CAPITULO III

Teoría de los polinomios

En el Capítulo I hemos definido los números racionales, algebraicos, trascendentes y reales, valiéndonos de los números enteros positivos. En el Capítulo II se han examinado las propiedades del anillo de los enteros. En este capítulo nos serviremos de un anillo de polinomios en una variable para definir funciones racionales, algebraicas, trascendentes y analíticas. Se tratará la divisibilidad, el Algoritmo de la División, el Algoritmo de Euclides y las propiedades en el anillo de los polinomios que corresponden a los números primos, bases y congruencias en el anillo de los números. Nuestro propósito es triple: comprender las propiedades básicas de los polinomios; examinar las relaciones entre los polinomios y otras funciones ordinarias; e introducir unos cuantos conceptos que necesitaremos en el estudio de la teoría de las ecuaciones en el Capítulo IV.

III-1 POLINOMIOS. En los primeros dos capítulos nos hemos preocupado principalmente de los números: los números enteros, racionales, los números reales, los números complejos. Ahora, presentaremos un nuevo conjunto de símbolos x, y, t, ... y consideraremos la igualdad, la adición, la sustracción, la multiplicación y la división en el conjunto total compuesto de los nuevos símbolos y de los números complejos. Los nuevos símbolos pueden considerarse sencillamente como símbolos sin atribuirles conjuntos de valores o suponerles relaciones. En este caso se llaman *indeterminadas.* Los nuevos símbolos pueden ser considerados también como *variables* que adquieren valores de un subconjunto del conjunto de los números complejos. Frecuentemente llamaremos variables a los símbolos, aun cuando mencionemos a veces propiedades correspondientes a las indeterminadas. Una gran parte de la teoría que se estudia en este capítulo se referirá a las variables e indeterminadas.

Dada cualquiera indeterminada x, definiremos el símbolo x^n en que n es cualquier entero positivo, como el producto de n factores x, $x^0 = 1$, $x^{-n}x^n = 1$, y $(x^{1/n})^n = x$. Definiciones análogas son válidas para cualquier variable x, con la excepción de que x^0 y x^{-n} son indefinidas cuando $x = 0$. La adición y la multiplicación de los nuevos símbolos y de los números complejos son, por definición, únicas, conmutativas, asociativas y satisfacen las leyes de distributividad. Por eso $ax + bx = (a + b)x$ y $(ax)(bx) = abx^2$, siendo a, b números complejos cualesquiera.

El producto de cualquier conjunto de números complejos y de los nuevos símbolos se llama *un monomio*. Por ejemplo, 15, x, $2x$, $5x^2y^3t$, y $3\sqrt{2xy}$ son monomios. La suma de dos monomios se llama *binomio*. Una suma de tres monomios se llama *trinomio* y, en general, una suma de uno o más monomios se denomina *polinomio*.

Un monomio de la forma bx^m, en donde m es un entero no negativo y b es un número complejo, se llama un monomio en x con *coeficiente* b y, cuando $b \neq 0$, de *grado* m. Cualquier número complejo b es por sí mismo un monomio. El monomio 0 no tiene grado. Cuando $b \neq 0$, el monomio $b = bx^0$ tiene grado 0.

Un polinomio de la forma

$$\text{(III - 1)} \qquad a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m,$$

en donde los a_j son números complejos y $a_0 \neq 0$, se llama un polinomio de grado m en x. Los a_j se llaman los coeficientes del polinomio. El coeficiente a_0 distinto de cero con que comienza el polinomio se llama el *coeficiente inicial*. Dado que las indeterminadas *no* tienen valores numéricos, dos polinomios en una indeterminada x son iguales si y sólo si los coeficientes de las potencias correspondientes de x son iguales. Así, para una indeterminada x, la ecuación

$$ax^2 + bx + c = x + 2$$

implica que $a = 0$, $b = 1$, y $c = 2$. Dos polinomios en una variable x pueden ser iguales para cualquier número entero no negativo de valores de la variable x. Por consiguiente, la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$ implica que $x = 3$ o $x = -1$, para una variable x.

El grado de un polinomio depende de la variable que se considere. Por ejemplo, $3x^2y^5$ es de grado dos en x con coeficiente $3y^5$ y de grado cinco en y con coeficiente $3x^2$. El polinomio $10x^6$ puede ser considerado como un polinomio de grado seis en x con coeficiente 10, o como un polinomio de grado dos en $2x^3$ con coeficiente $\frac{5}{2}$, o como un polinomio de grado doce en $\sqrt{x}$ con coeficiente 10 y de muchas otras maneras más. Emplearemos la notación $p(x)$ para indicar un polinomio en x, y $p(\sqrt{2x})$ para indicar un polinomio en $\sqrt{2x}$.

EJERCICIOS

1. Haga una lista de cinco polinomios en x.
2. Indique el coeficiente inicial y el grado de cada uno de los polinomios del Ejercicio 1.
3. Hallar el coeficiente para los casos en que $36x^6$ es considerado un polinomio en:

a) x,	d) $3x^2$,
b) $2x$,	e) $\sqrt{x}$, es decir, y en que $y^2 = x$,
c) x^2,	(f) $\sqrt[3]{2x}$, es decir, y en que $y^3 = 2x$.

4. Indicar el grado del polinomio en cada caso del Ejercicio 3.
5. Escribir $8x^3 + 12x^2 - 10x + 7$ en forma de polinomio en (a) $2x$, y (b) $\sqrt{x}$.
6. Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ de grados m y n respectivamente, cuyos coeficientes sean números complejos, demostrar que el producto de los dos polinomios tiene grado $m + n$.
7. Repetir el Ejercicio 6 para el producto de un número finito cualquiera de polinomios de grados m_i.

III - 2 ANILLOS DE POLINOMIOS.

Todo polinomio (Cap. III - 1) consiste en una variable x y un conjunto de coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_m$ combinados por medio de las operacionesdel anillo: adición, sustracción y multiplicación. Los polinomios en una sola variable x se suelen clasificar de acuerdo con sus coeficientes. Por eso hablaremos de polinomios en x, con coeficientes enteros, polinomios en x con coeficientes racionales, con coeficientes reales, y con coeficientes complejos. Estos conjuntos de polinomios se llaman a veces, respectivamente, polinomios enteros, polinomios racionales, polinomios reales y polinomios complejos en x. Cada conjunto tiene a los conjuntos precedentes como subconjuntos. La suma de dos polinomios con coeficientes enteros es un polinomio con coeficientes enteros. Se pueden hacer afirmaciones análogas con respecto al producto y a la diferencia. En consecuencia, los polinomios en x con coeficientes enteros forman un anillo. En general, dado un anillo T de números, el conjunto de polinomios en x con coeficientes pertenecientes al conjunto de números T forma un *anillo de polinomios.* Este anillo de polinomios es un dominio de integridad (ver Bibliografía Nº 34, págs. 33-34), si y sólo si T es un dominio de integridad tal como se ha definido en la introducción al Capítulo II.

Cuando los coeficientes de un conjunto de polinomios pueden ser elementos cualesquiera de un campo o sistema de números (Cap. I - 14) es posible (Cap. III - 5) aplicar el Algoritmo de la División (Cap. II - 2) al anillo de polinomios. Al efecto, en este capítulo nos ocuparemos principalmente de anillos de polinomios en los cuales los coeficientes pueden ser elementos arbitrarios, de un campo tal comò el sistema de los números racionales, el sistema de los números reales, o el sistema de los números complejos.

Los polinomios de diversas variables pueden definirse como formados por un conjunto finito de variables y un conjunto de coeficientes, combinados mediante un conjunto finito de operaciones de anillo. Aun cuando frecuentemente estimemos conveniente estudiar polinomios en una sola variable, muchas de nuestras aseveraciones se aplicarán igualmente a polinomios de varias variables. La excepción más importante es el Algoritmo de la División (Cap. II - 5) y sus numerosas aplicaciones. De aquí en adelante consideraremos polinomios en una sola variable con números reales cualesquiera por coeficientes, excepto cuando se especifique expresamente de otra manera.

EJERCICIOS

1. Describir cinco anillos de polinomios que sean diferentes.
2. Describir cinco dominios de integridad de polinomios que sean diferentes (Ver Ejercicio 9, Cap. II-1).
3. Describir dos anillos de polinomios que no sean dominios de integridad.

III - 3 FUNCIONES RACIONALES. En el Capítulo I se fue extendiendo gradualmente el conjunto de enteros positivos hacia el conjunto de los números racionales, hacia los números reales y los números complejos. En este capítulo consideraremos ampliaciones del conjunto de los polinomios en el conjunto de las funciones racionales (que corresponden a los números racionales) y respecto de las funciones analíticas (Cap. III - 16) (que corresponden a los números reales).

Un número racional (Cap. I - 8) puede definirse como el cuociente expreso entre dos enteros a/b, en que $b \neq 0$. Una *función racional* de una indeterminada x puede definirse como el cuociente expreso de dos polinomios $f(x)/d(x)$, en que $d(x)$ no sea idéntico a 0. Análogamente, si $f(x)$ y $d(x)$ son polinomios en una variable x, entonces el cuociente expreso $f(x)/d(x)$ se llama función racional de la variable x y se define para todos los valores de x tales que $d(x) \neq 0$. Para $d(x) = 0$ es indefinida, dado que la división por cero es indefinida. Por ejemplo, $x^2 + x + 1$ es diferente de cero para todos los valores reales de x, y asimismo la función racional $(2x^2 - x + 1)/(x^2 + x + 1)$ está definida para todos los valores reales de x. La función racional $(x^2 - 1)/(x - 2)$ está definida cuando x es una indeterminada o cuando la variable x tiene un valor diferente de 2.

Se pueden expresar, además, varios de los conceptos precedentes usando la terminología del Capítulo I - 18. El anillo de los enteros I tiene al campo de los números racionales R como su campo de cuocientes. Cuando el símbolo x se adjunta al campo R se obtiene el anillo $R[x]$ de polinomios en x con coeficientes racionales. El campo de cuocientes de $R[x]$ es $R(x)$, o sea, el campo de las funciones racionales en x. En general, si T es cualquier dominio de integridad, entonces $T[x]$ es el anillo de polinomios en x con coeficientes pertenecientes a T, y $T(x)$ designa el campo de cuocientes de $T[x]$. Este concepto es importante para nosotros porque consideraremos a veces un polinomio en x y en y, tal como

$$3x^2y + 4x - y^2 + 5,$$

como un polinomio en x con coeficientes que son polinomios en y, es decir, cualquier polinomio $p(x, y)$ perteneciente a $R[x, y]$ puede considerarse como un polinomio $p(x)$ perteneciente a $T[x]$ en donde $T = R[y]$.

EJERCICIOS

Indicar en cada ejercicio los valores de la variable real x para la cual está definida* la función racional $y = f(x)/d(x)$:

1. $3x + 2y = 1$
2. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2}$
3. $xy = 5$
4. $x^2 + 2xy = y - 5$
5. $y = \dfrac{x^3 + 7x^2 + 1}{x^2 - 5x + 8}$

III-4 DIVISIBILIDAD.

Comenzaremos en seguida un estudio del anillo de polinomios que es muy análogo al estudio ya realizado del anillo de los enteros en el Cap. II. Se formulará nuevamente la mayoría de las definiciones y teoremas del Capítulo II, pero esta vez aplicados a los polinomios. Este desarrollo paralelo va a contribuir a darle una mayor significación al presente estudio y a la teoría de los números.

Un polinomio $d(x)$ es divisor de un polinomio $f(x)$ si y sólo si existe un polinomio $q(x)$ tal que $f(x) = d(x) \cdot q(x)$ para todos los valores de x. Por ejemplo, $x - 1$ es divisor de $x^2 - 1$; x es divisor de $2x$; $2x - 2$ es divisor de $3x^2 - 3$ en el anillo de polinomios con coeficientes racionales, pero no es divisor de $3x^2 - 3$ en el anillo de polinomios con coeficientes enteros, ya que el cuociente $q(x)$, en este caso, no tiene coeficientes enteros. La frase "para todos los valores de x" se empleará en este texto para indicar que una relación es válida para todos los valores de la variable x para los cuales las expresiones de la relación están definidas. Si el conjunto de números al cual pertenecen los coeficientes es infinito, esta frase señala también que la relación es válida para cualquiera indeterminada x (ver Bibliografía Nº 7, pág. 82). Las ecuaciones que se verifican para indeterminadas suelen llamarse *identidades*.

El Teorema II-1 puede enunciarse, ahora, para los polinomios $f(x)$, $g(x)$, $d(x)$ como sigue: Si $d(x)$ es divisor de $f(x)$ y $f(x)$ es divisor de $g(x)$, entonces $d(x)$ es divisor de $g(x)$. Si $d(x)$ es divisor de $f(x)$ y $d(x)$ es divisor de $g(x)$, entonces $d(x)$ es divisor de $f(x) + g(x)$ y de $f(x) - g(x)$. La demostración de este teorema es exactamente análoga a aquella dada para el Teorema II-1 (Ejercicio 9).

*Los ceros de un polinomio de segundo grado se tratan en el Cap. IV-5.

Si el conjunto de *coeficientes posibles* (es decir, el conjunto de números de entre los cuales se pueden elegir los coeficientes de los polinomios en consideración) forma un sistema de números o un campo, los únicos polinomios que son divisores de todos los polinomios son las constantes diferentes de cero, es decir, los polinomios de grado cero. En consecuencia, las constantes diferentes de cero son *las unidades* para el anillo de los polinomios. Sin embargo, sólo $+1$ es la unidad, o sea el elemento de identidad para la multiplicación.

En la teoría de los números (Teorema II - 8) hemos considerado a cualquier entero diferente de cero como el producto de una unidad y un entero positivo. En la teoría de los polinomios definiremos un polinomio con coeficiente inicial $+1$ como un *polinomio primitivo*. Luego, suponiendo que el conjunto de coeficientes posibles forma un sistema de números, cualquier polinomio (III - 1) excepto la constante 0, puede expresarse como el producto de una unidad y un polinomio primitivo. Por ejemplo, $2x^2 - 2 = 2(x^2 - 1)$ y $3x + 2 = 3(x + \frac{2}{3})$. El último ejemplo ilustra la necesidad de suponer que el conjunto de coeficientes posibles forma un sistema de números, de modo que sea posible la división por el coeficiente inicial del polinomio.

En la definición siguiente *del* máximo común divisor entre dos polinomios resulta evidente la correspondencia entre polinomios primitivos y los enteros positivos. Cualquier polinomio $d(x)$ que sea divisor de $f(x)$ y de $g(x)$ es divisor común de $f(x)$ y $g(x)$. Si $d(x)$ es un polinomio primitivo y todo divisor común de $f(x)$ y de $g(x)$ es también divisor de $d(x)$, entonces $d(x)$ es *el máximo común divisor* de $f(x)$ y $g(x)$. De la misma manera las definiciones de común múltiplo, mínimo común múltiplo, y primos entre sí, son exactamente análogas (Ejercicio 10) a aquellas dadas para los enteros (Cap. II - 1). En la teoría de los polinomios, $2x$ y $2x^2 - 2$ son primos entre sí, dado que su máximo común divisor es una unidad.

Dos enteros tienen el mismo valor absoluto o valor numérico si cada uno de ellos puede expresarse como el producto del otro por una unidad. Dos polinomios se llaman *asociados* si cada uno de ellos puede expresarse como el producto del otro por una unidad, es decir, $f(x)$ y $g(x)$ son asociados si $f(x)|g(x)$ y $g(x)|f(x)$. Por ejemplo, $x - 2$, $5x - 10$, $7x - 14$, y $x/2 - 1$, son todos asociados si sus coeficientes son racionales.

Cuando el conjunto de coeficientes posibles forma un sistema de números, todo polinomio $p(x)$, excepto la constante cero, tiene un polinomio primitivo asociado único. Las unidades que se definieron anteriormente son precisamente las asociadas de la unidad. Se dice que dos polinomios que no son asociados son *independientes.*

EJERCICIOS

1. ¿Forma un anillo el conjunto de polinomios de grado par en x? ¿Forma un anillo el conjunto de polinomios en x^2? ¿Forma alguno de estos conjuntos también un dominio de integridad?
2. Escriba tres polinomios y en seguida exprese cada uno de ellos como el producto de una unidad y un polinomio primitivo.
3. ¿Puede expresarse todo polinomio de un anillo cualquiera de polinomios como el producto de una unidad y un polinomio primitivo. Dar ejemplos.
4. Repetir el Ejercicio 3 para un dominio de integridad cualquiera.
5. Repetir el Ejercicio 3 para polinomios con coeficientes pertenecientes a un campo cualquiera.
6. Proponer tres asociados de $x^3 - x^2 + 7x - 5$.
7. Proponer dos polinomios independientes que tengan un divisor común $x - 2$.
8. Proponer dos polinomios que sean asociados si el conjunto de coeficientes posibles es el conjunto de los números reales, pero que no sean asociados cuando el conjunto de coeficientes posibles es el anillo de los enteros.
9. Demostrar el Teorema II-1 para polinomios en x con coeficientes complejos.
10. Definir *común múltiplo, mínimo común múltiplo,* y *primos entre sí* para polinomios en x.

III-5 EL ALGORITMO DE LA DIVISION. En el Capítulo II-2 el Algoritmo de la División se enunció para los enteros como sigue: si a y b son dos enteros positivos cualesquiera, existen enteros q y r, $0 \leqq q$, $0 \leqq r < a$, tales que $b = qa + r$. En la teoría de los polinomios, la condición de que los enteros sean positivos puede ser reemplazada por la condición de que los polinomios sean polinomios primitivos. En este caso tendríamos: si $p(x)$ y $q(x)$ son los dos polinomios primitivos cualesquiera, existen polinomios $s(x)$ y $r(x)$ tales que $p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x)$ para todos los valores de x, y o bien $r(x)$ es idéntico a cero o el grado de $r(x)$ es menor que el de $q(x)$. Por ejemplo, si $p(x) = x^2 - 5x + 6$ y $q(x) = x - 3$, entonces $s(x) = x - 2$ y $r(x) = 0$; si $p(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 5$ y $q(x) = x^2 - x + 1$, entonces $s(x) = x - 1$ y $r(x) = 5x - 4$. Esta forma del Algoritmo de la División puede demostrarse fácilmente, pero no es la forma más útil del teorema. Una de las desventajas es que aun cuando $r(x)$ no sea idéntico a cero, no es necesariamente un polinomio primitivo. Por ejemplo, $r(x) = 5x - 4$ en el ejemplo anterior.

Es costumbre reemplazar la condición de que los polimonios $p(x)$ y $q(x)$ sean polinomios primitivos por una suposición, como en la discusión de los polinomios primitivos (Cap. III - 4): la suposición de que el conjunto de coeficientes posibles formen un campo tal como el sistema de números racionales, reales o complejos. Según esta suposición, el Algoritmo de la División puede enunciarse como sigue para polinomios en una variable:

TEOREMA III - 1. *Si $p(x)$ y $q(x)$ son dos polinomios cualesquiera con coeficientes pertenecientes a un campo, existen entonces polinomios $s(x)$ y $r(x)$ tales que $p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x)$ para todos los valores de x, y o bien $r(x)$ es idéntico a cero o el grado de $r(x)$ es menor que el de $q(x)$.*

La demostración del Teorema III - 1 corresponde en principio a la "demostración" sucinta del Algoritmo de la División del Capítulo II - 2, dado que ahora se han determinado las propiedades de nuestro sistema de números. Los pormenores de la demostración se dejan como ejercicio para el lector. La necesidad de suponer que el conjunto de coeficientes posibles forma un campo es evidente, como se muestra en el ejemplo siguiente: si $p(x) = x^6 - 2x^5 + 3x^2 + 1$ y $q(x) = 2x^2 + 3x + 1$, entonces tenemos

$$x^6 - 2x^5 + 3x^2 + 1 =$$

$$\left(\frac{x^4}{2} - \frac{7}{4}x^3 + \frac{19}{8}x^2 - \frac{43}{16}x + \frac{139}{32}\right)(2x^2 + 3x + 1) + \left(-\frac{331}{32}x - \frac{107}{32}\right),$$

en donde $$s(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{7}{4}x^3 + \frac{19}{8}x^2 - \frac{43}{16}x + \frac{139}{32}$$

y $$r(x) = -\frac{331}{32}x - \frac{107}{32}.$$

De este modo el Teorema II-1 comprende sólo las operaciones del anillo para x, pero las cuatro operaciones racionales para los coeficientes.

Puede verificarse fácilmente que el Algoritmo de la División no se pueda hacer extensivo inmediatamente a polinomios de dos o más variables. Dados dos polinomios $p(x,y)$ y $q(x,y)$, buscaremos polinomios $s(x,y)$ y $r(x,y)$ tales que

$$(\text{III - 2}) \qquad p(x,y) = q(x,y) \cdot s(x,y) + r(x,y)$$

para todos los valores de x e y, y tales que $r(x,y)$ sea o bien idéntico a cero o tenga un grado menor que $q(x,y)$. En particular, para $p(x,y) = x$, y para $q(x,y) = y$, buscaremos polinomios $s(x,y)$ y $r(x,y)$ tales que

$$(\text{III - 3}) \qquad x = y \cdot s(x,y) + r(x,y)$$

para todos los valores de x e y, es decir, tales que (III - 3) sea una identidad (Cap. III - 4). Ya que $q(x,y) = y$ tiene grado uno, $r(x,y)$ debe ser una constante. Dado que el grado del miembro de la derecha de la identidad (III - 3) no puede exceder el grado del miembro de la izquierda, $s(x,y)$ debe ser también una constante. Asimismo buscaremos constantes m y b tales que $x = my + b$ para todos los valores de x e y. Puesto que (Cap. II - 1) no existen constantes m y b que satisfagan estas condiciones, no es posible encontrar polinomios $s(x,y)$ y $r(x,y)$ que satisfagan la identidad (III - 3). De este modo, excepto para casos especiales, no es posible encontrar polinomios $s(x,y)$ y $r(x,y)$ que satisfagan (III - 2). Por lo tanto, el Teorema III - 1 debe alterarse antes de que pueda aplicarse a polinomios de dos o más variables. Por ejemplo (III-3) puede escribirse en la forma $x = 1 \cdot y + (x - y)$, en donde $r(x,y) = x - y$ tiene el mismo grado que $y = q(x,y)$. En el Capítulo III - 7 se considera una modificación más útil de este teorema.

Lo mismo que en la teoría de los números, el Algoritmo de la División para polinomios sirve como base para el Algoritmo de Euclides para polinomios (Cap. III - 7). En vista de las dificultades experimentadas con polinomios de dos variables, es de esperar que sea necesaria alguna modificación del Algoritmo de Euclides cuando se consideren polinomios de dos o más variables.

Aplicaremos el Algoritmo de la División a polinomios en una variable al calcular el máximo común divisor de dos polinomios

(Cap. III - 7); al expresar un polinomio $p(x)$ en la forma $q(bx + d)$ (Cap. III - 8); al determinar el número exacto de raíces reales distintas de una ecuación polinomia con coeficientes reales (Cap. IV - 12) y al determinar las raíces múltiples de una ecuación polinomia con coeficientes complejos (reales o imaginarios) (Cap. IV - 13).

EJERCICIOS

Determinar $s(x)$ y $r(x)$ según el Teorema III-1 para cada uno de los siguientes pares de polinomios.

1. $p(x) = x^2 - 3x + 4, \qquad q(x) = x - 2.$
2. $p(x) = 2x^2 - 3x + 4, \qquad q(x) = 3x - 2.$
3. $p(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + 11, \qquad q(x) = x^2 + x - 1.$
4. $p(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 2x - 1, \qquad q(x) = 3x^2 - 2x + 5.$
5. $p(x) = (1 - \sqrt{2})x^3 + (1 + \sqrt{2})x^2 + \sqrt{2}, \qquad q(x) = (1 + \sqrt{2})x^2 + (2 - \sqrt{2}).$

III - 6 POLINOMIOS IRREDUCIBLES.

En el Cap. II - 3 se clasificaron los enteros de acuerdo con los enteros de los cuales eran divisores, o de acuerdo con los enteros por los cuales eran divisibles. Se encontró que todos los enteros pertenecen a una de las cuatro clases: cero, unidades, números primos y números compuestos. Análogamente encontraremos que todos los polinomios pertenecen a una de las cuatro clases: cero, unidades, polinomios irreducibles y polinomios reducibles.

Las unidades son divisores de todo polinomio y, cuando el conjunto de los coeficientes posibles forma un campo, se componen de las constantes diferentes de cero (Cap. III - 4). Se dice que un polinomio es *irreducible* si no es igual a cero ni a una unidad y si sus únicos divisores son sus asociados y las unidades. Un polinomio se llama *reducible* si tiene dos o más divisores irreducibles (no necesariamente distintos). Todos los polinomios lineales son irreducibles. La irreducibilidad de los polinomios de grado mayor que uno suele depender del conjunto de coeficientes posibles (Cap. III - 4). Por ejemplo, $x^2 - 2$ es irreducible en el anillo de polinomios con coeficientes racionales, y es reducible en el anillo de polinomios con coeficientes reales.

En la teoría de los números fue conveniente suponer que los números primos negativos estaban expresados como un producto de una unidad y un número primo positivo. En la teoría de los polinomios a menudo será conveniente suponer que todo polinomio irreducible está expresado como el producto de una unidad y de un polinomio primitivo irreducible (Cap. III - 4).

Vamos a utilizar las definiciones precedentes y a resumir algunas de las correspondencias entre los elementos y propiedades de la teoría de los números y la teoría de los polinomios. Si el conjunto de coeficientes posibles forma un campo, los enteros m con elemento de identidad para la adición, cero, y unidades $+1$ y -1 corresponden a los polinomios $p(x)$ con elemento de identidad para la adición, cero y unidades b, en que b es cualquier elemento diferente de cero en el conjunto de coeficientes posibles. Cualquier entero diferente de cero puede expresarse como el producto de una unidad y un entero positivo; cualquier polinomio que no es idéntico a cero puede expresarse como el producto de una unidad y un polinomio primitivo. Los enteros primos y compuestos corresponden respectivamente a los polinomios irreducibles y reducibles. El valor absoluto de un entero corresponde al grado de un polinomio. Por ejemplo, un entero m con $|m| = 0$ o un polinomio $p(x)$ sin grado es idéntico a cero; un entero m con $|m| = 1$ o un polinomio con grado cero es una unidad; un entero m con $|m| > 1$ o un polinomio con grado positivo no es ni cero ni una unidad. En el siguiente esquema se muestra la mayoría de las correspondencias básicas entre el anillo de los enteros m y el anillo de los polinomios $p(x)$:

enteros m	polinomios $p(x)$
cero	cero
unidad, $+1$	unidad, $+1$
unidades, $+1$ y -1	constantes diferentes de cero
enteros positivos	polinomios primitivos
enteros primos	polinomios irreducibles
enteros compuestos	polinomios reducibles
valor absoluto de m	grado de $p(x)$
$\|m\| > 1$	grado positivo de $p(x)$

Estas correspondencias serán útiles al formular respecto de los polinomios algunos de los teoremas de la teoría de los números. Por ejemplo, el Teorema II - 2 puede enunciarse de la siguiente manera para los polinomios:

TEOREMA III - 2. *Todo polinomio de grado positivo tiene un polinomio primitivo divisor irreducible.*

La demostración de este teorema puede obtenerse de aquélla del Teorema II - 2 valiéndose de las analogías señaladas. Sea dado el polinomio $p(x)$ de grado m. Si $p(x)$ es irreducible, su polinomio primitivo asociado es su polinomio primitivo divisor irreducible. Si $p(x)$ es irreducible, entonces $p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x)$, en que los $p_j(x)$ tienen grado m_j positivo, siendo $j = 1, 2$ y $m_1 + m_2 = m$. Si ningún $p_j(x)$ es irreducible, entonces $p(x) = p_{11}(x) \cdot p_{12}(x) \cdot p_{21}(x) \cdot p_{22}(x)$, en donde ningún p_{jk} es una unidad, es decir, $0 < m_{jk}$. Este proceso debe concluir después de un número finito de etapas, ya que la suma de los enteros positivos m_{jk} es un entero m positivo dado (Ejercicio 7, Cap. III - 1). Por eso $p(x)$ tiene a lo sumo m divisores y debe tener un divisor que sea un polinomio irreducible. Si el conjunto de coeficientes posibles forma un campo, todo polinomio diferente de cero tiene entre sus asociados un polinomio primitivo. Luego, todo polinomio $p(x)$ de grado no negativo tiene un divisor que es un polinomio irreducible primitivo.

En el Ejercicio 1 se enuncia el Teorema II - 3 con respecto a los polinomios. El Teorema II - 4 no se puede hacer extensivo de inmediato a la teoría de los polinomios. Por ejemplo, en el anillo de los polinomios con coeficientes reales, el conjunto de polinomios irreducibles tiene un subconjunto infinito no numerable, ya que $x - b$ es irreducible para todo número real b. La mayoría de los otros teoremas de las Secciones 3 y 4 del Capítulo II se formulan con respecto a los polinomios en los ejercicios siguientes. Las demostraciones pueden obtenerse de las correspondientes del Capítulo II, aprovechando las analogías ya citadas.

Muchos de los ejercicios siguientes y sus demostraciones pueden enunciarse con respecto a polinomios de varias variables. Por ejemplo (Ejercicio 9), el Teorema II - 8 de Factorización Unica, es válido para polinomios de cualquier número finito de variables con coeficientes enteros, racionales, reales o complejos (Ver Bibliografía Nº 7; págs. 97-100).

EJERCICIOS

1. Demostrar que cualquier polinomio reducible $p(x)$ de grado m tiene un divisor polinomio primitivo irreducible de grado $\leq m/2$.

2. Proponer ejemplos para el Ejercicio 1 cuando $m = 2, 3, 5$ y 7.

3. Demostrar que si $p(x)$ es un polinomio irreducible y $q(x)$ es cualquier polinomio, entonces o bien $p(x)$ es divisor de $q(x)$ o ambos polinomios son primos entre sí.

4. Proponer ejemplos que ilustren los dos casos del Ejercicio 3.

5. Si $r(x)$ y $s(x)$ son dos polinomios cada uno de grado menor que m, y $p(x)$ es un polinomio irreducible de grado m, demostrar que $p(x)$ no es divisor de $r(x) \cdot s(x)$.

6. Dar dos ejemplos que ilustren el Ejercicio 5.

7. Si un polinomio irreducible $p(x)$ es divisor del producto

$$q_1(x) \cdot q_2(x) \cdot \ldots \cdot q_n(x),$$

demostrar que $p(x)$ es divisor de por lo menos uno de los polinomios $q_1(x)$, $q_2(x), \ldots, q_n(x)$, en donde n es cualquier entero positivo.

8. Proponer dos ejemplos que ilustren el Ejercicio 7.

9. Demostrar que, excepto por el orden de los factores, todo polinomio que no es idéntico a cero puede representarse de una y sólo una manera como un producto de una unidad y un número finito de polinomios primitivos irreducibles.

10. Demostrar que el número de divisores independientes de

$$p(x) = e[r_1(x)]^{a_1} \cdot [r_2(x)]^{a_2} \cdot \ldots \cdot [r_k(x)]^{a_k}$$

es $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_k + 1)$, en donde los $r_j(x)$ son polinomios distintos irreducibles, e es una constante y las a_j son enteros positivos.

11. Proponer un ejemplo que ilustre el Ejercicio 10, para el caso de $k = 3$, y enumerar los divisores independientes.

12. Repetir el Ejercicio 11 para $e \neq 1$ y $k > 3$.

13. Si $r(x)$ es el máximo común divisor y $s(x)$ es el mínimo común múltiplo de dos polinomios primitivos $p(x)$ y $q(x)$, demostrar que $r(x) \cdot s(x) = p(x) \cdot q(x)$.

14. Formular el Postulado de Arquímedes con respecto a los polinomios (Cap. II-2) y proponer un ejemplo.

15. Formular con respecto a los polinomios cada una de las tres partes del Teorema II-9.

16. Dar ejemplos que ilustren cada uno de los enunciados del Ejercicio 15.

III-7 EL ALGORITMO DE EUCLIDES.

El Algoritmo de Euclides se usó en el Cap. II-5 con el objeto de encontrar el máximo común divisor entre dos enteros sin tener que expresar ninguno de los dos enteros en sus factores primos. Emplearemos el mismo procedimiento para los polinomios $p(x)$ con el objeto de encontrar el máximo común divisor de dos polinomios sin tener que expresar ninguno de los dos polinomios en función de sus factores irreducibles. El Teorema II - 11 puede enunciarse de la siguiente manera para los polinomios:

TEOREMA III - 3. *El máximo común divisor $r_n(x)$ de dos polinomios cualesquiera $f_0(x)$ y $f_1(x)$ de grado positivo con coeficientes pertenecientes a un campo, puede encontrarse por medio del Algoritmo de Euclides, pues es el último resto polinómico que no es igual a cero. Existen polinomios $A(x)$ y $B(x)$ tales que $r_n(x) = A(x) \cdot f_0(x) + B(x) \cdot f_1(x)$ para todos los valores de x.*

Podemos demostrar la primera parte del teorema aplicando reiteradamente el Algoritmo de la División (Cap. III - 5). El procedimiento para los polinomios $f_0(x)$ y $f_1(x)$ se ilustra en el siguiente esquema, en donde b es una constante diferente de cero que hay que determinar, el grado de $r_1(x)$ es menor que el de $f_1(x)$ y el grado de $r_j(x)$ es menor que el de $r_{j-1}(x)$ para $j = 2, 3, \ldots, n$.

$$
\begin{aligned}
f_0(x) &= q_1(x)f_1(x) + r_1(x),\\
f_1(x) &= q_2(x)r_1(x) + r_2(x),\\
r_1(x) &= q_3(x)r_2(x) + r_3(x),\\
&\;\;\vdots\\
r_{n-2}(x) &= q_n(x)r_{n-1}(x) + br_n(x),\\
r_{n-1}(x) &= q_{n+1}(x)r_n(x).
\end{aligned}
$$

En este esquema es conveniente suponer que el coeficiente inicial (Cap. III - 1) de $r_n(x)$ se ha hecho igual a $+1$ dividendo ambos miembros de la penúltima ecuación por una constante adecuada b. Luego $r_n(x)$ es un polinomio primitivo y siguiendo el mismo razonamiento que en el Cap. II - 5, es el máximo común divisor de $f_0(x)$ y $f_1(x)$. Si se conviene en que $r_n(x)$ sea un polinomio primitivo, los factores constantes (unidades) pueden insertarse o eliminarse de cualquiera ecuación del esquema. Esto significa principalmente que cualquier resto polinómico puede reemplazarse por cualquiera de sus asociados en cualquier momento.

La demostración de la existencia de polinomios $A(x)$ y $B(x)$ en la segunda parte del teorema es también análoga a aquélla del Cap. II - 5. Expresaremos sucesivamente $r_1(x)$, $r_2(x)$, ..., $r_n(x)$ en la forma $r_j(x) = A_j(x)f_0(x) + B_j(x)f_1(x)$. Todos los pormenores de la prueba se dejan al lector como ejercicio.

El Algoritmo de Euclides, tal como el Algoritmo de la División en el cual se fundamenta, no se puede hacer extensivo directamente a polinomios de dos o más incógnitas. Por ejemplo, aún cuando el máximo común divisor de x e y es 1, no existe una ecuación de la forma $Ax + By = 1$, en donde A y B sean constantes, que sea válida para todos los valores de x y de y. Es posible una extensión del teorema si se considera $f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ como polinomios en x_n con polinomios como coeficientes de las primeras $n - 1$ variables. Entonces las A y B son funciones racionales de las primeras $n - 1$ variables, dado que se han aplicado a los coeficientes de la División Algorítmica, las cuatro operaciones racionales. (Cap. III - 5). Por ejemplo, si se considera los polinomios x e y como polinomios en y con coeficientes en x, tenemos $(1/x) \cdot x + 0 \cdot y = 1$.

Ordenaciones análogas a las que se usaron en el Cap. II - 5 para encontrar n_k, A, B, pueden emplearse también para polimonios en una variable. En general, tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} f_0 & f_1 & r_1 & r_2 & \ldots & r_n & 0 \\ & q_1 & q_2 & q_3 & \ldots & q_{n+1} & \end{array}$$

Dado que el cálculo de los q y r exige corrientemente cálculos escritos, cambiaremos entre sí el orden de las dos filas y usaremos la ordenación

$$\begin{array}{ccccccc} & q_1 & q_2 & q_3 & \ldots & q_{n+1} & \\ f_0 & f_1 & r_1 & r_2 & \ldots & r_n & 0 \\ & q_1f_1 & q_2r_1 & q_3r_2 & \ldots & & \\ & a_1r_1 & a_2r_2 & a_3r_3 & \ldots & & \end{array}$$

en donde $a_1r_1 = f_0 - q_1f_1$, $a_2r_2 = f_1 - q_2r_1$, ..., y los a_i son constantes arbitrarias.

Si $f_0(x) = x^4 - 3x^3 + 2x$ y $f_1(x) = x^3 - x$, tenemos el esquema

$$\begin{array}{ccc} & x - 3 & x + 1 \\ x^4 - 3x^3 \qquad + 2x & x^3 \qquad - x & x^2 - x \quad 0 \\ \underline{x^4 \qquad - x^2 \qquad\quad} & \underline{x^3 - x^2 \qquad} & \\ - 3x^3 + x^2 + 2x & x^2 - x & \\ \underline{- 3x^3 \qquad + 3x} & \underline{x^2 - x} & \\ x^2 - \ x & 0 & \end{array}$$

de donde el máximo común divisor es $x^2 - x$. Este esquema se puede ampliar para que resulte $A(x)$ y $B(x)$, como el Cap. II-5. Los detalles algebraicos para el cálculo de $r_n(x)$ suelen simplificarse en forma notable por medio de la multiplicación cruzada. (Ver Bibliografía Nº 37).

De la misma manera que para los números, el máximo común divisor puede obtenerse observando si ambos polinomios están expresados en sus factores irreducibles (Ejercicio 9, Cap. III-6). El Algoritmo de Euclides proporciona un procedimiento para determinar el máximo común divisor de dos polinomios sin necesidad de factorizar los polinomios. Este algoritmo tiene también aplicaciones importantes y muy prácticas en la determinación del número de raíces de una ecuación polinomia (Secciones 12 y 13 del Cap. IV).

En la sección siguiente de este Capítulo, continuaremos nuestro desarrollo de la teoría de los polinomios y buscaremos un concepto que corresponda al concepto de base (Cap. II - 6) en la teoría de los números.

EJERCICIOS

Por medio del Algoritmo de Euclides, encontrar el máximo común divisor de cada uno de los siguientes pares de polinomios:

1. $x^2 - 5x + 6$ y $x^2 - 4$.
2. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ y $x^2 - 2x + 1$.
3. $x^3 + 2x + 20$ y $3x^2 + 2$.
4. $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 2$ y $2x^4 - 9x^3 + 7x + 3$.

III - 8 CAMBIO DE VARIABLE. Cualquier entero positivo m puede expresarse como polinomio en n, en que $n > 1$ es un entero positivo arbitrario con coeficientes pertenecientes al conjunto de los enteros $0, 1, 2, \ldots, n-1$ (Teorema II-13). Es posible enunciar este teorema de varias maneras con respecto a los polinomios. El siguiente es uno de los enunciados más útiles.

