulo isósceles; 2) siendo fijas el área y la base, el triángulo isósceles es el triángulo de perímetro mínimo.

SOLUCIÓN. 1) Tomemos una elipse cuyos focos son los extremos de la base de los triángulos considerados (fig. 17). De la propiedad

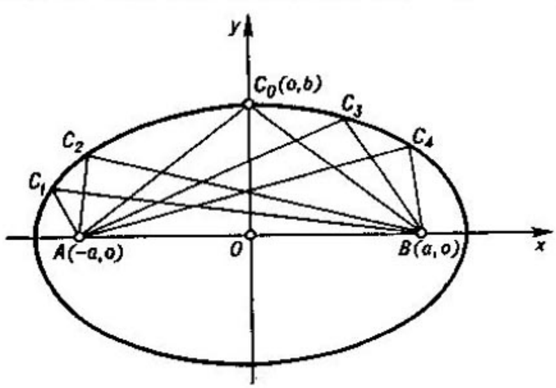


Fig. 17

de la elipse deducimos que todos los triángulos ACB tienen el mismo perímetro. Es evidente que el área máxima corresponderá al triángulo de altura máxima lo que significa que el vértice del triángulo debe coincidir con el vértice C_0 de la elipse. El triángulo AC_0B es isósceles.

2) Según el principio de reciprocidad, siendo fijas el área y la base, el perímetro mínimo corresponde al triángulo isósceles.

EJEMPLO 3. Hallar el mínimo de la integral

$$J[y(x)]=\int_0^{\pi} y'^2\,dx$$

con las condiciones $\int_0^{\pi} y^2\,dx=1,\ y(0)=y(\pi)=0.$

SOLUCIÓN. Formemos la funcional auxiliar

$$L[y(x)]=\int_0^{\pi}(y'^2+\lambda y^2)\,dx$$

y consideremos su ecuación de Euler

$$2\lambda y-\frac{d}{dx}(2y')=0, \quad \text{o sea,} \quad y''-\lambda y=0. \tag{4}$$

Su ecuación característica es $r^2-\lambda=0$, de donde $r_{1,2}=\pm\sqrt{\lambda}$. Está claro que λ debe ser menor que cero: si aceptamos que $\lambda>0$, la solución general de la ecuación (4) tendrá la forma $y=C_1e^{\sqrt{\lambda}x}+$ $+C_2e^{-\sqrt{\lambda}x}$, las condiciones de frontera $y(0)=y(\pi)=0$ se cumplirán sólo para $C_1=0$, $C_2=0$, o sea, resultará $y\equiv 0$ y no se cumplirá en este caso la condición $\int_0^{\pi} y^2\,dx=1$; de la misma forma, si $\lambda=0$, la solución de la ecuación de Euler (4) que satisface las condiciones de frontera también será la función $y\equiv 0$. Por eso, consideramos que $\lambda<0$ de modo que $r_{1,2}=\pm i\sqrt{-\lambda}i$ y la solución general de la ecuación (4) es $y=C_1$ sen $\sqrt{-\lambda}x+C_2\cos\sqrt{-\lambda}x$. La condición $y(0)=0$ da $C_2=0$ y la condición $y(\pi)=0$ da $-\lambda=k^2$ $(k=1,2,\ldots)$. Es decir, $y=C_1$ sen kx, donde C_1 no se ha determinado aún. Utilizando la condición $\int_0^{\pi} y^2\,dx=1$, obtenemos

$$\int_0^{\pi} C_1^2\,\text{sen}^2\,kx\,dx=1,$$

de donde $C_1=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. O sea, $y=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen}kx$. Todas las extremales $y=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen}kx$ pasan por los puntos (0, 0) y (π, 0), pero sólo para dos, a saber, $y=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen}x$, se cumple la condición de Jacobi. En estas dos extremales se tiene

$$J[y(x)]=\int_0^\pi y'^2\,dx=\int_0^\pi \frac{2}{\pi}\cos^2 x\,dx=1.$$

EJEMPLO 4 (problema de Kelvin). Supongamos que en el plano xOy está distribuida una masa de densidad continua $\mu(x, y)$ y supongamos que se tiene en el plano una curva C suave a trozos y dos puntos P_1 y P_2 sobre la misma. Entre todas las curvas de longitud fija l que unen los puntos P_1 y P_2 hallar la curva que conjuntamente con el arco P_1P_2 de la curva C forme un recinto D de masa máxima. Los puntos P_1 y P_2 pueden coincidir.

SOLUCIÓN. Consideremos la función

$$V(x, y)=\int \mu(x, y)\,dx.$$

Según la fórmula de Green, tenemos

$$\iint_D \mu(x, y)\,dx\,dy=\iint_D \frac{\partial V}{\partial x}\,dx\,dy=\oint_\Gamma V\,dy,$$

donde el contorno Γ se compone de la curva L y de la parte P_1P_2 de la curva C. A lo largo de esta última parte la integral toma un valor determinado que designaremos por K. Aceptando que la curva L está dada en forma paramétrica

$$\left.\begin{aligned} x&=x(t),\\ y&=y(t),\end{aligned}\right\}\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1,$$

tendremos entonces

$$\iint_D \mu(x, y)\,dx\,dy=\int_{t_2}^{t_1} V(x, y)\,\dot{y}\,dt+K.$$

Por consiguiente, el problema ha quedado reducido a la determinación del máximo de la funcional

$$J_L=\int_{t_2}^{t_1} V(x, y)\,\dot{y}\,dt$$

con la condición de que

$$\int_{t_2}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\, dt = l.$$

Consideremos la función auxiliar

$$F = V\dot{y} + \lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

y empleemos la forma de Weierstrass de la ecuación de Euler. Tenemos

$$F_{x\dot{y}} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_{y\dot{x}} = 0,$$

$$F_1 = \frac{F_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2} = \frac{\lambda}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

de modo que la ecuación de Euler en la forma de Weierstrass es

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial V}{\partial x}$$

o, recordando la expresión de la función $V(x, y)$,

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu(x, y)}{\lambda},$$

donde r es el radio de curvatura de la curva pedida.

En el caso en que $\mu(x, y) = \text{const}$ resulta que la curvatura de la curva pedida es constante y, por consiguiente, las extremales son circunferencias. Queda claro que realizan el máximo de la funcional J_L.

También se denominan *problemas isoperimétricos* los problemas variacionales en los que se pide hallar el extremo de la funcional

$$J[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\, dx \qquad (5)$$

con las así llamadas condiciones isoperimétricas

$$\int_{x_0}^{x_1} G_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\, dx = l_i \qquad (6)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m),$$

donde l_i son unas constantes.

Para obtener la condición necesaria fundamental en el problema isoperimétrico sobre la determinación del extremo de la funcional (5) con las condiciones (6) hay que formar la funcional auxiliar

$$\Phi[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_i\right) dx,$$

donde λ_i son unas constantes y escribir sus ecuaciones de Euler. Las constantes arbitrarias $C_1, C_2, \ldots, C_{2n}$ de la solución general del sistema de ecuaciones de Euler así como las constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $\ldots, \lambda_m$ se determinan de las condiciones de frontera

$$y_k(x_0) = y_{k0}, \quad y_k(x_1) = y_{k1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

y de las condiciones isoperimétricas (6)

$$\int_{x_0}^{x_1} G_i\, dx = l_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

EJEMPLO 5. Hallar la extremal en el problema isoperimétrico sobre el extremo de la funcional

$$J[y(x), z(x)] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z)\, dx;$$

$$y(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad z(1) = 1;$$

con la condición

$$\int_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2)\, dx = 2. \tag{7}$$

SOLUCIÓN. Formamos la funcional auxiliar

$$\Phi[y(x), z(x)] = \int_0^1 [y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z + \lambda(y'^2 - xy' - z'^2)]\, dx$$

y escribimos para ella el sistema de ecuaciones de Euler

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d}{dx}(2y' + 2\lambda y' - \lambda x) = 0, \\ -4 - \frac{d}{dx}(2z' - 4x - 2\lambda z') = 0; \end{aligned}\right\}$$

resolviéndolo, encontramos

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\lambda x^2 + 2C_1 x}{4(1+\lambda)} + C_2, \\ z &= \frac{C_3 x}{2(1-\lambda)} + C_4. \end{aligned}\right\}$$

Las condiciones de frontera dan

$$C_1=\frac{3\lambda+4}{2}, \quad C_2=0, \quad C_3=2(1-\lambda) \quad \text{y} \quad C_4=0$$

de modo que

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{\lambda x^2+(3\lambda+4)x}{4(1+\lambda)}, \\ z&=x. \end{aligned}\right\}$$

Para determinar λ recurrimos a la condición isoperimétrica (7). Puesto que $y'=\frac{2\lambda x+3\lambda+4}{4(1+\lambda)}$ y $z'=1$, obtenemos

$$\int_2^1 \left[\frac{(2\lambda x+3\lambda+4)^2}{16(1+\lambda)^2}-\frac{(2\lambda x+3\lambda+4)x}{4(1+\lambda)}-1\right]dx=2,$$

de donde, después de unos cálculos sencillos pero voluminosos, obtenemos para λ la ecuación siguiente:

$$\frac{1}{3}(23\lambda^2+46\lambda+24)=48(\lambda^2+2\lambda+1).$$

De aquí resulta $\lambda_1=-\frac{10}{11}$ y $\lambda_2=-\frac{12}{11}$. Introduciendo en (7), vemos que $\lambda_1=-\frac{10}{11}$ satisface y $\lambda_2=-\frac{12}{11}$ no satisface la condición isoperimétrica.

La extremal buscada se determina por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{7x-5x^2}{2}, \\ z&=x. \end{aligned}\right\}$$

Hallar las extremales en los siguientes problemas isoperimétricos.

166. Entre todas las curvas planas de longitud l con extremos en los puntos fijos $M_0(x_0, y_0)$ y $M_1(x_1, y_1)$ hallar la curva con ordenada mínima del centro de gravedad (problema sobre la forma de equilibrio que toma un cable pesado homogéneo por acción de la gravedad).

167. $J[y(x)]=\int_0^1 y'^2\,dx; \quad y(0)=1, \quad y(1)=6;$ con la condición $\int_0^1 y\,dx=3.$

168. $J[y(x)]=\int\limits_0^1 (x^2+y'^2)\,dx;\quad y(0)=0,\quad y(1)=0;$ con la condición $\int\limits_0^1 y^2\,dx=2.$

169. $J[y(x)]=\int\limits_0^1 y'^2\,dx;\quad y(0)=0,\quad y(1)=\frac{1}{4};$ con la condición $\int\limits_0^1 (y-y'^2)\,dx=\frac{1}{12}.$

2°. También es un problema variacional de extremo condicionado el problema de Lagrange en el que se pide hallar el extremo de la funcional $J[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ con la particularidad de que se imponen ciertas condiciones de enlace a las funciones de las cuales depende la funcional J.

El problema se plantea así. Hallar el extremo de la funcional

$$J[y_1, y_2, \ldots, y_n]=\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx; \qquad (8)$$

$$y_j(x_0)=y_{j0},\quad y_j(x_1)=y_{j1}\quad (j=1, 2, \ldots, n);$$

con las condiciones

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)=0 \qquad (9)$$
$$(i=1, 2, \ldots, m;\ m<n)$$

que se consideran independientes.

TEOREMA. *Las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ que realizan el extremo de la funcional* (8) *con las condiciones* (9) *satisfacen, siempre que los factores $\lambda_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ se escojan debidamente, las ecuaciones de Euler de la funcional*

$$J^*=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i\right]dx.$$

Para abreviar pondremos $F+\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i=\Phi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')$. Entonces las funciones $\lambda_i(x)$ e $y_i(x)$ se determinan de las ecuaciones de Euler

$$\Phi'_{y_j}-\frac{d}{dx}\Phi'_{y'_j}=0 \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

y de las ecuaciones

$$\varphi_i(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)=0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Las ecuaciones $\varphi_i=0$ también se pueden considerar como ecuaciones de Euler para la funcional J^* si se acepta que los argumentos de esta funcional son tanto las funciones $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ como las funciones $\lambda_1(x),\ \lambda_2(x),\ \ldots,\ \lambda_m(x)$.

EJEMPLO 6. Hallar la distancia mínima entre los puntos $A(1,\ -1,\ 0)$ y $B(2,\ 1,\ -1)$ que pertenecen a la superficie $15x-7y+z-22=0$.

SOLUCIÓN. Como se saben la distancia entre dos puntos $A(x_0,\ y_0;\ z_0)$ y $B(x_1,\ y_1,\ z_1)$ en la superficie $\varphi(x,\ y,\ z)=0$ se determina por la fórmula

$$l=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx,$$

donde $y=y(x)$, $z=z(x)$.

Se pide, pues, hallar el mínimo de l con la condición $\varphi(x,\ y,\ z)=0$. En nuestro caso,

$$x_0=1,\quad x_1=2,\quad \varphi(x,\ y,\ z)=15x-7y+z-22.$$

Formamos la funcional auxiliar

$$J^*=\int_1^2\left[\sqrt{1+y'^2+z'^2}+\lambda(x)(15x-7y+z-22)\right]dx$$

y escribimos para ésta las ecuaciones de Euler

$$\left.\begin{aligned}\lambda(x)(-7)-\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)=0. \qquad (10)\\ \lambda(x)\cdot 1-\frac{d}{dx}\left(\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)=0. \qquad (11)\end{aligned}\right\}$$

Resolvamos el sistema de ecuaciones (10) y (11) empleando la condición de enlace

$$15x-7y+z-22=0. \tag{12}$$

Las funciones incógnitas $y=y(x)$ y $z=z(x)$ satisfacen las siguientes condiciones de frontera:

$$y(1)=-1,\quad y(2)=1,\quad z(1)=0,\quad z(2)=-1. \tag{13}$$

Multiplicando por 7 la ecuación (11) y agregándola a (10), obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'+7z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)=0,$$

de donde

$$\frac{y'+7z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=C_1. \tag{14}$$

De (12) tenemos

$$z' = 7y' - 15. \tag{15}$$

Introduciendo este valor de z' en (14) y resolviendo la ecuación diferencial obtenida, encontramos $y = \widetilde{C}_1 x + C_2$. Las condiciones de frontera (13) dan $\widetilde{C}_1 = 2$ y $C_2 = -3$ de modo que

$$y = 2x - 3. \tag{16}$$

Teniendo en cuenta (16), de (15) resulta

$$z = 1 - x \tag{17}$$

(es obvio que la función (17) satisface las condiciones de frontera). De (10) o de (11) obtenemos $\lambda \equiv 0$. La distancia buscada es

$$l=\int_1^2 \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx=\sqrt{6}.$$

Este resultado se puede obtener inmediatamente de consideraciones geométricas evidentes.

3º. Líneas geodésicas. Sea

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) \tag{18}$$

la ecuación vectorial de una superficie.

Se llama *línea geodésica* la línea de menor longitud que pertenece a la superficie considerada y que une dos puntos fijos de la misma.

Las ecuaciones de las líneas geodésicas se pueden obtener como las ecuaciones de Euler correspondientes al problema variacional sobre la distancia mínima en la superficie entre dos puntos fijos.

Toda línea perteneciente a la superficie $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ se puede representar por las ecuaciones paramétricas

$$u = u(t), \qquad v = v(t).$$

La longitud de su parte comprendida entre los puntos correspondientes a los valores t_0 y t_1 del parámetro t es igual a

$$J[u(t), v(t)]=\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}\,dt, \tag{19}$$

donde E, F y G son los coeficientes de la primera forma cuadrática de la superficie (18), o sea,

$$E=\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\right), \quad F=\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right), \quad G=\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right).$$

Aquí $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ es el producto escalar de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

Para la funcional (19) el sistema de ecuaciones de Euler tiene la forma

$$\left.\begin{aligned}\frac{E_u u'^2+2F_u u'v'+G_u v'^2}{\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}}-\frac{d}{dt}\frac{2(Eu'+Fv')}{\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}}=0,\\ \frac{E_v u'^2+2F_v u'v'+G_v v'^2}{\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}}-\frac{d}{dt}\frac{2(Fu'+Gv')}{\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}}=0.\end{aligned}\right\}$$

EJEMPLO 7. Entre todas las curvas que están sobre una superficie esférica de radio R y que unen dos puntos fijos de la misma, hallar la curva de longitud mínima (la curva geodésica).

SOLUCIÓN. Sean φ y θ las coordenadas del punto en la esfera y sea $\varphi=\varphi(\theta)$ la ecuación de la curva pedida. Tenemos entonces

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\varphi,\theta)=x(\varphi,\theta)\,\boldsymbol{i}+y(\varphi,\theta)\,\boldsymbol{j}+z(\varphi,\theta)\,\boldsymbol{k},$$

donde

$$x=R\cos\varphi\operatorname{sen}\theta,\qquad y=R\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta,$$
$$z=R\cos\theta.$$

Por eso,

$$E=(\boldsymbol{r}_\varphi,\boldsymbol{r}_\varphi)=R^2\operatorname{sen}^2\theta;\ G=(\boldsymbol{r}_\theta,\boldsymbol{r}_\theta)=R^2,\quad F=(\boldsymbol{r}_\theta,\boldsymbol{r}_\varphi)=0.$$

De aquí, según la fórmula (19), tenemos

$$J[\varphi(\theta)]=R\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{d\theta^2+\operatorname{sen}^2\theta\,d\varphi^2}=R\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\theta\varphi'^2(\theta)}\,d\theta.$$

El integrando no contiene la función incógnita $\varphi(\theta)$ y, por eso, la ecuación de Euler será

$$\frac{d}{d\theta}f_{\varphi'}=0,\quad \text{donde } f_{\varphi'}=\frac{\operatorname{sen}^2\theta\varphi'(\theta)}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\theta\varphi'^2(\theta)}},$$

de modo que

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta\varphi'(\theta)}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\theta\varphi'^2(\theta)}}=C_1,$$

de donde

$$\varphi'(\theta)=\frac{C_1}{\operatorname{sen}\theta\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta-C_1^2}}=\frac{C_1}{\operatorname{sen}^2\theta\sqrt{1-\dfrac{C_1^2}{\operatorname{sen}^2\theta}}}=$$

$$=\frac{C_1}{\operatorname{sen}^2\theta\sqrt{(1-C_1^2)-C_1^2\operatorname{ctg}^2\theta}}=-\frac{C_1d(\operatorname{ctg}\theta)}{\sqrt{(1-C_1^2)-C_1^2\operatorname{ctg}^2\theta}}.$$

Integrando, obtenemos

$$\varphi(\theta)=\arccos\frac{C_1\operatorname{ctg}\theta}{\sqrt{1-C_1^2}}+C_2$$

ó

$$\varphi(\theta)=\arccos(C\operatorname{ctg}\theta)+C_2, \quad \text{donde} \quad C=\frac{C_1}{\sqrt{1-C_1^2}}.$$

De aquí

$$C\operatorname{ctg}\theta=\cos[\varphi(\theta)-C_2]$$

ó

$$\operatorname{ctg}\theta=A\cos\varphi(\theta)+B\operatorname{sen}\varphi(\theta), \tag{20}$$

donde

$$A=\frac{\cos C_2}{C} \quad \text{y} \quad B=\frac{\operatorname{sen} C_2}{C}.$$

Multiplicando por $R\operatorname{sen}\theta$ ambos miembros de (20), obtenemos

$$R\cos\theta=AR\cos\varphi\operatorname{sen}\theta+BR\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta$$

o, pasando a las coordenadas cartesianas,

$$z=Ax+By.$$

Esta es la ecuación de un plano que pasa por el centro de la esfera y que corta su superficie según un círculo máximo. Por consiguiente, la línea más corta (línea geodésica) es el arco del círculo máximo.

EJEMPLO 8. Demostrar que para una superficie de revolución es constante en cada uno de los puntos de las geodésicas el producto del radio del paralelo por el seno del ángulo entre la geodésica y el meridiano (teorema de Clairaut).

