

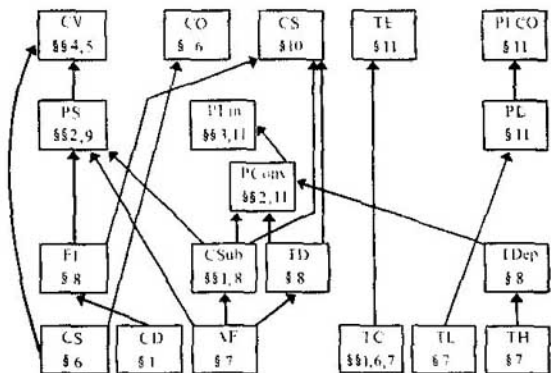
## CUESTIONES COMPLEMENTARIAS DE LA TEORÍA DE PROBLEMAS EXTREMALES

**Introducción.** En la primera parte del libro se prestó mucha atención a la idea de Lagrange acerca de la supresión de las acotaciones (es decir, sobre las condiciones necesarias de extremo en una forma bastante general) para distintas clases de problemas de máximo y mínimo. Hemos tratado de exponer nuestros conceptos de tal modo que el contenido de la primera parte fuera accesible al número de lectores más amplio posible. Precisamente por eso hemos utilizado, antes que nada, los medios del análisis clásico y la geometría de dimensiones finitas. Pero debemos tener en cuenta que el campo de aplicación del principio de Lagrange es mucho más amplio. Para descubrir las causas de tal universalidad, así como para comprender los fundamentos de otras partes de esa teoría (condiciones suficientes, teoremas de existencia, etc.) es natural utilizar el lenguaje del análisis de dimensión infinita. En breves términos se puede decir así: El aparato de la teoría de problemas extremales es el cálculo diferencial y el análisis convexo en espacios de dimensiones infinitas. Dichos conceptos se basan en varios hechos fundamentales del análisis funcional.

Quisiéramos, en esta parte del libro, poner al lector al corriente de las cuestiones relacionadas con la teoría de problemas extremales, la cual está destinada a un auditorio más preparado: estudiantes de las universidades, postgraduados de los centros de enseñanza superior bien capacitados matemáticamente, especialistas en matemáticas aplicadas, quienes tienen contacto con la teoría de control óptimo y, por supuesto, profesores de los cursos de optimización de las universidades y centros de enseñanza superior.

Para que el lector pueda elegir el material que más le conviene, sin acudir al estudio de todo el libro, las demostraciones de los principales resultados de la segunda parte suelen ir acompañadas de los hechos fundamentales que constituyen la base de un teorema dado. Además, para facilitar el trabajo con el manual, proponemos el esquema (dado a continuación) de interacción de los teoremas para construir el material de la segunda parte. He aquí el significado de las designaciones abreviadas de dicho esquema: CD, cálculo diferencial; AF, análisis funcional; ED, ecuaciones diferenciales; TC, teoremas de compacidad; TH, teorema de Helly; TL, teorema de Liapunov;

FI, teorema de la función implícita; CSub, cálculo subdiferencial; TD, teoremas de dualidad; EDep, teorema de depuración; PS, problemas suaves; PConv, problemas convexos; Plin, programación lineal; PL, problemas liapunovianos; PLCO, problemas lineales de control óptimo; CV, cálculo de variaciones; CO, control óptimo; CS, condiciones suficientes; TE, teoremas de existencia. Entre paréntesis se indica el lugar en el libro donde se expone el material correspondiente.



## § 7. Algunos problemas generales del análisis funcional y sus corolarios

### 7.1. Teorema de Hahn—Banach, separabilidad y teorema de Banach sobre el carácter abierto

**Teorema de Hahn — Banach.** Supongamos que  $X$  es un espacio lineal;  $X_0$ , un subconjunto lineal de  $X$ ;  $p(\cdot)$ , una función sublineal en  $X$  (es decir,  $p(\cdot) \in SL(X)$ ), y  $x'_0$ , una funcional lineal en  $X_0$  mayorada por la función  $p(\cdot)$  (es decir,  $\langle x'_0, x \rangle \leq p(x) \forall x \in X_0$ ). Entonces existirá una funcional lineal en  $X$  (es decir,  $x' \in X'$ ), tal que  $\langle x', x \rangle \leq p(x) \forall x \in X$  y  $\langle x', x \rangle = \langle x'_0, x \rangle \forall x \in X_0$ .

◁ 0. La demostración se basa en el lema de Zorn.

Recordemos cómo se formula ese lema. Sea  $(M, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado. Todo su subconjunto  $A$  donde cualesquiera dos elementos son comparables entre sí (en el sentido de ordenación introducida en  $M$ ) se llama *cadena*. A su vez, llámase *cota superior del subconjunto*  $M' \subset M$  el elemento  $a \in M$  cuando  $a' \leq a \forall a' \in M'$ , y llámase *máximo* el elemento  $\hat{a} \in M$  cuando de  $\hat{a} \leq a, a \in M$  se deduce que  $a = \hat{a}$ .

**Lema de Zorn.** Si toda cadena en un conjunto parcialmente ordenado tiene una cota superior, en ese conjunto habrá un elemento máximo [KF, pág. 40].

◁ 1. Si  $X_0 = X$ , todo queda demostrado. Sea  $X_0 \neq X$  y  $\xi \in X \setminus X_0$ . Denotemos  $X_1 = \text{lin} \{X_0, \xi\} = \{x \mid x = x_0 + t\xi, t \in \mathbb{R}\}$ . Si  $x_1, x_2 \in X_0$ , tendremos (a) según la condición, y (b) según la definición  $p(\cdot) \in SL(X)$ :

$$\langle x'_0, x_1 + x_2 \rangle \stackrel{a)}{\leq} p(x_1 + x_2) \stackrel{b)}{\leq} p(x_1 - \xi) + p(x_2 - \xi). \quad (1)$$

En virtud de (1) obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha &:= \sup_{x_1 \in X_0} (\langle x'_0, x_1 \rangle - p(x_1 - \xi)) \leq \\ &\leq \inf_{x_2 \in X_0} (p(x_2 + \xi) - \langle x'_0, x_2 \rangle) =: \beta. \end{aligned} \quad (2)$$

En virtud de las desigualdades (2) hallamos  $\gamma$  entre  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$\alpha \leq \gamma \leq \beta. \quad (3)$$

Supongamos que para  $x \in X_1$ ,  $x =: x_0 + t\xi$  ( $x_0 \in X_0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ):

$$\langle x'_1, x \rangle \stackrel{\text{Id}}{=} \langle x'_1, x_0 + t\xi \rangle =: \langle x'_0, x_0 \rangle + t\gamma. \quad (4)$$

Está claro que  $x'_1 \in X'_1$ . Si  $t > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \langle x'_1, x_0 + t\xi \rangle &\stackrel{(4)}{=} t(\langle x'_0, x_0/t \rangle + \gamma) \stackrel{(3)}{\leq} \\ &\stackrel{(3)}{\leq} t(\langle x'_0, x_0/t \rangle + p(x_0/t + \xi) - \langle x'_0, x_0/t \rangle) \stackrel{\text{Id}}{=} \\ &= p(x_0 + t\xi). \end{aligned} \quad (5)$$

Análogamente, para  $t < 0$  demostramos que  $\langle x'_1, x_0 + t\xi \rangle \leq p(x_0 + t\xi)$ .

Por lo tanto, la funcional  $x'_0$  continúa «en una dimensión» hasta la funcional  $x'_1$ .

2. Sea  $A$  el conjunto de todos los pares  $(\mathcal{X}, \xi')$ , donde  $\mathcal{X}$  es un subespacio lineal que contiene  $X_0$ ; y  $\xi'$ , una funcional lineal en  $\mathcal{X}$ , que continúa en  $x'_0$  ( $\Leftrightarrow \langle \xi', x \rangle = \langle x'_0, x \rangle \forall x \in X_0$ ) y que es mayoreada por  $p(x) < \Leftrightarrow \langle \xi', x \rangle \leq p(x) \forall x \in \mathcal{X}$ ). Supongamos que  $\langle \xi', x \rangle = \infty$  si  $x \notin \mathcal{X}$ . Introduzcamos en  $A$  la ordenación natural  $(\mathcal{X}_1, \xi'_1) > (\mathcal{X}_2, \xi'_2)$  cuando  $\mathcal{X}_2 \subset \mathcal{X}_1$  y  $\xi'_1|_{\mathcal{X}_2} = \xi'_2$ . Si  $\{(\mathcal{X}_\alpha, \xi'_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{Q}}$  es una cadena en  $A$ , entonces  $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{Q}} \mathcal{X}_\alpha =: \hat{\mathcal{X}}, \langle \hat{\xi}', x \rangle := \min_{\alpha \in \mathcal{Q}} \langle \xi'_\alpha, x \rangle$ . Es fácil comprobar que  $(\hat{\mathcal{X}}, \hat{\xi}')$  es la cota superior

de la cadena. Por consiguiente, según el lema de Zorn, en  $A$  existe el elemento máximo  $(\bar{\mathcal{X}}, \bar{x}')$ . De la construcción (p. 2) se deduce que  $\bar{\mathcal{X}} = X$  (de lo contrario llegaríamos a una contradicción con el máximo de  $(\bar{\mathcal{X}}, \bar{x}')$ ). Dicha contradicción demuestra el teorema. ▷

Expongamos dos importantes corolarios del teorema demostrado.

Recordemos que si en el conjunto  $T$  se ha dado un sistema de subconjuntos  $\tau$  tal que  $\emptyset \in \tau$ ,  $T \in \tau$ , además, si la unión de cualquier número y la intersección de un número finito de conjuntos de  $\tau$  pertenecen a  $\tau$ , en este caso el par  $(T, \tau)$  se llamará *espacio topológico*. A su vez, los conjuntos de  $\tau$  se llaman *abiertos*. Dícese que el sistema  $\tau$  proporciona en  $T$  una *topología*. La topología del producto cartesiano de espacios topológicos se da naturalmente.

El total de subconjuntos  $\beta \subset \tau$  se llamará *base de entornos* si para cualquier  $U \in \tau$  se halla un conjunto  $V \in \beta$  tal que  $V \subset U$ .

Si  $(T_1, \tau_1)$  y  $(T_2, \tau_2)$  son espacios topológicos, y  $F: T_1 \rightarrow T_2$  es su aplicación, esta última se llamará *continua* si la preimagen del conjunto abierto en  $T_2$  permanece abierta en  $T_1$ .

El espacio lineal  $X$  donde se ha dado una topología se denomina *espacio lineal topológico* si las dos operaciones principales en  $X$ , a saber, la adición y la multiplicación por un número, son continuas (como la aplicación de  $X \times X$  en  $X$  y de  $\mathbb{R} \times X$  en  $X$  respectivamente).

El espacio lineal topológico se llamará *localmente convexo*, si en él hay una base de entornos integrada por conjuntos convexos.

**Primer teorema de separabilidad.** *Supongamos que  $X$  es un espacio lineal topológico (no es obligatorio que sea localmente convexo), mientras que  $A$  y  $B$  son subconjuntos convexos no vacíos en  $X$ , además, el interior de uno de ellos, digamos, de  $A$ , no está vacío ( $\Leftrightarrow \text{int } A \neq \emptyset$ ) y ambos conjuntos no se intersecan ( $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ ). Entonces habrá un elemento  $x^* \in X^*$  tal que*

$$\sup_{x \in A} \langle x^*, x \rangle \leq \inf_{x \in B} \langle x^*, x \rangle. \quad (5')$$

La relación geométrica (5) significa que  $A$  se encuentra en un semiespacio generado por  $x^*$ , y  $B$ , en otro, es decir,  $A$  y  $B$  se hallan separados por cierto hiperplano generado por  $x^*$ .

$\triangleleft$  0. La demostración se basa en los siguientes hechos: 1) teorema de Hahn — Banach; 2) propiedades elementales de los espacios lineales topológicos; 3) definición y propiedades elementales de la funcional de Minkowski.

1. Conforme a la condición, existe  $a_0 \in \text{int } A$  y  $b_0 \in B$ . Denotemos  $C := (A - a_0) - (B - b_0)$ ,  $c_0 = b_0 - a_0$ . De 0.2 se deduce que

$$C \in \text{CO}(X), \quad 0 \in \text{int } C, \quad c_0 \in C. \quad (6)$$

En virtud de 0.3, la función del conjunto de Minkowski  $C$  (es decir,  $\mu C(\cdot)$ ) está determinada en todo el espacio  $X$ , es sublineal y, además, partiendo de las definiciones y la expresión (6), obtenemos

$$\mu C(X) \leq 1 \quad \forall x \in C, \quad \mu C(c_0) \geq 1. \quad (7)$$

2. Denotemos  $X_0 = \text{lin } \{c_0\}$  y supongamos que para  $x_0 \in X_0$ ,  $x_0 \in \alpha c_0$  ( $x_0, x_0$ ):  $\alpha \mu C(c_0)$ ).



Naturalmente que

$$\langle x'_0, x \rangle \leq \mu C(x) \quad \forall x \in X_0, \quad \langle x_0, c_0 \rangle = \mu C(c_0). \quad (8)$$

Según el teorema de Hahn — Banach, existe una funcional lineal  $x' \in X'$  tal que

$$x' |_{X_0} = x'_0, \quad \langle x', x \rangle \leq \mu C(x). \quad (9)$$

En vista de que  $0 \in \text{int } C$  y  $\mu C(x) \leq 1 \quad \forall x \in C$  (véase (7)), de (9) obtenemos que  $\langle x', x \rangle \leq 1 \quad \forall x \in C$ , es decir, la funcional  $x'$  está acotada y, por lo tanto, es continua. Así,  $x' = x^* \in X^*$ .

3. Sea ahora  $a \in A, b \in B$ . Entonces

$$\begin{aligned} \langle x, a - b \rangle & \stackrel{\text{Id}}{=} \langle x^*, a - a_0 + b_0 - b \rangle - \\ & - \langle x^*, c_0 \rangle \stackrel{(8)(9)}{\leq} \mu C(a - a_0 + b_0 - b) - \\ & - \mu C(c_0) \stackrel{(7)}{\leq} 1 - 1 = 0, \end{aligned}$$

es decir,  $\langle x^*, a \rangle \leq \langle x^*, b \rangle \quad \forall a \in A, b \in B$ .  $\triangleright$

**Segundo teorema de separabilidad.** *Supongamos que  $X$  es un espacio lineal topológico localmente convexo  $*$ , y  $A$ , un subconjunto convexo y cerrado de  $X$ ,  $\hat{x} \notin A$ . Entonces se hallará una funcional lineal  $\hat{x}^* \in X^*$  tal que  $\sup \{ \langle \hat{x}^*, x \rangle \mid x \in A \} < \langle \hat{x}^*, \hat{x} \rangle$ .*

$\triangleleft$  De acuerdo con la definición de topología localmente convexa y en virtud del carácter cerrado de  $A$ , se puede encontrar un entorno convexo  $U$  del punto  $\hat{x}$  que no se interseque con  $A$ . El primer teorema de separabilidad nos permite hallar una funcional lineal  $\hat{x}^*$  tal que  $\sup \{ \langle \hat{x}^*, x \rangle \mid x \in A \} \leq \inf \{ \langle \hat{x}^*, x \rangle \mid x \in U \} < \langle \hat{x}^*, \hat{x} \rangle$ , ya que la imagen de  $U$  al aplicar  $x \rightarrow \langle \hat{x}^*, x \rangle$  es un intervalo que contiene el número  $\langle \hat{x}^*, \hat{x} \rangle$ .  $\triangleright$

Analícemos también el

**Corolario del teorema de Hahn — Banach** (lema banachiano). *Sea  $X$  un espacio normalizado y  $x_0 \in X$ . Entonces existirá una funcional lineal  $x^* \in X^*$  tal que  $\|x^*\| = 1$  y  $\langle x^*, x_0 \rangle = \|x_0\|$ .*

$\triangleleft$  Si  $x_0 = 0$ , será posible tomar cualquier funcional  $x^*$ ,  $\|x^*\| = 1$ . Pero si  $x_0 \neq 0$ , entonces examinaremos el subespacio unidimensional  $L = \text{lin} \{x_0\}$  e introduciremos en él la funcional lineal

$$\langle \tilde{x}^*, \alpha x_0 \rangle = \alpha \|x_0\|.$$

Está claro que  $\langle \tilde{x}^*, x \rangle \leq \|x\| \quad \forall x \in L$ . Por consiguiente, según el teorema de Hahn — Banach, se hallará una funcional lineal  $x'$  que, continuando  $\tilde{x}^*$ , será tal que  $\langle x', x \rangle \leq \|x\| \quad \forall x$ . Pero de aquí se deduce inmediatamente la acotación y, por consiguiente, la continuidad de  $x'$ , es decir,  $x' \in X^*$ . Denotemos por  $x^*$  esa funcional.

De la desigualdad  $\langle x^*, x \rangle \leq \|x\|$  y la igualdad  $\langle x^*, x_0 \rangle = \langle \tilde{x}^*, x_0 \rangle = \|x\|$  se desprende que  $\|x^*\| = 1$ .  $\triangleright$

**Teorema de Banach acerca del carácter abierto.** *Supongamos que  $X$  e  $Y$  son ciertos espacios banachianos; y  $\Lambda$ , el operador lineal continuo de  $X$  en  $Y$  ( $\Leftrightarrow \Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ ), el cual es sobreyectivo ( $\Leftrightarrow \Lambda X = Y$ ). En este caso, la imagen de cada conjunto abierto en  $X$  estará abierta en  $Y$ .*

$\triangleleft$  0. La demostración se basa en el teorema de Baer: un espacio métrico completo no puede ser representado como la unión de una cantidad numerable de conjuntos no compactos en ninguna parte [KF].

1. Denotemos que  $B_r = \{x \mid \|x\| \leq r\}$  es una esfera de radio  $r$  en  $X$  ( $r \in \mathbb{N}$ ); y  $C_r$ , la clausura de su imagen en  $Y$ :  $C_r = \text{cl} B_r$ . Debido al efecto sobreyectivo,  $\Lambda \Rightarrow \bigcup_{r \in \mathbb{N}} C_r = Y$ . A su vez, a consecuencia del carácter banachiano (completitud) de  $Y$ , resulta que, según 0,1, se hallarán  $r_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\eta \in Y$  y  $\rho > 0$  tales que

$$C_{r_0} \subset B_Y(\eta, \rho) := \{y \mid \|y - \eta\| \leq \rho\}. \quad (10)$$

De las definiciones y la expresión (10) se deduce que para cualquier  $\varepsilon > 0$  y cualquier  $y$  de la esfera en  $Y$ , de radio  $\rho$  y con el centro en cero, se hallará un elemento  $\xi \in B_{r_0}$  tal que

$$\|y + \eta - \Lambda\xi\| < \varepsilon \Rightarrow \|y - \Lambda(\xi - \Lambda^{-1}\eta)\| < \varepsilon. \quad (11)$$

En este caso  $\|\xi - \Lambda^{-1}\eta\| \leq r_1$ , donde  $r_1$  es cierto número fijo.

Supongamos ahora que  $y$  pertenece a una esfera abierta en  $Y$ , con el centro en cero y de radio  $\rho$ . En virtud de la expresión (11) se hallará  $x_1$ ,  $\|x_1\| \leq r_1$  tal que

$$\|y - \Lambda x_1\| \leq \rho/2.$$

Análogamente hallamos  $x_2$ ,  $\|x_2\| \leq r_1/2$  tal que  $\|y - \Lambda(x_1 + x_2)\| \leq \rho/4$ . Continuando nuestra construcción llegaremos a una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\|x_n\| \leq r_1 \cdot 2^{-(n-1)}$  e  $\left\| y - \Lambda \sum_{k=1}^n x_k \right\| \leq \rho \cdot 2^{-n}$ . Debido a la completitud de  $X$ , las sumas de  $\sum_{k=1}^n$  convergerán cuando  $n \rightarrow \infty$  hacia cierto  $x$ . Entonces es natural que

$$\|x\| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \|x_k\| \leq r_1 \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-(k-1)} = 2r_1 < 3r_1,$$

$$\Lambda x = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda \sum_{k=1}^n x_k = y.$$

Así, una esfera abierta en  $Y$ , con el centro en cero y de radio  $\rho$ , se halla comprendida en la imagen de una esfera abierta en  $X$ , con el centro en cero y de radio  $3r_1$ . De aquí se deduce inmediatamente que la imagen de cualquier esfera abierta en  $X$ , con el centro en cero,

contiene cierta esfera abierta en  $Y$ , con el centro en cero y, en general, la imagen de cualquier conjunto abierto contiene un conjunto abierto.  $\triangleright$

Del teorema demostrado se deduce evidentemente el siguiente

**Corolario** (teorema de Banach acerca del operador inverso).

Sean  $X$  e  $Y$  ciertos espacios banachianos  $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ ,  $\Lambda X = Y$  y  $\text{Ker } \Lambda = \{0\}$ . Entonces el operador inverso  $\Lambda^{-1}$  es una aplicación lineal continua de  $Y$  en  $X$  ( $\Leftrightarrow \Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ ).

Para demostrar que  $\Lambda^{-1}$  es continuo, debemos establecer que la preimagen de cualquier conjunto abierto permanece abierta con esa aplicación. Pero la preimagen del conjunto  $U$  con la aplicación  $\Lambda^{-1}$  es, según la definición, nada más que  $\Lambda U$  y, por lo tanto, si  $U \in \mathcal{O}(Y)$ , entonces  $\Lambda U \in \mathcal{O}(X)$ , y eso demuestra la continuidad de  $\Lambda^{-1}$ .

## 7.2. Lemas (de la no trivialidad del anulador, del operador inverso derecho, del carácter cerrado de la imagen y del anulador del núcleo de un operador sobreyectivo)

Aquí demostraremos cuatro lemas que son corolarios simples de los teoremas (p. 7.1). Ellos hallarán aplicación práctica en todos los párrafos posteriores.

**Lema 1** (de la no trivialidad del anulador). *Supongamos que  $X$  es un espacio localmente convexo; y  $X_0$ , un subespacio cerrado de  $X$  que no coincide con  $X$ . Entonces el anulador  $X_0^\perp$  del espacio  $X_0$  comprenderá un elemento no nulo.*

$\triangleleft$  Según la condición, existe  $\hat{x} \in X \setminus X_0$ . Conforme al segundo teorema de separabilidad, se hallará un elemento  $x^* \in X^*$  tal que

$$\sup_{x \in X_0} \langle x^*, x \rangle < \langle x^*, \hat{x} \rangle. \quad (1)$$

Si para cierto  $x_0 \in X_0$   $\langle x^*, x_0 \rangle \neq 0$ , entonces  $\sup \{ \langle x^*, x \rangle \mid x \in X_0 \} \geq \sup \{ \langle x^*, tx_0 \rangle \mid t \in \mathbb{R} \} = +\infty$ , lo que contradice la expresión (1). Eso significa que  $x^* \in X_0^\perp$ , y de (1) se deduce que  $x^* \neq 0$ .  $\triangleright$

**Lema 2** (del operador inverso derecho). *Supongamos que  $X$  e  $Y$  son ciertos espacios banachianos; y  $\Lambda: X \rightarrow Y$ , un operador lineal continuo sobreyectivo. Entonces existirá un operador  $M: Y \rightarrow X$  y un número  $C > 0$  tales que*

$$\Lambda \circ M = I_Y (\Leftrightarrow \Lambda \circ My = y \forall y) \quad \text{y} \quad \|My\| \leq C \|y\|.$$

$\nabla$  Denotemos por  $\overset{\circ}{B}X$  una esfera abierta en  $X$ , cuyo radio equivale a la unidad ( $\overset{\circ}{B}X := \{x \mid \|x\| < 1\}$ ). Está claro que  $\overset{\circ}{B}X$  es un conjunto abierto en  $X$ . Según el teorema de Banach acerca del carácter abierto,  $\Lambda \overset{\circ}{B}X$  contiene la esfera  $\delta \overset{\circ}{B}Y := \{y \in Y \mid \|y\| < \delta\}$ , es decir,  $\forall y \in \delta \overset{\circ}{B}Y$  y, por lo tanto, se hallará  $x(y): \|x(y)\| < 1$

y  $\Lambda x(y) = y$ . Denotemos  $My := x \left( \frac{\delta y}{2 \|y\|} \right) \frac{2 \|y\|}{\delta}$ . Entonces, partiendo de la definición de  $M$  obtenemos

$$\Lambda \circ My = \frac{\delta y}{2 \|y\|} \cdot \frac{2 \|y\|}{\delta} = y, \quad \|My\| < \frac{2}{\delta} \|y\|. \quad \triangleright$$

**Nota.** La aplicación construida de  $M$ , hablando en general, es discontinua. No obstante, se puede lograr que la misma sea continua. Dicha construcción se basa en el siguiente resultado.

**Teorema de Michael acerca de la selección continua.** *Supongamos que  $T$  es un espacio métrico;  $X$ , un espacio banachiano; y  $F$ , una aplicación multiforme continua que confronta el elemento  $t \in T$  con el conjunto no vacío convexo cerrado  $F(t) \subset X$ . Entonces existirá una aplicación continua  $f(\cdot): T \rightarrow X$  tal que  $f(t) \in F(t) \forall t \in T$ . (Holmes R. B. Geometric functional analysis and applications. N.Y. Springer, 1975).*

Ahora, para que la aplicación inversa derecha sea continua, es necesario elegir  $\lambda > 1$  y usar el teorema de Michael para la aplicación multiforme

$$F(y) = \Lambda^{-1}y \cap B(0, \lambda \cdot \inf \{\|x\| \mid \Lambda x = y\}),$$

donde  $\Lambda^{-1}y$  es la preimagen de  $y$ . (Del teorema de Banach se deduce inmediatamente que  $F$  es continua). Este material se analiza con más detalles en esa misma obra (s. 184, 185). En lo sucesivo este hecho será llamado lema del operador continuo inverso derecho.