TEOREMA III - 4. *Cualquier polinomio $p(x)$ con coeficientes pertenecientes a un campo puede expresarse como polinomio respecto de un polinomio arbitrario lineal $bx + d$.*

Dado un polinomio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 2$, podemos designar sus ceros como, r, s, t y buscar un nuevo polinomio cúbico $q(y)$ con ceros $r - 2$, $s - 2$, $t - 2$. Este procedimiento de reducir los ceros de un polinomio se usa frecuentemente al resolver ecuaciones cúbicas (Cap. IV - 9). Los métodos para obtener los nuevos polinomios se estudiarán en los Capítulos III - 5 y IV - 3. En el caso anterior, se encontraría que $q(y) = y^3 - 12y - 14$ o $q(x - 2) = (x - 2)^3 - 12(x - 2) - 14$, en que $x - 2 = y$. El Teorema III - 4 establece que para números cualesquiera $b \neq 0$ y d pertenecientes al conjunto de los coeficientes posibles, cualquier polinomio $p(x)$ puede escribirse en la forma $q(bx + d)$.

La demostración siguiente del Teorema III - 4 corresponde estrictamente a aquella del Teorema II - 13. Dado un polinomio $p(x)$ de grado m y un polinomio lineal $bx + d$, aplicamos el Teorema III - 1 para obtener

$$p(x) = p_1(x) \cdot (bx + d) + r_1,$$

en donde r_1 es una constante dado que, si es diferente de cero, su grado debe ser menor que el de $bx + d$. Además, el grado de $p_1(x)$ es uno menor que el de $p(x)$. Si $p_1(x)$ tiene grado positivo, podemos repetir el procedimiento. En general, ya que $p(x)$ tiene grado m, repetiremos el procedimiento m veces y obtendremos una sucesión

$$\begin{aligned}
p(x) &= p_1(x)(bx + d) + r_1,\\
p_1(x) &= p_2(x)(bx + d) + r_2,\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
p_{m-2}(x) &= p_{m-1}(x)\,(bx + d) + r_{m-1},\\
p_{m-1}(x) &= p_m(x)\,(bx + d) + r_m,
\end{aligned}$$

en que los p_j son polinomios de grado $m - j$ y los r son constantes. Designemos la constante $p_m(x)$ por r_{m+1}. Las ecuaciones precedentes pueden usarse exactamente como en el Capítulo II-6 para obtener $p(x) = r_{m+1}(bx + d)^m + r_m(bx + d)^{m-1} + \ldots + r_2(bx + d) + r_1 = q(bx + d)$.

La división sintética (Cap. IV-2) y el Teorema de Taylor (Cap. III-15) son muy útiles para efectuar los cálculos que se necesitan frecuentemente para aplicar el Teorema III-4. En consecuencia, no consideraremos aplicaciones detalladas del Teorema III-4 hasta después de que se introduzcan estos conceptos.

La mayoría de los temas restantes que hemos considerado en la teoría de los números (congruencias, clases residuales, función ϕ, problemas diofánticos), tienen una o más interpretaciones en la teoría de los polinomios. Sin embargo, dado que no necesitaremos estas interpretaciones en nuestro estudio de la teoría de las ecuaciones, mencionaremos solamente el concepto de un ideal que corresponde a una congruencia (Cap. III-9). Luego, encaminaremos nuestro estudio de la teoría de los polinomios en una nueva dirección: en las primeras ocho partes de este capítulo hemos expuesto correspondencias entre el anillo de los enteros y el anillo de los polinomios; en el Cap. III-10 iniciaremos la explicación de varios tipos de funciones del anillo de los polinomios que corresponden al estudio del Capítulo I, sobre varios sistemas de números pertenecientes al anillo de los enteros. Los ceros de los polinomios se estudiarán en el Capítulo IV.

EJERCICIOS

1. Escribir $p(x) = x^2 + 3x - 1$ como $q(x + 2)$.
2. Escribir $p(x) = x^4 + 3x^2 + 5$ como $q(x + 1)$.
3. Escribir $p(x) = x^4 + 8x^3 - 7x + 11$ como $q(x - 2)$.

*III-9 IDEALES.

Concluiremos nuestro estudio de las correspondencias entre la teoría de los polinomios y la teoría de los números expuesta en el Capítulo II, refiriéndonos brevemente a un concepto relativo a las congruencias (Cap. II-8).

Dos enteros a y b son congruentes respecto de un módulo entero m si su diferencia es divisible por m. Dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ son congruentes módulo un polinomio $m(x)$ si su diferencia es divisible por $m(x)$. El conjunto de todos los enteros múltiplos de un entero m forma una clase residual $[0]$ (mód. m) y constituye el *ideal* de m dentro del anillo de los enteros. El conjunto de todos los polinomios múltiplos de $m(x)$ constituye el ideal de $m(x)$ dentro del anillo de los polinomios. Por ejemplo, $x^2 + 2x$, x^4, $x^{17} - 12x^2$, pertenecen todos al ideal de x, mientras que $x^2 + b$ con $b \neq 0$ no pertenece al ideal de x.

Las clases residuales pueden definirse en función del ideal de $m(x)$. Sin embargo, el número de las clases residuales ya no es finito. Por ejemplo, en el anillo de los polinomios con coeficientes enteros, cada entero representa una clase residual distinta respecto del ideal de x. Los teoremas análogos a la mayoría de los teoremas sobre residuos de la teoría de los números, cuando los hay, se encuentran fuera del alcance de nuestro breve estudio. En la Bibliografía Nº 34 se puede consultar una excelente introducción al estudio de esta materia.

EJERCICIOS

1. Describir el ideal de las siguientes expresiones en el anillo de los polinomios con coeficientes enteros:
(a) x; (b) x^2; (c) $x + 1$.

2. Un subconjunto S de uno o más elementos de un anillo R es un ideal si (i) la diferencia de dos elementos cualesquiera de S es un elemento de S; y (ii) el producto de cualquier elemento de S por un elemento de R es un elemento de S. Esta es la definición corriente de un ideal. Probar que todos los ideales del Ejercicio 1 satisfacen esta definición.

3. Valiéndose de la definición del Ejercicio 2, demostrar que cualquier ideal S perteneciente a un anillo R, debe ser también un subanillo de R.

4. Indicar cuáles de los siguientes son ideales: (a) el anillo de los enteros pares respecto del anillo de los enteros; (b) el anillo de los enteros respecto del anillo de los números racionales.

5. Un anillo S perteneciente a un anillo R se llama *ideal principal* si todo elemento de S es de la forma rb, en que b es un elemento constante y r es un elemento arbitrario de R. Cada uno de los ideales del Ejercicio 1 es un ideal principal; en realidad, siempre que el Algoritmo de Euclides se verifica en un anillo, todo ideal de ese anillo es un ideal principal. Proponer un ejemplo de un ideal que no sea un ideal principal.

III-10 FUNCIONES.

Dado cualquier polinomio $p(x)$, podemos asociar un número único $p(b)$ a cada valor numérico de b asignado a x. En este caso, los valores numéricos supuestos para el polinomio $p(x)$ dependen del conjunto de valores S supuestos para la variable x. La siguiente definición de función se basa sobre esta noción de dependencia.

Se dice que la variable y es una *función* de la variable x respecto de un conjunto de números S, si a cada valor de x en S, le corresponde uno o más valores de y. La variable x se llama *variable independiente; y*, la *variable dependiente*. En rigor, la función es la regla o ley mediante la cual los valores de x dan origen a los valores de $f(x)$. Esta función o regla puede expresarse como un polinomio en x, como un gráfico en el plano xy y de muchas otras maneras. La relación funcional entre x e y se señala por medio de los símbolos $y = f(x)$. El conjunto de los valores de S se llama el dominio de definición, o simplemente, *el dominio* de f. El conjunto de valores que se atribuyen a y se llama rango de valores o *rango* de f. Si a cada valor de x en S, corresponde exactamente un valor de y, se dice que la función de x respecto de S es una *función uniforme*. Si para cada valor de x corresponden dos o más valores de y, se llama una *función multiforme* de x.

Teniendo en cuenta estas definiciones, las proposiciones formuladas al comienzo de esta sección (Cap. III-10) implican que cualquier polinomio $p(x)$ es una función uniforme de la variable x. Esta aseveración es una consecuencia de las definiciones del Capítulo I, ya que para cualquier valor numérico dado de x, por ejemplo b, $p(b)$ supone sólo un número finito de las operaciones de adición, sustracción y multiplicación de números. Cada una de estas operaciones ha sido definida como única. Consideremos, por ejemplo, $p(x) = x^3 - 7x^2 + 3x + 2$ para $x = 5$, en donde

$$p(5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 - 7 \cdot 5 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 2$$

está unívocamente definida.

Hemos visto que el conjunto de valores, o rango de la función, depende del conjunto S de valores que se atribuye a la variable x, es decir, del dominio de la función. Es conveniente identificar los conjuntos S a los cuales se restringe x comúnmente. El conjunto de valores S suele consistir en uno o más intervalos, en donde el conjunto de todos los números reales que satisfacen cualquiera de las siguientes relaciones, se denomina un *intervalo:* $x < a$, $x \leqq a$, $a < x < b$, $a \leqq x < b$, $a \leqq x \leqq b$, $a < x \leqq b$, $b \leqq x$, $b < x$ para números reales cualesquiera a, b. El conjunto $a < x < b$ también se llama un *segmento o intervalo abierto;* $a \leqq x < b$ no es ni abierto ni cerrado y suele denominarse *intervalo semicerrado;* $a \leqq x \leqq b$ se llama *intervalo cerrado*. Cuando el conjunto S comprende a todos los números reales o a un solo intervalo de números reales tales que $x < 0$, $0 < x < 1$, ó $2 \leqq x$, x se llama *una variable real continua*. Cuando el conjunto S comprende a todos los enteros positivos, x se llama una *variable entera positiva.*

En seguida, nos prepararemos para definir una función continua (Cap. III-12). Esta preparación es uno de los propósitos principales de esta sección y de la siguiente (Cap. III-11). La continuidad es una propiedad importante de todos los polinomios en variables continuas. En realidad, encontraremos (Ejercicio 4, Cap. III-13) que cuando x es una variable real continua, el polinomio $p(x)$ es una función continua de x. Esta propiedad de los polinomios es fundamental y se aprovecha para encontrar raíces de cualquier polinomio $p(x)$. (Ejercicio 5, Cap. III-13; Cap. IV-5). Una de las mejores definiciones de una función continua supone el concepto de límite.

El concepto de límite se considera frecuentemente como materia del análisis, tomando en cuenta que las tres principales subdivisiones de las matemáticas son álgebra, geometría y análisis. Sin embargo, los conceptos fundamentales del álgebra no pueden constituir un compartimento, una entidad estrechamente entrabada, separada totalmente de la geometría y del análisis. Un postulado sobre la existencia de todos los números reales puede usarse también para postular la continuidad de una recta en geometría (Cap. I-12). Nos hemos valido de representaciones geométricas de relaciones algebraicas para aclarar conceptos (Cap. I-12 y también Cap. I-16). De la misma manera, consideraremos, en seguida, unos cuantos temas del análisis [límite (Cap. III-11); continuidad (Cap. III-12 y 13), y derivada (Cap. III-14)] que nos servirán en nuestro estudio de la teoría de las ecuaciones (Cap. IV) y en este capítulo en la exposición de las siguientes correspondencias entre los números y las funciones:

enteros	polinomios
números racionales	funciones racionales
números algebraicos	funciones algebraicas
números trascendentes	funciones trascendentes
números reales	funciones analíticas

EJERCICIOS

1. Señalar cuáles de las funciones siguientes son funciones uniformes de x (considerar solamente los valores reales de x y de y):

(a) $y = x^3 - 3x + 1$
(b) $y = \sqrt{x^2 - 9}$
(c) $y = (x^2 - 9)^2$
(d) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$
* (e) $y = 2^x$
* (f) $y = \log x$
* (g) $y = \operatorname{sen} x$
* (h) $y = \operatorname{arc\,sen} x$

2. Señalar el dominio de definición y el rango de valores para cada una de las funciones del Ejercicio 1.

3. Proponer cinco funciones multiformes de x.

4. Dar tres ejemplos de cada uno de los siguientes tipos de intervalos: (a) abierto; (b) cerrado; (c) ni abierto ni cerrado.

5. Indicar cuales de las siguientes definen funciones de la variable real x:

a) $y = x^2 - 3x + 1$;
b) $y = x$ para $x > 0$, $y = -x$ para $x \leqq 0$;
c) $y = x - [x]$, en que $[x]$ indica el mayor entero $\leqq x$;
d) $y = x/(x^2 - 2)$;
e) $y = 1$ si x es racional, $y = 0$ si x es irracional;
*f) $y = \tan x$;
g) $y = 2$ para $x < -1$; $y = -x$ para $-1 \leqq x \leqq 0$, $y = 1/x$ para $0 < x$.

6. Repetir el Ejercicio 5 para el caso en que el dominio de definición de x es el conjunto de (a) los números racionales; (b) los enteros positivos.

7. Si $f(y)$ está dado por $x = y^n$, entonces el valor principal de la función inversa $f^{-1}(x)$ está dado por $y = x^{1/n}$. Aprovéchese esta relación para definir $x^{1/n}$ para (i) $x > 0$ y cualquier entero $n \neq 0$; y (ii) cualquier valor real de x y cualquier entero impar n (Ejercicio 13 Cap. 1 — 12). Determinar las funciones inversas de cada una de las siguientes:

a) $x = y + 2$
b) $x = 2y$
c) $x = 3y + 5$
d) $x = y^3$
e) $x = y^{2/3}$
f) $x = (y + 1)/(y - 1)$
g) $x = (ay + b)/(cy + d)$, en donde $ad - bc \neq 0$ (Ver Teorema IV — 8)
h) $y = g(x)$
*i) $x = \operatorname{sen} y$
*j) $x = 2^y$
*k) $x = \log_3 y$.

8. Discutir las relaciones entre los dominios y rangos de $f(y)$ y $f^{-1}(x)$ en cada ítem del Ejercicio 7.

9. Encontrar las funciones inversas en cada una de las siguientes:

a) $x = y + b$
b) $x = by$
c) $x = cy + b$
d) $x = cy^n + b$
*e) $x = a^y$, en donde $0 < a$
*f) $x = \log_b y$, en donde $0 < b$.

10. Emplee la definición de $x^{1/n}$ que aparece en el Ejercicio 7 y defina $x^{m/n}$ para $x > 0$ y enteros cualesquiera m y n.

*El asterisco indica que el ejercicio incluye conceptos que no se han tratado en el presente texto, pero que debieran ser familiares a la mayoría de los lectores.

11. Una función $f(x)$ real uniforme es una *función creciente* de x en un intervalo $a < x < b$ si $f(x + h) - f(x) > 0$ para todo x y todo h tales que $a < x < x + h < b$. Demostrar que x^2 es una función creciente de x para $x > 0$.

12. Demostrar que x^n es una función creciente de x para $x > 0$ y cualquier entero positivo n. (*Indicación:* sea $x + h = y$; valerse del Ejercicio 7, Cap. I – 4).

13. Definir una función decreciente de x y demostrar que x^{-n} es una función decreciente de x para cualquier entero positivo n y $0 < x < 1$.

14. Demostrar que a^x es una función creciente de la variable positiva entera x cuando $a > 1$.

15. Repetir el Ejercicio 12, siendo n un entero cualquiera.

16. Demostrar que a^x es una función decreciente de la variable entera x para $0 < a < 1$.

17. Señalar, en el Ejercicio 7, las funciones que son funciones crecientes de la variable real y. Determínense los intervalos cuando sea necesario.

18. Señalar las funciones crecientes del Ejercicio 9.

III - 11 LIMITES.

Definiremos primero el límite de un conjunto ordenado de números reales

$$\{a_n\} = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

La notación $\{a_n\}$ indica que existe un número a_n correspondiente a cada entero positivo n, y que los números a_n (no necesariamente distintos) se consideran en el orden de sus subíndices. Por ejemplo, si $a_n = 1/n^2$, tenemos $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{9}$, ... Tales conjuntos ordenados se llaman *sucesiones* de números. También estudiaremos sucesiones de funciones, tales como $\{x^n - 1\}$.

Las sucesiones:

$$\begin{gathered} 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots, 1/n, \ldots, \\ -\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{8}, +\tfrac{1}{16}, \ldots, (-1)^n/2^n, \ldots; \\ .1, .01, .001, \ldots, 10^{-n}, \ldots \end{gathered}$$

tienen, evidentemente, una propiedad común, porque para cada sucesión $\{a_n\}$ el término a_n puede elegirse arbitrariamente de modo de obtener un valor absoluto pequeño eligiendo valores de n suficientemente grandes. En otras palabras, $|a_n - 0|$ puede hacerse menor que cualquier número dado positivo ε, haciendo n tan grande como se quiera. Designaremos por N un valor particular de n tal que $|a_n - 0| < \varepsilon$ para todo $n \geqq N$. Puesto que $|a_n| > |a_{n+1}|$ en cada una de las sucesiones dadas, resulta evidente que $|a_n$

$-\ 0| < \varepsilon$ para $n = N$ implica que se satisface también la misma relación para cualquier $n \geqq N$. En la terminología del análisis, se denota la dependencia de N respecto de ε escribiendo N_ε. Por ejemplo, si $\varepsilon = 1$ y $\{a_n\} = \{1/n\}$, entonces podemos elegir $N_1 = 2$. Si $\varepsilon = .01$ para la misma sucesión, elegimos $N_{.01} = 101$. La necesidad de esta dependencia de N respecto del ε dado resulta evidente porque para cualquier valor dado de N, se podría elegir un ε tal que el N dado no satisfaga las condiciones pedidas. En particular, si $\{a_n\} = \{1/n\}$ y $N = 1, 658, 972$ es dado, se necesita sólo hacer $\varepsilon = 10^{-7}$ para probar que ε debe darse primero y N_ε elegirse respecto del ε dado. Usando esta terminología, podemos describir la propiedad común de las sucesiones anteriores diciendo que dado cualquier número positivo ε, existe un entero N_ε tal que $|a_n - 0| < \varepsilon$ para todo $n \geqq N_\varepsilon$. Se dice que las sucesiones que tienen esta propiedad se aproximan a cero como límite y de aquí que sean llamadas *sucesiones nulas.*

Si consideramos las sucesiones:

$$.9,\ .99,\ .999,\ \ldots,\ (10^n - 1)\ /10^n,\ \ldots,$$

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \quad \ldots, (n+1)\ /n,\ \ldots,$$

encontraremos que en cada sucesión los términos a^n tienden a 1 a medida que n aumenta. Dado $\varepsilon = .1$, podemos hacer $N_\varepsilon = 2$ en la primera sucesión y $N_\varepsilon = 11$ en la segunda sucesión para obtener $|a_n - 1| < \varepsilon = .1$ para todo $n \geqq N_\varepsilon$. Asimismo, si $\varepsilon = .001$. podemos hacer $N_\varepsilon = 4$ en la primera sucesión y $N_\varepsilon = 1001$ en la segunda sucesión. En general, se dice que *una sucesión de números*

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\ \ldots$$

tiende a un límite finito A, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$*, si para todo número positivo ε existe un entero N_ε tal que para cualquier $n \geqq N_\varepsilon$ se satisfaga la desigualdad $|a_n - A| < \varepsilon$.*

Pueden definirse muchas sucesiones tales como $\{n\}$ y $\{-n^2\}$ que tienden a límites infinitos (Ejercicio 8) (ver Bibliografía Nº 12, pág. 33). Muchas otras sucesiones, tales como $\{(-1)^n\}$ y $\{n(-1)^n\}$, oscilan y no tienden a ningún límite. No consideraremos tales sucesiones, dado que necesitaremos solamente *sucesiones convergentes,* es decir, sucesiones que tiendan a un límite finito. Un buen estudio general de sucesiones puede consultarse en (Bibliografía Nº 12, págs. 27-41).

Las manipulaciones de las desigualdades numéricas que se emplean en la determinación de N_ε para una sucesión dada, se basan sobre las definiciones del Cap. I, Secciones 6, 9 y 12. En resumen dado $a < b$, resulta para cualquier número real c

$$a + c < b + c,$$

y, por lo tanto,

$$a - c < b - c.$$

También

$$ac < bc \text{ si } c \text{ es positivo,}$$
$$ac > bc \text{ si } c \text{ es negativo.}$$

La convergencia de una sucesión puede considerarse también con respecto de las sucesiones de Cauchy. Una sucesión de números reales $\{a_n\}$ se llama una *sucesión de Cauchy* si para cualquier número dado positivo ε existe un entero N_ε tal que $|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon$ para $n \geqq N_\varepsilon$ y para todo entero positivo k. El criterio de convergencia de Cauchy (Ejercicio 4) establece, entonces que toda sucesión de Cauchy es una sucesión convergente y, a la inversa, que toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy. En consecuencia, puede probarse que una sucesión es convergente demostrando que es una sucesión de Cauchy.

Todas las sucesiones precedentes se obtuvieron expresando a_n como una función de la variable positiva entera n y considerando la sucesión de valores de a_n para $n = 1, 2, \ldots$. También podemos obtener sucesiones expresando el término general, por ejemplo, a_x, como una función de una variable real continua x y considerando la sucesión de valores de a_x que corresponden a cualquiera sucesión de números reales elegidos como valores de x. Por ejemplo, sea $a_x = x + 5$ y elijamos para x los valores $1, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3}, \ldots, 1/\sqrt{n}, \ldots$. Nos serviremos de este concepto en las dos secciones que siguen de este capítulo para definir una función continua y una variable continua.

EJERCICIOS

1. Demostrar que las sucesiones siguientes son sucesiones nulas:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots,$$
$$\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \ldots,\ \frac{(-1)^{n+1}}{2^n},\ \ldots,$$
$$.1,\ .01,\ .001,\ .0001,\ \ldots,\ \frac{1}{10^n},\ \ldots.$$

2. Escribir los primeros cinco términos y encontrar el límite de cada una de las siguientes sucesiones:

a) $\{n^{-2}\}$; b) $\{[5n + (-1)^{n+1}]\ n\}$; c) $\{(n^2 - 1) / n^2\}$.

3. Determinar N_ε para cada una de las sucesiones del Ejercicio 2: (a) si ε es un número positivo arbitrario; (b) si $\varepsilon = .01$.

4. Demostrar el *criterio de convergencia de Cauchy:* una sucesión de números reales $\{a_n\}$ tiende a un límite finito A si y sólo si para cualquier número positivo dado ε existe un entero N_ε tal que $|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon$ para $n \geqq N_\varepsilon$ y para todo entero positivo k. (Ver Bibliografía Nº 21; págs. 35-36).

5. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, en donde A y B son números reales, demostrar que:

$$\text{(a)}\ \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B,$$
$$\text{(b)}\ \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = A - B,$$
$$\text{(c)}\ \lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB,\ \text{y}$$
$$\text{(d)}\ \text{para } B \neq 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

6. Para postular la existencia de los números reales suele utilizarse la suposición de que toda sucesión convergente de números racionales tiene un límite. En el Ejercicio 5, se ha señalado que los límites de las sucesiones de números pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse lo mismo que los números. Probar que las relaciones de orden para los límites de las sucesiones son análogas, pero no exactamente las mismas que las relaciones de orden para los números, demostrando que

a) si $a_n \geqq 0 \lim_{n\to\infty} a_n = A$, entonces $A \geqq 0$.

b) si $a_n \geqq b_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, entonces $A \geqq B$.

c) es posible que sea $a_n > b_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, y $A = B$.

7. Por medio del Ejercicio 10, Cap. III — 10, y de la definición de un número real como el límite de una sucesión de números racionales, definir x^b para cualquier número real positivo b.

8. Podemos definir los símbolos $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} - a_n = -\infty$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entero N_ε tal que $a_n > 1/\varepsilon$ para $n \geqq N_\varepsilon$. Siendo así, se dice que la sucesión $\{a_n\}$ se ha hecho positivamente infinita si para cualquier entero positivo dado p se tiene $a_n > p$ para todos los valores suficientemente grandes de n. Demostrar que si el $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, en donde B, es finito y el $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, entonces.

a) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = +\infty$.

b) $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = -\infty$.

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$.

d) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$ si $0 < B$.

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = +\infty$ si $0 < B$.

9. Utilizar los resultados del Ejercicio 8 para justificar las siguientes convenciones, en donde B es finito:

a) $\infty \pm B = \infty$,

b) $B - \infty = -\infty$,

c) $B / \infty = 0$,

d) $\infty \cdot B = \infty$ si $0 < B$,

e) $B / 0 = \infty$ si $0 < B$.

Nótese que también hay algunas operaciones indefinidas respecto de los símbolos ∞ y 0: $\infty - \infty$; ∞/∞; $0/0$; $\infty \cdot 0$; 0^0; ∞^0 1^∞.

10. Dada una sucesión infinita $\{a_n\}$ de números reales, en donde n es una variable entera positiva, la suma indicada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se llama *serie infinita* de números

reales. La serie *converge* hacia (tiene una suma) S si y sólo si la sucesión de sumas parciales s_n en donde $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, tiene un límite S y S es finito. Se dice que la serie es *divergente* en todos los otros casos, es decir, cuando (i) $\{s_n\}$ se hace positivamente infinita; (ii) $\{s_n\}$ se hace negativamente infinita; (iii) $\{s_n\}$ oscila y por lo tanto S no existe. Proponer ejemplos que ilustren cada uno de estos tres casos de series divergentes.

11. Demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = R$ y C, es cualquier número real, entonces

(a) $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = S - a_1 - a_2 - \cdots - a_{k-1}$,

(b) $C + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = C + S$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n = CS$,

(d) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S + R$.

12. Exponer en palabras cada uno de los item del Ejercicio 11 e indicar su significado.

III - 12 CONTINUIDAD.

Frecuentemente hemos oído decir que una curva continua es aquella que puede trazarse sin levantar el lápiz. Tales curvas son efectivamente continuas y esta definición es fácil de imaginar. Sin embargo, tal defi-

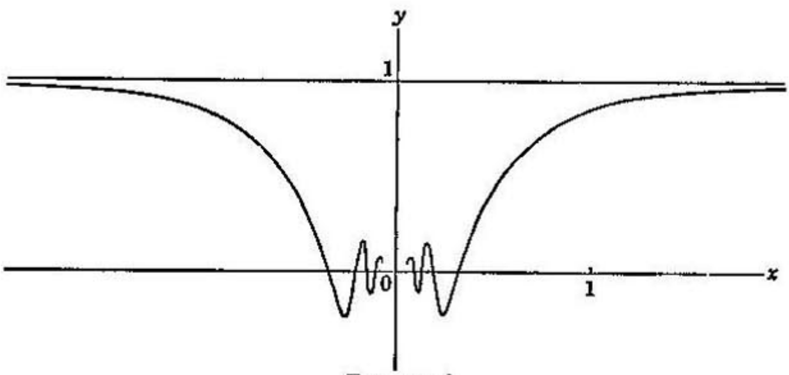

FIG. III—1

nición no es exacta, dado que existen curvas, tales como $y = x$ sen $(1/x)$ en las cercanías del origen, que oscilan tan rápidamente que no pueden trazarse con un lápiz (Fig. III-1), y sin embargo, algunas de estas curvas son también continuas. Una curva continua es el gráfico de una función continua y, a la inversa, el gráfico de una función continua es una curva continua. Nos serviremos de este hecho para definir la continuidad con respecto a los límites de las curvas y de las funciones.

Consideremos la función $y = f(x)$ cuyo gráfico aparece en la Fig. III-2. Esta función está determinada por

$$\begin{aligned} y &= 2 \text{ para } x < -1, \\ &= -x \text{ para } -1 \leqq x \leqq 0, \\ &= 1/x \text{ para } 0 < x. \end{aligned}$$

De este modo podemos asociar exactamente un valor de y con cada valor real de x para todos los números reales x. Siendo así (Cap. III-10), tenemos una función uniforme $y = f(x)$ de una variable real continua x.

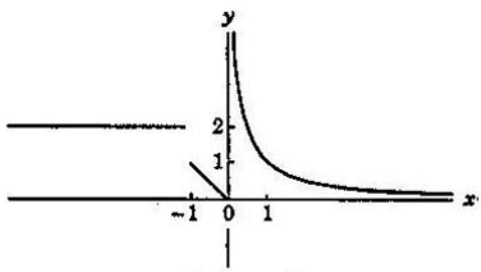

Fig. III—2

Del gráfico se desprende que la función es continua para los x positivos, pero no para todos los x. Examinemos ahora la curva más detalladamente y tratemos de encontrar un fundamento para describir una curva como continua.

Toda interrupción en la curva debe producirse en algún punto tal como $x = -1$ y $x = 0$ de la Fig. III-2. Por eso nos referiremos principalmente a la continuidad en un punto. Si una curva es continua en todos los puntos de un intervalo (Cap. III-10), se define como continua en ese intervalo. La curva en referencia parece ser y es continua en cada uno de los tres segmentos $x < -1$; $-1 < x < 0$; $0 < x$. Los puntos en los cuales la curva salta o se interrumpe se llaman puntos de *discontinuidad*. Estos puntos pueden definirse exactamente por medio de límites de sucesiones (Cap. III-13).

Supongamos que $y = f(x)$ está definida igual como en la Fig.

III-2. Para cualquier sucesión de números positivos $\{a_n\}$ que tiene un límite 2, existe una sucesión correspondiente $\{1/a_n\}$ de valores de $y = f(x)$. Se dice que la función $f(x)$ es continua en $x = 2$, puesto que para *toda* sucesión de valores de x que tenga el límite 2, la sucesión correspondiente de valores de $f(x)$ tiene el límite $\frac{1}{2}$ y $f(2) = \frac{1}{2}$. La función $f(x)$ es discontinua en $x = 0$, puesto que existen sucesiones nulas de valores de x tales que las sucesiones correspondientes de valores de $f(x)$ no tienden al mismo límite. En particular, si la sucesión de valores de x es $\{-1/n\}$, entonces la sucesión de valores de $f(x)$ en la Fig. III-2 es $\{1/n\}$ tiene límite cero. Si la sucesión de valores de x es $\{1/n\}$, entonces la sucesión de valores de $f(x)$ es $\{n\}$, que crece indefinidamente. Es así como existen sucesiones nulas de valores de x tales que las sucesiones correspondientes de valores de $f(x)$ no tienen el mismo límite. La función y la curva de la Fig. III-2 se llaman, en este caso, discontinuas para $x = 0$. En la Fig. III-1 toda sucesión nula de valores de x corresponde a una sucesión de valores nula de $y = x\operatorname{sen}(1/x)$ y, suponiendo que $y = 0$ cuando $x = 0$, se dice que la curva es *continua* para $x = 0$.

De la Fig. III-2 resulta evidente que si x tiende a cero por medio de cualquier sucesión de valores negativos, la sucesión correspondiente de valores de $y = f(x)$ tiende a cero. Este límite común de todas las sucesiones de $f(x)$ que corresponden a sucesiones de valores de x que tienden a cero por el lado negativo se indica por medio de la notación $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$. Análogamente, respecto de la Fig. III-2, diremos que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ es infinito, que el $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \frac{1}{2}$, que el $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \frac{1}{2}$, que el $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 1$. En la sección siguiente usaremos los conceptos de límite por la izquierda y límite por la derecha para definir una función continua.

EJERCICIOS

1. Hacer el gráfico (no se exigen condiciones algebraicas) de una función $f(x)$ tal que:

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +1$;

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 5$.

2. Por definición, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ si y sólo si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. Hacer el gráfico de una función tal que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ para todo valor real de a.

3. Hacer el gráfico de una función tal que $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ para $a = -2, 0, 2$.

4. Hacer el gráfico de una función tal que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$; $f(0) = 1$; y $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$.

5. Hacer el gráfico de una función tal que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$; $f(0) = 1$, y $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

III-13 FUNCIONES CONTINUAS.

Cuando x es una variable real continua, se dice que una función uniforme $y = f(x)$ determinada para $a < x < b$, es *continua* para x_0, en que $a < x_0 < b$, si y sólo si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$. Como se señaló anteriormente, $f(x)$ es *continua en un intervalo* si es continua en *todos* los puntos del intervalo. En consecuencia, la función $f(x)$ es continua en un intervalo si y sólo si el límite por la izquierda, el límite por la derecha y el valor de la función son iguales en todos los puntos de ese intervalo.

Si los dos límites $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ son finitos e iguales, entonces o bien su límite común es $f(x_0)$ y $f(x)$ es continuo en $x = x_0$ o su límite común no es $f(x_0)$ y $f(x)$ tiene una *discontinuidad evitable* en $x = x_0$. Por ejemplo, la función:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \quad && \text{cuando } x < 3, \\ &= 2 && \text{cuando } x = 3, \\ &= 4 - x && \text{cuando } x > 3, \end{aligned}$$

está representada en la Fig. III-3. Hay una discontinuidad evitable en $x = 3$ que puede eludirse definiendo nuevamente $f(x)$, como sigue:

$$f(x) = 1 \quad \text{cuando } x \leqq 3,$$
$$= 4 - x \text{ cuando } x > 3.$$

Si los dos límites son finitos, pero no iguales, $f(x)$ tiene una discontinuidad en $x = x_0$ que se llama *salto finito*. Por ejemplo, en la Fig. III-2, $f(x)$ tiene un salto finito en $x = -1$.

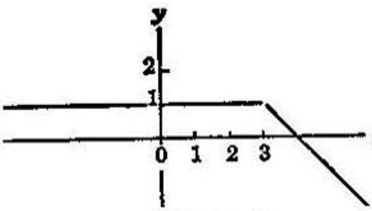

FIG. III—3

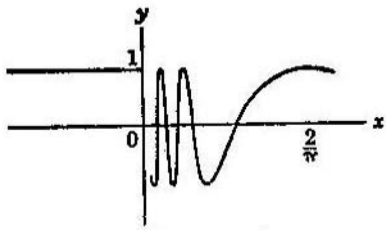

FIG. III—4

Si por lo menos uno de los límites no es finito, entonces o bien por lo menos un límite se hace infinito y $f(x)$ tiene una *discontinuidad infinita* o un límite oscila (no existe) y $f(x)$ es discontinua. Por ejemplo, en la Fig. III-2, $f(x)$ tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$. Las funciones $y = 1/x$ y $1/x^2$ tienen también cada una discontinuidad infinita en $x = 0$. La función cuyo gráfico aparece en la Fig. III-4 está dada por:

$$f(x) = 1 \quad \text{cuando } x \leqq 0,$$
$$= \operatorname{sen}(1/x) \quad \text{cuando } x > 0.$$

Si $\{x\} = \{1/(n\pi)\}$, entonces $\{f(x)\} = \{0\}$ tiene límite 0; si $\{x\} = \{2/[(4n+1)\pi]\}$ luego $\{f(x)\} = \{1\}$ tiene límite 1. En realidad, para cualquier b, $-1 \leqq b \leqq 1$, existe una sucesión nula de valores positivos de x tal que la sucesión correspondiente de valores de $f(x)$ tenga un límite b. En este caso, $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ no existe y se dice que la curva y la función son discontinuas en $x = 0$.

Daremos ahora una segunda definición de una función continua, en la que se reemplaza el concepto de límite por algunos de los conceptos empleados en la definición de un límite. Aquí de nuevo un dibujo será una ayuda visual muy útil.

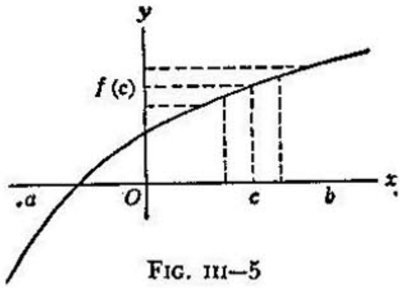

FIG. III–5

Una función uniforme $f(x)$ (Fig. III - 5) definida por $a \leqq x \leqq b$ es continua en $x = c$, en donde $a \leqq c \leqq b$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta\, \varepsilon_c$ tal que $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ para todo x comprendido en $a \leqq x \leqq b$ que satisfaga $|x - c| < \delta\, \varepsilon_c$. La notación $\delta\, \varepsilon_c$ indica que δ depende del ε dado y del punto elegido $x = c$.

Si dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $x = c$, entonces por definición, dado $\varepsilon > 0$, existe un valor positivo $\delta\, \varepsilon_c$ para $f(x)$ y otro para $g(x)$. El menor de estos dos números positivos satisfará las dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ en $x = c$. Asimismo, si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas, existe un $\delta\, \varepsilon_c$ tal que se verifica $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ y $|g(x) - g(c)| < \varepsilon$ para $|x - c| < \delta\, \varepsilon_c$. Aprovecharemos estas relaciones para demostrar que la suma $f(x) + g(x)$ de dos funciones continuas, es continua. Dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon/2$ será nuestro número positivo y elegiremos δ tal que para $|x - c| < \delta$, tengamos $|f(x) - f(c)| < \varepsilon/2$ y $|g(x) - g(c)| < \varepsilon/2$. Luego

$$\begin{aligned} |[f(x) + g(x)] - [f(c) + g(c)]| &= |f(x) - f(c) + g(x) - g(c)| \leqq \\ &|f(x) - f(c)| + |g(x) - g(c)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto completa la demostración de que la suma de dos funciones continuas en un punto, es continua en ese punto. El conjunto siguiente de ejercicios requiere el método de demostración ya citado, y permite llegar a uno de los principales resultados de esta sección, es decir, al Ejercicio 4. La demostración de este ejercicio se desprende de los ejercicios precedentes, teniendo en cuenta que cada polinomio consta de una variable y de un conjunto de coeficientes combinados por medio de operaciones de anillo.

EJERCICIOS

1. Si $f(x)$ es continuo en $x = c$ y $g(x)$ es continuo en $x = c$, demostrar que $f(x) - g(x)$ es también continuo en $x = c$.

2. Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuos en $x = c$, demostrar que $f(x) \cdot g(x)$ es también continuo en $x = c$.

3. Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuos en un segmento $a < x < b$, demostrar que $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, y $f(x) \cdot g(x)$ son continuos en ese mismo segmento.

4. Demostrar que cualquier polinomio en una variable real continua x con coeficientes reales es continuo para todos los valores reales de x.

5. Si existen números reales a y b, $a < b$, tales que $p(a) \cdot p(b) < 0$, en donde $p(x)$ es un polinomio real, demostrar que hay un número real c, $a < c < b$, tal que $p(c) = 0$. (Ver Bibliografía Nº 12; págs. 66-67).

6. Hacer el gráfico y discutir la continuidad de cada una de las siguientes funciones:

a) $y^2 = x^2 - 9$

b) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

c) $y^2 = x^3$

d) $x^2y = 1$

e) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

f) $y = 2^x$

g) $y = 1$ para $x \leqq 0$
$\quad = x$ para $x > 0$

h) $y = |x|$ para $x \neq 0$
$\quad = 1$ para $x = 0$

7. Dibujar gráficos de funciones uniformes que ilustren cada uno de los casos siguientes:

a) discontinuidades evitables en $x = 0$ y $x = 1$;

b) discontinuidades finitas en $x = n$ para todos los enteros positivos n;

c) discontinuidades infinitas para $x = +1$ y $x = -1$.