SOLUCIÓN. En coordenadas cilíndricas la ecuación de una superficie de revolucion tiene la forma

$$x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\operatorname{sen}\varphi, \quad z=f(\rho).$$

Determinemos los coeficientes E, F y G:

$$E=1+f'^2, \quad F=0, \quad G=\rho^2.$$

Por eso, la diferencial ds de la longitud de arco en la superficie de revolución tiene la forma

$$ds=\sqrt{\rho^2+(1+f_\rho'^2)\rho'^2}\,d\varphi.$$

En la superficie de revolución las líneas geodésicas serán extremales de la funcional

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{\rho^2+(1+f_\rho'^2)\rho'^2}\,d\varphi.$$

Como la función integrando no contiene explícitamente φ, obtenemos inmediatamente

$$\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+(1+f_\rho'^2)\rho'^2}}=\text{const},$$

o sea, $\rho^2 \frac{d\varphi}{ds} = \text{const}$. Observando que $\rho \frac{d\varphi}{ds} = \operatorname{sen}\omega$ (fig. 18), obtenemos $\rho \operatorname{sen}\omega = \text{const}$ que es lo que se quería demostrar.

170. Hallar la distancia más corta entre los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(0, -1, 1)$ en la superficie $x + y + z = 0$.

171. Hallar las líneas geodésicas del cilindro circular $r = R$.

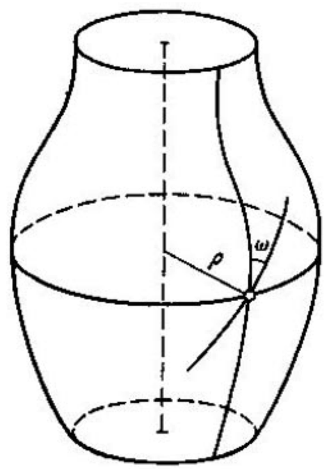


Fig. 18

§ 10. Problemas variacionales con fronteras móviles

1°. Problema elemental con fronteras móviles. Sea $F = F(x, y, y')$ una función diferenciable tres veces respecto a sus argumentos y sean

$$y = \varphi(x) \quad \text{e} \quad y = \psi(x) \qquad (1)$$

donde $\varphi(x) \in C_1[a, b]$ y $\psi(x) \in C_1[a, b]$, dos curvas en el plano xOy.

Consideremos la funcional

$$J[y(x)] = \int_\gamma F(x, y, y')\, dx \qquad (2)$$

definida para las curvas suaves $y = y(x)$ cuyos extremos $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$ se encuentran en las curvas (1) de modo que $y_0 = \varphi(x_0)$ e $y_1 = \psi(x_1)$. Se pide hallar el extremo de la funcional (2).

TEOREMA. *Supongamos que en la curva $\gamma_0 : y = \tilde{y}(x)$ se alcanza el extremo de la funcional*

$$J[y(x)] = \int_\gamma F(x, y, y')\, dx$$

entre todas la curvas de la clase C_1 que unen dos puntos arbitrarios de dos curvas fijas $y = \varphi(x)$ e $y = \psi(x)$. Entonces la curva γ_0 es una extremal y en los extremos $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$ de la curva γ_0 se cumplen las condiciones de transversalidad

$$\left.\begin{aligned} &[F + (\varphi' - \tilde{y}')F_{y'}]\big|_{x=x_0} = 0, \\ &[F + (\psi' - \tilde{y}')F_{y'}]\big|_{x=x_1} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Es decir, para resolver el problema elemental con fronteras móviles es preciso:

1) Escribir y resolver la ecuación de Euler correspondiente. Como resultado, se obtiene una familia de extremales $y = f(x, C_1, C_2)$, que depende de dos parámetros C_1 y C_2.

2) Determinar las constantes C_1, C_2, x_0 y x_1 de las condiciones de transversalidad (3) y de las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} f(x_0, C_1, C_2) &= \varphi(x_0), \\ f(x_1, C_1, C_2) &= \psi(x_1). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

3) Calcular el extremo de la funcional (2).

EJEMPLO 1. Hallar la condición de transversalidad para la funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y)\, e^{\operatorname{arctg} y'} \sqrt{1+y'^2}\, dx, \qquad f(x, y) \neq 0.$$

SOLUCIÓN. Supongamos que el extremo de la izquierda de la extremal se ha fijado en el punto $A(x_0, y_0)$ mientras que el extremo de la derecha $B(x_1, y_1)$ puede desplazarse por una curva $y = \psi(x)$. Tendremos entonces

$$[F + (\psi' - y') F_{y'}]|_{x=x_1} = 0.$$

En nuestro caso es

$$F = f(x, y)\, e^{\operatorname{arctg} y'} \sqrt{1+y'^2} \quad \text{y} \quad F_{y'} = f(x, y)\, e^{\operatorname{arctg} y'} \frac{1+y'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

La condición de transversalidad se representa así

$$\left[f(x, y)\, e^{\operatorname{arctg} y'} \sqrt{1+y'^2} + \right.$$
$$\left. + (\psi' - y') f(x, y)\, e^{\operatorname{arctg} y'} \frac{1+y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right] \Bigg|_{x=x_1} = 0.$$

De aquí obtenemos, debido a la condición $f(x, y) \neq 0$,

$$\frac{\psi' - y'}{1 + \psi' y'} = -1. \tag{5}$$

Desde el punto de vista geométrico, la condición (5) significa que las extremales $y = y(x)$ deben cortar la curva $y = \psi(x)$ por la cual se desplaza el punto extremo $B(x_1, y_1)$ de modo que el ángulo entre estas curvas sea de $\frac{\pi}{4}$.

Efectivamente, la relación (5) se puede transformar del modo siguiente: supongamos que la tangente a la extremal en el punto $B(x_1, y_1)$, que pertenece a la curva $y = \psi(x)$, forma ángulo α con el Ox y que la tangente a la curva fija $y = \varphi(x)$ forma ángulo β (fig. 19); entonces, se tiene $\operatorname{tg}\alpha = y'$, $\operatorname{tg}\beta = \psi'$ y el primer miembro de la fórmula (5) da $\operatorname{tg}(\beta - \alpha)$; pero como $-1 = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, resulta $\beta - \alpha = -\frac{\pi}{4}$, de donde $\alpha = \beta + \frac{\pi}{4}$ que es lo que se quería demostrar.

EJEMPLO 2. Hallar la distancia de la parábola $y = x^2$ a la recta $x - y = 5$.

SOLUCIÓN. El problema consiste en hallar el valor extremo de la integral

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

con la condición de que el extremo de la izquierda de la extremal se puede desplazar por la curva $y = x^2$ mientras que el extremo de la

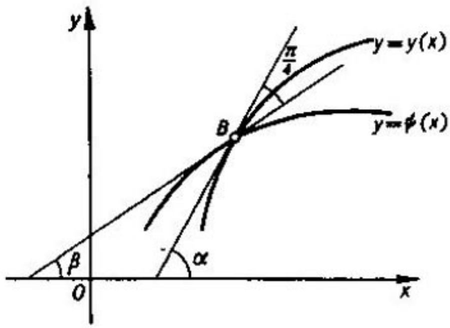


Fig. 19

derecha, por la recta $y = x - 5$. Por consiguiente, tenemos en este caso $\varphi(x) = x^2$ y $\psi(x) = x - 5$. La solución general de la ecuación de Euler será $y = C_1x + C_2$, donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias que deben ser determinadas.

Las condiciones de transversalidad (3) tienen la forma

$$\left.\begin{aligned} \left[\sqrt{1+y'^2} + (2x - y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]\Bigg|_{x=x_0} &= 0, \\ \left[\sqrt{1+y'^2} + (1 - y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]\Bigg|_{x=x_1} &= 0, \end{aligned}\right\}$$

donde $y' = C_1$. Las ecuaciones (4) tienen en nuestro caso la forma

$$\left.\begin{aligned} C_1x_0 + C_2 &= x_0^2, \\ C_1x_1 + C_2 &= x_1 - 5. \end{aligned}\right\}$$

Tenemos, pues, un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas C_1, C_2, x_0 y x_1:

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{1+C_1^2}+(2x_0-C_1)\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}}=0,\\ &\sqrt{1+C_1^2}+(1-C_1)\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}}=0,\\ &C_1x_0+C_2=x_0^2,\\ &C_1x_1+C_2=x_1-5; \end{aligned}\right\}$$

resolviéndolo, obtenemos

$$C_1=-1,\quad C_2=\frac{3}{4},\quad x_0=\frac{1}{2}\quad \text{y}\quad x_1=\frac{23}{8}.$$

Es decir, la ecuación de la extremal es $y=-x+\frac{3}{4}$ y la distancia de la parábola a la recta es igual a

$$l=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}}\sqrt{1+(-1)^2}\,dx=\sqrt{2}\,x\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}}=\frac{19\sqrt{2}}{8}.$$

172. Hallar la distancia más corta del punto $A\ (1, 0)$ a la elipse $4x^2+9y^2=36$.

173. Hallar la distancia más corta del punto $A\ (-1, 5)$ a la parábola $y^2=x$.

174. Hallar la distancia más corta de la circunferencia $x^2+y^2=1$ a la recta $x+y=4$.

175. Hallar la distancia más corta del punto $A\ (-1, 3)$ a la recta $y=1-3x$.

176. Demostrar que en el caso de la funcional

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}h(x,\ y)\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

donde $h(x, y)\neq 0$ en los puntos frontera, las condiciones de transversalidad tienen la forma

$$y'(x)=-\frac{1}{\varphi'(x)}\quad \text{e}\quad y'(x)=-\frac{1}{\psi'(x)},$$

o sea, las condiciones de transversalidad se reducen a las condiciones de ortogonalidad.

2º. Problemas con fronteras móviles para funcionales de la forma

$$J[y(x),\ z(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ z,\ y',\ z')\,dx. \qquad (6)$$

Al analizar el extremo de la funcional (6) aceptamos que por lo menos uno de los puntos frontera $A(x_0, y_0, z_0)$ o $B(x_1, y_1, z_1)$ se desplaza por una curva fija.

El extremo de $J[y(x), z(x)]$ se puede alcanzar sólo en las curvas integrales del sistema de ecuaciones de Euler

$$\left.\begin{aligned} F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}&=0,\\ F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}&=0.\end{aligned}\right\}$$

Supongamos que el punto $A(x_0, y_0, z_0)$ está fijo mientras que el otro punto frontera $B(x_1, y_1, z_1)$ se desplaza por una curva definida mediante las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} y&=\varphi(x),\\ z&=\psi(x).\end{aligned}\right\}$$

En este caso, *la condición de transversalidad* tiene la forma

$$[F+(\varphi'-y')F_{y'}+(\psi'-z')F_{z'}]|_{x=x_1}=0.$$

Análogamente se escribe la condición de transversalidad para el extremo de la izquierda (si éste también se desplaza por una curva $\left.\begin{aligned} y&=\widetilde{\varphi}(x)\\ y&=\widetilde{\psi}(x)\end{aligned}\right\}$):

$$[F+(\widetilde{\varphi}'-y')F_{y'}+(\widetilde{\psi}'-z')F_{z'}]|_{x=x_0}=0.$$

EJEMPLO 3. Hallar la distancia más corta del punto $M(x_0, y_0, z_0)$ a la recta

$$\left.\begin{aligned} y&=mx+p,\\ z&=nx+q.\end{aligned}\right\}$$

SOLUCIÓN. El problema se reduce a la determinación del extremo (mínimo) de la integral

$$J[y(x),\ z(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx \qquad (7)$$

con la condición de que el extremo de la derecha de la extremal puede desplazarse por la recta

$$\left.\begin{aligned} y &= mx + p, \\ z &= nx + q, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

o sea, en nuestro caso las funciones φ y ψ tienen, respectivamente, la forma

$$\varphi(x) = mx + p \quad \text{y} \quad \psi(x) = nx + q.$$

La solución general del correspondiente sistema de ecuaciones de Euler será

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1x + C_2, \\ z &= C_3x + C_4, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

donde C_i ($i = 1, 2, 3$ y 4) deben ser determinadas.

La condición de transversalidad (en el extremo de la derecha) tiene la forma

$$\left[\sqrt{1+y'^2+z'^2} + (m-y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} + \right.$$
$$\left. + (n-z')\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right]\Bigg|_{x=x_1} = 0,$$

de donde, puesto que $y' = C_1$ y $z' = C_3$, obtenemos

$$1 + mC_1 + nC_3 = 0. \tag{10}$$

La relación (10) expresa la condición de perpendicularidad entre la recta buscada (9) y la recta dada (8).

Empleemos el hecho de que la recta buscada (9) pasa por el punto $M(x_0, y_0, z_0)$:

$$y_0 = C_1x_0 + C_2, \quad z_0 = C_3x_0 + C_4, \tag{11}$$

y también el hecho de que el extremo de la derecha se desplaza por la recta (8):

$$\left.\begin{aligned} C_1x_1 + C_2 &= mx_1 + p, \\ C_3x_1 + C_4 &= nx_1 + q. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

De las cinco ecuaciones (10, (11) y (12) debemos determinar C_1, C_2, C_3, C_4 y x_1 (x_0, y_0, z_0, m, n, p y q son números dados). Para calcular la integral (7) basta conocer x_1, C_1 y C_3. Tenemos

$$x_1 = \frac{x_0 + m(y_0 - p) + n(z_0 - q)}{1 + n^2 + m^2},$$

$$C_1 = \frac{mx_0 + mn(z_0 - q) - (1 + n^2)(y_0 - p)}{m(y_0 - p) + n(z_0 - q) - (m^2 + n^2)x_0},$$

$$C_3 = \frac{nx_0 + mn(y_0 - p) - (1 + m^2)(z_0 - q)}{m(y_0 - p) + n(z_0 - q) - (m^2 + n^2)x_0}.$$

Introduciendo estos valores en (7), obtenemos

$$h=\min J[y(x),\ z(x)]=$$

$$=\sqrt{x_0^2+(y_0-p)^2+(z_0-q)^2-\frac{[x_0+m(y_0-p)+n(z_0-q)]^2}{1+n^2+m^2}}.$$

Si el punto frontera $A(x_0, y_0, z_0)$ está fijo y el otro punto frontera $B(x_1, y_1, z_1)$ puede desplazarse por una superficie $z=\varphi(x, y)$, *las condiciones de transversalidad* serán

$$\left.\begin{aligned} &[F-y'F_{y'}+(\varphi'_x-z')F_{z'}]|_{x=x_1}=0,\\ &[F_{y'}+F_{z'}\varphi'_y]|_{x=x_1}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

Las condiciones (13) conjuntamente con la ecuación $z=\varphi(x, y)$ permiten determinar, hablando en términos generales, dos constantes arbitrarias de la solución general del sistema de ecuaciones de Euler (las otras dos constantes se determinan de la condición de que la extremal ha de pasar por el punto fijo $A(x_0, y_0, z_0)$).

Si el punto móvil es el punto frontera $A(x_0, y_0, z_0)$, obtenemos para $x=x_0$ unas condiciones análogas completamente a las condiciones (13).

EJEMPLO 4. Hallar la distancia más corta del punto $A(1, 1, 1)$ a la superficie esférica

$$x^2+y^2+z^2=1. \qquad (14)$$

SOLUCIÓN. El problema consiste en analizar el extremo de la funcional

$$J[y(x),\ z(x)]=\int_{x_1}^{1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx, \qquad (15)$$

donde el punto $B(x_1, y_1, z_1)$ debe estar en la superficie esférica (14). Las extremales de la funcional (15) son las rectas

$$\left.\begin{aligned} y&=C_1x+C_2,\\ z&=C_3x+C_4.\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

De la condición de que la extremal (16) pase por el punto $A(1, 1, 1)$, obtenemos

$$\left.\begin{aligned} C_1+C_2&=1,\\ C_3+C_4&=1.\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

Las condiciones de transversalidad (13) tienen la forma

$$\left.\begin{aligned} &\left[\sqrt{1+y'^2+z'^2}-\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}+\right.\\ &\qquad\left.+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}-z'\right)\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right]\Bigg|_{x=x_1}=0,\\ &\left[\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}+\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\frac{(-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right]\Bigg|_{x=x_1}=0;\end{aligned}\right\}$$

teniendo en cuenta (16), después de unos cálculos sencillos encontramos de aquí

$$\left.\begin{aligned} z_1 - C_3 x_1 &= 0, \\ C_1 z_1 - C_3 y_1 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

donde x_1, y_1 y z_1 son las coordenadas del punto buscado B.

De la condición de que la extremal (16) pasa por el punto $B\ (x_1, y_1, z_1)$ tenemos

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1 x_1 + C_2, \\ z_1 &= C_3 x_1 + C_4. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

De (17), (18) y (19) encontramos

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 1 \quad \text{y} \quad C_4 = 0$$

de modo que la ecuación de la extremal es

$$\left.\begin{aligned} y &= x, \\ z &= x. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Puesto que el punto $B\ (x_1, y_1, z_1)$ debe estar en la superficie esférica (14), obtenemos, tomando en consideración (20), que $x_1^2 + x_1^2 + x_1^2 = 1$, o sea, que $x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Por consiguiente, obtenemos dos puntos

$$B_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{y} \quad B_2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Es fácil ver, por razones geométricas, que en la extremal (20) que une los puntos A y B_1 la funcional (15) alcanza su mínimo igual a

$$J_{\text{mín}} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \sqrt{1+1+1}\, dx = \sqrt{3} - 1$$

mientras que en la extremal (20) que une los puntos A y B_2 esta funcional alcanza su máximo

$$J_{\text{máx}} = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \sqrt{3}\, dx = \sqrt{3} + 1.$$

OBSERVACIÓN 1. Al deducir las condiciones de transversalidad (18) hemos considerado que $\varphi(x, y) \equiv \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Es fácil ver que las condiciones (18) subsisten si $\varphi(x, y) \equiv -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

OBSERVACIÓN 2. Queda claro, por razones geométricas, que la extremal (20) es ortogonal a la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

EJEMPLO 5. Consideremos el mismo problema sobre el extremo de la funcional (15) pero tomando como A el centro de la esfera O (0, 0, 0).

SOLUCIÓN. Las extremales de la funcional son las rectas (16) y la condición de que la extremal pase por el punto O (0, 0, 0) da inmediatamente $C_2 = C_4 = 0$.

Las condiciones de transversalidad serán las mismas

$$\left.\begin{aligned} z_1 - C_3 x_1 = 0, \\ C_1 z_1 - C_3 y_1 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

y las condiciones en el extremo móvil serán

$$\left.\begin{aligned} y_1 = C_1 x_1, \\ z_1 = C_3 x_1. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Por último,

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1. \tag{23}$$

Para determinar las cinco magnitudes C_1, C_3, x_1, y_1 y z_1 tenemos cinco relaciones (21), (22) y (23) de las cuales sólo tres son independientes:

$$\left.\begin{aligned} y_1 = C_1 x_1, \\ z_1 = C_3 x_1, \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Empleando las relaciones (24), encontramos

$$x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + C_1^2 + C_3^2}}, \quad y_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + C_1^2 + C_3^2}},$$

$$z_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + C_1^2 + C_3^2}},$$

donde C_1 y C_3 son unas constantes arbitrarias.

Consideraciones geométricas aclaran esta arbitrariedad: la distancia del punto O (0, 0, 0) a la superficie esférica (14) es la misma en cualquier dirección, o sea, para cualesquiera valores de C_1 y C_3.

El valor de la funcional $J[y(x), z(x)]$ en las extremales

$$\left.\begin{aligned} y = C_1 x, \\ z = C_3 x \end{aligned}\right\}$$

es igual a

$$J[y(x), z(x)] = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+C_1^2+C_3^2}}} \sqrt{1 + C_1^2 + C_3^2}\, dx = 1.$$

EJEMPLO 6. Hallar la condición de transversalidad para la funcional

$$J[y(x),\ z(x)]=\int_{x_0}^{x_1} f(x,\ y,\ z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx, \qquad (25)$$

si el punto $A(x_0, y_0, z_0)$ está fijo y el punto $B(x_1, y_1, z_1)$ se encuentra en la superficie $z=\varphi(x, y)$.

SOLUCIÓN. En este caso las condiciones de transversalidad serán

$$\left.\begin{aligned}(1+\varphi'_x z')\big|_{x=x_1}&=0,\\ (y'+\varphi'_y z')\big|_{x=x_1}&=0,\end{aligned}\right\}$$

o sea,

$$\left.\frac{1}{\varphi'_x}\right|_{x=x_1}=\left.\frac{y'}{\varphi'_y}\right|_{x=x_1}=\left.\frac{z'}{-1}\right|_{x=x_1}.$$

Representan la condición de paralelismo del vector $\tau\{1, y', z'\}$ tangente en el punto $B(x_1, y_1, z_1)$ a la extremal buscada y del vector $n\{\varphi'_x, \varphi'_y, -1\}$ de la normal a la superficie $z=\varphi(x, y)$ en este mismo punto. Por consiguiente, para las funcionales de la forma (25) las condiciones de transversalidad se reducen a las condiciones de ortogonalidad.