**Lema 3** (acerca del carácter cerrado de la imagen). *Supongamos que  $X, Y$  y  $Z$  son ciertos espacios banachianos; y  $A$  y  $B$ , ciertos operadores lineales continuos de  $X$ , respectivamente en  $Y$  y  $Z$ ; además,  $AX$  es un subconjunto cerrado en  $Y$ , y  $B \text{ Ker } A$ , un subconjunto cerrado en  $Z$ . En este caso, la imagen de  $X$  en la aplicación  $x \rightarrow (Ax, Bx)$  permanecerá cerrada en  $Y \times Z$ .*

$\triangleleft$  Denotemos  $AX$  por  $Y_1$ . Aquí se trata de un subconjunto cerrado (según la condición) del espacio banachiano  $Y$  y, por consiguiente, del propio espacio banachiano. De acuerdo con la definición,  $AX = Y_1$ . Eso significa que, según el lema del operador inverso derecho (lema 2), existirá un operador  $M: Y_1 \rightarrow X$  tal que

$$A \circ My = y, \quad \|My\| \leq C \|y\| \quad \forall y \in Y_1. \quad (2)$$

Supongamos que  $(y, z)$  pertenecen a la clausura  $(AX, BX)$ , es decir, que existe una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n$ ,  $z =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} Bx_n$ . Denotemos  $M(Ax_n - y)$  por  $\xi_n$ . Entonces

$$A(x_n - \xi_n) \stackrel{(1)}{=} A(x_n - M(Ax_n - y)) \stackrel{(2)}{=} y,$$

$$\|\xi_n\| \stackrel{(2)}{\leq} C \|Ax_n - y\| \rightarrow 0. \quad (3)$$

Así pues,

$$B\xi_n \rightarrow 0, \quad (4)$$

de donde, en virtud de (3),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(x_n - \xi_n) \stackrel{(4)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} Bx_n \quad z \Leftrightarrow z \in \text{cl } \Xi,$$

$$\Xi = \{\xi = Bx \mid Ax = y\}.$$

Pero  $\Xi$  es el desplazamiento de la imagen del núcleo  $A$  con la aplicación  $B \{x \mid Ax = y\} = B \text{Ker } A + \eta$ ,  $\eta \in \Xi$ , por consiguiente,  $\Xi$  permanece cerrado, es decir, (según las definiciones) para  $z \in \text{cl } \Xi = \Xi$  existe  $x \in X: Ax = y, Bx = z$ .  $\triangleright$

**Lema 4** (acerca del anulador del núcleo de un operador sobreyectivo). *Supongamos que  $X$  e  $Y$  son ciertos espacios banachianos;  $y$   $A$ , el operador lineal continuo sobreyectivo que aplica  $X$  a  $Y$ . Entonces el anulador del núcleo será la imagen de  $A^*$ :  $(\text{Ker } A)^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im } A^*$ .*

$\triangleleft$  1. Sea  $x^* \in \text{Im } A^* \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} x^* = A^*y^*$ . En este caso  $\forall x \in \text{Ker } A$

$$\langle x^*, x \rangle \stackrel{1a}{=} \langle A^*y^*, x \rangle \stackrel{1a}{=} \langle y^*, Ax \rangle = 0 \Rightarrow \text{Im } A^* \subset (\text{Ker } A)^\perp.$$

2. Sea  $x^* \in (\text{Ker } A)^\perp \Leftrightarrow Ax = 0 \Rightarrow \langle x^*, x \rangle = 0$ . Apliquemos el lema del carácter cerrado de la imagen (lema 3) a  $X, Y, Z = \mathbb{R}$ ,  $A$  y  $Bx = \langle x^*, x \rangle$ . Según este lema,  $(AX, \langle x^*, X \rangle) \in \text{Cl } (Y \times \mathbb{R})$  (ya que  $\text{Im } A = Y, B \text{Ker } A = \{0\} \in \text{Cl } (\mathbb{R})$ ). El subconjunto cerrado  $(AX, \langle x^*, X \rangle)$  no tiene punto  $(0, 1)$  (ya que  $Ax = 0 \Rightarrow \langle x^*, x \rangle = 0 \neq 1$ ). Entonces, en virtud del lema de no trivialidad del anulador, existirá un elemento no trivial del anulador del espacio  $(AX, \langle x^*, X \rangle)$ , es decir, se hallará  $(y^*, \lambda_0)$ ,  $y^* \in Y^*$ ,  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lambda_0 \langle x^*, x \rangle + \langle y^*, Ax \rangle = 0 \quad \forall x.$$

$$|\lambda_0| + \|y^*\| \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda_0 x^* + A^*y^*, x) = 0 \quad \forall x. \quad (5)$$

Pero  $\lambda_0 \neq 0$  (ya que, de lo contrario  $\langle y^*, Ax \rangle = 0 \quad \forall x \in X \Rightarrow (AX = Y) y^* = 0$ , lo cual es una contradicción). Por consiguiente, de la expresión (5) obtenemos  $x^* = A^*(-y^*/\lambda_0)$ .

### 7.3. Teoremas de Krein—Milman, Tijonov, Liapunov, Caratheodory, Radón y Helly

**7.3.1. Teorema de Krein — Milman.** *Supongamos que en un espacio localmente convexo se ha dado un subconjunto no vacío, convexo y compacto. En este caso ese subconjunto será la clausura convexa de sus propios puntos extremos.*

Recordemos que el punto  $x$  de un conjunto convexo se llama extremo si no es un punto interno de ningún segmento cuyos extremos pertenecen a dicho conjunto. El total de puntos extremos del conjunto  $A$  se denota por  $\text{extr } A$ . El concepto de punto extremo fue introducido por G. Minkowski, quien también demostró la variante de dimensión finita del teorema formulado más arriba.

◁ 0. La demostración del teorema de Krein — Milman se basa en los siguientes hechos: 1. Lema de Zorn. 2. Segundo teorema de separabilidad. 3. Lema del sistema centrado.

1. Lema. El conjunto de puntos extremos de un compacto no vacío y convexo está situado en un espacio localmente convexo, perteneciente a un hiperplano de apoyo que no es vacío respecto a dicho conjunto.

Recordemos que por hiperplanos entendemos los conjuntos del nivel de funcionales lineales continuas. Decimos que tenemos un hiperplano de apoyo para cierto conjunto, si dicho conjunto se halla situado en uno de los semiespacios generados por el referido hiperplano y el mismo se interseca con este último, es decir,

$$H \text{ es el hiperplano } \Leftrightarrow H = \{ x \mid \langle x^*, x \rangle = \alpha, \\ x^* \in X^*, \alpha \in \mathbf{R};$$

$H$  es un apoyo para  $A \Leftrightarrow A \subset \{ x \mid \langle x^*, x \rangle \leq \alpha$  o bien  $A \subset \{ x \mid \langle x^*, x \rangle \geq \alpha$  y  $H \cap A \neq \emptyset$ .

◁◁ Diremos que la variedad afin  $M$  es un apoyo respecto a  $A$ ,  $M \cap A \neq \emptyset$ , y del hecho de que  $x \in M \cap A$ ,  $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $x_1, x_2 \in A$  se deduce que  $x_1, x_2 \in M$ . Está claro que el hiperplano y el punto extremo son variedades de apoyo. Supongamos que tenemos cierta funcional lineal  $\hat{x}^*$  y examinemos la función  $x \rightarrow \langle x^*, \hat{x} \rangle$ . Por lo visto, esta última alcanza en  $A$  su valor máximo (función continua en el compacto) que designaremos por  $\hat{\alpha}$ . Así pues,  $\hat{H} = \{ x \in X \mid \langle x^*, x \rangle = \hat{\alpha}$  es un hiperplano de apoyo para  $A$  (con otras palabras, el conjunto de hiperplanos de apoyo del compacto no es vacío).

Sea  $\mathcal{H} = M$  el conjunto de todas las variedades de apoyo cerradas para  $A$  comprendidas en  $\hat{H}$ . Ese conjunto no está vacío, ya que contiene  $\hat{H}$ . Ordenémoslo con arreglo a la inclusión. Si  $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{Q}}$  es una cadena en  $A$ , entonces debemos examinar  $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{Q}} M_\alpha =: N$ . Naturalmente que  $N$  es un conjunto cerrado. Según la definición, la familia  $\{M_\alpha \cap A\}_{\alpha \in \mathcal{Q}}$  forma un sistema centralizado. Por lo tanto (p. 0.3), existe  $\xi \in \bigcap_{\alpha \in \mathcal{Q}} (M_\alpha \cap A)$ , es decir,  $N \cap A \neq \emptyset$ , lo cual significa,

con evidencia, que  $N$  es un apoyo. Consiguientemente,  $N$  es la cota inferior de la cadena. Según el lema de Zorn (p. 0.1), existe el elemento mínimo  $N_0$ . Además,  $N_0 \cap A$  es un compacto no vacío y convexo y, por lo tanto (si  $N_0 \cap A$  consta de más de un punto), en  $N_0$  existe el hiperplano de apoyo  $L$  para  $A$ . Pero eso significa que  $L$  es una variedad de apoyo «menor» que  $N_0$ , es decir,  $N_0$  no es el elemento mínimo. Dicha contradicción demuestra nuestro lema. ▷▷

2. Sea  $B$  la clausura convexa de los puntos extremos de  $A$ . Eso significa que  $B$  es un conjunto cerrado y no vacío (según el lema). Supongamos que existe  $\xi \in A \setminus B$ . Entonces, del segundo teorema de separabilidad (p. 0.2) resulta que existe  $x^*: \sup_{x \in B} \langle x^*, x \rangle <$

$\langle x^*, \xi \rangle =: \gamma$ . Denotemos  $\mu := \max_{x \in A} \langle x^*, x \rangle$ . Está claro que  $\mu \geq \gamma$  y que el hiperplano  $H_\mu := \{x \mid \langle x^*, x \rangle = \mu\}$  es un hiperplano cerrado de apoyo para  $A$ . Según el lema, existe  $x_0 \in \text{extr } A \cap H_\mu$ . Pero eso contradice el hecho de que  $\sup_{x \in \text{extr } A} \langle x^*, x \rangle < \gamma \leq \mu = \langle x^*, x_0 \rangle$ ,  $x_0 \in \text{extr } A$ .  $\triangleright$

**7.3.2. Teorema de Tijonov sobre la compacidad.** Lo utilizaremos para demostrar el teorema de compacidad de la subdiferencial (p. 8.1.4). Sea  $(X_\alpha, \tau_\alpha)$  una familia de espacios topológicos. Examinemos el producto cartesiano de conjuntos  $X_\alpha$ , es decir, el conjunto  $X := \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha := \{\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mid x_\alpha \in X_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ . Llamemos el espacio  $X$  *producto tijonoviano*. Programemos en  $X$  la topología  $\tau$  recurriendo al sistema de conjuntos  $\{\mathfrak{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \mathfrak{A}_{\alpha_1}, \dots, \mathfrak{A}_{\alpha_m}) \mid m \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathfrak{A}, i = 1, \dots, m, \mathfrak{A}_{\alpha_i} \in \mathcal{O}(X_{\alpha_i}), \mathfrak{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \mathfrak{A}_{\alpha_1}, \dots, \mathfrak{A}_{\alpha_m}) = \{\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mid x_{\alpha_i} \in \mathfrak{A}_{\alpha_i}, 1 \leq i \leq m, x_\alpha \in X_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}\}\}$ .

Esta topología se denomina *tijonoviana*.

**Teorema de Tijonov sobre la compacidad.** El producto tijonoviano de espacios topológicos compactos es un compacto en la topología tijonoviana.

La demostración véase, por ejemplo, en el libro de N. Danford y G. Schwarz *Operadores lineales*. M.; I., 1962, pág. 45.

**7.3.3. Teorema de Liapunov.** Lo utilizaremos en el § 11. Antes de enunciarlo recordemos algunas definiciones. Sea  $T$  cierto conjunto; y  $\Sigma = \delta$ , el álgebra de los subconjuntos de  $T$ . El par  $(T, \Sigma)$  se llama *espacio mensurable*. Si  $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R} - \sigma$  es una función aditiva en  $\Sigma$ , entonces ella se llama *medida*; y el conjunto triple  $(T, \Sigma, \mu)$  se denomina *espacio con medida*. Si en  $(T, \Sigma)$  se da un número finito de medidas  $\mu_1, \dots, \mu_n$ , se dice que  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  es una *medida vectorial* en  $(T, \Sigma)$ . La medida se llamará *continua* si con cualquier  $A \subset \Sigma$ , para el cual  $\mu(A) > 0$ , se halla  $A' \subset \Sigma$  tal que  $0 < \mu(A') < \mu(A)$ . Una medida vectorial se llamará *continua* si todas sus componentes son continuas. Si  $(T, \Sigma, \mu)$  es un espacio con medida, entonces  $T$  admitirá la descomposición de  $T = T_+ \cup T_-$ ,  $T_+, T_- \in \Sigma$ , además,  $\mu(A \cap T_+) \geq 0 \forall A \subset \Sigma$ ,  $\mu(A \cap T_-) \leq 0 \forall A \subset \Sigma$ . Las medidas  $\mu_+$  y  $\mu_-$  determinadas por las relaciones  $\mu_+(A) := \mu(A \cap T_+)$ ,  $\mu_-(A) := \mu(A \cap T_-)$  se llaman *variaciones superior e inferior* de la medida  $\mu$ . En este caso es evidente que  $\mu = \mu_+ + \mu_-$ . Dicha descomposición se denomina *descomposición de Jordán de la medida*  $\mu$ . También será una medida la función  $|\mu| := \mu_+ - \mu_-$  denominada *variación total* de  $\mu$ . La medida  $\mu$  se denominará *finita* si  $|\mu|(T) < \infty$ . Sean  $(T, \Sigma, \nu)$  y  $(T, \Sigma, \mu)$  ciertos espacios con medidas  $\nu$  y  $\mu$ , además, el par  $\mu$  es positivo. La medida  $\nu$  se llamará *absolutamente continua* respecto a  $\mu$ , si  $\nu(A) = 0$  para cualquier  $A \subset \Sigma$  tal que  $\mu(A) = 0$ .

**Teorema de Radón — Nikodím.** Sea  $(T, \Sigma)$  un espacio mensu-

table en el que se dan dos medidas:  $\mu$ , que es finita y positiva; y  $\nu$ , que es finita y absolutamente continua respecto a  $\mu$ . Entonces existirá una función  $p(\cdot) \in L_1(T, \Sigma, \mu)$  tal que  $\int_A \nu = \int_A p d\mu \forall A \in \Sigma$ . Este material se examina más detalladamente en [KF, cap. 5, pág. 405]. Ahora enunciemos el teorema.

**Teorema de Liapunov.** Sea  $\mu$  una medida continua, finita y vectorial en el espacio mensurable  $(T, \Sigma)$ . En este caso la imagen de esa medida será un compacto convexo.

Llábase imagen de la medida  $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ , por supuesto, el conjunto  $M := \{x \mid x = \mu(A), A \in \Sigma\}$ .

◁ 0. La demostración del teorema de Liapunov (efectuado por Linden — Strauss), se llevará a cabo utilizando los siguientes hechos: 1. Teorema de Banach — Alaoglu sobre la compacidad en la topología débil de una esfera unidad en un espacio banachiano conjugado con otro espacio banachiano (este conocido resultado será obtenido como corolario de los teoremas de compacidad en un análisis convexo). 2. Descomposición de Jordán. 3. Teorema de Radón — Nikodim. 4. Teorema de Krein — Milman. 5. Carácter cerrado de un subespacio de dimensión finita en un espacio banachiano. 6. Lema del anulador. 7.  $(L_1(T, \Sigma, \mu))^* = L_\infty(T, \Sigma, \mu)$ .

1. Sea  $\mu$  una medida vectorial dada y sean  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  y  $\mu_i = \mu_{i+} - \mu_{i-}$  la descomposición de Jordán de sus componentes. Supongamos que  $\mu = |\mu_1| + \dots + |\mu_n|$ . En virtud de  $|\mu_i(A)| \leq |\mu(A)| \forall A \in \Sigma$ , y también de la definición de continuidad absoluta, obtenemos que  $\mu_i$  es absolutamente continua respecto a  $\mu$ . Eso significa que (según el teorema de Radón — Nikodim) habrá funciones  $p(\cdot) \in L_1(T, \Sigma, \mu)$  tales que

$$\mu_i(A) = \int_A p_i(t) d\mu \Leftrightarrow d\mu_i = p_i d\mu,$$

$$p(\cdot) := (p_1(\cdot), \dots, p_n(\cdot)). \quad (1)$$

Sea  $W := \{\alpha(\cdot) \in L_\infty(T, \Sigma, \mu) \mid 0 \leq \alpha(t) \leq 1, \text{ casi por doquier } t \in T\}$ ;  $W$  es el desplazamiento de la homotecia de la esfera unidad  $B = BL_\infty(T, \Sigma, \mu)$ , a saber,  $W = 2^{-1}B + 1(\cdot) \cdot 2$ , donde por  $1(\cdot)$  se denota la función en  $T$  equivalente a la unidad. De acuerdo con el teorema de Banach — Alaoglu, la esfera  $B$  y, por consiguiente, también la esfera  $W$ , constituyen el compacto en la topología débil  $L_\infty(T, \Sigma, \mu)$ .

Supongamos que

$$\lambda\alpha(\cdot) = \left( \int_I \alpha(t) d\mu_1, \dots, \int_I \alpha(t) d\mu_n \right) \stackrel{(1)}{=} \\ \stackrel{(1)}{\left( \int_I \alpha(t) p_1(t) d\mu, \dots, \int_I \alpha(t) p_n(t) d\mu \right)}.$$



Es obvio que  $\Lambda \in \mathcal{L}(L_\infty(T, \Sigma, \mu), \mathbb{R}^n)$  y, por lo tanto,  $\Lambda W$  es un compacto convexo en  $\mathbb{R}^n$ . Además,  $M \subset \Lambda W$ , ya que si  $x \in M$ , entonces

$$x = \int_A d\mu_t = \int_T \chi_A(t) p(t) d\mu \in \Lambda W.$$

2. Sea  $x \in \Lambda W$  y  $W_x := \{\alpha(\cdot) \in W \mid \Lambda\alpha(\cdot) = x\} \Leftrightarrow W_x = \Lambda^{-1}x \cap W$ . En vista de que  $W_x$  es la preimagen del punto  $x$  en una aplicación lineal continua que se interseca con un compacto convexo, resulta que  $W_x$  también es un compacto convexo y, por consiguiente, según el teorema de Krein — Milman, el mismo tiene el punto extremo  $\hat{\alpha}(\cdot)$ . Supongamos que  $\hat{\alpha}(\cdot)$  no es una función característica. Eso significará que existe un conjunto  $A \in \Sigma$ ,  $\mu(A) > 0$  y un número  $0 < \varepsilon < 1$  tales que se cumplen las desigualdades  $\varepsilon \leq \alpha(t) \leq 1 - \varepsilon \forall t \in A$ .

Denotemos  $A$  por  $A_0$ . Tras determinar la continuidad de  $\mu$  se hallará un conjunto  $A_1 \in \Sigma$  tal que  $0 < \mu(A_1) < \mu(A_0)$ .

Supongamos que  $A_1' := A_0 \setminus A_1$ . Después descompongamos  $A_1'$  en  $A_2$  y  $A_2'$  y hagamos eso  $n + 1$  veces. Como resultado obtendremos la siguiente descomposición:  $A_0 = A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}$ ,  $\mu(A_i) > 0$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ . Supongamos para  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$y(t, \eta) = \begin{cases} \eta_k, & t \in A_k, \\ 0 & t \notin A_k. \end{cases}$$

Entonces  $\int_T y(t, \eta) p_i(t) d\mu = \sum_{k=1}^{n+1} \eta_k \int_{A_k} p_i(t) d\mu$  y, por lo tanto,

existirá  $\hat{\eta} = (\hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_{n+1})$  tal que  $\int_T y(t, \hat{\eta}) \times p_i(t) d\mu = 0$  (esta ecuación es un sistema lineal homogéneo de  $n + 1$  ecuaciones con  $n + 1$  incógnitas). Así,  $y(\cdot, \hat{\eta}) \in (\text{lin}\{p_1(\cdot), \dots, p_n(\cdot)\})^\perp$ . Elijamos una constante  $\hat{\lambda}$  tan pequeña que  $\|y(\cdot, \hat{\eta})\|_{L^\infty(A_0)} = \|\hat{\lambda}y(\cdot, \hat{\eta})\| \leq \varepsilon$ . Como resultado obtenemos:  $\Lambda(\hat{\alpha}(\cdot) \pm \hat{\lambda}y(\cdot)) = \Lambda\hat{\alpha}(\cdot) = x$ ,  $0 \leq \hat{\alpha}(\cdot) \pm \hat{\lambda}y(\cdot) \leq 1$  casi por doquier es decir,  $\hat{\alpha}(\cdot) \notin \text{extr } W_x$ . La contradicción demuestra el teorema.  $\triangleright$

**7.3.4. Teoremas de Caratheodory, Radón y Helly.** El objetivo de este punto consiste en exponer la demostración del teorema de Helly, del cual se deduce el importante teorema de depuración (véase el p. 1.6 y después el punto 8.3). Uno de los métodos más sencillos de demostración de dicho teorema se basa en los teoremas de Caratheodory y Radón que presentan interés independiente.

**Teorema de Caratheodory.** Supongamos que  $A$  es un subconjunto no vacío en  $\mathbb{R}^n$  y que  $x$  pertenece a la envoltura convexa de  $A$ . Entonces existirá un número  $r \leq n + 1$  y  $r$  puntos  $x_i \in A$ ,  $1 \leq i \leq r$  tales que  $x$  pertenecerá a la envoltura convexa del conjunto  $\{x_1, \dots, x_n\}$ .

◁ Recordemos (véase el p. 1.6) que si  $x$  pertenece a la envoltura convexa de  $A_n$  existirán  $N$  y  $N$  puntos  $\{x_1, \dots, x_N\}$  de  $A_n$  tales que  $x = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i$ , donde  $\alpha_i > 0$ ,  $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ . Si  $N \leq n+1$ , todo

queda demostrado. Supongamos que  $N > n+1$ . Entonces el número de vectores  $x_i - x_1$ ,  $i=2, \dots, n$  superará  $n$ , lo cual significa que ellos son linealmente dependientes, es decir, se hallarán números  $c_2, \dots, c_N$  que no son a la vez iguales a cero, y tales que

$$\sum_{i=2}^N c_i (x_i - x_1) = 0 \iff \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i = 0, \lambda_i \text{ no son todos iguales a cero}$$

y  $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 0$  ( $\lambda_i = c_i$ ,  $i \geq 2$ ,  $\lambda_1 = -\sum_{i=2}^N c_i$ ). Sin limitarse a la posibilidad de generalizar, podemos estimar que  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i=1, \dots, k$ ,

$\lambda_i < 0$ ,  $i > k$ . Sea  $\alpha_{j_0} \lambda_{j_0}^{-1} = \max_{k+1 \leq j \leq N} \alpha_j \lambda_j^{-1}$ . Entonces  $x = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i =$

$$= \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0 \right) = \sum_{i=1}^N \left( \alpha_i - \frac{\alpha_{j_0}}{\lambda_{j_0}} \lambda_i \right) x_i =: \sum_{i=1}^N \beta_i x_i. \text{ Es evidente que}$$

$\beta_i \geq 0$  cuando  $i \leq k$ , ya que  $\lambda_{j_0}$  es negativo, mientras que  $\lambda_i$  es positivo. Pero si  $i \geq k+1$ , entonces, en virtud de nuestra elección,  $\alpha_i / \lambda_i \leq \alpha_{j_0} / \lambda_{j_0} \Rightarrow \alpha_i \geq \alpha_{j_0} \lambda_i / \lambda_{j_0}$  (ya que  $\lambda_i < 0$ ), es decir,  $\beta_i \geq 0 \forall i$ .

Pero en este caso, en primer lugar,  $\sum_{i=1}^N \beta_i = \sum_{i=1}^N (\alpha_i - \alpha_{j_0} \lambda_i / \lambda_{j_0}) = 1$ , y en segundo lugar,  $\beta_{j_0} = 0$ . Hemos recibido la representación de  $x$  a través del elemento  $N-1$ . Continuando este procedimiento llegaremos a la demostración necesaria. ▷

**Teorema de Radón.** *Supongamos que en  $R^n$  se ha dado un sistema  $C = \{x_1, \dots, x_m\}$  integrado por  $m \geq n+2$  puntos. Además,  $C$  puede ser dividido en dos conjuntos  $C_1$  y  $C_2$  ( $C = C_1 \cup C_2$ ,  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ ) de tal modo que las envolturas convexas  $C_1$  y  $C_2$  tengan una intersección no vacía.*

◁ En vista de que  $m \geq n+2$ , razonando igual que al principio de la demostración del teorema anterior, llegamos a la conclusión de que existen los números  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  que no son a la vez

iguales a cero, y tales que  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$ ,  $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = 0$ . Sin limitarse

a la posibilidad de generalizar, podemos estimar que  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i=1, \dots, k$ ,  $\lambda_i < 0$ ,  $i \geq k+1$ . Supongamos que  $C_1 = \{x_1, \dots, x_k\}$ ,  $C_2 = \{x_{k+1}, \dots, x_m\}$ . Evidentemente que  $C = C_1 \cup C_2$  y  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ .

Supongamos que  $y = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i / \sum_{i=1}^k \lambda_i$ . Entonces resulta que  $y = \sum_{i=k+1}^m -$

$$-\lambda_i x_i / \sum_{i=k+1}^m -\lambda_i \iff y \in \text{co } C_1 \cap \text{co } C_2. \quad \triangleright$$

**Teorema de Helly.** Sea  $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Q}}$ ,  $A_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  una familia de conjuntos convexos cerrados, uno de los cuales —  $A_{\alpha_0}$  — es compacto y, además, se cumple la condición de Helly: toda subfamilia que consta de  $n + 1$  conjuntos tiene una intersección no vacía. En este caso, la intersección de todos los conjuntos de la familia  $\mathcal{A}$  no es vacía.

◁ 0. La demostración se basa en el lema del sistema centrado: para que el espacio topológico sea compacto es necesario y suficiente que cada sistema centrado (es decir, el sistema de subconjuntos cuya cualquier familia finita tiene una intersección no vacía) de sus subconjuntos cerrados tenga una intersección no vacía. Este hecho se deduce inmediatamente de la definición corriente de compacidad [véase KF, pág. 93].

1. Demostremos el teorema a base de inducción por el número de conjuntos. Para  $m = n + 1$  conjuntos la afirmación del teorema es trivial. Pero supongamos que dicha afirmación es justa para  $m - 1$  conjuntos,  $m \geq n + 2$ . Examinemos la familia de  $m$  conjuntos  $A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_m}$ . Según supone la inducción, existe  $x_i$  perteneciente a la intersección de todos los conjuntos  $A_j$  excepto  $A_i$ . Según el teorema de Radón, el conjunto  $C = \{x_1, \dots, x_m\}$  puede ser representado en forma de la suma  $C = C_1 \cup C_2$ ,  $C_1 = \{x_i \mid i \in J_1\}$ ,  $C_2 = \{x_i \mid i \in J_2\}$ ,  $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ ,  $\text{co } C_1 \cap \text{co } C_2 \neq \emptyset$ .