8. Proponer expresiones algebraicas para funciones uniformes que cumplan con las condiciones pedidas en el Ejercicio 7.

9. Una función uniforme $f(x)$ definida en el intervalo $a \leqq x \leqq b$ es *uniformemente continua* en ese intervalo si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un δ_ε tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ para todo x y x_0 (cualquier valor determinado de x) en el intervalo dado que satisfaga $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$. Hacer el gráfico de una función que sea continua en $0 < x < 1$ pero no uniformemente continua en $0 \leqq x \leqq 1$.

10. Demostrar (ver Bibliografía Nº 12; págs. 65-66) que si una función es continua en un intervalo cerrado, es uniformemente continua en ese intervalo.

11. Demostrar que si una función es continua en un intervalo cerrado: (a) está acotada en ese intervalo; (b) tiene un máximo M y un mínimo m en ese intervalo, y (c) adquiere cualquier valor b, por lo menos una vez en ese intervalo, siendo $m \leqq b \leqq M$.

12. Hacer el gráfico de una función $y = f(x)$ que sea uniforme, continua y creciente para $a \leqq x \leqq b$. Puede demostrarse que existe una función inversa correspondiente $x = f^{-1}(y)$ que es también uniforme, continua y creciente (ver Bibliografía Nº 12; págs. 67-68). Compruébense estas propiedades para la función representada en el gráfico.

13. Valiéndose del resultado expuesto en el Ejercicio 12, demostrar que $y^{1/n}$

puede definirse como una función creciente de y, uniforme y continua, en donde $y > 0$ y n es cualquier entero positivo (ver Ejercicio 12, Cap. III-10).

14. Para $a > 1$ demostrar que a^x es una función creciente de la variable positiva real x (ver Ejercicio 7, Cap. III-11).

15. Demostrar que $\log_a y$ puede determinarse como una función creciente, uniforme y continua de y, en que $y > 0$ y $a > 1$.

III - 14 DERIVADAS.

Las derivadas de un polinomio $p(x)$ pueden definirse mediante límites o simplemente por medio de los coeficientes del polinomio $p(x + h)$. Si $p(x) = x^2$, entonces $p(x + h) = x^2 + 2xh + h^2$. El coeficiente de h en $p(x + h)$ puede considerarse como la primera derivada de $p(x) = x^2$. Se escribe $(d/dx)\, p(x) = p'(x) = (x^2)' = 2x$. En general, la derivada de cualquier polinomio $p(x)$ puede considerarse como el coeficiente de h en el desarrollo de $p(x + h)$.

La *derivada* con respecto a x de cualquier polinomio $p(x)$ se define comúnmente como

$$p'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{p(x + h) - p(x)}{h},$$

puesto que este límite existe en los polinomios para todos los valores reales de x y esta definición puede hacerse extensiva fácilmente a funciones más generales. La derivada en $x = x_0$ (un valor determinado de x) de una función $f(x)$ uniforme arbitraria se define por

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

siempre que el límite exista. Cuando el límite no existe, la derivada es indefinida.

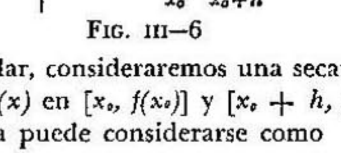

FIG. III—6

Geométricamente, la definición precedente de la derivada de $f(x)$ puede representarse por medio de la tangente y la secante en el gráfico de $f(x)$. Cualquiera recta que corte el gráfico de $f(x)$ en dos puntos puede llamarse recta secante o *secante*. En particular, consideraremos una secante (Fig. III-6) que corte el gráfico de $f(x)$ en $[x_0, f(x_0)]$ y $[x_0 + h, f(x_0 + h)]$. La pendiente de esta recta puede considerarse como

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

La recta tangente o *tangente* al gráfico de $f(x)$ en $[x_0, f(x_0)]$ puede definirse como la posición límite de la secante señalada a medida que h tiende a cero. De aquí que la pendiente de la tangente en $x = x_0$, sea el límite de la pendiente de la secante, a medida que h tiende a cero y es precisamente la derivada de $f(x)$ en $x = x_0$.

La derivada está indefinida en todos los puntos de discontinuidad y en los puntos de una curva en la cual la pendiente de la tangente sea una función discontinua de la variable independiente. Por ejemplo, si

$$\begin{aligned} f(x) &= x \quad \text{cuando } x \leqq 1, \\ &= 2 - x \text{ cuando } x > 1, \end{aligned}$$

tenemos el gráfico de la Fig. III - 7. En $x = 1$ la pendiente de la tangente cambia abruptamente de 1 a -1 y la derivada en $x = 1$ es indefinida.

Dado cualquier monomio bx^n, se puede obtener

$$b(x + h)^n = b[x^n + nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} h^2x^{n-2} + \cdots + h^n].$$

De este modo nbx^{n-1} es la derivada de bx^n sea que la derivada se considere como un límite o como el coeficiente de h. En seguida observaremos que $[f(x) + g(x)]'$ puede considerarse como el coeficiente de h en $[f(x + h) + g(x + h)]$, es decir, $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$. En otras palabras, la derivada de la suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas de las funciones. En particular, considerando un polinomio como una suma de monomios, la derivada de un polinomio es igual a la suma de las derivadas de sus términos (monomios). Dado que cualquier monomio bx^n tiene una derivada nbx^{n-1}, la derivada de cualquier polinomio

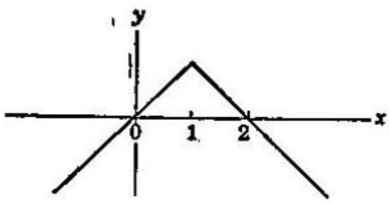

FIG. III—7

$$p(x) = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + a_{n-3}x^3 + \ldots + a_0x^n$$

resulta

$$p'(x) = a_{n-1} + 2a_{n-2}x + 3a_{n-3}x^2 + \ldots na_0x^{n-1}.$$

De este modo encontraremos la primera derivada $p'(x)$ con respecto a x de cualquier polinomio $p(x)$. Dado que $p'(x)$ es también un polinomio, puede repetirse el procedimiento para obtener $p''(x)$, la derivada de $p'(x)$ con respecto a x,

$$p''(x) = 2a_{n-2} + 3 \cdot 2a_{n-3}x + \ldots + n(n-1)a_0x^{n-2}.$$

Análogamente, se puede obtener $p'''(x)$, $p^{(4)}(x)$, $\ldots$, $p^{(n)}(x)$. Y por último, $p^{(n+k)}(x) = 0$ para cualquier entero positivo k, ya que la derivada de una constante es igual a cero. Hablaremos de $p^{(r)}(x)$, en donde r es cualquier entero positivo, al referirnos a la r-ésima derivada de $p(x)$.

Los valores de $p(x)$ y sus primeras n derivadas cuando $x = 0$ están estrechamente relacionadas con los coeficientes de $p(x)$. Por ejemplo, en $x = 0$, tenemos $p(0) = a_n$, $p'(0) = a_{n-1}$, $p''(0) = 2a_{n-2}$, $p'''(0) = 3(2a_{n-3})$, $\ldots$, $p^{(n)}(0) = n!(a_0)$. Si estas ecuaciones se resuelven respectivamente para a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, $\ldots$, a_0, y se sustituyen las expresiones correspondientes por los coeficientes del polinomio $p(x)$, tenemos

$$p(x) = p(0) + p'(0)x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \frac{p'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Este método de expresar un polinomio $p(x)$ por medio de sus derivadas en un punto (en el caso anterior en $x = 0$) es un caso especial de la *fórmula de Taylor* para los polinomios:

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Esta fórmula puede aplicarse para expresar cualquier polinomio $p(x)$ por medio de los valores del polinomio y de sus derivadas en $x = a$, para cualquier número real a. También proporciona un método efectivo de expresar $p(x)$ en la forma $q(x+h)$, en donde $a = -h$, es decir, reemplazando la variable x por la nueva variable $x + h$ (Cap. III - 8).

Hemos visto que dado cualquier polinomio $p(x)$ de grado n, podemos obtener su k-ésima derivada para cualquier entero positivo k. También para un polinomio $p(x)$ de grado n, hay máximo $n + 1$ términos en su fórmula de Taylor, dado que $p^{(n+k)}(x) = 0$ para todo entero positivo k. Sin embargo, existen funciones tales como $f(x) = e^x$ para las cuales no se anula ninguna derivada en $x = a$. En estos casos la fórmula de Taylor se amplía en la serie de Taylor (Cap. III - 15).

Ya hemos examinado todas las propiedades de los polinomios que necesitaremos en el Capítulo IV. Las propiedades del anillo de polinomios que corresponden a las propiedades del anillo de los enteros, el hecho de que todo polinomio en una variable real continua sea continuo y la expresión de cualquier polinomio por medio de sus derivadas empleando la fórmula de Taylor, nos servirán en nuestros estudios futuros.

Pondremos fin al presente capítulo con un breve examen de la serie de Taylor y de las funciones analíticas. Estos dos conceptos son muy importantes en matemáticas superiores, pero no son necesarios para nuestros estudios ulteriores. El papel fundamental de las funciones analíticas se evidencia en las correspondencias entre los números y las funciones que se tratan al final del Capítulo III - 10.

EJERCICIOS

1. Derivar la fórmula de Taylor cuando $a \neq 0$.
2. Escribir $p(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ en la forma de $q(x - 1)$.
3. Escribir $p(x) = x^8 + 8x^7 - 6x^6 + 5x^3 + 3$ en la forma de $q(x + 1)$.
4. Repetir los Ejercicios 1, 2 y 3 del Cap. III-8, aplicando la fórmula de Taylor.
5. Proponer una función uniforme de x que sea continua para todos los valores de x pero que no tenga derivada en $x = 0$.
6. Demostrar que si $f(x)$ es una función creciente y $f'(x)$ existe en el intervalo $a < x < b$, entonces $f'(x) \geqq 0$ en $a < x < b$.
7. Hacer el gráfico de una función creciente $f(x)$ en el intervalo $a < x < b$, en donde $f'(d) = 0$ para algún $x = d$, en que $a < d < b$.

III - 15* SERIE DE TAYLOR.

Dado un polinomio $p(x)$ de grado m, podemos suponer (Cap. III - 8) que $p(x)$ puede expresarse en la forma

$$p(x) = b_0 + b_1(x - a) + \dots + b_m(x - a)^m.$$

Podemos en seguida determinar los b por medio del valor de $p(x)$ y sus derivadas en $x = a$ como en la fórmula de Taylor (Cap. III - 14). Se necesitan sólo $(m + 1)$ términos, ya que $p(x)$ tiene a lo más m derivadas diferentes de cero.

Dada cualquier función uniforme $f(x)$, podemos intentar expresarla en la forma

$$f(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2 + \dots, \tag{III - 4}$$

en donde existe un término asociado con todas las potencias enteras, no negativas de $(x - a)$. Tal expresión se llama *serie infinita* y corresponde en cierto modo a un decimal infinito de nuestro sistema de números. Si $f(x)$ puede expresarse de la manera anterior, los b pueden expresarse nuevamente por medio de los valores de $f(x)$ y sus derivadas en $x = a$. Por ejemplo, $b_0 = f(a)$, $b_1 = f'(a)$, $b_2 = f''(a)/2$. Por eso una función debe tener derivadas de todos los órdenes si se desarrolla como en (III - 4). Cuando los b de (III - 4) se reemplazan por las expresiones correspondientes de $f(x)$ y sus derivadas en $x = a$, obtenemos la *serie de Taylor*:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x - a)^n}{n!} + \cdots .$$

En general, dada cualquiera función uniforme $f(x)$ definida en un intervalo $c < x < d$, en donde $c < a < d$, podemos considerar, respectivamente $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, $\dots$, $f^{(n)}(a)$, $\dots$ Si $f^{(n)}(a)$ existe para todos los valores enteros positivos de n, entonces $f(x)$ tiene un desarrollo en serie de Taylor en $x = a$, como se señaló anteriormente.

Ahora podemos obtener la serie infinita que usamos en el Cap. I - 16. En todos los textos de cálculo se demuestra que la derivada de e^x es e^x, que la derivada de sen x es cos x y que la derivada de cos x es $-$sen x. Utilizando $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, y la serie de Taylor en $x = 0$, tenemos $f^{(n)}(0) = 1$ para todo entero positivo n y

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

Cuando $f(x) =$ sen x, se tiene $f'(x) =$ cos x, $f''(x) = -$sen x, $f'''(x) = -$cos x, $f^{(4)}(x) =$ sen x, $\dots$ En $x = 0$, $f(x) = f''(x) = f^{(2n)}(x) =$

0 y $f'(x) = 1$, $f'''(x) = -1$, $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k$ para cualquier entero positivo k. En seguida, obtenemos el desarrollo de la serie de Taylor:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

El desarrollo de la serie de Taylor para cos x puede obtenerse de manera análoga. (Ejercicio 1).

Hemos indicado sistemáticamente cómo obtener un desarrollo de la serie de Taylor en $x = a$ para cualquier función que tenga derivadas de todos los órdenes en $x = a$. Dejaremos a los textos de análisis el asunto de la convergencia de las series infinitas, es decir, para qué valores de x la serie es significativa (ver Bibliografía Nº 12; págs. 320-329, 365-424). Las series para e^x y sen x convergen para todos los valores reales de x. Nuestro interés en el desarrollo sistemático se evidenciará cuando definamos una función analítica.

EJERCICIOS

1. Desarrollar una serie de Taylor para cos x con respecto a potencias de x.
2. Por medio de los desarrollos de cos x y sen x en serie de Taylor, encontrar un desarrollo en serie de Taylor cos $x + i$ sen x.
3. Desarrollar en serie de Taylor e^{ix} y compararla con la encontrada en el Ejercicio 2.

III - 16* FUNCIONES ANALITICAS.

Completaremos ahora nuestro estudio de las correspondencias entre los números y las funciones que mencionamos en el Cap. III - 10. En el Cap. III - 1 definimos un polinomio y en las secciones 1 a 9 del Cap. III hemos hecho notar las correspondencias entre polinomios y enteros. En el Cap. III - 3 establecimos la correspondencia entre números racionales y funciones racionales. Ahora examinaremos brevemente las correspondencias mencionadas en el Cap. III que aún no se han considerado.

Se dice que un número es algebraico si satisface una ecuación polinomia con coeficientes enteros que no es idéntica a cero (Cap. I - 10). Se dice que todos los demás números son trascendentes. Análogamente, se dice que una función $y = f(x)$ es una *función algebraica* de x si satisface una ecuación polinomia con polinomios en x como coeficientes y que no sea idéntica a cero en y. Por ejemplo, $y = \sqrt[3]{x}$ satisface $y^3 - x = 0$, y por lo tanto es una función algebraica. Todas las funciones que no son algebraicas se llaman *funciones trascendentales.* Por ejemplo, sen x, log x, y e^x son funciones trascendentes.

En el Cap. I - 10 obtuvimos los números reales suponiendo que todos los decimales son números. El conjunto de números reales también pudo haberse obtenido suponiendo que toda sucesión de Cauchy de números racionales representa un número real. Ahora obtendremos funciones analíticas de una variable x suponiendo que toda serie de Taylor en x representa una función. Muchos textos definen una *función analítica* de una variable x como una función que tiene un desarrollo en serie de Taylor. Aquí, como en la sección 15 de este Cap. III, se presenta el problema de la convergencia de la serie. En los enunciados anteriores se supone que un desarrollo de la serie de Taylor existe si y sólo si tiene un significado en algún segmento $a < x < b$.

Ya hemos visto que los polinomios forman no sólo un anillo con propiedades muy análogas a aquellas del anillo de los enteros, sino también que el conjunto de polinomios puede ampliarse en el conjunto de funciones analíticas de una manera muy análoga a aquella usada cuando se ampliaron los enteros hacia el conjunto de los números reales. Consideraremos más propiedades de los polinomios en nuestro estudio de la teoría de las ecuaciones polinomias en el Capítulo IV.

EJERCICIOS

1. Hacer una lista de diez funciones racionales de x y determinar los valores de x para los cuales cada función está definida (Cap. III-3).
2. Hacer una lista de diez funciones algebraicas y proponer ecuaciones polinomias que satisfagan a cada una de ellas.
3. Hacer una lista de diez funciones trascendentes.

CAPITULO IV

Teoría de las ecuaciones

Hemos estudiado previamente las operaciones, los monomios y las relaciones que se usan en la formación de polinomios. En este capítulo consideraremos ecuaciones $p(x) = 0$ que se obtienen al igualar a cero un polinomio en una variable. Por ejemplo, la ecuación polinomia $x^2 - x - 6 = 0$ se satisface cuando $x = 3$, ó $x = -2$. Esta ecuación establece una condición para la variable y se llama *ecuación condicional*. La ecuación $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ es una identidad (Cap. III - 4) y se satisface para todos los valores numéricos de la variable x. Nos preocuparemos principalmente de los métodos para determinar aquellos números que, al sustituir a x en la ecuación $p(x) = 0$, satisfacen la igualdad. Tales números se llaman *ceros* del polinomio o *raíces* de la ecuación. También suelen llamarse *soluciones* de la ecuación. Los temas que se tratan en este capítulo se han seleccionado con el objeto de preparar al lector para:

(i) encontrar todas las soluciones enteras y racionales de cualquiera ecuación polinomia dada, en una variable, con coeficientes racionales;

(ii) encontrar todas las soluciones de cualquiera ecuación polinomia dada con coeficientes complejos, siempre que sea posible, empleando radicales y las cuatro operaciones racionales.

(iii) determinar en cualquier intervalo dado el número exacto de soluciones reales de cualquiera ecuación polinomia dada con coeficientes reales, y

(iv) aproximar tanto como se desee cualquiera solución real de una ecuación polinomia dada con coeficientes reales.

IV - 1 CEROS DE UN POLINOMIO.

Hemos definido un número b como un cero del polinomio $p(x)$ si y sólo si $p(b) = 0$. Dado cualquier polinomio $p(x)$ y un número b, buscaremos las condiciones necesarias y suficientes para que $p(b) = 0$. Por supuesto que una de estas condiciones se obtendría por sustitución inmediata de b por x en el polinomio para obtener el número $p(b)$ y observar si este número es o no cero. Sin embargo, existe otra condición necesaria y suficiente (Teorema IV - 1) que suele ser mucho más fácil de aplicar (Cap. IV - 2) que la sustitución directa.

Dado un polinomio $p(x)$ y un número b, podemos encontrar por división un polinomio $q(x)$ y una constante R tal que

$$p(x) = (x - b) \cdot q(x) + R, \tag{IV - 1}$$

como lo determina el Algoritmo de la División (Cap. III - 5) para polinomios en una variable. La identidad (IV - 1) da $p(b) = R$ para $x = b$. A veces, se alude a esta relación con el nombre de

TEOREMA DEL RESIDUO. *Si se divide $p(x)$ por $x - b$, el residuo es $p(b)$.*

De la identidad (IV - 1) podemos obtener también el teorema siguiente:

TEOREMA IV - 1. TEOREMA DEL FACTOR: *un polinomio $p(x)$ se hace 0 para $x = b$ si y sólo si es divisible por $x - b$.*

En otras palabras, la ecuación polinomia $p(x) = 0$ tiene una raíz $x = b$ si y sólo si el polinomio $p(x)$ tiene un divisor o factor $x - b$, es decir, si y sólo si $R = 0$ en la identidad (IV - 1). La tarea de encontrar R y $q(x)$ en (IV - 1) suele efectuarse más rápida y fácilmente por medio de una división sintética.

EJERCICIOS

1. Proponer tres ejemplos del Teorema del Residuo en que $p(x)$ tenga por lo menos grado tres.

2. Repetir el Ejercicio 1 para el Teorema del Factor.
3. Proponer cuatro ecuaciones condicionales.
4. Proponer tres ecuaciones que sean identidades.

IV - 2 DIVISION SINTETICA. La división sintética, así como el esquema usado para encontrar el máximo común divisor de dos enteros (Cap. II - 5), proporciona un método elemental y conciso para dar a conocer los resultados de los cálculos algebraicos.

Supongamos que se nos da un número b y un polinomio de grado $n > 0$, por ejemplo,

$$p(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n. \tag{IV - 2}$$

Entonces el polinomio $q(x)$ de (IV - 1) debe tener grado $n - 1$ y por eso debe ser de la forma

$$q(x) = c_0x^{n-1} + c_1x^{n-2} + \dots + c_{n-1},$$

en donde hay que determinar los coeficientes c. La identidad (IV - 1) entonces toma la forma

$$\begin{aligned} b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n = c_0x^n &+ (c_1 - c_0b)x^{n-1} + \dots \\ &+ (c_{n-1} - c_{n-2}b)x + R - c_{n-1}b. \end{aligned} \tag{IV - 3}$$

Si $x = 0$, (IV - 3) toma la forma $b_n = R - c_{n-1}b$. Si estos términos constantes iguales se restan de ambos miembros de (IV - 3) y si se divide por x ambos miembros de la ecuación que resulta, al hacer nuevamente $x = 0$, encontramos que $b_{n-1} = c_{n-1} - c_{n-2}b$. En general, los coeficientes de potencias iguales de x deben ser iguales, y entonces, se tiene

$$\begin{aligned} b_0 &= c_0, \\ b_1 &= c_1 - c_0b, \\ b_2 &= c_2 - c_1b, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ b_{n-1} &= c_{n-1} - c_{n-2}b \\ b_n &= R - c_{n-1}b. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse con respecto a los c de modo que resulte

$$\begin{aligned} c_0 &= b_0, \\ c_1 &= b_1 + c_0 b, \\ c_2 &= b_2 + c_1 b, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ c_{n-1} &= b_{n-1} + c_{n-2} b, \\ R &= b_n + c_{n-1} b, \end{aligned}$$

Y así sucesivamente determinar los coeficientes de $q(x)$ y R.

Las relaciones anteriores pueden expresarse muy concisamente por medio del siguiente esquema, es decir, por *división sintética*.

$$\begin{array}{cccccc|l} b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} & b_n & \underline{\ b\ } \\ 0 & c_0 b & c_1 b & \ldots & c_{n-2} b & c_{n-1} b & \\ \hline c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & & & \end{array}$$

En este esquema la primera fila contiene los coeficientes de $p(x)$ (incluso todos los coeficientes cero); el primer elemento de la segunda fila es cero y cada elemento siguiente es el producto del número b por el elemento de la tercera fila en la columna inmediatamente precedente; cada elemento de la tercera fila es la suma de los elementos de la misma columna que están encima de él. Por ejemplo, si $p(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 10$ y $b = 4$, el esquema anterior sería

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & 7 & -10 & \underline{\ 4\ } \\ 0 & 4 & 4 & 44 & \\ \hline 1 & 1 & 11 & 34 & \end{array}$$

por lo tanto, $q(x) = x^2 + x + 11$ y $R = 34$, es decir, $x^3 - 3x^2 + 7x - 10 = (x - 4)(x^2 + x + 11) + 34$. Dado que el primer elemento, cero, de la segunda fila es siempre el mismo, frecuentemente no se escribe.

El esquema anterior para la división de un polinomio $p(x)$ por un polinomio primitivo lineal $x - b$ puede modificarse para el caso de la división de $p(x)$ por un polinomio de segundo grado o de mayor grado en x. (Ver Bibliografía Nº 47; págs. 56-58). En general, la división sintética es muy útil para comprobar que $p(b) = 0$ en la forma señalada anteriormente; para expresar $p(x)$ en la forma $q(x - b)$, es decir, disminuyendo en b, los valores de los ceros (Cap. III - 8 y Cap. IV - 3); para resolver ecuaciones cúbicas y cuárticas (Cap. IV, Secciones 9 y 10); para calcular una tabla de valores con el objeto de hacer el gráfico de $y = p(x)$; para determinar una cota superior para los ceros de $p(x)$ (Cap. IV-11); y para resolver ecuaciones numéricas (Cap. IV - 13).

EJERCICIOS

1. Sin efectuar la división, encontrar el resto si
a) se divide $x^2 - 5x + 6$ por $x - 4$,
b) se divide $x^3 - 3x^2 + 6x - 5$ por $x - 3$,
c) se divide $x^4 - 3x^2 - 2x - 4$ por $x + 3$.
2. Sin efectuar la división, demostrar que
a) $13x^{10} + 14x^5 + 1$ es divisible por $x + 1$;
b) $2x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x - 8$ es divisible por $x - 2$ y por $x + 2$;
c) $v^4 - 3v^3 + 3v^2 - 3v + 2$ es divisible por $v - 1$ y por $v - 2$;
d) $x^n - 1$ es divisible por $x - 1$.
3. Por medio de la división sintética, encontrar el cuociente y el resto:
a) dividiendo $2x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12$ por $x + 4$;
b) dividiendo $3x^4 - 27x^2 + 14x + 120$ por $x - 6$;
c) dividiendo $x^4 - 4x^3 - 8x + 32$ por $x - 4$.

4. Dado el polinomio $p(x) = x^3 - x^2 - 4x - 6$ que tiene un cero para $x = 3$, encontrar un polinomio cuadrático que tenga como ceros los otros dos ceros de $p(x)$.

5. Por medio de la división sintética escribir cada uno de los siguientes polinomio en la forma (IV-1):
a) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1,$ $\qquad b = 1;$
b) $p(x) = x^6 - x^4 + 2x^2 - 77,$ $\qquad b = -1;$
c) $p(x) = x^5 - 7x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 6,$ $\qquad b = 5;$
d) $p(y) = y^5 + 4y^3 + 2,$ $\qquad b = -3;$
e) $p(y) = y^4 + 1.$ $\qquad b = -2.$

IV - 3 CAMBIO DE VARIABLE.

En el Cap. III-8 demostramos que cualquier polinomio $p(x)$ puede expresarse en la forma $q(x - b)$. En esta sección veremos cómo se puede utilizar la división sintética para encontrar el polinomio $q(x - b)$

cuando se han dado el polinomio $p(x)$ y un número b. En el Cap. III-14, ya se ha tratado un método, mediante la fórmula de Taylor.

Dado un polinomio $p(x)$ de grado m y un número b, podemos expresar $p(x)$ en la forma (Teorema III-4):

$$(\text{IV-4})\quad p(x) = a_0 + a_1(x - b) + a_2(x - b)^2 + \dots + a_m(x - b)^m,$$

en donde hay que determinar los a. Entonces

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - b)[a_1 + a_2(x - b) + \dots + a_m(x - b)^{m-1}] + a_0 \\ &= (x - b) \cdot q_1(x) + a_0, \end{aligned}$$

como en (IV-1). De este modo $a_0 = p(b)$ puede calcularse por división sintética como en el Cap. IV-2. En seguida escribimos

$$\begin{aligned} q_1(x) &= (x - b)\,[a_2 + a_3(x - b) + \dots + a_m(x - b)^{m-2}] + a_1 \\ &= (x - b) \cdot q_2(x) + a_1, \end{aligned}$$

de donde $a_1 = q_1(b)$. Este procedimiento puede continuarse hasta que resulte $a_2 = q_2(b), \dots, a_m = q_m(b)$ y de esta manera determinar completamente los coeficientes a en (IV-4), es decir, determinar completamente $q(x - b) = p(x)$.

Supongamos que $p(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ y que $b = 2$. Podemos usar las primeras tres hileras del siguiente esquema para encontrar

$$q_1(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$$

y $a_0 = -3$. Luego podemos continuar con el mismo esquema por dos hileras más para encontrar $q_2(x) = x^2 + 3x + 4$ y $a_1 = 7$. Análogamente, $q_3(x) = x + 5$, y $a_2 = 14$; $q_4(x) = 1$ y $a_3 = 7$; $a_4 = 1$.

1	−1	−4	3	−1	|2
0	2	2	−4	−2	
1	1	−2	−1	−3	
0	2	6	8		
1	3	4	7		
0	2	10			
1	5	14			
0	2				
1	7				
0					
1					

En general, podemos escribir cualquier polinomio $p(x)$ de grado m como $q(x - b)$ y emplear la división sintética $(m + 1)$ veces para encontrar los coeficientes del nuevo polinomio $q(x - b)$. Es así como la teoría del Cap. III - 8 puede ahora verificarse para cualquier polinomio dado $p(x)$ y para cualquier número dado b. Nótese que esta reducción de los ceros o cambio de variable se lleva a cabo sin hacer ninguna referencia a los valores de los ceros del polinomio.

EJERCICIOS

1. Hacer el Ejercicio 1 del Cap. III-8, empleando el método anterior. Comparar este método con el que se utilizó en las Secciones 8 y 14 del Cap. III.
2. Hacer los Ejercicios 2 y 3 del Cap. III-8, empleando el método ya citado.
3. Escribir $x^6 - 7x^5 + x^4 - 3x^2 + 11$ en la forma $q(x - 2)$.
4. Escribir $x^7 - 1$ en la forma $q(x - 1)$.
5. Escribir $x^7 - 1$ en la forma $q(x + 1)$.
6. Encontrar las ecuaciones cuyas raíces son

a) dos menos que las de $x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0$;

b) una más que las de $x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x + 7 = 0$.

IV - 4 NUMERO DE RAICES.

El aspecto más práctico de este capítulo es el que se refiere a cómo encontrar una o más raíces de una ecuación polinomia. En general, decimos que una ecuación polinomia está *resuelta* cuando se han determinado todas sus raíces. Por eso antes de resolver una ecuación polinomia es conveniente conocer el número total de raíces que se necesitan. Este número puede establecerse de antemano para cualquier polinomio dado con coeficientes complejos. Si el polinomio es una constante b, la ecuación no tiene raíces si $b \neq 0$, y tiene como raíces a todos los números complejos, si $b = 0$. Si el polinomio no es una constante, definiremos el grado de la ecuación polinomia $p(x) = 0$ como el mismo grado de $p(x)$ y obtendremos el

TEOREMA IV - 2 *Toda ecuación polinomia de grado $m > 0$ con coeficientes complejos tiene precisamente m raíces complejas (no necesariamente distintas).*

En la teoría de funciones de una variable compleja se demuestra fácilmente este teorema. No intentaremos dar aquí una demostración completa, ya que ello implica, hasta cierto punto, demostraciones algebraicas. En cambio, daremos por aceptado el siguiente teorema y lo utilizaremos para demostrar el Teorema IV - 2.

TEOREMA IV-3. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA. *Todo polinomio $p(x)$ de grado positivo con coeficientes complejos tiene por lo menos un cero complejo.*

Los teoremas IV - 2 y IV - 3 están estrechamente relacionados con el hecho de que el conjunto de los números complejos es cerrado algebraicamente, como se señaló en la sección optativa Nº 18 del Capítulo I y que figura también como Ejercicio 6 en esa misma sección. Para el caso presente cualquier lector que omitió aquel ejercicio debería consultar otro texto o aceptar el Teorema IV - 3 sin una demostración rigurosa.

Ahora utilizaremos el Teorema IV-3 y demostraremos el Teorema IV - 2. Dado cualquier polinomio $p(x)$ de grado m, podemos, según el Teorema IV - 3, designar uno de sus ceros por el número complejo r_1 y de acuerdo con el Teorema IV - 1, escribir $p(x) = (x - r_1)p_1(x)$, en donde $p_1(x)$ es un polinomio de grado $m - 1$. Los coeficientes de $p_1(x)$ pueden encontrarse por división sintética y expresarse por medio del cero r_1, de los coeficientes de $p(x)$ y de las tres operaciones del anillo (Cap. IV - 2). Por lo tanto, los coeficientes de $p_1(x)$ son números complejos, y el procedimiento anterior puede repetirse para $p_1(x)$ si $m - 1 > 0$. Dado que el grado m de $f(x)$ es finito, este procedimiento puede repetirse sólo un número finito de veces, de donde resulta

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - r_1)p_1(x), \\ p_1(x) &= (x - r_2)p_2(x), \\ p_2(x) &= (x - r_3)p_3(x), \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ p_{m-1}(x) &= (x - r_m)a_0, \end{aligned}$$

y

$$p(x) = a_0\,(x - r_1)\,(x - r_2)\,(x - r_3)\;\ldots\;(x - r_m), \tag{IV-5}$$

en donde a_0 es el coeficiente inicial de $p(x)$.

El Teorema de Factorización Unica establece (Ejercicio 9, Cap.

III-6) que todo factor de $p(x)$ de la forma $x - b$ está contenido en (IV-5). Luego, el Teorema IV-1 establece que los ceros de $p(x)$ son precisamente $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_m$. Esto completa la demostración del Teorema IV-2 mediante el Teorema IV-3. En lo que queda de este capítulo nos dedicaremos principalmente a la determinación de las raíces de ecuaciones polinomias.

EJERCICIOS

Demostrar los siguientes enunciados:

1. Cualquiera ecuación polinomia de la forma $d_0x^m + d_1x^{m-1} + \ldots + d_m = 0$ que tiene más de m raíces distintas es idénticamente nula, es decir, $d_i = 0$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, m$.

2. Si dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ de grado m son iguales para más que m valores distintos de x, los polinomios son idénticos.

3. Si dos ecuaciones polinomias de grado m tienen precisamente las mismas raíces, los polinomios son asociados (Cap. III-4). [Indicación: Considérese $f(x) + kg(x)$, en que k se elige de tal modo que los términos de grado m desaparezcan].

IV-5 DETERMINACION DE LAS RAICES. Hemos visto que toda ecuación polinomia de grado m con coeficientes complejos tiene exactamente m raíces complejas (no necesariamente distintas). Queda aún el problema práctico de encontrar las raíces de una ecuación polinomia dada $p(x) = 0$.

La ecuación general lineal es de la forma $ax + b = 0$, en donde $a \neq 0$. Tiene una raíz única $x = -b/a$. Toda ecuación lineal con coeficientes racionales tiene una raíz racional; toda ecuación lineal con coeficientes complejos (reales o imaginarios) tiene una raíz compleja.

La ecuación general cuadrática es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, en donde $a \neq 0$. Sus dos raíces pueden encontrarse completando el cuadrado del miembro de la izquierda, de la manera siguiente:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a},$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a},$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Las dos raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, en donde $a \neq 0$, entonces son

$$(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/2a \quad \text{y} \quad (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})/2a.$$

El número $b^2 - 4ac$ se denomina el *discriminante* de la ecuación cuadrática. Si se designa respectivamente las dos raíces por r_1 y r_2, se puede verificar fácilmente que ellas satisfacen las relaciones elementales de simetría de los polinomios (Cap. IV-7) $r_1 + r_2 = -b/a$; $r_1 r_2 = c/a$. Si los coeficientes son números reales, tenemos

TEOREMA IV-4. *Una ecuación cuadrática con coeficientes reales tiene dos raíces que son reales y desiguales, reales e iguales, o conjugadas imaginarias según que el discriminante sea positivo, cero o negativo.*

Las raíces de las ecuaciones cúbica general (Cap. IV - 9) y de cuarto grado (Cap. IV-10) pueden expresarse por medio de los coeficientes, empleando las cuatro operaciones fundamentales y radicales. La ecuación general de grado m, $m > 4$, no puede resolverse por medio de los coeficientes, utilizando las cuatro operaciones fundamentales y los radicales. Este resultado negativo puede probarse gracias a la obra de Evariste Galois en la teoría de los grupos. Lillian Lieber ha escrito un folleto muy interesante y ameno (Bibliografía Nº 32) donde señala este resultado y otras aplicaciones de las teorías de Galois.

El valor aproximado o la posición gráfica de los ceros reales de un polinomio $p(x)$ suele determinarse gracias a la continuidad de $p(x)$. Según el Ejercicio 4, Cap. III-13, todo polinomio en la variable real continua x es continuo para todos los valores finitos de x. Por eso (Ejercicio 5, Cap. III-13), si existen números reales a y b, $a < b$, tales que $p(a) \cdot p(b) < 0$, existe un número real c, $a < c < b$, tal que $p(c) = 0$. Además, puesto que $p(x)$ tiene el signo de su coeficiente inicial (Cap. III-1) para valores positivos de x suficientemente grandes, toda ecuación polinomia real de grado impar y coeficiente inicial positivo tiene, por lo menos, una raíz real de signo opuesto a su último término; toda ecuación polinomia real de grado par cuyo coeficiente inicial y término constante tengan signos opuestos, tiene, por lo menos, una raíz positiva y, por lo menos, una raíz negativa.

Consideraremos otros métodos en la Sección 14 de este Cap. IV, pero examinaremos primero, algo más, algunas de las relaciones entre los coeficientes y las raíces.

EJERCICIOS

Describir las raíces de las ecuaciones de los Ejercicios 1 a 7:

1. $5x - 17 = 0.$
2. $ix + 7i + 5 = 0$
3. $x^2 - 3x + 7 = 0$
4. $2x^3 - 7x + 35 = 0$
5. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3.$
6. $5x^2 - 3x - 2 = 0$
7. $x^2 + 2x + 7 = x(x + 2).$

8. Formar una ecuación cuadrática con raíces cuya suma es 3 y cuyo producto es 5. ¿Hay una respuesta única?

9. Encontrar la suma y el producto de las raíces de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
b) $2x^2 - 3x + 5 = 0$
c) $3x^2 + 4x - 7 = 0.$

10. Describir (sin calcularlas) las raíces de las ecuaciones del Ejercicio 9.

IV-6 RAICES IMAGINARIAS CONJUGADAS.

Demostraremos el siguiente teorema:

TEOREMA IV-5. *Las raíces imaginarias de una ecuación polinomia con coeficientes reales se presentan en pares.*

Sea $p(z)$ un polinomio con coeficientes reales y supongamos que $p(w) = 0$, en que $w = a + bi$; a, b sean reales; $b \neq 0$. Demostraremos que $p(\bar{w}) = 0$ en donde $\bar{w} = a - bi$. El polinomio cuadrático

$$(z - w)(z - \bar{w}) = z^2 - 2az + a^2 + b^2$$

puede usarse con $p(z)$ en el Algoritmo de la División (Cap. III-5) para obtener:

$$p(z) = [z^2 - 2az + a^2 + b^2] \cdot g(z) + sz + t$$

en donde $g(z)$ es un polinomio. En $z = w$ tenemos $p(w) = 0 = 0 + sw + t$ o, por medio de $w = a + bi$, $0 = sa + sbi + t$. Igualando las partes real e imaginaria de esta ecuación resulta $sa + t = 0$ y $sb = 0$, de donde $s = 0$ y $t = 0$, dado que $b \neq 0$. Luego $p(z) = (z - w)(z - \bar{w}) \cdot g(z)$; $p(\bar{w}) = 0$, y queda demostrado completamente el Teorema IV-5.

En el Cap. IV-4 vimos que todo polinomio $p(x)$ de grado m con coeficientes complejos tiene m raíces complejas. Esto implica que $p(x)$ podría escribirse como un producto de m factores lineales con coeficientes complejos (IV-5). En otras palabras, todo polinomio irreducible cuyos factores puedan tener coeficientes complejos arbitrarios, es lineal. El Teorema IV-5 y el hecho de que $(z - w)(z - \bar{w})$ sea un polinomio cuadrático con coeficientes reales implica ahora que todo polinomio irreductible cuyos factores puedan tener coeficientes reales arbitrarios es cuadrático o lineal. Un polinomio de cualquier grado m puede ser irreductible cuando los factores tienen coeficientes enteros o racionales. Por ejemplo, $x^m - 2$ para cualquier entero positivo m no tiene factores de grado menor que m con coeficientes racionales.