177. Demostrar que, si la condición de transversalidad y la condición de ortogonalidad coinciden para todos los datos iniciales, la función integrando F tiene la estructura siguiente:.

$$F=f(x,\ y,\ z)\sqrt{1+y'^2+z'^2},$$

donde $f(x, y, z)$ es una función diferenciable cualquiera de x, y y z.

178. Hallar la distancia más corta del punto $M(0, 0, 3)$ a la superficie $z=x^2+y^2$.

179. Hallar la distancia más corta del punto $M(2, 0, 5)$ a la superficie $z=x^2+y^2$.

180. Hallar la distancia más corta entre las superficies

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1 \quad \text{y} \quad x^2+y^2+z^2=4.$$

181. Analizar el extremo de la funcional

$$J[y(x),\ z(x)]=\int_0^{x_1}(y'^2+z'^2+2yz)\,dx$$

si $y(0) = z(0) = 0$ y el punto $B(x_1, y_1, z_1)$ se desplaza por el plano $x = x_1$.

3°. Distancia geodésica. El valor de la integral

$$J[y(x)] = \int_A^B F(x, y, y')\,dx, \tag{26}$$

calculada según una línea γ desde el punto A hasta el punto B, se denomina *J-longitud* de la línea γ. Si γ es una extremal se dice que $J[y(x)]$ es *la distancia geodésica entre los puntos A y B*, o simplemente *J-distancia*, y la propia extremal se demomina *J-recta*.

EJEMPLO 7. Hallar la distancia geodésica del punto $A(0, 0)$ al punto $B(1, 1)$ si esta distancia se define mediante la funcional

$$J[y(x)] = \int_A^B y^2 y'^2\,dx.$$

SOLUCIÓN. La distancia geodésica del punto A al punto B es igual al valor de esta funcional en la extremal que une dichos puntos. La ecuación de Euler es

$$2yy'^2 - \frac{d}{dx}(2y^2y') = 0 \quad \text{ó} \quad yy'' + y'^2 = 0.$$

Es fácil ver que

$$yy'' + y'^2 = \frac{d}{dx}(yy'),$$

de modo que $2yy' = C_1$ e $y^2 = C_1x + C_2$. Empleando las condiciones de frontera $y|_{x=0} = 0$ e $y|_{x=1} = 1$, obtenemos $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$. Por consiguiente, la extremal que une los puntos A y B es la parábola

$$y^2 = x.$$

Tenemos ahora $2yy' = 1$, $yy' = \frac{1}{2}y$, por consiguiente, $(yy')^2 = \frac{1}{4}$. Por definición, la distancia geodésica entre los puntos A y B es igual a

$$J(A, B) = \int_0^1 \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}.$$

Supongamos que se tiene una línea $\mathscr{L}$: $\varphi(x, y) = 0$.

La distancia geodésica entre un punto B que no pertenece a $\mathscr{L}$ y esta línea se define como la distancia geodésica del punto B a un punto $A \in \mathscr{L}$ que se obtiene calculando la funcional (26) según la extremal γ que une los puntos B y A con la particularidad de que γ corta transversalmente la línea $\mathscr{L}$ en el punto A.

Se denomina *J-circunferencia* (o *circunferencia geodésica*) la línea formada por los puntos que están a una misma distancia geodésica de un punto fijo. Análogamente se definen los conceptos de *J-elipse* y de *J-hipérbola*.

EJEMPLO 8. Hallar la J-circunferencia de radio R y con centro en el punto O (0, 0) si la distancia geodésica se define mediante la funcional

$$J[y(x)]=\int_A^B y^2y'^2\,dx.$$

SOLUCIÓN. Las extremales de la funcional cortan transversalmente la circunferencia geodésica. Para las extremales tenemos (véase el ejemplo anterior)

$$y^2=C_1x, \quad 2yy'=C_1$$

y, por consiguiente,

$$y'=\frac{y}{2x}.$$

De la condición de transversalidad

$$y^2y'(2\varphi'-y')=0$$

encontramos que el coeficiente angular de la tangente a la J-circunferencia es $\varphi'=\frac{y'}{2}$ y, por eso, la ecuación diferencial de la J-circunferencia es $y'=\frac{y}{4x}$, de donde resulta la ecuación de la J-circunferencia: $y^4=Cx$. Para determinar el valor de C observemos que el punto (C^3, C) está en la circunferencia geodésica y que la ecuación del radio geodésico (o sea, de la extremal) que pasa por dicho punto es $y^2=\frac{x}{C}$. De aquí tenemos $yy'=\frac{1}{2C}$ y, por lo tanto,

$$R=\int_0^{C^3}(yy')^2\,dx=\int_0^{C^3}\frac{1}{4C^2}\,dx=\frac{C}{4}.$$

Es decir, $C=4R$ y la ecuación de la circunferencia geodésica de radio R y con centro en el origen de coordenadas es $y^4=4Rx$.

EJEMPLO 9. Hallar la J-circunferencia de radio R y con centro en el punto O (0, 0) si la distancia geodésica se define mediante la funcional

$$J[y(x)]=\int_A^B\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

SOLUCIÓN. Las extremales de la funcional son las rectas $y = C_1x + C_2$. De la condición de que la extremal deba pasar por el punto O (0, 0) encontramos $C_2 = 0$ de modo que $y = C_1x$ y, por consiguiente, $y' = \frac{y}{x}$.

La condición de transversalidad coincide en este caso con la condición de ortogonalidad y, por eso, el coeficiente angular de la tangente a J-circunferencia es $-\varphi' = -\frac{1}{y'}$. Por consiguiente, la ecuación diferencial de la J-circunfencia es $y' = -\frac{x}{y}$. De aquí resulta la ecuación de la J-circunferencia: $x^2 + y^2 = C^2$. El punto $(C, 0)$ está en dicha circunferencia. La ecuación del radio geodésico que pasa por este punto es $y = 0$ de modo que $y' = 0$ y

$$R = \int_0^C dx = C.$$

Es decir, $C = R$ y la ecuación de la circunferencia geodésica buscada de radio R es la ecuación de la circunferencia corriente $x^2 + y^2 = R^2$.

OBSERVACIÓN. Los conceptos introducidos permiten hablar de la Geometría no euclídea con la diferencial de arco

$$ds = F(x, y, y')\,dx.$$

Si $F = \sqrt{1 + y'^2}$, las J-rectas se convierten, como hemos visto, en las rectas corrientes y nuestra Geometría se convierte en la euclídea corriente.

Si F es una función arbitraria, que sólo satisface las condiciones habituales de ser continua y derivable respecto a los tres argumentos, la Geometría construida muy poco recuerda la corriente: no siempre se puede trazar una J-recta por dos puntos y puede suceder que por dos puntos pasen varias J-rectas y, por consiguiente, que la J-distancia entre dos puntos no sea una función unívoca de las coordenadas.

182. Hallar la distancia geodésica del punto A (0, 0) al punto B (1, 2) si esta distancia se define mediante la funcional

$$J[y(x)] = \int (y^2 + y'^2)\,dx.$$

183. Hallar la distancia geodésica del punto A (0, 1) al punto B (1, 1) si esta distancia se define mediante la funcional

$$J[y(x)] = \int (12xy + y'^2)\,dx.$$

184. Hallar la J-circunferencia de radio $R = 8$ y con centro en el punto O (0, 0) si la distancia geodésica se define mediante la funcional

$$J[y(x)] = \int y'^3\,dx.$$

§ 11. Problemas discontinuos. Variaciones unilaterales

1°. Problemas discontinuos. La extremal $y=y(x)$ de la funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx \tag{1}$$

es una función que tiene dos derivadas continuas siempre que la derivada $F_{y'y'}(x, y(x), y'(x))$ sea diferente de cero. Sin embargo, existen problemas variacionales en los cuales el extremo se alcanza en una curva suave a trozos solamente.

a) PROBLEMAS DISCONTINUOS DE PRIMERA ESPECIE. Consideremos el problema sobre la determinación del extremo de la funcional (1) aceptando que las curvas admisibles satisfacen las condiciones de frontera

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \tag{2}$$

y pueden tener un punto angular en el punto de abscisa c $(x_0 < c < x_1)$. Este punto angular puede darse sólo allí donde $F_{y'y'} = 0$ (véase el teorema 2 de la pág. 53). En el punto angular la extremal debe satisfacer las *condiciones de Weierstrass — Erdmann*

$$\left.\begin{aligned} F_{y'}\big|_{x=c-0} - F_{y'}\big|_{x=c+0} = 0, \\ (F - y'F_{y'})\big|_{x=c-0} - (F - y'F_{y'})\big|_{x=c+0} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Conjuntamente con las condiciones de continuidad de la extremal buscada, estas condiciones permiten determinar las coordenadas del punto angular.

En cada uno de los segmentos $[x_0, c]$ y $[c, x_1]$ la extremal debe satisfacer la ecuación de Euler, o sea, una ecuación diferencial de segundo orden. Al resolver estas dos ecuaciones se obtienen cuatro constantes arbitrarias que, hablando en términos generales, se determinan de las condiciones de frontera (2) y de las condiciones (3) en el punto angular.

EJEMPLO 1. Hallar las extremales quebradas (si es que existen) de la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^a (y'^2 - y^2)\,dx,$$

SOLUCIÓN. Escribimos la primera de las condiciones (3) que deben cumplirse en el punto angular:

$$F_{y'}|_{x=c-0}=F_{y'}|_{x=c+0} \quad (0<c<a).$$

En nuestro caso tiene la forma

$$y'(c-0)=y'(c+0)$$

y significa que la derivada $y'(x)$ es continua en $x=c$. Por consiguiente, no hay puntos angulares. Esto se puede ver también de que en nuestro caso $F_{y'y'}=2>0$ en todo punto. Por lo tanto, en el problema considerado el extremo puede alcanzarse sólo en curvas suaves.

EJEMPLO 2. Hallar las extremales quebradas de la funcional

$$J[y(x)]=\int_0^2 (y'^4-6y'^2)\,dx; \quad y(0)=0, \quad y(2)=0;$$

aceptando que y' puede ser discontinua en el punto correspondiente a la abscisa $x=c$.

SOLUCIÓN. En este caso $F_{y'y'}=12y'^2-12$ se puede anular, y, por eso, puede ocurrir que la extremal tenga puntos angulares. Puesto que la función integrando depende sólo de y', las extremales son las rectas

$$y=C_1x+C_2.$$

Pongamos

$$y_-=mx+n\ (0\leqslant x<c) \quad \text{e} \quad y_+=px+q\ (c\leqslant x\leqslant 2).$$

De las condiciones de frontera encontramos $n=0$ y $q=-2p$ de modo que

$$y_-=mx \quad \text{e} \quad y_+=p(x-2).$$

La condición de continuidad de la extremal da

$$mc=p(c-2). \tag{4}$$

Escribamos las condiciones de Weierstrass — Erdmann. Tenemos

$$\left.\begin{aligned} F_{y'}&=4y'^3-12y' \\ F-y'F_{y'}&=-3y'^4+6y'^2. \end{aligned}\right\}$$

Puesto que $y'_-=m$ e $y'_+=p$, obtenemos

$$\left.\begin{aligned} 4m^3-12m&=4p^3-12p, \\ -3m^4+6m^2&=-3p^4+6p^2, \end{aligned}\right\}$$

o sea,

$$\left.\begin{aligned} (m-p)(m^2+mp+p^2-3)&=0, \\ (m^2-p^2)(m^2+p^2-2)&=0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

La segunda de las ecuaciones (5) da inmediatamente $m = p$, $m = -p$ o

$$m^2 + p^2 - 2 = 0.$$

La solución $m = p$ debe ser excluida: en este caso la extremal tiene derivada continua y de la condición (4) obtenemos $m = 0$, o sea, la extremal es un segmento del eje Ox.

Por consiguiente, para resolver el sistema (5) hay que resolver dos sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} m &= -p, \\ m^2 + mp + p^2 &= 3 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

y

$$\left.\begin{aligned} m^2 + p^2 &= 2, \\ m^2 + mp + p^2 &= 3. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

La solución del sistema (6) es: $m = \sqrt{3}$, $p = -\sqrt{3}$ y $m = -\sqrt{3}$, $p = \sqrt{3}$. La solución del sistema (7) es $m = p$ y debe ser excluida. Es decir, $m = -p$ y la condición de continuidad (4) da $c = 1$.

Por consiguiente, las extremales buscadas son:

$$y = \begin{cases} \sqrt{3}\,x, & 0 \leqslant x < 1, \\ -\sqrt{3}\,(x-2), & 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

e

$$y = \begin{cases} -\sqrt{3}\,x, & 0 \leqslant x < 1, \\ \sqrt{3}\,(x-2), & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

185. Hallar las extremales con punto angular para la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^2 y'^2 (y'-1)^2\,dx; \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 1.$$

186. Hallar la solución con un punto angular en el problema sobre el mínimo de la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^4 (y'-1)^2 (y'+1)^2\,dx; \quad y(0) = 0, \quad y(4) = 2.$$

187. ¿Existen soluciones con puntos angulares en el problema sobre el extremo de la funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2xy - y^2)\,dx; \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1?$$

188. Hallar la solución con punto angular en el problema sobre el extremo de la funcional

$$J[y(x)] = \int_{-1}^{1} y^2 (1 - y'^2)\, dx; \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 1.$$

189. Hallar la solución con punto angular en el problema sobre el mínimo de la funcional

$$\int_{x_1}^{x_2} (y'^4 - 2y'^2)\, dx.$$

190. En el problema sobre el extremo de la funcional

$$\int_{(0,\,0)}^{(x_1,\,y_1)} \operatorname{sen} y'\, dx$$

hallar la solución continua y la solución con punto angular.

OBSERVACIÓN. Las condiciones (3) de Weierstrass—Erdmann admiten la siguiente interpretación geométrica.

Consideremos la figuratriz o sea, la curva $Y = F(x, y, y')$ en tanto que función de y'.

Las condiciones (3) significan entonces que para los valores de los parámetros $x = c$ y $y = c_1$, que corresponden al punto angular, la figuratriz debe tener una misma tangente en los puntos de abscisas $y'_- = y'(c - 0)$ e $y'_+ = y'(c + 0)$.

Al mismo tiempo se obtiene una interpretación clara de la condición $F_{y'y'} \neq 0$ que excluye la posibilidad de puntos angulares en las extremales. Efectivamente, si, por ejemplo, es $F_{y'y'} > 0$, la figuratriz es cóncava hacia las Y positivas y no podrán coincidir sus tangentes trazadas en dos puntos distintos. Es decir, en este caso la extremal no podrá tener punto angular.

Consideremos de nuevo el problema sobre la determinación de las extremales quebradas de la funcional del ejemplo 2 de este parágrafo. Tenemos

$$J[y(x)] = \int_{0}^{2} (y'^4 - 6y'^2)\, dx; \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 0.$$

Las extremales son rectas. En este caso la figuratriz $Y = y'^4 - 6y'^2$ no depende del punto (x, y). Tiene una tangente común en los puntos de abscisas $y' = \pm\sqrt{3}$ (fig. 20). Por eso, las condiciones de Weierstrass—Erdmann quedarán cumplidas si como extremales

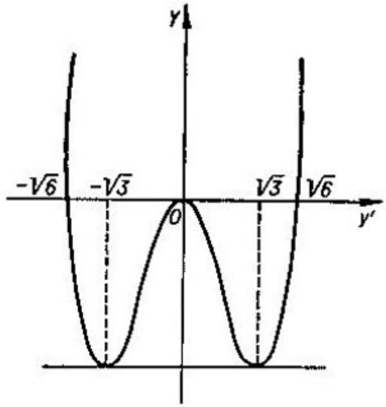


Fig. 20

quebradas tomamos las quebradas cuyos lados formen ángulos de $\pm\frac{\pi}{3}$ con el eje Ox.

En la quebrada y_1 con un punto angular (fig. 21) la funcional toma el valor $J[y_1] = -18$. Este mismo valor tendrá $J[y(x)]$ en la

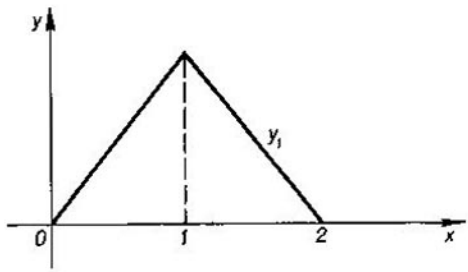


Fig. 21

quebrada y_2 con dos puntos angulares, (fig. 22), en la quebrada y_3 con tres puntos (fig. 23), etc.

b) PROBLEMAS DISCONTINUOS DE SEGUNDA ESPECIE. Se denominan *problemas discontinuos de segunda especie* los problemas sobre el extremo de la funcional

$$J[(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx; \quad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2; \tag{8}$$

en la que la función integrando es discontinua.

Supongamos, por ejemplo, que $F(x, y, y')$ es discontinua a lo largo de la curva $y = \Phi(x)$ y sea $F(x, y, y')$ igual a $F_1(x, y, y')$ a un lado de la línea $y = \Phi(x)$ e igual a $F_2(x, y, y')$ al otro lado.

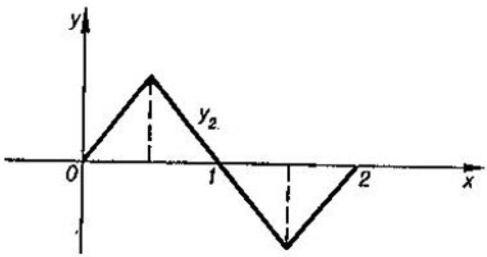


Fig. 22

Si existe la extremal quebrada, deberá componerse de los trozos de las extremales $y = y_1(x)$ e $y = y_2(x)$ que tienen un punto común $(c, \Phi(c))$, $c \in (x_1, x_2)$, en la línea de discontinuidad. Para hallar la

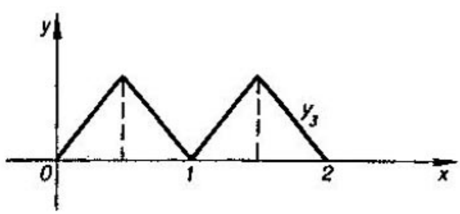


Fig. 23

extremal quebrada obtenemos dos ecuaciones diferenciales de Euler cuyas soluciones generales contienen cuatro constantes arbitrarias C_1, C_2, C_3 y C_4. Para determinar estas constantes así como la abscisa c del punto en el que la extremal encuentra la curva $y = \Phi(x)$ tenemos: 1) dos condiciones de fronteras (8), 2) dos condiciones según las cuales las ordenadas de los extremos de las extremales en el punto de junción han de ser iguales a la ordenada de la curva $y = \Phi(x)$ y, por último, 3) *la condición de la junción*

$$F_1 + (\Phi' - y')\,F_{1y'}\big|_{x=c-0} = F_2 + (\Phi' - y')\,F_{2y'}\big|_{x=c+0}. \tag{9}$$

Hablando en términos generales, estas condiciones alcanzan para determinar la extremal quebrada.

EJEMPLO 3 (problema de la refracción de un rayo de luz). La luz se propaga con una velocidad constante v_1 en el medio I y con una velocidad constante v_2 en el medio II. La curva $y = \Phi(x)$ separa los medios I y II.

Deducir la ley de refracción del rayo de luz que va desde el punto A del medio I hasta el punto B del medio II si se sabe que es mínimo el tiempo durante el cual el rayo de luz recorre este camino.

SOLUCIÓN. El problema consiste en hallar el mínimo de la inetgral

$$J[y(x)] = \int_a^c \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_1} dx + \int_c^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_2} dx, \tag{10}$$

ya que la primera y la segunda integrales de (10) representan, respectivamente, el tiempo que necesita el rayo de luz para llegar del punto A a la línea de separación y de la línea de separación al punto B.