Sea  $y \in \text{co } C_1 \cap \text{co } C_2$ . De aquí, si  $i \in J_1$ , entonces, según la definición,  $x_i \in \bigcap_{j \in J_2} A_j$ , es decir,  $y \in \bigcap_{j \in J_2} A_j$ . Análogamente,  $y \in \bigcap_{j \in J_1} A_j$ .

o sea,  $y \in \bigcap_{i=1}^m A_i$ . Con la aplicación del lema del sistema centrado a la familia  $\{A_\alpha \cap A_{\alpha_0}\}_{\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha \neq \alpha_0}$ ,  $\neq$  finaliza la demostración del teorema.

## § 8. Análisis convexo en espacios lineales

### 8.1. Relaciones duales en el análisis convexo

Ya hemos subrayado, en el p. 1.5, que una de las tesis más importantes del análisis convexo consiste en que cualquier objeto convexo (conjunto, función o problema extremal) admite doble descripción, principalmente en un espacio dual. Para que dicha tesis reciba su expresión exacta, primero es necesario esclarecer lo que significa espacio dual.

**8.1.1. Espacios en dualidad.** Supongamos que  $X$  e  $Y$  son ciertos espacios lineales, y  $B: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  es la forma bilineal determinada en su producto cartesiano. Dícese que la forma  $B$  conduce a la dualidad de  $X$  e  $Y$  si para cualquier  $x \neq 0$ ,  $x \in X$  se halla un elemento  $y \in Y$  tal que  $B(x, y) \neq 0$  y, viceversa, si para cualquier  $\eta \neq 0$ ,  $\eta \in Y$  existe un elemento  $\xi \in X$  tal que  $B(\xi, \eta) \neq 0$ .

Citemos dos ejemplos importantes.

1. Sea  $X = Y = \mathbb{R}^n$ ,  $B(x, y) = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  una forma bilineal estandarizada en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Tal forma estandarizada conduce a la dualidad de  $Y := \mathbb{R}^n$  y  $X := \mathbb{R}^n$ .

2. Sea  $X$  un espacio normalizado;  $Y : X^*$ , un espacio conjugado con  $X$ ; y  $B(x, x^*) := \langle x^*, x \rangle$ , el efecto que ejerce la funcional lineal  $x^* \in X^*$  sobre el elemento  $x \in X$ . Esa forma bilineal (a veces llamada canónica) conduce a la dualidad de  $X$  y  $X^*$ .

Efectivamente, el hecho de que para  $x^* \neq 0$ ,  $x^* \in X^*$  se halle  $x \in X$  para el cual  $\langle x^*, x \rangle \neq 0$ , se deduce simplemente de la definición de funcional lineal no nula. Y el hecho de que para cada  $x \neq 0$ ,  $x \in X$  se halle  $x^* \in X^*$  para el cual  $\langle x^*, x \rangle \neq 0$ , se deduce del lema de Banach (p. 7.1).

En lo sucesivo, la forma bilineal que conduce a la dualidad de  $X$  e  $Y$  también la designaremos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , y el hecho de que  $X$  se encuentre en dualidad con  $Y$  lo designaremos por  $X \leftarrow d \rightarrow Y$ .

La dualidad engendra cierta topología en cada uno de los espacios  $X$  e  $Y$ . La topología en  $X$ , designada por  $\sigma(X, Y)$ , se halla determinada por la base del entorno de cero que consta de los semiespacios

$$\overset{0}{\Pi}_+(y, \beta) = \{x \in X \mid \langle x, y \rangle < \beta\}, \quad \beta > 0.$$

Esta es una de las topologías más débiles con la que las funciones  $x \rightarrow \langle x, y \rangle$  son continuas. Análogamente se determina la topología  $\sigma(Y, X)$ . Su base de entornos es generada por los semiespacios

$$\overset{0}{\Pi}_+(x, \beta) = \{y \in Y \mid \langle x, y \rangle < \beta, \beta > 0.$$

Las topologías  $\sigma(X, Y)$  ( $\sigma(X, Y)$ ) convierten  $X$  ( $Y$ ) en espacios localmente convexos.

$(\mathbb{R}^n \leftarrow d \rightarrow \mathbb{R}^n)$   $\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , en el primer ejemplo que hemos examinado es una topología corriente en  $\mathbb{R}^n$  (cuando el conjunto abierto se caracteriza por el hecho de que para cualquiera de sus puntos existe una esfera euclídea abierta, con el centro en ese mismo punto y que se halla por completo situada en el referido conjunto). En el segundo ejemplo, cuando  $X \leftarrow d \rightarrow X^*$  ( $X$  es un espacio normalizado; y  $X^*$ , un espacio conjugado con el primero, y la dualidad se efectúa mediante una forma canónica), la topología  $\sigma(X, X^*)$  se llama topología *débil*, mientras que  $\sigma(X^*, X)$  se denomina *débil\** topología.

La topología  $\tau$  en  $X$  se dice que está *coordinada con la dualidad* si el espacio conjugado con  $(X, \tau)$  coincide con  $Y$ . La topología  $\sigma(X, Y)$  es la más débil de las topologías coordinadas con la dualidad. La topología fuerte del espacio normalizado también se halla evidentemente coordinada con la dualidad descrita en el ejemplo 2.

8.1.2. Operadores del análisis convexo. Describamos los operadores duales (ya lo hemos hecho en el p. 1.5 al examinar un caso de dimensión finita). Sea  $X \leftarrow d \rightarrow Y$ .

Llábase transformación de Legendre — Young — Fenchel de la función  $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  (o función conjugada con  $f$ ) la función en  $Y$  determinada por la igualdad

$$f^*(y) := \sup_x (\langle x, y \rangle - f(x)).$$

Para la función conjugada también utilizaremos otra designación (operacional):  $lf$ . Si  $g: Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , entonces

$$lg(x) := \sup_y (\langle x, y \rangle - g(y)).$$

La función

$$Ff(x) := l(lf)(x) := \sup_y (\langle x, y \rangle - (lf)(y))$$

se llama *segunda conjugada con  $f$* . De la definición de la función conjugada se deduce la *desigualdad de Young*

$$\langle x, y \rangle \leq f(x) + (lf)(y).$$

Llábase *polar* del conjunto  $A \subset X$ ,  $A \neq \emptyset$  el siguiente conjunto en  $Y$ :

$$A^0 = \{y \in Y \mid \langle x, y \rangle \leq 1 \forall x \in A\}.$$

Análogamente se determina la polar del conjunto situado en  $Y$ . Para la polar  $A$  utilizaremos otra designación (operacional):  $\pi A$ . El conjunto  $\pi(\pi A)$  se llama *bipolar*  $A$ .

Decimos que un cono *conjugado* con el cono  $K \subset X$  tiene el siguiente aspecto:

$$K^* = \{y \in Y \mid \langle x, y \rangle \geq 0 \forall x \in K\}.$$

Igualmente se determina el cono conjugado con el cono  $L \subset Y$ , así como el segundo cono conjugado con  $K$ . Es fácil comprender que  $K^x = -\pi K$ .

Por *subdiferencial de la función sublineal*  $p$  ( $\Leftrightarrow$  convexa, homogénea y de primer grado) en  $X$  ( $\Leftrightarrow p \in SL(X)$ ) se entiende el siguiente conjunto en  $Y$ :

$$\partial p := \{y \in Y \mid \langle x, y \rangle \leq p(x) \forall x \in X\}.$$

A su vez, por *subdiferencial de la función convexa*  $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  en el punto  $\hat{x}$  se entiende el siguiente conjunto en  $Y$ :

$$\partial f(\hat{x}) := \{y \in Y \mid \langle x - \hat{x}, y \rangle \leq f(x) - f(\hat{x}) \forall x\}.$$

Sea  $A$  un subconjunto en  $X$ . En el análisis convexo desempeñan un papel importante las siguientes tres funciones:

— *función de apoyo*

$$sA(y) = \sup \{\langle x, y \rangle \mid x \in A\},$$

— *función de Minkowski*

$$\mu A(x) := \inf \{\alpha \mid \alpha^{-1}x \in A\} \quad (\inf \emptyset := \infty),$$

$$\delta A(x) = \begin{cases} 0, & x \in A; \\ \infty, & x \notin A. \end{cases}$$

Todas estas determinaciones para el caso de dimensión finita fueron expuestas en el p. 1.5, donde también se dan diversos ejemplos.

**8.1.3. Teoremas de dualidad y compacidad.** En el p. 1.5.3 hemos enunciado los teoremas de dualidad y compacidad para el caso de dimensión finita y hemos dicho que en la segunda parte del libro, esos teoremas serán formulados y demostrados con arreglo al caso de dimensión infinita. En este párrafo se dan las enunciaciões de los teoremas, y en el párrafo siguiente se exponen sus demostraciones. Las enunciaciões de los teoremas prácticamente no han sufrido modificaciones (véase el p. 1.5.3).

He aquí la situación general de dimensión finita en la que son válidos los teoremas de dualidad y compacidad:  $X$  e  $Y$  son espacios en dualidad, y  $X$  posee una topología  $\tau$  que concuerda con la dualidad. No obstante, vamos a simplificar un poco el problema analizando un caso idéntico: cuando  $X$  es un espacio localmente convexo que permanece en dualidad con su espacio conjugado. Así pues,

**Teorema de dualidad.** *Sea  $X$  un espacio localmente convexo.*

a) *La función  $f: X \rightarrow \mathbf{R}^*$  coincide con su segunda conjugada si y sólo si esta última es convexa y cerrada.*

b) *El conjunto no vacío  $A \subset X$  coincide con su bipolar si y sólo si esta última es convexa, cerrada y contiene cero.*

c) *El cono  $K \subset X$  coincide con su segundo conjugado si y sólo si este último es convexo y cerrado.*

d) *La función sublineal con una subdiferencial no vacía posee igual propiedad que  $s\delta p = p$  si y sólo si  $p$  está cerrada.*

e) *El subconjunto no vacío  $A \subset X$  coincide con el conjunto  $\delta sA$  si y sólo si  $A$  es convexo y cerrado.*

Recordemos que a) se llama teorema de Fenchel — Moreau, y b), teorema de la bipolar.

**Teorema de compacidad.** *Sea  $X$  un espacio localmente convexo.*

a) *La polar del entorno abierto de cero en  $X$  es compacta (en la débil\* topología de  $X^*$ ).*

b) *La subdiferencial de una función sublineal continua de  $X$  es compacta (en la débil\* topología de  $X^*$ ).*

Todo eso demuestra que las enunciaciões del p. 1.5 aquí también son casi idénticas, tan sólo  $\mathbf{R}^n$  puede ser sustituido por cualquier espacio lineal topológico localmente convexo.

**8.1.4. Demostraciones de los teoremas de dualidad y compacidad.**

Primero demostraremos el teorema de Fenchel — Moreau.

◁ 0. El lugar central en la demostración le pertenece al segundo teorema de separabilidad (p. 7.1).

1. Necesidad. Sea  $l^2f = f$ . Entonces

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x^*} (\langle x^*, x \rangle - lf(x^*)) = : \sup_{x^*} a(x; x^*, lf(x^*)),$$

donde la función afín  $a(\cdot; x^*, \beta)$  puede ser determinada por la igualdad  $a(x, x^*, \beta) = \langle x^*, x \rangle - \beta$ . La función  $a(\cdot; x^*, lf(x^*))$  es una función cerrada, mientras que la supergráfica de la cota superior de la familia de funciones convexas cerradas es, en realidad, la supergráfica de un conjunto convexo cerrado. Por lo tanto,  $f$  es una función convexa y cerrada.

2. Suficiencia. Sea  $f$  una función convexa y cerrada. Si  $f \equiv \infty$ , entonces, por definición,  $l^2f = f$ . Pero si  $f \equiv \infty$ , en este caso  $\text{dom } f \neq \emptyset$  y  $\text{epi } f$  es un conjunto no vacío convexo cerrado en  $X \times \mathbf{R}$ , el cual no coincide con  $X \times \mathbf{R}$ . A consecuencia de la desigualdad de Young ( $\langle x^*, x \rangle \leq f(x) + lf(x^*)$ ), obtenemos que  $\sup_{x^*} (\langle x^*, x \rangle -$

$$- lf(x^*)) \stackrel{\text{def}}{=} l^2f \leq f(x), \text{ es decir, } \text{epi } l^2f \supset \text{epi } f.$$

Supongamos que existe el punto  $x_0 \in \text{dom } l^2f$ , donde  $l^2f(x_0) < f(x_0)$ . Sea, además, que  $\xi \in \text{dom } f$ . El punto  $(\xi, f(\xi) - 1)$  no pertenece a  $\text{epi } f$  y, según el segundo teorema de separabilidad, el mismo puede ser estrictamente separado de  $\text{epi } f$  mediante una funcional lineal no nula. Eso significa que se hallarán  $x^* \in X^*$  y  $\gamma \in \mathbf{R}$  tales que

$$\gamma(f(\xi) - 1) + \langle x^*, \xi \rangle > \sup \{ \gamma\alpha + \langle x^*, x \rangle \mid (x, \alpha) \in \text{epi } f \}. \quad (1)$$

Por supuesto que la desigualdad  $\gamma > 0$  es imposible, ya que de lo contrario, en la parte derecha obtuviéramos  $+\infty$ , lo cual contradice la expresión 1. Tampoco es posible la tolerancia de  $\gamma = 0$ , ya que entonces resultaría que  $\langle x^*, \xi \rangle > \langle x^*, \xi \rangle$ . Consiguientemente,  $\gamma < 0$  y, entonces, dividiendo ambos miembros de la desigualdad 1 entre  $|\gamma|$  y suponiendo  $\eta^* = x^*/|\gamma|$ , obtenemos que  $lf(\eta^*) < \infty \Leftrightarrow \text{dom } lf \neq \emptyset$ .

Ahora separemos de  $\text{epi } f$  el punto  $(x_0, l^2f(x_0))$  basándonos de nuevo en el segundo teorema de separabilidad. Eso significa que se hallarán los números  $\beta$  y  $x_0^* \in X^*$  tales que

$$\beta l^2f(x_0) + \langle x_0^*, x_0 \rangle > \sup \{ \beta\alpha + \langle x_0^*, x \rangle \mid x \in \text{dom } f, \alpha \geq f(x) \}. \quad (2)$$

Aquí  $\beta$  tampoco puede ser un número positivo, ya que de lo contrario la cota superior a la derecha sería igual a  $+\infty$ . El caso de  $\beta = 0$  tampoco es posible, ya que de lo contrario

$$\begin{aligned} lf(\eta^* + tx_0^*) &:= \sup \{ \langle \eta^* + tx_0^*, x \rangle - f(x) \mid x \in \\ &\in \text{dom } f \} \leq \sup \{ \langle \eta^*, x \rangle - f(x) \mid x \in \text{dom } f \} + \\ &+ t \sup \{ \langle x_0^*, x \rangle \mid x \in \text{dom } f \} = lf(\eta^*) + \\ &+ t \sup \{ \langle x_0^*, x \rangle \mid x \in \text{dom } f \}. \end{aligned}$$

Consiguientemente,

$$\begin{aligned} l^2 f(x_0) &\geq \langle \eta^* + tx_0^*, x_0 \rangle - l f(\eta^* + tx_0^*) \geq \\ &\geq \langle \eta^*, x_0 \rangle - l f(\eta^*) + t(\langle x_0^*, x_0 \rangle - \\ &\quad - \sup \{ \langle x_0^*, x \rangle \mid x \in \text{dom } f \}) \rightarrow \infty \text{ para } t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

en virtud de (2) (para  $\beta = 0$ ). Así pues,  $x_0 \notin \text{dom } l^2 f$  a pesar de la tolerancia. Por lo tanto,  $\beta < 0$ . Dividiendo ambos miembros de la desigualdad (2) entre  $|\beta|$  y suponiendo  $\hat{x}^* = |\beta|^{-1} x^*$ , obtenemos

$$\langle \hat{x}^*, x_0 \rangle - l^2 f(x_0) > \sup \{ \langle x^*, x_0 \rangle - \alpha \mid x \in \text{dom } f, \alpha \geq f(x) \} \stackrel{\text{def}}{=} l f(\hat{x}),$$

es decir,  $\langle \hat{x}^*, x_0 \rangle > l f(\hat{x}) + l^2 f(x_0)$  contradice la desigualdad de Young.  $\triangleright$

Demostremos todas las demás fórmulas del teorema de dualidad.

$\triangleleft$  La demostración del teorema de la bipolar se basa en las siguientes fórmulas que derivan de las definiciones:

$$(i) \quad l\delta A = sA, \quad (ii) \quad l\mu = \delta\pi A, \quad (iii) \quad 0 \in A \Rightarrow \mu\pi A = sA.$$

La necesidad en b) es evidente. Suficiencia. Supongamos que  $A$  es convexo y cerrado y que contiene cero. Entonces

$$\delta\pi^2 A \stackrel{(ii)}{=} l\mu\pi A \stackrel{(iii)}{=} lsA \stackrel{(i)}{=} l^2\delta A \stackrel{a)}{=} \delta A \Rightarrow \pi^2 A = A.$$

La fórmula c) se deduce inmediatamente del teorema de la bipolar, puesto que  $K^{**} = \pi^2 K$ .

La necesidad en las fórmulas d) y e) resulta de las definiciones. Sea  $p$  una función sublineal convexa y cerrada. Entonces, tomando en consideración la relación explícita (IV)  $lp = \delta\partial p$  y la relación a), obtenemos

$$p \stackrel{a)}{=} l^2 p \stackrel{\text{def}}{=} l(lp) \stackrel{(IV)}{=} l\delta\partial p \stackrel{(i)}{=} s\partial p.$$

Demostremos la suficiencia en d). Sea  $A$  un conjunto convexo y cerrado. Entonces  $\delta A \stackrel{a)}{=} l^2\delta A \stackrel{\text{def}}{=} l(l\delta A) \stackrel{(i)}{=} lsA \stackrel{(IV)}{=} \delta\partial sA \Rightarrow A = \partial sA$ . Por consiguiente, el teorema de la dualidad resulta totalmente demostrado.  $\triangleright$

Pasemos al segundo teorema: acerca de la compacidad. Demostremos su segunda parte (teorema acerca de la compacidad de la subfuncional). La primera parte se demuestra análogamente.

$\triangleleft$  0. La demostración se basa en los teoremas de Tíjonov\* y de Fenchel - Moreau.

1. Sea  $p$  una función continua sublineal. Utilizando la relación (IV) ( $lp = \delta\partial p$ ) que participó en la demostración del teorema anterior, nos convencemos de que  $\partial p$  es un conjunto convexo no vacío.

\* Véase, por ejemplo: Danford N., Schwarz J. T. *Operadores lineales*. M.; L., 1962, pág. 45.



Denotemos  $\mathfrak{A} = \prod_{x \in X} \{-p(-x), p(x)\}$  (producto directo de los segmentos  $\{-p(-x), p(x)\}$  de todos los conjuntos  $x \in X$ ) con topología tjonoviana. Según el teorema de Tjjonov,  $\mathfrak{A}$  es un compacto. Sea  $x^* \in \partial p$ . Supongamos que  $\varphi_{x^*} : X \rightarrow \mathfrak{A}$ ,  $\varphi_{x^*}(x) := \langle x^*, x \rangle$ . De la definición de la subdiferencial ( $\langle x^*, x \rangle \leq p(x) \forall x$ ) se deduce que  $\varphi_{x^*}(\cdot) \in \mathfrak{A}$ . Denotemos  $\{\varphi_{x^*}(\cdot) \mid x^* \in \partial p\}$  mediante  $\mathfrak{B}$ . Si  $x_1^* \neq x_2^*$ , entonces, por definición, existirá  $x : \langle x_1^*, x \rangle \neq \langle x_2^*, x \rangle$ , es decir,  $\varphi_{x_1^*}(\cdot) \neq \varphi_{x_2^*}(\cdot)$ . Por lo tanto, la aplicación de  $\partial p$  a  $\mathfrak{B}$ , realizada con ayuda de  $\{\varphi_{x^*}(\cdot) \mid x^* \in \partial p\}$  (explícitamente continua), es recíprocamente unívoca.

2. Demostremos el carácter cerrado de  $\mathfrak{B}$  en  $\mathfrak{A}$ . Supongamos que  $\hat{f}(\cdot)$  pertenece a la clausura de  $\mathfrak{B}$  en  $\mathfrak{A}$ . Según la definición, eso significa que para cualquier entorno  $V$  del punto  $\hat{f}(\cdot)$  en  $\mathfrak{A}$ , existe  $x^* \in \partial p$  tal que  $\varphi_{x^*}(\cdot) \in V$ . Sea

$$V := V_{x_1, x_2, x_1+x_2}(\varepsilon) = \{f(\cdot) \in \mathfrak{A} \mid |f(x_i) - \hat{f}(x_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \quad |f(x_1 + x_2) - \hat{f}(x_1 + x_2)| < \varepsilon\}. \quad (1)$$

Entonces, en virtud de lo dicho más arriba, existe  $x^* \in \partial p$  tal que

$$\begin{aligned} |\langle x^*, x_i \rangle - \hat{f}(x_i)| &< \varepsilon, \quad i = 1, 2, \\ |\langle x^*, x_1 + x_2 \rangle - \hat{f}(x_1 + x_2)| &< \varepsilon, \end{aligned}$$

de donde, debido a la arbitrariedad de  $\varepsilon$ , obtenemos que  $\hat{f}(x_1 + x_2) = \hat{f}(x_1) + \hat{f}(x_2) \forall x_1, x_2 \in X$ . Análogamente se puede mostrar que  $\hat{f}(\alpha x) = \alpha \hat{f}(x) \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{R}$ . En vista de que  $\hat{f}(x) \in \{-p(-x), p(x)\}$ , obtenemos que  $\hat{f}$  es una funcional continua. Por lo tanto,  $\hat{f}(x) = \langle x^*, x \rangle$ . Eso significa que  $\mathfrak{B}$  es un compacto (como subconjunto cerrado del compacto  $\mathfrak{A}$ ) y a la vez es la imagen de  $\partial p$  en una aplicación continua recíprocamente unívoca. Consiguientemente,  $\partial p$  también es un compacto.  $\triangleright$

## 8.2. Teorema de depuración

En el p. 1.5.4 hemos hablado del cálculo convexo. Dos fórmulas principales —de Moreau — Rocafellar y de Dubowizki — Miliutin— fueron demostradas para el caso de dimensión finita. De esas demostraciones es fácil notar que las mismas también se mantienen sin cambios para el caso de dimensión infinita.

En este punto demostraremos el teorema de depuración que generaliza el resultado de Dubowizki — Miliutin.

En el p. 1.5.4 hemos enunciado el teorema de depuración con arreglo a las subdiferenciales. Este hecho se deduce inmediatamente del siguiente resultado, el cual, a decir verdad, debe recibir el nombre de

**Teorema de depuración.** Sea  $T$  un compacto, y  $f: T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , una función dotada de las siguientes propiedades:

- $f(t, \cdot)$  es convexa y continua en  $\mathbb{R}^n$  para cualquier  $t \in T$ ,
- $f(\cdot, x)$  es semicontinua por arriba para cualquier  $x$  de  $\mathbb{R}^n$ ,
- $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{t \in T} f(t, x) =: M > -\infty$ . Entonces existirá  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \leq$

$\leq n + 1$  y un conjunto de puntos  $\{\tau_1, \dots, \tau_r\}$ ,  $\tau_i \in T$  tales que  $M = \inf_x \max_{1 \leq i \leq r} f(\tau_i, x)$ .

Por consiguiente, el compacto  $T$  puede ser «depurado» hasta  $r$  puntos, o sea,  $r \leq n + 1$ , y el minimax de toda la familia  $\{f(t, \cdot)\}_{t \in T}$  resultará igual tan sólo al minimax de la familia  $\{f(\tau_i, \cdot)\}_{i=1}^r$  integrada por un número finito de funciones.

◁ 0. La demostración se basa en el teorema de Helly (véase el p. 7.3).

1. Denotemos por  $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_{n+1})$  el elemento del producto  $T^{n+1}$ ,  $m(\bar{\tau}) := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{1 \leq i \leq n+1} f(\tau_i, x)$  y, por último,  $m := \sup \{m(\bar{\tau}) \mid \bar{\tau} \in T^{n+1}\}$ .

De las definiciones se desprende inmediatamente que  $m \leq M$ . Sea  $\delta > 0$ . Para  $t \in T$  supongamos que  $A_\delta(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(t, x) \leq m + \delta\}$ . En virtud de que  $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(t, x) = m(t, t, \dots, t) \leq m + \delta$ , existirá  $x = x(t)$  tal que  $f(t, x) \leq m + \delta$ , es decir,  $A_\delta(t) \neq \emptyset$ . Debido a que  $f(t, \cdot)$  es convexa y continua,  $A_\delta(t)$  es un conjunto convexo y cerrado en  $\mathbb{R}^n$ .

2. Sean  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in T^n$  y  $x(\xi)$  tales que  $f(\xi_i, x(\xi)) < m + \delta$  (de la definición de  $m$  se deduce que tal  $x(\xi)$  existe). Designemos por  $V(\xi)$  un subconjunto en  $T^n$  integrado por los puntos  $\xi' = (\xi'_1, \dots, \xi'_n) \in T^n$  para los cuales  $f(\xi'_i, x(\xi)) < m + \delta$ . Partiendo de la condición de subcontinuidad superiormente, obtenemos que  $V(\xi)$  es un entorno del punto  $\xi$  en  $T^n$ . Según la definición de compacidad, se hallarán  $\{\xi^1, \dots, \xi^l\}$  tales que  $\{V(\xi^i)\}_{i=1}^l$  será un recubrimiento abierto de  $T^n$ . Supongamos que

$$\hat{A} := \text{co} \{x(\xi^1), \dots, x(\xi^l)\},$$

$$\mathcal{U} := \{A_\delta(t)\}_{t \in T} \cup \hat{A}.$$

Verifiquemos el hecho de que la familia  $\mathcal{U}$  posee propiedad de Helly (véase el p. 7.3).

a) Sea dado  $n + 1$  conjuntos  $A_\delta(t_1), \dots, A_\delta(t_{n+1})$  (sin  $\hat{A}$ ). Entonces, partiendo de las definiciones de  $m(t)$  y  $m$  (donde  $\bar{t} =$

$= (t_1, \dots, t_{n+1})$ , obtenemos que existe  $x(t)$  tal que  $f(t_i, x(\bar{t})) \leq m + \delta$ , es decir,  $x(\bar{t}) \in \bigcap_{i=1}^{n+1} A_\delta(t_i)$ .

b) Sean dados  $n$  conjuntos  $A_\delta(\eta_1), \dots, A_\delta(\eta_n)$  y  $\hat{A}$ . Entonces (al igual que en el caso a)), existe  $x(\eta)$  ( $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ ) tal que  $f(\eta_i, x(\eta)) \leq m + \delta$ . De la construcción del sistema  $\{\xi^i\}_{i=1}^n$  se hallará  $\xi^{i_0}$  tal que  $\eta \in V(\xi^{i_0})$ , es decir,  $f(\eta_i, x(\xi^{i_0})) < m + \delta$ , o sea,  $x(\xi^{i_0}) \in A_\delta(\eta_i)$ , es decir,  $x(\xi^{i_0}) \in \bigcap_{i=1}^n A_\delta(\eta_i) \cap \hat{A}$ , ya que

$x(\xi^{i_0}) \in \text{co}\{x(\xi^1), \dots, x(\xi^n)\} =: \hat{A}$ . Así pues, cualquier familia de  $n+1$  conjuntos tiene una intersección no vacía y  $\hat{A}$  está acotado. Según el teorema de Helly, existe  $x(\delta) \in \bigcap_{t \in T} A_\delta(t)$ , es decir,  $M \leq m + \delta$  y, en virtud de la arbitrariedad de  $\delta$ , obtenemos  $m \leq M \leq m$ , o sea,  $m = M$ . De la compacidad de  $T$  y la semicontinuidad de  $f(\cdot, x)$  se desprende que existen  $\{\tau_1, \dots, \tau_r\}$  tales que  $m = \inf_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq r} f(\tau_i, x)$ . Esto es precisamente lo que queríamos comprobar.