La solución de una ecuación polinomia y la factorización del polinomio en factores irreducibles son, por lo tanto, equivalentes, en el sentido del Teorema IV-1, sólo cuando los coeficientes de los factores pueden ser números complejos arbitrarios. En realidad, el conjunto de números complejos algebraicos es suficiente, como se señaló en el Cap. I-18.

EJERCICIOS

1. Demostrar que las raíces cuadráticas irracionales $a + \sqrt{b}$ de una ecuación polinomía con coeficientes racionales se presentan en pares conjugados.

2. Formar una ecuación racional cúbica, dadas dos de sus raíces: 1 y $3 - 2\sqrt{-1}$.

3. Formar una ecuación real de cuarto grado dadas dos de sus raíces: $1 + 5\sqrt{-1}$ y $5 - \sqrt{-1}$.

4. Dada la raíz $x = \sqrt{2}$ de $x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = 0$, encontrar las otras dos raíces.

5. Dada la raíz $i/\sqrt{2}$ de $2z^4 - 12z^3 + 19z^2 - 6z + 9 = 0$, encontrar las otras tres raíces.

IV-7 POLINOMIOS ELEMENTALES SIMETRICOS.

Hemos visto que cualquiera ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos raíces r, s que satisfacen las relaciones $r + s = -b/a$; $rs = c/a$ (Cap. IV-5). En general, si $p(x)$ es un polinomio de grado m con coeficientes complejos: los polinomios en los ceros de $p(x)$ que resultan de sumar todos los ceros de $p(x)$; la suma de todos los productos de pares de ceros de $p(x)$; la suma de todos los productos de triples de ceros de $p(x)$; . . .; el producto de todos los ceros de $p(x)$, pueden expresarse racionalmente por medio de los coeficientes de $p(x)$. Estos polinomios en los ceros de un polinomio $p(x)$ se denominan *polinomios elementales simétricos.*

Dado que pueden considerarse como ceros de un polinomio de grado m, a m números cualesquiera, podemos examinar los polinomios simétricos elementales de m números dados cualesquiera. Por ejemplo, los números 1, 2, 3 son ceros del polinomio $p(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Los polinomios elementales simétricos de estos números o de los ceros de $p(x)$ pueden expresarse por medio de los coeficientes de $p(x)$ como sigue: $1 + 2 + 3 = 6$, el coeficiente de x^2 con el signo contrario; $1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 11$, o sea, el coeficiente de x; y $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, o sea, el término constante de $p(x)$ con el signo contrario. En general, cuando el conjunto de coeficientes posibles forma un campo, podemos dividir cualquier polinomio $p(x)$ de grado m por su coeficiente inicial para obtener un polinomio primitivo que tiene los mismos ceros que $p(x)$. En el polinomio primitivo la suma de los m ceros es igual al coeficiente de x^{m-1} con el signo contrario; la suma de los productos de los ceros en pares es igual al coeficiente de x^{m-2}; . . .; el producto de los ceros es igual al término constante multiplicado por $(-1)^m$.

Estos resultados generales pueden obtenerse por medio del desarrollo (IV-5) de $p(x)$:

$$p(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdots (x - r_m).$$

Luego:

$$\begin{aligned} p(x) = a_0[x^m &- (r_1 + r_2 + \cdots + r_m)x^{m-1} \\ &+ (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 + \cdots + r_{m-1}r_m)x^{m-2} - \cdots \\ &+ (-1)^m r_1r_2 \ldots r_m] \\ = a_0[x^m &- S_1x^{m-1} + S_2x^{m-2} - S_3x^{m-3} + \cdots + (-1)^m S_m], \end{aligned}$$

en donde S_j es el polinomio elemental simétrico de grado j, es decir,

$$
\begin{aligned}
S_1 &= r_1 + r_2 + \ldots + r_m = \Sigma r_i,\\
S_2 &= r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 + r_1r_4 + \ldots + r_{m-1}r_m = \Sigma r_ir_j,\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
S_j &= \Sigma r_{i1}r_{i2} \ldots r_{ij},\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
S_m &= r_1r_2r_3 \ldots r_m.
\end{aligned}
$$

Dado un polinomio cualquiera de grado m, podemos obtener un polinomio primitivo correspondiente en el que la suma de los ceros es igual al coeficiente de x^{m-1} con el signo contrario; el producto de los ceros es $(-1)^m$ veces el término constante; y, en general, S_k es $(-1)^k$ veces el coeficiente de x^{m-k}. Por ejemplo, si $p(x) = (x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$ con raíces $-1, 1, -2, 2$, entonces $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$, en donde el coeficiente principal es la unidad, el coeficiente de x^3 es $0 = -[(-1) + 1 + (-2) + 2]$, el coeficiente de x^2 es:
$-5 = (-1) \cdot 1 + (-1)(-2) + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 2$; el coeficiente de x es:
$0 = -[(-1) \cdot 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \cdot 2 + (-1)(-2) \cdot 2 + 1 \; (-2) \cdot 2]$ y el término constante es $4 = (-1) \cdot 1 \cdot (-2) \cdot 2$.

Los polinomios elementales simétricos S_j pueden utilizarse para resolver ecuaciones polinomias cuando se conoce alguna relación adicional entre las raíces. Por ejemplo, si se conoce que dos de las raíces de la ecuación $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ son iguales, entonces las tres raíces pueden representarse por r, r, y s. Los polinomios elementales simétricos se aprovechan, en seguida, para completar la solución de la ecuación. Utilizando S_1 y S_2, tenemos $2r + s = 4$ y $2rs + r^2 = 5$. Estas dos ecuaciones pueden resolverse simultáneamente sustituyendo en la cuadrática, un valor de la lineal y resulta $2r(4 - 2r) + r^2 = 5$; $3r^2 - 8r + 5 = 0$, de donde $r = 1$ y $s = 2$; o bien $r = \frac{5}{3}$ y $s = \frac{2}{3}$. El segundo par de valores no proporciona el valor correcto para S_3 ya que debemos obtener $r^2s = 2$, y por eso la ecuación dada tiene las raíces 1, 2, y 2.

Cuando no se sabe nada sobre las raíces de una ecuación polinomia, excepto que son raíces de $p(x) = 0$, el empleo de polinomios elementales simétricos conduce meramente a otra ecuación que es esencialmente equivalente a $p(x) = 0$. Por ejemplo, supongamos que $x^2 + bx + c = 0$ tiene raíces r y s. Entonces $r + s = -b$; $rs = c$, y, por sustitución, $r(-b-r) = c$, o bien $r^2 + br + c = 0$.

Los siguientes ejercicios comprenden varias aplicaciones de los resultados anteriores. En la sección siguiente de este capítulo, consideraremos otras aplicaciones importantes de los polinomios elementales simétricos.

EJERCICIOS

1. Sin valerse de factores lineales, encontrar:
   a) una ecuación cúbica que tenga las raíces 1, 2, 3;
   b) una ecuación cúbica que tenga las raíces 0, -2, 2;
   c) una ecuación de cuarto grado que tenga las raíces 2, 2, -2, -2.
2. Dado $x^4 + 14x^3 + 73x^2 + 168x + 144 = 0$, que tiene dos raíces dobles, encontrar las raíces.
3. Dado $x^3 - 27x^2 + 242x - 720 = 0$, que tiene una raíz igual a la mitad de la suma de las otras dos, encontrar las raíces.
4. Dado $x^3 + 7x^2 - 6x - 72 = 0$, que tiene dos raíces en la razón de 3 es a 2, encontrar las tres raíces.
5. Si una de las raíces de las ecuaciones siguientes es la negativa de la otra, resolver:
   a) $4x^3 - 12x^2 - 25x + 75 = 0$;
   b) $4x^3 - 16x^2 - 9x + 36 = 0$.
6. ¿Qué relaciones deben existir entre los coeficientes de una ecuación general de segundo grado si una raíz es el doble de la otra?
7. Resolver $x^3 + 7x^2 - 21x - 27 = 0$, si se sabe que sus raíces están en progresión geométrica.
8. Resolver $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$, si se sabe que sus raíces están en progresión aritmética.

IV-8 TRANSFORMACIONES DE RAICES. Esta sección es, principalmente, una ampliación de las secciones Cap. III - 8 y Cap. IV - 3. En Cap. III - 8 encontramos que cualquier polinomio $p(x)$ podía expresarse teóricamente en la forma $q(ax + b)$, en donde $a \neq 0$. En el Cap. IV-3 empleamos la división sintética para obtener el nuevo polinomio en el caso especial de que $a = 1$. En esta parte del Cap. IV nos valdremos de los polinomios elementales simétricos para obtener el nuevo polinomio $q(ax + b)$ para cualquier $a \neq 0$, es decir, dado un polinomio $p(x)$ con ceros r_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ encontraremos un polinomio $q(y)$ con ceros $ar_j + b$ para números cualesquiera $a \neq 0$ y b.

Cualquier polinomio con coeficientes pertenecientes a un campo y ceros $r_1, r_2, \ldots, r_m$ tiene un polinomio asociado de la forma $p(x) = x^m - S_1x^{m-1} + S_2x^{m-2} + \ldots + (-1)^j S_j x^{m-j} + \ldots + (-1)^m S_m$, en que los S_j son los polinomios elementales simétricos de grado j (Cap. IV-7). Si multiplicamos cada r_j por un número k, entonces

$$kr_1 + kr_2 + \cdots + kr_m = k(r_1 + r_2 + \cdots + r_m) = kS_1,$$
$$(kr_1)(kr_2) + (kr_1)(kr_3) + (kr_2)(kr_3) + \cdots + (kr_{m-1})(kr_m) = k^2S_2,$$
$$\vdots$$
$$(kr_1)(kr_2)(kr_3)\cdots(kr_m) = k^mS_m.$$

Es así como la multiplicación de los ceros de $p(x)$ por k da como resultado la multiplicación del polinomio elemental simétrico S_j por k^j. A la inversa, si multiplicamos S_j por k^j obtenemos un nuevo polinomio que tiene exactamente tantos ceros como sean k veces los ceros de $p(x)$. Por ejemplo, $x^2 - 4x + 3$ tiene los ceros 1 y 3, en que $S_1 = 4$ y $S_2 = 3$. Si formamos un nuevo polinomio, valiéndonos de $2S_1 = 8$ y $2^2S_2 = 12$ como los nuevos polinomios simétricos elementales, obtenemos $q(y) = y^2 - 8y + 12$ con ceros 2 y 6. En general, tenemos,

TEOREMA IV-6. *Dado un polinomio $p(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$ y un número k, podemos inmediatamente escribir un polinomio $q(y) = a_0y^m + a_1ky^{m-1} + a_2k^2y^{m-2} + \ldots + a_mk^m$ con tantos ceros como sea el producto de k por los ceros de $p(x)$.*

En el Teorema siguiente, IV-7, discutiremos un procedimiento para obtener un polinomio con ceros que sean los recíprocos de los ceros de un polinomio dado. Por ejemplo, dado el polinomio $x^2 - x - 6$ con ceros 3 y -2, podemos, según el Teorema IV-7, obtener $1 - x - 6x^2$ con ceros $\frac{1}{3}$ y $-\frac{1}{2}$. En relación con este teorema es necesario tener en cuenta que un polinomio adquiere una raíz infinita (que se designa por $a/0$ en donde $a \neq 0$) cada vez que su coeficiente principal se hace cero. Esta convención es consistente con el resultado obtenido por medio de los límites (Cap. III-11), dado que, por lo menos, un cero de $p(x)$ crece indefinidamente a medida que el coeficiente principal de $p(x)$ tiende a cero. Según la convención anterior para las raíces infinitas, resulta:

TEOREMA IV-7. *Dado un polinomio* $p(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$, *podemos inmediatamente escribir un polinomio* $h(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + \ldots + a_mu^m$ *cuyos ceros son los recíprocos de los ceros de* $p(x)$.

El asunto de las raíces infinitas del que hemos hablado anteriormente surge, por ejemplo, cuando hacemos $p(x) = x^2 - x$ con raíces 1 y 0 aplicamos el teorema anterior para obtener $h(u) = 0 \cdot u^2 - u + 1$ cuyos ceros son 1 y $\frac{1}{0}$. La demostración del Teorema IV-7, la dejaremos como ejercicio (Ejercicio 6).

Después de esto, podemos efectuar tres transformaciones en los ceros de cualquier polinomio dado $p(x)$ con ceros $r_1, r_2, \ldots, r_m$. Podemos encontrar $f(v)$ con ceros $r_j - b$ (Cap. IV-3); $q(y)$ con ceros ar_j $(a \neq 0)$ (Teorema IV-6); y $h(u)$ con ceros $1/r_j$ (Teorema IV-7). Estas tres transformaciones son suficientes para demostrar el siguiente teorema:

TEOREMA IV-8. *Dado un polinomio* $p(x)$ *con coeficientes complejos y ceros* r_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$, *podemos obtener un polinomio* $q(y)$ *con ceros* $s_j = (ar_j + b)/(cr_j + d)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ *en que* a, b, c, d *sean números complejos cualesquiera tales que* $ad - bc \neq 0$, *por medio de únicamente los coeficientes de* $p(x)$ *y las cuatro operaciones fundamentales.*

La condición $ad - bc \neq 0$, hace posible expresar r_j (Ejercicio 7, Cap. III-10) racionalmente en función de s_j, $r_j = (a's_j + b')/(c's_j + d')$, es decir efectuar cualquiera transformación lineal biracional en los ceros de un polinomio dado $p(x)$.

Dividiremos la demostración del Teorema IV-8 en dos casos. Si $c = 0$, utilizaremos las dos transformaciones sucesivas $t_1 = ax/d$; $y = t_1 + b/d$. Si $c \neq 0$, usaremos las cinco transformaciones $t_1 = cx$;

$$t_2 = t_1 + d = cx + d; \qquad t_3 = 1/t_2 = 1/(cx + d);$$
$$t_4 = (b - ad/c)t_3 = (bc - ad)/[c(cx + d)];$$

$y = t_4 + a/c = (ax + b)/(cx + d)$. Dado que cada una de estas transformaciones es alguna de las tres formas que podemos efectuar, queda, pues, demostrado completamente el Teorema IV - 8.

Una de las aplicaciones más útiles de los polinomios elementales simétricos se expresa en el siguiente teorema, que demostraremos por medio de transformaciones de las raíces, de una ecuación polinomia.

TEOREMA IV-9. *Toda raíz racional de una ecuación polinomia* $a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} \ldots + a_m = 0$ *con coeficientes enteros, puede expresarse en la forma* b_m/b_0, *en que* $(b_m, b_0) = 1$, b_m *es divisor de* a_m *y* b_0 *es divisor de* a_0.

Este teorema se presta para encontrar todas las raíces racionales de cualquiera ecuación polinomia dada con coeficientes enteros en un número finito de etapas. Nos permite emplear cuando más la fórmula cuadrática para resolver completamente cualquiera ecuación polinomia con coeficientes enteros y que tengan a lo sumo dos raíces no racionales. Por ejemplo, las únicas raíces racionales posibles de $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ son 1 y -1. Estas pueden comprobarse por sustitución o por división sintética. En seguida, la ecuación polinomia dada puede expresarse como $(x - 1)\ (x^2 + 1) = 0$, de donde sus raíces son 1, i, $-i$.

Tal como se señaló anteriormente, el Teorema IV-9, puede demostrarse por medio de transformaciones de raíces. Supongamos que $p(x) = 0$ tenga una raíz racional b_m/b_0. Podemos suponer que $(b_m, b_0) = 1$. Si aplicamos el Teorema IV-6 y multiplicamos las raíces de $p(x) = 0$ por b_0, entonces S_m y $b_0{}^m a_m/a_0$ tienen el mismo valor numérico, la raíz b_m debe ser divisor de S_m y por lo tanto b_m debe ser divisor de $b_0{}^m a_m$. Puesto que $(b_m, b_0) = 1$, b_m es divisor de a_m según el Teorema II-9. Análogamente, b_0 es divisor de a_0, según el Teorema IV-7 (Ejercicio 10). Dado que cualquier polinomio con coeficientes racionales tiene un polinomio asociado con coeficientes enteros, el Teorema IV-9 puede también utilizarse para encontrar todas las raíces racionales de cualquiera ecuación polinomia con coeficientes racionales.

Los polinomios elementales simétricos tienen una considerable importancia teórica, aparte de las aplicaciones citadas en las transformaciones de los ceros de los polinomios y en la solución de ecuaciones polinomias con coeficientes racionales. Los polinomios elementales simétricos en las raíces de una ecuación polinomia pueden siempre expresarse racionalmente por medio de los coeficientes del polinomio original.

Se dice que un polinomio $p(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ es simétrico si permanece invariable al efectuar todos los cambios posible de r_j y r_i. Por ejemplo, $x + y$; xy; $x^2 + y^2$; $xy - x - y$; y $x^3 - xy + y^3 - 2$

son polinomios simétricos en x e y. Se puede probar (ver Bibliografía Nº 49; pág. 264) que todo polinomio simétrico en los ceros de un polinomio $p(x)$ es un polinomio en los polinomios elementales simétricos y por lo tanto puede expresarse racionalmente por medio de los coeficientes de $p(x)$. Ejemplos de esta propiedad son los Ejercicios 14 y 15.

El tema de los polinomios simétricos o funciones simétricas se encuentra tratado extensamente en muchos textos sobre teoría de las ecuaciones. Concluiremos nuestra breve discusión de esta materia con los ejercicios que siguen. En las dos secciones siguientes, que son optativas, volveremos al problema de resolver ecuaciones y en particular a la resolución de ecuaciones cúbicas y de cuarto grado. Después de eso examinaremos métodos para determinar el número de raíces reales de una ecuación polinomia.

EJERCICIOS

1. Dado $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ con raíces 1, -2, 3, encontrar una ecuación polinomia con raíces -1, 2, -3.

2. Generalizar el método empleado en el Ejercicio 1 y proponer un procedimiento para encontrar una ecuación polinomia $q(y) = 0$ con raíces $-r_j$ correspondientes a cualquier $p(x) = 0$ dado con raíces r_j.

3. Dado un polinomio $p(x)$, demostrar el Teorema IV-6, resolviendo la relación $y = kx$ para x y sustituyendo este valor en $p(x)$.

4. Encontrar un polinomio $q(y)$, cuyos ceros sean iguales a tres veces los ceros de

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1 .$$

Escríbase primero la respuesta de acuerdo con el Teorema IV-6 y en seguida compruébese esta respuesta por el método dado en el Ejercicio 3.

5. Encontrar un polinomio $q(y)$, cuyos ceros sean -2 veces los ceros de $p(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 1$.
Emplear el mismo procedimiento que en el Ejercicio 4.

6. Demostrar el Teorema IV-7, por medio de polinomios simétricos.

7. Formular de nuevo y transformar el Ejercicio 3, según el Teorema IV-7.

8. Escribir un polinomio con ceros que sean los recíprocos de los ceros del polinomio $p(x)$ dado en el Ejercicio 5. Comprobar esta respuesta por el método dado en el Ejercicio 7.

9. Formular de nuevo y transformar el Ejercicio 3, según el Teorema IV-8

10. Demostrar que b_n es divisor de a_0 en el Teorema IV-9.

11. Encontrar las raíces racionales, y luego resolver completamente:

   a) $2y^3 - y^2 - 4y + 2 = 0$;

   b) $2x^4 - 12x^3 + 19x^2 - 6x + 9 = 0$.

12. Encontrar todas las raíces racionales de:

a) $3y^4 - 40y^3 + 130y^2 - 120y + 27 = 0$;

b) $3y^3 - 2y^2 + 9y - 6 = 0$;

c) $108y^3 - 270y^2 - 42y + 1 = 0$;

d) $24y^3 - 2y^2 - 5y + 1 = 0$.

13. Encontrar las raíces enteras de las ecuaciones:

(a) $x^4 + 6x^3 + x^2 - 24x - 20 = 0$;

(b) $x^4 + 11x^3 + 41x^2 + 61x + 30 = 0$.

14. Dada una ecuación cúbica $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, con raíces, r, s, t, encontrar una fórmula para la función simétrica $r^2 + s^2 + t^2$ por medio de los coeficientes de la ecuación dada. Escribir nuevamente esta fórmula valiéndose de los polinomios elementales simétricos S_1, S_2, y S_3.

15. Dada una ecuación cuadrática $x^2 + px + q = 0$ con raíces r y s, expresar los polinomios simétricos siguientes como polinomios en los polinomios elementales simétricos:

a) $r^2 + s^2$;

b) $r - rs + s$;

c) $r^2 - rs + s^2 - 2$;

d) $r(r^2 + s - r) + s(s^2 + r - s)$.

*IV.-9 ECUACIONES CUBICAS.

En el Cap. IV-5 dejamos establecido que las ecuaciones generales polinomias de grado 1, 2, 3 y 4 podían resolverse por medio de las cuatro operaciones fundamentales (adición, sustracción, multiplicación y división) y de los radicales. En el Cap. IV-5 se trataron las ecuaciones lineales y cuadráticas; las ecuaciones cúbicas se tratarán en esta sección; y las ecuaciones de cuarto grado en la sección siguiente. Como se hacía notar en el Cap. IV-5, no existe ningún método análogo para resolver ecuaciones generales de grado mayor que cuatro. Podemos resolver cualquier ecuación polinomia dada con coeficientes enteros que tenga a lo sumo cuatro raíces no racionales, cualquiera que sea el grado de la ecuación (Cap. IV-8). También podemos resolver ciertas ecuaciones de grado mayor que cuatro (Cap. IV-13). Sin embargo, aún no podemos resolver por medio de un número finito de operaciones racionales y de radicales una ecuación general $a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m = 0$ en que m sea mayor que cuatro.

Basaremos nuestro método de resolver ecuaciones cúbicas y de cuarto grado sobre las transformaciones de las raíces (Cap. IV-8). Ensayemos primeramente este método en la ecuación cuadrática general. La ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ con raíces r_1, r_2, pudo haberse resuelto haciendo dos transformaciones en las raíces r_1, r_2. La ecuación $g(y) = y^2 + 2by + 4ac = 0$ tiene raíces $2ar_i$, según el Teorema IV - 6. Esto es análogo a la derivación previa de las raíces, pues el coeficiente inicial es ahora 1, y nos disponemos en seguida a dividir el coeficiente del término lineal por 2. Dado que la suma de las raíces de $g(y)$ es $-2b$, disminuimos las raíces en $-b$ para obtener una nueva ecuación sin término lineal, que por este motivo pueda resolverse factorizándose como la diferencia de dos cuadrados. La nueva ecuación puede determinarse por división sintética (Cap. IV - 3).

$$
\begin{array}{lll l}
1 & 2b & 4ac & \underline{|-b} \\
0 & -b & -b^2 & \\
\hline
1 & b & 4ac - b^2 & \\
0 & -b & & \\
\cline{1-2}
1 & 0 & & \\
0 & & & \\
\cline{1-1}
1 & & &
\end{array}
$$

y resulta $z^2 + (4ac - b^2) = 0$ con raíces s_1, s_2, en que $s_i = 2ar_i + b$. Luego $s_i = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ y la relación $r_i = (s_i - b)/2a$ proporciona las raíces r_i en la forma acostumbrada. Se puede utilizar un procedimiento análogo para facilitar la resolución de ecuaciones cúbicas y de cuarto grado.

Sea la ecuación general cúbica

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a \neq 0$$

y sean r_1, r_2, r_3 sus raíces. Para obtener el coeficiente inicial 1 y para que la suma de las raíces sea fácilmente divisible por 3, aplicamos el Teorema IV - 6 para obtener, después de dividir por a,

$$g(y) = y^3 + 3by^2 + 9acy + 27a^2d = 0$$

con raíces $3ar_i$. Como anteriormente, disminuimos las raíces en $-b$, por medio de la división sintética,

$$
\begin{array}{llll l}
1 & 3b & 9ac & 27a^2d & \underline{|-b} \\
0 & -b & -2b^2 & 2b^3 - 9abc & \\
\hline
1 & 2b & 9ac - 2b^2 & 2b^3 - 9abc + 27a^2d & \\
0 & -b & \quad - b^2 & & \\
\cline{1-3}
1 & b & 9ac - 3b^2 & & \\
0 & -b & & & \\
\cline{1-2}
1 & 0 & & & \\
0 & & & & \\
\cline{1-1}
1 & & & &
\end{array}
$$

para obtener

$$h(z) = z^3 + (9ac - 3b^2)z + (2b^3 - 9abc + 27a^2d) = 0.$$

Esta ecuación se llama *cúbica reducida*. La escribiremos nuevamente en la forma

$$z^3 + pz + q = 0,$$

en donde $p = 9ac - 3b^2$ y $q = 2b^3 - 9abc + 27a^2d$.

Hay dos procedimientos muy conocidos para continuar con la resolución de la ecuación cúbica. Podemos reducir el problema a una forma más sencilla mediante una nueva transformación $z = t - p/3t$ (Bibliografía Nº 47; pág. 105); o bien podemos simplificarla de otra manera por medio de la sustitución $z = u + v$ (Bibliografía Nº 49; pág. 85). Consideremos el segundo método. Reemplazamos la única variable z por dos variables u, v. Puede ser necesario que estas dos variables satisfagan otra condición que elegiremos dentro de poco. Por medio de la sustitución, la ecuación cúbica reducida, tiene la forma

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + b) + q = 0.$$

Elegiremos ahora $3uv + p = 0$ como la nueva condición para las nuevas variables u, v, de modo que la ecuación anterior tenga la forma

$$u^3 + v^3 + q = 0$$

Luego la resolución de la ecuación cúbica reducida es equivalente a la resolución simultánea de $u^3 + v^3 = -q$ y $uv = -p/3$. El cubo de la última ecuación es $u^3v^3 = -p^3/27$. De este modo u^3 y v^3 son dos variables cuya suma es $-q$ y cuyo producto es $-p^3/27$, es decir, son las dos raíces de

$$t^2 + qt - p^3/27 = 0. \qquad \text{(IV - 6)}$$

Por lo tanto, podemos elegir

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = A,$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = B.$$

Los valores posibles de u son $\sqrt[3]{A}$, $\omega\sqrt[3]{A}$, $\omega^2\sqrt[3]{A}$, y los valores de v son $\sqrt[3]{B}$, $\omega\sqrt[3]{B}$, $\omega^2\sqrt[3]{B}$, , en que ω es una raíz cúbica primitiva de la unidad (Cap. I - 17). Ya que por hipótesis $uv = -p/3$, estos valores deben asociarse en pares como sigue:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt[3]{A}, & v_1 &= \sqrt[3]{B}, \\ u_2 &= \omega\sqrt[3]{A}, & v_2 &= \omega^2\sqrt[3]{B}, \\ u_3 &= \omega^2\sqrt[3]{A}, & v_3 &= \omega\sqrt[3]{B}. \end{aligned}$$

Luego, volviendo atrás, vemos que las raíces r_j de la ecuación original deben estar dadas por $r_j = (u_j + v_j - b)/3a$ ($j = 1, 2, 3$). Estas fórmulas para las raíces de una ecuación cúbica se conocen como las *fórmulas de Cardán.*

Es así como hemos empleado números complejos y radicales para expresar las raíces de una ecuación cúbica general por medio de sus coeficientes. La ecuación cúbica tiene una raíz real y dos conjugadas imaginarias, si (IV - 6) tiene raíces reales distintas; tiene tres raíces reales de las cuales por lo menos dos son iguales si (IV - 6) tiene raíces iguales; tiene tres raíces reales distintas si (IV - 6) tiene raíces imaginarias. En la mayoría de los textos sobre teoría de las ecuaciones se estudian estos casos y los métodos especiales para proceder en los diversos tipos de ecuaciones cúbicas. En particular, cuando la ecuación cúbica tiene coeficientes reales y tres raíces reales distintas, suele ser conveniente expresar las raíces como funciones reales de los coeficientes por medio de funciones trigonométricas. Este método es especialmente útil si la ecuación cúbica tiene coeficientes racionales y tres raíces irracionales, ya que en este caso (Bibliografía Nº 49; págs. 91-92) no es posible expresar ninguna raíz por medio de radicales reales y no es posible obtener las raíces por medio de las fórmulas de Cardán empleando operaciones racionales.

Apliquemos la teoría citada a una ecuación cúbica, por ejemplo, $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$, que podamos también resolver por los métodos del Cap. IV - 8. Esta ecuación tiene las raíces 1, i, $-i$. Por eso, el uso de las fórmulas de Cardán aquí se convierte simplemente en una ilustración del método para esta ecuación cúbica particular. Primero multiplicamos las raíces por $3a = 3$ y obtenemos $g(y) = y^3 - 3y^2 + 9y - 27 = 0$. En seguida disminuimos las raíces en $-b = 1$, por medio de la división sintética, y obtenemos $h(z) = z^3 + 6z - 20$. Hacemos, en seguida, $z = u + v$, en que $uv = -\frac{6}{3}$

$= -2$. Entonces, $u^3v^3 = -8$ y, por sustitución, en $h(z)$, $u^3 + v^3 = 20$. Estos polinomios elementales simétricos en u^3 y v^3 pueden usarse para formar una ecuación cuadrática $t^2 - 20t - 8 = 0$ que tiene como raíces u^3 y v^3. Dado que las raíces son $10 \pm 6\sqrt{3}$, podemos elegir $u^3 = 10 + 6\sqrt{3}$ y $v^3 = 10 - 6\sqrt{3}$. Gracias a este método sabemos ahora que la ecuación dada tiene una raíz real y dos raíces imaginarias conjugadas. Luego, por medio $\omega = (-1 + i\sqrt{3})/2$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}, & v_1 &= \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}},\\
u_2 &= [(-1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}]/2, & v_2 &= [(-1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}]/2,\\
u_3 &= [(-1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}]/2, & v_3 &= [(-1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}]/2.
\end{aligned}
$$

Finalmente, por medio de $r_j = (u_j + v_j + 1)/3$ y muchas simplificaciones aritméticas, se obtiene $r_1 = 1$, $r_2 = i$, $r_3 = -i$. La ecuación cúbica en referencia, puede también resolverse tomando en cuenta raíces racionales. Las fórmulas de Cardán proporcionan el mismo resultado que los otros métodos, pero exigen más trabajo. Recurriremos a las fórmulas únicamente cuando los otros métodos no sirvan. Su importancia reside en que proporcionan un método seguro, aunque tedioso, para expresar las raíces de cualquiera ecuación cúbica con coeficientes complejos por medio de radicales.

EJERCICIOS

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0$
2. $x^3 + 2x + 20 = 0$
3. $x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 0$
4. $24y^3 - 2y^2 - 5y + 1 = 0$

***IV-10 ECUACIONES DE CUARTO GRADO.** Ahora consideraremos la resolución de ecuaciones polinomias de cuarto grado. Como en el caso de las ecuaciones cúbicas, nuestro método se basará sobre transformaciones de las raíces. También como en el caso de las ecuaciones cúbicas, emplearemos este método sólo cuando no sea posible aplicar otros métodos, tales como encontrar las raíces racionales (Cap. IV-8) y encontrar las raíces múltiples (Cap. IV-13).

Sea la ecuación general de cuarto grado

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \qquad a \neq 0$$

y sean sus raíces r_j $(j = 1, 2, 3, 4)$. El primer método para resolver las ecuaciones de cuarto grado fue descubierto por Ferrari, un alumno de Cardán. Uspensky (Bibliografía Nº 49; págs. 94-97) presenta una discusión amena y completa del método de Ferrari. Nosotros usaremos el método de Descartes (Bibliografía Nº 47; págs. 114-117). Se multiplican primero las raíces por $4a$ y se divide la nueva ecuación por a para obtener

$$g(y) = y^4 + 4by^3 + 16acy^2 + 64a^2dy + 256a^3e = 0.$$

Luego se disminuyen las raíces en $-b$ y se obtiene una ecuación de la forma

$$\text{(IV - 7)} \qquad z^4 + pz^2 + qz + r = 0$$

en donde p, q, r, son polinomios en los coeficientes de $f(x)$.

Dado que en el conjunto de polinomios con coeficientes reales todo polinomio irreducible es lineal o cuadrático (Cap. IV - 6), la ecuación (IV - 7) puede expresarse como el producto de dos polinomios cuadráticos. Si (IV - 7) tiene coeficientes reales, los nuevos polinomios tendrán coeficientes reales. Además, ya que la suma de las raíces de (IV - 7) es cero, la suma de las cuatro raíces de los factores cuadráticos debe ser cero y la suma de los factores cuadráticos separadamente debe ser la misma, excepto en el signo. Por consiguiente la ecuación (IV - 7) puede expresarse en la forma

$$\text{(IV - 8)} \qquad (z^2 - kz + n)(z^2 + kz + m) = 0.$$

Dado que los miembros de la izquierda de (IV - 7) y de (IV - 8) son idénticamente iguales, se tiene $n + m - k^2 = p$; $k(n - m) = q$; y $nm = r$.

A continuación se elimina n y m de estas ecuaciones. Se obtiene:

$$k^2(n + m)^2 = k^2(k^2 + p)^2,$$
$$k^2(n - m)^2 = q^2$$

y por sustracción se obtiene $4k^2nm = k^2(k^4 + 2k^2p + p^2) - q^2$, o

$$k^6 + 2pk^4 + (p^2 - 4r)k^2 - q^2 = 0,$$

o sea, la *resolvente cúbica* en k^2. La resolvente cúbica puede resolverse y sus raíces designarse por los números complejos $4A^2$, $4B^2$, $4C^2$. Entonces el producto de las raíces es $q^2 = 64\,A^2B^2C^2$, y podemos elegir A, B, C, tales que $q = -8ABC$. Análogamente, la suma de las raíces $-2p = 4(A^2 + B^2 + C^2)$. Si alguna raíz de la resolvente cúbica es diferente de cero, supongamos $2A \neq 0$; en todo caso elegimos $k = 2A$. Luego, de $n + m - k^2 = p$, $p = -2(A^2 + B^2 + C^2)$, y $k^2 = 4A^2$, se obtiene

$$n + m = k^2 + p = 2(A^2 - B^2 - C^2).$$

Análogamente, de $k = 2A$; $q = -8ABC$, y $k(n - m) = q$, se obtiene

$$n - m = -4BC.$$

De estas dos relaciones en n y en m, resulta

$$n = (A + B + C)(A - B - C),$$
$$m = (-A + B - C)(-A - B + C).$$

En vista de que las sumas de los factores de n y m son, respectivamente, k y $-k$, estos cuatro factores son las raíces de (IV - 8) y por lo tanto de (IV - 7). Las raíces de la ecuación de cuarto grado dada se obtienen de las de (IV - 7) sumando $-b$ y dividiendo por $4a$. En consecuencia, las raíces de una ecuación de cuarto grado general pueden expresarse por medio de los coeficientes empleando radicales. Como se señaló en el Cap. IV - 5, este procedimiento no puede continuar más allá, puesto que una ecuación general de grado mayor que cuatro no puede resolverse por medio de las cuatro operaciones fundamentales y de los radicales.

EJERCICIOS

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 0$
2. $3x^4 - 8x^2 - 2x + 5 = 0$
3. $x^4 - x^2 + 10x - 4 = 0$
4. $x^4 - 6x^2 - 8x - 3 = 0$

IV - 11 LA REGLA DE DESCARTES PARA LOS SIGNOS.

Volvemos ahora a la tarea de determinar diversos tipos de raíces de ecuaciones polinomias. Cualquier polinomio de grado m con coeficientes complejos tiene m raíces complejas (Cap. IV - 4). Las raíces racionales de cualquier ecuación polinomia con coeficientes enteros (o racionales) pueden encontrarse después de un número finito de etapas (Cap. IV - 8). En esta sección consideraremos un método para calcular el número de raíces reales de cualquiera ecuación polinomia dada con coeficientes reales. Para ser exactos, estimaremos el número de raíces positivas, determinaremos el número de raíces cero y estimaremos el número de raíces negativas. En la parte siguiente de este Capítulo, estudiaremos un método para determinar exactamente el número de raíces reales de una ecuación polinomia con coeficientes reales en cualquier intervalo (Cap. III - 10) de la forma $a < x \leqq b$. La importancia del método que presentamos en esta sección, reside en su sencillez.

Cuando todas las raíces de una ecuación polinomia $f(x) = 0$ son reales y positivas, todos los polinomios elementales simétricos son positivos y los coeficientes de $f(x)$ tienen signos alternados, puesto que

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \dots + a_n \\ &= a_0\,[x^n - S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} - S_3x^{n-3} + \dots + (-1)^nS_n]. \end{aligned}$$

Por otra parte, todos los coeficientes de $f(x)$ tienen el mismo signo cuando todas las raíces son negativas. Buscaremos ahora relaciones más exactas entre los coeficientes de la ecuación $f(x) = 0$ y la ubicación de sus raíces.

Dos términos consecutivos de un polinomio real en el cual se han suprimido los términos con coeficientes cero se dice que presentan una *variación* o una *permanencia* de signo según que sus coeficientes tengan signos desiguales o iguales. Por ejemplo, $x^4 - 1$ tiene una variación y $x^2 + 1$ tiene una permanencia.

Consideremos un polinomio $f(x)$ y supongamos, por ejemplo, que no tiene coeficientes cero y que los signos de sus coeficientes están dados como en el cuadro (IV - 9) más adelante. En seguida calculamos los signos de $g(x) = (x - r)f(x)$, en que r es cualquier número positivo, e indicamos los signos de los coeficientes de $g(x)$ por $\pm$ todas las veces que los signos dependan de los valores de r y de los coeficientes de $f(x)$.

$$\text{(IV - 9)} \qquad \begin{array}{rcccccccccccc} f(x): & + & + & - & - & - & + & - & - & + & + & - & \\ (x-r): & + & - & & & & & & & & & & \\ \hline & + & + & - & - & - & + & - & - & + & + & - & \\ & & - & - & + & + & + & - & + & + & - & - & + \\ \hline g(x): & + & \pm & - & \pm & \pm & + & - & \pm & + & \pm & - & + \end{array}$$

La sucesión de los coeficientes del polinomio $f(x)$ que se muestra más arriba tiene cinco variaciones de signo: la sucesión de los de

$g(x)$ tiene por lo menos seis variaciones y podría tener ocho, pero nunca siete.

En general, para cualquier polinomio $f(x)$ dado con coeficientes reales y cualquier número r positivo dado, puede probarse (Ver Bibliografía Nº 19; págs. 446-447) que la sucesión de coeficientes del polinomio $g(x) = (x - r)f(x)$ tiene por lo menos una variación más de signo que la sucesión correspondiente a $f(x)$. Esta proposición puede probarse por medio de las relaciones $c_0 = b_0$ y $c_j = b_j + c_{j-1}r$, en que los c_j son los coeficientes de $f(x)$ y los b_j son los coeficientes de $g(x)$ (Cap. IV - 2). Por ejemplo, si la sucesión $b_0, b_1, \ldots, b_t$, no contiene ninguna variación, entonces la sucesión $c_0, c_1, \ldots, c_t$, no contiene ninguna variación. Si, además, la sucesión $b_t, \ldots, b_{t+k}$ contiene una variación, entonces la sucesión $c_t, \ldots, c_{t+k}$ contiene a lo sumo una variación. Aún más, si b_v, b_w, es la j-ésima variación de la sucesión de coeficientes de $g(x)$ y c_t, c_u es la j-ésima variación de la sucesión de coeficientes de $f(x)$, entonces $w \leqq u$ (Ejercicio 6) .Es así como la sucesión de b_j, tiene por lo menos tantas variaciones como la sucesión de c_j. Finalmente, dado que $b_0 = c_0$ y $g(0) = -rf(0)$, la sucesión de b_j [los coeficientes de $g(x)$] tiene más variaciones que la sucesión de c_j [los coeficientes de $f(x)$].