Tenemos un problema discontinuo de segunda especie siendo

$$F_1 = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_1} \quad \text{y} \quad F_2 = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_2}.$$

Para determinar los trozos de las extremales debemos hallar las extremales de la funcional

$$\int \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

que, como se sabe, son rectas. Por consiguiente

$$y_1 = mx + n \quad \text{e} \quad y_2 = px + q.$$

Escribamos la condición (9). Tenemos

$$F_1 - y_1' \frac{\partial F_1}{\partial y_1'} = \frac{\sqrt{1+y_1'^2}}{v_1} - \frac{y_1'^2}{v_1\sqrt{1+y_1'^2}} = \frac{1}{v_1\sqrt{1+y_1'^2}};$$

$$F_2 - y_2' \frac{\partial F_2}{\partial y_2'} = \frac{1}{v_2\sqrt{1+y_2'^2}}.$$

Introduciendo estas expresiones en (9), encontramos

$$\frac{1+\Phi' y_1'}{v_1\sqrt{1+y_1'^2}} = \frac{1+\Phi' y_2'}{v_2\sqrt{1+y_2'^2}}. \tag{11}$$

Sea γ el ángulo que forma con el eje Ox la tangente a la línea de separación en el punto de abscisa c, sea α el ángulo que forma con el eje Ox el rayo de la izquierda y sea β el ángulo que forma con el eje Ox el rayo de la derecha. Entonces, se tiene $\Phi' = \operatorname{tg}\gamma$, $y_1' = \operatorname{tg}\alpha$, $y_2' =$

$=\operatorname{tg}\beta$ y la condición (11) toma la forma

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma}{v_1\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{v_2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}$$

o

$$\frac{\cos(\gamma-\alpha)}{v_1}=\frac{\cos(\gamma-\beta)}{v_2},$$

donde $\gamma-\alpha$ y $\gamma-\beta$ son los ángulos entre los rayos y la tangente a la línea de separación. Tomando en lugar de éstos los ángulos φ y θ entre la normal a la línea de separación y los rayos, incidente y refractado, obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{v_1}{v_2}=\text{const},$$

o sea, la ley de refracción del rayo de luz.

2º. **Variaciones unilaterales.** Se pide hallar el extremo de la funcional

$$J[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,\ y,\ y')\,dx;$$

$$y(x_1)=y_1,\quad y(x_2)=y_2;$$

con la condición

$$y-\varphi(x)\geqslant 0\quad (\text{ó } y-\varphi(x)\leqslant 0)\tag{12}$$

(las condiciones de limitación pueden ser de forma más compleja).

En este caso la extremal buscada puede estar formada por trozos de extremales que pertenecen al recinto (12) y por trozos de la frontera $y=\varphi(x)$ de este recinto. En los puntos de junción de estos trozos la extremal buscada puede ser suave y también puede tener puntos angulares.

La condición en el punto de junción tiene la forma

$$[F(x,\ y,\ y')-F(x,\ y,\ \varphi')-(\varphi'-y')F_{y'}(x,\ y,\ y')]|_{x=\bar{x}}=0.$$

Si $F_{y'y'}\neq 0$, la extremal es tangente en el punto de junción $M(\bar{x},\ \bar{y})$ a la frontera $y=\varphi(x)$ del recinto.

EJEMPLO 4. Hallar en el recinto $y\leqslant x^2$ el camino más corto del punto $A(-2,\ 3)$ al punto $B(2,\ 3)$.

SOLUCIÓN. El problema consiste en hallar el extremo de la funcional

$$J[y(x)]=\int_{-2}^{2}\sqrt{1+y'^2}\,dx\tag{13}$$

con las condiciones

$$y\leqslant x^2,\quad y(-2)=3,\quad y(2)=3.$$

Las extremales de la funcional (13) son las rectas

$$y = C_1 + C_2 x.$$

En nuestro caso

$$F_{y'y'} = \frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \neq 0$$

y la extremal buscada se compone de los trozos AM y NB de las rectas tangentes a la parábola $y = x^2$ y del trozo MON de esta parábola (fig. 24). Representemos las abscisas de los puntos de tangencia por $\bar{x}$ y $-\bar{x}$ (utilizamos la simetría del problema). En el punto de tangencia

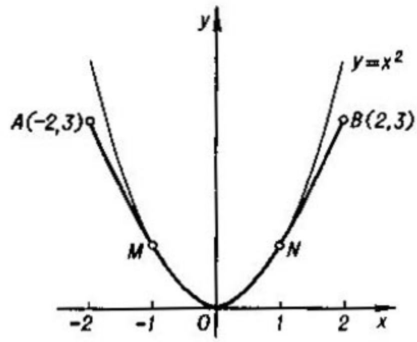


Fig. 24

coinciden las ordenadas y los coeficientes angulares de la recta y de la tangente a la parábola de modo se tiene

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2\bar{x} &= \bar{x}^2, \\ C_2 &= 2\bar{x}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Por otra parte, la tangente debe pasar por el punto B (2, 3) y, por consiguiente,

$$C_1 + 2C_2 = 3. \tag{15}$$

Eliminando C_1 y C_2 de (14) y (15), encontramos $\bar{x}^2 - 4\bar{x} + 3 = 0$, de donde $\bar{x}_1 = 1$ y $\bar{x}_2 = 3$. El segundo valor de $\bar{x}$ no sirve. Es decir, $\bar{x} = 1$ y $C_1 = -1$ y $C_2 = 2$. La extremal buscada (única) es

$$y = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si} \quad -2 \leqslant x \leqslant -1, \\ x^2 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x - 1 & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Queda claro que la funcional (13) alcanza en ella su mínimo.

191. Hallar las curvas en las cuales puede alcanzarse el extremo de la funcional

$$J[y(x)]=\int_0^{10} y'^3\,dx;\qquad y(0)=0,\qquad y(10)=0;$$

si las curvas admisibles no pueden pasar por el interior del círculo que limita la circunferencia $(x-5)^2+y^2=9$.

192. Entre las curvas que unen los puntos $A(a, y_0)$ y $B(b, y_1)$ hallar la curva que ofrece el valor extremo a la funcional

$$J[y(x)]=\int_a^b y\sqrt{1-y^2y'^2}\,dx$$

con las condiciones $y\geqslant 0$, $1-y^2y'^2\geqslant 0$.

§ 12. Teoría de Hamilton—Jacobi. Principios variacionales de la Mecánica

1°. Forma canónica (hamiltoniana) de las ecuaciones de Euler. Las ecuaciones de Euler para la funcional

$$J[y_1, y_2, \ldots, y_n]=$$
$$=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx \qquad (1)$$

tienen la forma

$$F_{y_k}-\frac{d}{dx}F_{y_k'}=0 \quad (k=1, 2, \ldots, n). \qquad (2)$$

En el caso en el que el determinante

$$\begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_2'y_2'} & \cdots & F_{y_1'y_n'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} & \cdots & F_{y_2'y_n'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{y_n'y_1'} & F_{y_n'y_2'} & \cdots & F_{y_n'y_n'} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (3)$$

pondremos

$$F_{y_k'}=p_k \quad (k=1, 2, \ldots, n). \qquad (4)$$

De las ecuaciones (4) se puede expresar y_k' en términos de $x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$:

$$y_k'=\varphi_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

La función H de las variables $x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ definida mediante la igualdad

$$H = [-F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} y_k' F_{y_k'}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')]\Big|_{y_k'=\varphi_k},$$

se denomina *hamiltoniano de la funcional* (1).

El hamiltoniano satisface las relaciones siguientes

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{dy_k}{dx}, \qquad \frac{\partial H}{\partial y_k} = -\frac{dp_k}{dx} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Se dice que las ecuaciones (5) son el *sistema canónico* o *hamiltoniano de las ecuaciones de Euler* (2); las variables $y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots$ $\ldots, p_n$ llevan el nombre de *variables canónicas*.

OBSERVACIÓN 1. La condición (3) en el caso de la funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx \quad \text{da} \quad F_{y'y'} \neq 0 \ \text{en} \ [x_1, x_2].$$

OBSERVACIÓN 2. Hablando en términos generales, las ecuaciones (4) no se pueden resolver unívocamente respecto a y_k' en todo el segmento $[x_1, x_2]$. Si se cumplen las condiciones del teorema de existencia de la función implícita, las ecuaciones (4) admiten solución unívoca localmente.

EJEMPLO 1. Formar el sistema canónico de las ecuaciones de Euler para la funcional

$$J[y_1, y_2] = \int_0^{\pi} (2y_1y_2 - 2y_1^2 + y_1'^2 - y_2'^2)\,dx.$$

SOLUCIÓN. En nuestro caso

$$F = F(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = 2y_1y_2 - 2y_1^2 + y_1'^2 - y_2'^2.$$

Ponemos

$$F_{y_1'} = p_1 \quad \text{y} \quad F_{y_2'} = p_2.$$

Entonces

$$p_1 = 2y_1' \quad \text{y} \quad p_2 = -2y_2'.$$

Aquí el determinante

$$\begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Resolviendo respecto a y_1' e y_2' las relaciones obtenidas, encontramos

$$y_1' = \frac{p_1}{2} \quad \text{e} \quad y_2' = -\frac{p_2}{2}.$$

Formamos el hamiltoniano de la funcional considerada

$$H=(-F+y_1'F_{y_1'}+y_2'F_{y_2'})\Big|_{\substack{y_1'=\frac{p_1}{2},\\ y_2'=-\frac{p_2}{2}}}=$$

$$=(-2y_1y_2+2y_1^2+y_1'^2-y_2'^2)\Big|_{\substack{y_1'=\frac{p_1}{2},\\ y_2'=-\frac{p_2}{2}}}=2y_1^2-2y_1y_2+\frac{p_1^2}{4}-\frac{p_2^2}{4}.$$

Empleando las relaciones (5), obtenemos el sistema canónico de las ecuaciones de Euler

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{dy_1}{dx}=\dfrac{p_1}{2}; & \dfrac{dy_2}{dx}=-\dfrac{p_2}{2};\\[2ex] \dfrac{dp_1}{dx}=-4y_1+2y_2; & \dfrac{dp_2}{dx}=2y_1.\end{array}\right\}$$

Aquí $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$, $p_1=p_1(x)$ y $p_2=p_2(x)$ son funciones incógnitas de x.

EJEMPLO 2. Formar el sistema canónico de las ecuaciones de Euler para la funcional

$$J[y_1,\ y_2]=\int y_1^2y_2^2(x^2+y_1'+y_2')\,dx.$$

SOLUCIÓN. Aquí

$$F=y_1^2y_2^2(x^2+y_1'+y_2').$$

Determinamos las derivadas parciales

$$F_{y_1'}=y_1^2y_2^2,\quad \text{y}\quad F_{y_2'}=y_1^2y_2^2.$$

Ponemos

$$p_1=y_1^2y_2^2\quad \text{y}\quad p_2=y_1^2y_2^2.$$

Estas relaciones no comprenden las derivadas y_1' e y_2' de las funciones incógnitas y_1 e y_2; por eso, no se puede expresar y_1' e y_2' en términos de p_1 y p_2. Por consiguiente, no se puede formar el hamiltoniano de esta funcional. En este ejemplo no se cumple la condición (3):

$$\begin{vmatrix}F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'}\\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}\equiv 0.$$

EJEMPLO 3. Formar el sistema canónico de las ecuaciones de Euler para la funcional

$$J[y(x)]=\int xyy'^3dx.$$

SOLUCIÓN. Tenemos

$$F = xyy'^3 \quad \text{y} \quad F_{y'} = 3xyy'^2.$$

Pongamos $p = 3xyy'^2$, de donde

$$y' = -\sqrt{\frac{p}{3xy}} \quad \text{e} \quad y' = \sqrt{\frac{p}{3xy}}.$$

La funcional considerada tiene dos hamiltonianos

$$H_1 = (-F + y'F_{y'}\Big|_{y' = -\sqrt{\frac{p}{3xy}}} =$$

$$= 2xyy'^3\Big|_{y' = -\sqrt{\frac{p}{3xy}}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{p^3}{xy}},$$

$$H_2 = (-F + y'F_{y'}\Big|_{y' = \sqrt{\frac{p}{3xy}}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{p^3}{xy}}.$$

En concordancia con esto obtenemos dos sistemas canónicos de las ecuaciones de Euler:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\partial H_1}{\partial p} = -\sqrt{\frac{p}{3xy}}, \\ \frac{dp}{dx} &= -\frac{\partial H_1}{\partial y} = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{p^3}{3xy^3}}, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sqrt{\frac{p}{3xy}}, \\ \frac{dp}{dx} &= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{p^3}{3xy^3}}. \end{aligned}\right\}$$

Formar los sistema canónicos de las ecuaciones de Euler para las funcionales siguientes:

193. $J[y(x)] = \int xy\sqrt{y'}\,dx.$

194. $J[y(x)] = \int xyy'^2\,dx.$

195. $J[y(x)] = \int \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + x'^2}\,dx.$

196. $J[y_1, y_2] = \int (y_1'^2 + y_2^2 + y_2'^2)\,dx.$

197. $J[y_1, y_2] = \int (x^2 + y_1 y_1'^2 + y_2 y_2'^2)\, dx.$

198. $J[y_1, y_2] = \int \left(2xy_1 - y_2'^2 + \frac{1}{3} y_2'^3\right) dx.$

2°. Ecuación de Hamilton—Jacobi. Teorema de Jacobi. El sistema canónico (5) de las ecuaciones de Euler es el sistema de ecuaciones de Euler para la funcional

$$J[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} \left[\sum_{k=1}^{n} p_k y_k' - H(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)\right] dx$$

si $y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ se consideran en tanto que funciones incógnitas de x.

Esta funcional J es la solución de la ecuación en derivadas parciales de primer orden

$$\frac{\partial W}{\partial x} + H\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \frac{\partial W}{\partial y_1}, \frac{\partial W}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial y_n}\right) = 0,$$

que se denomina *ecuación de Hamilton—Jacobi.*

TEOREMA DE JACOBI. *Supongamos que W es la integral completa de la ecuación de Hamilton—Jacobi y satisface la condición*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial y_1 \partial C_1} & \frac{\partial^2 W}{\partial y_1 \partial C_2} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial y_1 \partial C_n} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y_2 \partial C_1} & \frac{\partial^2 W}{\partial y_2 \partial C_2} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial y_2 \partial C_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y_n \partial C_1} & \frac{\partial^2 W}{\partial y_n \partial C_2} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial y_n \partial C_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces las igualdades

$$\frac{\partial W}{\partial C_k} = B_k, \qquad \frac{\partial W}{\partial y_k} = p_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

donde C_k y B_k son unas constantes arbitrarias, determinan una solución del sistema canónico (5) *dependiente de $2n$ constantes arbitrarias.*

EJEMPLO 4. Hallar las extremales de la funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

utilizando la solución de la ecuación de Hamilton—Jacobi.

SOLUCIÓN. Para obtener la ecuación de Hamilton—Jacobi formamos el hamiltoniano de la funcional considerada. Tenemos

$$H=-\sqrt{x^2+y^2-p^2}.$$

La ecuación de Hamilton—Jacobi tiene la forma

$$\frac{\partial W}{\partial x}-\sqrt{x^2+y^2-\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2}=0$$

ó

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2=x^2+y^2. \tag{6}$$

Representemos la ecuación (6) en la forma

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2-x^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2-y^2=0$$

y apliquemos el método de separación de variables. Queda claro que la ecuación (6) se verifica si se exige que

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2-x^2=-C \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2-y^2=C,$$

donde C es una constante arbitraria. De aquí encontramos

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\sqrt{x^2-C} \quad \text{y} \quad \frac{\partial W}{\partial y}=\sqrt{y^2+C}.$$

La integral completa de la ecuación (6) será

$$W=\int\sqrt{x^2-C}\,dx+\int\sqrt{y^2+C}\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-C}-\frac{C}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-C}\right|+\frac{1}{2}y\sqrt{y^2+C}+$$

$$+\frac{C}{2}\ln\left|y+\sqrt{y^2+C}\right|+C_0,$$

donde C y C_0 son constantes arbitrarias.

De la relación $\frac{\partial W}{\partial C}=\frac{\widetilde{A}}{2}$, donde $\widetilde{A}$ es una constante arbitraria, determinamos la solución general de la ecuación de Euler. Tenemos

$$-\frac{x}{4\sqrt{x^2-C}}-\frac{1}{2}\left|x+\sqrt{x^2-C}\right|+\frac{C}{4}\frac{1}{(x+\sqrt{x^2-C})\sqrt{x^2-C}}+$$

$$+\frac{1}{4}\frac{y}{\sqrt{y^2+C}}+\frac{1}{2}\ln\left|y+\sqrt{y^2+C}\right|+$$

$$+\frac{C}{4}\frac{1}{(y+\sqrt{y^2+C})\sqrt{y^2+C}}=\frac{\widetilde{A}}{2}.$$

Después de unas simplificaciones sencillas, obtenemos

$$\ln\left|\frac{y+\sqrt{y^2+C}}{x+\sqrt{x^2-C}}\right|=\widetilde{A}, \quad \text{o sea,} \quad \frac{y+\sqrt{y^2+C}}{x+\sqrt{x^2-C}}=A$$

$$(A=\pm e^{\widetilde{A}}),$$

de donde resulta definitivamente

$$x^2-\frac{1-A^2}{A}xy-y^2=C\left(\frac{A^2+1}{2A}\right)^2,$$

es decir, una familia de hipérbolas.

Hallar las extremales de las funcionales siguientes:

199. $J[y(x)]=\int\limits_{x_1}^{x_2} xy\sqrt{y'}\,dx.$

200. $J[y(x)]=\int\limits_{1}^{e} xyy'^2\,dx;\quad y(1)=0,\quad y(e)=1.$

201. $J[y(x)]=\int\limits_{x_1}^{x_2} G(y)\sqrt{1+y'^2}\,dx.$

202. Hallar el mínimo de la funcional

$$J[y(x)]=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{2}y'^2+yy'+y'+y\right)dx$$

si se desconocen los valores en los extremos del segmento.

203. Hallar la función del campo $p(x, y)$ y el propio campo de extremales que pasan por el origen de coordenadas para la funcional

$$J[y(x)]=\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx \quad (y>0).$$

204. Entre las líneas que unen el punto $x=0$ con el punto $M_1(x_1, y_1)$, donde $x_1>0$ e $y_1>0$, hallar la línea en la que alcanza su mínimo la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx \quad (y>0).$$

Supongamos que se tiene la funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx$$

y se conoce su campo de extremales $y = \varphi(x, C)$. Entonces en todo punto del campo se conoce la dirección de la *transversal* del campo que pasa por este punto. Todas las transversales del campo se obtienen como las soluciones de la ecuación diferencial de primer orden

$$F_{y'}[x, \varphi(x, C), \varphi'_x(x, C)]\frac{dy}{dx} = H[x, \varphi(x, C), \varphi'_x(x, C)],$$

donde en lugar del parámetro C, que determina las extremales del campo, hay que introducir su expresión en términos de las coordenadas de los puntos del campo. Aquí $H(x, y, p)$ es el hamiltoniano.

EJEMPLO 5. Hallar las transversales para el campo de extremales $y = Cx$ de la funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} y'^2\,dx.$$

SOLUCIÓN. Formamos el hamiltoniano de la funcional considerada. Tenemos

$$F = y'^2 \quad \text{y} \quad F_{y'} = 2y' \quad (F_{y'y'^2} \neq 0).$$

Poniendo $p = F_{y'}$, encontramos $y' = \frac{p}{2}$ y

$$H = (-y'^2 + 2y'y')\Big|_{y'=\frac{p}{2}} = \frac{p^2}{4}.$$

Las transversales se obtienen resolviendo la ecuación diferencial

$$F_{y'}\Big|_{y=Cx}\frac{dy}{dx} = H\Big|_{p=2y'=2C},$$

donde en lugar de C hay que tomar su expresión en términos de las coordenadas de los puntos del campo: $C = \frac{y}{x}$. Tenemos

$$2y'\Big|_{y=Cx}\frac{dy}{dx} = \frac{p^2}{4}\Big|_{p=2C} \quad \text{ó} \quad 2C\frac{dy}{dx} = C^2.$$

Puesto que $C \neq 0$, se tiene $2\frac{dy}{dx} = C$, o sea, $2\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$. De aquí encontramos que la familia de transversales son las parábolas $y^2 = \widetilde{C}x$,

205. Hallar las transversales del campo de extremales $y = Cx$ de la funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(y')\,dx.$$

206. Hallar las transversales del campo de extremales $y = x + C$ de la funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} (xy'^4 - 2yy'^3)\,dx.$$

207. Hallar las transversales del campo de extremales $y = x - \frac{x^2}{C}$ de la funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{y(1-y'^2)}\,dx \quad (C > 0,\ x > 0,\ y \geqslant 0).$$

Conociendo la ecuación de Hamilton—Jacobi

$$\frac{\partial W}{\partial x} + H\left(x,\ y,\ \frac{\partial W}{\partial y}\right) = 0$$

de la funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x,\ y,\ y')\,dx,$$

se puede reconstruir la función integrando $F(x, y, y')$. Esta es solución de la ecuación diferencial de primer orden

$$F - zF'_z = -H(x,\ y,\ F'_z), \tag{7}$$

donde $H(x, y, p)$ es el hamiltoniano de la funcional considerada y $F(x, y, z)$ es la función incógnita (se considera que x e y son parámetros). Después de determinar $F(x, y, z)$ hay que tomar en ella la derivada y' en lugar de z.