Ahora, para obtener el teorema de depuración de subdiferenciales, sólo queda aplicar la fórmula de Dubowizki — Miliutin a la familia  $\{f(\tau_i, x)\}_{i=1}^r$ .

El teorema está demostrado.

## § 9. Condiciones de extremo necesarias

En la introducción y la primera parte del libro ya hemos dicho que las condiciones de extremo necesarias para muchos problemas de optimización obedecen un criterio común único, conocido con el nombre de principio de Lagrange. En este párrafo mostraremos que la fuente de universalidad reside en la agrupación coordinada de todos los problemas de estructura suave y convexa examinados.

### 9.1. Condiciones necesarias de primero y segundo orden en los problemas suaves de programación matemática

9.1.1. Planteamiento del problema y condiciones necesarias de primer orden. Supongamos que  $X$  y  $Y$  son ciertos espacios normalizados;  $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i=0, 1, \dots, m$ , ciertas funcionales; y  $F: X \rightarrow Y$ , la aplicación de  $X$  a  $Y$ . Llámase *problema suave de programación matemática con acotaciones del tipo de igualdades y desigualdades*, el siguiente problema:

$$f_0(x) \rightarrow \inf; \quad f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad F(x) = 0. \quad (\text{Pr})$$

## La función

$$\mathcal{L}(x, \lambda, y^*) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x) + \langle y^*, F(x) \rangle$$

se llama *función de Lagrange* del problema (Pr), y el par  $(\lambda, y^*) \in \mathbb{R}^{m+1} \times Y^*$  se denomina *conjunto de factores de Lagrange*.

**Teorema** (condición necesaria de primer orden). *Supongamos que en el problema (Pr),  $X$  e  $Y$  son ciertos espacios banachianos (condición de banachianidad),  $f_i \in SD(\hat{x})$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ ,  $F \in SD(\hat{x})$  (condición de suavidad); e  $\text{Im } F'(\hat{x})$  es un subconjunto cerrado en  $Y$  (condición debilitada de regularidad). Entonces, si  $\hat{x} \in \text{locmín Pr}$ , existirá un conjunto no nulo de factores lagrangianos  $(\lambda, y^*)$  tales que para la función de Lagrange se cumplirán las condiciones:*

a) de estacionaridad:

$$\mathcal{L}_x(\hat{x}, \lambda, y^*) = 0 \iff \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i'(\hat{x}) + (F'(\hat{x}))^* y^* = 0;$$

b) de no rigidez complementaria:

$$\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, m;$$

c) de no negatividad:

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Este teorema fue demostrado en el p. 2.4. Aquí expondremos una demostración más del caso principal del referido teorema ( $\text{Im } F'(\hat{x}) = Y$ ), utilizando las fórmulas de Moreau — Rocafellar y de Dubowizki — Miliutin (p. 1.5.4). Al igual que en la demostración en el p. 2.4, consideraremos que  $f_i(\hat{x}) = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  y que las condiciones de no rigidez complementaria ya están cumplidas.

◁ Denotemos  $\Lambda = F'(\hat{x})$ ,  $x_i^* = f_i'(\hat{x})$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ . Examinemos el siguiente problema complementario:

$$\max_{i=0, 1, \dots, m} (x_i^*, x) + \delta \text{Ker } \Lambda(x) \rightarrow \text{inf}, \quad (\text{Pr}')$$

donde  $\delta$  es una función indicadora del conjunto  $\text{Ker } \Lambda$ .

**Lema.**  $0 \in \text{absmín Pr}'$ .

◁◁ Supongamos que  $0 \notin \text{absmín Pr}'$ . Entonces  $S_{\text{mín}} < 0$  y, por lo tanto, existirá un elemento  $h \in \text{Ker } \Lambda$  para el cual  $(x_i^*, h) < 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ . Según el teorema del espacio tangente (p. 1.4.4), se hallará un número  $\varepsilon > 0$  y una aplicación  $r: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow X$  tales que  $F(\hat{x} + th + r(t)) = 0 \quad \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$  y  $\|r(t)\| = o(t)$  para  $t \rightarrow 0$ . Pero entonces, utilizando la definición de diferenciabilidad según Frechet, así como la circunstancia de que  $f_i(\hat{x})$ ,

obtenemos

$$f_i(\hat{x} + th + r(t)) = f_i(\hat{x}) + \langle x_i^*, th + r(t) \rangle + \\ + o(\|th + r(t)\|) = t\langle x_i^*, h \rangle + o(t) < 0$$

para pequeños  $t > 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ . Por consiguiente, para pequeños  $t$  el punto  $x + th + r(t)$  será admisible y  $f_0(\hat{x} + th + r(t)) < 0$ , es decir,  $\hat{x} \in \text{locmín Pr}$ . Contradicción.  $\triangleright \triangleright$

Supongamos que  $\varphi(x) = \max_{i=0, 1, \dots, m} \langle x_i^*, x \rangle + \delta \text{Ker } \Lambda(x)$ .

Como  $\varphi$  es una función convexa y, según el lema,  $0 \in \text{absmín } \varphi$ , resulta que, por analogía con el teorema de Fermat para funciones convexas (p. 2.3.1),  $0 \in \partial\varphi(0)$ . En virtud de la fórmula de Moreau — Rocafellar:

$$0 \in \partial\varphi = \partial \left( \max_{i=0, 1, \dots, m} \langle x_i^*, \cdot \rangle + \delta \text{Ker } \Lambda(\cdot) \right) = \\ = \partial \max_{i=0, 1, \dots, m} \langle x_i, \cdot \rangle + \partial\delta \text{Ker } \Lambda(\cdot).$$

Ahora sólo queda utilizar la fórmula de Dubowizki — Miliutin, la relación explícita  $\partial\delta \text{Ker } \Lambda = (\text{Ker } \Lambda)^\perp$  y el lema del anulador del núcleo de un operador regular (p. 7.2). Seguidamente obtendremos  $0 \in \text{co}\{x_0^*, \dots, x_m^*\} + \text{Im } \Lambda^* \Leftrightarrow \exists \lambda_i \geq 0$ ,

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, y^* \in Y^* : \sum_{i=0}^m \lambda_i x_i^* + \Lambda^* y^* = \\ = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^m \lambda_i f'_i(\hat{x}) + (F'(\hat{x}))^* y^* = 0. \quad \triangleright$$

**9.1.2. Condiciones necesarias de segundo orden.** Denotemos por  $\mathbb{J}$  el total de conjuntos de  $(\lambda, y^*)$  para los cuales se cumplen las condiciones a) — c) del teorema (p. 9.1.1) y  $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$ . El teorema sobre las condiciones necesarias de primer orden afirma que  $\mathbb{J} \neq \emptyset$ .

**Teorema** (condición necesaria de segundo orden). *Supongamos que en el problema (Pr) (p. 9.1.1),  $X$  e  $Y$  son ciertos espacios banachianos (condición de banachianidad), y que las funcionales  $f_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  y la aplicación  $F$  son dos veces diferenciables en cierto entorno del punto  $\hat{x}$  (condición de suavidad),  $\text{Im } F'(\hat{x}) = Y$  (condición de regularidad). Entonces, si  $\hat{x} \in \text{locmín Pr}$ ,*

$$\max_{(\lambda, y^*) \in \mathbb{J}} \mathcal{L}_{xx}(\hat{x}, \lambda, y^*) [h, h] \geq 0$$

para cualquier  $h$  perteneciente al cono de variaciones admisibles  $K \stackrel{\text{def}}{=} h \{ \in X \mid \langle f'_i(\hat{x}), h \rangle \leq 0, F'(\hat{x})[h] = 0 \}$ .

◁ La demostración se basa en el lema de minimax y el teorema de Liustérnik (p. 1.4.4).

**Lema 1** (de minimax). Sean  $X$  e  $Y$  ciertos espacios banachianos,

$$\begin{aligned} \Lambda \in \mathcal{L}(X, Y), \quad \Lambda X = Y, \quad x_i^* \in X^*, \\ i = 1, \dots, s, \quad y \in Y, \quad a \in \mathbb{R}^s, \\ \max_{i=1, \dots, s} \langle x_i^*, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \text{Ker } \Lambda. \end{aligned} \quad (1)$$

Supongamos que

$$S(a, y) = \inf_{\Lambda x + y = 0} \max_{i=1, \dots, s} (a_i + \langle x_i^*, x \rangle). \quad (2)$$

Entonces:

a) la magnitud  $S(a, y)$  admite la representación dual

$$S(a, y) = \sup_{(\lambda, y^*) \in \mathcal{J}} \left( \sum_{i=1}^s \lambda_i a_i + \langle y^*, y \rangle \right) =: s\mathcal{J}(a, y), \quad (3)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = \{(\lambda, y^*) \in \mathbb{R}^s \times Y^* \mid \lambda_i \geq 0, \\ \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1, \quad \sum_{i=1}^s \lambda_i x_i^* + \Lambda^* y^* = 0\}, \end{aligned}$$

$s\mathcal{J}(a, y)$  es la función de apoyo del conjunto  $\mathcal{J}$  en el punto  $(a, y)$ .

b)  $\inf$  en (2) y  $\sup$  en (3) se alcanzan.

◁◁ A) **Existencia del mínimo de una función poliedral acotada inferiormente en una variedad afín.** Es fácil notar que los siguientes tres problemas son equivalentes:

$$\varphi(x) := \max_{1 \leq i \leq s} (a_i + \langle x_i^*, x \rangle) + \delta M_y(x) \rightarrow \inf. \quad (\text{Pr}_1)$$

$$M_y := \{x \mid \Lambda x + y = 0\};$$

$$\max_{1 \leq i \leq s} (a_i + \xi_i) \rightarrow \inf; \quad \xi \in M(y); \quad (\text{Pr}_2)$$

$$M(y) := \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_s) \in \mathbb{R}^s \mid \exists x \in X: \xi_i = \langle x_i^*, x \rangle, \\ \Lambda x + y = 0\}, \quad c \rightarrow \inf; \quad a_i + \xi_i \leq c, \quad (\text{Pr}_3)$$

$$i = 1, \dots, s, \quad \xi \in M(y).$$

$M_y$  y  $M(y)$  en los problemas  $(\text{Pr}_1) - (\text{Pr}_3)$  son variedades afines respectivamente en  $X$  y en  $\mathbb{R}^s$ . Tomemos el elemento  $\tilde{x}$  para el cual  $\Lambda \tilde{x} + y = 0$ . Entonces,  $M_y = \tilde{x} + \text{Ker } \Lambda$  y, por consiguiente,  $M(y) = \{\xi \mid \xi_i = \langle x_i^*, \tilde{x} \rangle + \langle x_i^*, h \rangle, h \in \text{Ker } \Lambda\}$ . De acuerdo con la condición del lema, se hallará  $i_0, 1 \leq i_0 \leq s$  tal que  $\langle x_{i_0}^*, \tilde{x} \rangle \geq 0$  y, por lo tanto,  $a_{i_0} + \xi_{i_0} \geq a_{i_0} + \langle x_{i_0}^*, \tilde{x} \rangle$ , es decir,  $\max_{1 \leq i \leq s} (a_i + \xi_i) \geq \min_{1 \leq i \leq s} (a_i^* + \langle x_i^*, \tilde{x} \rangle) \forall \xi \in M(y)$ . Así pues, el valor de los problemas  $(\text{Pr}_1 - \text{Pr}_3)$  es  $S(a, y) > -\infty$ . Además,  $(\text{Pr}_3)$  es un problema de programación lineal, por eso, según el teorema de existen-

cia (p. 3.2.1), tiene solución tanto ese problema como todos los demás. Designemos por  $\hat{x}$  la solución del problema (Pr<sub>1</sub>).

B) **Aplicación del análogo del teorema de Fermat.** Dado que  $\hat{x} \in \text{absmín } \varphi$ , donde  $\varphi$  es una función convexa, según el análogo de Fermat (p. 2.3.1),  $0 \in \partial\varphi(\hat{x})$ . Utilizando la fórmula de Moreau — Rocafellar y de Dubowizki — Miliutin (p. 1.5.4), así como la relación  $\delta My(\hat{x}) = (\text{Ker } \Lambda)^\perp$  y el lema del anulador del núcleo de un operador regular (p. 7.2), nos convenceremos de que existen  $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \dots, \dots, \hat{\lambda}_s)$  e  $\hat{y}^* \in Y^*$  para los cuales

$$\sum_{i=1}^s \hat{\lambda}_i x_i^* + \Lambda^* \hat{y}^*, \quad \hat{\lambda}_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^s \hat{\lambda}_i = 1.$$

En este caso, si  $\hat{\lambda}_i > 0$ , obtendremos  $a_i + \langle x_i^*, \hat{x} \rangle = S(a, y)$ , de donde

$$\begin{aligned} S(a, y) &= \sum_{i=1}^s \hat{\lambda}_i a_i + \langle \sum_{i=1}^s \hat{\lambda}_i x_i^*, \hat{x} \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^s \hat{\lambda}_i a_i - \langle \Lambda^* \hat{y}^*, \hat{x} \rangle = \sum_{i=1}^s \hat{\lambda}_i a_i + \langle \hat{y}^*, y \rangle. \end{aligned}$$

Por otra parte, si  $(\lambda, y^*) \in \Pi$ , para cualquier  $x$ , tal que  $\Lambda x + y = 0$ , obtendremos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \lambda_i a_i + \langle y^*, y \rangle &= \sum_{i=1}^s \lambda_i (a_i + \langle x_i^*, x \rangle) \leq \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq s} (a_i + \langle x_i^*, x \rangle) \sum_{i=1}^s \lambda_i = \max_{1 \leq i \leq s} (a_i + \langle x_i^*, x \rangle) \leq S(a, y), \end{aligned}$$

es decir,  $S(a, y) = \sup_{(\lambda, y^*) \in \Pi} (\sum_{i=1}^s \lambda_i a_i + \langle y^*, y \rangle)$ .  $\triangleright \triangleright$

Al igual que en la demostración de las condiciones necesarias de primer orden, sin limitarse a la posibilidad de generalizar, podemos estimar que  $f_i(\hat{x}) = 0$ ,  $i \geq 0$ . Examinemos el problema siguiente:

$$f(x) := \max \{f_0(x), \dots, f_m(x)\} \rightarrow \inf; \quad F(x) = 0. \quad (\text{Pr}_4)$$

**Lema 2.**  $\hat{x} \in \text{locmín Pr}_4$ .

$\triangleleft \triangleleft$  Si  $\hat{x} \notin \text{locmín Pr}_4$ , entonces  $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon : \|x_\varepsilon - \hat{x}\| < \varepsilon$ ,  $F(x_\varepsilon) = 0$ ,  $f_i(x_\varepsilon) < 0$ ,  $i \geq 0$ ,  $\Rightarrow \hat{x} \notin \text{locmín Pr}_4$ .  $\triangleright \triangleright$

Introducamos las designaciones  $x_i^* = f'(\hat{x})$ ,  $\Lambda = F'(\hat{x})$ ,  $a_i = (1/2) f''(\hat{x})[h, h]$ ,  $y = (1/2) F''(\hat{x})[h, h]$ , donde  $h \in K$  es un vector fijo.

Según el lema del p. 9.1.1, la condición 1 del lema de minimax se cumple. Además, según este último lema, existe un elemento  $\xi = \xi(h)$ ,  $\Lambda\xi + y = 0$  para el que

$$\begin{aligned} \max_{i \geq 0} (a_i + \langle x_i^*, \xi \rangle) &= \sup_{(\lambda, y^*) \in \Pi} \left( \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i + \langle y^*, y \rangle \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sup_{(\lambda, y^*) \in \Pi} \mathcal{L}_{xx}(\hat{x})[h, h] =: \frac{1}{2} \psi(h). \quad (4) \end{aligned}$$

Con arreglo a la fórmula de Taylor y en virtud de las relaciones  $\Lambda h = 0$ ,  $\Lambda\xi + y = 0$ , obtenemos, para  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} F(x + th + t^2\xi) &= F(\hat{x}) + F'(\hat{x})[th + t^2\xi] + \\ &+ (1/2) F''(\hat{x})[th + t^2\xi, th + t^2\xi] + o(t^2) = \\ &= t^2(\Lambda\xi + y) + o(t^2) = o(t^2). \end{aligned}$$

Según el teorema de Liustérnik, existe una aplicación  $\varphi: U \rightarrow X$  del entorno del punto  $\hat{x}$ , tal que

$$F(x + \varphi(x)) = 0, \quad \|\varphi(x)\| \leq K \|F(x)\|.$$

Suponiendo que  $r(t) = \varphi(\hat{x} + th + t^2\xi)$  obtenemos  $F(\hat{x} + th + t^2\xi + r(t)) = 0$ ,  $\|r(t)\| \leq K \|F(\hat{x} + th + t^2\xi)\| = o(t^2)$ . Entonces, aplicando la fórmula de Taylor a  $f_i$  y utilizando la expresión (4), obtenemos (recordando que  $\langle x_i^*, h \rangle \leq 0$ ,  $i \geq 0$ )

$$\begin{aligned} f(\hat{x} + th + t^2\xi + r(t)) &= \max_{i \geq 0} (t \langle x_i^*, h \rangle + \\ &+ t^2(\langle x_i^*, \xi \rangle + a_i)) + o(t^2) \leq t^2 \max_{i \geq 0} (\langle x_i^*, \xi \rangle + a_i) + o(t^2) = \\ &= \frac{t^2}{2} \psi(h) + o(t^2). \end{aligned}$$

Si admitimos que  $\psi(h) < 0$ , obtendremos una contradicción con el lema 2.  $\triangleright$

## 9.2. Condiciones de primero y segundo órdenes en el cálculo clásico de variaciones

El objetivo de este punto consiste en demostrar que las condiciones clásicas necesarias (ecuación de Euler y condiciones de Legendre, Weierstrass y Jacobi) son simples corolarios del principio de máximo.

**9.2.1. Problema elemental del cálculo clásico de variaciones (e.c.v.).** Examinemos otra vez (anteriormente véase el p. 4.2) el problema elemental del cálculo de variaciones o, mejor dicho, el lla-



mado problema de mínimo:

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}) dt \rightarrow \inf; \quad x(t_0) = x_0, \\ x(t_1) = x_1. \quad (\text{Pr})$$

Aquí  $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot))$  es una función vectorial.

Recordemos que la función  $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ ,  $\hat{x}(t_0) = x_0$ ,  $\hat{x}(t_1) = x_1$  proporciona un *mínimo local débil* al problema (Pr) si la misma también proporciona un mínimo local al espacio  $C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ , es decir, si existe  $\delta > 0$  tal que para cualquier función  $\tilde{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ ,  $\tilde{x}(t_0) = x_0$ ,  $\tilde{x}(t_1) = x_1$ , con la cual  $\|x(\cdot) - \tilde{x}(\cdot)\|_{C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)} < \delta$ , se cumple la desigualdad  $\mathcal{J}(x(\cdot)) \geq \mathcal{J}(\tilde{x}(\cdot))$ .

También recordemos que

$$\|x(\cdot)\|_{C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)} = \\ = \max \{ \|x(\cdot)\|_{C([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)}, \|\dot{x}(\cdot)\|_{C([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)} \}.$$

A la par con el extremo débil, en el problema elemental del c.c.v. también se examina el concepto de extremo fuerte. Se dice que la función  $\hat{x}(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$  (o la perteneciente a una clase más amplia, por ejemplo, a  $W_\infty^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ ),  $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$ ,  $\hat{x}(t_1) = x_1$ , proporciona un *mínimo local fuerte* si ella también proporciona un mínimo local al espacio  $C([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ , es decir, si existe  $\delta > 0$  tal que para cualquier función  $x(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ ,  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(t_1) = x_1$ , con la cual  $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)} < \delta$ , se cumple la desigualdad  $\mathcal{J}(x(\cdot)) \geq \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot))$ .

En vista de que el conjunto de funciones que proporcionan un extremo fuerte es más amplio que para un extremo débil, si la función  $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$  proporciona un extremo fuerte, ella también proporcionará un extremo débil. Por eso, la condición necesaria de un extremo débil para tales funciones es la condición necesaria de un extremo fuerte y, a su vez, la condición suficiente de un extremo fuerte es la condición suficiente de un extremo débil.

Citemos un ejemplo de problema en el que la extremal admisible proporciona un mínimo local débil pero no proporciona un mínimo fuerte.

**Ejemplo.**  $\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_0^1 x^3 dt \rightarrow \inf; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$  Ecuación de Euler:

$$\frac{d}{dt} 3x^2 = 0 \iff 3\dot{x}^2 = C \iff \dot{x} = \text{const.}$$

**Solución general:**  $x(t) = C_1 t + C_2$ . La única extremal admisible es  $\hat{x}(t) = t$ . Mostremos que dicha extremal proporciona un mínimo

local débil. Efectivamente, sea  $h(\cdot) \in C_0^1([0, 1])$ . Entonces

$$\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) - \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot)) = \int_0^1 (1 + \dot{h})^3 dt - \int_0^1 dt = \int_0^1 \dot{h}^2 (3 + \dot{h}) dt.$$

De aquí se deduce que si  $\|h(\cdot)\|_1 < 3$ , entonces  $3 + \dot{h}(t) > 0$  y, por consiguiente,  $\mathcal{J}(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) \geq \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot))$ , es decir,  $\hat{x}(\cdot) \in \text{locmín}$ .

Mostremos que  $\hat{x}(\cdot)$  no proporciona un extremo fuerte. Examinemos la sucesión de funciones

$$g_n(t) = \begin{cases} -\sqrt{n}, & t \in [0, 1/n], \\ 0, & t \in [1/n, 1/2], \\ 2/\sqrt{n}, & t \in (1/2, 1]; \end{cases}$$

$$h_n(t) = \int_0^t g_n(\tau) d\tau, \quad n \geq 2.$$

Es fácil comprender que  $h_n(\cdot) \in KC_0^1([0, 1])$  y  $\|h_n(\cdot)\|_0 \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$ . Supongamos que  $x_n(\cdot) = \hat{x}(\cdot) + h_n(\cdot)$ . En este caso obtendremos la sucesión de funciones admisibles (en el problema de extremo fuerte):  $\{x_n(\cdot)\}$ ,  $x_n(\cdot) \rightarrow \hat{x}(\cdot)$  en  $C([0, 1])$  y

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x_n(\cdot)) &= \int_0^1 (1 + \dot{h}_n)^3 dt = \int_0^1 (1 + g_n)^3 dt = \\ &= 1 + 3 \int_0^1 g_n^2 dt + \int_0^1 g_n^3 dt = 1 + \int_0^{1/n} (3n - n^{3/2}) dt + \\ &\quad + \int_{1/2}^1 \left( \frac{12}{n} + \frac{8}{n\sqrt{n}} \right) dt = -\sqrt{n} + o(1) \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

para  $n \rightarrow \infty$ , es decir,  $S_{\text{mín}} = -\infty$ , y la función  $\hat{x}(\cdot)$  no proporciona un mínimo local fuerte.

En lo sucesivo debemos utilizar el siguiente resultado.

**Lema de redondeo de ángulos.** Si la función  $L(t, x, \dot{x})$  es continua según el conjunto de argumentos, entonces

$$\begin{aligned} \inf_{x(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1])} \mathcal{J}(x(\cdot)) &= \inf_{x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])} \mathcal{J}(x(\cdot)), \\ x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1 & \quad x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1 \text{ [ATF, pág. 69]}. \end{aligned}$$

$\triangleleft$  Dado que  $KC^1([t_0, t_1]) \supset C^1([t_0, t_1])$ , resulta que  $\inf_{KC^1} \mathcal{J}(x(\cdot)) \leq \inf_{C^1} \mathcal{J}(x(\cdot))$  y sólo hay que demostrar que aquí no puede haber una desigualdad estricta. Supongamos lo contrario:  $\inf_{KC^1} \mathcal{J}(x(\cdot)) < \inf_{C^1} \mathcal{J}(x(\cdot))$ . Entonces se hallará tal  $\tilde{x}(\cdot)$  suave a trozos y tal  $\eta > 0$   $\mathcal{J}(\tilde{x}(\cdot)) < \inf_{C^1} \mathcal{J}(x(\cdot)) - \eta$ . Sean  $\tau_i, i=1, \dots, m$  los puntos de ruptura de la derivada  $\tilde{x}$ , y  $\Delta_i = \dot{\tilde{x}}(\tau_i + 0) - \dot{\tilde{x}}(\tau_i - 0)$ , sus saltos en esos puntos.

La función

$$a(t) = \begin{cases} (1 - |t|^2)/4, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

es continua y su derivada, cuando  $t = 0$ , tiene un salto igual a  $-1$ . Por eso la función  $\delta a((t - \tau_i)/\delta)$ , cuya gráfica resulta de la gráfica de  $a(\cdot)$  a base de esa misma transformación y desplazamiento, también es continua, al igual que su derivada, excepto el punto  $\tau_i$  donde ella posee, como antes, un salto igual a  $-1$ .