Si $f(x) = 0$ tiene raíces positivas $r_1, r_2, \ldots, r_k$, entonces

$$f(x) = (x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_k)Q(x)$$

Por aplicaciones reiteradas del enunciado a que hemos hecho referencia, la sucesión de coeficientes de $f(x)$ tiene por lo menos k variaciones más que las de $Q(x)$, es decir, el número de variaciones de signo de $f(x)$ es $\geqq k$. De este modo una ecuación polinomia real con V variaciones en los signos de los coeficientes tiene, cuando más, V raíces positivas.

Ahora, si escribimos $f(x)$ en la forma

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_sx^{n-s},$$

en donde $0 \leqq s \leqq n$, podemos suponer que $a_0a_s \neq 0$. Luego,

$$f(x) = x^{n-s}(a_0x^s + a_1x^{s-1} + \cdots + a_s) = x^{n-s}g(x),$$

y las raíces positivas de $g(x) = 0$ son precisamente aquellas de $f(x) = 0$. Ya que $g(x)$ es continuo para todo x, la ecuación $g(x) = 0$ tiene un número par o impar, N, de raíces positivas (no necesariamente distintas) según que $0 < a_0a_s$, o que $a_0a_s < 0$ (Cap.

III - 13, Ejercicio 5). También V es par si $0 < a_0a_n$, e impar si $a_0a_n < 0$. Por consiguiente N y V son ambos pares o ambos impares, es decir,

TEOREMA IV-10. REGLA DE DESCARTES PARA LOS SIGNOS. *Un polinomio real con V variaciones en los signos de sus coeficientes, tiene $V - 2k$ raíces positivas (reales), siendo k un entero no negativo.*

Dado que las raíces negativas de $f(x) = 0$ son iguales a las raíces positivas de $f(-x) = 0$, excepto por el signo (Cap. IV - 8), también se tiene: *un polinomio real $f(x)$ tiene $W - 2k$ raíces negativas, siendo k un entero no negativo y W el número de variaciones de los signos de los coeficientes de $f(-x)$.*

Consideremos unos cuantos ejemplos de estos dos aspectos de la Regla de los Signos de Descartes. La ecuación polinomia $x^3 - x^2 + 1 = 0$ tiene o bien dos raíces positivas y una negativa o no positiva; o una raíz negativa y dos complejas. La ecuación polinomia $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ tiene o bien tres raíces positivas, o una positiva y dos complejas. Las raíces de la ecuación polinomia $x^5 + x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x\sqrt{2} + 11 = 0$ caen dentro de uno de los tres casos siguientes: cuatro raíces positivas, una negativa, y ninguna compleja; dos raíces positivas, una negativa y dos complejas; ninguna raíz positiva, una negativa y cuatro complejas. En el caso del polinomio $x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$, podemos encontrar los ceros $1, i, -i$, y de este modo determinar cuál de los casos señalados se verifica. Para cualquiera ecuación polinomia con coeficientes reales, puede hacerse una determinación exacta del caso adecuado por medio del Teorema de Sturm (Cap. IV - 12) sin necesidad de encontrar las raíces.

También puede utilizarse la Regla de los Signos de Descartes con el objeto de establecer límites para las raíces reales de cualquiera ecuación polinomia con coeficientes reales, es decir, de *cualquiera ecuación polinomia real.* Supongamos $f(x) = (x - p) Q(x) + R$, $0 < p$ y que $Q(x)$ no tenga variaciones en los signos de sus coeficientes. Entonces, la ecuación $Q(x) = 0$ no tiene raíces positivas. Si también R tiene el mismo signo que los coeficientes de Q, entonces para $x = p$, $f(x) = R$, y para $x > p$, $Q(x)$ y $f(x)$ tienen el mismo signo que R, es decir, $f(x)$ no tiene ceros positivos mayores que p. La prueba para un límite superior p se aplica más fácilmente por medio de la división sintética, donde los coeficientes de $Q(x)$ y R constituyen la tercera hilera. Entonces, la prueba es la siguiente: *si p es un número positivo tal que en la división sintética de $f(x)$ por $x - p$ todos los números de la tercera hilera tengan el mismo signo, o sean iguales a cero, entonces p es un límite superior para los ceros reales de $f(x)$.* Se puede determinar análogamente un límite inferior $-q$ para los ceros reales en donde q es un límite superior para los ceros de $f(-x)$.

Por ejemplo, si $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 25x + 30$ y $p = 4$, tenemos

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & -3 & -1 & -25 & 30 & \underline{4} \\ 0 & 8 & 20 & 76 & 204 & \\ \hline 2 & 5 & 19 & 51 & 234 & \end{array}$$

de donde $f(x)$ no tiene ceros positivos mayores que 4. Análogamente, $f(x)$ no tiene ceros negativos menores que -1, ya que $f(-x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 25x + 30$ no tiene ceros positivos mayores que 1, de acuerdo con el cuadro siguiente:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & 3 & -1 & 25 & 30 & \underline{1} \\ 0 & 2 & 5 & 4 & 29 & \\ \hline 2 & 5 & 4 & 29 & 59 & \end{array}$$

Hay todavía otros dos métodos conocidos (Bibliografía Nº 1; págs. 162-166) para determinar los límites superiores de las raíces reales de una ecuación polinomia real

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_0 > 0.$$

Si $a_j \geqq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k-1)$, $a_k < 0$, y todos los coeficientes negativos son menores que o iguales a A en valor absoluto, luego $1 + \sqrt[k]{A/a_0}$, es un límite superior de las raíces reales de $p(x)$. Si el valor absoluto de cada a_j negativa se divide por la suma de todos los a_i positivos $(i < j)$ y B es el mayor cuociente obtenido de este modo, entonces $1 + B$ es un límite superior de los ceros reales de $p(x)$.

Informaciones generales más exactas sobre la ubicación de los ceros de cualquier polinomio real pueden hallarse en el Teorema de Sturm (Cap. IV - 12), que proporciona el número exacto de raíces distintas en cualquier intervalo $a < x \leqq b$.

EJERCICIOS

1. Discutir la naturaleza de las raíces de las ecuaciones siguientes:

   a) $x^6 + 3x^4 + 4x^2 + 2x - 6 = 0$;

   b) $x^4 - 15x^2 + 7x - 11 = 0$;

   c) $x^n - 1 = 0$ cuando n es impar, cuando n es par.

   d) $x^n + 1 = 0$ cuando n es impar, cuando n es par;

2. Determinar los límites superior e inferior de las raíces reales de las ecuaciones siguientes:

   a) $x^3 + 2x + 20 = 0$;

   b) $x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 0$;

   c) $3x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0$

3. ¿Son los límites determinados en la respuesta al Ejercicio 2, los límites reales mejores posibles, los límites enteros mejores posibles?

4. Demostrar que el número de raíces negativas de $f(x) = 0$ es de la forma $P - 2k$, donde P es el número de permanencias de signo de $f(x)$, k es un entero no negativo, y $f(x)$ no tiene coeficientes cero.

5. Demostrar que si en la división sintética de $f(x)$ por $x - b$, $b < 0$, los signos de los términos de la tercera hilera, asociando el signo adecuado a términos cualesquiera que sean iguales a cero, pueden hacerse alternando mediante una elección adecuada de b, y si $f(x)$ es de grado par, entonces la ecuación $f(x) = 0$, no tiene raíces negativas menores que b.

6. Hacer por escrito una demostración completa del Teorema IV-10

IV-12 TEOREMA DE STURM.

Consideraremos un método para determinar exactamente el número de ceros reales distintos de cualquier polinomio dado real en cualquier intervalo $a < x \leqq b$. En la sección siguiente este método se ampliará con el objeto de determinar el número de ceros de cualquiera multiplicidad dada k. Entonces, podremos determinar el número exacto (incluso multiplicidades) de raíces reales de cualquiera ecuación polinomia real dada $p(x) = 0$.

Dado cualquier polinomio real $f(x)$, podemos hacer $f_0 = f(x)$ y $f_1 = cf'(x)$, donde $f'(x)$ es la derivada de $f(x)$ (Cap. III - 14) y c es cualquiera constante positiva, frecuentemente el recíproco del máximo común divisor de los coeficientes de $f'(x)$. En seguida, aplicamos el Algoritmo de Euclides (Cap. III-7) a f_0 y f_1 con la modificación de que el signo de cada resto se cambie, es decir, hacemos

$$\begin{aligned}
f_0 &= q_1f_1 - c_2f_2,\\
f_1 &= q_2f_2 - c_3f_3,\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
f_{k-2} &= q_{k-1}f_{k-1} - c_kf_k,\\
f_{k-1} &= q_kf_k.
\end{aligned}$$

Dado que los signos de las funciones tienen un significado, sólo pueden insertarse o eliminarse arbitrariamente los factores positivos. El esquema del Cap. III-7 puede modificarse para que resulte.

$$\begin{array}{cccccc}
 & q_1 & q_2 & q_3 & \ldots & q_k \\
f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & \ldots & f_k \quad 0 \\
q_1f_1 & q_2f_2 & q_3f_3 & q_4f_4 & \ldots & \\
-c_2f_2 & -c_3f_3 & -c_4f_4 & -c_5f_5 & \ldots &
\end{array}$$

donde los c son constantes positivas arbitrarias. Luego f_k es el máximo común divisor de f_0 y f_1 y un divisor común de f_j $(0 \leqq j \leqq k)$. El polinomio f_k no es necesariamente el máximo común divisor dado que es posible que su coeficiente inicial no sea $+1$.

Si $f_0 = x^4 - 24x^2 + 16x + 12$, podemos hacer $f_1 = x^3 - 12x + 4$, $f_2 = x^2 - x - 1$, $f_3 = 2x - 1$, $f_4 = 1$. En este caso, los polinomios f_0 y f_1 son primos entre sí. Si $f_0 = x^4 - 3x^2 - 2$, podemos hacer $f_1 = x^3 - x$, y $f_2 = x^2 + 1$. En este caso, f_3 es idénticamente nulo y f_2 es el máximo común divisor de f_0 y f_1. En general, la sucesión

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_k,$$

donde f_k no es idénticamente nulo, se denomina la *sucesión cuociente* de f_0 y f_1. Formaremos también una sucesión de polinomios g_j, haciendo $g_j = f_j$ si f_k es constante; y $g_jf_k = f_j$ si f_k es de grado positivo. La sucesión

$$g_0, g_1, g_2, \ldots, g_k$$

se llama la *sucesión de Sturm* de f_0. Los g se denominan *funciones de Sturm* o *polinomios de Sturm* en f_0. Por ejemplo, la sucesión de Sturm del polinomio anterior $f_0 = x^4 - 24x^2 + 16x + 12$ puede formarse como sigue:

$$\begin{aligned}
g_0 &= x^4 - 24x^2 + 16x + 12,\\
g_1 &= x^3 - 12x + 4,\\
g_2 &= x^2 - x - 1,\\
g_3 &= 2x - 1,\\
g_4 &= 1
\end{aligned}$$

La suceción de Sturm del polinomio $f_0 = x^6 - 3x^2 - 2$ citado anteriormente puede hacerse como sigue:

$$g_0 = x^4 - x^2 - 2,$$
$$g_1 = x^3 - x,$$
$$g_2 = 1.$$

La sucesión de Sturm de cualquier polinomio $f_0(x)$ con coeficientes reales tiene las siguientes propiedades:

(i) Si $f_0(x_1) = 0$, entonces $g_0 g_1 < 0$ cuando $x = x_1^-$; y $g_0 g_1 > 0$ cuando $x = x^+_1$, donde x^-_1 y x^+_1 indican, respectivamente, un valor de x ligeramente menor que x_1 y un valor apenas mayor que x_1. Es fácil imaginarse esta propiedad por medio del gráfico de $y = f^2_0$. Cuando f_0 es lineal, la ecuación $y = f^2_0$ tiene una sola raíz doble en $x = x_1$, el gráfico es una parábola, y $(d/dx)f^2_0 = 2cf^2_k \cdot g_0 g_1$ es negativa en x^-_1 y positiva en x^+_1, donde c es una constante positiva y f_k es un polinomio real. En general, todo cero de f^2_0 tiene multiplicidad par (Cap. IV-13) y $(d/dx)f^2_0$ tiene las mismas propiedades que las que hemos considerado anteriormente en el caso especial.

(ii) Si algún $g_j(x_i) = 0$ donde $j > 0$, entonces $g_{j-1} g_{j+1} < 0$ en $x = x_i$. Esta desigualdad puede obtenerse de la identidad $f_{j-1} = q_j f_j - c f_{j+1}$, dado que todos los ceros comunes de f_{j-1} y f_j; o de f_j y de f_{j+1} deben ser ceros de f_k. Esta identidad tiene la forma $g_{j-1} = q_j g_j - c g_{j+1}$, donde $(g_{j-1}\ g_j) = 1 = (g_j,\ g_{j+1})$ cuando se expresa en función de los g, en que $f_j = f_k g_j$. Por consiguiente, $g_{j-1} g_{j+1} < 0$ todas las veces que $g_j = 0$.

(iii) El polinomio g_k es diferente de cero para todos los valores reales de x. Esta propiedad es una consecuencia inmediata de la definición de $g_k = 1$ cuando f_k no es constante y es igual a f_k cuando f_k es constante.

Si expresamos la primera propiedad de las citadas anteriormente por medio de la sucesión de signos de las funciones de Sturm, resulta que los primeros dos signos de la sucesión son $-\ +$ en x^-_1; y $+\ +$ en x^+_1; o son $+\ -$ en x^-_1; y $-\ -$ en x^+_1 donde x_1 es cualquier cero de f_0. La demostración hecha de la segunda propiedad señala que todas las veces que algún g_j $(j > 0)$ se anula, los polinomios g_{j-1} y g_{j+1} tienen signos opuestos, es decir, tenemos, $-\ 0\ +$; o bien $+\ 0$. La tercera propiedad indica que g_k no cambia nunca de signo. Intuitivamente, podemos imaginar las variaciones de los signos de la sucesión de Sturm de $f_0(x)$ que se desliza hacia la izquierda a medida que la variable real x crece. Por, ejemplo, consideremos los signos de la sucesión de Sturm citada anteriormente para $f_0 = x^4 - 24x^2 + 16x + 12$ para los valores indicados de x como se muestra en el cuadro siguiente:

x	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4
-6	+	−	+	−	+
-4	−	−	+	−	+
-1	−	+	−	−	+
0	+	+	−	−	+
1	+	−	−	+	+
2	−	−	+	+	+
4	−	+	+	+	+
5	+	+	+	+	+

En realidad, la sucesión de Sturm de $f_0(x)$ será una sucesión de constantes para cualquier valor real de x, por ejemplo $x = a$. Usaremos el símbolo S_a para indicar el número de variaciones de la sucesión cuando $x = a$. De acuerdo con las propiedades (ii) y (iii) S_a no puede cambiar a medida que x pasa por cualquier cero de g_j $(j > 0)$ que no es un cero de g_0. De acuerdo con (i) si $f_0(x_1) = 0$, entonces (Cap. IV-13) $g_0(x_1) = 0$, y la sucesión tiene una variación de signo en sus primeros dos términos en $x = x^-_1$, pero ninguna variación en $x = x^+_1$. De este modo, S_x cambia solamente en los ceros de $f_0(x)$ y decrece en 1 todas las veces que x crece debido a los ceros de $f_0(x)$. Así, tenemos:

TEOREMA IV-11. TEOREMA DE STURM. *Un polinomio real $f(x)$ tiene exactamente $S_a - S_b$ ceros reales y distintos en el intervalo $a < x \leqq b$.*

Anteriormente, hemos dado la sucesión de Sturm del polinomio $x^4 - 24x^2 + 16x + 12$. Para valores negativos muy grandes de x, basta considerar los términos principales (Cap. IV-5) y las funciones de Sturm tienen los signos $+ - + - +$ con cuatro variaciones. Para valores positivos grandes de x, tenemos $+ + + + +$ sin ninguna variación. Por consiguiente, el polinomio $x^4 - 24x^2 + 16x + 12$ tiene cuatro ceros reales distintos.

La sucesión de Sturm g_0, g_1, g_2 de $f_0 = x^4 - 3x^2 - 2$ se obtuvo anteriormente dividiendo los polinomios f_0, f_1, f_2 por f_2, ya que f_2

no es una constante. Para valores negativos grandes de x sus signos son $+ - +$ con dos variaciones. Para valores positivos grandes de x sus signos son $+ + +$ sin ninguna variación. En consecuencia, el polinomio $x^4 - 3x^2 - 2$ tiene dos ceros reales y distintos.

El Teorema de Sturm también se puede emplear para determinar límites para las raíces de las ecuaciones polinomias y, por cierto, sirve también para aislar las raíces en pequeños intervalos arbitrarios. Por ejemplo, $x^4 - 3x^2 - 2 = 0$ tiene dos raíces reales distintas, según se determinó anteriormente. En $x = 2$ los signos de las funciones de Sturm correspondientes, son $+ + +$, lo mismo que para valores positivos grandes de x. Por consiguiente, según el Teorema IV-11, la ecuación $x^4 - 3x^2 - 2 = 0$ no tiene raíces reales mayores que 2. Análogamente, en $x = -2$ los signos son $+ - +$, los mismos que para valores negativos muy grandes de x, y no hay raíces reales menores que -2. En $x = 1$, 0, y -1 los signos de las funciones de Sturm que son diferentes de cero, es decir, los signos de las funciones de Sturm que tienen signos, son $- +$ con una variación. Por consiguiente, $S_{-2} = 2$; $S_{-1} = 1$; $S_0 = 1$; $S_1 = 1$, y $S_2 = 0$, de donde resulta un raíz real que satisface $-2 < x < -1$ y una raíz real que satisface $1 < x < 2$. Los intervalos $-2 < x \leqq -1$ y $1 < x \leqq 2$ se reemplazaron por $-2 < x < -1$ y $1 < x < 2$, ya que $x = -1$ y $x = 2$ no son raíces. El procedimiento de encontrar intervalos que contengan las raíces podría continuar, por medio de $S_{\frac{3}{2}}$, $S_{\frac{1}{2}}$, ... En general, diremos que las raíces reales de una ecuación se *han aislado* cuando se ha encontrado un intervalo $a < x < b$ para cada raíz real tal que $b - a \leqq 1$ y cuando el intervalo contiene sólo una de las raíces distintas.

Ahora podemos determinar exactamente el número de raíces reales distintas de cualquiera ecuación polinomia real, es decir, de cualquiera ecuación polinomia $p(x) = 0$ con coeficientes reales. También podemos aislar cada raíz en un intervalo tan pequeño como se desee. En la sección siguiente definiremos la multiplicidad de una raíz y determinaremos el número total de raíces reales en cualquier intervalo, por medio de su multiplicidad.

EJERCICIOS

1. Encontrar las raíces reales de:
   a) $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 2 = 0$ (Ver Ejercicio 4, Cap. III-7);
   b) $x^4 - 2x^3 + 12x - 8 = 0$;

c) $x^4 - 13x^2 + 4x + 2 = 0;$

d) $x^4 - x^3 + 10x - 4 = 0.$

2. Aislar, por medio del Teorema de Sturm, todas las raíces reales:

a) $x^3 + 2x + 20 = 0;$

b) $x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 0;$

c) $3x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0.$

IV-13 RAICES MULTIPLES. Hemos definido (Cap. IV-1) un número b como un cero de un polinomio $p(x)$ si y sólo si $p(b) = 0$. En consecuencia, 2 es un cero de $x - 2$, de $x^2 - 4x + 4$, de $x^2 - 3x + 2$, y de $x^3 - 2x^2 + 4x - 8$. Esta definición junto con el Teorema IV-1 implican que cualquier polinomio $p(x)$ con un cero b puede escribirse en la forma $p(x) = (x - b) \cdot q(x)$, donde $q(x)$ es un polinomio. En los ejemplos anteriores, $x - 2 = (x - 2) \cdot 1$; $x^2 - 4x + 4 = (x - 2) \cdot (x - 2)$; $x^2 - 3x + 2 = (x - 2) \cdot (x - 1)$; y $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x - 2) \cdot (x^2 + 4)$. En otras palabras, b es una raíz de $p(x) = 0$, si y sólo si $x - b$ es divisor de $p(x)$. Se dice que b es una *raíz múltiple* de $p(x) = 0$ si y sólo si $(x - b)^2$ es divisor de $p(x)$. Por eso, 0 es una raíz múltiple de $x^4 - 7x^3$.

También nos referiremos a la multiplicidad de una raíz b de $p(x) = 0$ para indicar la mayor potencia entera de $(x - b)$ que es divisor de $p(x)$. Así, por ejemplo, la raíz 0 tiene multiplicidad 5 en $x^8 - 7x^7 + x^5 = 0$. En general, una raíz b de $p(x) = 0$ tiene *multiplicidad* k si $(x - b)^k$ es divisor de $p(x)$ y $(x - b)^{k+1}$ no es divisor de $p(x)$, donde k es un entero positivo. Una raíz de multiplicidad 1 se denomina *raíz simple*.

El cálculo de la multiplicidad de una raíz b suele efectuarse más fácilmente por medio de un cambio de variable para expresar $p(x)$ en la forma $q(x - b)$. Esto puede hacerse mediante la división sintética (Cap. IV-3) o mediante la fórmula de Taylor (Cap. III-14). En la notación de la fórmula de Taylor, tenemos la siguiente identidad para cualquier polinomio $f(x)$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \cdots + f^{(n)}(a)\,\frac{(x - a)^n}{n!}.$$

Es evidente ahora que si $f(a) = 0$, entonces $f(x)$ tiene $(x - a)$ como factor; si $f(a) = f'(a) = 0$, entonces $(x - a)^2$ es un factor de $f(x)$; y en general, si $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(k)}(a) = 0$, entonces $(x - a)^{k+1}$ es un factor de $f(x)$. Dado que los coeficientes de la fórmula de Taylor están determinados unívocamente, la proposición conversa es también verdadera, es decir, si $(x - a)^{k+1}$ es un factor de $f(x)$, entonces $f(a) = f'(a) = ... = f^{(k)}(a) = 0$. Además, si $(x - a)^{k+1}$ es factor de $f(x)$, entonces $f'(x)$ tiene a $(x - a)^k$ como factor y $(x - a)^{k-1}$ es factor de $f''(x)$ y así sucesivamente. Por consiguiente, cualquiera raíz de $f(x) = 0$ de multiplicidad $m > 1$ es una raíz de $f'(x) = 0$ de multiplicidad $m-1$. En particular, una raíz simple de $f(x) = 0$, no es una raíz de $f'(x) = 0$. Si $f(x) = 0$ y $f'(x) = 0$ tienen una raíz común r que es un cero de $f'(x)$ de multiplicidad $m - 1$, entonces r es un cero de $f(x)$ de multiplicidad m. Finalmente, si $f_k(x)$ es el máximo común divisor de $f(x)$ y $f'(x)$ y $f = f_k g_k$, entonces $g_k(x)$ tiene los mismos ceros distintos que $f(x)$, pero no raíces múltiples. En consecuencia en el Cap. IV - 12 los ceros de $g_0(x)$ son simples y son precisamente las raíces distintas de $f_0(x)$. También, $f_0(x)$ tiene raíces múltiples si y sólo si $f_k(x)$ es de grado positivo.

Dado cualquier intervalo $a < x \leqq b$ y cualquier polinomio real $f_0(x)$, podemos encontrar la sucesión cuociente de $f_0(x)$, es decir, $f_0, f_1, ..., f_{k1}$. Ya que f_{k1} es un asociado del máximo común divisor de f_0 y f'_0, f_{k1} es una constante si y sólo si $f_0(x)$ tiene solamente raíces simples. Si f_{k1} tiene grado positivo, la sucesión de Sturm $g_0, g_1, ..., g_{k1}$ se denomina la primera sucesión Sturm de f_0. En ambos casos, el Teorema IV - 11 proporciona el número de las raíces reales distintas, es decir, el número N_1 de ceros de $f_0(x)$ de multiplicidad por lo menos uno. Ahora, tendremos en cuenta que cualquier cero de $f_0(x)$ de multiplicidad m es un cero de $f'_0(x)$ y por lo tanto de $f_{k1}(x)$ de multiplicidad $m - 1$. Por consiguiente, si f_{k1} no es una constante, encontraremos su sucesión cuociente $f_{k1}, f'_{k1}, ..., f_{k2}$ y su sucesión Sturm, la segunda sucesión Sturm de f_0. Si $f_{k2} = c(f_{k1}, f'_{k1})$ es constante, $f_0(x)$ no tiene raíz de multiplicidad mayor que dos. En todo caso, el Teorema IV - 11 para f_{k1} proporciona el número N_2 de ceros de $f_0(x)$ de multiplicidad por lo menos dos. Si f_{k2} tiene grado positivo, podemos encontrar su sucesión Sturm (la tercera sucesión Sturm de f_0) y el número N_3 de ceros de multiplicidad por lo menos tres. Dado que $f_0(x)$ tiene grado finito, este procedimiento puede repetirse sólo un número finito de veces. Si N_i es el número de ceros de $f_0(x)$ de multiplicidad por lo menos i, que se ha obtenido de la i-ésima sucesión de Sturm de f_0, entonces el número de ceros de multiplicidad exactamente j es $N_j - N_{j+1}$. En particular, el número de raíces simples es $N_1 - N_2$. De este procedimiento resulta el *Teorema de Sturm para las raíces múltiples* (Bibliografía Nº 48) por medio del cual el número $N_j - N_{j+1}$ de raíces reales de $f_0(x)$ en cualquier intervalo $a < x \leqq b$ y de cualquiera multiplicidad j puede calcularse sin necesidad de determinarse las raíces mismas.

Los ceros de $h_1 = f_0/f_{k1}$ son los ceros (reales o imaginarios) de f_0 de multiplicidad por lo menos uno; los ceros de $h_2 = f_{k1}/f_{k2}$ son los ceros de f_0 de multiplicidad por lo menos dos; los de $h_j = f_{k(j-1)}/f_{kj}$ son los ceros de f_0 de multiplicidad por lo menos j. Por lo tanto, los ceros de $s_1 = h_1/h_2$ son precisamente los ceros simples de f_0; los ceros de $s_2 = h_2/h_3$ son las raíces dobles; los de $s_j = h_j/h_{j+1}$ son los ceros de multiplicidad j, en que $s_n = h_n$ si f_{kn} es constante. Los f_{kj} son polinomios que se obtienen por el procedimiento del máximo común divisor; los h_j y los s_j son polinomios que se obtienen por división. Estas operaciones pueden efectuarse si $f_0(x)$ tiene coeficientes reales o complejos. Por consiguiente para cualquiera ecuación polinomia $f(x) = 0$ y para cualquier entero positivo j podemos obtener una ecuación polinomia $s_j = 0$ cuyas raíces son las raíces distintas (reales o imaginarias) de $f(x)$ de multiplicidad j. Luego, mediante estos polinomios s_j se tiene

TEOREMA IV - 12. *Una ecuación polinomia $f(x) = 0$ puede resolverse: (i) por medio de la fórmula cuadrática si tiene a lo sumo dos raíces de cada multiplicidad k; y (ii) por medio de sus coeficientes y extracción de raíces si tiene a lo más cuatro raíces de cada multiplicidad k.*

EJEMPLO. La ecuación

$$f_0(x) = x^{10} - x^8 - 5x^6 + x^4 + 8x^2 + 4 = 0 \tag{IV - 10}$$

tiene a lo sumo dos raíces positivas y máximo dos raíces negativas (Cap. IV - 11). No tiene raíces racionales (Teorema IV - 9). Antes de sacar el máximo común divisor para obtener las sucesiones de Sturm, calculamos las sucesiones cuocientes:

$$\begin{aligned}
f_0 &= x^{10} - x^8 - 5x^6 + x^4 + 8x^2 + 4,\\
f_1 &= 5x^9 - 4x^7 - 15x^5 + 2x^3 + 8x,\\
f_2 &= x^8 + 10x^6 - 3x^4 - 32x^2 - 20,\\
f_3 &= x^7 - 3x^3 - 2x,\\
f_{k1} &= -x^6 + 3x^2 + 2;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_{k1} &= -x^6 + 3x^2 + 2, \\
c_1 f'_{k1} &= -x^5 + x, \\
f_{k2} &= -x^2 - 1; \\
f_{k2} &= -x^2 - 1, \\
c_2 f'_{k2} &= -x, \\
f_{k3} &= 1;
\end{aligned}
$$

donde f_{k1} es el máximo común divisor (MCD) de f_0 y f'_0, f_{k2} es un MCD de f_{k1} y de f'_{k1}; y f_{k3} es un MCD de f_{k2} y de f'_{k2} (es decir, f_{k3} y f'_{k3} son primos entre sí).

Luego la primera sucesión de Sturm de (IV - 10) es:

$$
\begin{aligned}
g_{10} &= -x^4 + x^2 + 2 = f_0/f_{k1}, \\
g_{11} &= -5x^3 + 4x \quad = f_1/f_{k1}, \\
g_{12} &= -x^2 - 10 \quad = f_2/f_{k1}, \\
g_{13} &= -x \quad = f_3/f_{k1}, \\
g_{14} &= 1 \quad = f_{k1}/f_{k1};
\end{aligned}
$$

la segunda sucesión de Sturm es

$$
\begin{aligned}
g_{20} &= x^4 - x^2 - 2 = f_{k1}/f_{k2}, \\
g_{21} &= x^3 - x \quad = c_1 f'_{k1}/f_{k2}, \\
g_{22} &= 1 \quad = f_{k2}/f_{k2};
\end{aligned}
$$

y la tercera sucesión de Sturm es

$$
\begin{aligned}
g_{30} &= -x^2 - 1 = f_{k2}, \\
g_{31} &= -x \quad = c_2 f'_{k2}, \\
g_{32} &= 1 \quad = f_{k3}.
\end{aligned}
$$

Según la primera sucesión de Sturm vemos que (IV - 10) tiene dos raíces reales distintas, una positiva y una negativa, dado que $S_{-\infty} = 3$, $S_0 = 2$, y $S_\infty = 1$. Análogamente, según la segunda sucesión de Sturm vemos que (IV - 10) tiene dos raíces reales distintas de multiplicidad por lo menos dos, una positiva y una negativa. Según la tercera sucesión de Sturm, se ve que no hay raíces reales de multiplicidad mayor que dos.

En la notación del párrafo anterior al Teorema IV - 12, los ceros de

$$h_1 = -x^4 + x^2 + 2 = f_0/f_{k1}$$

son los ceros de f_0 de multiplicidad por lo menos uno; los ceros de

$$h_2 = x^4 - x^2 - 2 = f_{k1}/f_{k2}$$

son los ceros de f_0 de multiplicidad por lo menos dos; y los ceros de

$$h_3 = -x^2 - 1 = f_{k2}/f_{k3}$$

son los ceros de f_0 de multiplicidad por lo menos tres. Nótese que $h_j = g_{j0}$, dado que ambos están determinados de la misma manera. Continuando con la notación anterior, los ceros de

$$s_1 = -1 = h_1/h_2$$

son los ceros de f_0 de multiplicidad exactamente uno; los ceros de

$$s_2 = -x^2 + 2 = h_2/h_3$$

son los ceros de f_0 de multiplicidad exactamente dos; y los ceros de

$$s_3 = -x^2 - 1 = h_3$$

son los ceros de f_0 de multiplicidad exactamente tres. Según s_1, la ecuación (IV - 10) no tiene raíces simples; según s_2 tiene como raíces dobles $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$; según s_3 tiene como raíces triples i, $-i$. Por consiguiente las raíces de (IV - 10) son $\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, i, i, i, -i, -i, -i$.

El cálculo de las series de Sturm de un polinomio suele ser un procedimiento largo y tedioso. Sin embargo, la resolución de una ecuación cúbica o de cuarto grado por medio de fórmulas es también un proceso largo (Cap. IV - 9 y Cap. IV - 10). El Teorema IV - 11 y los métodos anteriores pueden aplicarse a cualquier polinomio con coeficientes complejos, cualquiera que sea su grado, con el objeto de obtener raíces múltiples y también simples todas las veces que sea posible resolver s_3 mediante nuestros métodos anteriores. Los s_j tienen grados menores que el polinomio dado si y sólo si hay raíces múltiples. En particular, si todas las raíces son raíces simples, entonces s_1 es un polinomio asociado del polinomio dado. Los métodos que se han presentado en esta sección son importantes porque nos permiten la resolución de ecuaciones que no podrían ser hechas por los métodos estudiados anteriormente. En la sección siguiente y final de este capítulo consideraremos métodos de aproximación de raíces reales de ecuaciones polinomias en una variable con coeficientes reales.

EJERCICIOS

1. Resolver:

(a) $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 = 0,$
(b) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 0,$
(c) $x^4 - 9x^3 + 9x^2 + 81x - 162 = 0,$
(d) $x^4 - 6x^2 - 8x - 3 = 0,$
(e) $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0.$

2. Resolver:

$$x^{10} - 5x^8 - 5x^6 + 45x^4 - 108 = 0$$

3. Proponer un método para resolver la ecuación del Ejercicio 2, encontrando primero las raíces racionales de una ecuación relacionada con ella.

IV - 14 SOLUCIONES APROXIMADAS.

Concluiremos nuestro breve estudio de la teoría de las ecuaciones con una discusión de dos métodos para calcular aproximadamente las raíces reales de una ecuación polinomia $f(x) = 0$ con coeficientes reales. Mediante el Teorema de Sturm o aún por el método de ensayo y error podemos determinar intervalos de la forma $n < x \leqq n + 1$ en el cual se encuentran las raíces (Cap. IV-12). Los procedimientos siguientes consisten en dos métodos para obtener aproximaciones sucesivas que tienden a la raíz como un límite. Dado que mediante el Teorema IV-9, puede obtenerse todas las raíces racionales, los métodos por aproximación serán necesarios solamente para las raíces irracionales.

Método de Newton. Supongamos que $f(x) = 0$ tiene una raíz $a + h$ en que el número a es conocido, $f'(a) \neq 0$, y h^2 es menor que uno. La fórmula de Taylor en $x = a + h$ da

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{1 \cdot 2} h^2 + \cdots = 0,$$

ya que $a + h$ es una raíz. Para valores pequeños de h, los términos que contienen h^2 como factor, se pueden despreciar y resulta $f(a) + f'(a)h = 0$, o $h = -f(a)/f'(a)$ como una primera aproximación para h, y $a_1 = a - f(a)/f'(a)$ como una primera aproximación para la raíz $a + h$. Este proceso se repite haciendo $a_2 = a_1 - f(a_1)/f'(a_1)$ y, en general, $a_{j+1} = a_j - f(a_j)/f'(a_j)$. Aunque a_j debe elegirse tal que $f'(a_j) \neq 0$, esto no causa ninguna dificultad, ya que $f'(x)$ tiene sólo un número finito de ceros. Por consiguiente si $f'(x) = 0$ para algún valor de $x = a_j$, simplemente se reemplaza a_j por un valor ligeramente diferente en el cual $f'(x) \neq 0$. La sucesión de valores $a, a_1, a_2, \ldots a_j \ldots$ tiende a $a + h$ como límite, al que se puede aproximar con el grado de precisión que se desee. Por ejemplo: $f(x) = x^5 - 3x + 1 = 0$ tiene una raíz entre cero y uno; $f'(x) = 5x^4 - 3$. Si $a = 0$, las diferencias $a_1 - a = \frac{1}{3}$; $a_2 - a_1 = .0014$, tienden a cero muy rápidamente y la raíz deseada es aproximadamente 0. 3346. El método de Newton puede también usarse para cualquiera función $f(x)$ que tenga una primera derivada.

El segundo método por aproximación, *el método de Horner*, proporciona los dígitos sucesivos en el desarrollo decimal de la raíz. Por ejemplo, $x^3 - 12x^2 + 5x - 17 = 0$ puede determinarse mediante el Teorema de Sturm o por ensayo y error con el objeto de obtener una raíz entre 10 y 20. En consecuencia, el primer dígito de la raíz se considera 1. Empleamos en seguida la división sintética, como en el Cap. IV - 3, con el objeto de disminuir las raíces en 10:

$$
\begin{array}{rrrrl}
1 & -12 & 5 & -17 & \underline{|10} \\
0 & 10 & -20 & -150 & \\
\hline
1 & -2 & -15 & -167 & \\
0 & 10 & 80 & & \\
\hline
1 & 8 & 65 & & \\
0 & 10 & & & \\
\hline
1 & 18 & & & \\
0 & & & & \\
\hline
1 & & & &
\end{array}
$$

y buscamos una raíz de la nueva ecuación $y^3 + 18y^2 + 65y - 167 = 0$, que tenga un valor entre 0 y 10, y encontramos que esta raíz está entre 1 y 2. Por eso el segundo dígito de la raíz es 1. En consecuencia, disminuimos las raíces en 1 y buscamos una raíz de la nueva ecuación $z^3 + 21z^2 + 104z - 83 = 0$, entre 0 y 1, y encontramos que está entre .6 y .7; disminuimos las raíces en .6 y buscamos una raíz de la nueva ecuación que se encuentre entre cero y un décimo. Continuando este procedimiento, se puede calcular un número finito de lugares decimales de la raíz buscada, 11.6... Después de las primeras etapas, puede obtenerse una aproximación útil del dígito siguiente considerando solamente los últimos dos términos de la ecuación de que se trate. Las raíces negativas de $f(x) = 0$ pueden calcularse cambiando los signos de las raíces positivas de $f(-x) = 0$.

Existen otros métodos de aproximación de raíces (Bibliografía Nº 49; págs. 151-180), como también reglas para reducir el trabajo en los procedimientos anteriores. Sin embargo, se ha presentado lo suficiente para indicar cómo se puede determinar cualquiera raíz real de una ecuación polinomia real con una aproximación de tantos lugares decimales como se desee. Para mayores detalles sobre éste y otros temas mencionados en este capítulo el lector puede consultar un texto sobre teoría de las ecuaciones.

En el presente capítulo hemos examinado algunos métodos para encontrar los ceros de un polinomio en una variable; hemos presentado fórmulas para determinar las raíces de ecuaciones polinomias de grados 1, 2, 3, y 4 (Cap. IV, Secciones 5, 9, y 10) con coeficientes complejos; considerado las ecuaciones polinomias de grado arbitrario teniendo en cuenta sus raíces múltiples y las ecuaciones polinomias reales de grado arbitrario respecto de sus raíces racionales. El estudio de los polinomios y las ecuaciones polinomias es la meta que nos habíamos propuesto alcanzar al ocuparnos de nuestro sistema de números, de la teoría de los números y de la teoría de los polinomios, y aunque representa un avance notable en nuestro propósito, no es de manera alguna la etapa final. A medida que progresamos en nuestro estudio se nos presentaron oportunidades de dedicar especial atención y desarrollar interesantes conceptos. Hemos considerado solamente algunos conceptos fundamentales básicos dentro del vasto campo del álgebra. El camino está ahora expedito para abordar una gran variedad de materias de las cuales podremos seleccionar sólo algunas.