OBSERVACIÓN. La ecuación (7) es la ecuación de Clairaut. Como regla, la solución general de la ecuación de Clairaut se omite pues en este caso la función integrando $F(x, y, y')$ es lineal en y' y el problema variacional no siempre tiene solución (véase el § 4). Por eso, se toma sólo la solución ingular de la ecuación de Clairaut que será precisamente la función buscada $F(x, y, z)$.

EJEMPLO 6. La ecuación de Hamilton—Jacobi en el problema sobre el extremo de la funcional $J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx$ tiene la forma

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2=x^2+y^2.$$

Hallar la función $F(x, y, y')$.

SOLUCIÓN. Resolviendo la ecuación dada respecto a la derivada $\frac{\partial W}{\partial x}$, tenemos

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\sqrt{x^2+y^2-\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2},$$

o sea,

$$\frac{\partial W}{\partial x}-\sqrt{x^2+y^2-\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2}=0.$$

Por consiguiente, el hamiltoniano es

$$H=-\sqrt{x^2+y^2-p^2}.$$

La ecuacion (7) para la determinación de la función F tiene la forma

$$F-z\frac{dF}{dz}=\sqrt{x^2+y^2-\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}. \tag{8}$$

Derivando respecto a z ambos miembros de la ecuación (8), resulta

$$\frac{dF}{dz}-\frac{dF}{dz}-z\frac{d^2F}{dz^2}=-\frac{\frac{dF}{dz}\frac{d^2F}{dz^2}}{\sqrt{x^2+y^2-\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}.$$

Dejando a un lado el caso $\frac{d^2F}{dz^2}=0$ (que da la solución general, tenemos

$$z=\frac{\frac{dF}{dz}}{\sqrt{x^2+y^2-\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}.$$

Resolviendo esta relación respecto a la derivada $\frac{dF}{dz}$, encontramos

$$\frac{dF}{dz}=\frac{z\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1+z^2}}. \tag{9}$$

Introduciendo (9) en (8), obtenemos

$$F=z\,\frac{z\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1+z^2}}+\sqrt{x^2+y^2-\frac{z^2\,(x^2+y^2)}{1+z^2}}=\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{1+z^2}.$$

Por consiguiente, la función integrando buscado tiene la forma

$$F=\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{1+y'^2}.$$

En los problemas que siguen hallar las funcionales a partir de sus ecuaciones de Hamilton—Jacobi:

208. $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2=1.$

209. $4\,\frac{\partial W}{\partial x}\,\frac{\partial W}{\partial y}=x^2y^2.$

210. $4xy\,\frac{\partial W}{\partial x}+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2=0.$

211. $\left(x\,\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(y\,\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2=x^2+y^2.$

3°. Principios variacionales de la Mecánica.

a) PRINCIPIO DE HAMILTON—OSTROGRADSKI. Supongamos que se tiene un sistema de n puntos materiales M_k (x_k, y_k, z_k) $(k = 1, 2, \ldots, n)$ con masas respectivas m_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Supongamos que el movimiento del sistema está sometido a enlaces

$$\varphi_j\,(x, y, z, t) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m; \qquad m \leqslant n) \tag{10}$$

y se realza bajo la acción de las fuerzas F_k (X_k, Y_k, Z_k) $(k = 1, 2, \ldots, n)$ que tienen el potencial (función de fuerza) $U = U\,(x_k, y_k, z_k, t)$:

$$X_k=\frac{\partial U}{\partial x_k}, \qquad Y_k=\frac{\partial U}{\partial y_k}, \qquad Z_k=\frac{\partial U}{\partial z_k}.$$

La energía cinética de este sistema será igual a

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k\,(\dot{x}_k^2+\dot{y}_k^2+\dot{z}_k^2).$$

Supongamos que este sistema pasa de cierto estado A correspondiente al momento del tiempo $t = t_0$ a otro estado B correspondiente al momento de tiempo $t = t_1$. Entre todos los desplazamientos posibles del sistema de A a B se escoje la clase de movimientos admisibles que concuerdan con los enlaces dados y que hacen pasar el sistema del estado A al estado B en el intervalo de tiempo dado $[t_0, t_1]$.

El principio de Hamilton—Ostrogradski consiste en lo siguiente: *entre todos los movimientos admisibles que hacen pasar el sistema* *del estado A al estado B, el movimiento real se caracteriza por el cumplimiento de la condición necesaria* $\delta J = 0$ *de extremo de la funcional*

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt. \tag{11}$$

A cada movimiento admisible del sistema le corresponden $3n$ funciones $x_k(t)$, $y_k(t)$, $z_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ que están definidas en el intervalo $[t_0, t_1]$, que satisfacen las ecuaciones (10) y que toman determinados valores en los extremos del intervalo $[t_0, t_1]$. Por consiguiente, tenemos un problema variacional con los enlaces (10) y con fronteras fijas.

Para resolver este problema formamos la función auxiliar de Lagrange

$$F = T + U + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\, \varphi_j$$

y escribimos para ella el sistema de ecuaciones de Euler—Ostrogradski:

$$\left.\begin{aligned} m_k \ddot{x}_k - X_k - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} &= 0, \\ m_k \ddot{y}_k - Y_k - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k} &= 0, \\ m_k \ddot{z}_k - Z_k - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_k} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

El sistema (12) coincide con las ecuaciones diferenciales del movimiento real del sistema.

b) PRINCIPIO DE LA ACCIÓN MÍNIMA EN LA FORMA DE LAGRANGE. Supongamos que los enlaces φ_j y el potencial U no dependen del tiempo t. En este caso tiene lugar la integral de energía $T - U = h = \text{const}$. La integral

$$J = \int_{t_0}^{t_1} T\, dt$$

se denomina acción. De la integral (11) se deduce que

$$\int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt = 2 \int_{t_0}^{t_1} T\, dt - \int_{t_0}^{t_1} h\, dt.$$

El principio de la acción mínima en la forma de Lagrange consiste en lo siguiente: *para el movimiento real, la integral de la acción debe tomar su valor mínimo, o sea,*

$$J = \int_{t_0}^{t_1} T\,dt = \text{mín}.$$

El principio de la acción mínima puede ser representado en la forma de Jacobi

$$\int_{\gamma} \sqrt{2(U+h)}\,ds = \text{mín}$$

(ds es la diferencial del arco γ) en la que no interviene el tiempo.

OBSERVACIÓN 1. Aquí se consideran admisibles los movimientos que satisfacen las ecuaciones de enlace $\varphi_j(x, y, z) = 0$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) y la ecuación $T - U = h$ con el mismo valor de h que para el movimiento real y que tienen los estados inicial y final fijos, siendo también fijo el momento inicial t_0 del tiempo. El momento final del tiempo no se fija para estos movimientos.

OBSERVACIÓN 2. La energía potencial figura no en la integral sino en la condición complementaria $T - U = h$. Formamos la función auxiliar de Lagrange

$$F = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}(U+h) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j.$$

Después escribimos las ecuaciones de Euler—Ostrogradski para nuestro problema

$$m_k \ddot{x}_k = \frac{\partial U}{\partial x_k} + 2\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k},$$

$$m_k \ddot{y}_k = \frac{\partial U}{\partial y_k} + 2\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k},$$

$$m_k \ddot{z}_k = \frac{\partial U}{\partial z_k} + 2\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_k}$$

que representan las ecuaciones del movimiento real.

EJEMPLO 7. Basándose en el principio de la acción mínima, hallar la trayectoria del punto material (de masa unitaria) que se mueve por acción de la gravedad.

SOLUCIÓN. Tomando el eje Oy hacia arriba, el potencial de la fuerza de la gravedad es

$$U = -gy. \tag{13}$$

Según el principio de la acción mínima, para la trayectoria buscada γ_0 la integral

$$J=\int\limits_{\gamma}\sqrt{2(U+h)}\,ds \tag{14}$$

debe alcanzar su valor mínimo. Por consiguiente, la trayectoria será una extremal de la funcional (14). Introduciendo (13) en (14), obtenemos

$$J=\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{2(h-gy)}\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{15}$$

La ecuación de Hamilton—Jacobi tiene la forma

$$\frac{\partial W}{\partial x}-\sqrt{2h-2gy-\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2}=0,$$

o sea,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2=2(h-gy).$$

Su integral completa es

$$W=Ax+\int\sqrt{2h-2gy-A^2}\,dy=Ax-\frac{1}{3g}(2h-2gy-A^2)^{\frac{3}{2}}+B,$$

donde A y B son constantes arbitrarias.

Determinamos las extremales de la funcional (15):

$$x+\frac{A}{g}(2h-2gy-A^2)^{\frac{1}{2}}=C,$$

o sea,

$$y=\frac{h}{g}-\frac{A^2}{2g}-\frac{g}{2A^2}(x-C)^2; \quad A \text{ y } C \text{ constantes.}$$

En particular, las extremales que pasan por el origen de coordenadas se determinan de la condición $y(0)=0$. Obtenemos una familia monoparamétrica de parábolas

$$y=-\frac{g}{2A^2}x^2+\frac{\sqrt{2h-A^2}}{A}x.$$

212. Hallar en el plano la trayectoria de un punto que se mueve por efecto de una fuerza repulsiva que actúa desde el eje Ox en dirección del eje Oy y que es proporcional a la distancia del punto al eje Ox aceptando que la integral de la fuerza viva tiene la forma $\frac{v^2}{2}-\frac{y^2}{2}=0$ y basándose en la integral de la acción

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad (y>0).$$

213. Un punto material describe la circunferencia $\rho = 2R\cos\varphi$ (ρ, φ son las coordenadas polares) de radio R bajo la acción de una fuerza central $\frac{k}{\rho^5}$ inversamente proporcional a la quinta potencia de la distancia al centro que se encuentra en el origen de coordenadas. Demostrar que la integral de la acción alcanza mínimo fuerte en cualquier arco de esta circunferencia $\left(-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2 < \frac{\pi}{2}\right)$.

214. Analizar el movimiento de un punto material por efecto de una fuerza central de atracción proporcional a la distancia al centro O basándose en el principio de la acción mínima y aplicando el método de Hamilton—Jacobi.

Capítulo III

MÉTODOS DIRECTOS EN EL CÁLCULO VARIACIONAL

§ 13. Método de diferencias finitas de Euler

Consideremos el problema variacional elemental: hallar el extremo de la funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')\,dx; \quad y(a) = A, \quad y(b) = B. \tag{1}$$

Según el método de Euler, los valores de la funcional (1) se toman no en las curvas arbitrarias que admite este problema variacional, sino en las quebradas compuestas por un número dado n de segmentos rectilíneos cuyos vértices tienen abscisas fijas

$$a+\Delta x, \quad a+2\Delta x, \ \ldots, \quad a+(n-1)\Delta x, \quad \text{donde} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

En estas quebradas la funcional $J[y(x)]$ se convierte en una función $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ de las ordenadas $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ de los vértices de la quebrada. Las ordenadas $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ se escogen de modo que la función $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ tenga extremo, o sea, se determinan del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y_2} = 0, \ \ldots, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y_{n-1}} = 0.$$

La quebrada así obtenida es la solución aproximada del problema variacional (1).

EJEMPLO. Hallar la solución aproximada del problema sobre el mínimo de la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + 2y)\,dx; \quad y(0) = y(1) = 0.$$

SOLUCIÓN. Tomemos $\Delta x = \dfrac{1-0}{5} = 0{,}2$ y pongamos

$$y_0 = y(0) = 0, \quad y_1 = y(0{,}2), \quad y_2 = y(0{,}4),$$
$$y_3 = y(0{,}6), \quad y_4 = y(0{,}8), \quad y_5 = y(1) = 0.$$

Sustituimos los valores de la derivada según la fórmula aproximada

$$y'_k = y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}.$$

Entonces

$$y'(0) = \frac{y_1 - 0}{0{,}2}, \quad y'(0{,}2) = \frac{y_2 - y_1}{0{,}2}, \quad y'(0{,}4) = \frac{y_3 - y_2}{0{,}2},$$

$$y'(0{,}6)) = \frac{y_4 - y_3}{0{,}2}, \quad y'(0{,}8) = \frac{0 - y_4}{0{,}2}.$$

Sustituimos la integral por una suma empleando la fórmula de los rectángulos:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx [f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})]\,\Delta x.$$

Tendremos

$$\Phi(y_1, y_2, y_3, y_4) = \left[\left(\frac{y_1}{0{,}2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{0{,}2}\right)^2 + 2y_1 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{y_3 - y_2}{0{,}2}\right)^2 + 2y_2 + \left(\frac{y_4 - y_3}{0{,}2}\right)^2 + 2y_3 + \left(-\frac{y_4}{0{,}2}\right)^2 + 2y_4\right] \cdot 0{,}2.$$

Formamos el sistema de ecuaciones para determinar las ordenadas y_1, y_2, y_3 e y_4 de los vértices de la quebrada buscada:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{0{,}2}\frac{\partial\Phi}{\partial y_1} &= \frac{y_1}{0{,}02} - \frac{y_2 - y_1}{0{,}02} + 2 = 0,\\
\frac{1}{0{,}2}\frac{\partial\Phi}{\partial y_2} &= \frac{y_2 - y_1}{0{,}02} - \frac{y_3 - y_2}{0{,}02} + 2 = 0,\\
\frac{1}{0{,}2}\frac{\partial\Phi}{\partial y_3} &= \frac{y_3 - y_2}{0{,}02} - \frac{y_4 - y_3}{0{,}02} + 2 = 0,\\
\frac{1}{0{,}2}\frac{\partial\Phi}{\partial y_4} &= \frac{y_4 - y_3}{0{,}02} + \frac{y_4}{0{,}02} + 2 = 0,
\end{aligned}\right\}$$

o sea,

$$\left.\begin{aligned}
2y_1 - y_2 &= -0{,}04,\\
-y_1 + 2y_2 - y_3 &= -0{,}04,\\
-y_2 + 2y_3 - y_4 &= -0{,}04,\\
-y_3 + 2y_4 \qquad &= -0{,}04.
\end{aligned}\right\}$$

La solución de este sistema es $y_1 = -0{,}08$, $y_2 = -0{,}12$, $y_3 = -0{,}12$ e $y_4 = -0{,}08$. Estos valores de la solución aproximada coinciden con los valores que tiene en los puntos respectivos la solución exacta $y = \dfrac{x^2 - x}{2}$.

Hallar las soluciones aproximadas de los problemas sobre el mínimo de las funcionales:

215. $J[y(x)] = \int\limits_0^1 (y'^2 + y^2 + 2xy)\, dx; \quad y(0) = y(1) = 0.$

SUGERENCIA. Tomar $\Delta x = 0{,}2$.

216. $J[y(x)] = \int\limits_0^1 (y'^2 + 1)\, dx;$

a) $y(0) = 0, \quad y(1) = 0;$
b) $y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$

§ 14. Método de Ritz. Método de Kantoróvich

1°. Método de Ritz. La idea del método consiste en que al hallar el extremo de la funcional $J[y(x)]$ se consideran, en lugar del espacio de las funciones admisibles, sólo las funciones que se pueden representar como combinaciones lineales de las funciones admisibles:

$$y_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x), \tag{1}$$

donde α_i son unas constantes y el sistema $\{\varphi_i(x)\}$, llamado *sistema de funciones coordenadas*, está formado por funciones $\varphi_i(x)$ que son linealmente independientes y que constituyen un sistema completo de funciones en el espacio considerado.

Hablando en términos generales, cuando pedimos que las funciones $y_n(x)$ sean admisibles, imponemos a las funciones coordenadas $\varphi_i(x)$ ciertas condiciones complementarias como, por ejemplo, limitaciones en cuanto a la derivabilidad o en cuanto a la verificación de las condiciones de frontera.

En estas combinaciones lineales la funcional $J[y(x)]$ se convierte en una función de los argumentos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$J[y_n(x)] = \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Determinamos los valores $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ que ofrecen extremo a la función $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$; para ello resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

no lineales, como regla, respecto a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, e introducimos en (1) los valores encontrados para α_i. La sucesión $\{y_n(x)\}$ que así resulta es una sucesión minimizante, o sea, la sucesión de los valores de la funcional $\{J[y_n(x)]\}$ obtenida a partir de ella converge hacia el mínimo o hacia la cota inferior de la funcional $J[y(x)]$. Sin embargo, de

$$\lim_{n\to\infty} J[y_n(x)] = \min J[y(x)]$$

no se deduce aún que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$. La sucesión minimizante puede no converger hacia la función que realiza el extremo en la clase de las funciones admisibles.

Se pueden indicar las condiciones que garanticen que el mínimo absoluto de la funcional exista y se alcance en las funciones $\{y_n(x)\}$.

En el caso en el que se trata del extremo de la funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx;$$

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2;$$

estas condiciones son:

1) la función $F(x, y, z)$ es continua respecto al conjunto de sus argumentos para cualquier z y para $(x, y) \in D$, donde D es un recinto cerrado del plano xOy al que pertenecen las líneas $y_n(x)$;

2) existen unas constantes $\alpha > 0$, $p > 1$ y β tales que

$$F(x, y, z) \geqslant |z|^p + \beta$$

cualquiera que sea z y para cualquier punto $(x, y) \in D$;

3) la función $F(x, y, z)$ tiene la derivada parcial continua $F_z(x, y, z)$ y esta derivada es una función no decreciente de z $(-\infty < z < +\infty)$ cualquiera que sea el punto $(x, y) \in D$.

En particular, las condiciones enunciadas se cumplen para las funcionales

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} [p(x)\,y'^2 + q(x)\,y^2 + 2r(x)\,y]\,dx;$$

$$y(x_1) = a, \quad y(x_2) = b;$$

donde $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son funciones dadas, continuas en $[x_1, x_2]$, con la particularidad de que existe la derivada continua $p'(x)$ de $p(x)$ y de que $p(x) > 0$ y $q(x) \geqslant 0$.

Si por este método se determina el extremo absoluto de la funcional, el valor aproximado de su mínimo se obtiene por exceso y el valor aproximado de su máximo, por defecto. Al aplicar este método, el éxito depende en gran medida de la elección adecuada del sistema $\{\varphi_i(x)\}$ de funciones coordenadas.

En muchos casos basta tomar la combinación lineal de dos o tres funciones $\varphi_i(x)$ para obtener una aproximación bastante satisfactoria de la solución exacta.

Si hay que determinar el extremo aproximado de la funcional $J[z(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ que dependen de las funciones de varias variables independientes, se escoge un sistema de funciones coordenadas

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots$$

y la solución aproximada del problema variacional se busca en la forma

$$z_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

donde los coeficientes α_k son unos números constantes. Para determinarlos se forma, por analogía con lo que hemos explicado, el sistema de ecuaciones $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_k} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, donde $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ es el resultado de introducir z_m en la funcional $J[z(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$.

EJEMPLO 1. Hallar la solución aproximada del problema sobre el mínimo de la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 - y^2 + 2xy)\, dx; \tag{2}$$

$$y(0) = y(1) = 0;$$

y compararla con la solución exacta.

SOLUCIÓN. Como sistema de funciones coordenadas $\varphi_k(x)$ tomamos

$$\varphi_k(x) = (1 - x)x^k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Es evidente que las funciones $\varphi_k(x)$ satisfacen las condiciones de frontera $\varphi_k(0) = \varphi_k(1) = 0$, son linealmente independientes y forman un sistema completo en el espacio $C_1[0, 1]$.