Ahora es fácil comprobar que la función

$$x_\delta(t) = \tilde{x}(t) + \sum_{i=1}^m \Delta_i \delta a\left(\frac{t - \tau_i}{\delta}\right)$$

es continua juntamente con su derivada en  $[t_0, t_1]$ , además,  $x_\delta(t) = \tilde{x}(t)$  se halla fuera de los segmentos  $[\tau_i - \delta, \tau_i + \delta]$ . En particular, para  $\delta$  bastante pequeños, esos segmentos no se recubren,  $x_\delta(t_0) = \tilde{x}(t_0) = x_0$ ,  $x_\delta(t_1) = \tilde{x}(t_1) = x_1$  y  $|\dot{x}_\delta(t) - \dot{\tilde{x}}(t)| \leq \max \Delta_i | \delta / 2$ , puesto que es fácil convencerse de que  $|a(t)| \leq 1/4$ ,  $|\dot{a}(t)| \leq 1/2$ .

En el compacto  $\{(t, x, \dot{x}) \mid t_0 \leq t \leq t_1, |x - \tilde{x}(t)| \leq \max |\Delta_i| \delta_0/4, |\dot{x} - \dot{\tilde{x}}(t)| \leq \max |\Delta_i| \delta / 2\}$  la función  $L$  está acotada:  $|L(t, x, \dot{x})| \leq M$ . Por eso, para  $\delta < \delta_0$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}(x_\delta(\cdot)) - \mathcal{J}(\tilde{x}(\cdot)) &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, x_\delta, \dot{x}_\delta) dt - \\
 &- \int_{t_0}^{t_1} L(t, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) dt = \sum_{i=1}^m \int_{\tau_i - \delta}^{\tau_i} (L(t, x_\delta, \dot{x}_\delta) - \\
 &- L(t, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}})) dt \leq 4Mm\delta
 \end{aligned}$$

y, por consiguiente, para  $\delta$  bastante pequeños tenemos:

$$\mathcal{J}(x_0(\cdot)) \leq \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot)) + 4Mm\delta < \inf \mathcal{J}(x(\cdot)) - \\ - \eta + 4Mm\delta < \inf \mathcal{J}(x(\cdot)).$$

Como  $x_0(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$ , hemos llegado a una contradicción. Así mismo queda demostrado el lema de redondeo de ángulos.  $\triangleright$  He aquí algunas definiciones más.

Sea  $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  cierta extremal fija en un problema elemental (Pr) del cálculo clásico de variaciones, o sea, en  $\hat{x}(\cdot)$  se satisface la ecuación de Euler. A continuación suponemos que el integrante  $L$  es, por lo menos, dos veces continuamente diferenciable en cierto entorno de la trayectoria de  $\hat{x}(\cdot)$ .

Decimos que en  $\hat{x}(\cdot)$  se cumple la *condición de Legendre* si  $\hat{L}_{xx}(t) \geq 0 \forall t \in [t_0, t_1]$ , y decimos que se cumple la *condición vigorizada de Legendre* si  $\hat{L}_{xx}(t) > 0 \forall t \in [t_0, t_1]$ .

Teniendo en cuenta nuestras tolerancias relativas a la suavidad del integrante  $L$ , la funcional  $\mathcal{J}$  tendrá en el punto  $\hat{x}(\cdot)$  una segunda derivada del tipo siguiente:

$$\mathcal{J}''(\hat{x}(\cdot))[h(\cdot), h(\cdot)] = \mathcal{K}(h(\cdot)) = \\ = \int_{t_0}^{t_1} (\langle \hat{L}_{xx} \dot{h}, \dot{h} \rangle + 2 \langle \hat{L}_{xx} \dot{h}, h \rangle + \langle \hat{L}_{xx} h, h \rangle) dt,$$

donde

$$\hat{L}_{xx} = \begin{pmatrix} \hat{L}_{x_1 x_1} & \dots & \hat{L}_{x_1 x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \hat{L}_{x_n x_1} & \dots & \hat{L}_{x_n x_n} \end{pmatrix}.$$

Seguidamente consideramos que  $\hat{L}_{xx}(\cdot), L_{xx}(\cdot), \hat{L}_{xx}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  y, por consiguiente, la condición vigorizada de Legendre ya está cumplida.

La ecuación de Euler para la funcional  $\mathcal{K}$ , es decir, la ecuación

$$-\frac{d}{dt}(\hat{L}_{xx}(t)\dot{h}(t) + \hat{L}_{xx}(t)h(t)) + \hat{L}_{xx}(t)\dot{h}(t) + \hat{L}_{xx}(t)h(t) = 0,$$

se llama ecuación de Jacobi para el problema inicial en la extremal  $\hat{x}(\cdot)$ .

Sea cumplida en  $\hat{x}(\cdot)$  la condición vigorizada de Legendre. Decimos que el punto  $\tau$  se halla *conjugado* con el punto  $t_0$ , si existe una solución no trivial  $h(\cdot)$  de la ecuación de Jacobi para la cual  $h(t_0) =$

$= h(\tau) = 0$ . Decimos que en  $\hat{x}(\cdot)$  se cumple la *condición de Jacobi*, si en el intervalo  $(t_0, t_1)$  no hay puntos conjugados con  $t_0$ , y decimos que se cumple la *condición vigorizada de Jacobi*, si en el semiintervalo de  $(t_0, t_1)$  no hay puntos conjugados con  $t_0$ .

La *ecuación de Jacobi* es una ecuación lineal de segundo orden que (a consecuencia de la condición vigorizada de Legendre) puede ser resuelta respecto a la segunda derivada. Supongamos que  $H(t, t_0)$  es la solución matricial no degenerada de la ecuación de Jacobi cuyas condiciones son  $H(t_0, t_0) = 0, \dot{H}(t_0, t_0)$  (se suele suponer que  $\dot{H}(t_0, t_0) = 1$ ). Es indudable que el punto  $\tau$  se halla conjugado con  $t_0$  si y sólo si la matriz  $H(\tau, t_0)$  es degenerada. Así obtenemos un medio analítico para hallar los puntos conjugados.

Sea  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable de  $n$  variables. La función

$$\mathcal{E}(x, x') = f(x') - f(x) - \langle f'(x), x' - x \rangle \quad (1)$$

se llama *función de Weierstrass* correspondiente a  $f$ . El sentido geométrico de  $\mathcal{E}$  consiste en lo siguiente:  $\mathcal{E}(x, x')$  es la diferencia en el punto  $x'$  entre el valor de  $f$  y el valor de la función afín tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $x$ . De aquí se deduce que si  $f$  es convexa, entonces

$$\mathcal{E}(x, x') \geq 0 \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^n.$$

Se puede mostrar que también es justo lo contrario.

Si la función  $\dot{x} \rightarrow L(t, x, \dot{x})$  es convexa en cierto entorno del conjunto  $V = \{(t, \hat{x}(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$ , se dice que el integrando  $L$  es *casi regular* en la extremal  $\hat{x}(\cdot)$ . Pero si esa función es estrictamente convexa, entonces el integrando  $L$  será *regular* en  $\hat{x}(\cdot)$ .

Sea  $L$  el integrando de la funcional  $\mathcal{J}$  en un problema elemental del cálculo clásico de variaciones. En este caso la función

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t, x, \dot{x}, u) &= L(t, u, x) - L(t, x, \dot{x}) - \\ &\quad - L_x(t, x, \dot{x})(u - \dot{x}) \end{aligned} \quad (1')$$

se llama *función de Weierstrass* de la funcional  $\mathcal{J}$ . De la comparación de las expresiones (1) y (1') resulta que  $\mathcal{E}(t, x, \cdot, \mathcal{J})$  es la función de Weierstrass de la función  $\dot{x} \rightarrow L(t, x, \dot{x})$ , donde  $t, x$  desempeñan el papel de parámetros.

De lo dicho se deduce que la casi regularidad (regularidad) del integrando  $L$  en el campo  $V$  equivale al hecho de que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t, x, \dot{x}, u) &\geq 0 \quad (\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, u) > 0, \\ &\dot{x} \neq u) \quad \forall (t, x) \in V, (u, \dot{x}) \in \mathbb{R}^{2n}. \end{aligned}$$

**Teorema** (condiciones de mínimo necesarias en un problema elemental del c.c.v.). A) Supongamos que la función  $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  proporciona un mínimo local fuerte al problema (Pr) y al integrando  $I \in C^1(U)$ , donde  $U$  es cierto entorno de la gráfica  $\{(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$ , entonces decimos que en  $\hat{x}(\cdot)$  se cumple la ecuación de Euler

$$-\frac{d}{dt} \hat{L}_x(t) + \hat{L}_x(t) = 0$$

y se satisface la condición de Weierstrass

$$\mathcal{E}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u) \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, t \in [t_0, t_1],$$

donde  $\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, u) = L(t, x, u) - L(t, x, \dot{x}) - L_x(t, x, \dot{x})(u - \dot{x})$  es la función de Weierstrass. Si además existe  $\hat{L}_{xx}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , en este caso también se cumple la condición de Legendre:  $\hat{L}_{xx}(t) \geq 0$ .

B) Supongamos que la función  $\hat{x}(\cdot) \in C^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  proporciona un mínimo local débil a (Pr) y a  $L \in C^3(U)$ . Entonces se cumplirá la ecuación de Euler, la condición de Legendre y, si se cumple la condición vigorizada de Legendre ( $\hat{L}_{xx}(t) > 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$ ), también se cumplirá la condición de Jacobi, es decir, en el intervalo  $(t_0, t_1)$  no habrá puntos conjugados.

◁ A) Enunciemos el problema (Pr) como un problema de control óptimo:

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x, u) dt \rightarrow \inf; \quad \dot{x} = u, \quad x(t_0) = x_0, \\ x(t_1) = x_1. \quad (\text{Pr}')$$

La condición « $\hat{x}(\cdot)$  proporciona un mínimo fuerte a (Pr)» al igual que el par  $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ , donde  $\hat{u}(t) = \dot{\hat{x}}(t)$  es el proceso óptimo en el problema de control óptimo (Pr'). Conforme al principio de máximo de Pontriaguin, se hallarán tales factores lagrangianos:  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  y  $p(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ , que no todos son iguales a cero, y tales que para la función de Lagrange del problema (Pr')

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} (\lambda_0 L(t, x, u) + p(t)(\dot{x} - u)) dt + \lambda_1 x(t_0) + \lambda_2 x(t_1)$$

se cumplen las condiciones:

a) de estacionaridad en  $x$ , o sea, la ecuación de Euler

$$\dot{p}(t) = \lambda_0 \hat{L}_x(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1];$$

b) de transversalidad en  $x$

$$p(t_0) = \lambda_1, \quad p(t_1) = -\lambda_2;$$

c) de optimidad en  $u$

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathbb{R}^n} \{ \lambda_0 (L(t, \hat{x}(t), u) - p(t)u) = \\ = \lambda_0 L(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) - p(t) \hat{x}'(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \end{aligned}$$

Si  $\lambda_0 = 0$ , de c) se deducirá que  $p(t) \equiv 0$ , y de b), que todos los factores lagrangianos son ceros. Por lo tanto,  $\lambda_0 \neq 0$ . Supongamos que  $\lambda_0 = 1$ . Entonces, de c) se deduce que  $\hat{L}_x(t) = p(t)$  (condición necesaria de primer orden de mínimo de una función de  $n$  variables),  $L(t, \hat{x}(t), u) - p(t)u$  y  $\hat{L}_{xx}(t) \geq 0$  (condición necesaria de segundo orden). Introduciendo  $p = \hat{L}_x$  en la condición de estacionaridad en  $x$ , obtenemos la ecuación de Euler. La condición de optimidad en  $u$  para  $\lambda_0 = 1$  y  $p = \hat{L}_x$  no es otra cosa sino la condición de Weierstrass.

B) Ecuación de Euler y condición de Legendre. En vista de que  $\hat{x}(\cdot) \in \text{locmín Pr}'$  (es débil), para cualquier función  $h(\cdot) \in C_0^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ , la función  $\varphi(\lambda) = \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot) + \lambda h(\cdot))$  tendrá un mínimo local en cero. Por consiguiente, a base de la condición necesaria de mínimo de la función de una variable (p. 2.1)  $\varphi'(0) = 0$  y  $\varphi''(0) \geq 0$ , en el p. 4.2.2 hemos mostrado que la primera condición equivale al cumplimiento de la ecuación de Euler en la función  $\hat{x}(\cdot)$ , mientras que la segunda condición equivale a la no negatividad de la funcional

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*(\hat{x}(\cdot)) [h(\cdot), h(\cdot)] = \mathcal{K}(h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (\langle \hat{L}_{xx} \dot{h}, \dot{h} \rangle + \\ + 2 \langle \hat{L}_{xx} \dot{h}, h \rangle + \langle \hat{L}_{xx} h, h \rangle) dt = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L}(t, h, \dot{h}) dt \geq \\ \geq \forall h(\cdot) \in C_0^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

De la no negatividad y del tipo de funcional  $K$  se deduce que  $\bar{h}(t) \equiv 0$  proporciona un mínimo absoluto (débil) al problema

$$\mathcal{K}(h(\cdot)) \rightarrow \inf; \bar{h}(\cdot) \in C_0^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n). \quad (\text{Pr}^*)$$

Según el lema de redondeo de ángulos, la función  $\bar{h}(t) \equiv 0$  también proporciona al problema (Pr<sup>\*</sup>) un mínimo fuerte. Por lo tanto, en vir-

tud de lo ya demostrado en el punto A, resulta que en el problema (Pr<sup>n</sup>), la condición de Legendre se cumple para  $\bar{h}$ , o sea,  $\tilde{L}_{\dot{h}\dot{h}}(t) \geq 0$ , lo cual equivale a la condición de Legendre en (Pr) para  $\hat{x}$ :  $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geq 0 \forall t \in [t_0, t_1]$ .

**Condición de Jacobi.** Supongamos lo contrario, es decir, que la condición de Jacobi no se cumple y que existe  $\tau \in (t_0, t_1)$  y una solución  $h(\cdot)$  no trivial ( $h \neq 0$ ) de la ecuación jacobiana para la cual  $h(t_0) = h(\tau) = 0$ . Cabe señalar que de la no trivialidad de la solución  $h(\cdot)$  de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con condición  $h(\tau) = 0$  se desprende que  $\dot{h}(\tau) \neq 0$ . Supongamos que

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} h(t), & t_0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau \leq t \leq t_0. \end{cases}$$

Dado que  $h(\cdot)$  satisface la condición de Jacobi, una vez realizada la integración por partes, obtendremos

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\tilde{h}(\cdot)) &= \int_{t_0}^{\tau} (\langle \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} \dot{h}, \dot{h} \rangle + 2 \langle \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} \dot{h}, h \rangle + \\ &+ \langle \hat{L}_{xx} h, h \rangle) dt = \int_{t_0}^{\tau} \langle -(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} \dot{h} + \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} h) + \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} \dot{h} + \hat{L}_{xx} h, h \rangle dt = 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente,  $\mathcal{K}(h(\cdot)) = 0$ , lo cual significa que  $\tilde{h}(\cdot)$  proporciona (a la par con la función  $\bar{h}(\cdot) \equiv 0$ ) un mínimo fuerte a (Pr<sup>n</sup>). Razonando igualmente que en el p. A respecto a la función  $\tilde{h}(\cdot)$ , veremos que existirá una función  $p(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  para la cual se cumple la ecuación

$$\begin{aligned} \tilde{p}(t) &= \tilde{L}_{\dot{h}}(t, \tilde{h}(t), \dot{\tilde{h}}(t)) \iff \tilde{p}(t) = \\ &= 2 \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \dot{\tilde{h}}(t) + \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \tilde{h}(t). \end{aligned}$$

Dado que  $\tilde{h}(t) \equiv 0$  para  $t > \tau$ , obtenemos  $p(\tau + 0) = 0$  y, en virtud de la continuidad,  $\tilde{p}(\cdot) = p(\tau - 0) = 2 \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) \times \dot{\tilde{h}}(\tau - 0) = 2 \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) \dot{h}(\tau) = 0$ , de donde  $\dot{h}(\tau) = 0$  (ya que  $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(\tau)$  es invertible gracias a la condición vigorizada de Legendre). Así pues, hemos llegado a una contradicción con la condición  $\dot{h}(\tau) \neq 0$ . Por lo tanto, la condición de Jacobi está cumplida.  $\triangleright$

**9.2.2. Problema de Bolz. Teorema** (condiciones necesarias de mínimo débil en el problema de Bolz). *Supongamos que la función*



$\hat{x}(\cdot) \in C^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  proporciona al problema de Bolz

$$\mathfrak{B}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}) dt + l(x(t_0), x(t_1)) \rightarrow \inf \quad (\text{Pr})$$

un mínimo local débil y el integrante  $L \in C^3(U)$ ;  $U$  es el entorno de la gráfica  $\{(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$ ;  $l \in C^2(V)$ , un terminante; y  $V$ , el entorno del punto  $(\hat{x}(t_0), \dot{\hat{x}}(t_0))$ . En este caso se cumplen:

a) las ecuaciones de Euler  $-\frac{d}{dt} \hat{L}_x(t) + \hat{L}_{xx}(t) = 0$  y la condición de transversalidad  $\hat{L}_x(t_0) = \hat{l}_x(t_0)$ ,  $L_x(t_1) = -\hat{l}_x(t_1)$ ;

b) la condición de Legendre  $\hat{L}_{xx}(t) \geq 0 \forall t \in [t_0, t_1]$ ;

c) si tiene lugar la condición vigorizada de Legendre  $\hat{L}_{xx}(t) > 0 \forall t \in [t_0, t_1]$ , entonces se satisface la condición de Jacobi (en el intervalo no hay puntos conjugados);

d) si se satisfacen las condiciones vigorizadas de Legendre  $\hat{L}_{xx}(t) > 0 \forall t \in [t_0, t_1]$  y la condición vigorizada de Jacobi (en el semintervalo  $[t_0, t_1]$  no hay puntos conjugados), entonces la forma cuadrática  $P + Q$  (dada en  $\mathbb{R}^n$ ) tiene que ser no negativa, donde

$$Q(h_0, h_1) = l''(\hat{x}(t_0), \dot{\hat{x}}(t_0))[(h_0, h_1), (h_0, h_1)],$$

$$\begin{aligned} P(h_0, h_1) = & \langle \hat{L}_{xx}(t_1)(\dot{H}_0(t_1) h_0 + \\ & + \dot{H}_1(t_1) h_1) h_1 \rangle - \langle \hat{L}_{xx}(t_0)(\dot{H}_0(t_0) h_0 + \\ & + \dot{H}_1(t_0) h_1) h_0 \rangle + \langle \hat{L}_{xx}(t_1) h_1, h_1 \rangle - \\ & - \langle \hat{L}_{xx}(t_0) h_0, h_0 \rangle, \end{aligned}$$

aquí  $H_i(\cdot)$  son las soluciones de la ecuación de Jacobi con condiciones de contorno  $H_i(t_j) = \delta_{ij} I$  ( $\delta_{ij}$  es el símbolo de Kronecker, e  $I$ , una matriz unidad),  $i, j = 0, 1$ .

◁ La necesidad a) ha sido establecida en el p. 4.1. Por eso es evidente que si  $\hat{x}(\cdot)$  proporciona un mínimo local débil al problema (Pr), la función  $\hat{x}(\cdot)$  proporcionará un mínimo débil al problema elemental del c.c.v.

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}) dt \rightarrow \inf;$$

$$\hat{x}(t_0) = x(t_0), \quad x(t_1) = \hat{x}(t_1),$$

y, por lo tanto, de acuerdo con el teorema del punto anterior, se cumplen las condiciones b) y c).

Demostremos la condición d). La ecuación de Jacobi

$$-\frac{d}{dt} (\hat{L}_{xx} \dot{h} + \hat{L}_{xx} h) + \hat{L}_{xx} \dot{h} + \hat{L}_{xx} h = 0 \Leftrightarrow -\hat{L}_{xx} \ddot{h} + (-\hat{L}_{xx} - \hat{L}_{xx} + \hat{L}_{xx}) \dot{h} + (-\hat{L}_{xx} + \hat{L}_{xx}) h = 0$$

es un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden, el cual puede ser escrito en forma de sistema de  $2n$  ecuaciones de primer orden que se resuelven respecto a las derivadas. Para eso, suponiendo que  $\dot{h} = g$  y aprovechando el hecho de que  $\hat{L}_{xx}$  es invertible a causa de la

condición vigorizada de Legendre, obtenemos  $\dot{h} = g$ ,

$$\dot{g} = \hat{L}_{xx}^{-1} (-\hat{L}_{xx} - \hat{L}_{xx} + \hat{L}_{xx}) g + \hat{L}_{xx}^{-1} (-\hat{L}_{xx} + \hat{L}_{xx}) h.$$

Según el teorema de existencia y unicidad, para los sistemas lineales [ATF, pág. 191] existe una matriz fundamental de soluciones de este último sistema que (tras simples cambios de nombres) se transforma en la matriz fundamental  $\Phi(\cdot, t_0)$  de soluciones de la ecuación de Jacobi. Dicha matriz satisface la ecuación de Jacobi y las condiciones de contorno:  $\Phi(t_0, t_0) = 0$ ,  $\dot{\Phi}(t_0, t_0) = I$ .

Análogamente se construye la matriz fundamental  $\psi(\cdot, t_1)$  partiendo de las condiciones  $(t_1, t_1) = 0$ ,  $\dot{\psi}(t_1, t_1) = I$ .

Recordemos que el punto  $\tau$  estará conjugado con  $t_0$  si y sólo si  $\Phi(\tau, t_0)$  es una matriz degenerada. No obstante, aquí se cumple la condición de Jacobi y por eso  $\Phi(t_1, t_0)$  no es una matriz degenerada. Supongamos que  $H_1(t) = \Phi(t, t_0) \Phi^{-1}(t_1, t_0)$  y  $H_0(t) = \psi(t, t_1) \psi^{-1}(t_0, t_1)$ . Claro que  $H_1(t_0) = 0$ ,  $H_1(t_1) = I$ ,  $H_0(t_0) = 1$ ,  $H_1(t_1) = 0$ . Entonces la función  $h(t; h_0, h_1) = H_0(t) h_0 + H_1(t) h_1$  será la solución de la ecuación de Jacobi con condiciones de contorno  $h(t_0; h_0, h_1) = h_0$ ,  $h(t_1; h_0, h_1) = h_1$ . Calculemos el valor de  $\mathcal{K}(h; h_0, h_1)$ , donde  $\mathcal{K}$  es una funcional cuadrática:

$$\mathcal{K}(h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (\langle \hat{L}_{xx} \dot{h}, \dot{h} \rangle + 2 \langle \hat{L}_{xx} \dot{h}, h \rangle + \langle \hat{L}_{xx} h, h \rangle) dt.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(h(\cdot; h_0, h_1)) &= \int_{t_0}^{t_1} \langle \hat{L}_{xx} \dot{h} + \hat{L}_{xx} h, dh \rangle + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \langle \hat{L}_{xx} \dot{h} + \hat{L}_{xx} h, h \rangle dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle -\frac{d}{dt} (\hat{L}_{xx} \dot{h} + \hat{L}_{xx} h) + \hat{L}_{xx} \dot{h} + \hat{L}_{xx} h, h \right\rangle dt + \langle \hat{L}_{xx} \dot{h} + \hat{L}_{xx} h, h \rangle \Big|_{t_0}^{t_1} = P(h_0, h_1). \end{aligned}$$

Como  $\hat{x}(\cdot) \in \text{locmín } \mathcal{B}(\cdot)$ , resulta que, según la condición necesaria de segundo orden de un mínimo local (p. 2.1.2), para cualquier  $h(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  ha de cumplirse la desigualdad

$$\left. \frac{d^2}{d\lambda^2} \mathcal{B}(\hat{x} + \lambda h(\cdot)) \right|_{\lambda=0} = \mathcal{K}(h(\cdot)) + Q(h(t_0), h(t_1)) = \\ = (P + Q)(h(t_0), h(t_1)) > 0.$$

Sustituyendo  $h(\cdot)$  por la función  $h(\cdot; h_0, h_1)$  que hemos construido, llegamos a d).  $\triangleright$

## § 10. Condiciones de extremo suficientes

En este párrafo mostraremos, en primer lugar, que las condiciones necesarias, de las cuales hemos hablado en los puntos 9.1 y 9.2, de hecho coinciden con las condiciones suficientes y, en segundo lugar, mantendremos ciertas ideas generales relacionadas con estas últimas condiciones.

### 10.1. Condiciones suficientes en los problemas con igualdades y desigualdades

#### 10.1.1. Planteamiento del problema y enunciación del teorema.

Aquí se examina el mismo problema que fue planteado en el punto 9.1.1. Recordémoslo. Sean  $X$  e  $Y$  ciertos espacios normalizados;  $U$ , el entorno en  $X$ ;  $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ , las funciones determinadas en  $U$ ; y  $F: U \rightarrow Y$ , la aplicación determinada en  $U$  con valores en  $Y$ . Examinemos un problema suave con acotaciones del tipo de igualdades y desigualdades:

$$f_0(x) \rightarrow \inf; \quad f_i(x) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad F(x) = 0. \quad (\text{Pr})$$

La función de Lagrange en el problema (Pr) tiene el siguiente aspecto:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, y^*) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x) + \langle y^*, F(x) \rangle, \\ \lambda \in \mathbb{R}^{m+1}, \quad y^* \in Y^*.$$

**Teorema** (condiciones suficientes en el problema con igualdades y desigualdades). Sean  $X$  e  $Y$  ciertos espacios banachianos (condición de banachianidad);  $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_i(x) = 0$ ,  $i \geq 0$ ,  $\hat{x} \in U$ , funciones dos veces diferenciables según Frechet en el entorno  $U$ ;  $F$ , la aplicación también dos veces diferenciable según Frechet en  $U$  (condición de suavidad);  $\text{Im } F'(\hat{x}) = Y$  (condición de regularidad total), el conjunto

$$\Pi = \{(\lambda, y^*) \in \mathbb{R}^{m+1} \times Y^* \mid \lambda_i \geq 0, \quad i \geq 0, \\ \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i f'_i(\hat{x}) + F'^*(\hat{x}) y^* = 0\} \neq \emptyset$$

(condición de primer orden) y que existe  $\alpha > 0$  tal que

$$\max_{(\lambda, y^*) \in \Pi} \mathcal{L}_{xx}(\hat{x}, \lambda, y^*) [h, h] \geq \alpha \|h\|^2$$

para cualquier  $h$  que pertenezca al cono de variaciones admisibles

$$K := \{x \mid \langle f_i^*(x), x \rangle \leq 0, \quad 0 \leq i \leq m, \quad F'(x)x = 0\}.$$

Eso significa que  $\hat{x}$  proporciona un mínimo local al problema (Pr).