Los tres capítulos restantes pueden leerse en cualquier orden según el interés del lector. El más importante es el Capítulo V sobre matrices y determinantes y sus aplicaciones a la dependencia lineal, a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y a las transformaciones geométricas. El Capítulo VI contiene una aplicación importante de nuestras teorías algebraicas a los problemas clásicos de construcción en geometría y, en particular, una demostración de la imposibilidad de trisectar un ángulo arbitrario dado utilizando únicamente la regla y el compás. Por último, el Capítulo VII es una introducción a la representación gráfica de funciones, que corresponde, en cierto modo, al estudio de los conjuntos de funciones que figura en el Capítulo III.

EJERCICIOS

1. Calcular las raíces de $x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 0$, con una aproximación de cuatro cifras decimales.

2. Calcular la raíz real de $x^3 + 2x + 20 = 0$, con una aproximación de cinco cifras decimales.

3. El asta de una bandera mide cien pies de altura y se halla a diez pies de distancia de un poste de diez pies de altura. Si el asta se quiebra —sin que la sección superior se separe de la base— y de modo que toque el extremo superior del poste y roce la tierra, calcular la altura en que se quebró.

CAPITULO V

Determinantes y matrices

Los determinantes y las matrices tienen muchas aplicaciones prácticas en matemáticas y en otras ciencias. Examinaremos primero su desarrollo histórico (Cap. v - 1), en seguida definiremos los determinantes mediante matrices (Cap. v - 2) y permutaciones (Cap. v - 3 a Cap. v - 6), estudiaremos algunas de sus propiedades (Cap. v - 7 a Cap. v - 10), y consideraremos varias de sus aplicaciones. En particular, consideraremos el uso de los determinantes y de las matrices en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (Cap. v - 11 y Cap. v - 12); en la dependencia lineal (Cap. v - 13); en la geometría analítica (Cap. v - 14); y en las transformaciones geométricas (Cap. v - 15).

V - 1 DESARROLLO HISTORICO. La primera noción de un determinante se debió probablemente a Leibniz a fines del siglo diecisiete. El empleó símbolos análogos a nuestra actual notación de determinantes para simplificar las expresiones que se originan en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Por ejemplo, consideremos el sistema siguiente de ecuaciones lineales de dos variables:

$$a_1x + b_1y = c_1,$$
$$a_2x + b_2y = c_2.$$

Si se multiplica la primera ecuación por $+b_2$, la segunda por $-b_1$, y si se suman las ecuaciones resultantes, obtenemos $(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$, o en la notación de los determinantes

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

que puede resolverse respecto de x si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Este procedimiento fue expresado como una regla formal para sistemas de n ecuaciones lineales de n variables por Gabriel Cramer en 1750. Por consiguiente, este método se denomina la Regla de Cramer (Cap. v - 11). Esta regla expresa una de las primeras aplicaciones básicas de los determinantes.

Durante dos siglos, desde la formulación de la Regla de Cramer, los determinantes se usaron de muchas maneras. Algunas de estas aplicaciones se examinarán en el presente capítulo; muchas otras no pueden apreciarse hasta que el lector no haya estudiado la rama particular de las matemáticas en la cual se emplea. Bézout (1799) usó determinantes en su método de eliminación por medio de ecuaciones lineales. Sylvester (1840) empleó determinantes en su método dialítico de eliminación. Se ha reconocido el trabajo de Vandermonde, Jacobi y otros en la teoría de los determinantes, asociando sus nombres con tipos especiales de determinantes. Por ejemplo, el determinante de Vandermonde (Ejercicio 22, Cap. v - 9) puede usarse en la discusión de las raíces de una ecuación cúbica. Los determinantes wronskianos y jacobianos tienen importancia en las teorías de matemáticas superiores. Los determinantes resultantes, eliminantes, alternantes, ortogonales, simétricos, orlados, son algunos de los muchos otros tipos de determinantes que tienen aplicaciones especiales en las teorías matemáticas.

Cauchy (1815) y Jacobi (1841) aportaron valiosas contribuciones a la teoría general de los determinantes. Poco tiempo después, el concepto de una ordenación cuadrada denominada determinante se amplió y surgió el concepto completamente diferente de una ordenación rectangular denominada matriz. La matriz es hoy el concepto fundamental con numerosas aplicaciones teóricas y prácticas. Toda matriz cuadrada con elementos pertenecientes a un anillo tiene asociado un determinante. La teoría de los determinantes ha llegado a ser una parte de la teoría de las matrices. Restringiremos nuestro estudio de las matrices a los conceptos necesarios en las aplicaciones a que nos hemos referido al comienzo de este capítulo. Otras aplicaciones y mayores detalles sobre la teoría pueden consultarse en textos tales como los N.os 9, 16, 39, 44 y 49 de la Bibliografía.

V-2 M A T R I C E S . Una *matriz* se define como una ordenación rectangular tal como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix},$$

y, en general,

$$(V-1) \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

donde los elementos a_{ij} pueden pertenecer a cualquier conjunto dado de números, de polinomios o pueden ser elementos de un anillo dado de elementos. Nos preocuparemos principalmente de matrices cuyos elementos sean números reales o polinomios. También podrían considerarse matrices cuyos elementos pertenezcan a un anillo o a un campo arbitrario con sólo pequeñas modificaciones en nuestro presente estudio.

La matriz (v-1) tiene m filas y n columnas. Se ha elegido la notación a_{ij} de modo que el primer subíndice *(índice de la fila)* designa la fila y el segundo subíndice *(índice de la columna)* designa la columna en la cual se encuentra el elemento. Por ejemplo, a_{12} se encuentra en la primera fila y en la segunda columna; a_{31} se encuentra en la tercera fila y en la primera columna; a_{ij} está en la i-ésima fila y en la j-ésima columna.

Cuando $m = n$, tenemos una *matriz cuadrada* tal como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

o, en general,

$$(V-2) \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

En el Cap. v-7 usaremos las permutaciones de los subíndices de los elementos y asociaremos un polinomio de los elementos de una cualquiera matriz cuadrada con un polinomio de los elementos de esa matriz. Este polinomio se denominará el *determinante* de la matriz. Si los elementos de una matriz cuadrada son números, el determinante de la matriz es también un número.

El determinante de una matriz está definido sólo para matrices cuadradas y puede designarse empleando líneas rectas en lugar de los paréntesis cuadrados con que se designa una matriz. Por ejemplo, el determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

puede designarse por

$$\text{(V–3)} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

La matriz (v - 1) puede también designarse por $[a_{ij}]$, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$. La matriz cuadrada (v - 2) puede designarse por $[a_{ij}]$, $i, j = 1, 2, ..., n$ o simplemente como $[a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}]$ tomando en cuenta sus elementos con índices de fila y columna iguales, es decir, los elementos de su *diagonal principal*. El determinante de (v - 2) puede designarse empleando líneas rectas como en (v - 3); o también por $|a_{ij}|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$; o también por $|a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}|$. Presentamos estas tres notaciones para matrices y determinantes con el objeto de facilitar la consulta de otros textos sobre matrices y determinantes. Desgraciadamente, la notación matemática no se ha uniformado bien. Con todo, el conocimiento de las diferentes notaciones que hemos señalado permitirá al lector reconocerlas rápidamente en cualquier otro texto. Nosotros emplearemos, en las tres notaciones, líneas rectas para los determinantes y paréntesis cuadrados para las matrices.

Hasta aquí hemos definido una matriz y hemos señalado que, por medio de permutaciones, puede asociarse un determinante a toda matriz cuadrada. En algunas de las secciones que siguen definiremos y estudiaremos algunas propiedades de las permutaciones.

EJERCICIOS

1. Escribir cinco matrices.
2. ¿Se pueden asociar determinantes con alguna de las matrices dadas en el Ejercicio 1? Indicar estos determinantes en los casos en que sea posible.

3. Dar ejemplos de cuatro matrices cuadradas y designar el determinante asociado con cada una de ellas.

4. El orden de una matriz cuadrada (Cap. v-7) es igual al número de elementos de su diagonal principal. Indicar el orden de cada una de las matrices dadas en el Ejercicio 3.

5. Dar ejemplos de tres matrices cuadradas de diferente orden.

6. Designar de tres maneras el determinante de la matriz $[a_{ij}, a_{ij}, a_{ij}, a_{ij}]$.

7. Dar un ejemplo de una matriz de tercer orden, cuyos elementos sean números complejos.

8. Dar un ejemplo de una matriz de tercer orden, cuyos elementos sean polinomios en x de grado positivo.

9. Proponer matrices que tengan una de las siguientes propiedades: (a) dos filas y tres columnas; (b) una fila y tres columnas; (c) tres filas y una columna; (d) una fila y una columna.

V - 3 PERMUTACIONES. Se llaman *permutaciones* de un conjunto dado cualquiera, las diferentes disposiciones en que se pueden ordenar, en una fila, los elementos del conjunto. Por ejemplo, dados los enteros 1 y 2, tenemos dos permutaciones 1, 2 y 2, 1; dados los enteros 1, 2, 3, tenemos seis permutaciones 123, 132, 213, 231, 321 y 312 en las que se han suprimido las comas por comodidad. Omitiremos estas comas cada vez que sea posible sin producir confusión al lector. Sin embargo, dados dos enteros tales como 11 y 17, no podremos, por supuesto, omitir las comas al escribir las dos permutaciones 11, 17 y 17, 11.

Consideremos el número P_n de permutaciones de un conjunto dado de n elementos distintos. $P_2 = 2$, ya que dos elementos cualesquiera a y b pueden disponerse de dos maneras: ab y ba. Puede introducirse un tercer elemento c en cada una de estas dos permutaciones, de tres maneras: antes de cada elemento o después de ambos, resultando así $3 \cdot 2 = 6$ permutaciones de los tres elementos. Se escribe $P_3 = 3!$ De modo análogo, dado cualquier entero positivo k, se puede introducir un elemento adicional en cada una de las permutaciones de k elementos en $k + 1$ maneras diferentes: antes de cada elemento y después de todos ellos. De esta manera, si P_k denota el número de permutaciones de k elementos, entonces $P_{k+1} = (k + 1)P_k$. Por eso $P_4 = 4!$, $P_5 = 5!$, ..., $P_n = n!$ para todos los valores enteros positivos de n (Ejercicio 1).

Hasta aquí hemos definido una permutación como una ordenación lineal, tal como

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

en contraste con una ordenación circular (como por ejemplo en un reloj, Fig. V - 1) u otra ordenación de cualquier conjunto dado de elementos,

FIG. V—1

12
11 1
10 2
9 3
8 4
7 5
6

Consideraremos, en seguida, un orden (permutación) del conjunto dado de elementos como su *orden natural* y todas las permutaciones de estos elementos se considerarán con respecto a su orden natural. Por ejemplo, es costumbre admitir que el orden natural de cualquier conjunto de números enteros positivos consecutivos, es el orden que se usa al contar; que el orden natural de cualquier conjunto finito de números reales es el orden creciente de sus valores numéricos; que el orden natural de cualquier conjunto de letras de un alfabeto es su orden alfabético. Por eso consideraremos que cada una de las permutaciones

(V - 4) 12345, 3567, acflm

se encuentran en su orden natural. Por la misma razón, cada una de las permutaciones

(V - 5) 21345, 3576, afchm

se encuentra en una disposición diferente de su orden natural. Esta diferencia, o sea la relación entre dos permutaciones tales como 12345 y 21345 de un conjunto dado de elementos, puede expresarse por medio de inversiones (Cap. V - 4).

EJERCICIOS

1. Hacer una demostración completa por inducción matemática (Cap. I-4) de que $P_n = n!$ para cualquier entero positivo n.
2. Hacer una lista de todas las permutaciones del conjunto de letras *cat*.
3. Hacer una lista de las 24 permutaciones del conjunto de letras *duck*.

V - 4 INVERSIONES. Dos elementos cualesquiera, sean adyacentes o no, que se encuentran en su orden natural en una permutación constituyen una *permanencia;* dos elementos cualesquiera que se encuentran en un orden que no es su orden natural constituyen una *inversión.* Por ejemplo, la permutación 1, 2 se denomina una permanencia; 2, 1 es una inversión. Dada una permutación *daecb,* y aceptando que el orden alfabético es el orden natural, tenemos permanencias *de, ae, ac, ab,* e inversiones *da, dc, db, ec, eb, cb.* Dada una permutación cualquiera, podemos determinar las permanencias y las inversiones como se hizo anteriormente, considerando el primer elemento con cada uno de los otros elementos; el segundo elemento con cada uno de los elementos que le siguen; el tercer elemento con cada uno de los elementos siguientes, ... De esta manera podemos asociar con cada permutación un entero único no negativo que es el número de inversiones de la permutación. Es así como cualquiera permutación dada puede clasificarse como *par* o *impar* según que el número de inversiones de la permutación sea par o impar. Todas las permutaciones de (v - 4) se encuentran en su orden natural y son permutaciones pares, dado que no tienen inversiones (cero es un número par). Todas las permutaciones de (v - 5) son permutaciones impares, dado que contienen exactamente una inversión. Dado que toda permutación de cualquier conjunto dado de elementos es par o impar, nos referiremos a la *clase* de las permutaciones pares y a la clase de permutaciones impares.

Dada la permutación 4132, podemos considerar las diferencias $1 - 4$, $3 - 4$, $2 - 4$, $3 - 1$, $2 - 1$, $2 - 3$ y encontrar que cuatro de estas diferencias son negativas. La permutación tiene cuatro inversiones y es par. En general, si asociamos un número positivo con cada permanencia y un número negativo con cada inversión, entonces el producto de todos estos números que resultan de una permutación dada es positivo si la permutación es par, y negativo si la permutación es impar. Ya que un entero k precede a un entero m en su orden natural si y sólo si $m - k$ es positivo, un par de números km es una permanencia si $m - k$ es positivo, y es una inversión si $m - k$ es negativo. Por consiguiente, dada una permutación cualquiera de números, podemos considerar el signo del producto R de las diferencias obtenidas al restar cada elemento de la permutación ordenamente de cada uno de los elementos que le siguen. Por ejemplo, dada la permutación 4132, formamos el producto de las diferencias a que se ha hecho referencia y encontramos que:

$R = (1-4)\ (3-4)\ (2-4)\ (3-1)\ (2-1)\ (2-3)$ es positivo y como se vio anteriormente, la permutación 4132 es par.

Dada la permutación 1432, encontramos que:

$R = (4-1)\ (3-1)\ (2-1)\ (3-4)\ (2-4)\ (2-3)$ es negativo y la permutación 1432 es impar. Esta permutación impar 1432 puede obtenerse de la permutación par 4132, intercambiando los elementos 1 y 4. En general, encontraremos (Teorema V-4) que el intercambio de dos elementos cualesquiera de una permutación (es decir, una *transposición*) cambia la clase de la permutación de par a impar o de impar a par. En la sección siguiente demostraremos el resultado anterior para el caso de transposiciones de elementos adyacentes. También demostraremos que cualquiera permutación de un conjunto dado de elementos puede obtenerse del conjunto de elementos tomado en su orden natural mediante una sucesión de transposiciones de elementos adyacentes.

EJERCICIOS

1. Hacer una lista de las inversiones que hay en las siguientes permutaciones: 7132, 71452, 635421, 192837465.

2. Clasificar cada una de las permutaciones del Ejercicio 1 en pares o impares (a) contando el número de inversiones; (b) teniendo en cuenta el signo del producto de las diferencias R.

3. Indicar la transposición que se ha efectuado en cada una de las tres permutaciones de (V-4) para obtener las permutaciones correspondientes de (V-5).

4. Emplear el símbolo de producto Π como en el caso especial

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (x_j - x_i)$$

y nótese que para la permutación $x_1x_2x_3 \ldots x_n$, se tiene

$$R = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Este resultado puede escribirse también en la forma

$$R = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_i).$$

V-5 TRANSPOSICIONES. Una transposición *(ab)* se define como el intercambio de dos elementos cualesquiera a y b en una permutación. En esta sección nos preocuparemos, principalmente, de las transposiciones de elementos adyacentes. Dada la permutación 4132, podemos valernos de la sucesión de transposiciones de elementos adyacentes:

(V-6) $$(14),\ (23),\ (24),\ (34)$$

para obtener la sucesión de permutaciones:

(V-7) $$4132,\ 1432,\ 1423,\ 1243,\ 1234,$$

que comienza con la permutación dada y termina con los elementos en su orden natural. Aunque esto puede hacerse de varias maneras, por conveniencia hemos considerado, simplemente, los números 1, 2, 3, 4 en orden y en la permutación hemos conseguido que cada uno quede en el lugar que le corresponde. En general, dada cualquiera permutación de los elementos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, como

(V-8) $$a_{j_1}\ a_{j_2}\ a_{j_3}\ \ldots\ a_{j_n},$$

el elemento a_1 debe figurar entre los a_{j_k}. Si $a_1 = a_{j_1}$, bastará una sola transposición $(a_{j_1}a_1)$ para colocar a_1 en el lugar correspondiente (respecto al orden natural de sus elementos). Si $a_1 = a_{j_2}$, pueden hacerse dos transposiciones de elementos adyacentes $(a_{j_2}a_1)$ y $(a_{j_1}a_1)$. En general, si $a_1 = a_{j_k}$, se pueden hacer $k-1$ transposiciones de elementos adyacentes. Análogamente, una vez obtenido a_1 como el primer elemento, podemos considerar la nueva permutación de la forma:

$$a_1a_{r_1}a_{r_2}\ldots\ a_{r_{n-1}},$$

donde $a_2 = a_{r_s}$, y pueden hacerse $s-1$ transposiciones de elementos adyacentes para obtener la permutación:

$$a_1a_2a_{t_1}a_{t_2}\ldots a_{t_{n-2}},$$

Ya que la permutación (v-8) contiene solamente un número finito de elementos, este procedimiento puede continuarse hasta que todos los elementos estén en su orden natural. Estudiaremos, en primer lugar, permutaciones de un número finito de elementos, es decir, *permutaciones finitas,* ya hemos demostrado:

TEOREMA V-1. *Los elementos de cualquiera permutación finita pueden obtenerse en su orden natural por medio de una sucesión finita de transposiciones de elementos adyacentes.*

La sucesión de permutaciones (V-7) resulta al usar la sucesión de transposiciones (V-6) para obtener los elementos de la permutación 4132 en su orden natural. Consideremos ahora el problema de obtener la permutación 4132 del orden natural de sus elementos 1234. Si comenzamos con la permutación 1234, el intercambio de 1 y 4 como se señala en (V-6) no representa una transposición de elementos adyacentes en la permutación. Sin embargo, si se emplea la sucesión de transposiciones:

$$(34),\ (24),\ (23),\ (14),$$

que resulta de considerar la sucesión de transposiciones (V-6) en orden inverso, obtenemos las permutaciones:

$$1234,\ 1243,\ 1423,\ 1432,\ 4132,$$

es decir, la sucesión (V-7) en orden inverso. En general, se tiene

TEOREMA V-2. *Si en una permutación dada se puede emplear una sucesión ordenada S de transposiciones de elementos adyacentes para obtener los elementos de esta permutación en su orden natural, entonces, la sucesión de transposiciones que resulta de emplear las transposiciones de la sucesión S en orden inverso puede aplicarse a la permutación de los elementos en su orden natural con el objeto de obtener la permutación dada.*

La demostración de este teorema es una consecuencia inmediata (Ejercicio 3) de dar por aceptada la sucesión S, de admitir la sucesión correspondiente de permutaciones y del hecho de que las transposiciones (ab) y (ba) tienen el mismo efecto en la permutación.

Dada cualquiera permutación (V-8) consideremos el efecto de una transposición de elementos adyacentes $(a_{j_k}a_{j_{k+1}})$ en la clase (par o impar) de la permutación dada. Para cualquier $r < k$ o $r > k + 1$ el orden de a_{j_r} y de a_{j_k} como también el orden de a_{j_r} y de $a_{j_{k+1}}$ no se altera con la transposición. Por consiguiente, el único efecto sobre la clase de la permutación se produce al reemplazar $a_{j_k}a_{j_{k+1}}$ por $a_{j_{k+1}}a_{j_k}$. Este reemplazo introduce una nueva inversión si $a_{j_k}a_{j_{k+1}}$ era una permanencia, y hace desaparecer una inversión si $a_{j_k}a_{j_{k+1}}$ era una inversión. Por consiguiente, una sola transposición de elementos adyacentes hace variar siempre el número de inversiones en una y se tiene

TEOREMA V-3. *Una sola transposición de dos elementos adyacentes de una permutación cualquiera hace variar la clase de la permutación.*

Los tres teoremas anteriores pueden usarse en varios de los ejercicios siguientes para indicar relaciones entre la clase de una permutación y ciertas sucesiones de transposiciones de sus elementos. En la sección que sigue encontraremos que se verifican relaciones muy análogas cuando los elementos permutados no son necesariamente adyacentes en la permutación.

EJERCICIOS

1. Indicar una sucesión de transposiciones de elementos adyacentes que pueda usarse en cada una de las siguientes permutaciones para colocar los elementos de ellas en su orden natural: 3214, *adcb*, 152634, *ptqsr*.
2. Repetir el Ejercicio 1 para las permutaciones 152634 y *ptqsr*, de varias maneras.
3. Demostrar el Teorema V-2.
4. Proponer por lo menos tres sucesiones diferentes de transposiciones de elementos adyacentes que puedan usarse para obtener la permutación 4132 de 1234.
5. Proponer una sucesión de transposiciones de elementos adyacentes para cada una de las permutaciones del Ejercicio 1 y que puedan usarse para obtener la permutación a partir del orden natural de sus elementos.
6. Repetir de varias maneras el Ejercicio 5 para las permutaciones 152634 y *ptqsr*.
7. Demostrar que para cualquier entero positivo n podemos obtener cualquiera permutación dada de n elementos a partir de la permutación de sus elementos en su orden natural, mediante una sucesión de a lo sumo $n(n-1)/2$ transposiciones de elementos adyacentes.
8. Verificar que cada una de las permutaciones impares de los Ejercicios 1, 2, 4, 5, 6, ha sido permutada hasta obtener el orden natural de sus elementos o se ha obtenido a partir del orden natural de sus elementos mediante un número impar de transposiciones. Repetir este ejercicio para las permutaciones pares.
9. Demostrar que todas las permutacionesde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pueden obtenerse

empleando solamente transposiciones de la forma $(a_j a_n)$, en donde n es fijo y j puede tomar los valores 1, 2, . . . , n-1.

10. ¿Es siempre posible obtener una permutación par a partir del orden natural de sus elementos mediante un número impar de transposiciones de elementos adyacentes? Explicar.

11. Demostrar que para n mayor que 1 son pares exactamente la mitad de las $n!$ permutaciones.

12. Hacer una segunda demostración del Teorema v-3, por medio de R tal como en el Cap. v-4, Ejercicio 4.

V-6 PERMUTACIONES PARES E IMPARES. Hemos visto en el Capítulo v-4 cómo calcular el número de inversiones de cualquiera permutación dada y cómo clasificar la permutación en par o impar, según que el número de inversiones sea par o impar. También hemos visto en el Capítulo v-5 que cualquiera permutación dada puede obtenerse de o transformarse en una permutación de los elementos en su orden natural mediante una sucesión de transposiciones de elementos adyacentes. Dado que cada transposición se asocia (Teorema v-3) en este procedimiento con una sola inversión, toda permutación par puede obtenerse de o transformarse en el orden natural de sus elementos mediante un número par de transposiciones de elementos adyacentes (Teoremas v-1 y v-2). Análogamente, toda permutación impar puede obtenerse de o transformarse en el orden natural de sus elementos mediante un número impar de transposiciones de elementos adyacentes. Demostraremos, ahora, que cualquiera transposición, es decir, cualquier intercambio de dos elementos (adyacentes o no), de una permutación, puede obtenerse mediante un número impar de transposiciones de elementos adyacentes. Por consiguiente, demostraremos que cualquiera transposición de los elementos de una permutación cambia la clase de la permutación.

Dada cualquiera permutación, sabemos que (Teorema v-3) el intercambio de dos elementos adyacentes cambia la clase de la permutación. El intercambio de dos elementos separados por un solo elemento entre ellos, puede efectuarse mediante tres transposiciones de elementos adyacentes. Por ejemplo, las transposiciones:

$$(ab) \quad (ac) \quad (bc)$$

pueden utilizarse para cambiar entre sí los elementos a y c en la permutación abc. La sucesión correspondiente de permutaciones es

$$abc, \quad bac, \quad bca, \quad cba.$$

El intercambio de dos elementos de una permutación que tienen entre sí dos elementos, puede efectuarse mediante cinco transposiciones de elementos adyacentes. Por ejemplo, a y d en $abcd$ pueden cambiarse entre sí por medio de la sucesión de transposiciones:

$$(ab) \quad (ac) \quad (ad) \quad (cd) \quad (bd)$$

que determina la sucesión de permutaciones:

$$abcd, \quad bacd, \quad bcad, \quad bcda, \quad bdca, \quad dbca$$

En general, el intercambio de dos elementos de una permutación que tienen entre sí k elementos puede efectuarse mediante $2k + 1$ transposiciones de elementos adyacentes (Ejercicio 1). De aquí que, de acuerdo con el Teorema v-3, se pueda cambiar la clase de cualquiera permutación por medio de un solo cambio de dos cualesquiera de sus elementos. En otras palabras, hemos demostrado

TEOREMA v-4. *La clase de una permutación cualquiera se cambia por medio de una transposición cualquiera de sus elementos.*

Podemos valernos del producto de las diferencias (Ejercicio 2) tal como en el Ejercicio 4, Capítulo v-4, para hacer una segunda demostración del Teorema v-4. Este teorema se necesitará en el Capítulo v-8 para la demostración de una de las propiedades básicas de los determinantes. Ahora nos apartaremos de nuestra discusión de las propiedades de las permutaciones para estudiar el empleo de las permutaciones en la definición del determinante de una matriz cuadrada.

EJERCICIOS

1. Demostrar que en una permutación se puede efectuar el cambio de dos elementos que tengan entre sí k elementos por medio de $2k + 1$ transposiciones de elementos adyacentes.

2. Empléese el método del Ejercicio 12, Cap. v-5, para proponer una segunda demostración del Teorema v-4.

3. Demostrar que puede obtenerse una permutación cualquiera dada de n

elementos del orden natural de sus elementos por medio de una sucesión de a lo más $n - 1$ transposiciones.

4. En el Teorema v-2, reemplácese "transposición de elementos adyacentes" por "transposición" y demuéstrese el teorema que resulta.

5. Considérense transposiciones arbitrarias de elementos (no necesariamente adyacentes) de la permutación 123 y demuéstrese que la permutación que resulta depende del orden en que se efectúen las transposiciones, es decir, que la aplicación de una sucesión de transposiciones no es necesariamente una operación conmutativa.

6. Valiéndose de las sucesiones de transposiciones (21), (24); (43), (42), (41), (23); (24), (14) y del orden natural 1234, demostrar que la permutación 4132 puede obtenerse del orden natural por medio de varias sucesiones diferentes de transposiciones.

7. Citar por lo menos cuatro sucesiones diferentes de transposiciones que puedan emplearse para obtener la permutación 1234 de 4132.

8. Indicar varios ejemplos de sucesiones de transposiciones que (a) sean conmutativas; (b) no sean conmutativas.

V-7 DETERMINANTES. En esta sección consideraremos un procedimiento explícito para escribir el determinante de cualquiera matriz cuadrada. Como se señaló en el Cap. v-2, el determinante de una matriz cuadrada se define como un polinomio en los elementos de la matriz. Este polinomio puede obtenerse de diferentes maneras. Nos preocuparemos, principalmente, de dos de estos métodos: el desarrollo de un determinante de una matriz cuadrada con respecto a una fila y el desarrollo de un determinante de una matriz cuadrada con respecto a una columna. Estos desarrollos difieren solamente en el método empleado para obtener los términos del polinomio. En el Capítulo v-8 se demostrará que son equivalentes.

Estrictamente hablando, *el desarrollo de un determinante de una matriz cuadrada respecto de una fila* puede definirse como la suma algebraica de todos los productos posibles que se obtienen al tomar uno y sólo un factor de cada fila y columna de la matriz, en donde cada producto se encuentra precedido de un signo más o de un signo menos, según que el número de inversiones de los índices de columna de los factores sea par o impar y en donde los índices de fila se encuentran en su orden natural (ver Bibilografía Nº 16, pág. 3). Consideremos unos cuantos ejemplos de esta definición.

Dada cualquiera matriz cuadrada de dos filas y dos columnas:

(V-9) $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

Podemos designar el determinante de esta matriz por:

(V-10) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

y buscar el desarrollo del determinante con respecto a la fila. Siendo así (v-10) representa el determinante de (v-9) y (v-9) es la matriz de (v-10). Por definición, el determinante de (v-9) es el polinomio $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Conforme a la definición anterior del desarrollo de un determinante con respecto a una fila, podemos elegir cualquier elemento, como ser a_{11}, y tomar junto con él un elemento que no se encuentre en la misma fila ni en la misma columna que a_{11} en la matriz del determinante. En otras palabras, si elegimos a_{11}, tachamos la primera fila y la primera columna.

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} \end{vmatrix}$$

y elegimos un elemento de entre los restantes. En el caso de (v-10) queda sólo un elemento, y obtenemos el producto $a_{11}a_{22}$. En general, se repite el procedimiento tachando la fila y la columna del nuevo elemento elegido hasta que quede un solo elemento. Una vez elegido el producto $a_{11}a_{22}$ en (v-9) o en (v-10), queda únicamente otro producto $a_{12}a_{21}$. Cada uno de estos productos puede escribirse de dos maneras: $a_{11}a_{22}$ o bien $a_{22}a_{11}$ y $a_{12}a_{21}$ o bien $a_{21}a_{12}$. Conforme a la definición anterior, tomaremos estos productos en las formas $a_{11}a_{22}$ y $a_{12}a_{21}$ en donde los índices de la fila (los primeros subíndices), se encuentran en su orden natural. En seguida, tomaremos cada producto con un signo más si el índice de la columna (segundo subíndice), forma una permutación par, y con signo menos si el índice de la columna forma una permutación impar. Por consiguiente, el determinante de (v-9) puede expresarse como:

(V-11) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Si hubiéramos comenzado con un elemento diferente, como ser, a_{21} en vez de a_{11}, habríamos obtenido una expresión equivalente, tal como $-a_{21}a_{12}+a_{22}a_{11}$, del desarrollo del determinante con respecto a la fila.

Antes de considerar otros ejemplos de la definición anterior, vamos a definir el orden de una matriz cuadrada. Se denomina *orden* de una matriz cuadrada su número de filas (o columnas). Por eso (v-9) es una matriz de orden 2 y (v-2) es una matriz de orden n. Análogamente (v-10), representa un determinante de orden 2 y, en general, el orden del determinante de una matriz cuadrada es el mismo que el orden de la matriz.

Hemos aplicado la definición anterior del desarrollo de un determinante con respecto a una fila a determinantes de orden 2. Un determinante de orden 3 puede desarrollarse análogamente (Ejercicio 1) por medio de $3!=6$ productos de tres factores cada uno de la siguiente manera:

(V–12)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

El polinomio de (v-11) puede expresarse en la forma

$$\sum e_{j_1j_2}a_{1j_1}a_{2j_2},$$

en donde Σ es el símbolo de la suma, y donde se suma $2!=2$ permutaciones de los segundos subíndices, y $e_{j_1j_2}$ se toma como $+1$ o -1, según que la permutación de los segundos subíndices sea par o impar con respecto al orden natural de los enteros positivos. Análogamente, el polinomio de (v-12) puede expresarse en la forma

$$\sum e_{j_1j_2j_3}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

donde se suman las $3!=6$ permutaciones de los segundos subíndices. En general, el desarrollo del determinante (v-2) de una matriz de orden n con respecto a la fila puede expresarse en la forma

(V–13)
$$\sum e_{j_1j_2\ldots j_n}a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n},$$

donde se suman las $n!$ permutaciones de los segundos subíndices y las e son, como anteriormente, $+1$ o -1, según que las permutaciones de los segundos subíndices sean pares o impares. Dado que este desarrollo general de un determinante de orden n es un polinomio que implica únicamente operaciones de anillo entre los elementos del determinante, podemos esperar encontrar una interpretación a los determinantes y matrices de elementos pertenecientes a cualquier dominio de integridad (véanse los párrafos de la introducción al Capítulo II). Las matrices y determinantes más comunes de las matemáticas elementales tienen por elementos números reales arbitrarios. Supondremos que este es el caso en la mayor parte de este capítulo, pero consideraremos también algunas aplicaciones de matrices cuyos elementos son polinomios. Las matrices cuyos elementos son números complejos desempeñan un papel importante en las teorías de matemáticas superiores.

En la sección siguiente consideraremos tres propiedades de los determinantes que, especialmente en el caso de $n > 3$, suelen permitirnos simplificar el método formal anterior para desarrollar un determinante dado. Para $n = 2$ se obtiene fácilmente el polinomio (v-11) como el producto de los elementos de la diagonal principal (de índices iguales), disminuido en el producto de los elementos de la diagonal secundaria. Para $n = 3$ existe también un método análogo en el que se emplean líneas diagonales. Ya que muchos lectores han empleado previamente el método de (v-14), lo hemos mencionado con el objeto de insistir en que no existe un método análogo para n mayor que 3. Para $n = 3$ se puede copiar nuevamente las dos primeras columnas de la manera siguiente:

$$\text{(V–14)} \qquad \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

y sumar los productos de los elementos sobre las diagonales paralelas a la diagonal principal

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32},$$

y de éstos sustraer la suma de los productos de los elementos sobre las diagonales paralelas a la diagonal secundaria, es decir, sumar los productos negativos

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Sin embargo, este método daría sólo $2n = 8$ términos del polinomio para determinantes de orden 4, en circunstancias en que se necesitan $n! = 24$ términos. En general, el método anterior de las diagonales (v-14) puede utilizarse solamente para determinantes de orden menor o igual a 3. Para determinantes de todos los órdenes pueden usarse otros métodos más adecuados (Cap. v-9 y Cap. v-10) y se recomiendan en lugar de aquel de (v-14) para determinantes de orden 3.

EJERCICIOS

1. Obtener el desarrollo de un determinante (v-12), con respecto a la fila, valiéndose de la definición formal del mismo.

2. Encontrar el desarrollo con respecto a la fila de

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \text{ y de } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

3. Encontrar el desarrollo con respecto a la fila de

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

4. Encontrar el desarrollo con respecto a la fila de

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

5. Escribir una matriz general de orden 4 por medio de (v-2) haciendo $n = 4$. Encontrar el desarrollo del determinante de esta matriz con respecto a la fila.

6. Encontrar y simplificar el desarrollo con respecto a la fila de

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

7. Definir el desarrollo del determinante de una matriz cuadrada con respecto a la columna cambiando la palabra "fila" por "columna" en la definición del desarrollo de un determinante con respecto a la fila.

8. Repetir el Ejercicio 2, haciendo el desarrollo con respecto a la columna.

9. Encontrar el desarrollo del determinante de (v-9) con respecto a la columna y compararlo con el desarrollo con respecto a la fila.

10. Encontrar el desarrollo de (v-12) con respecto a la columna y compararlo con el desarrollo con respecto a la fila.

11. Repetir los Ejercicios 3 y 4, haciendo el desarrollo con respecto a la columna.

12. Encontrar el desarrollo de una matriz general de orden 4 con respecto

a la columna y compararlo con el desarrollo con respecto a la fila que se obtuvo en el Ejercicio 5.

13. Repetir el Ejercicio 6, haciendo el desarrollo con respecto a la columna.

14. Expresar los desarrollos de matrices cuadradas de orden 2, 3, 4, y n con respecto a la columna, valiéndose de la notación para la suma como en (v-13).

V-8 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES.

En esta sección emplearemos los desarrollos con respecto a la fila

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{V-15}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{V-16}$$

para los determinantes (v-11) y (v-12) de matrices generales de segundo y tercer orden para ilustrar tres propiedades básicas de los determinantes. Emplearemos la palabra *línea* de una matriz para indicar indistintamente una fila o una columna. Esta notación es muy útil para el caso en que una proposición se aplique por igual a filas y columnas.

Cada término del polinomio (v-15) tiene exactamente un factor con el primer subíndice 1, es decir, cada término tiene exactamente un factor que pertenece a la primera fila de la matriz del determinante. Análogamente, cada término tiene exactamente un factor de la segunda fila, de la primera columna, de la segunda columna. En consecuencia, cada término del desarrollo con respecto a la fila (v-15) tiene exactamente un factor de cada línea de la matriz del determinante (v-11). En otras palabras, el desarrollo con respecto a la fila (v-15) es lineal y homogéneo en los elementos de cada línea de la matriz del determinante.

Esto mismo se puede afirmar con respecto al desarrollo (v-16) del determinante (v-12) con respecto a la fila. Cada término del desarrollo con respecto a la fila contiene exactamente un factor perteneciente a cada línea de la matriz del determinante, es decir, el desarrollo con respecto a la fila es lineal y homogéneo en los elementos de cada línea de la matriz del determinante. Nuestra primera propiedad básica de los determinantes resulta al expresar esto mismo para determinantes de cualquier orden n.

PROPIEDAD A. *El desarrollo de un determinante con respecto a la fila es lineal y homogéneo en los elementos de cada línea de su matriz.*

Utilizaremos, en seguida, esta propiedad y consideraremos unos cuantos métodos particulares de desarrollar el determinante general de tercer orden (v-12). Si en el determinante (v-16) reunimos los coeficientes de los elementos de la primera fila del determinante, tenemos:

$$\text{(V-17)}\quad a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),$$

en donde se ha sumado el término que contiene a_{1j} si $1 + j$ es par y se ha restado si $1 + j$ es impar. La importancia de esta convención se apreciará luego al estudiar determinantes menores de elementos.

El desarrollo (v-17) se denomina un desarrollo respecto de los elementos de la primera fila de la matriz del determinante. Análogamente, el determinante general de tercer orden puede desarrollarse respecto de los elementos de cualquiera línea de la matriz del determinante (Ejercicio 1).

Si los elementos de la primera fila de la matriz de (v-12) son todos cero, es decir, $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0$, entonces el desarrollo (v-17) es cero. Ya que cualquier determinante puede expresarse por medio de los elementos de cualquiera línea de la matriz del determinante, valiéndonos de la Propiedad A, tenemos

TEOREMA V-5. *Si todos los elementos de una línea de una matriz cuadrada son iguales a cero, su determinante es cero.*

Volviendo a (v-17) veremos que el coeficiente de a_{11} es precisamente el desarrollo del determinante que se obtiene tachando en (v-12) la fila y la columna correspondiente a a_{11}. Lo mismo ocurre para a_{13} y, con excepción del signo, para a_{12}. En general, denominaremos *el menor de un elemento* de una matriz cuadrada de orden n, al determinante de orden $n - 1$ que se obtiene tachando la fila y la columna correspondiente al elemento. En seguida denominaremos *cofactor* A_{ij} de un elemento a_{ij} al coeficiente de a_{ij} en el determinante (v-13). Ya hemos observado que los cofactores de a_{11} y de a_{13} en (V - 17) son iguales a sus menores, en circunstancias de que el cofactor de a_{12} es el negativo del menor de aquel elemento. De acuerdo con la Propiedad C y con (V - 13) podemos probar en el Ejercicio 15 de esta sección y mediante otro método en el Ejercicio 4, Capítulo V - 10, que el cofactor de cualquier elemento a_{ij} es $(-1)^{i+j}$ veces el menor de a_{ij}.