Para $k = 1$ tenemos $y_1(x) = \alpha_1(x - x^2)$. Introduciendo esta expresión de $y_1(x)$ en la funcional (2), obtenemos

$$J[y_1(x)] = \int_0^1 [\alpha_1^2(1-2x)^2 + \alpha_1^2(x-x^2)^2 + 2\alpha_1 x(x-x^2)]\, dx =$$

$$= \int_0^1 [\alpha_1^2(1 - 4x + 4x^2 - x^2 + 2x^3 - x^4) + 2\alpha_1(x^2 - x^3)]\, dx =$$

$$= \frac{3}{10}\alpha_1^2 + \frac{1}{6}\alpha_1 = \Phi(\alpha_1).$$

El coeficiente α_1 se determina de la ecuación

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} = \frac{3}{5}\alpha_1 + \frac{1}{6} = 0,$$

de donde resulta $\alpha_1 = -\frac{5}{18}$. Por consiguiente,

$$y_1(x) = -\frac{5}{18}x + \frac{5}{18}x^2.$$

SOLUCIÓN EXACTA. La ecuación de Euler de la funcional considerada es

$$y'' + y = x.$$

Resolviendo esta ecuación lineal no homogénea, encontramos

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + x.$$

Empleando las condiciones de frontera $y(0) = y(1) = 0$, obtenemos definitivamente

$$y = x - \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 1}.$$

Comparemos las soluciones exacta y aproximada:

x	Solución exacta	Solución aproximada
0,00	0	0
0,25	—0,044	—0,052
0,50	—0,070	—0,069
0,75	—0,060	—0,052
1,00	0	0

EJEMPLO 2. Hallar la solución aproximada de la ecuación no lineal

$$y'' = \frac{3}{2}y^2$$

que satisfaga las condiciones $y(0) = 4$, $y(1) = 1$.

SOLUCIÓN. A este problema de contorno le corresponde el problema variacional

$$J[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + y^3)\,dx; \quad y(0) = 4, \quad y(1) = 1.$$

Buscaremos la solución en la forma

$$y_1(x) = 4 - 3x + \alpha_1(x - x^2);$$

es evidente que $y_1(x)$ satisface las condiciones de frontera dadas cualquiera que sea el valor de α_1.

Tenemos

$$J[y_1(x)] = \int_0^1 \{[\alpha_1(1-2x) - 3]^2 + [4 - 3x + \alpha_1(x - x^2)]^3\}\,dx,$$

de donde

$$\frac{\partial J[y_1(x)]}{\partial \alpha_1}=\int_0^1 \{(1-2x)\,2\,[\alpha_1(1-2x)-3]+$$

$$+3(x-x^2)\,[4-3x+\alpha_1(x-x^2)]^2\}\,dx.$$

La condición $\frac{\partial J[y_1(x)]}{\partial \alpha_1}=0$ toma la forma

$$9\alpha_1^2+490\alpha_1+1407=0$$

y para $\alpha_1=-3{,}0413$ obtenemos la solución del problema

$$y_1(x)=3{,}0413x^2-6{,}0413x+4$$

positiva en todos los puntos.

Hallar las soluciones aproximadas y compararlas con las exactas en los problemas que siguen sobre el mínimo de las funcionales:

217. $J[y(x)]=\int_0^1 (y'^2+2y)\,dx;\quad y(0)=y(1)=0.$

218. $J[y(x)]=\int_0^2 (2xy+y^2+y'^2)\,dx;\quad y(0)=y(2)=0.$

219. Hallar la solución aproximada del problema sobre el mínimo de la funcional

$$J[y(x)]=\int_{-1}^{1}(y'^2-k^2y^2)\,dx;\qquad y(-1)=y(1)=0;$$

con la condición complementaria $\int_{-1}^{1} y^2\,dx=1.$

EJEMPLO 3. Hallar la solución aproximada del problema sobre el extremo de la funcional

$$J[z(x,y)]=\iint_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\right]dx\,dy,$$

donde D es el cuadrado $-a\leqslant x\leqslant a$, $-a\leqslant y\leqslant a$, siendo $z=0$ en la frontera del cuadrado.

SOLUCIÓN. Buscamos la solución aproximada en la forma

$$z_0(x,y)=\alpha_0(x^2-a^2)(y^2-a^2).$$

Es evidente que esta función $z_0(x, y)$ satisface las condiciones de frontera planteadas. Introduciendo $z_0(x, y)$, $z'_{0x}(x, y)$ y $z'_{0y}(x, y)$ en la funcional e integrando, obtenemos

$$J[z_0(x, y)] = \frac{256}{45}\alpha_0^2 a^8 - \frac{32}{9}\alpha_0 a^6 = \Phi(\alpha_0).$$

Tenemos después

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_0} = \frac{512}{45}\alpha_0 a^8 - \frac{32}{9}a^6 = 0,$$

de donde $\alpha_0 = \frac{5}{16a^2}$ de modo que $z_0(x, y) = \frac{5}{16a^2}(x^2 - a^2)(y^2 - a^2)$.

220. Hallar la solución aproximada del problema sobre el extremo de la funcional

$$J[z(x, y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + x\right)^2\right] dx\,dy,$$

donde D es el recinto limitado por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

221. Hallar la solución aproximada $z_3(x, y)$ del problema sobre el mínimo de la funcional

$$J[z(x, y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy,$$

donde D es el recinto: $x > 0$, $y > 0$ y $x + y < 1$, si la función $z(x, y)$ satisface en la frontera Γ: $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 1$ la condición $z|_\Gamma = x^2 + y^2$.

2°. Método de Kantorovich. Este método ocupa una posición intermedia entre la resolución exacta y el método de Ritz y se aplica para analizar el extremo de las funcionales

$$J[z(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \tag{3}$$

que dependen de funciones de varias variables independientes ($n \geqslant 2$). Igual que en el método de Ritz, escogemos un sistema $\{\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$ de funciones coordenadas y buscamos la solución aproximada en la forma

$$z_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x_j)\,\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{4}$$

pero considerando los coeficientes $\alpha_k(x_j)$ como funciones incógnitas de una de las variables independientes.

En las funciones (4) la funcional (3) se convierte en una funcional $\tilde{J}[\alpha_1(x_j), \alpha_2(x_j), \ldots, \alpha_m(x_j)]$ que depende de m funciones $\alpha_1(x_j), \alpha_2(x_j), \ldots, \alpha_m(x_j)$. Estas funciones se escogen de modo que la funcional $\tilde{J}$ alcance el extremo y se determinan de las condiciones necesarias de extremo para la funcional $\tilde{J}$.

Empleando el método de Kantorovich, se obtiene una solución aproximada, como regla, más exacta que la solución que da el método de Ritz con las mismas funciones coordenadas $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y con el mismo número m de términos en la aproximación.

EJEMPLO 1. Hallar la solución aproximada de la ecuación de Poisson

$$\Delta z = -1 \text{ en el rectángulo } D: \begin{cases} -a \leqslant x \leqslant a, \\ -b \leqslant y \leqslant b \end{cases}$$

si $z = 0$ en la frontera.

SOLUCIÓN. La ecuación $\Delta z = -1$ es la ecuación de Euler—Ostrogradski para la funcional

$$J[z(x, y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2z\right] dx\, dy. \tag{5}$$

Buscamos la solución en la forma

$$z_1(x, y) = (b^2 - y^2)\, \alpha(x);$$

es evidente que la función $z_1(x, y)$ satisface las condiciones de frontera $z = 0$ en las rectas $y = \pm b$.

Introduciendo esta expresión de z_1 en la funcional (5), encontramos

$$J[z_1(x, y)] = \int_{-a}^{a} \left(\frac{16}{15} b^5 \alpha'^2 + \frac{8}{3} b^3 \alpha^2 \, \frac{8}{3} b^3 \alpha\right) dx. \tag{6}$$

La ecuación de Euler para la funcional (6) es

$$\alpha'' - \frac{5}{2b^2}\alpha = -\frac{5}{4b^2}. \tag{7}$$

La ecuación (7) es una ecuación lineal no homogénea con coeficientes constantes y su solución general es

$$\alpha(x) = C_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{b} + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{b} + \frac{1}{2}.$$

Las constantes C_1 y C_2 se determinan de las condiciones de frontera

$$\alpha(-a) = \alpha(a) = 0$$

lo que da $C_2=0$ y $C_1=-\dfrac{1}{2\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b}}$ de modo que

$$\alpha(x)=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b}}{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b}}\right\}.$$

Es decir, obtenemos

$$z_1(x,\ y)=\frac{b^2-y^2}{2}\left\{1-\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b}}{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b}}\right\}.$$

Para obtener una aproximación más exacta se puede buscar la solución del problema en la forma

$$z_2(x,\ y)=(b^2-y^2)\,\alpha_1(x)+(b^2-y^2)\,\alpha_2(x).$$

222. Hallar en el recinto D la solución aproximada de la ecuación de Poisson $\Delta z=-1$ que se anule en su frontera si D es el triángulo equilátero formado por las rectas $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$ y $x=b$.

223. Hallar en el recinto D la solución aproximada de la ecuación $\Delta z=-1$ que se anule en su frontera si D es el trapecio isósceles formado por las rectas $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$, $x=1$ y $x=3$.

§ 15. Métodos variacionales para la determinación de los valores y de las funciones propios

La ecuación de Sturm—Liouville

$$-\frac{d}{dx}[p(x)\,y']+q(x)\,y=\lambda y, \tag{1}$$

donde $p(x)>0$ tiene derivada continua y $q(x)$ es continua, con las condiciones

$$y(a)=0 \quad \text{e} \quad y(b)=0 \tag{2}$$

tiene la solución nula (trivial) $y\equiv 0$ cualquiera que sea el valor real o complejo de λ.

El conjunto de la ecuación (1) y de las condiciones de frontera (2) se denomina *problema de contorno de Sturm—Liouville* (1)—(2).

Los valores de λ para los cuales el problema de contorno (1)—(2) tiene soluciones no triviales $y \equiv 0$ se denominan *valores propios* y las soluciones mismas llevan el nombre de *funciones propias del problema de contorno.*

La ecuación (1) es la ecuación de Euler para el siguiente problema sobre extremo condicionado: hallar el mínimo de la funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b (py'^2 + qy^2)\, dx \tag{3}$$

con las condiciones (2) y la condición

$$\int_a^b y^2\, dx = 1. \tag{4}$$

Si $y = y(x)$ es una solución de este problema variacional, también será una solución del problema (1)—(2) distinta del cero idéntico en virtud de la condición (4). Por eso, los valores propios y las funciones propias del problema de contorno de Sturm—Liouville se denominan también valores propios y funciones propias de la funcional (3) con las condiciones (2) y (4).

La función propia $y = y(x)$ se denomina *normada* si

$$\int_a^b y^2\, dx = 1.$$

EJEMPLO 1. Hallar los valores propios y las funciones propias de la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^3 [(2x+3)^2 y'^2 - y^2]\, dx$$

con las condiciones

$$y(0) = 0, \quad y(3) = 0, \tag{5}$$

$$\int_0^3 y^2\, dx = 1.$$

SOLUCIÓN. La ecuación de Sturm—Liouville tiene la forma

$$-y - \frac{d}{dx}[(2x+3)^2 y'] = \lambda y,$$

o sea,

$$(2x+3)^2 y'' + 4(2x+3)\, y' + (\lambda + 1)\, y = 0. \tag{6}$$

Mediante la sustitución $2x+3=e^t$ la ecuación (6) se reduce a la ecuación lineal con coeficientes constantes

$$4\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+(\lambda+1)\,y=0. \tag{7}$$

Su ecuación característica

$$4k^2+4k+\lambda+1=0$$

tiene las raíces

$$k_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}.$$

Consideremos tres casos.

1) $\lambda<0$. Entonces la solución general de la ecuación (7) es

$$y=C_1e^{k_1t}+C_2e^{k_2t},$$

donde k_1 y k_2 son números reales; en consecuencia, la solución general de la ecuación (6) es

$$y=C_1(2x+3)^{k_1}+C_2(2x+3)^{k_2}.$$

Las condiciones de frontera (5) dan

$$\left.\begin{aligned}C_13^{k_1}+C_23^{k_2}=0,\\ C_19^{k_1}+C_29^{k_2}=0,\end{aligned}\right\}$$

de donde $C_1=0$, $C_2=0$ e $y\equiv 0$.

2) $\lambda=0$. Entonces

$$y=(C_1+C_2t)\,e^{-\frac{t}{2}}$$

y, por consiguiente,

$$y=[C_1+C_2\ln(2x+3)]\frac{1}{\sqrt{2x+3}}.$$

De las condiciones de frontera obtenemos

$$C_1+C_2\ln 3=0,$$
$$C_1+C_2\ln 9=0,$$

de donde $C_1=0$ y $C_2=0$, o sea, $y\equiv 0$.

3) $\lambda>0$. Entonces $k_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{\lambda}}{2}$ y la solución general de la ecuación (7) es

$$y=e^{-\frac{t}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2}t+C_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{\lambda}}{2}t\right)$$

Pasando a la variable x, obtenemos

$$y=\frac{C_1\cos\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln(2x+3)\right]+C_2\operatorname{sen}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln(2x+3)\right]}{\sqrt{2x+3}}. \qquad (8)$$

Las condiciones de frontera (5) dan

$$\left.\begin{aligned} C_1\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln 3\right)+C_2\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln 3\right)=0,\\ C_1\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln 9\right)+C_2\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln 9\right)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

El sistema (9) tendrá soluciones no triviales si su determinante es igual a cero

$$\begin{vmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln 3\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln 3\right)\\ \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln 9\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln 9\right) \end{vmatrix}=0;$$

por lo tanto, $\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\ln 3-\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln 3\right)=0$, es decir, $\operatorname{sen}\times\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln 3\right)=0$, de donde $\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\ln 3=n\pi$. Los valores propios serán

$$\lambda_n=\frac{4n^2\pi^2}{\ln^2 3} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Tomando cualquier ecuación del sistema (9), por ejemplo, la primera, e introduciendo en ella λ_n en lugar de λ, obtenemos

$$C_1\cos n\pi+C_2\operatorname{sen} n\pi=0,$$

o sea, $C_1(-1)^n=0$, de donde $C_1=0$. Tomando en (8) $C_1=0$ y $\lambda_n=\frac{4n^2\pi^2}{\ln^2 3}$, obtenemos las funciones propias del problema considerado

$$y_n(x)=C_n\frac{\operatorname{sen}\left[\frac{n\pi\ln(2x+3)}{\ln 3}\right]}{\sqrt{2x+3}} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Los coeficientes C_n se determinan de la condición de normación

$$\int_0^3 y_n^2(x)\,dx=1$$

lo que da

$$C_n = \pm \frac{2}{\sqrt{\ln 3}}$$

y, por consiguiente,

$$y_n(x) = \pm \frac{2}{\sqrt{\ln 3}} \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{n\pi \ln(2x+3)}{\ln 3}\right]}{\sqrt{2x+3}} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Hallar los valores propios y las funciones propias en los problemas que siguen:

224. $J[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + y'^2)\,dx; \quad y(0) = y(1) = 0;$

$$\int_0^1 y^2\,dx = 1.$$

225. $J[y(x)] = \int_1^2 x^2 y'^2\,dx; \quad y(1) = y(2) = 0;$

$$\int_1^2 y^2\,dx = 1.$$

226. $J[y(x)] = \int_1^e (6y^2 + x^2 y'^2)\,dx;$

$$y(1) = y(e) = 0; \quad \int_1^e y^2\,dx = 1.$$

227. $J[y(x)] = \int_\pi^{2\pi} (y^2 - y'^2)\,dx; \quad y(\pi) = y(2\pi) = 0;$

$$\int_\pi^{2\pi} y^2\,dx = 1.$$

228. $J[y(x)] = \int_0^1 [3y^2 - (x+1)^2 y'^2]\,dx;$

$$y(0) = y(1) = 0; \quad \int_0^1 y^2\,dx = 1.$$

Los valores propios y las funciones propias del problema variacional (3), (2) y (4) tienen varias propiedades importantes.

1) Si λ_m y λ_n son dos valores propios diferentes de la funcional (3) con las condiciones (2) y (4) y si $y_m(x)$ y $y_n(x)$ son las funciones propias que les corresponden, estas funciones $y_m(x)$ e $y_n(x)$ son ortogonales, o sea,

$$\int_a^b y_m(x)\, y_n(x)\, dx = 0 \qquad (m \neq n).$$

2) Todos los valores propios λ_n de la funcional (3) son reales.

3) Si λ_n es un valor propio de la funcional (3) e $y_n(x)$ es la función propia normada que le corresponde, se tiene

$$J[y_n(x)] = \lambda_n.$$

4) El menor de los valores propios coincide con el mínimo de la funcional (3) con las condiciones (2) y (4).

EJEMPLO 2. Demostrar la desigualdad

$$\int_0^\pi y'^2(x) \geqslant \int_0^\pi y^2(x)\, dx, \qquad y(0) = y(\pi) = 0.$$

SOLUCIÓN Determinemos el mín $\int_0^\pi y'^2(x)\, dx$ con las condiciones

$$\int_0^\pi y^2(x)\, dx = 1, \qquad y(0) = y(\pi) = 0.$$

La ecuación de Euler para la funcional

$$J[y(x)] = \int_0^\pi (y'^2 - \lambda y^2)\, dx$$

tiene la forma

$$y'' + \lambda y = 0; \qquad y(0) = 0, \qquad y(\pi) = 0.$$

Las funciones propias de este último problema son $y_n(x) = \operatorname{sen} nx$ y los valores propios son $\lambda_n = n^2$.

El valor propio mínimo es $\lambda_1 = 1$. Por eso, en virtud de la propiedad 4),

$$\text{mín} \int_0^\pi y'^2(x)\, dx = 1.$$

En consecuencia, para cualquier función $y(x)$ tal que $\int_0^\pi y^2(x)\,dx = 1$ tenemos

$$\int_0^\pi y'^2(x)\,dx \geqslant \int_0^\pi y^2(x)\,dx.$$

Esta desigualdad no se puede precisar ya que para $y_1(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\pi}}$ se tiene

$$\int_0^\pi y_1'^2(x)\,dx = \int_0^\pi y_1^2(x)\,dx = 1.$$

OBSERVACIÓN. Si $\int_0^\pi y^2(x)\,dx = k^2 \neq 1$, el problema se reduce al anterior introduciendo la función $z(x) = \frac{y(x)}{k}$.

Empleando la definición extremal de los valores propios, señalemos cómo pueden ser calculados aproximadamente a partir del método de Ritz. Debe tenerse en cuenta que el método de Ritz da una aproximación por exceso del valor propio.

EJEMPLO 3. Hallar aproximadamente el primer valor propio del problema

$$y'' + \lambda^2 y = 0,$$
$$y(-1) = y(1) = 0.$$

SOLUCIÓN. El problema sobre el mínimo de la funcional

$$\int_{-1}^{1} y'^2\,dx$$

con las condiciones

$$y(-1) = y(1) = 0 \quad \text{y} \quad \int_{-1}^{1} y^2\,dx = 1$$

es un problema isoperimétrico y se reduce al problema sobre el mínimo de la funcional

$$J[y(x)] = \int_{-1}^{1} (y'^2 - \lambda^2 y^2)\,dx$$

cuya ecuación de Euler coincide con la ecuación diferencial considerada $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y(-1) = y(1) = 0$.

La solución general de la ecuación es $y = C_1 \cos \lambda x + C_2 \operatorname{sen} \lambda x$. De las condiciones de frontera encontramos

$$\left.\begin{aligned} C_1 \cos \lambda - C_2 \operatorname{sen} \lambda = 0, \\ C_1 \cos \lambda + C_2 \operatorname{sen} \lambda = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

de modo que la condición de existencia de una solución no nula del sistema (10) es la condición de que $\operatorname{sen} 2\lambda = 0$, o sea, $\lambda = \frac{n\pi}{2}$.

Por consiguiente, para el primer valor propio tenemos $\lambda_1^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ y la primera armónica de la cuerda viene dada por la solución exacta $y = \cos \frac{\pi x}{2}$, $\lambda = \frac{\pi}{2}$; la segunda armónica es $y = \operatorname{sen} \pi x$, $\lambda = \pi$; la tercera armónica es $y = \cos \frac{3\pi x}{2}$, $\lambda = \frac{3}{2}\pi$, etc.