**10.1.2. Lemas.** La demostración del teorema se basa (aparte del lema del minimax, demostrado en el p. 9.1.2) en el resultado correspondiente al análisis convexo —lema de Hoffman— basado, a su vez, en tres hechos geométricos, cada uno de los cuales tiene importancia independiente.

**Lema 1** (del cono conjugado). Sean  $X$  e  $Y$  ciertos espacios banachianos;  $\Lambda$ , el operador lineal continuo de  $X$  en  $Y$ , así como el epimorfismo ( $\Leftrightarrow \Lambda X = Y$ ); y  $\{x_1^*, \dots, x_s^*$ , el conjunto de funcionales lineales en  $X$ ,

$$K := \{x \in X \mid \langle x_i^*, x \rangle \leq 0, \quad 1 \leq i \leq s, \quad \Lambda x = 0\}.$$

Entonces  $K^* = \{x^* \in X^* \mid x^* + \sum_{i=1}^s \lambda_i x_i^* + \Lambda^* y^* = 0, \lambda_i \geq 0, y^* \in Y^*\}$ .

$\triangleleft 0$ . La demostración del teorema se basa:

- 1) en la fórmula de Moreau — Rocafellar (puntos 1.5 y 8.2);
- 2) en la fórmula de Dubowizki — Miliutin (puntos 1.5 y 8.2);
- 3) en el teorema de Fermat para funciones convexas (p.2.3.1);
- 4) en el lema del anulador del núcleo (p.7.2).

1. Sea  $x_0^* \in K^*$ . Entonces, de las definiciones se deduce que

$$\begin{aligned} p(x) &:= \max_{0 \leq i \leq s} \langle x_i^*, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \text{Ker } \Lambda \Rightarrow 0 \in \\ &\in \text{absmín } (p + \delta \text{Ker } \Lambda). \end{aligned} \quad (1)$$

En este caso, utilizando la fórmula explícita  $\partial \delta \text{Ker } \Lambda = (\text{Ker } \Lambda)^\perp$  <sup>(0.4)</sup>, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 \in \partial(p - \delta \text{Ker } \Lambda) &= \partial p + \partial \delta \text{Ker } \Lambda \stackrel{(0.2)}{=} \\ &\stackrel{(0.3)}{=} \text{co}\{x_0^*, \dots, x_s^*\} + \text{Im } \Lambda^*. \end{aligned} \quad (2)$$

Sin limitar la generalidad podemos estimar que de

$$\sum_{i=1}^s \lambda_i x_i^* + \Lambda^* y^* = 0 \text{ se deduce que } \lambda_i = 0, y^* = 0$$

(expulsando consecutivamente los  $x_k^*$  representados en forma de —  $(\sum_{i=k-1}^s \lambda_i x_i^* + \Lambda^* y^*)$ ). En definitiva, de la expresión (2) obtene-

mos que

$$-x_0^* = \sum_{i=1}^s \lambda_i x_i^* + \Lambda^* y^*. \quad \triangleright$$

**Lema 2** (del carácter cerrado). *Sea  $X$  un espacio banachiano;  $L_1$ , un subespacio cerrado; y  $L_2$ , un subespacio de dimensión finita en  $X$ . Entonces  $L_1 + L_2$  será un subespacio cerrado en  $X$ .*

◁ Sea  $L_2 = \text{lin} \{x_1, \dots, x_s\}$ . Si  $x_1 \in L_1$ , entonces  $L_1 + \text{lin} \{x_1\}$  será, por supuesto, un subespacio cerrado. Pero si  $x_1 \notin L_1$ , en este caso, según el segundo teorema de separabilidad (p. 1.2), existirá un elemento  $x_1^* \in L_1$  tal que  $\langle x_1^*, x_1 \rangle = 1$ . Supongamos que  $z$  pertenece a la clausura  $L_1 + \text{lin} \{x_1\}$ . Eso quiere decir que existen  $\lambda_n \in \mathbb{R}$  y  $\xi_n \in L_1$  tales que  $\lambda_n x_1 + \xi_n = : z_n \rightarrow z$ . Pero entonces, actuando sobre el elemento  $z_n$  mediante el elemento  $x_1^*$ , obtenemos  $\lambda_n = \langle x_1^*, z_n \rangle \rightarrow \langle x_1^*, z \rangle = : \lambda \Rightarrow \xi_n = z_n - \lambda x_1 \rightarrow z - \lambda x_1 = : \xi \in L_1$  en virtud del carácter cerrado de  $L_1$  y del hecho de que  $\xi_n \in L_1 \Rightarrow \lambda_n x_1 + \xi_n \rightarrow \lambda x_1 + \xi$ . Así pues,  $L_1 + \text{lin} \{x_1\}$  está cerrado. Análogamente se demuestra que  $L_1 + \text{lin} \{x_1, x_2\}, \dots, L_1 + \text{lin} \{x_1, \dots, x_s\} = L_1 + L_2$  también está cerrado.  $\triangleright$

**Lema** (de dualidad del problema de la distancia más corta). *Sea  $X$  un espacio normalizado; y  $A$ , un conjunto convexo no vacío en  $X$ . Entonces  $d(x, A, X) = \sup \{ \langle x^*, x \rangle - sA(x^*) \mid \|x^*\| \leq 1 \}$ , donde  $d(x, A, X) := \inf \{ \|x - y\| \mid y \in A \}$  es la distancia entre el punto  $x$  y  $A$ .*

◁ Es fácil comprender que  $x \rightarrow d(x, A, X)$  es una función continua y convexa (debido a la convexidad de  $A$ ) y, por consiguiente, es una función cerrada. Según la definición, dicha función es la convolución de la norma ( $\|x\| = N(x)$ ) y de la función indicadora del conjunto  $A$ :

$$d(x, A, X) = (N \oplus \delta A)(x).$$

Utilizando la fórmula de la función conjugada con la convolución (p. 1.5.4), así como la fórmula  $N^*(x^*) = \delta BX^*(x^*)$ , deducimos la siguiente ecuación:

$$ld(\cdot, A, X)(x^*) = \delta BX^*(x^*) + sA(x^*).$$

Aplicando seguidamente el teorema de Fenchel — Moreau (p. 8.1.3), obtenemos  $d(x, A, X) = l(l(d(\cdot, A, X))) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ \langle x^*, x \rangle - sA(x^*) \mid \|x^*\| \leq 1 \}$ .  $\triangleright$

**Lema 4** (de Hoffman). *Sean  $X, Y$  ciertos espacios banachianos,  $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ ,  $\Lambda X = Y$ ,  $x_i^* \in X^*$ ,  $i = 1, \dots, s$ ,  $K = \{x \mid \langle x_i^*, x \rangle \leq 0, i = 1, \dots, s, \Lambda x = 0\}$ . Entonces existirá una constante  $C > 0$  tal que*

$$d(x, K, X) \leq C \left( \sum_{i=1}^s \langle x_i^*, x \rangle_+ + \|\Lambda x\| \right) \\ (a_+ := \text{máx}(a, 0)),$$

◁ Supongamos que  $L = \text{lin} \{x_1^*, \dots, x_n^*\} + \text{Im } \Lambda^*$ . Según el lema del anulador del núcleo de un operador regular, tenemos  $\text{Im } \Lambda^* = (\text{Ker } \Lambda)^\perp$ . Pero el propio anulador siempre está cerrado, por eso, en virtud del lema 2 (del carácter cerrado),  $L$  permanecerá cerrado en  $X^*$  y, por consiguiente, también permanecerá cerrado el espacio banachiano. Denotemos

$$\Lambda_1(\lambda, y^*) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^* + \Lambda^* y^*,$$

$$\Lambda_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times Y, L).$$

En vista de que  $\Lambda_1$  es un operador sobreyectivo, con arreglo al lema del operador inverso derecho (p. 7.2), habrá un operador  $M_1: L \rightarrow \mathbb{R}^n \cdot Y^*$  tal que  $\Lambda_1 M_1 = I_L$ ,  $\|M_1 x^*\| \leq C \|x^*\|$ , es decir, si  $\|x^*\| \leq 1$  y  $M_1 x^* = (\lambda, y^*)$ , obtendremos

$$\|M_1 x^*\|_{\mathbb{R}^n \cdot Y^*} = \sum_{i=1}^n |\lambda_i| + \|y^*\| \leq C \Rightarrow \|y^*\| \leq C, \quad |\lambda_i| \leq C.$$

Por eso, según los lemas 1 y 3 y tomando en consideración el hecho de que  $sK(x^*) = \delta(-K^*)(x^*)$  (por definición), obtenemos

$$\begin{aligned} d(x, K, X) &= \sup \{ \langle x^*, x - sK(x^*) \mid \|x^*\| \leq 1 \} = \\ &= \sup \{ \langle x^*, x \rangle - \delta(-K^*)(x^*) \mid \|x^*\| \leq 1 \} = \\ &= \sup \left\{ \langle x^*, x \rangle \mid x^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^* + \Lambda^* y^*, \lambda_i \geq 0, \right. \\ & \left. y^* \in Y^* \mid \|x^*\| \leq 1 \right\} \leq \sup \left\{ \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^* + \Lambda^* y^*, x \right\rangle \mid 0 \leq \right. \\ & \left. \leq \lambda_i \leq C, \|y^*\| \leq C \right\} \leq C \left( \sum_{i=1}^n \langle x_i^*, x \rangle_+ + \|\Lambda_x\| \right). \quad \triangleright \end{aligned}$$

**Lema 5** (de compacidad de  $\mathbb{J}$ ). *Supongamos que se cumplen las condiciones del teorema. En este caso el conjunto de factores lagrangianos  $\mathbb{J} = \{(\lambda, y^* \in \mathbb{R}^{m+1} \cdot Y^* \mid \lambda \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, \sum_{i=0}^m \lambda_i x_i^* + \Lambda^* y^* = 0)\}$  será el compacto  $(x_i^* := f_i'(\bar{x}), i = 0, \dots, m, \Lambda = F'(\bar{x}))$ .*

◁ Examinemos el simplex  $\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \lambda \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1\}$  y la aplicación  $\varphi: \Sigma \rightarrow X^*$  dada por la fórmula  $\varphi(\lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda_i x_i^*$ . Según la definición,  $(\lambda, y^*) \in \mathbb{J} \Leftrightarrow \varphi(\lambda) + \Lambda^* y^* = 0$ . Debido al carácter cerrado de  $\text{Im } \Lambda^*$  (según el lema del anulador

del núcleo de un operador regular,  $\text{Im } \Lambda^* = (\text{Ker } \Lambda)^\perp$  y el propio anulador siempre permanecerá cerrado), así como a la igualdad  $\text{Ker } \Lambda^* = \{0\}$

$(h^* \in \text{Ker } \Lambda^* \Rightarrow \langle \Lambda^* h^*, x \rangle = 0 \quad \forall x \Rightarrow \langle h^*, \Lambda x \rangle = 0 \quad \forall x \Rightarrow h^* = 0)$ , es aplicable el teorema de Banach acerca del operador inverso (p. 7.1).

Por eso la aplicación  $\Lambda^* : Y^* \rightarrow \text{Im } \Lambda^*$  tiene, consiguientemente, un subconjunto inverso  $\Lambda^{*-1}\varphi(\Sigma)$  compacto y, por lo tanto, también será compacto el conjunto  $\{(\lambda, y^*) \in \mathbb{J}\} = \{(\lambda, -\Lambda^{*-1}\varphi(\lambda)) \mid \lambda \in \Sigma\}$ .  $\triangleright$

**10.1.3. Demostración del teorema.** Mostremos que existe  $\delta > 0$  tal que las condiciones

$$f_i(\hat{x} + h) \leq 0, \quad i \geq 0, \quad F(\hat{x} + h) = 0 \quad (1)$$

son contradictorias cuando  $\|h\| < \delta$ ,  $h \neq 0$ . De aquí se deducirá inmediatamente que  $\hat{x} \in \text{locím Pr}$ . En efecto, supongamos que el vector  $h$  satisface las condiciones (1) y  $\|h\| < \delta_1$ . Entonces, según la fórmula de Taylor,

$$f_i(\hat{x} + h) = \langle f'_i(\hat{x}), h \rangle + (1/2) f''_i(\hat{x})[h, h] + r_i(h), \quad i \geq 0,$$

$$F(\hat{x} + h) = F'(\hat{x})[h] + (1/2) F''(\hat{x})[h, h] + r(h),$$

y, suponiendo que  $x_i^* = f'_i(\hat{x})$ ,  $a_i = (1/2) f''_i(\hat{x})[h, h]$ ,  $i \geq 0$ ,

$$\Lambda = F'(\hat{x}), \quad y = \frac{1}{2} F''(\hat{x})[h, h], \quad f(x) = \max_{0 \leq i \leq m} f_i(x),$$

obtenemos

$$\langle x_i^*, h \rangle + a_i = f_i(\hat{x} + h) \leq 0, \quad i \geq 0, \quad \Lambda h + y = 0; \quad (2)$$

además

$$\langle x_i^*, h \rangle + a_i \leq |a_i| \leq C_1 \|h\|^2, \quad \|\Lambda h\| = \|y\| \leq C_1 \|h\|^2. \quad (3)$$

De la igualdad  $\sum_{i=0}^m \lambda_i \langle x_i^*, x \rangle + \langle \Lambda^* y^*, x \rangle = 0$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$  se

deduce que  $\sum_{i=0}^m \lambda_i \langle x_i^*, x \rangle = 0 \quad \forall x \in \text{Ker } \Lambda$ . De aquí  $\max_{0 \leq i \leq m} \langle x_i^*, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \text{Ker } \Lambda$ , por consiguiente, se puede aplicar el lema de minimax (p. 9.1.2). Como resultado obtenemos

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq i \leq m} f_i(\hat{x} + h) &= \max_{0 \leq i \leq m} (\langle x_i^*, h \rangle + a_i) \geq \min_{\Lambda x + y = 0} \\ \max_{0 \leq i \leq m} (\langle x_i^*, x \rangle + a_i) &= \max_{(\lambda, y^*) \in \mathcal{J}} \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{L}_{xx}(\hat{x}, \lambda, y^*)[h, h] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^m \lambda_i r_i(h) + \langle y^*, r(h) \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

La distancia desde  $h$  hasta el cono se estima con arreglo al lema de Hoffman y luego, según (3):

$$d(h, K, X) \leq C_2 \left\{ \sum_{i=0}^m \langle x_i^*, h \rangle_+ + \|\Lambda h\| \right\} \leq C_3 \|h_2\|^2.$$

Por consiguiente,  $h = h_1 + h_2$ , donde  $h_1 \in K$ , mientras que  $\|h_2\| \leq C_3 \|h\|^2$ . Supongamos que  $\delta_2$  se ha elegido de tal modo que de  $\|h\| \leq \delta_2$  se deduce que  $C_3 \|h\| \leq 1/2$ . Entonces

$$\|h_1\| \geq \|h\| - \|h_2\| \geq \|h\| (1 - C_3 \|h\|) \geq \|h\| / 2$$

y, por lo tanto,

$$\|h_2\| \leq 4C_3 \|h_1\|^2. \quad (5)$$

Por último debemos señalar que del lema 5 (acerca de la compacidad de  $\mathcal{J}$ ) se deduce que si  $(\lambda, y^*) \in \mathcal{J}$ , entonces  $\|y^*\| \leq C_4$ . Sea  $\delta_3$  tan ínfimo que de  $\|h\| \leq \delta_3$  se deduzca la desigualdad

$$\left| \sum_{i=0}^m \lambda_i r_i(h) + \langle y^*, r(h) \rangle \right| \leq \frac{\alpha}{4} \|h_1\|^2. \quad (6)$$

Ahora agrupemos las condiciones 1, 4, 5 y 6 del teorema, denotando  $C_5 = \max_{(\lambda, y^*) \in \Lambda} \|\mathcal{L}_{xx}(\hat{x}, \lambda, y^*)\|$ :

$$\begin{aligned} (0 \geq f(\hat{x} + h) \max_{(\lambda, y^*) \in \mathcal{J}} \left( \frac{1}{2} \mathcal{L}_{xx}(\hat{x}, \lambda, y^*) [h, h] + \sum_{i=0}^m \lambda_i r_i(h) + \right. \\ \left. + \langle y^*, r(h) \rangle \right) \geq \frac{1}{2} \max_{(\lambda, y^*) \in \mathcal{J}} \mathcal{L}_{xx}(\hat{x}, \lambda, y^*) [h_1 + h_2, h_1 + h_2] - \\ \left. - \frac{\alpha}{4} \|h_1\|^2 \geq \frac{\alpha}{2} \|h_1\|^2 - 4C_3 C_5 \|h_1\|^3 - 8C_3^2 C_5 \|h_1\|^4 - \frac{\alpha}{4} \|h_1\|^2 > 0, \end{aligned}$$

tan sólo en el caso de que de  $\|h\| < \delta \leq \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$  se deduzca la desigualdad

$$4C_3 C_5 \|h_1\|^3 + 8C_3^2 C_5 \|h_1\|^4 < \frac{\alpha}{4} \|h_1\|^2.$$

Hemos obtenido una contradicción:  $0 \geq f(\hat{x} + h) > 0$ .  $\triangle$

## 10.2. Elementos de la teoría general del campo

**10.2.1. Construcción del campo para problemas de dimensión finita con igualdades.**

Sea  $U$  un entorno en  $\mathbb{R}^n$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Examinemos un problema de dimensión finita con igualdades:

$$f(x) \rightarrow \inf; F(x) = 0. \quad (\text{Pr})$$



Llámanse *perturbación estandarizada del problema* (Pr) la serie de problemas con parámetro  $z \in \mathbb{R}^m$ :

$$f(x) \rightarrow \inf; \quad F(x) = z. \quad (\text{Pr}_z)$$

**Teorema** (del campo en problemas de dimensión finita con igualdades). Sea  $f, F \in C^2(U)$  (condición de suavidad);  $x \in U, F(\hat{x}) = 0, \text{Im } F'(\hat{x}) = \mathbb{R}^m$  (condición de regularidad); y supongamos que existe un factor lagrangiano  $\hat{y} \in \mathbb{R}^m$  tal que para la función de Lagrange del problema Pr con factor unidad lagrangiano y con la funcional

$$\mathcal{L}(x, y) = f(x) + \langle y, F(x) \rangle$$

se cumple:

la condición necesaria de mínimo de primer orden

$$0 = \hat{\mathcal{L}}_x = f'(\hat{x}) + \langle \hat{y}, F'(\hat{x}) \rangle (\hat{\mathcal{L}}_x := \mathcal{L}_x(\hat{x}, \hat{y})); \quad (1)$$

y la condición suficiente de mínimo de segundo orden

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_{xx}[h; h] &> 0 \quad \forall h \in \text{Ker } F'(\hat{x}), \\ h &\neq 0 \quad (\hat{\mathcal{L}}_{xx} := \mathcal{L}_{xx}(\hat{x}, \hat{y})). \end{aligned} \quad (2)$$

Entonces existirá un entorno  $V$  del punto  $0 \in \mathbb{R}^m$ , un entorno  $U' \subset U$  del punto  $\hat{x}$ , y una función  $\varphi: V \rightarrow U \cdot \mathbb{R}^m, \varphi \in C^1(V), \varphi(z) = (x(z), y(z)), \varphi(0) = (\hat{x}, \hat{y})$  tales que

$$\mathcal{L}_x(x, y) = 0, \quad F(x) = z, \quad x \in U', \quad z \in V.$$

si y sólo si  $x = x(z), y = y(z)$ . En este caso  $x(z) \in \text{locmín Pr}_z$ .

◁ Introduzcamos la aplicación  $\Psi: U \cdot \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  que actúa con arreglo a la fórmula  $\Psi(x, y) = (f'(x) + \langle y, F'(x) \rangle, F(x))$  y mostremos que  $\Psi$  satisface las exigencias del teorema de la función inversa (p. 1.4.4). Claro está que  $\Psi(\hat{x}, \hat{y})^{(1)} 0$  y  $\Psi \in C^1(U \times \times \mathbb{R}^m)$  (debido a la condición de suavidad). Demostremos que el jacobiano de la aplicación  $\Psi \det \Psi(\hat{x}, \hat{y}) \neq 0$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \Psi'(\hat{x}, \hat{y})[(x, y)] &= \Psi_x(\hat{x}, \hat{y})[x] + \Psi_y(\hat{x}, \hat{y})[y] = (\hat{\mathcal{L}}_{xx}[x] + \\ &+ \langle y, F'(\hat{x}), F'(\hat{x})[x] \rangle). \end{aligned}$$

Si  $(x, y) \in \text{Ker } \Psi'(\hat{x}, \hat{y})$ , entonces  $F'(\hat{x})x = 0$  y

$$\hat{\mathcal{L}}_{xx}[x] + \langle y, F'(\hat{x}) \rangle = 0. \quad (3)$$

Multipliquemos escalarmente por  $x$  ambos miembros de la igualdad 3. Entonces, como  $F'(\hat{x})x = 0$ , resulta que  $\hat{\varphi}_{xx}[x, x] = 0 \Rightarrow x = 0$ . Por consiguiente, de la expresión (3) se deduce que  $\text{Ker } \Psi'(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ , es decir, que  $\det \Psi'(\hat{x}, \hat{y}) \neq 0$ . Según el teorema

de la función inversa, existirá un entorno  $V$  del punto  $0 \in \mathbb{R}^m$  y una aplicación  $\mathcal{L}(z) = (x(z), y(z))$  tales que

$$\psi(x(z), y(z)) = (0, z) \Leftrightarrow \mathcal{L}_x(x(z), y(z)) = 0,$$

$$F(x(z)) = z.$$

Nos queda demostrar que  $x(z) \in \text{locmín Pr}_z$ . En virtud de la dimensión finita del problema y de la condición (2) del teorema, existirá  $\beta > 0$  para el cual  $\langle \hat{\mathcal{L}}_{xx} h, h \rangle \geq \beta \|h\|^2 \quad \forall h \in \text{Ker } F'(x)$ . Elijamos un entorno  $V_1 \subset V$  tan pequeño que para cualquier  $z \in V_1$  se cumplan

$$\|\mathcal{L}_{xx}(x(z), y(z)) - \hat{\mathcal{L}}_{xx}\| \leq \beta/4, \quad (4)$$

$$\text{Im } F'(x(z)) = \mathbb{R}^m, \quad (5)$$

$$\langle \hat{\mathcal{L}}_{xx} h, h \rangle \geq (\beta/2) \|h\|^2 \quad \forall h \in \text{Ker } F'(x(z)). \quad (6)$$

En efecto, dado que las aplicaciones  $\psi(z)$  y  $(x, y) \rightarrow \mathcal{L}_{xx}(x, y)$  son continuas en los entornos de cero y de  $(x, y)$ , en este caso es posible satisfacer la condición (4) respectivamente. Sin embargo, la condición (5) se satisface en virtud de que el rango de la matriz continua  $F'(x)$  es localmente constante, mientras que la condición (6) puede satisfacerse debido a la continuidad de la aplicación  $z \rightarrow F'(x(z))$  y la expresión (4).

Así, para  $h \in \text{Ker } F'(x(z))$ ,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{xx}(x(z), y(z)) h, h \rangle &= \langle \hat{\mathcal{L}}_{xx} h, h \rangle + \\ &+ \langle \mathcal{L}_{xx}(x(z), y(z)) - \hat{\mathcal{L}}_{xx} h, h \rangle \geq (\beta/2) \|h\|^2 - (\beta/4) \|h\|^2 = (\beta/4) \|h\|^2. \end{aligned}$$

Por eso en el punto  $x(z)$ ,  $z \in V_1$  se cumplen las condiciones suficientes de extremo.  $\triangleleft$

También podría ser examinada la variante de dimensión infinita del teorema, pues la misma se demuestra de manera análoga a la variante de dimensión finita.

El campo que se construye en el punto siguiente es estructuralmente idéntico al ya construido. La diferencia consiste en que en el cálculo clásico de variaciones, en calidad de «parámetro perturbador» se adoptan las condiciones de frontera en el extremo derecho.

### 10.3. Teoría del campo y condiciones suficientes en un problema elemental del c.c.v.

En este párrafo se ofrece un fragmento de la teoría del campo y de la teoría de las condiciones suficientes de extremo en el cálculo de variaciones, tomando como ejemplo un problema elemental.

**10.3.1. Campo de extremales y construcción del campo central.** Supongamos que en un problema elemental (Pr) del c.c.v. (p. 9.2.1),  $\hat{x}(\cdot)$  es cierta extremal (es decir, en  $\hat{x}(\cdot)$  se cumple la ecuación de

Euler) de una familia de extremales  $\{x(\cdot, \lambda)\}$ ,  $x(\cdot, \lambda) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  con parámetro  $\lambda \in \Lambda \in (\mathbb{R}^n)$ .

Dícese que  $\hat{x}(\cdot)$  está rodeado por un campo de extremales  $x(t, \lambda)$ , si existe un entorno  $G$  de la gráfica  $\Gamma_{\hat{x}} = \{(t, x(t)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in [t_0, t_1]\}$ , tal que para cualquier punto  $(\tau, \xi)$  del referido entorno hay una sola extremal de la familia que pasa por ese punto. Mejor dicho, se supone que existe una función  $\lambda : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda = \lambda(\tau, \xi)$  de una clase  $C^1(G)$  tal que  $x(\tau, \lambda) = \xi \Rightarrow \lambda = \lambda(\tau, \xi)$ . La función  $u : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $u(\tau, \xi) = \frac{d}{dt} x(t, \lambda, (\tau, \xi)) \mid t = \tau$  se llama *función de inclinación del campo*.

Si existe un punto  $(t_*, x_*)$  tal que  $x(t_*, \lambda) = x$  para todos  $\lambda \in \Lambda$ , decimos que  $\hat{x}(\cdot)$  está rodeado por un campo central de extremales. El punto  $(t_*, x_*)$  se llama *centro del campo*, mientras que la familia  $x(t, \lambda)$  se denomina *campo central de extremales*.

**Teorema.** Sea  $\hat{x}(\cdot) \in C^2([t_0, t_1])$  la extremal en un problema elemental del c.c.v.; donde  $L \in C^3(U)$  es un integrante, y  $U$ , cierto entorno de la gráfica ampliada  $\{(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$ ; además, en  $\hat{x}(\cdot)$  se cumplen las condiciones vigorizadas de Legendre y Jacobi. En este caso es posible rodear  $\hat{x}(\cdot)$  por un campo central de extremales.