Valiéndonos de la definición anterior de cofactor, el desarrollo de un determinante de orden n puede expresarse:

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

por medio de los menores de los elementos de la primera fila de la matriz del determinante, o también por medio de los menores de los elementos de la fila i-ésima,

$$\text{(V - 18)} \qquad a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \text{ o también}$$

$$\text{(V - 19)} \qquad a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

por medio de los menores de los elementos de la columna j-ésima. Es costumbre hablar del desarrollo de un determinante por medio de los menores de sus elementos en la forma que se acaba de señalar, en lugar de hablar de cofactores para referirse a los menores tomados con el signo que les corresponde. El Teorema V - 5 pudo haberse postergado para introducirse aquí como consecuencia inmediata de estos desarrollos.

Si cada elemento de la primera fila de la matriz (V - 12) se multiplica por k, entonces a_{11}, a_{12}, a_{13} de (V - 17) se reemplazan por ka_{11}, ka_{12}, ka_{13} y el determinante de la matriz ha quedado multiplicado por k. De la misma manera, de (V - 18) y de (V - 19), se obtiene

TEOREMA V - 6. *Si los elementos de cualquier línea de una matriz se multiplican por k, entonces su determinante queda multiplicado por k.*

Este teorema nos asigna el derecho de sacar un factor común de cualquiera línea de la matriz de un determinante y de multiplicarlo por el determinante de la nueva matriz. Por ejemplo, se tiene

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

El Teorema v - 6 puede demostrarse también directamente del desarrollo (v - 13) y de la Propiedad A (Ejercicio 8).

Las otras dos propiedades básicas de los determinantes pueden ilustrarse, respectivamente, mediante el intercambio de filas y columnas en la matriz de un determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

y mediante el intercambio de dos filas de la matriz de un determinante, cambiando el signo del determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

Estas propiedades constituirán la base de los procedimientos para simplificar el desarrollo de un determinante (Cap. v - 9). El término identidad se define en el Cap. III - 4 en el sentido en que se usa en el siguiente enunciado:

PROPIEDAD B. *El desarrollo de un determinante de una matriz cuadrada con respecto a una fila es idéntico al desarrollo del determinante respecto de una columna.*

PROPIEDAD C. *El intercambio de dos líneas paralelas cualesquiera en una matriz cuadrada, cambia el signo de su determinante.*

Estas dos propiedades pueden demostrarse por medio del desarrollo (v - 13). El término "dos líneas paralelas" se refiere a dos filas o a dos columnas. La propiedad B establece que

$$\sum e_{j_1 j_2 \ldots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} = \sum e_{k_1 k_2 \ldots k_n} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \ldots a_{k_n n},$$

en donde se han sumado las $n!$ permutaciones de los índices de fila y columna respectivamente. Las dos sumas contienen cada una todos los $n!$ productos posibles de los elementos a_{ij} de tal manera que ningún par de elementos sea de la misma fila ni tampoco ningún par de elementos sea de la misma columna. Por consiguiente, sólo queda por demostrar que cada producto (término de la suma) tiene el mismo signo cuando sus factores están ordenados respecto de sus índices de fila que cuando están ordenados respecto de sus índices de columna. Por ejemplo, cuando $n = 3$, tenemos un término $a_{12}a_{23}a_{31}$. Si se ha ordenado respecto de los índices de fila, la permutación de los índices de columna es 231, que puede obtenerse del orden natural por la sucesión de transposiciones (12), (13) y por lo tanto es par. Si se ordena respecto de los índices de columna, tenemos $a_{31}a_{12}a_{23}$ y la permutación de los índices de fila es 312, que puede obtenerse del orden natural por medio de (23), (13) y por lo tanto es también par. De aquí que el término $a_{12}a_{23}a_{31}$ en el desarrollo de un determinante de tercer orden sea positivo, ya sea que el determinante se haya desarrollado respecto de las filas o respecto de las columnas. Esto es verdadero esencialmente (ver Teorema v - 2), porque la misma sucesión (12), (13) de transposiciones empleadas para obtener la permutación 231 de los índices de columna a partir de su orden natural puede también usarse en orden inverso (13), (12), en la permutación 231 para ordenar los índices de columna en su orden natural y obtener de este modo $a_{31}a_{12}a_{23}$. En general, la sucesión de transposiciones que se emplea para obtener la permutación de los índices de columna de $a_{1j1}\ a_{2j2}\ \ldots\ a_{njn}$ a partir de su orden natural, puede usarse en orden inverso para ordenar los factores conforme a sus índices de columna $a_{k11}\ a_{k22}\ \ldots\ a_{knn}$. Dado que las dos sucesiones de transposiciones contienen el mismo número de transposiciones, las dos permutaciones son ambas pares o ambas impares y por lo tanto, cada término del desarrollo del determinante tiene el mismo signo ya sea que el determinante se haya desarrollado por filas o por columnas. Con esto se completa la demostración de la Propiedad B y se justifica la equivalencia entre los desarrollos (v - 18) y (v - 19).

La Propiedad C puede demostrarse rápidamente valiéndose del Teorema v - 4 de la manera siguiente: Si se cambian dos columnas de una matriz, cada permutación de (v - 13) cambia de clase y cada término del desarrollo cambia de signo. Para obtener el mismo resultado cuando se cambian dos filas cualesquiera se puede aprovechar la Propiedad B y el desarrollo por columnas.

El teorema siguiente es una consecuencia inmediata (Ejercicio 12) de la Propiedad C y del Teorema V-6.

TEOREMA V - 7. *Si en una matriz cuadrada dos líneas paralelas son proporcionales, su determinante es igual a cero.*

En las dos secciones siguientes, utilizaremos las propiedades y teoremas anteriores para exponer métodos que simplifiquen la tarea de desarrollar el determinante de cualquiera matriz cuadrada dada.

EJERCICIOS

1. Valiéndose de (V-16) proponer desarrollos análogos a (V-17) de (V-12) respecto de los elementos de (a) su segunda fila; (b) su tercera fila; (c) su primera columna; (d) su tercera columna.
2. Proponer una matriz cuadrada de orden 3 que ilustre el Teorema V-5.
3. Dar un ejemplo de una matriz cuadrada de orden 2 con determinante cero y elementos diferentes de cero.
4. Indicar el determinante menor de cada elemento de (V-12).
5. Indicar el cofactor de cada elemento de (V-12).
6. Repetir el Ejercicio 1, empleando cofactores.
7. Indicar los cofactores de cada elemento del determinante de una matriz general de orden 4.
8. Demostrar el Teorema V-6 directamente de (V-13) y de la Propiedad A.
9. Valiéndose del Teorema V-6, escribir los siguientes determinantes como productos de fracciones y determinantes con elementos enteros:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & \frac{2}{3} & -1 \end{vmatrix}.$$

10. Demostrar que el determinante de cualquiera matriz cuadrada que tiene los elementos de una línea respectivamente proporcionales a los elementos correspondientes de una línea paralela a ella, puede expresarse como un múltiplo constante del determinante de una matriz que tiene dos líneas paralelas idénticas.
11. Demostrar que una matriz que tiene dos líneas paralelas idénticas tiene determinante igual a cero.
12. Demostrar el Teorema V-7.
13. Demostrar que el cofactor de a_{11} es igual a su menor.
14. Demostrar que el cofactor de a_{ij} es $(-1)^{i+j}$ veces su determinante menor.

15. Demostrar que el cofactor de a_{ij} es $(-1)^{i+j}$ veces su determinante menor.

16. Dado el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

escribirlo nuevamente de modo que sus elementos sean enteros y que todos los elementos de la primera columna sean iguales a $+1$.

17. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} yz & 1 & x \\ zx & 1 & y \\ xy & 1 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}.$$

18. Demostrar que $a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0$
y que cuando $j \neq k$. $a_{j1}A_{k1} + a_{j2}A_{k2} + \cdots + a_{jn}A_{kn} = 0$

V-9 DESARROLLO DE LOS DETERMINANTES. Hemos definido explícitamente el desarrollo de un determinante (Cap. v - 7) respecto de la fila y estudiado sus propiedades básicas (Cap. v - 8). Hemos definido (Ejercicio 7, Cap. v - 7) el desarrollo de un determinante respecto de una columna y demostrado que es idéntico con el desarrollo respecto de la fila (Propiedad C, Cap. v - 8). Los desarrollos de un determinante de una matriz cuadrada por medio de determinantes menores de los elementos de una fila dada (v - 18) o de una columna dada (v - 19) son también idénticos con el desarrollo de un determinante respecto de una fila. Por consiguiente, podemos hablar de *el desarrollo* de un determinante y buscar modos de reducir el trabajo de desarrollar un determinante, es decir, de encontrar el polinomio asociado con cualquiera matriz cuadrada dada. Frecuentemente designaremos determinantes por esquemas tales como (v - 20) con el objeto de tener presente las filas y columnas de la matriz del determinante.

El desarrollo de un determinante de orden n, respecto de una fila tiene $n!$ términos,, en circunstancias de que el desarrollo de un determinante de orden $n-1$ respecto de una fila tiene solamente $(n-1)!$ términos. Por eso, consideraremos métodos para reemplazar un determinante de orden n por un determinante de orden $n-1$, cambiando solamente la forma del desarrollo y no su valor, es decir, el desarrollo del nuevo determinante de orden $(n-1)$ debe ser idénticamente igual a aquel del determinante dado de orden n. Por jemplo, si todos los elementos de una línea, con la excepción de uno de ellos, de la matriz de un determinante de orden n son iguales a cero, este determinante puede reemplazarse por un determinante de orden $n-1$ mediante los desarrollos (v - 18), (v - 19). Para $n=3$, tenemos las relaciones

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

para elementos arbitrarios a_{ij}. En esta sección consideraremos dos teoremas que nos permitirán emplear los procedimientos mencionados para el determinante de cualquiera matriz cuadrada.

El determinante que se designa por

$$\text{(V - 20)} \qquad \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

puede desarrollarse (v - 17) respecto de los elementos de la primera fila de su matriz como sigue:

$$(a_{11}+b_{11})(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-(a_{12}+b_{12})(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) \\ +(a_{13}+b_{13})(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}).$$

Este desarrollo puede escribirse también en la forma

$$a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ +b_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-b_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+ \\ b_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}),$$

el que, si se compara con (v - 17), se ve que representa la suma de dos determinantes. Esta suma puede designarse por

$$\text{(V - 21)} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

En general, podemos usar el procedimiento citado y demostrar (Ejercicio 1).

TEOREMA v - 8. *Si la j-ésima fila (o columna) de una matriz M está formada por elementos de la forma $a_{jt} + b_{jt}$, entonces el determinante D de M satisface $D = D_1 + D_2$, en donde D_1 y D_2 son determinantes de matrices cuyos elementos son los mismos de los de M con la excepción de sus filas j-ésimas (o columnas) que son, respectivamente, los elementos a_{jt} y los b_{jt}.*

Si $b_{jt} = ka_{tt}$, $t \neq j$, el Teorema v - 8 tiene una aplicación muy útil. Por ejemplo, si $b_{1t} = ka_{2t}$ en (v - 20), entonces (v - 21) resulta igual a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

en donde el segundo determinante es cero, conforme al Teorema v - 7. Análogamente, cualquier determinante de tercer orden permanece invariable si se suma a cada elemento de la primera fila un múltiplo constante fijo (positivo o negativo) del elemento correspondiente de la tercera fila de su matriz. También podemos demostrar que un múltiplo constante fijo de los elementos de cualquiera fila de la matriz de un determinante de tercer orden puede sumarse a los elementos correspondientes de cualquier otra fila sin que el determinante varíe. Lo mismo se puede afirmar respecto de las columnas de la matriz de un determinante de tercer orden (Ejercicio 4) y, en general (Ejercicio 5), para filas y columnas de la matriz de cualquier determinante valiéndose de (v - 18) y de (v - 19). Por consiguiente, tenemos:

TEOREMA v - 9. *El determinante de cualquiera matriz cuadrada permanece invariable si se suma a los elementos de cualquiera línea de la matriz, un múltiplo constante fijo de los elementos correspondientes de cualquiera línea paralela distinta.*

Al aplicar el Teorema v - 9, hay que tomar dos precauciones. Primera, no se puede sumar k veces los elementos de una línea a los elementos de la misma línea, ya que esto multiplicaría el determinante por $k + 1$ (Teorema v - 6). Segundo, los nuevos elementos, como $a_{tj} + ka_{tj}$, deben reemplazar a los elementos a_{tj}. Si se usaran para reemplazar a los elementos a_{tj}, el determinante que-daría, en efecto, multiplicado por k. Tomadas estas precauciones, el Teorema v - 9 es extremadamente útil para cambiar de forma a un determinante, de modo que a lo sumo uno de los elementos de alguna línea de su matriz sea diferente de cero. Luego (v - 18) o (v - 19) pueden usarse para expresar el determinante dado como un número constante de veces un determinante de orden inferior. Si $a_{11} = 1$, entonces puede sustraerse a_{21} veces cada elemento de la primera fila de la matriz del determinante del elemento correspondiente de la segunda fila, y de este modo a_{21} puede reemplazarse por cero. Análogamente, con la excepción de a_{11}, cada elemento de la primera fila y cada elemento de la primera columna pueden reemplazarse por cero (Ejercicio 7). Si algún a_{ij} satisface $|a_{ij}| = 1$ en cualquier determinante, entonces uno por medio de los elementos de la fila i-ésima y uno por medio de los elementos de la columna j-ésima pueden reemplazarse por cero. En general, el determinante de cualquiera matriz cuadrada cuyos elementos son números reales arbitrarios puede expresarse como el determinante de una matriz que tenga a lo sumo un elemento diferente de cero en cada fila y en cada columna (Ejercicio 16).

El determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} \tag{V - 22}$$

puede desarrollarse, por medio de los principios citados, como sigue: se puede sacar factor común 2 a la primera columna de la matriz del determinante y multiplicar por 2 el determinante de la nueva matriz (Teorema v - 6), a la segunda fila se le puede sustraer el doble de la tercera fila (Teorema v - 9), y a la primera fila se le puede sustraer la tercera. Efectuando estos pasos en el orden establecido, tenemos lo siguiente:

$$2\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & -5 & -8 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

En seguida desarrollamos el determinante último por medio de los menores de los elementos de la primera columna de su matriz, como en (v - 19), y obtenemos

$$2 \cdot 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -8 \end{vmatrix} = 2(-8 + 10) = 4.$$

Hemos empleado la terminología corriente "desarrollo de un determinante" para designar el procedimiento mediante el cual se obtiene el polinomio o número (es decir, el determinante) asociado con cualquiera matriz cuadrada. Se suele denominar *evaluación* del determinante a su desarrollo cuando los elementos de la matriz son números. En este sentido hemos evaluado el determinante designado por (v - 22) y hemos encontrado que tiene un valor 4, es decir, el determinante es el polinomio 4.

Dado cualquier conjunto de elemento b_1, b_2, . . b_k, podemos definir a

$$c_1b_1 + c_2b_2 + \ldots + c_kb_k,$$

como una *combinación lineal* de los b, en que los c son constantes y por lo menos un $c_j \neq 0$. Luego el Teorema v - 9 puede ampliarse (Ejercicio 20) y formularse así: El determinante de cualquiera matriz cuadrada permanece invariable si se suman a los elementos de cualquiera línea de la matriz, cualquiera combinación fija lineal de los elementos correspondientes de las otras líneas paralelas. Se dará un ejemplo de este concepto y se insistirá más sobre él en el Capítulo v - 13 al tratar la dependencia lineal.

Ahora podemos desarrollar determinantes de matrices cuadradas de orden n, siendo n cualquier entero positivo, por medio de determinantes menores de los elementos de cualquiera línea. El Teorema v - 9 puede aplicarse para reducir el número de términos del desarrollo. Por eso, es a menudo ventajoso desarrollar un determinante de orden n por medio de determinantes de orden $k < n$ que contengan elementos del determinante dado. Si $k = n - 1$, este desarrollo está indicado en (v - 18) y en (v - 19). En el Capítulo v - 10 consideraremos nuevos métodos para el caso en que $k < n - 1$.

EJERCICIOS

1. Demostrar el Teorema v-8.
2. Dar un ejemplo del Teorema v-8 y comprobarlo, por medio de determinantes de orden 2, con elementos numéricos.
3. Repetir el Ejercicio 2 para determinantes de orden 3.
4. Demostrar que los elementos de cualquier columna de una matriz de tercer orden pueden aumentarse o disminuirse en un múltiplo fijo constante de los elementos correspondientes de cualquier otra columna sin que varíe el determinante de la matriz.

5. Demostrar el Teorema v-9.

6. Dar un ejemplo del Teorema v-9, valiéndose de un determinante de orden 3.

7. Escribir un determinante de tercer orden que tenga $a_{11} = -1$ y $|a_{ij}| > 1$ en el caso en que $a_{ij} \neq a_{11}$. Por medio del Teorema v-9, volver a escribir este determinante de modo que a_{21}, a_{31}, a_{13} y a_{12} se reemplacen por cero.

8. Repetir el Ejercicio 7 para un determinante de orden 4, reemplazando por cero los elementos a_{21}, a_{31}, a_{41}, a_{12}, a_{13} y a_{14}.

9. Evaluar los determinantes

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 11 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

[Respuestas: $+ 2, 0, - 6$.]

10. Desarrollar

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{vmatrix}$$

11. Formular y demostrar un teorema general para el desarrollo de determinantes de matrices triangulares como aquella del Ejercicio 10, en la que todos los elementos que se encuentran arriba de la diagonal principal son iguales a cero.

12. Evaluar

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

13. Desarrollar los determinantes

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

14. Por medio del Algoritmo de Euclides (Cap. II-5) demostrar que cualquier determinante de segundo orden (v-10) con elementos enteros puede escribirse reemplazando los elementos a_{12} y a_{21} por cero; es decir, cualquier determinante de segundo orden con elementos enteros puede escribirse de modo que a lo sumo los elementos de la diagonal principal sean diferentes de cero. (Es suficiente usar enteros o, en general, elementos de un dominio de integridad).

15. Demostrar que si en el determinante de tercer orden (V-12) los elementos son números reales, éste puede escribirse de modo que a lo sumo los elementos de la diagonal principal sean diferentes de cero.

16. Señalar un procedimiento por medio del cual el determinante de cualquiera matriz cuadrada cuyos elementos sean números reales arbitrarios, pueda expresarse como el determinante de una matriz tal que tenga a lo sumo los elementos de la diagonal principal de la nueva matriz, diferentes de cero. ¿Sirve el procedimiento dado para el caso en que los elementos del determinante sean elementos arbitrarios de cualquier dominio de integridad dado en el sistema de números complejos?

17. Evaluar

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

[Respuesta: $+16$.]

18. Expresar el siguiente determinante como suma de dos determinantes de tercer orden:

$$\begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

19. Expresar la suma siguiente de dos determinantes como un solo determinante de tercer orden:

$$\begin{vmatrix} 5 & -6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 10 & 7 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

20. Demostrar que se puede sumar a los elementos de cualquiera línea de una matriz cuadrada, cualquiera combinación lineal fija de los elementos correspondientes de las otras filas paralelas, sin que varíe el determinante de la matriz.

21. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_3 - x_1)(x_2 - x_1)(x_3 - x_2).$$

22. Ampliar el Ejercicio 21 para demostrar que para cualquier entero *k*, el determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} = (x_k - x_1)(x_k - x_2) & \dots (x_k - x_{k-1}) \\ (x_{k-1} - x_1)(x_{k-1} - x_2) & \dots (x_{k-1} - x_{k-2}) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (x_3 - x_1) & (x_3 - x_2) \\ & (x_2 - x_1). \end{aligned}$$

V-10 DETERMINANTES MENORES.

Hemos establecido una ordenación cuadrada tal como (v - 2) una matriz cuadrada, hemos asociado un determinante con cada matriz cuadrada y definido (Cap. v - 8) el menor de un elemento de una matriz de orden n como el determinante de orden $n - 1$ que se obtiene tachando la fila y la columna correspondientes al elemento. Ampliaremos esta definición como sigue: Dada cualquiera matriz de orden n, la matriz que se obtiene tachando r filas cualesquiera y r columnas cualesquiera de la matriz dada $(r < n)$ tiene un determinante de orden $n - r$ que se llama el menor de orden r-ésimo de la matriz dada. Por eso, el menor de cualquier elemento a_{ij} de una matriz es el primer menor de la matriz. El determinante que resulta en (v - 23) tachando la primera y segunda columnas, la segunda y cuarta filas es

$$\text{(V - 23)} \qquad \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & a_{13} & a_{14} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} & \cancel{a_{24}} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & a_{33} & a_{34} \\ \cancel{a_{41}} & \cancel{a_{42}} & \cancel{a_{43}} & \cancel{a_{44}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

y se denomina el segundo menor de la matriz dada de cuarto orden.

Dada una matriz de orden n, podemos obtener un menor r-ésimo ya sea tachando r filas y r columnas o eligiendo en su orden natural $n - r$ filas y $n - r$ columnas con cuyos elementos se formará el determinante menor en cuestión. Por ejemplo, el menor de a_{11} en una matriz de tercer orden puede obtenerse tachando la primera fila y la primera columna o eligiendo los elementos que se encuentran en la segunda o tercera filas y en la segunda o tercera columnas. Por esos, al contar los primeros menores de una matriz de tercer orden, podemos decir que hay un menor asociado con cada uno de los 3^2 elementos de la matriz, o bien podemos calcular $C^3_2 = (3 \cdot 2)/2 = 3$ el número de maneras de elegir dos filas de entre tres y también el número de maneras de elegir dos columnas de entre tres, de donde, lo mismo que anteriormente, resultan $(C^3_2)^2 = 9$ menores primeros de una matriz de tercer orden. En general (Ejercicio 1), hay $(C^n_{n-r})^2$ menores r-ésimos de una matriz de orden n-ésimo, en que $C^n_{n-r} = n!/[(n-r)!r!]$ y $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Cuando las filas y columnas que se han empleado en formar un menor M_r son precisamente aquellas que sobraron al formar un menor M_{1}, los dos menores M_{1}, y M_r se denominan *menores complementarios*. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

son menores complementarios de la matriz de (v - 23). El *complemento algebraico* de un menor de una matriz es igual a su menor complementario multiplicado por $(-1)^p$, en que p es la suma de los índices de las filas y columnas empleadas en la formación del menor (Ejercicios 3-6 y Bibliografía Nº 9; págs. 23-24). Dado que la suma de todos los índices de fila y de columna de cualquiera matriz cuadrada de orden n es un número par $n(n-1)$, podemos elegir en cambio a p como la suma de los índices de las filas y columnas tachadas. Por consiguiente, el complemento algebraico de un menor corresponde al cofactor de un elemento. En particular, dado que un menor de orden $(n-1)$ es un solo elemento, el complemento algebraico de cualquier elemento de una matriz es su cofactor.

El determinante de cualquiera matriz puede obtenerse eligiendo cualquiera fila de la matriz, multiplicando todos los elementos de esa fila por su complemento algebraico, y efectuando la suma de estos productos, como en (v - 18). Este procedimiento puede también usarse respecto de cualquiera columna de la matriz, como en (v - 19). Estos desarrollos por medio de menores de orden $(n-1)$

de todos los elementos de una línea de la matriz son casos especiales del siguiente teorema:

TEOREMA V - 10. DESARROLLO DE LAPLACE. *Si se seleccionan r líneas paralelas cualesquiera de una matriz M y se forman todos los menores correspondientes a los elementos de las r líneas paralelas, el determinante de M es igual a la suma de los productos de estos menores por su complemento algebraico.*

Esbozaremos la demostración del Teorema V - 10, dejando la mayoría de los detalles para que el lector los complete como ejercicio (Ejercicio 20) o valiéndose de un texto más detallado sobre matrices y determinantes, tal como el Nº 16 de la Bibliografía; págs. 20-22. En resumen, hay que demostrar que cada término del determinante se presenta exactamente una vez con el signo adecuado en el desarrollo de Laplace y que no figuran otros términos. Los términos del desarrollo respecto de una fila de un determinante (Cap. V - 7) son los productos que se obtienen tomando un factor y sólo uno de cada fila y columna de la matriz del determinante. En consecuencia, cada término del determinante de una matriz de orden n tiene n factores. Supondremos que los elementos de la matriz pertenecen a un anillo en el que la multiplicación es conmutativa. Luego los $n!$ términos del determinante son independientes de las permutaciones de las filas y columnas, es decir, se puede demostrar que cada término aparece una y sólo una vez, sea que el desarrollo se haya efectuado por medio de los menores de orden $(n - 1)$ o de los menores de orden r, en que $0 < r < n$. Finalmente, el método empleado en el Ejercicio 6 puede ampliarse para demostrar que el signo del término es independiente del método de desarrollo.

Como se señaló anteriormente, los desarrollos (V - 18) y (V - 19) son casos especiales de este teorema siendo $r = 1$. El ejemplo siguiente ilustra el teorema para los casos en que $r = 2$, $n = 4$, y en que se han elegido las dos primeras filas.

Este procedimiento es mucho más útil si varios menores de las filas r de la matriz correspondiente son iguales a cero, como en

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}.$$

(v - 24), donde se ha elegido la primera y segunda filas y $r = 2$ (Ejercicio 9).

(V - 24)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

El Teorema v - 10 también es importante porque puede usarse para demostrar el Teorema v - 11 referente a productos de matrices cuadradas. El mismo procedimiento puede usarse para dos matrices cualesquiera tales que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda matriz. La multiplicación de matrices es sumamente importante en las teorías matemáticas. Consideraremos varias aplicaciones de este procedimiento en el Capítulo v - 15.

Definiremos primero el *producto interno* de dos n-tuplos ordenados tales como

$$V = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,$$
$$W = b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$$

como la suma de los productos de los elementos correspondientes,

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n.$$

En seguida definiremos el *producto de las matrices cuadradas* $M = [a_{ij}]$ y $N = [b_{ij}]$ de orden n como una matriz cuadrada $[c_{ij}]$ de orden n, en donde c_{ij} es el producto interno del conjunto de elementos de la i-ésima fila de M y del conjunto de elementos de la j-ésima columna de N, es decir,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Al estudiar las transformaciones geométricas en el Cap. v - 15 se evidenciará la importancia de esta definición. Esta importancia se debe en parte a la propiedad que se establece en el siguiente teorema:

TEOREMA V - 11. *El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de sus determinantes.*

Por ejemplo, puede obtenerse la igualdad siguiente de la definición precedente y del Teorema v - 11:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}.$$

Esta igualdad puede verificarse fácilmente por medio de los polinomios (determinantes) que resultan de los esquemas. También, según el Teorema v - 10, el producto anterior es igual al determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

Según el Teorema v - 9, cada elemento de la tercera columna de la matriz de D puede reemplazarse por el mismo más b_{11} veces el elemento correspondiente de la primera columna más b_{21} veces el elemento correspondiente de la segunda columna. Análogamente, la cuarta columna puede reemplazarse por ella misma más b_{12} veces la primera columna más b_{22} veces la segunda columna. Luego tenemos una nueva matriz con el mismo determinante D:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

y según el Teorema v - 10, este determinante es igual a

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}.$$

Valiéndonos de los Teoremas V - 9 y V - 10 hemos demostrado el Teorema V - 11 para el caso especial de dos matrices de orden dos.

En general, dadas dos matrices cuadradas de orden n, como $[a_{ij}]$ y $[b_{ij}]$, podemos valernos del Teorema V - 10 para escribir

$$|a_{ij}| \cdot |b_{ij}| = \begin{vmatrix} |a_{ij}| & 0 \\ F & |b_{ij}| \end{vmatrix},$$

en que 0 es el determinante de una matriz cuadrada de orden n cuyos elementos son todos iguales a cero y F es el determinante de una matriz cuadrada de orden n en que los elementos de la diagonal principal son todos iguales a -1 y todos sus otros elementos iguales a cero. Luego, según el Teorema V - 9, la columna de orden $(n + 1)$ de la matriz de este determinante puede reemplazarse por sí misma más b_{11} veces la primera columna más b_{21} veces la segunda columna más ... más b_{n1} veces la n-ésima columna. Análogamente, las columnas de orden $(n + 1)$, $(n + 2)$, ... y $(2n)$ se reemplazan cada una por ellas mismas más múltiplos de las primeras n columnas. La nueva matriz tiene el mismo determinante que anteriormente, conforme al Teorema V - 9, y, como en el caso especial citado anteriormente, ese determinante tiene la forma que el Teorema V - 10 (Ejercicio 21) exige.

La importancia de los Teoremas V - 9, V - 10, y V - 11 se pondrá en evidencia en los ejercicios siguientes y en las secciones que siguen de este capítulo. Hemos señalado los procedimientos que se utilizan en las demostraciones de estos teoremas. Las demostraciones detalladas se dan como ejercicios y pueden consultarse en la mayoría de los textos sobre matrices y determinantes.

El concepto de un menor de una matriz se aplica de la siguiente manera: Dada cualquiera matriz A de m filas y n columnas (V - 1), pueden obtenerse matrices cuadradas de orden $r (r \leqq m, n)$ eligiendo los elementos de r filas cualesquiera y r columnas de la matriz A. Estas matrices se denominan menores de orden r de la matriz A. La *característica* de la matriz A es el mayor entero r tal que A tenga un menor de orden r con determinante no nulo, es decir, existe un menor de orden r de la matriz A con determinante no nulo y todo menor de A de orden $(r + 1)$ tiene un determinante igual a cero. Por ejemplo, cada una de las matrices siguientes tiene característica dos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

En el Ejercicio 17 se trata un procedimiento sistemático para determinar la característica de cualquiera matriz.

Dejaremos ahora el estudio de la teoría de los determinantes y matrices y consideraremos algunas de sus aplicaciones; encontraremos aquí que el concepto de característica de una matriz es por demás útil. La mayoría de las aplicaciones se tratarán sin entrar a desarrollar temas que corrientemente se estudian en álgebra (college algebra) y en geometría analítica. En el resto de este texto se usarán sistemas de coordenadas ortogonales cartesianas a menos que se especifique expresamente lo contrario.

EJERCICIOS

1. Demostrar que existen $(C^n_{n-r})^2$ menores de orden r de una matriz de orden n.

2. Escribir los menores de orden dos de una matriz de tercer orden.

3. Por medio de (v-18) y dado que según el Teorema v-8 el determinante de (v-2) puede designarse por

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

demuéstrese que el complemento algebraico (cofactor) de a_{11} es igual a su menor.

4. Valiéndose de la Propiedad C y del Ejercicio 3, demostrar que el complemento algebraico de cualquier elemento a_{ij} es $(-1)^{i+j}$ veces su menor.

5. Ampliar los resultados de los Ejercicios 3 y 4 para demostrar que el complemento algebraico de

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

es igual a su menor.

6. Demostrar que el complemento algebraico de cualquier menor de segundo orden

$$\begin{vmatrix} a_{rs} & a_{ru} \\ a_{ts} & a_{tu} \end{vmatrix}$$

es $(-1)^{r+s+t+u}$ veces su menor.

7. Repetir el Ejercicio 10, Cap. V-9, empleando menores de segundo orden con la tercera y cuarta filas de la matriz correspondiente.

8. Repetir el Ejercicio 10, Cap. V-9, empleando menores de segundo orden con la tercera y cuarta columnas.

9. Desarrollar (V-24) mediante menores de segundo orden con las primeras dos filas de su matriz.

10. Se llama *menor principal* el determinante menor que resulta al tachar filas y columnas de igual índice (por ejemplo, primera y tercera filas, primera y tercera columnas). ¿Cuántos menores principales de segundo orden hay en una matriz de orden n?

11. Escribir todos los menores principales de segundo orden de la matriz del determinante del Ejercicio 17, Cap. V-9.

12. Repetir el Ejercicio 17, Cap. V-9, con los menores de tercer orden usando la primera, segunda y tercera filas de la matriz correspondiente.

13. Escribir los 18 pares de menores de segundo orden de la matriz de un determinante general de cuarto orden (V-23).

14. Escribir cinco matrices cuadradas de tres filas y tres columnas con elementos numéricos. Determinar la característica de cada matriz.

15. Escribir una matriz de cuatro filas y cinco columnas y determinar su característica.

16. Demostrar que la característica de una matriz no varía si se efectúan las siguientes *transformaciones elementales:* intercambio de dos líneas paralelas, multiplicación de todos los elementos de una línea por una constante diferente de cero, sumar a los elementos de una línea los múltiplos de los elementos correspondientes de otra línea paralela.

17. Se dice que una matriz $[a_{jk}]$ se encuentra en su *forma normal* cuando $a_{jk} = 0$ para $j \neq k$ y si para algún entero s, $a_{jj} \neq 0$ para $j \leqq s$, $a_{jj} = 0$ para $j > s$. Ilustrar mediante las siguientes matrices cómo puede reemplazarse cualquiera matriz por una matriz en su forma normal por medio de transformaciones elementales:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 12 & 14 & 16 \\ 5 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

18. Repetir los Ejercicios 14 y 15, empleando el método del Ejercicio 17.

19. Expresar en una sola matriz los productos siguientes:

(a) $$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) $$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ a & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ c & d & e \end{bmatrix}.$$

20. Dar una demostración completa del Teorema v-10.
21. Hacer una demostración completa del Teorema v-11.

V-11 **REGLA DE CRAMER.** En el Capítulo v-1 encontramos que el sistema de ecuaciones

$$\text{(V-25)} \qquad \begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

tiene una solución única si y sólo si el determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

de los coeficientes es diferente de cero. Aún más, si $D \neq 0$, la solución es $x = D_1/D$, $y = D_2/D$, en que D_1 se obtiene reemplazando en D los coeficientes de x por los términos constantes y D_2 se obtiene análogamente reemplazando los coeficientes de y por los términos constantes, es decir,

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Una ecuación lineal tal como $x + 3y - 5z = 0$, cuyo término constante es cero y cada término de la izquierda es de primer grado, se denomina *ecuación lineal homogénea.* Si una ecuación lineal tiene un término constante diferente de cero, se denomina *ecuación lineal no homogénea.* El método anterior de resolver dos ecuaciones lineales en dos variables puede ampliarse (Teorema v-12) para incluir sistemas de ecuaciones lineales en n variables. Puede aplicarse a sistemas arbitrarios de ecuaciones lineales homogéneas y a sistemas de ecuaciones lineales no homogéneas (Cap. v-12).

Demostraremos que para $n = 3$, el sistema

$$\text{(V-26)} \qquad \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

tiene una solución única $x = D_1/D$, $y = D_2/D$, $z = D_3/D$ si y sólo si el *determinante de los coeficientes*

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

y en que D_1 resulta de D reemplazando los a_i, respectivamente, por los términos constantes d_i; y D_2 y D_3 resultan análogamente al reemplazar los b_i y los c_i por los d_i. Por ejemplo, dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + \ \ y + 2z &= 5, \\ x - \ \ y + \ \ z &= 2, \\ 3x + 2y - 5z &= 7, \end{aligned}$$

podemos evaluar el determinante de los coeficientes

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 21$$

y dado que $D \neq 0$, podemos expresar la única solución del sistema como sigue:

$$x = \tfrac{1}{21} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \tfrac{54}{21} = \tfrac{18}{7},$$

$$y = \tfrac{1}{21} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & -5 \end{vmatrix} = \tfrac{25}{21},$$

$$z = \tfrac{1}{21} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \tfrac{13}{21}.$$

En general, para cualquier sistema (V - 26), podemos considerar A_i el cofactor de a_i (Cap. V - 8) en el determinante de los coeficientes, multiplicar ambos miembros de la primera ecuación por A_1, multiplicar ambos miembros de la segunda ecuación por A_2, multiplicar ambos miembros de la tercera ecuación por A_3 y sumar las ecuaciones que resultan para obtener $Dx = D_1$, ya que según (V - 19) y el Ejercicio 18, Capítulo V - 8, tenemos

$$\begin{aligned} a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 &= D, \\ b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 &= 0, \\ c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 &= 0, \end{aligned}$$

y por definición $d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3 = D_1$. Análogamente, podemos resolver (v - 26) para y, z, empleando los cofactores de sus coeficientes. Finalmente, para cualquier sistema de n ecuaciones lineales en n variables

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}$$

podemos multiplicar ambos miembros de la j-ésima ecuación por el cofactor A_{1j} de a_{1j} siendo $j = 1, 2, \ldots, n$, sumar las ecuaciones que resultan y obtener $Dx_1 = D_1$. Análogamente (Ejercicio 7), por medio de los cofactores A_{2j} podemos obtener $Dx_2 = D_2$, y, en general, A_{kj} se usa para obtener $Dx_k = D_k$. Por consiguiente, tenemos

TEOREMA V - 12. REGLA DE CRAMER. *Un sistema de n ecuaciones lineales en n variables*

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

tiene una solución única $x_k = D_k/D$, *en que* $D \neq 0$ *es el determinante de los coeficientes y* D_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *resulta de* D *al reemplazar los coeficientes de* x_k *por los términos constantes.*

También se puede considerar que este teorema proporciona una condición suficiente para que las n ecuaciones lineales en n variables sean *consistentes,* es decir, tengan por lo menos una solución común. Aplicando el concepto de la característica de una matriz (Cap. v - 10), podemos decir que dos ecuaciones lineales en dos variables (v - 25) son consistentes y tienen una solución común única si la matriz de los coeficientes tiene característica dos. Análogamente, tres ecuaciones lineales en tres variables (v - 26) son consistentes y tienen una solución común única si la matriz de los coeficientes tiene característica tres. En general, n ecuaciones lineales en n variables son consistentes y tienen una solución común única si la matriz de los coeficientes tiene característica n.

Si la característica de la matriz de los coeficientes no es igual a n, el sistema puede ser inconsistente, como por ejemplo,

$$\begin{aligned} x + y &= 1, \\ x + y &= 2, \end{aligned}$$

o el sistema puede ser consistente, pero no tener una solución única. Consideradas gráficamente, las dos rectas

$$\begin{aligned} x + y &= 1, \\ 2x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

coinciden, los tres planos (v - 26) pueden tener una línea en común o pueden coincidir. En consecuencia, la condición citada es suficiente para demostrar la consistencia, pero no necesaria. En el Cap. v - 12 se ofrecerá un criterio exacto (Teorema v - 13) de consistencia para cualquier sistema finito de m ecuaciones lineales en n variables.

EJERCICIOS

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones, por medio de la Regla de Cramer.

1. $$\begin{aligned} x - 2y &= 3, \\ 2x - y &= 5. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1, \\ x + y &= 5, \\ 3x - y + 2z &= 7. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 3x - 4y + 2z &= 11, \\ x + 4y - 5z &= 12, \\ 5x + 2y + 3z &= 10. \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} x + y + z + w &= 5, \\ x - y + 3w &= 2, \\ y - 2z - w &= 4, \\ x - y + z - w &= 7. \end{aligned}$$

5. Demostrar la Regla de Cramer para el sistema (v-25), como se hizo en el Capítulo v-1, multiplicando cada ecuación por el complemento algebraico (en la matriz de los coeficientes) del coeficiente $x_1 = x$, sumando las ecuaciones y resolviendo respecto de x_1. Repetir el procedimiento para las demás variables.