A título de comparación, busquemos las soluciones pares (armónicas pares de la cuerda) aproximadas en forma de un polinomio según las potencias de x. Tomando las funciones coordenadas en la forma $\varphi_k(x) = x^{2k-2} - x^{2k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ minimicemos la funcional J en las funciones $y_m(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \varphi_k(x)$. Limitándonos al término $y_1(x) = c_1 \varphi_1(x)$, tendremos $J[y_1(x)] = c_1^2 \left(\frac{8}{3} - \frac{16}{15}\lambda^2\right)$ y para determinar c_1 obtendremos

$$\frac{\partial J[y_1(x)]}{\partial c_1} = 2c_1 \left(\frac{8}{3} - \frac{16}{15}\lambda^2\right) = 0.$$

Puesto que debe ser $c_1 \neq 0$, resulta $\lambda^2 = 2{,}5$. Tomando para y

$$y_2(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x),$$

encontramos

$$J[y_2(x)] = c_1^2 \left(\frac{8}{3} - \frac{16}{15}\lambda^2\right) + 2c_1 c_2 \left(\frac{8}{15} - \frac{16}{105}\lambda^2\right) + c_2^2 \left(\frac{88}{105} - \frac{16}{315}\lambda^2\right),$$

y para determinar c_1 y c_2 obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial J[y_2(x)]}{\partial c_1} = c_1 \left(\frac{16}{3} - \frac{32}{15}\lambda^2\right) + c_2 \left(\frac{16}{15} - \frac{32}{105}\lambda^2\right) = 0, \\ \frac{\partial J[y_2(x)]}{\partial c_2} = c_1 \left(\frac{16}{15} - \frac{32}{105}\lambda^2\right) + c_2 \left(\frac{176}{105} - \frac{32}{315}\lambda^2\right) = 0, \end{aligned}\right\}$$

La condición de existencia de soluciones no nulas c_1 y c_2 de este último sistema es que su determinante sea igual a cero; esto da $\lambda^4 - 28\lambda^2 + 63 = 0$, de donde $\lambda_1^2 = 2{,}46744$ y $\lambda_2^2 = 25{,}53256$. Comparemos los valores aproximados obtenidos para λ_1^2 y λ_2^2 con sus valores exactos. El valor exacto de λ_1^2 es $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \approx 2{,}46740$ y el valor exacto de λ_2^2 es $\left(\frac{3\pi}{2}\right) \approx 22{,}20661$ de modo que el valor aproximado obtenido para λ_1^2 es de gran exactitud mientras que para el segundo valor propio se obtiene una aproximación tosca.

EJEMPLO 4. Hallar el primer valor propio del problema

$$y'' + \lambda (1 + x^2) y = 0, \quad y(-1) = y(1) = 0.$$

SOLUCIÓN. Tomemos como funciones coordenadas las funciones $\varphi_k(x) = 1 - x^{2k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ que satisfacen, obviamente, las condiciones de frontera. Poniendo

$$y_2(x) = c_1(1 - x^2) + c_2(1 - x^4),$$

planteemos el problema sobre la minimización de la funcional

$$J[y(x)] = \int_{-1}^{1} [y'^2 - \lambda(1 + x^2) y^2]\, dx$$

que tiene la ecuación dada como ecuación de Euler. Tendremos

$$J[y_2(x)] = c_1^2\left(\frac{8}{3} - \frac{128}{105}\lambda\right) + 2c_1c_2\left(\frac{16}{5} - \frac{64}{45}\lambda\right) + c_2^2\left(\frac{32}{7} - \frac{5888}{3465}\lambda\right).$$

Para determinar c_1 y c_2 obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial J[y_2(x)]}{\partial c_1} &= 2c_1\left(\frac{8}{3} - \frac{128}{104}\lambda\right) + 2c_2\left(\frac{16}{5} - \frac{64}{45}\lambda\right) = 0, \\ \frac{\partial J[y_2(x)]}{\partial c_2} &= 2c_1\left(\frac{16}{5} - \frac{64}{45}\lambda\right) + 2c_2\left(\frac{32}{7} - \frac{5888}{3465}\lambda\right) = 0. \end{aligned}\right\}$$

La condición de existencia de solución no nula de este último sistema da

$$52\lambda^2 - 1068\lambda + 2079 = 0,$$

de donde, tomando la raíz menor, encontramos $\lambda_1 = 2{,}1775$.

PRINCIPIO DE RAJLEIGH. Supongamos que se tiene el problema de valores propios

$$L(y) \equiv -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)\, y = \lambda r(x)\, y, \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 > 0, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

donde $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son continuas en $[a, b]$; $p(x) > 0$ en $[a, b]$.

Diremos que la función $y(x)$ es *admisible* ($y \in D$) si tiene dos derivadas continuas y satisface las condiciones de frontera (12).

Supongamos que para toda función admisible $y(x)$ se cumple la condición

$$\int_a^b yL(y)\,dx \geqslant 0.$$

En este caso el problema de contorno (11) — (12) tiene solamente valores propios reales λ.

Podemos poner en correspondencia a este problema de valores propios el siguiente *problema* variacional:

entre todas las funciones admisibles $y(x)$ tales que

$$\int_a^b r(x)\,y^2\,dx > 0. \tag{13}$$

hallar aquella para la cual $\dfrac{\int_a^b yL(y)\,dx}{\int_a^b r(x)\,y^2\,dx} = \text{mín}.$

Sea $y = \psi_1'(x)$ la solución de este problema.

Si λ_1 es el valor mínimo, o sea, si

$$\lambda_1 = \min_{y \in D} \frac{\int_a^b yL(y)\,dx}{\int_a^b r(x)\,y^2\,dx} = \frac{\int_a^b \psi_1 L(\psi_1)\,dx}{\int_a^b r\psi_1^2\,dx},$$

entonces λ_1 es el menor valor propio positivo y $\psi_1(x)$ es la función propia que le corresponde.

Si a las funciones admisibles se impone, a parte de la condición (13), una condición más

$$\int_a^b r\psi_1 y\,dx = 0$$

(condición de ortogonalidad), el problema

$$\frac{\int_a^b yL(y)\,dx}{\int_a^b ry^2\,dx} = \text{mín}$$

tendrá de nuevo una solución $\psi_2(x)$.

Si λ_1 es el valor mínimo correspondiente, entonces λ_2 será el siguiente, en cuanto a la magnitud ($\lambda_2 \geqslant \lambda_1$), valor propio y $\psi_2(x)$ será la función propia ortogonal a $\psi_1(x)$ que le corresponde. En general, si se conocen ya los k primeros valores propios positivos

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k$$

y el sistema ortogonal correspondiente de funciones propias

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_k(x),$$

el valor propio siguiente será igual a

$$\lambda_{k+1} = \min_{y \in D} \frac{\int_a^b yL(y)\,dx}{\int_a^b ry^2\,dx}$$

con la particularidad de que se consideran aquellas funciones admisibles $y(x)$ que, a parte de (13), satisfacen las siguientes condiciones complementarias

$$\int_a^b r(x)\,\psi_\nu(x)\,y(x)\,dx = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k).$$

Si en la ecuación (11) se tiene que la función $r(x) > 0$ en $[a, b]$ con frecuencia se emplea para estimar por arriba el menor valor propio positivo λ_1 la siguiente desigualdad (principio de Rayleigh):

$$\lambda_1 \leqslant \frac{\int_a^b yL(y)\,dx}{\int_a^b ry^2\,dx}.$$

EJEMPLO 5. Valiéndose del principio de Rayleigh, estimar λ_1 en el siguiente problema de contorno

$$-y'' = \lambda y, \qquad y'(0) = 0, \qquad y(1) = 0.$$

SOLUCIÓN. En nuestro caso tenemos $L(y) = -y''$, o sea, $p(x) \equiv 1 > 0$, $q(x) \equiv 0$ y $r(x) \equiv 1 > 0$ en $[0, 1]$. Es obvio que $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ y $\beta_2 = 0$ de modo que $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 > 0$ y $\alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1 > 0$. Tomemos como función admisible $y(x) = 1 - x^2$; según el principio de Rayleigh, tendremos

$$\lambda_1 \leqslant \frac{\int_0^1 yL(y)\,dx}{\int_0^1 yr^2\,dx} = \frac{\int_0^1 2(1-x^2)\,dx}{\int_0^1 (1-x^2)\,dx} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{15}} = 2.5.$$

Recordemos que el valor exacto es $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4} \approx 2{,}4674$.

Estimar el menor valor propio en los problemas que siguen:

229. $-y'' = \lambda (10 - x^2) y;\ y(-1) = y(1) = 0.$

230. $-y'' = \lambda y;\ y(0) = y(1) = 0.$

En el problema de la determinación de los valores y de las funciones propios también se puede emplear el método de Kantoróvich (método de reducción a ecuaciones diferenciales ordinarias). Supongamos, por ejemplo, que en un recinto D se tiene la ecuación

$$\Delta z + \lambda z = 0$$

y que

$$z|_{\Gamma} = 0,$$

donde Γ es la frontera del recinto D.

Busquemos la solución en la forma

$$z_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x) \varphi_k(x, y) + \varphi_0(x, y)$$

escogiendo las funciones coordenadas $\varphi_k(x, y)$ y las funciones $\alpha_k(x)$, por ahora incógnitas, de modo que $z_m(x, y)$ se anule en todos los puntos de Γ. Las funciones $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_m(x)$ deben satisfacer el sistema de ecuaciones

$$\int_{D_x} [\Delta z_m + \lambda z_m] \varphi_k(x, y)\, dy = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{14}$$

y deben anularse en los valores extremos del argumento. Aquí D_x es la intersección del recinto D y de la recta $x = \text{const}$.

Aquellos valores de λ para los cuales el sistema (14) tendrá solución no trivial darán una aproximación de los valores propios y las soluciónes correspondientes darán una aproximación de las funciones propias.

EJEMPLO 6. Hallar aproximadamente el primer valor propio y la primera función propia en el problema

$$\Delta z + \lambda z = 0, \quad z|_{\Gamma} = 0$$

donde el recinto D es el rectángulo: $-a \leqslant x \leqslant a,\ -b \leqslant y \leqslant b$.

SOLUCIÓN. Buscamos la solución del problema en la forma

$$z_1(x, y) = (y^2 - b^2)\, \alpha_1(x).$$

La eucación (14) toma en este caso la forma

$$\int_{-b}^{b} [2\alpha_1 + (y^2 - b^2)\alpha_1'' + \lambda (y^2 - b^2) \alpha_1] (y^2 - b^2)\, dy = 0,$$

o sea,

$$\frac{16}{15}b^5\alpha_1'' + \left(\frac{16}{15}b^5\lambda - \frac{8}{3}b^3\right)\alpha_1 = 0, \tag{15}$$

$$\alpha_1(-a) = \alpha_1(a) = 0.$$

La solución general de (15) es

$$\alpha_1(x) = C_1 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda - \frac{5}{2b^2}}\,x + C_2\cos\sqrt{\lambda - \frac{5}{2b^2}}\,x.$$

Teniendo en cuenta la simetría del problema y tomando una solución particular, obtenemos

$$C_1 = 0 \quad \text{y} \quad C_2\cos\sqrt{\lambda - \frac{5}{2b^2}}\,a = 0;$$

queda claro de aquí que tendremos una solución no trivial sólo si

$$\sqrt{\lambda - \frac{5}{2b^2}}\,a = (2k-1)\frac{\pi}{2};$$

$$\lambda_k = \frac{(2k-1)^2\pi^2}{(2a)^2} + \frac{5}{2b^2}.$$

En particular, para $k = 1$ encontramos

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{(2a)^2} + \frac{10}{2b^2}$$

siendo el valor exacto

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{(2a)^2} + \frac{\pi^2}{2b^2}.$$

El error es menor que 1,3%.

Para la primera función propia obtenemos la aproximación

$$z_1(x, y) = (y^2 - b^2)\cos\frac{\pi x}{2a}.$$

Hallar una aproximación del primer valor propio en los problemas que siguen.

231. $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y(0) = y(1) = 0$.

232. $y'' + \lambda(2 + \cos x)\,y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$.

233. Hallar aproximadamente el primer valor propio en el problema

$$\Delta z + \lambda z = 0 \qquad z|_\Gamma = 0,$$

donde D es el círculo de radio uno con centro en el origen de coordenadas.

RESPUESTAS E INDICACIONES

1. a) $f_{\text{mín}}=0$ en el punto $(0, 0)$; b) $f_{\text{máx}}=1$ en el punto $(0, 0)$; c) no hay extremo. **2.** No hay extremo. **3.** $f_{\text{mín}}=-8$ en los puntos $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$; en el punto $(0, 0)$ no hay extremo. **4.** $f_{\text{mín}}=0$ en el punto $(0, 0)$; en los puntos de la circunferencia $x^2+y^2=1$ hay máximo no estricto. **5.** $f_{\text{máx}}=\sqrt{3}$ en el punto $(1, -1)$. **6.** $f_{\text{mín}}=4$ en el punto $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$. **7.** $f_{\text{mín}}=-1$ en el punto $(1, 0)$. **8.** $f_{\text{mín}}-\frac{3\sqrt{3}}{8}$ en el punto $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$; $f_{\text{máx}}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$ en el punto $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}\right)$. **9.** $f_{\text{máx}}=\left(\frac{1}{n^2+n+2}\right)^{\frac{n^2+n+2}{2}}$ para $x_1=x_2=\ldots=x_n=$ $=\frac{2}{n^2+n+2}$. **11.** No. **13.** Los números α_k y β_k deben ser los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$. **14.** $f_{\text{mín}}=-\frac{1}{2}$ en los puntos $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $f_{\text{máx}}=\frac{1}{2}$ en los puntos $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **15.** $f_{\text{mín}}=\frac{36}{13}$ en el punto $\left(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right)$. **16.** $f_{\text{máx}}=4$ en los puntos $(2, 2, 1)$, $(1, 2, 2)$ y $(2, 1, 2)$; $f_{\text{máx}}=4\frac{4}{27}$ en los puntos $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ y $\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$. **17.** $f_{\text{máx}}=e^{\frac{a^2}{4}}$. **18.** $f_{\text{mín}}=1$ en el punto $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$; $f_{\text{máx}}=11$ en el punto $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$. **19.** $f_{\text{mín}}=-9$ en el punto $(-1, 2, -2)$; $f_{\text{máx}}=9$ en el punto $(1, -2, 2)$. **20.**

$f_{\text{máx}}=\frac{1}{8}$ en el punto $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$. **21.** *Indicación.* Hallar el mínimo de la función $z=\frac{1}{2}(x^n+y^n)$ con la condición $x+y=S$. **22.** c^4. **23.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **24.** $\frac{19\sqrt{2}}{8}$. **25.** El cuadrado de dimensión $a=R\sqrt{2}$. **26.** El radio de la base del cilindro $r=\frac{R}{2}\sqrt{2+\frac{2}{\sqrt{5}}}$ y la altura del cilindro $h=R\sqrt{2-\frac{2}{\sqrt{5}}}$. **27.** Primero. **28.** Proximidad de cualquier orden. **29.** Proximidad de cualquier orden. **30.** $\rho=e^{-1}$. **31.** $\rho=1$. **32.** $\rho=e-1$. **33.** $\rho_1=e-1$. **34.** $\rho_2=\frac{2\pi+3}{6}$. **35.** $\rho_{1001}=e$. **36.** Continua. **37.** Continua. **38.** Discontinua $\left(\text{considerar la sucesión } y_n(x)=\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right)$. **39.** a) Discontinua; b) continua. **40.** a) Discontinua; b) continua. **41.** Continua. **45.** $\Delta J=\frac{1-e^2}{2}$.

48.

α	ΔJ	δJ
1	1,2	1
−0,1	−0,098	−0,1
0,01	0,01002	0,01

$\Delta J=\alpha+\frac{\alpha^2}{5}$; $\delta J=\alpha$.

49. $\Delta J=\frac{3(e^2-1)}{4}\alpha+6(3-e)\alpha^2+\frac{\alpha^3}{5}$; $\delta J=\frac{3(e^2-1)}{4}\alpha$.

α	δJ	ΔJ
1	4,7919	6,6821
0,1	0,4792	0,4963
0,01	0,0479	0,0481

50. 1) Diferenciable; 2) diferenciable; 3) diferenciable; 4) no diferenciables. **51.** $\delta J^2[y(x)]=2J[y(x)]\,\delta J$.

53. $\Delta J=3k+\frac{e}{e-1}k^2$; $\delta J=3k$.

k	ΔJ	δJ
1	4,582	3
0,1	0,3158	0,3
0,01	0,03016	0,03

54. $\Delta J = \frac{5}{3}k + \frac{8}{7}k^2; \quad \delta J = \frac{5}{3}k$

k	ΔJ	δJ
1	2,810	1,667
0,1	0,181	0,167
0,01	0,0168	0,0167

55. $\Delta J = \frac{4}{3}k^2; \ \delta J \equiv 0.$

k	δJ	ΔJ
-1	0	1,3333
0,3	0	0,1200
0,03	0	0,0012

57. $\delta J = \int_a^b \delta y\, dx.$ **58.** $\delta J = 2\int_a^b (y\,\delta y - y'\,\delta y')\, dx.$

59. $\delta J = 2y(0)\,\delta y(0) + \int_0^1 (x\,\delta y + 2y'\,\delta y')\, dx.$

60. $\delta J = \int_0^\pi (y'\cos y\,\delta y + \operatorname{sen} y\,\delta y')\, dx.$

61. $\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2}\delta y_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y'_n}\delta y'_n\right) dx.$

62. $\delta^2 J[y, y] = 2J[\delta y, \delta y].$

63. $\delta^2 e^{F(y)} = e^{F(y)}[(\delta F)^2 + \delta^2 F].$

65. $\delta^2 J = \int_a^b \sum_{k,\ l=0}^{m} \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(k)}\,\partial y^{(l)}}\,\delta y^{(k)}\,\delta y^{(l)}\, dx.$

66. $\delta^2 J = \iint_G [F''_{zz}(\delta z)^2 + F''_{zz'_x}\delta z\,\delta z'_x + \ldots + F''_{z'_y z'_y}(\delta z'_y)^2]\, dx\, dy.$

67. $\delta^2 J = \int_a^b \Big[\sum_{i,\ k=1}^{m} F''_{y_i y_k}\delta y_i\,\delta y_k + \sum_{i,\ k=1}^{n} F''_{y_i y'_k}\delta y_i\,\delta y'_k +$

$$+ \sum_{i,\ k=1}^{n} F''_{y'_i y'_k}\delta y'_i\,\delta y'_k\Big]\, dx.$$

68. Considerar la funcional

$$J[\varphi+\alpha\eta]=\Phi(\alpha)$$

y emplear la segunda definición de la variación. Exigiendo que $\delta J=0$, llegamos a la ecuación integral

$$\int_a^b K(s,\ t)\,\varphi(s)\,ds+\varphi(t)-f(t)=0.$$

69. Procediendo de la misma forma que en el problema anterior, encontramos que la ecuación funcional de Euler, que expresa la anulación de la primera variación, viene dada por

$$(p\varphi')'-\varphi(x+2)-\varphi(x-2)+\varphi(x)+f(x)=0.$$

Esta última es una ecuación mixta con derivadas y diferencias.

70. $-(p\varphi')'+q\varphi=f(x)$. **71.** $y=-x^3$. **72.** $y=\dfrac{\operatorname{sh}(2-x)}{\operatorname{sh}1}$. **73.** Dos extremales

$$y=\frac{1+(3\pm 2\sqrt{2})(2x-1)^2}{4(\sqrt{2}\pm 1)}.$$

74. Dos extremales $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}$ e $y=\sqrt[3]{(3x-1)^2}$. **75.** $y=(C+x)\operatorname{sen}x$, donde C es una constante arbitraria. **76.** $y=\dfrac{1}{2}\times[e^{-x}+(1+e)\,xe^{-x}-1]$. **77.** $y=\dfrac{7}{6}x-\dfrac{1}{6}x^3$. **78.** $y=\dfrac{13}{6}x-\dfrac{1}{6}x^3+2$. **79.** $y=\ln x$. **81.** La integral no depende del camino de integración; el problema variacional carece de sentido. **82.** $y=0$ si $\alpha=0$; siendo $\alpha\neq 0$, no existe extremal suave. **83.** $y=\cos x$. **84.** $y=\cos x+C\operatorname{sen}x$, donde C es una constante arbitraria. **85.** $y=x+1$. **86.** $y=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}1}$. **87.** $y=e^{2(1-x)}$. **88.** No hay extremales; la ecuación de Euler no tiene soluciones. **89.** $y=C_1+C_2x-\dfrac{x^2}{4}$. **90.** No hay extremales. **93.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\dfrac{1}{2}xe^x$. **94.** $y=2\operatorname{ch}x$. **96.** $y=\dfrac{y_1\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x_1}$. **97.** $y=2x$. **98.** La circunferencia $\dfrac{1}{r}=K$. **99.** $y=(1-x)\operatorname{sh}x$. **100.** $y=\dfrac{x^3}{6}(x^3+6x+1)$. **101.** No hay extremo. **102.**

El problema variacional carece de sentido porque bajo el signo de la integral figura una diferencial exacta. **103.** $y=\operatorname{sh} x$.