◁ Escribamos la ecuación de Euler:

$$-\frac{d}{dt} L_x(t, x, \dot{x}) + L_x(t, x, \dot{x}) = 0 \iff L_{xx}(t, x, \dot{x}) \ddot{x} + L_{xx}(t, x, \dot{x}) \dot{x} + L_{xt}(t, x, \dot{x}) - L_x(t, x, \dot{x}) = 0.$$

En vista de que se cumple la condición vigorizada de Legendre, es decir, la desigualdad  $L_{xx}(t) > 0 \forall t \in [t_0, t_1]$ , en virtud de la continuidad de la función  $L_{xx}$  (recordemos que  $L \in C^3(U)$ ), se hallará

$$U_1 \in v(\mathbb{R}^{2n+1}), \quad U_1 \subset U, \\ (t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \in U_1 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

tal que  $L_{xx}(t, x, \dot{x}) > 0 \forall (t, x, \dot{x}) \in U_1$ . Eso significa que la ecuación de Euler en la región de  $U$  equivale al sistema solucionado respecto a las derivadas

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \Phi(t, x, y),$$

donde

$$\Phi(t, x, y) = L_{xt}(t, x, y) - L_x(t, x, y) - L_{xx}(t, x, y)y.$$

En virtud de la supuesta suavidad del integrante, la función  $\Phi$  es (dos veces) continuamente diferenciable. Eso significa que, según el teorema local de existencia [ATF, pág. 186], el teorema global de existencia y la dependencia continua de la solución respecto a los datos iniciales [ATF, pág. 195], se hallarán  $\varepsilon > 0$  y  $\delta > 0$  tales que:

- a) la solución  $\hat{x}(\cdot)$  puede extenderse al segmento  $[t_0 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]$ ;  
 b) a cualquier  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  ( $|\lambda| < \delta$ ) en el segmento  $[t_0 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]$  le corresponde una solución  $x(\cdot, \lambda)$  de la ecuación de Euler con datos iniciales  $x(t_*) = \hat{x}(t_*) = \dot{\hat{x}}(t_*) + \lambda$ , donde  $t_*$  es cierto punto del intervalo  $(t_0 - \varepsilon, t_0)$ .

Según el teorema de la dependencia diferenciable de los datos iniciales [ATF, pág. 204], la función

$$(t, \lambda) \rightarrow x(t, \lambda) = (x_1(t, \lambda_1, \dots, \lambda_n), \dots, x_n(t, \lambda_1, \dots, \lambda_n))$$

es continuamente diferenciable. Mostremos que la extremal  $\hat{x}(\cdot)$  está rodeada por un campo central de extremales  $x(\cdot, \lambda)$ .

Diferenciando la función  $x(t, \lambda)$  respecto a  $\lambda$ , suponiendo que  $\lambda = 0$  y denotando

$$x_\lambda(t, \lambda)|_{\lambda=0} = H(t, t_*),$$

$$\left( H_{ij}(t, t_*) = \frac{\partial x_i(t, \lambda)}{\partial \lambda_j} \right) \Big|_{\lambda=0}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

obtenemos (dado que  $x(t, \lambda)$  es una extremal para cualquier  $\lambda$ ,  $|\lambda| < \delta$ )

$$0 \equiv \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( -\frac{d}{dt} L_x(t, x(t, \lambda), \dot{x}(t, \lambda)) + L_x(t, x(t, \lambda), \dot{x}(t, \lambda)) \right) \Big|_{\lambda=0} \Rightarrow -\frac{d}{dt} (\hat{L}_{xx}(t) \dot{H}(t, t_*) + \hat{L}_{xx}(t) \times \\ \times H(t, t_*)) + L_{xx}(t) H(t, t_*) + \hat{L}_{xx}(t) H(t, t_*) = 0.$$

Resulta que la matriz  $H(\cdot, t_*)$  satisface la ecuación de Jacobi. Además se cumplen las siguientes condiciones iniciales

$$H(t_*, t_*) = \frac{\partial}{\partial \lambda} x(t_*, \lambda) \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \hat{x}(t_*) = 0,$$

$$\dot{H}(t_*, t_*) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \dot{x}(t_*, \lambda) \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial \lambda} (\dot{\hat{x}}(t_*) + \lambda) = 1.$$

Sea  $H(t, t_0)$  la solución matricial de la ecuación de Jacobi para las condiciones  $H(t_0, t_0) = 0$ ,  $\dot{H}(t_0, t_0) = 1$ . Como se cumple la condición vigorizada de Jacobi, eso significa que no existe ninguna solución no trivial  $h$  de la ecuación jacobiana que satisface las condiciones  $h(t_0) = h(\tau) = 0$ ,  $t_0 < \tau \leq t_1$  (p. 9.2.1). Así pues, la condición vi-

gorizada de Jacobi equivale a la no degeneración de la matriz  $H(t, t_0)$  para cualquier  $t \in [t_0, t_1]$ . Pero en este caso, otra vez en virtud del teorema global de existencia y la dependencia continua entre la solución y los datos iniciales [ATF, pág. 195] (para la ecuación de Jacobi que también, por lo visto, se reduce a un sistema solucionado de primer orden), cuando los valores de  $t_*$  y  $t_0$  son bastante parecidos la matriz  $H(t, t_*)$  resulta no degenerada para cualquier  $t \in [t_0, t_1]$ .

Examinemos la aplicación  $\Psi(t, \lambda) = (t, x(t, \lambda))$  en cierto punto  $(\bar{t}, 0)$ ,  $\bar{t} \in [t_0, t_1]$ . Tenemos  $\det \Psi'(\bar{t}, 0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_t(\bar{t}, 0) & x_\lambda(\bar{t}, 0) \end{pmatrix}$   
 $\det H(\bar{t}, t_*) \neq 0$ .

Esto significa que, según el teorema de función inversa, se hallará  $\delta = \delta(\bar{t}) > 0$  tal que si solamente  $|\bar{t} - \tau| < \delta$ ,  $|\xi - \hat{x}(\bar{t})| < \delta$ , existirá el único  $\lambda = \lambda(\tau, \xi)$  tal que

$$\Psi(\tau, \lambda(\tau, \xi)) = (\tau, \xi) \Leftrightarrow x(\tau, \lambda(\tau, \xi)) = \xi.$$

En virtud de la compacidad de la gráfica  $\Gamma_x = \{(t, x(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$ , es posible hallar un valor de  $\delta_0$  tal que para cualquier punto  $(\tau, \xi)$ ,  $|\xi - \hat{x}(\tau)| < \delta_0$  exista el único (según se entiende bien) valor de  $\lambda = \lambda(\tau, \xi)$  con el que  $x(\tau, \lambda(\tau, \xi)) = \xi$ . En este caso la suavidad de la función  $\lambda$  es igual que la de  $x$ , es decir,  $C^2$ . Por lo tanto, la construcción del campo central que rodea la extremal ha terminado.

**10.3.2. S-función y su diferencial.** Sea  $x(\cdot, \lambda)$  el campo central (con su centro  $t_*$ ) que rodea la extremal  $\hat{x}(\cdot)$ . La función

$$S(\tau, \xi) = \int_{t_*}^{\tau} L(t, x(t, \lambda(\tau, \xi)), \dot{x}(t, \lambda(\tau, \xi))) dt$$

se llama *S-función del campo central*  $x(\cdot, \lambda)$ . Conforme a la definición de campo y a su función de inclinación, tenemos

$$x(\tau, \lambda(\tau, \xi)) = \xi, \quad (1)$$

$$\dot{x}(\tau, \lambda(\tau, \xi)) = u(\tau, \xi). \quad (2)$$

Supongamos que el integrante  $L$  es continuamente diferenciable en cierto entorno de la gráfica  $\{(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \mid t \in t_0, t_1\}$ . Entonces tendrá lugar la siguiente fórmula para la diferencial de la función  $S$ :

$$dS(\tau, \xi) = \langle L(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) - \langle L_x(\tau, \xi, u(\tau, \xi)), u(\tau, \xi) \rangle \rangle d\tau + \langle L_x(\tau, \xi, u(\tau, \xi)), d\xi \rangle.$$

Efectivamente, diferenciando la integral con una cota superior variable y utilizando la continuidad de  $\dot{x}_\lambda$  que se desprende de que  $x \in C^2$ , obtenemos

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = L(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) + \int_{t_*}^{\tau} (\langle L_x(t, x(t, \lambda(\tau, \xi))), \dot{x}(t, \lambda(\tau, \xi)) \rangle, x_\lambda(t, \lambda(\tau, \xi)) \lambda_\tau(\tau, \xi) + \langle L_x(t, x(t, \lambda(\tau, \xi))), \dot{x}(t, \lambda(\tau, \xi)) \rangle, \dot{x}(t, \lambda(\tau, \xi)) \lambda_\tau(\tau, \xi)) dt.$$

Integrando por partes el segundo sumando de la integral, teniendo en cuenta la expresión 2 y utilizando el hecho de que  $x(\cdot, \lambda)$  es una external, obtenemos

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = L(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) + \langle L_x(t, x(t, \lambda(\tau, \xi))), \dot{x}(t, \lambda(\tau, \xi)) \rangle, x_\lambda(t, \lambda(\tau, \xi)) \lambda_\tau(\tau, \xi) \Big|_{t_*}^{\tau}. \quad (3)$$

Como  $x_\lambda(t_*, \lambda(\tau, \xi)) = 0$  (puesto que  $t_*$  es el centro del campo), y diferenciando respecto a  $\tau$  ambos miembros de la ecuación (1), tenemos

$$\dot{x}(\tau, \lambda(\tau, \xi)) + x_\lambda(\tau, \lambda(\tau, \xi)) \lambda_\tau(\tau, \xi) = 0,$$

seguidamente, efectuando las sustituciones respectivas en (3), obtenemos la relación necesaria:

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = L(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) - \langle L_x(\tau, x(\tau, \lambda(\tau, \xi))), u(\tau, \lambda(\tau, \xi)) \rangle, u(\tau, \xi).$$

La fórmula para  $\partial S / \partial \xi$  se deduce análogamente integrando por partes y utilizando la igualdad

$$x_\lambda(\tau, \lambda(\tau, \xi)) \lambda_\xi(\tau, \xi) = 1$$

(se obtiene diferenciando respecto a  $\xi$  ambos miembros de la igualdad 1).

**10.3.3. Formulación del teorema y deducción de las condiciones suficientes en un problema elemental del c.c.v. Fórmula principal de Weierstrass.**

**Teorema.** Sea  $\hat{x}(\cdot) \in C^2([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$  una extremal admisible en el problema elemental (Pr), (p. 9.2.1). El integrante  $L \in C^3(V \cdot \mathbf{R}^n)$ , donde  $V \subset \mathbf{R}^{n+1}$  es cierto entorno de la gráfica ampliada  $\{(t, x(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$ ; en  $\hat{x}(\cdot)$  se cumplen las condiciones vigorizadas de Legendre y Jacobi y el integrante  $L$  es casi regular en  $V$ . En este caso  $\hat{x}(\cdot)$  proporcionará un mínimo fuerte al problema (Pr).

◁ Las condiciones del teorema permiten rodear  $\hat{x}(\cdot)$  (p. 10.3.1) por un campo central de extremales  $x(\cdot, \lambda)$  que recubren cierto entor-

no simplemente convexo  $U \in V$  de la gráfica  $\{(t, x(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$ . Sea  $x(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$  una función arbitraria admisible cuya gráfica se halla en ese entorno. Entonces

$$\begin{aligned} S(t_1, x_1) - S(t_0, x_0) &= \int_{t_0}^{t_1} dS(t, x(t)) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dS(t, \hat{x}(t)) = \int_{t_0}^{t_1} (\hat{L}(t) - \hat{L}_x(t), \dot{\hat{x}}(t)) dt + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \langle \hat{L}_x(t), d\hat{x}(t) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \hat{L}(t) dt = \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot)). \end{aligned}$$

De aquí

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x(\cdot)) - \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot)) &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt - \int_{t_0}^{t_1} dS(t, x(t)) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) - L(t, x(t), u(t, x(t))) - \\ &\quad - \langle L_x(t, x(t), u(t, x(t))), \\ &\quad \dot{x}(t) - u(t, x(t)) \rangle dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}(t, x(t), u(t, x(t)), \\ &\quad \dot{x}(t)) dt. \end{aligned}$$

Esa fórmula se llama fórmula principal de Weierstrass. De la casi regularidad del integrante se deduce (p. 9.2.1) que si  $(t, x) \in U$ , entonces  $\mathcal{E}(t, u, x, \dot{x}) \geq 0 \forall (u, \dot{x}) \in \mathbf{R}^n \cdot \mathbf{R}^n$ . Así pues,  $\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}(t, x(t), u(t, x(t)), \dot{x}(t)) dt \geq 0$  y, por lo tanto,  $\mathcal{J}(x_0(\cdot)) \geq \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot))$ , es decir,  $\hat{x}(\cdot)$  proporciona un mínimo fuerte.

## § 11. Complementos

### 11.1. Problemas de programación lineal y convexa

A este tema (problemas convexos) le hemos dedicado bastante espacio en la primera parte del libro. Pero allí hemos enfocado las cuestiones desde posiciones elementales. Aquí volvemos a ese mismo círculo de problemas para examinarlos como si fuera desde arriba, utilizando los conocimientos adquiridos acerca del análisis funcional y convexo.

**11.1.1. Teoría de dualidad en la programación lineal.** Examinemos el problema de programación lineal expuesto en el p. 3.1.1:

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \inf; Ax \leq b, \quad (\text{Pr})$$

donde  $c, x \in \mathbf{R}^n$ ,  $b \in \mathbf{R}^m$ ,  $A$  es una matriz de dimensiones  $m \cdot n$ . Incluyamos este problema en la familia de problemas con parámetro  $z \in \mathbf{R}^m$ :

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \inf; Ax \leq z. \quad (\text{Pr}_z)$$

El valor numérico del problema  $(\text{Pr}_z)S_{\text{Pr}} = \inf \langle c, x \rangle \mid Ax \leq z$  se llama *S-función* del problema (Pr), mientras que  $S(b)$  se denomina valor del problema inicial (Pr).

**Lema.** *S es una función convexa cerrada.*

◁ Demostremos que la supergráfica de la función  $S$  epi  $S = \{(\alpha, z) \in \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^m \mid S(z) \leq \alpha, z \in \text{dom } S\}$  coincide con el conjunto  $K = \{(\alpha, z) \in \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^m \mid \exists x : \langle c, x \rangle \leq \alpha, Ax \leq z\}$  que hemos examinado en el p. 3.2.1, demostrando, ahí mismo, que  $K$  es un cono convexo cerrado. De la igualdad epi  $S = K$  se deducirá inmediatamente la convexidad y el carácter cerrado de la función  $S$ .

Por una parte, si  $(\alpha, z) \in K$ , resultará que  $\exists x' : \langle c, x' \rangle \leq \alpha, Ax' \leq z$ . Por consiguiente,  $S(z) = \inf \{\langle c, x \rangle \mid Ax \leq z\} \leq \alpha$  y, como el conjunto de elementos admisibles en el problema  $(\text{Pr}_z)$  no es un conjunto vacío (tiene  $x'$ ), por eso  $(\alpha, z) \in \text{epi } S$ .

Y viceversa, supongamos que  $(\alpha, z) \in \text{epi } S$ , es decir,  $S(z) = \inf \{\langle c, x \rangle \mid Ax \leq z\} \leq \alpha$ . Eso significa que existen unas sucesiones  $\{x_k\}, \{\varepsilon_k\}$  tales que  $\langle c, x_k \rangle \leq \alpha + \varepsilon_k$ , además,  $\varepsilon_k \rightarrow +0$  cuando  $k \rightarrow \infty$  y  $Ax_k \leq z$ . Por lo tanto, la sucesión  $(\alpha - \varepsilon_k, z) \in K$  y, en virtud del carácter cerrado de  $K$ , obtenemos  $(\alpha, z) \in K$ . ▷

Hallemos la función  $S^*(y)$  conjugada con la función  $S$  (véase en el p. 1.5.2 la transformada de Legendre — Young — Fenchel). Tenemos

$$\begin{aligned} S^*(y) &= \sup_z \langle y, z \rangle - S(z) = \sup_z \langle y, z \rangle - \inf \{ \langle c, x \rangle \mid Ax \leq \\ &\leq z \} = \sup_{z, x} \{ \langle y, z \rangle - \langle c, x \rangle \mid Ax \leq z \} = \sup_x \sup_{z \geq Ax} \{ \langle y, z \rangle - \langle c, x \rangle \} = \\ &= \begin{cases} \sup_x \{ y, Ax - \langle c, x \rangle \}, & y \leq 0, \\ +\infty, & \text{en los demás casos} \end{cases} = \begin{cases} \sup_x \langle A^*y - c, x \rangle, & y \leq 0, \\ +\infty, & \text{de lo contrario,} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0, & A^*y = c, \quad y \leq 0, \\ +\infty, & \text{otra versión.} \end{cases} \end{aligned}$$

Hallemos la segunda función  $S^{**}(z)$  conjugada con la función  $S$ :

$$S^{**}(z) = \sup_y \langle y, z \rangle - S^*(y) = \sup_y \{ \langle y, z \rangle \mid A^*y = c, y \leq 0 \}.$$



En este caso  $S^{**}(b) = \sup \{ \langle y, b \rangle \mid A^*y = c, y \leq 0 \}$ . El problema  $\langle b, y \rangle \rightarrow \sup: A^*y = c, y < 0$  se llama *dual* en relación con (Pr).

Análogamente se deducen los problemas duales con respecto a los problemas de programación lineal en formas canónica y normal (véanse los ejercicios 1 y 2). La dualidad de los problemas de formas canónica y normal también se obtiene reduciéndolos a un problema general de programación lineal (Pr) para el cual ya se ha obtenido el problema dual (véase el ejercicio 3). (El modo de reducir un problema de forma normal a un problema de forma canónica se describe en el p. 3.1.1). Está claro que el problema inicial (Pr) es dual con arreglo al problema  $Pr^*$ .

### Ejercicios

1. Demostrar que para el problema de forma canónica

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \sup; \quad Ax = b, \quad x \geq 0 \quad (Pr_{can})$$

es dual el problema

$$\langle b, y \rangle \rightarrow \inf; \quad A^*y \geq c. \quad (Pr_{can}^*)$$

2. Demostrar que para el problema de forma normal

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \sup; \quad Ax \geq b, \quad x \geq 0 \quad (Pr_{norm})$$

es dual el problema

$$\langle b, y \rangle \rightarrow \inf; \quad A^*y \geq c, \quad y \geq 0. \quad (Pr_{norm}^*)$$

3. Deducir el problema dual para un problema de forma canónica, reduciendo este último a un problema general de programación lineal.

**Teorema (de dualidad).** *Para un par de problemas de programación lineal (Pr) y  $(Pr^*)$  tiene lugar la siguiente alternativa: o bien el valor de cualquiera de los problemas es finito (y entonces también es finito el valor del segundo, y ambos valores coinciden), o bien el conjunto de elementos admisibles en uno de los problemas es un conjunto vacío (y entonces también el otro problema es incompatible o tiene un valor infinito).*

◁ Para demostrar el teorema de dualidad nos hará falta el

**Ejercicio 4.** Si  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  es una función convexa cerrada y existe un punto  $z_0$  con el que  $f(z_0) = -\infty$ , entonces  $f(z) = -\infty$  para cualquier punto  $z \in \text{dom } f$ .

A) Sea finito  $(S(b) \mid < \infty)$  el valor  $S(b)$  del problema (Pr). Según el lema,  $S$  es una función convexa cerrada y, en virtud del ejercicio 4,  $S(z) > -\infty$  para cualquier punto  $z$ . Según el teorema de Fenchel — Moreau (p. 1.5.3),  $S^{**}(b) = S(b)$  y, por consiguiente, los valores de ambos problemas son finitos e iguales.

B) Sea  $S(b) = -\infty$ . Entonces, como es fácil de ver,  $S^* = +\infty$ ,  $S^{**} = -\infty$ , es decir, el conjunto de elementos admisibles en el problema dual  $Pr^*$  es un conjunto vacío ( $D_{Pr^*} = \emptyset$ ).

C) Sea  $S(b) = +\infty$ , es decir, el conjunto de elementos admisibles en el problema Pr es un conjunto vacío ( $D_{Pr} = \emptyset$ ). Entonces, o bien  $S(z) > -\infty$  para cualquier  $z$  y, por lo tanto, según el teorema de Fenchel — Moreau,  $S^{**}(b) = S(b) = +\infty$ , o bien existe un punto  $z_0$  para el cual  $S(z_0) = -\infty$ , y, consiguientemente, otra vez  $S^* = +\infty$ ,  $S^{**} = -\infty$ , es decir,  $S^{**}(b) = -\infty$ ,  $D_{Pr^*} = \emptyset$ . ▷

**11.1.2. Teorema de Kuhn — Tucker.** Ya hemos tratado este tema en la primera parte del libro (p. 2.3.2), donde se ofreció la demostración elemental del referido teorema. Aquí lo deduciremos de los principales teoremas del análisis convexo.

**Teorema.** Supongamos que  $X$  es un espacio localmente convexo.  $f_i : X \rightarrow \mathbf{R}$  son ciertas funciones convexas propias, continuas en el punto  $\hat{x}$ , y  $A$  es un conjunto convexo; además,  $\hat{x}$  proporciona un mínimo absoluto al problema

$$f_0(x) \rightarrow \inf; \quad f_i(x) \leq 0, \quad x \in A. \quad (\text{Pr})$$

En este caso, para (Pr) se cumple el principio de Lagrange.

Aquí no se expone el desciframiento del referido principio, ya que el mismo será esclarecido en el curso de la demostración. Prestemos atención al hecho de que aquí se aplican las exigencias (convexidad local de  $X$  y continuidad de  $f_i$ ) que antes no existían.

$\triangleleft 0$ . La demostración se basa: 1) en el teorema de Fermat para funciones convexas (p. 2.3.1); 2) en la fórmula de Moreau — Rocafellar, y 3) en la fórmula de Dubowizki — Miliutin (p. 1.5.4 y 8.2).

1. Así como procedíamos más de una vez sin limitar la generalidad, estimamos que  $f_i(\hat{x}) = 0, i = 0, 1, \dots, m$ . Ahora supongamos que  $f(x) = \max f_i(x)$ . Es evidente que si  $\hat{x} \in \text{absmín Pr}$  resultará que  $\hat{x} \in \text{absmín}(f + \delta A)$ . Entonces, utilizando el teorema de Fermat para funciones convexas, así como las fórmulas de Moreau — Rocafellar y de Dubowizki — Miliutin, obtenemos

$$0 \in \partial(f + \delta A)(\hat{x}) \stackrel{0.2}{=} \partial f(\hat{x}) + \partial \delta A(\hat{x}) \stackrel{0.3}{=} \text{co} \{ \partial f_0(\hat{x}) \cup \dots \cup \partial f_m(\hat{x}) \} + \partial \delta A(\hat{x}). \quad (1)$$

Sólo nos queda descifrar la expresión 1 que contiene la siguiente información: existen  $x_i^* \in \partial f_i(\hat{x}), \alpha_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$  y  $\xi^* \in \partial \delta A(\hat{x})$

tales que  $\sum_{i=0}^m \alpha_i x_i^* + \xi^* = 0$ . De acuerdo con la definición de subdiferencial y teniendo en cuenta que  $f_i(\hat{x}) = 0$ , obtenemos  $f_i(x) \geq \langle x_i^*, x - \hat{x} \rangle, 0 \geq \langle \xi^*, x - \hat{x} \rangle, x \in A$ . Multiplicando por  $\alpha_i$  y sumando llegamos al principio de mínimo:

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i f_i(x) \geq 0 \quad \forall x \in A,$$

o sea, las condiciones de no negatividad  $\alpha_i$  y de no rigidez complementaria ya se han cumplido.

## 11.2. Problemas de Liapunov

A esta clase de problemas se reducen muchas cuestiones de optimización, en particular, los problemas de control óptimo. Una de sus singularidades consiste en que contienen convexidad oculta, es de-

cir, estructura convexa que no se nota a primera vista. Sin embargo, precisamente la convexidad es el factor que predetermina la circunstancia de que las condiciones necesarias en los problemas de Liapunov coinciden con las condiciones suficientes y éstas se realizan en forma de principio de mínimo.

**Teorema** (principio de Lagrange para los problemas de Liapunov). Sea  $(T, \mathcal{B}, \nu)$  un espacio métrico de medida boreliana  $\nu$  ( $\mathcal{B}$  es el total de conjuntos borelianos);  $U$ , un espacio topológico;  $f_i: T \cdot U \rightarrow \mathbb{R}$ , ciertas funciones continuas,  $i = 0, 1, \dots, m$ ;  $X$ , un espacio lineal;  $g_i$ , ciertas funciones convexas finitas en  $X$  cuando  $i = 1, \dots, m'$  y funciones afines cuando  $i = m' + 1, \dots, m$ ; y  $A$ , un subconjunto convexo de  $X$ ; además, el par  $(\hat{x}(\cdot), \hat{x})$  proporciona un mínimo absoluto al siguiente problema \*:

$$F_0(u(\cdot)) + g_0(x) \rightarrow \inf; \quad F_i(u(\cdot)) + g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m',$$

$$F_i(u(\cdot)) + g_i(x) = 0, \quad i = m' + 1, \dots, m, \quad x \in A,$$

$$F_i(u(\cdot)) = \int_T f_i(t, u(t)) \, d\nu.$$

Por consiguiente, para el problema (Pr) tiene lugar el principio de Lagrange, es decir, existen los factores lagrangianos  $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$  y  $\lambda \neq 0$  tales que se cumple:

a) el principio de mínimo en  $u$  y  $x$

$$\min_{u \in U} \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(t, u) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(t, \hat{u}(t))$$

casi por doquier,

$$\min_{x \in A} \sum_{i=0}^m \lambda_i g_i(x) = \sum_{i=0}^m \lambda_i g_i(\hat{x});$$

b) la condición de no negatividad

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, m;$$

c) la condición de no rigidez complementaria

$$\lambda_i (F_i(\hat{u}(\cdot)) + g_i(\hat{x})) = 0, \quad i = 1, \dots, m'.$$

Es fácil comprender que si  $\lambda_0 > 0$ , las condiciones a), b) serán suficientes para que  $(\hat{u}(\cdot), \hat{x})$  sea la solución del problema (Pr).

◁0. La demostración del teorema se basa en los siguientes hechos: 1) en el teorema de Liapunov (p. 7.3), 2) en el teorema de Kuhn — Tucker (p.2.3.3), y 3) en las condiciones de extremo para un problema elemental de control óptimo [ATF, pág. 360].