6. Repetir el Ejercicio 5 para (v-26).

7. Hacer una demostración general del Teorema v-12 por medio del método del Ejercicio 5.

V-12 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. En el Cap. v-11 consideramos sistemas de n ecuaciones lineales en n variables en que el determinante de los coeficientes era diferente de cero. Consideraremos ahora sistemas arbitrarios finitos de ecuaciones lineales. Dado un sistema de m ecuaciones lineales en n variables

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2,\\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3,\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{aligned} \tag{V-27}
$$

definiremos la *matriz de los coeficientes* del sistema como:

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\
a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

y a la *matriz ampliada* del sistema como:

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1\\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2\\
a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & b_3\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m
\end{bmatrix}.
$$

En el sistema (v-25) la matriz y la matriz ampliada son

$$
\begin{bmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix},
$$

respectivamente.

La característica de una matriz ampliada de un sistema es siempre por lo menos igual a la característica de la matriz de los coeficientes, dado que todo menor de la matriz de los coeficientes es también un menor de la matriz ampliada. En sistemas de n ecuaciones de n variables (Cap. v-11) si la característica de la matriz de los coeficientes es n, entonces la característica de la matriz ampliada debe ser también n (ya que la matriz ampliada tiene solamente n filas), y por consiguiente, de acuerdo con las condiciones establecidas por el Teorema V - 12, las dos matrices deben tener la misma característica. En general, se tiene

TEOREMA V - 13. TEOREMA FUNDAMENTAL DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. *Una condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales sea consistente es que la matriz de los coeficientes tenga la misma característica que la matriz ampliada.*

El Teorema V - 13 y el siguiente Teorema V - 14, se demuestran en (Bibliografía Nº 9) y en otros textos sobre determinantes y matrices. Los adoptaremos sin demostración y nos dedicaremos principalmente a sus aplicaciones. Dado que un conjunto de ecuaciones lineales en n variables es consistente si y sólo si los hiperplanos correspondientes $(n > 3)$, planos $(n = 3)$, o líneas $(n = 2)$ que representan tienen por lo menos un punto en común, haremos uso frecuentemente de las aplicaciones geométricas de estos teoremas (Ejercicios 6, 7 y 8).

TEOREMA V - 14. *Si en un sistema de ecuaciones lineales en n variables, la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada tienen la misma característica r, entonces se pueden atribuir valores arbitrarios dados a $n - r$ variables y las variables restantes quedarán así unívocamente determinadas.*

Este teorema establece esencialmente que la solución general de un sistema de ecuaciones lineales en que ambas matrices tienen característica r, contiene $n - r$ parámetros. También puede demostrarse (Ejercicio 12) que la solución general es lineal en estos parámetros. Por lo tanto las $n - r$ variables elegidas como parámetros deben ser tales que la matriz de los coeficientes de las demás variables tenga característica r.

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + \ \ y &= 2, \\ x - \ \ y &= 4, \\ 2x + 2y &= 4, \end{aligned}$$

la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada tienen característica dos. Luego el sistema tiene una solución única (ya que también $n = 2$), $x = 3$ e $y = 1$. El sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 5, \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

tiene la matriz ampliada de característica dos, mientras que la matriz de los coeficientes tiene característica uno. En consecuencia este sistema es inconsistente, es decir, no existe un par de números que satisfagan ambas ecuaciones. Las rectas representadas por este sistema de ecuaciones son paralelas y distintas. Finalmente, las dos matrices del sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 1, \\ 2x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

tienen característica uno, el sistema es consistente, las dos rectas representadas coinciden, el valor de una de las variables puede elegirse arbitrariamente (Teorema v · 14), y la solución general puede designarse por $x = c$ e $y = 1 - c$ por medio del parámetro c.

Consideremos ahora el ejemplo siguiente en que $n = 3$. El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x \phantom{{}+y} - z &= 1, \\ x + y \phantom{{}-z} &= 2, \\ y + z &= 1 \end{aligned}$$

tiene la matriz de los coeficientes de característica dos y la matriz ampliada de característica dos. Dado que $n = 3$ y $r = 2$, una de las variables (en este caso una cualquiera) puede usarse como parámetro. Si se elige z como parámetro, el sistema resulta

$$\begin{aligned} x &= 1 + z, \\ x + y &= 2, \\ y &= 1 - z. \end{aligned}$$

Ya que la segunda ecuación es la suma de las otras dos, puede descartarse. Las dos ecuaciones restantes junto con $z = z$ designan a las tres variables del sistema dado en función del parámetro z. A cada valor de z corresponden valores únicos de las variables x e y. Todos los puntos de la recta $x - 1 = 1 - y = z$ satisfacen el sistema dado.

Los ejemplos citados ilustran algunas de las aplicaciones de los Teoremas v - 13 y v - 14. Se considerarán más aplicaciones en los ejercicios siguientes y en las tres secciones que quedan de este capítulo.

EJERCICIOS

1. Demostrar que todo sistema de ecuaciones homogéneas lineales es consistente.

2. Demostrar que si un sistema de ecuaciones lineales homogéneas tiene una solución única, entonces esta solución es $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$.

3. Demostrar que cualquier sistema finito de ecuaciones lineales en n variables tiene una solución única si y sólo si las características de la matriz ampliada y de la matriz de los coeficientes son ambas iguales a n.

4. En (v-27) suponer que por lo menos un $b_i \neq 0$ y demostrar que a) si $m = n$, el determinante no nulo de la matriz de los coeficientes es una solución suficiente; b) si $m = n + 1$, la condición necesaria para obtener una solución es que el determinante de la matriz ampliada sea nulo.

5. Encontrar la característica de la matriz de los coeficientes, la característica de la matriz ampliada, y todas las soluciones (si fuera necesario, por medio de parámetros) de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

(a) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 6, \\ x - y &= 5. \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x + 3y &= 3, \\ 2x + 6y &= 1. \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 3x + 5y &= 2, \\ 6x + 10y &= 4. \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} x + y &= 3, \\ x - y &= 1, \\ 2x + y &= 5, \\ 2x - y &= 3. \end{aligned}$

(e) $\begin{aligned} x - z &= 1, \\ x + y &= 2, \\ y + z &= 1. \end{aligned}$

(f) $\begin{aligned} x + y + z &= 2, \\ x - y + z &= 1, \\ y &= 1. \end{aligned}$

(g) $\begin{aligned} x + y + z &= 3, \\ x - y + z &= 1, \\ x + z &= 4. \end{aligned}$

(h) $\begin{aligned} x + y + z &= 2, \\ x - y + z &= 1, \\ y &= 5. \end{aligned}$

(i) $\begin{aligned} x &= 1, \\ x + y &= 2, \\ y + z &= 2. \end{aligned}$

6. Considerar los sistemas de rectas representados por los sistemas de ecuaciones del Ejercicio 5, desde a) hasta d) e indicar qué sistemas a) se cortan en un punto único; b) representan rectas coincidentes; c) no tienen ningún punto común.

7. Considerar los sistemas de planos representados por los sistemas de ecuaciones del Ejercicio 5, letras e) hasta i) e indicar qué sistemas a) se cortan en un

punto único; b) se cortan en una sola recta; c) coinciden; d) no tienen ningún punto común.

8. Comparar los resultados de los Ejercicios 6 y 7 con aquellos del Ejercicio 5 y discutir la importancia geométrica del Teorema v-14.

9. Demostrar que si $m = n - 1$, $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, y la matriz de los coeficientes de (v-27) tiene característica $n - 1$, las razones entre las variables son

$$x_1 : x_2 : x_3 : \cdots : x_n = A_1 : -A_2 : A_3 : \cdots : (-1)^{n-1}A_n,$$

donde A_j es el determinante que resulta al tachar la j-ésima columna en la matriz de los coeficientes (ver Bibliografía Nº 16; págs. 41-42).

10. Aplicar los resultados del Ejercicio 9 a los sistemas siguientes de ecuaciones:

$$\text{(a)}\quad \begin{aligned} x + y - z &= 0,\\ x - y + 2z &= 0.\end{aligned} \qquad\qquad \text{(b)}\quad \begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0,\\ x - 3y + z &= 0.\end{aligned}$$

11. Comparar con el Teorema v-14, los resultados obtenidos en el Ejercicio 10 Dar la solución completa de cada sistema del Ejercicio 10.

12. Demostrar que la solución general del Teorema v-14 es lineal en los $n - r$ parámetros.

V-13 DEPENDENCIA LINEAL.

En el Capítulo v-9 se determinó que $c_1b_1 + c_2b_2 + \ldots + c_nb_n$, (en que los b son elementos cualesquiera y los c son constantes no todos iguales a cero), era una combinación lineal de los elementos b. Este concepto se usó (Ejercicio 20, Cap. v-9) para reemplazar cada elemento, como ser a_{ij}, de una línea de la matriz de un determinante por sí mismo más una combinación lineal de los elementos correspondientes de las demás líneas paralelas, por ejemplo,

$$\text{(V-28)}\qquad a_{1j} + c_2a_{2j} + c_3a_{3j} + \ldots + c_na_{nj},\ (j = 1, 2, \ldots, n),$$

esto es, para todos los elementos a_{1j} de la primera fila. Por ejemplo, dado el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & -2\\ -1 & -6 & 1\end{vmatrix},$$

podemos reemplazar los elementos a_{1j} de la primera fila de su matriz por $a_{1j} + 2a_{2j} + a_{3j}$ $(j = 1, 2, 3)$ y obtenemos

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ -1 & -6 & 1 \end{vmatrix}$$

sin que el determinante varíe (Teorema v - 9). Análogamente, si reemplazamos los elementos a_{i1} de la primera columna de la matriz de

$$\begin{vmatrix} 1 & 11 & 6 & 9 \\ 4 & -3 & 0 & -1 \\ -2 & 7 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

por $a_{i1} + 3a_{i2} + 2a_{i3} - 5a_{i4}$, *obtenemos*

$$\begin{vmatrix} 1 & 11 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$$

En cada uno de estos ejemplos hemos empleado relaciones análogas a (v - 28) no solamente para un solo conjunto de números sino para varios conjuntos de números correspondientes. En el segundo ejemplo usamos esta relación para los cuatro conjuntos de números correspondientes a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, a_{4j}, $(j = 1, 2, 3, 4)$, es decir

$$\begin{aligned} &a_{11} + 3a_{12} + 2a_{13} - 5a_{14}, \\ &a_{21} + 3a_{22} + 2a_{23} - 5a_{24}, \\ &a_{31} + 3a_{32} + 2a_{33} - 5a_{34}, \\ &a_{41} + 3a_{42} + 2a_{43} - 5a_{44}. \end{aligned}$$

En consecuencia hemos considerado la misma combinación lineal para cada uno de los cuatro conjuntos de elementos correspondientes.

En seguida, ampliaremos el concepto de combinación lineal a aquél de dependencia lineal. Se dice que los tres conjuntos de cuatro números cada uno:

$$\text{(V - 29)} \qquad \begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4, \\ z_1, & z_2, & z_3, & z_4, \end{matrix}$$

son dependientes linealmente si existen constantes a, b, c, no todas iguales a cero tales que

$$ax_j + by_j + cz_j = 0, \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

De aquí que los tres conjuntos de números (v - 29) sean dependientes linealmente si y sólo si el sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + cz_1 &= 0, \\ ax_2 + by_2 + cz_2 &= 0, \\ ax_3 + by_3 + cz_3 &= 0, \\ ax_4 + by_4 + cz_4 &= 0, \end{aligned}$$

(donde x_j, y_j, z_j son dados y en que hay que determinar las constantes a, b, c) tiene una solución donde por lo menos una de las constantes sea diferente de cero. En consecuencia, según el Teorema v -14 y el Ejercicio 2, Cap. v - 12, los tres conjuntos de números (v - 29) son dependientes linealmente si y sólo si la matriz de los coeficientes

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}$$

tiene característica menor que tres, es decir, todo determinante de tercer orden de la matriz es nulo.

En general, se dice que m conjuntos

(V - 30) $$a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

de n elementos son *dependientes linealmente* si y sólo si existen constantes $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m$ no todas nulas tales que

(V - 31) $$\begin{aligned} c_1a_{11} + c_2a_{12} + \cdots + c_ma_{1m} &= 0, \\ c_1a_{21} + c_2a_{22} + \cdots + c_ma_{2m} &= 0, \\ &\vdots \\ c_1a_{n1} + c_2a_{n2} + \cdots + c_ma_{nm} &= 0, \end{aligned}$$

es decir, $$c_1a_{i1} + c_2a_{i2} + \cdots + c_ma_{im} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Los conjuntos de elementos (v - 30) son *independientes linealmente* si las relaciones (v - 13) implican $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$.

El sistema de ecuaciones lineales homogéneas (v - 31) se utilizará en el Teorema v - 15 para expresar las condiciones necesarias y suficientes para que haya dependencia lineal en conjuntos m cualesquiera de elementos (v - 30) por medio de la matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{V - 32}$$

de los coeficientes de los c. Con todo, antes de considerar más detenidamente este caso general, consideremos geométricamente el caso especial (v - 29) suponiendo que los elementos son números reales.

Podemos considerar que tres números reales cualesquiera son coordenadas de un punto en el espacio euclidiano tridimensional. Por definición, los tres conjuntos (v - 29) son dependientes linealmente si y sólo si los cuatro triples de los números correspondiente satisfacen una relación de la forma

$$ax + by + cz = 0,$$

siendo a, b, c constantes no todas nulas, es decir (suponiendo que los números son reales), los triples de los números correspondientes son coplanares con el origen. Existen interpretaciones geométricas análogas y en cierto sentido más elegantes de la dependencia lineal mediante coordenadas homogéneas respecto de espacios vectoriales. Consideraremos solamente la interpretación citada más elemental que se vale de coordenadas no homogéneas con el fin de evitar la tarea de presentar otros conceptos.

Los tres conjuntos de n números reales cada uno,

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_n, \\ y_1, & y_2, & \dots, & y_n, \\ z_1, & z_2, & \dots, & z_n, \end{matrix}$$

son dependientes linealmente si y sólo si los n triples de los números correspondientes representan puntos coplanares con el origen. Según el Teorema v - 14, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + cz_1 &= 0, \\ ax_2 + by_2 + cz_2 &= 0, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ ax_n + by_n + cz_n &= 0 \end{aligned}$$

tiene una solución única $a = b = c = 0$ si la matriz

$$(\text{V - 33}) \qquad \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{bmatrix}$$

tiene característica tres. Este sistema de ecuaciones tiene una solución en la que por lo menos una de las constantes a, b, c es diferente de cero si la matriz (v - 33) tiene característica menor que tres. En consecuencia, los tres conjuntos anteriores de n números son linealmente dependientes si y sólo si todo determinante de tercer orden de la matriz (v - 33) es nulo. Si la matriz tiene característica dos, los triples de los números correspondientes representan puntos coplanarios con el origen. Las mismas condiciones en relación a la dependencia lineal rigen aún cuando la interpretación geométrica pueda no ser válida al tratarse de elementos pertenecientes a cualquier anillo.

La discusión anterior referente a tres conjuntos de n elementos cada uno puede ahora ampliarse respecto de m conjuntos de n elementos cada uno (v - 30). Si los elementos son números reales, cada uno de los n conjuntos de los m números reales correspondientes puede tomarse como un punto en el espacio euclidiano m-dimensional. Estos n puntos se encuentran es un hiperplano.

$$c_1a_1 + c_2a_2 + \dots + c_ma_m = 0$$

que pasa por el origen si y sólo si los conjuntos de elementos (v - 30) son dependientes linealmente. Estas condiciones pueden expresarse como un sistema de ecuaciones (v - 31) que se satisfacen, ya sea que los elementos sean números reales o no. Si $m = n$, los m conjuntos de n elementos cada uno (v - 30) son dependientes linealmente si y sólo si la matriz (V - 32) tiene característica menor que m, es decir, si y sólo si el determinante de m filas de (V - 32) es nulo. Si $m < n$, entonces, dado que el sistema (V - 31) consiste en n ecuaciones en m incógnitas, los m conjuntos de elementos (V - 30) son dependientes linealmente si y sólo si cada determinante de m filas de (V - 32) es nulo (Teorema V - 14). Si $m > n$ hay menos ecuaciones que las constantes que hay que determinar y los conjuntos son siempre dependientes (Ejercicio 5). Esta situación es análoga a la de encontrar un plano $ax + by + cz = 0$ sobre uno o dos puntos dados como, por ejemplo, cuando los conjuntos dados son

$$\begin{array}{ll} x_1, & x_2, \\ y_1, & y_2, \\ z_1, & z_2. \end{array}$$

Estos resultados pueden resumirse como sigue:

TEOREMA V - 15. *Si $m > n$, entonces m conjuntos cualesquiera de n elementos cada uno son dependientes linealmente. Si $m \leqq n$, entonces m conjuntos* (V - 30) *de n elementos cada uno son linealmente dependientes si y sólo si todo determinante de m filas de la matriz* (V - 32) *es igual a cero.*

La definición de que los elementos de un conjunto de constantes $b_1, b_2, ..., b_n$ son dependientes linealmente si existe una combinación lineal

$$c_1b_1 + c_2b_2 + ... + c_nb_n = 0$$

donde no todos los c son nulos puede hacerse extensiva a conjuntos arbitrarios de elementos. Por ejemplo, siempre que las variables toman valores de un conjunto infinito de números (Cap. III - 1 y Cap. III - 4), m polinomios $f_1, f_2, ..., f_m$ en cualquier número de variables son dependientes linealmente si y sólo si existen m constantes c_j no todas nulas tales que

$$c_1f_1 + c_2f_2 + ... + c_mf_m = 0$$

para todos los valores de las variables. Esta definición es equivalente (Ejercicio 10) a definir a los polinomios del conjunto como dependientes linealmente si y sólo si los conjuntos de los coeficientes correspondientes son dependientes linealmente. Esta otra forma de la definición puede emplearse en el Teorema v - 15. En el conjunto siguiente de ejercicios consideraremos varios teoremas basados sobre la definición de dependencia lineal y algunas de las numerosas aplicaciones de este concepto.

EJERCICIOS

1. Demostrar que si un conjunto de elementos es una combinación lineal de otros $m - 1$ conjuntos de elementos, entonces los m conjuntos de elementos son dependientes linealmente.

2. Demostrar que si m conjuntos de elementos son dependientes linealmente, entonces por lo menos un conjunto es una combinación lineal de los otros.

3. Demostrar que si existe entre m conjuntos de elementos, k conjuntos que son linealmente dependientes, siendo $k < m$, entonces los m conjuntos son dependientes linealmente.

4. Demostrar que si alguno de los m conjuntos de elementos está compuesto exclusivamente de ceros, entonces los m conjuntos son linealmente dependientes.

5. Demostrar que si $m > n$, m conjuntos cualesquiera de n elementos cada uno son dependientes linealmente. (Indicación: ampliar el sistema a m conjuntos de m elementos cada uno agregando ceros).

6. Indicar cuáles de los conjuntos siguientes, de cuatro números cada uno, son dependientes linealmente:

$$\begin{array}{llll}
\text{(a)}\ 3, & 0, & 1, & 5, \\
\quad\ \ 1, & -2, & -1, & 2, \\
\quad\ \ 2, & 2, & 2, & 3. \\
\text{(b)}\ 2, & 2, & 1, & 3, \\
\quad\ \ 3, & 5, & 2, & 4, \\
\quad\ \ 1, & -1, & 0, & 2.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
\text{(c)}\ 1, & 0, & 1, & 1, \\
\quad\ \ 0, & 1, & 1, & 0, \\
\quad\ \ 1, & 1, & 0, & 0 \\
\text{(d)}\ 1, & 2, & 3, & 4, \\
\quad\ \ 2, & 4, & 6, & 8, \\
\quad\ \ a, & b, & c, & d.
\end{array}$$

7. Demostrar que los tres polinomios

$$a_jx + b_jy + c_jz + d_j \qquad (j = 1, 2, 3)$$

son dependientes linealmente si y sólo si los tres conjuntos de números

$$a_j, b_j, c_j, d_j \qquad (j = 1, 2, 3)$$

son dependientes linealmente.

8. Señalar cuáles de los conjuntos siguientes de polinomios son dependientes linealmente:

(a) $3x + y + 2, \quad y - 1, \quad x + y + 2.$
(b) $x + 1, \quad y + 1, \quad x + y.$
(c) $x + 2y + 3z + 4, \quad 2x + 4y + 6z + 8, \quad ax + by + cz + d.$
(d) $x + 2y - z + 5, \quad 8z - 12y - 10, \quad 3x + z + 10.$

9. Demostrar que los gráficos de las ecuaciones correspondientes a cualquier conjunto finito de polinomios dependientes linealmente de la forma $a_jx + b_jy + c_jz$, tienen todos por lo menos un punto de intersección común.

10. Demostrar que la dependencia lineal de cualquier conjunto finito de polinomios en cualquier número finito de variables que adquieren valores de un conjunto infinito de números, implica la dependencia lineal de los conjuntos de constantes de sus conjuntos de coeficientes, y a la inversa.

V-14 APLICACIONES EN GEOMETRIA ANALITICA.

Algunos textos elementales de geometría analítica consideran la aplicación de determinantes y matrices a la geometría.

En todos los textos superiores de geometría donde se emplean métodos analíticos, el estudio de los determinantes y las matrices constituye una parte muy importante (Cap. v - 15). En esta sección ampliaremos los conceptos de geometría usados en el estudio de la dependencia lineal (Cap. v - 13), solamente enumerando algunas de las aplicaciones corrientes de los determinantes y matrices en la geometría analítica elemental. En seguida, en la sección siguiente, concluiremos nuestro estudio de los determinantes y de las matrices con una breve revisión de sus aplicaciones a las transformaciones geométricas.

El área de un triángulo con vértices en (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) está dada por

$$\pm\left(\tfrac{1}{2}\right)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

en que debe elegirse el signo de modo que el área no sea negativa. Este resultado puede ampliarse para dar

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

como una condición necesaria y suficiente para que los tres puntos sean colineales. También puede usarse en la forma

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

para encontrar la ecuación de la recta determinada por dos puntos dados distintos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

En un plano, dos rectas

$$a_1x + b_1y = c_1,$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

tienen un punto en común único si las matrices

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

tienen ambas características dos; y las rectas coinciden si las dos matrices tienen característica uno y son paralelas si las matrices tienen características diferentes (Teorema v - 13 y v - 14). Análogamente, en el espacio tri-dimensional dos planos

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

tienen una recta única en común si en este sistema de ecuaciones la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada tienen ambas característica dos; estos dos planos coinciden si ambas matrices tienen característica uno y son paralelos si las matrices tienen diferentes características. Los conceptos del Cap. v - 12 pueden también usarse para demostrar que tres planos

$$a_jx + b_jy + c_jz = d_j \qquad (j = 1, 2, 3)$$

tienen un punto único en común si las matrices correspondientes tienen ambas característica tres; los tres planos tienen una recta única en común si ambas matrices tienen característica dos y coinciden si las dos matrices tienen características uno; no tienen ningún punto en común si las matrices son de características diferentes. En el Ejercicio 7 se consideran más correspondientes entre los planos y las características de las matrices.

El volumen de un tetraedro cuyos vértices son (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) está dado por

$$\pm\left(\tfrac{1}{6}\right)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

en donde, como anteriormente, hay que elegir el signo de modo que el volumen no resulte negativo. También, como anteriormente, se puede ampliar este resultado para dar

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

como una condición necesaria y suficiente para que los cuatro puntos dados sean coplanarios. Tres puntos en el espacio (x_j, y_j, z_j), $j = 1, 2, 3$, son no-colineales si y sólo si

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

y la ecuación del plano determinado por tres puntos dados no colineales está dada por

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Hasta aquí hemos visto que la ecuación de una recta determinada por dos puntos distintos cualesquiera y la ecuación del plano determinado por tres puntos no-colineales pueden expresarse por medio de determinantes. También el área de un triángulo y el volumen de un tetraedro pueden expresarse por medio de las coordenadas de sus vértices y de determinantes. Ejemplos como éstos ilustran la aplicación de los determinantes y de las matrices en geometría analítica. En los ejercicios siguientes se examinarán unos cuantos ejemplos más; en (Bibliografía Nº 16) pueden consultarse muchos ejemplos.

EJERCICIOS

1. Determinar cuáles de los siguientes triples de puntos sobre un plano son colineales. Si no son colineales, encontrar el área del triángulo que determinan:

a) (1,2), (5,6), (17,18).
b) (—1,5), (1,4), (3,0).
c) (11,7), (6,2), (—1,3).

2. Por medio de determinantes indicar las ecuaciones de las rectas determinadas por los siguientes pares de puntos:

a) (1,2), (5,6).
b) (—1,5), (1,4).
c) (11,7), (6,2).
d) (912, —13), (—115,76).

3. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de puntos en el espacio son coplanarios. Si no son coplanarios, encontrar el volumen del tetraedro que ellos determinan:

a) (1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), (10, 11, 12).
b) (2, —2, 0), (5, 7, 11) (—7, 3, 12), (1, 1, 1).
c) (1, —1, 1), (7, 13, 27), (5, 2, 1), (—6, 3, 4).

4. Valiéndose de determinantes, indicar en los Ejercicios que se señalan la ecuación del plano que pasa por los cuatro puntos o las ecuaciones de las caras (planos) del tetraedro a) Ejercicio 3 a); b) Ejercicio 3 b); c) Ejercicio 3 c).

5. Describir en el plano los gráficos de los conjuntos de ecuaciones del Ejercicio 5 desde a) hasta d), Cap. v-12.

6. Describir en el espacio los gráficos de los conjuntos de ecuaciones del Ejercicio 5 desde e) hasta i), Cap. v-12.

7. Determinar las características de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones que representa

a) tres planos que tienen un punto común único;
b) tres planos distintos que tienen una recta común;
c) tres planos que tienen un plano en común;
d) tres planos paralelos;
e) dos planos paralelos y un tercer plano que los corta;
f) dos planos coincidentes y un tercer plano que los corta;
g) dos planos coincidentes y un tercer plano paralelo a ellos;
h) tres planos distintos tales que los pares de planos se corten en tres rectas paralelas.

8. Demostrar (Bibliografía Nº 16; pág. 87), que la recta determinada por dos planos que se cortan

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

tiene números de dirección

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

(*Indicación:* Valerse del Ejercicio 9, Cap. V-12. Los números de dirección se definen en los textos de geometría analítica que incluyen geometría de los sólidos).

9. Aplicar el resultado del Ejercicio 8 a las rectas determinadas por

(a) $x + y - z + 2 = 0,\ x - y + 2z - 5 = 0,$
(b) $2x + 3y - z - 3 = 0,\ x - 5y + z + 2 = 0.$

V - 15. TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS. La definición de Félix Klein señala la importancia de las transformaciones en geometría: Una geometría cualquiera es un estudio de las propiedades (expresadas por definiciones y teoremas) que permanecen invariantes respecto de un grupo de transformaciones. Por ejemplo, en la geometría euclidiana estudiamos propiedades tales como la longitud, el área, la magnitud de los ángulos, líneas paralelas, triángulos semejantes y congruentes que permanecen invariantes sometidas a movimientos rígidos, es decir, traslaciones y rotaciones. Cada una de estas transformaciones puede expresarse como una matriz con referencia a un sistema de coordenadas.

Dado el plano xy corriente que se emplea en geometría analítica, podemos representar cualquiera traslación en el plano por el sistema de ecuaciones:

(V-34) $$x' = x + a, \quad y' = y + b.$$

Por ejemplo, usando los ejes en las posiciones convencionales, si todos los puntos se mueven dos unidades a la derecha, tenemos:

$$x' = x + 2, \quad y' = y;$$

si todos los puntos se mueven tres unidades hacia abajo, tenemos:

$$x' = x, \quad y' = y - 3;$$

si todos los puntos se mueven dos unidades a la derecha y tres unidades hacia abajo, tenemos:

$$x' = x + 2, \quad y' = y - 3.$$

En general, dado que cualquiera traslación en el plano puede considerarse como el resultado de un movimiento a lo largo del eje de las x y un movimiento a lo largo del eje y, tenemos (v-34) para cualquiera traslación en el plano. Análogamente, se demuestra en geometría analítica que cualquiera rotación alrededor del origen en el plano puede expresarse en la forma:

$$\text{(V-35)} \qquad x' = x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta, \quad y' = x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta.$$

También se puede demostrar que si a la rotación (v-35) le sigue una traslación (v-34), tenemos una transformación de la forma:

$$x' = x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta = a, \quad y' = x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta + b.$$

Ahora trataremos métodos de denotar estas transformaciones por medio de matrices.

Cada una de las transformaciones anteriores se representa por ecuaciones de la forma:

$$x' = a_{11}x + a_{12}\,y + a_{13}, \quad y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}.$$

Además, cada transformación está completamente determinada por los a_{jk}, es decir, por una matriz de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

Ampliando esta matriz usaremos una matriz de tercer orden de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que resulta de sumar la tercera fila de la matriz identidad (Ejercicio 6), de modo que las matrices de las dos transformaciones puedan multiplicarse (Cap. v-10) y que la matriz del producto tenga la misma forma que las matrices dadas. Encontraremos que un producto ordenado de las matrices de dos transformaciones es la matriz de una transformación que resulta al aplicar las dos transformaciones dadas, una después de la otra en cierto orden. Muchos de los ejercicios que figuran al final de esta sección se refieren a esta propiedad.

Ya hemos visto que cualquiera traslación (v-34) y cualquiera rotación alrededor del origen (v-35) pueden representarse respectivamente por las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Análogamente, cualquier punto (x, y) del plano puede representarse por una matriz. Lo mismo que en el caso anterior, se elige la forma de la matriz de modo que permita la multiplicación de ciertas matrices. Usaremos una matriz con una columna y tres filas:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Esta convención nos permitirá expresar las ecuaciones de una transformación como una sola igualdad por medio de matrices.

Se dice que dos matrices son *iguales* si y sólo si tienen el mismo número de filas, el mismo número de columnas y si sus elementos correspondientes son idénticos. Dos matrices relacionadas mediante transformaciones elementales (Ejercicio 16, Cap. v-10) tienen la misma característica, pero no son necesariamente iguales en el sentido que se ha expresado aquí. La igualdad de dos matrices de mn elementos es equivalente, según la definición anterior, a un sistema de mn ecuaciones. Luego, al multiplicar matrices, podemos expresar la traslación (v-34) por medio de la ecuación

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dado que la primera y la última matriz son iguales si y sólo si los elementos correspondientes son iguales, la igualdad citada de las matrices es precisamente equivalente a (v-34). Análogamente, (v-35) es equivalente a

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La relación entre la expresión de una traslación o rotación mediante un sistema de ecuaciones lineales entre las coordenadas y en términos de una matriz (en cierto sentido la matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones) puede comprenderse rápidamente (Ejercicios 1 y 2), de modo que será tan fácil obtener una representación como la otra. Una ventaja de la representación por medio de matrices se desprende de la facilidad con que se obtiene el resultado de una sucesión de transformaciones como producto (tomado en el orden inverso) de las matrices correspondientes. La traslación que resulta como una sucesión de dos traslaciones y que hemos citado anteriormente en la explicación de una traslación puede expresarse como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En el caso especial de dos traslaciones no tiene importancia el orden en que se multipliquen las matrices (Ejercicio 5), pero, en general, encontraremos que debe considerarse el orden.

La transformación que resulta de considerar dos transformaciones en orden se denomina *producto ordenado* de esas dos transformaciones. Análogamente, podemos considerar el producto ordenado de cualquier número finito de transformaciones. La importancia del orden se debe a que si a la traslación (v-34) le sigue la rotación (v-35) se obtiene

$$\text{(V-36)} \qquad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & a\cos\theta - b\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

mientras que si se hace primero la rotación y, en seguida, la traslación, se tiene

$$\text{(V-37)} \qquad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & a \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Estos resultados pueden verificarse fácilmente multiplicando las matrices de las transformaciones en el orden opuesto a aquél en que se usan las transformaciones (Ejercicio 3).

El hecho de que (v-36) y (v-37) son, en general, diferentes, denota que el efecto de una traslación seguida de una rotación es diferente de aquél de una rotación seguida de la traslación. Por ejemplo, sea la traslación $x' = x + 2$, $y' = y$, y la rotación $x' = -x$, $y' = -y$. El punto (3,6) queda en (5,6) al hacer la traslación (suponiendo que el sistema de coordenada permanece fijo); el punto (5,6) queda en (—5,—6) al hacer la rotación, es decir, la traslación seguida de la rotación lleva al punto (3,6) a la posición (—5,—6). Análogamente, el punto (3,6) se lleva al punto (—3,—6) por la rotación y el punto (—3,—6) queda en (—1—6) por la traslación, es decir, la rotación seguida de la traslación lleva el punto (3,6) a (—1,—6). Por consiguiente, hemos encontrado que la aplicación de transformaciones y la multiplicación de matrices no son operaciones conmutativas (Ejercicio 4).

Las transformaciones (v-34) a (v-37) de la geometría euclidiana pueden considerarse como casos especiales de las transformaciones en geometrías más generales. Cualquiera transformación (transformación afín) del plano euclidiano en sí mismo (Bibliografía Nº 52, págs. 117-118), puede representarse por una matriz de la forma

$$\text{(V-38)} \qquad \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

en que $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Si $b_1 = a_2 = 0$ y $a_1 = b_2 = 1$, entonces (v-38) representa una traslación; si $c_1 = c_2 = 0$, $a_1 = b_2$, $a_2 = -b_1$ y $a^2_1 + a^2_2 = 1$, entonces (v - 38) representa una rotación. Cualquier movimiento rígido en el plano (transformación euclidiana) puede expresarse como el producto de una traslación y una rotación (posiblemente en el espacio) y puede representarse por una matriz de la forma

$$\text{(V - 39)} \qquad \begin{bmatrix} a & b & c_1 \\ -be & ae & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

donde $a^2 + b^2 = 1$ y $e^2 = 1$ (Ejercicios 13, 14). Si $e = 1$ (v-39) es equivalente a (v-37) (Ejercicio 15); si $e = -1$, debe incluirse una rotación en el espacio o una línea de reflexión en el plano.

Dado que cualquiera geometría puede considerarse como un estudio de las propiedades invariantes (Ejercicio 9) con respecto a grupos de transformaciones y que estas transformaciones pueden representarse por matrices, esta sección podría ampliarse hasta constituir un libro completo. Nos hemos limitado a indicar cómo dos transformaciones corrientes pueden expresarse por medio de matrices (v-34) y (v-35) y a señalar que estas transformaciones son simplemente casos especiales de transformaciones más generales, tales como (v-38) en geometría, de las que la geometría euclidiana es un caso especial. En (Bibliografía Nº 35), se podrá consultar un estudio completo de las razones por las cuales la geometría euclidiana es un caso especial de varias otras geometrías.

En este capítulo hemos definido los determinantes de matrices cuadradas de cualquier orden n por medio de permutaciones y hemos examinado el empleo de los determinantes y de las matrices en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, dependencia lineal, geometría analítica y transformaciones geométricas. Nuestro examen estuvo, por necesidad, restringido a un pequeño número de aplicaciones típicas. Estudios más completos de la teoría y sus aplicaciones pueden consultarse en los textos señalados en la Bibliografía, Nºs 9, 16, 39, 44 y 49.

EJERCICIOS

1. Representar las siguientes traslaciones por medio de matrices:

(a) $x' = x - 1,\ y' = y + 2$.
(b) $x' = x + 2,\ y' = y + 5$.
(c) $x' = x - 3,\ y' = y - 4$.

2. Representar las siguientes rotaciones en torno al origen por medio de matrices: a) 30°, b) 45°, c) 120°, d) 180°, e) 270°.

3. Deducir las matrices (v-36) y (v-37) de (v-34) y (v-35).

4. Ilustrar el hecho de que la multiplicación de las matrices no es conmutativa valiéndose de las matrices

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Demostrar, valiéndose de dos matrices generales de la forma (v-34), que el producto de dos traslaciones cualesquiera es a) una traslación; b) conmutativa.

6. Demostrar que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

representa la transformación identidad en el plano, es decir, si se multiplica por cualquiera otra matriz de tres filas y tres columnas, o si es multiplicada por ella, el producto es igual a la otra matriz.

7. Escribir en una sola transformación, valiéndose de matrices, los productos de las transformaciones que se señalan en los siguientes ejercicios: a) Ejercicio 1 (a) y 2 (a); b) Ejercicios 1 (a) y 1 (b); c) Ejercicios 1 (b) y 2 (c); d) Ejercicios 1 (c) y 2 (d); e) Ejercicios 1 (c) y 2 (c); f) Ejercicios 2 (a) y 2 (d).

8. Demostrar, valiéndose del resultado del Ejercicio 6, que la traslación $x' = x - a$, $y' = y - b$ es la inversa de (v-34).

9. Un conjunto de transformaciones afines (v-38) forma un grupo si el conjunto contiene el inverso de todas las transformaciones del conjunto y el producto de todos los pares de transformaciones del conjunto. Demostrar que esta definición está de acuerdo con la definición general de grupo dada en el Capítulo I-14.

10. Demostrar que el conjunto de todas las traslaciones (v-34) forma un grupo.

11. Demostrar que el conjunto de todas las rotaciones en torno al origen forma un grupo.

12. Demostrar que el conjunto de todas las transformaciones afines (v-38) forma un grupo.

13. Demostrar que (v-34) y (v-35) tienen cada cual la forma (v-39), cuando $a^2 + b^2 = c^2 = 1$.

14. Demostrar que (v-36) y (v-37) tienen cada cual la forma (v-39) cuando $a^2 + b^2 = c^2 = 1$.

15. Demostrar que (v-39) puede escribirse en la forma (v-37) cuando $a^2 + b^2 = c^2 = 1$.

16. Demostrar que una traslación queda determinada por un par de puntos correspondientes.

17. Cualquiera *reflexión de un punto* puede expresarse en la forma

$$x' = -x + a, \qquad y' = -y + b.$$

Indicar la representación correspondiente a una reflexión de un punto por medio de una matriz. ¿Forma un grupo el conjunto de todas las reflexiones de un punto? Explicar.

18. Demostrar que el producto de un número par de reflexiones de un punto es una traslación.

19. Demostrar que el producto de un número impar de reflexiones de un punto es una reflexión de un punto.

20. Demostrar que el conjunto de todas las reflexiones de un punto y de todas las *traslaciones* forma un grupo.

21. Cualquiera *dilatación* puede expresarse en la forma

$$x' = ax + b, \qquad y' = ay + c, \qquad \text{en que } a \neq 0, 1.$$

Indicar la representación correspondiente de una dilatación por medio de una matriz. ¿Forma un grupo el conjunto de todas las dilataciones? Explicar.

22. El conjunto de todas las dilataciones y traslaciones constituye el conjunto de las *transformaciones homotéticas*. Demostrar que el conjunto de todas las transformaciones homotéticas forma un grupo.

23. Demostrar que el conjunto de todas las matrices con determinantes no nulos forma un grupo si las matrices tienen la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

24. Demostrar que el conjunto de todas las matrices de la forma

$$\begin{bmatrix} a_{41} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

con determinantes no nulos forma un grupo.