104. $y=\frac{1}{2}x^2$. **105.** $\begin{cases} y=\operatorname{sen} 2x, \\ z=-\frac{x^2}{2}+\frac{32+\pi^2}{8\pi}x. \end{cases}$

106. $\begin{cases} y=-\frac{1}{6}(x^3+5x-6), \\ z=x. \end{cases}$ **107.** $\begin{cases} y=\operatorname{sen} x, \\ z=\operatorname{sen} x. \end{cases}$

108. $\begin{cases} y=\frac{x^2}{2}+1, \\ z=1. \end{cases}$

110. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x, y)$.

111. $\Delta\Delta z=0$

112. $$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[a_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_j}\right]+c(x_1, x_2, \ldots, x_n)z=$$
$$=f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

113. *Solución.* El planteamiento del problema es el siguiente. Entre las superficies $z=\varphi(x, y)$ que se proyectan en el recinto D del plano xOy y que pasan por cierta curva cerrada alabeada cuya proyección es la curva frontera Γ del recinto D, hallar la superficie cuyo área

$$S=\iint_D \sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}\,dx\,dy$$

sea mínimo (problema de Plateau). La ecuación diferencial de Euler para este problema es

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\varphi_x}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\varphi_y}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}}=0$$

o en forma desarrollada

$$\varphi_{xx}(1+\varphi_y^2)-2\varphi_{xy}\varphi_x\varphi_y+\varphi_{yy}(1+\varphi_x^2)=0.$$

Ésta es la ecuación diferencial buscada de las superficies de área mínimo. La realización física de la superficie de área mínima se puede obtener, por ejemplo, con una película de jabón tendida sobre un lazo de alambre.

114. $z(x, y)=y$. El problema tiene solución única aunque las condiciones de frontera no se dan en toda la frontera.

115. $r\cos\varphi + C_2 = C_1 \ln|r\,\text{sen}\,\varphi + \sqrt{r^2\,\text{sen}^2\varphi - C_1^2}|$.

117. $x^2\cos C_2 - y^2\cos C_2 - 2xy\,\text{sen}\,C_2 = C_1$.

118. Campo central. 119. a) Campo propio; b) campo central; c) no forma campo. 120. Campo propio. 121. a) Campo central; b) no forma campo; c) campo propio. 122. a) Campo central; b) campo propio; c) no forma campo. 123. No forma campo porque esta familia de curvas no cubre todo el recinto D. 124. $y=C_1\,\text{ch}\,x$ forman un campo propio de extremales; $y=C_2\,\text{sh}\,x$ forman un campo central de extremales. 125. $y=C\cos x$ forman un campo propio de extremales; $y=C\,\text{sen}\,x$ forman un campo central de extremales. 126. La extremal $y=\frac{x}{6}(1-x^2)$ puede ser incluida en el campo central de extremales $y=C_1x-\frac{x^3}{6}$ con centro en el punto $O(0, 0)$. 127. La extremal $y=e^x$ se puede incluir en el campo propio de extremales $y=e^x+C$. 128. Si $a<\pi$, la extremal $y=0$ se puede incluir en el campo central de extremales $y=C\,\text{sen}\,x$ con centro en el punto $O(0, 0)$. Si $a>\pi$, las curvas de la familia $y=C\,\text{sen}\,x$ no forman campo. 129. La extremal $y=x+1$ se puede incluir en el campo propio $y=x+C$. 130. $y=-\frac{x^2}{4}$. 131. $y\left(\frac{y}{4}-x\right)=0$. 132. $y^2-1=0$. 133. $O^*(1, 0)$. 134. No hay punto conjugado. 135. Se cumple. 136. Se cumple cualquiera que sea a. 137. La condición de Jacobi se cumple. La extremal $y=0$ se puede incluir tanto en un campo central como propio de extremales. 138. La condición de Jacobi se cumple. La extremal $y=\frac{b-1}{a}x+1$ se puede incluir en un campo central de extremales con centro en el punto $A(0, 1)$. 139. La condición de Jacobi no se cumple. 142. Se puede. 143. Se puede. 144. Se puede. 145. Se puede aunque la condición de Legendre se cumple sólo para $\frac{b}{a}<1$. 146. Se alcanza mínimo fuerte en la función $y=e^x$. 147. Se alcanza mínimo fuerte en la función $y=2\ln(x+1)$. 148. Se alcanza mínimo débil en la función $y=x^2$. 149. Se alcanza mínimo débil en la recta $y=\frac{b}{a}x$. 150. Se alcanza mínimo fuerte en la curva $y=\frac{\ln(1+x)}{\ln 2}$. 151. Se alcanza máximo fuerte en la curva $y=\cos x+\text{sen}\,x$. 152. No se alcanza extremo en curvas continuas. 153. Se alcanza mínimo débil en la recta $y=2x+1$. No hay extremo fuerte. 154. Se alcanza mínimo fuerte en la extremal $y=2x-1$. 155. Se alcanza mínimo fuerte en la extremal $y=x^2$. 156. Se alcanza mínimo débil en la extremal $y=x-1$. 157. En la extremal $y=\frac{b}{a}x$ se alcanza mínimo débil si $|b|<\frac{a}{\sqrt{2}}$ y máximo débil si $|b|>\frac{a}{\sqrt{2}}$. No hay extremo si $|b|=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

158. Si $p \neq q$, se alcanza mínimo débil en la extremal $y = \sqrt[3]{[(q^{3/2} - p^{3/2})\,x + p^{3/2}]^2}$; si $p = q$, la extremal es la recta $y = p$ que ofrece mínimo débil.

159. a) Para $\varepsilon > 0$ la extremal $y = \dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon}}}{\operatorname{sh}\dfrac{2}{\sqrt{\varepsilon}}}$ realiza el mínimo fuerte de la funcional. b) Si $\varepsilon < 0$ y $|\varepsilon| > \dfrac{1}{\pi^2}$, la extremal $y = \dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{x}{\sqrt{|\varepsilon|}}}{\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}}$ realiza el máximo fuerte de la funcional. c) Si $\varepsilon = 0$, no existe solución del problema extremal en la clase de funciones continuas. Consideremos la función $y_\varepsilon(x) = e^{\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}}$ $(\varepsilon > 0)$ que es solución de la ecuación de Euler $\varepsilon y'' - y = 0$ de la funcional considerada. La función $y_\varepsilon(x)$ satisface la condición de frontera $y(1) = 1$ y no satisface la segunda condición de frontera $y(0) = 0$. No obstante, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} y_\varepsilon(0) = 0$. Para $\varepsilon \to 0$ obtenemos de $y_\varepsilon(x)$ la «solución límite»

$$y(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

160. La extremal $y = -\dfrac{2\ln(1+x)}{\ln 2}$ realiza el mínimo fuerte. **161.** Hay mínimo fuerte en la extremal $y(x) = 1$. **162.** En la extremal $y(x) = \dfrac{b}{a}x$ se alcanza mínimo débil si $\dfrac{b}{a} < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y máximo débil si $\dfrac{b}{a} > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; si $\dfrac{b}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, no se alcanza ni siquiera el extremo débil. **163.** En la recta $y = \dfrac{b}{a}x$ se alcanza mínimo débil si $b < a$ y máximo débil si $b > a$; si $b \geqslant a\sqrt{3}$, hay máximo fuerte mientras que para $b < a\sqrt{3}$ no hay ni mínimo ni máximo fuertes. **164.** Se alcanza mínimo débil en la extremal $y = 2x$, $z = 4x$. **165.** La extremal es la parábola $\begin{cases} y = x, \\ z = x^2 - x \end{cases}$, que se puede incluir en el campo central de extremales

$$\begin{cases} y = \alpha x, \\ z = x^2 + \beta x \end{cases} \tag{1}$$

α y β son unos parámetros) con centro en el punto (0, 0, 0). Es obvio que se cumplen las condiciones reforzadas de Legendre. Demostremos que en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$ no hay punto x^* conjugado del punto $x=0$. Para ello bastará persuadirse de que las extremales de la familia (1) no cortan la extremal dada si $x \in [0, 1]$. Supongamos que en un punto $x^* \in [0, 1]$ se cortan dos extremales de la familia (1). Tendremos entonces

$$\left.\begin{array}{c}\alpha_1 x^* = \alpha_2 x^*, \\ x^{*2} + \beta_1 x^* = x^{*2} + \beta_2 x^*.\end{array}\right\}$$

De aquí resulta que $\alpha_1 = \alpha_2$ y que $\beta_1 = \beta_2$. Luego, no hay dos extremales distintas que se corten. Por consiguiente, la condición reforzada de Jacobi se cumple en el segmento [0, 1] e incluso en cualquier segmento de longitud finita. **166.** La familia de extremales es $y(x) = C_1 \operatorname{ch} \frac{x - C_2}{C_1} - \lambda$. Las constantes arbitrarias C_1 y C_2 y el parámetro λ se determinan de las condiciones

$$y_0 = C_1 \operatorname{ch} \frac{x_0 - C_2}{C_1} - \lambda, \qquad y_1 = C_1 \operatorname{ch} \frac{x_1 - C_2}{C_1} - \lambda,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = C_1 \left(\operatorname{sh} \frac{x_1 - C_2}{C_1} - \operatorname{sh} \frac{x_0 - C_2}{C_1} \right) = l.$$

167. $y(x) = 3x^2 + 2x + 1$. **168.** $y(x) = \pm 2 \operatorname{sen} n\pi x$, donde n es un número entero **169.** $y(x) = \frac{1}{4}(2x - x^2)$. **170.** $\sqrt{6}$. **171.** $r = R$, $z = C_1 + C_2\varphi$. **172.** $\frac{4}{\sqrt{5}}$. **173.** $\sqrt{20}$. **174.** $2\sqrt{2} - 1$. **175.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **178.** $\frac{\sqrt{11}}{2}$. **179.** $\sqrt{17 + 4\sqrt{6}} \left(\frac{5}{2} - \sqrt{6} \right)$. **180.** 1. **181.** Si $\cos x_1 \neq 0$, el extremo se puede alcanzar solamente en la recta $\begin{cases} y = 0, \\ z = 0 \end{cases}$. En cambio, si $\cos x_1 = 0$, o sea $x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi$, donde n es un número entero, se tiene $\begin{cases} y = C_4 \operatorname{sen} x, \\ z = -C_4 \operatorname{sen} x, \end{cases}$ siendo C_4 una constante arbitraria. **182.** $J(A, B) = 4 \operatorname{cth} 1$. **183.** $J(A, B) = \frac{26}{5}$. **184.** $y = 2x^{2/3}$. **185.** Las líneas quebradas formadas por los segmentos de las rectas $y = x$ e $y = 1$ o por los segmentos de las rectas $y = 0$ e $y = x - 1$ realizan el mínimo absoluto. La recta $y = \frac{1}{2} x$ realiza el máximo débil. **186.** $y = -x$ para

$0 \leqslant x \leqslant 1$; $y = x - 2$ para $1 < x \leqslant 4$ e $y = x$ para $0 \leqslant x \leqslant 3$; $y = -x + 6$ para $3 < x \leqslant 4$. En ambas quebradas la funcional alcanza su mínimo absoluto. **187.** No existen. **188.** $y = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x, & x > 0. \end{cases}$ **189.** Las extremales son líneas rectas. Si $\left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right| < 1$, existen dos soluciones discontinuas que son líneas quebradas paralelas a las bisectrices de los ángulos coordenados. **190.** La recta $y = x \operatorname{tg} \varphi$ que pasa por los puntos fijos realiza máximo débil si $0 < \operatorname{tg} \varphi < \pi$, realiza mínimo débil si $\pi < \operatorname{tg} \varphi < 2\pi$, etc. El mínimo fuerte se alcanza en la línea quebrada formada por segmentos de rectas tales que la tangente de los ángulos de su inclinación es igual a $\frac{4n-1}{2}\pi$ (n es un número entero).

$$\textbf{191.} \qquad y(x) = \begin{cases} \pm \frac{3}{4} x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{16}{5}, \\ \pm \sqrt{9 - (x-5)^2}, & \frac{16}{5} < x \leqslant \frac{34}{5}, \\ \mp \frac{3(x-10)}{4}, & \frac{34}{5} < x \leqslant 10. \end{cases}$$

192. Las extremales son las elipses

$$\frac{(x + C_1)^2}{C_2^4} + \frac{y^2}{C_2^2} = 1 \qquad (1)$$

con centros en el eje Ox. La frontera del recinto admisible se determina por las ecuaciones $y = 0$ e $y^2 = \pm 2(x - C_3)$ (la última es la solución de la ecuación $1 - y^2 y'^2 = 0$). Los parámetros C_1 y C_2 se escogen de modo que la elipse (1) pase por los puntos fijos A y B. La funcional alcanza máximo en el arco de la elipse. Si el camino del punto A al punto B se escoge según los arcos de dos parábolas (y, posiblemente, según un segmento de la recta $y = 0$), se obtiene una solución con puntos angulares en la que la funcional alcanza su mínimo (mín $J = 0$).

193. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y^2}{4p^2}$, $\frac{dp}{dx} = \frac{x^2 y}{2p}$. **194.** $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2xy}$, $\frac{dp}{dx} = \frac{p^2}{4xy^2}$. **195.** $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{x^2 + y^2 - p^2}}$, $\frac{dp}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - p^2}}$. **196.** $\frac{dy_1}{dx} = \frac{p_1}{2}$, $\frac{dp_1}{dx} = 0$, $\frac{dy_2}{dx} = \frac{p_2}{2}$, $\frac{dp_2}{dx} = 2y_2$. **197.** $\frac{dy_1}{dx} = \frac{p_1}{2y_1}$, $\frac{dy_2}{dx} = \frac{p_2}{2y_2}$, $\frac{dp_1}{dx} = \frac{p_1^2}{2y_1^2}$, $\frac{dp_2}{dx} = \frac{p_2^2}{4y_2^2}$. **198.** $\frac{dy_1}{dx} = -\frac{p_1}{2}$, $\frac{dy_2}{dx} = -\sqrt{p_2}$, $\frac{dp_1}{dx} = 2x$, $\frac{dp_2}{dx} = 0$; $\frac{dy_1}{dx} = -\frac{p_1}{2}$, $\frac{dy_2}{dx} = \sqrt{p_2}$,

$\frac{dp_1}{dx}=2x$, $\frac{dp_2}{dx}=0$. **199.** $y^3=C_1x^3+C_2$. **200.** $y^3=\ln^2 x$. **201.** $x=$ $=C_1\int \frac{dy}{\sqrt{G^2(y)-C_1^2}}+C_2$. **202.** En la extremal $y=\frac{x^2-x-1}{2}$ se alcanza el mínimo fuerte: $\min J=-\frac{5}{4}$. **203.** $p(x, y)=\frac{y^2-x^2}{2xy}$. Las extremales son las semicircunferencias $y=\sqrt{C_1^2-(x-C_2)^2}$ con centros en el eje Ox; $y=\sqrt{2C_1x-x^2}$ son las extremales que pasan por el origen $O(0, 0)$; el campo es el semiplano superior. **204.** El arco de la circunferencia que pasa por el punto $M_1(x_1, y_1)$ y que tiene el centro en el punto $O(0, 0)$ realiza el mínimo fuerte. **205.** $xF\left(\frac{y}{x}\right)=C$. **206.** Las elipses $3x^2-8xy+6y^2=C$. **207.** $x^3+2y^3-3xy^2-2x^2y=C$. **208.** $f=\sqrt{1+y'^2}$. **209.** $f=xy\sqrt{y'}$. **210.** $f=xyy'^2$. **211.** $f=$ $=\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)(x^2y'^2+y^2)}$. **212.** Una catenaria. **213.** *Indicación*. La integral de la acción es $J=\int\sqrt{\frac{k}{\rho^4}+2h}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi$. **214.** Las trayectorias son las elipses $\frac{x^2}{C}+\frac{2y^2}{2h-C}-\frac{2\cos\beta}{\sqrt{C(2h-C)}}xy=\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{k}$.

215. La solución exacta es $y=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}-x$. **216.** Las soluciones exactas son a) $y\equiv 0$, b) $y=x$. **217.** La solución exacta es $y=\frac{1}{2}(x^2-x)$. **218.** La solución exacta es $y=\frac{2\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2}-x$. **219.** *Indicación*: la solución aproximada debe buscarse en la forma $y_n(x)=(1-x^2)\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x^{2k}$. La solución exacta es $y=\cos\frac{\pi x}{2}$. **220.** *Indicación*: tomar xy como función coordenada; entonces, $z_1=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}xy$. **221.** *Indicación*: tomar $\varphi_0(x, y)=$ $=x^2+y^2$, $\varphi_1(x, y)=xy(1-x-y)$, $\varphi_2(x, y)=x^2y(1-x-y)$, ..., $\varphi_n(x, y)=x^ny(1-x-y)$ como funciones coordenadas; entonces, $z_3(x, y)=x^2+y^2+xy(1-x-y)[3{,}0401-0{,}0562(x+\kappa^2)]$. **222.** *Indicación*: hallar la primera aproximación en la forma $z_1(x, y)=\left(y^2-\frac{x^2}{3}\right)\alpha(x)$; entonces $z_1(x, y)=-\frac{3}{4}\left(1-\frac{x}{6}\right)\left(y^2-\frac{x^2}{3}\right)$.

223. $z_1(x,\ y)=\frac{3}{4}\left(y^2-\frac{1}{3}x^2\right)\left(\frac{1-3^5}{1-3^6}x-\frac{2\cdot 3^5}{1-3^6}x^{-5}-1\right)$. **224.** $\lambda_n=$ $=1+n^2\pi^2,\quad y_n(x)=\pm\sqrt{2}\operatorname{sen} n\pi x\quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$. **225.** $\lambda_n=$ $=\frac{\ln^2 2+4n^2\pi^2}{4\ln^2 2}$, $y_n(x)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ln 2}\ln x\right)}{\sqrt{\ln\sqrt{2}}\sqrt{x}}$. **226.** $\lambda_n=\frac{25+2n^2\pi^2}{4}$, $y_n(x)=\pm\frac{\sqrt{2}\operatorname{sen}(n\pi\ln x)}{\sqrt{x}}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$. **227.** $\lambda_n=1-n^2$, $y_n(x)=$ $=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen} nx$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$.

228.

$$\lambda_n=-\frac{13\ln^2 2+4n^2\pi^2}{4\ln^2 2},\quad y_n(x)=\pm\frac{\operatorname{sen}\left[\frac{n\pi\ln(1+x)}{\ln 2}\right]}{\sqrt{\ln\sqrt{2}}\sqrt{1+x}}$$

$$(n=1,\ 2,\ \ldots).$$

229. Tomando $y=1-x^2$, encontramos $\lambda_1\leqslant\frac{35}{138}$. El valor exacto es $\lambda_1=\frac{1}{4}$. **230.** Tomando $y=x(1-x)$, encontramos $\lambda_1\leqslant 10$. El valor exacto es $\lambda_1=\pi^2$. **231.** $\lambda_1^2=10$; el valor exacto es $\lambda_1^2=\pi^2$. **232.** $\lambda_1=$ $=0{,}493$. **233.** $\lambda_1=6$; $z_1(x,\ y)=\alpha(x^2+y^2-1)$.

A NUESTROS LECTORES:

MIR-RUBIÑOS 1860 edita libros soviéticos traducidos al español. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a MIR-RUBIÑOS 1860, C/. Alcalá, 98 - 28009 Madrid.

Al principio de cada capítulo se resumen los resultados principales, se exponen los conocimientos teóricos necesarios, las fórmulas requeridas y se estudian con gran detalle ejemplos típicos ilustrativos.
Este manual contiene más de 100 ejemplos analizados y 230 problemas destinados para resolverse independientemente. Unos problemas se acompañan con las respuestas, otros, con las referencias de cómo deben resolverse.
La obra está destinada para los estudiantes de centros de enseñanza técnica superior que se especializan en los cálculos matemáticos.

ISBN 84-604-1605-4

9 788460 416050