1. Denotemos por  $V$  el conjunto de aplicaciones medibles en  $T$  y  $U$  que poseen la propiedad de que  $f_i(t, u(t)) \in L_1(T, \mathcal{B}, \nu)$ , y de-

\* Que precisamente se denomina problema de Liapunov.

notemos por  $F : V \rightarrow \mathbf{R}^{m+1}$  la aplicación  $F(u(\cdot)) = (F_0(u(\cdot)), \dots, F_m(u(\cdot)))$ .

**Lema.** La imagen  $F(V)$  es un conjunto convexo en  $\mathbf{R}^{m+1}$ .  $\triangle \triangle$  Sean  $0 < \alpha < 1$ ,  $\xi^j \in F(V)$ ,  $j = 1, 2$  ( $\Leftrightarrow \exists u_j(\cdot) \in V: F(u_j(\cdot)) = \xi^j$ ,  $j = 1, 2$ ).

Supongamos que

$$p_i(t) = f_i(t, u_1(t)) - f_i(t, u_2(t)),$$

$$\mu(A) = \left( \int_A p_0(t) dv, \dots, \int_A p_m(t) dv \right).$$

Está claro que  $\mu$  es una medida vectorial en  $(T, \mathcal{F})$ . Además,  $\mu(\emptyset) = 0$ ,  $\mu(T) = \xi^1 - \xi^2$ . Según el teorema de Liapunov (0.1), existe un conjunto  $A_\alpha$  tal que

$$\mu(A_\alpha) = \alpha(\xi^1 - \xi^2) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \int_{A_\alpha} p_0(t) dv, \dots, \int_{A_\alpha} p_m(t) dv \right).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \alpha(\xi^1 - \xi^2) &= \int_{A_\alpha} f_i(t, u_1(t)) dv + \\ &+ \int_{T \setminus A_\alpha} f_i(t, u_2(t)) dv - \int_{A_\alpha} f_i(t, u_2(t)) dv - \\ &- \int_{T \setminus A_\alpha} f_i(t, u_2(t)) dv = \int_{A_\alpha} f_i(t, u_1(t)) dv = \\ &= \int_{T \setminus A_\alpha} f_i(t, u_2(t)) dv - \xi_i^2. \end{aligned}$$

De esta igualdad, pero suponiendo que

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} u_1(t), & t \in A_\alpha, \\ u_2(t), & t \in T \setminus A_\alpha, \end{cases}$$

se deduce

$$\begin{aligned} F(u_\alpha(\cdot)) - \xi^2 &= \alpha(\xi^1 - \xi^2) \Rightarrow F(u_\alpha(\cdot)) = \\ &= \alpha\xi^1 + (1 - \alpha)\xi^2. \triangleright \triangleright \end{aligned}$$

2. Denotemos  $z = (z_0, \dots, z_m) \in \mathbf{R}^{m+1}$ ,  $\xi = (x, z)$ ,  $\varphi_i(\xi) = g_i(x) + z_i$  y examinemos el problema

$$\varphi_0(\xi) \rightarrow \inf; \varphi_i(\xi) \leq 0, i = 1, \dots, m',$$

(Pr)

$$\varphi_i(\xi) = 0, i = m' + 1, \dots, m, \xi \in A \cdot F(V).$$

Con arreglo al lema, aquí se trata de un problema de programación convexa. Si  $(\hat{u}(\cdot))$ , entonces  $(\hat{x})$  será la solución del problema

$(\overline{\text{Pr}})$ , y  $\xi = (\hat{x}, \hat{u}(\cdot))$ , la solución de  $(\overline{\text{Pr}})$ . Nos queda tan sólo aplicar a  $(\text{Pr})$  el teorema de las condiciones de extremo (0.3) y obtener las relaciones necesarias a) — c).  $\triangleright$

### 11.3. Problemas de control óptimo, lineales en variables físicas

Sea  $\Delta = [t_0, t_1]$  un segmento finito de una recta numérica;  $a_i : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  y  $A(\cdot) : \Delta \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , ciertas funciones vectoriales y matriciales;  $U$ , un espacio topológico;  $f_i : \Delta \cdot U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  y  $F : \Delta \cdot U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ciertas funciones continuas;  $\gamma_{0_i}, \gamma_{1_i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ , los elementos de  $\mathbb{R}^n$ .

El problema extremal

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0(x(\cdot), u(\cdot)) &\rightarrow \inf; \mathcal{J}_i(x(\cdot), u(\cdot)) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m', \\ \mathcal{J}_i(x(\cdot), u(\cdot)) &= 0, \quad i = m' + 1, \dots, m, \end{aligned}$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + F(t, u(t)), \quad u(t) \in U \text{ casi por doquier,}$$

$$\mathcal{J}_i(x(\cdot), u(\cdot)) =$$

$$- \int (\langle a_i(t), x(t) \rangle + f_i(t, u(t))) dt + \langle \gamma_{0_i}, x(t_0) \rangle + \langle \gamma_{1_i}, x(t_1) \rangle,$$

en el que las magnitudes relacionadas con la trayectoria física entran linealmente, se llama *problema de control óptimo, lineal en variables físicas*.

Denotemos por  $\mathcal{U}$  el conjunto de aplicaciones medibles  $u : \Delta \rightarrow U$  tales que las funciones  $t \rightarrow f_i(t, u(t))$ ,  $t \rightarrow F(t, u(t))$  sean integrables. El par  $(x(\cdot), u(\cdot))$  se llama *proceso admisible* si  $x(\cdot) : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función vectorial absolutamente continua,  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ ,  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + F(t, u(t))$  casi por doquier y se cumplen las relaciones  $\mathcal{J}_i(x(\cdot), u(\cdot)) \leq 0$ ,  $1 \leq i \leq m$ .

**Teorema** (principio de máximo para los problemas de control óptimo, lineales en variables físicas). *Sea  $\Delta = [t_0, t_1]$  en el problema  $(\text{Pr})$  un segmento finito de una recta numérica,  $a_i(\cdot) \in L_1(\Delta, \mathbb{R}^n)$ ,  $A(\cdot) \in L_1(\Delta, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ ;  $U$ , un espacio topológico;  $f_i$  y  $F$ , ciertas funciones continuas y la aplicación en  $\mathbb{R}^n$ , definidas en  $\Delta \cdot U$ .*

1) *Si el proceso admisible  $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$  proporciona un mínimo absoluto al problema  $(\text{Pr})$ , es necesario que se cumpla el principio de Lagrange, es decir, que existan  $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$  y que la función absolutamente continua  $p(\cdot) : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(\lambda, p(\cdot)) \neq 0$  sea tal que se cumpla:*

$$\text{a) la ecuación de Euler } -\dot{p}(t) = p(t)A(t) + \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i(t);$$

$$\text{b) las condiciones de transversalidad } p(t_k) = (-1)^k \sum_{i=0}^m \lambda_i \gamma_{k_i}; \quad k=0, 1;$$

c) el principio de máximo

$$\begin{aligned} \max_{u \in U} (p(t) F(t, u) - \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(t, u)) = \\ = (p(t) F(t, \hat{u}(t)) - \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(t, \hat{u}(t))) \text{ casi por doquier;} \end{aligned}$$

d) la condición de no negatividad  $\lambda_i \geq 0, 0 \leq i \leq m$ ;

e) la condición de no rigidez complementaria  $\lambda_i \mathcal{J}_i(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) = 0, 1 \leq i \leq m'$ .

2) Si para el proceso admisible  $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$  existen  $\lambda_0 > 0, \lambda \in \mathbb{R}^m$  y  $p(\cdot) \in AC(\Delta, \mathbb{R}^n)$  tales que se cumplan las condiciones a) — e), en este caso  $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$  proporcionará un mínimo absoluto al problema (Pr).

◁0. La demostración de dicho teorema se basa: 1) en el principio de Lagrange para los problemas de Liapunov (véase el punto anterior); 2) en el lema de reducción de la teoría de ecuaciones diferenciales, que demostraremos en el p. 1.

1. **Lema de reducción.** Sea  $\Delta = [t_0, t_1]$  un segmento finito, y  $U$ , un espacio topológico;  $a(\cdot) \in L_1(\Delta, \mathbb{R}^n)$ ,  $A(\cdot) \in L_1(\Delta, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ .

$$\begin{aligned} F \in C(\Delta \cdot U, \mathbb{R}^n), \quad f \in C(\Delta, U), \\ \mathcal{J}(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{\Delta} ((a(t), x(t)) + f(t, u(t))) dt + \\ + \langle \gamma_0, x(t_0) \rangle + \langle \gamma_1, x(t_1) \rangle, \end{aligned}$$

donde los valores de  $x(\cdot), u(\cdot)$  están enlazados mediante la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + F(t, u(t)) \text{ casi por doquier.}$$

Entonces tiene lugar la igualdad

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{\Delta} ((p(t), F(t, u(t))) + \\ + f(t, u(t))) dt + \langle \gamma_0 - p(t_0), x(t_0) \rangle, \quad (1) \end{aligned}$$

donde  $p(\cdot)$  es la única solución del sistema lineal

$$-\dot{p}(t) = p(t)A(t) + a(t), \quad p(t_1) = -\gamma_1.$$

◁◁ Efectivamente, la función  $p(\cdot)$ , según el teorema de existencia y unicidad [ATF, pág. 191], se determina de una sola manera. Enton-

ces

$$\int_{\Delta} \langle a(t), x(t) \rangle dt = (\text{de la expresión para } p(\cdot)) = \\ = - \int_{\Delta} \langle \dot{p}(t) + p(t)A(t), x(t) \rangle dt = (\text{integrando por partes}) = - \langle p(\cdot), x(\cdot) \rangle \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{\Delta} \langle \dot{x}(t) - A(t)x(t), p(t) \rangle dt = \langle \gamma_1, x(t_1) \rangle - \langle p(t_0), x(t_0) \rangle + \int_{\Delta} \langle p(t), F(t, u(t)) \rangle dt,$$

de donde se deduce inmediatamente la expresión 1.  $\triangleright \triangleright$

2. Del lema se desprende que si  $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) \in \text{absmín Pr}$ , entonces  $\hat{u}(\cdot) \in \text{absmín Pr}'$ , donde

$$\int_{\Delta} (\langle p_0(t), F(t, u(t)) \rangle + f_0(t, u(t))) dt + \\ + \langle \gamma_{00} - p_0(t_0), x(t_0) \rangle \rightarrow \text{inf}, \quad (\text{Pr}') \\ \int_{\Delta} (\langle p_i(t), F(t, u(t)) \rangle + f_i(t, u(t))) dt + \langle \gamma_{0i} - p_i(t_0), x(t_0) \rangle \leq C_i, \\ - \dot{p}_i = p_i A + a_i, \quad p_i(t_1) = -\gamma_{1i}.$$

Ahora sólo nos queda aplicar el principio de máximo al problema de Liapunov. Según ese principio, se hallarán los números  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  que satisfacen el principio de mínimo, y también las condiciones de no rigidez complementaria y de no negatividad (para  $(\text{Pr}')$ ). Si ahora suponemos que  $p(t) = \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i(t)$ , entonces, como es fácil comprender, se satisfarán las condiciones a) - c).

La suficiencia se deduce de la suficiencia del principio de máximo del problema de Liapunov.  $\triangleright$

#### 11.4. Ecuación de Euler para un problema elemental del cálculo clásico de variaciones en un caso multidimensional

11.4.1. Planteamiento del problema. Sea  $T \subset \mathbf{R}^m$  una región acotada en  $\mathbf{R}^m$  con una frontera suave  $\partial T$ . Se llama problema elemental del cálculo clásico de variaciones, el siguiente problema extremal en  $C^1(T)$ :

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_T L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \text{extr}, \quad x|_{\partial T} = \xi. \quad (\text{Pr})$$

Aquí  $L : \mathbf{R}^m \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  es una función de  $2m + 1$  variables. El extremo en dicho problema se considera entre las funciones  $x(\cdot) \in C^1(T)$  que satisfacen la condición de contorno: la acotación de  $x(\cdot)$  en la frontera  $\partial T$  debe coincidir con la función continua  $\xi(\cdot) : \partial T \rightarrow \mathbf{R}$ ;  $\dot{x}(t) \Leftrightarrow \left( \frac{\partial x(t)}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial x(t)}{\partial t_m} \right)$ .

Decimos que la función admisible  $\hat{x}(\cdot)$  proporciona al problema (Pr) un mínimo (máximo) local y escribimos, comúnmente,  $\hat{x}(\cdot) \in \text{locmín Pr}$  ( $\text{locmáx Pr}$ ), si existe  $\delta > 0$  tal que con cualquier función admisible  $x(\cdot)$ , para la cual  $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_1 < \delta$ , se cumple la desigualdad  $\mathcal{J}(x(\cdot)) \geq \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot))$  ( $\mathcal{J}(x(\cdot)) \leq \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot))$ ).

En este caso debemos recordar que  $C^1(M)$  es un espacio de funciones continuamente diferenciables en  $T$ , donde

$$\|x(\cdot)\|_1 := \text{máx} (\|x(\cdot)\|_0 \left\| \frac{\partial x(\cdot)}{\partial t_1} \right\|_0, \dots, \left\| \frac{\partial x(\cdot)}{\partial t_m} \right\|_0),$$

$$\|x(\cdot)\|_0 := \text{máx}_{t \in T} |x(t)|.$$

#### 11.4.2. Condición de extremo necesaria

**Teorema.** *Supongamos que  $\hat{x}(\cdot) \in C^1 T$  proporciona un mínimo local débil a (Pr), mientras que el integrando  $L$  es continuo, juntamente con sus derivadas parciales, según  $x, \dot{x}$ , en cierto entorno del conjunto  $\{(t, x(t), \dot{x}(t)) \mid t \in T\}$  y, además,  $\hat{L}_x(t) \in C^1(T)$ . En este caso se cumple la ecuación de Euler*

$$-\text{div } \hat{L}_x(t) + \hat{L}_x(t) = 0.$$

◁ Razonamos igualmente que al deducir las condiciones necesarias en el problema de Bolz o en un problema elemental unidimensional. Tomamos la siguiente función arbitraria, pero fija:  $x_0(\cdot) \in C_0^1(T) := \{x(\cdot) \in C^1(T) \mid x|_{\partial T} = 0\}$ . Entonces  $\hat{x}(\cdot) + \lambda x(\cdot)$  será la función admisible  $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ . Supongamos que  $\varphi(\lambda) := \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot) + \lambda x(\cdot))$ . De la condición  $\hat{x}(\cdot) \in \text{locextr Pr}$  se deduce que  $0 \in \text{locextr } \varphi$ . Utilizando la diferenciabilidad de  $\varphi$  en cero (que deriva del teorema de análisis de la diferenciabilidad bajo el signo de integral), llegamos a la expresión para la primera variación:

$$\varphi'(0) = \delta \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot), x(\cdot)) = \int_T (\langle \hat{L}_x(t), \dot{x}(t) \rangle + \hat{L}_x(t) x(t)) dt = 0 \quad \forall x(\cdot) \in C_0^1(T). \quad (1)$$



Ahora sólo falta utilizar la fórmula clásica de Ostrogradski [10, t. 2, pág. 272; 15, t. 2, pág. 97], en virtud de la cual

$$\int_T \langle \hat{L}_x(t), \dot{x}(t) \rangle dt = - \int_T \operatorname{div} \hat{L}_x(t) x(t) dt. \quad (2)$$

De las expresiones (1) y (2) obtenemos que

$$\int_T (-\operatorname{div} \hat{L}_x(t) + \hat{L}_x(t)) x(t) dt = 0 \quad \forall x(\cdot) \in C_0^1(T). \quad (3)$$

Si ahora suponemos que la función  $t \rightarrow a(t) := -\operatorname{div} \hat{L}_x(t) + \hat{L}_x(t)$  no es igual a cero (para concretar, supongamos que es una función positiva) en cierto punto de  $T$ , entonces, a consecuencia de la continuidad de  $a(\cdot)$ , existirá una esfera pequeña  $B(\bar{t}, \rho) \subset T$  dotada de una propiedad tal que  $a(t) > 0 \quad \forall t \in B(\bar{t}, \rho)$ .

Ahora podemos suponer que

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} (\rho - |t - \bar{t}|)^2, & |t - \bar{t}| \leq \rho; \\ 0 & |t - \bar{t}| \geq \rho, \end{cases}$$

y, después de convencerse de que  $\bar{x}(\cdot) \in C_0^1(T)$ , llegar a una contradicción, ya que

$$\begin{aligned} 0 & \stackrel{(3)}{=} \int_T a(t) \bar{x}(t) dt = \int_{B(\bar{t}, \rho)} a(t) \bar{x}(t) dt > \\ & > \min_{t \in B(\bar{t}, \rho)} a(t) \int_{B(\bar{t}, \rho)} \bar{x}(t) dt > 0. \quad \Delta \end{aligned}$$

### 11.5. Acerca de los teoremas de existencia y los métodos directos en el cálculo de variaciones y el control óptimo

La problemática de existencia de soluciones desempeña un papel muy importante en la teoría de problemas extremales.

Examinemos esa problemática en el ejemplo de un problema elemental del c.c.v.:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x(\cdot)) &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}) dt \rightarrow \inf; \\ x(t_0) &= x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (\text{Pr})$$

posiblemente a condición de que sea acotada la derivada:  $\dot{x} \in U \subset \mathbb{R}$ .

Tratemos de descubrir las razones que contribuyen a que el problema pueda no tener solución. Para ello examinemos los ejemplos 3-5 del punto 4.2.4.

1) **Carácter no convexo del integrante en  $\dot{x}$ .** En el ejemplo 5 el integrante tenía el siguiente aspecto:  $L(x, \dot{x}) = ((1 - \dot{x}^2)^2 + \dot{x}^2)$ . La función  $\dot{x} \rightarrow L(x, \dot{x})$  aquí no era convexa. Precisamente esta circunstancia nos permitió establecer (en el p. 4.2.4) «un régimen deslizante» y argumentar la imposibilidad de existencia de solución. Como muestra el ejemplo en el problema de Newton ( $L(t, \dot{x}) = t(1 + \dot{x}^2)$ ,  $U = \mathbf{R}_+$ ), el carácter no convexo del integrante no siempre conduce a la inexistencia de solución.

2) **Incremento insuficiente del integrante.** En el ejemplo 3 (Weierstrass) el integrante  $L$  tenía el siguiente aspecto:  $L(t, \dot{x}) = t^2 \dot{x}^2$ . La función  $\dot{x} \rightarrow L(t, \dot{x})$  poseía suficiente incremento (cuadrático) con todos los valores de  $t$ , excepto  $t = 0$ . La función  $L(0, \dot{x})$  era idénticamente igual a cero. Y precisamente esta circunstancia, o sea, la falta de incremento del integrante en  $\dot{x}$ , aquí es la causa de que no haya solución. Como es sabido, a menudo tampoco existe solución del problema de superficie mínima de revolución, sobre todo cuando  $L(x, \dot{x}) = x\sqrt{1 + \dot{x}^2}$ . Aquí el incremento del integrante es igual que el de la función lineal, y esto tampoco es suficiente. Cabe señalar que, en ambos casos, los integrantes un poco modificados ( $L(t, \dot{x}) = t^{2/3} \dot{x}^2$ , ejemplo de Hilbert, y  $L(x, \dot{x}) = \sqrt{1 - \dot{x}^2}/x$ , «plano de Lobachevski») poseen propiedad de existencia. Así pues, el incremento insuficiente del integrante tampoco siempre conduce a la inexistencia de solución.

3) **Carácter no acotado de la funcional por debajo.** En el ejemplo 4 el integrante  $L$  tenía el aspecto siguiente:  $L(x, \dot{x}) = \dot{x}^2 - x^2$ . En este caso la presencia de un punto conjugado provoca el carácter no acotado de la funcional por debajo, y esta circunstancia, a su vez, provoca, por supuesto, la inexistencia de solución.

Si eliminamos las tres circunstancias mencionadas podemos lograr la existencia de solución.

Expongamos, por ejemplo, el siguiente resultado.

**Teorema de Tonelli.** *Supongamos que en el problema (Pr) el integrante  $L$  admite la estimación*

$$L(t, x, \dot{x}) \geq \alpha |\dot{x}|^p + \beta,$$

donde  $\alpha > 0$ ,  $p > 1$ ,  $(t, x)$  pertenece a cierta región conexa cerrada  $G \subset \mathbf{R}^2$  que contiene los puntos  $(t_0, x_0)$ ,  $(t_1, x_1)$ . además, la función  $\dot{x} \rightarrow L(t, x, \dot{x})$  es convexa para cualquier par de  $(t, x) \in G$ . En este caso, entre todas las curvas absolutamente continuas, cuya gráfica se halla situada en  $G$ , existirá una curva que proporcionará un mínimo al problema (Pr).

Como vemos, las condiciones de Tonelli permiten evitar las tres

causas de inexistencia de soluciones, de las cuales hemos hablado más arriba ( $L$  se supone que es casi regular, mientras que  $(\Leftrightarrow \dot{x} \rightarrow L \times \times (t, x, \dot{x})$  es convexa), el incremento con arreglo a  $\dot{x}$  supera el incremento lineal, en tanto que el integrante permanece acotado por debajo. Aquí no exponemos la demostración del teorema de Tonelli, ya que la misma se ofrece detalladamente en el libro [1].

Debemos señalar aquí mismo, que la casi regularidad del integrante, desde el punto de vista teórico, siempre se puede considerar cumplida.

Expongamos el resultado correspondiente.

**Teorema de Bogoliúbov.** Sea  $G$  una región convexa cerrada en  $\mathbf{R}^3$  que contiene los puntos  $(t_0, x_0)$ ,  $(t_1, x_1)$ ;  $L$ , una función continua en  $G \times \mathbf{R}$ ;  $\tilde{L}$ , la convexidad de la función  $\dot{x} \rightarrow L(t, x, \dot{x})$ ;  $(t, x) \in G (\Leftrightarrow \tilde{L}(t, x, \cdot)$ , la segunda función conjugada en sentido de análisis convexo de la función  $L(t, x, \cdot)$ ; y

$$\tilde{J}(x(\cdot)) := \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L}(t, x, \dot{x}) dt \rightarrow \inf;$$

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, \quad (\tilde{\text{Pr}})$$

un problema elemental con integrante  $\tilde{L}$ . Entonces el valor numérico del problema  $(\tilde{\text{Pr}})$  (a condición de que las gráficas de las funciones  $x(\cdot)$  se hallan en  $G$ ) coincidirá con el valor numérico del problema  $(\text{Pr})$  y, además, para toda función  $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$ ,  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(t_1) = x_1$ ,  $(t, x) \in G \forall t \in [t_0, t_1]$  existirá la sucesión  $\{x_n(\cdot)\}_{n \geq 1}$  con esas mismas propiedades, y tal que  $x_n(\cdot) \rightarrow x(\cdot)$  en el espacio  $C([t_0, t_1])$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{J}(x_n(\cdot)) = \tilde{J}(x(\cdot))$ .

El control óptimo concede nuevas posibilidades para estudiar los problemas de existencia. Por ejemplo, tiene lugar el

**Teorema.** Supongamos que en el problema  $(\text{Pr})$  con condiciones complementarias  $|x| \leq A$ , el integrante  $L$  está definido, es continuo en  $\mathbf{R}^3$  y casi regular. Entonces, si existe una función admisible, también existirá la solución del problema.

◁ La demostración de dicho teorema es muy sencilla. Realicémosla suponiendo adicionalmente que  $L$  es suave en  $\dot{x}$ . Sea  $\{x_n(\cdot)\}_{n \geq 1}$  una sucesión minimizadora. De las condiciones  $x_n(t_0) = x_0$ ,  $|x_n(t)| \leq A$  se deduce, según el teorema de Arzel (10, parte II, pág. 392), la compacidad  $\{x_n(\cdot)\}_{n \geq 1}$  en el espacio  $C([t_0, t_1])$ . Por lo tanto, se puede estimar que  $x_n(\cdot)$  converge uniformemente hacia  $\hat{x}(\cdot)$  y que  $\dot{x}_n(\cdot)$  converge hacia  $\dot{x}$  débilmente

$$\left( \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t_1} (\dot{x}_n(t) - \dot{x}(t)) a(t) dt \rightarrow 0 \forall a(\cdot) \in C([t_0, t_1]) \right).$$

Pero en este caso, debido a la compacidad  $\{x_n(\cdot)\}$ , a la continuidad y casi regularidad de  $L$ , a las estimaciones  $|\dot{x}_n(t)| \leq A$ ,  $|\dot{\hat{x}}(t)| \leq A$  y a la débil convergencia de  $\{\dot{x}_n(\cdot)\}$  hacia  $\dot{\hat{x}}(\cdot)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x_n(\cdot)) - \mathcal{J}(x(\cdot)) & \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} (L(t, x_n(t), \dot{x}(t)) - L(t, \hat{x}(t), \\ & x(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} (L(t, x_n(t), \dot{x}_n(t)) - L(t, x_n(t), \\ & \dot{\hat{x}}(t)) + L(t, x_n(t), \dot{\hat{x}}(t)) - L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))) dt \geq \\ & \geq \int_{t_0}^{t_1} (\dot{x}_n(t) - \dot{\hat{x}}(t)) L_x(t, x_n(t), \dot{\hat{x}}(t)) dt + r_n = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} (\dot{x}_n(t) - \dot{\hat{x}}(t)) \\ & (L_x(t, x_n(t), \dot{\hat{x}}(t)) - L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) + L_x(t, \hat{x}(t), \\ & \dot{\hat{x}}(t))) dt = \rho_n + \rho'_n + r_n, \quad |\rho_n| \rightarrow 0, \quad |\rho'_n| \rightarrow 0, \\ & |r_n| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(x_n(\cdot)) = \mathcal{J}(\hat{x}(\cdot))$ , es decir,  $\hat{x}(\cdot)$  es la solución del problema.  $\triangleright$

Durante largo tiempo en el cálculo de variaciones se comparaban los métodos clásicos basados en la deducción y el análisis de las ecuaciones de Euler y la construcción de soluciones mediante pasos límites (en este caso desempeñan un papel muy importante los teoremas de existencia).

El teorema que acabamos de demostrar permite analizar, en principio, el problema elemental del c.c.v. utilizando los métodos clásicos y prescindiendo de la teoría de condiciones suficientes [AGT, pág. 199]. En lo que concierne a las realizaciones numéricas de los métodos directos, en el cálculo de variaciones desde hace mucho tiempo se emplean los métodos de Ritz y Galerkin [4].

## § 12. Problemas diferentes

### 12.1. Problema de aterrizaje suave de un aparato cósmico

Examinemos el problema de aterrizaje suave de un aparato cósmico en una superficie plana de un cuerpo celeste privado de atmósfera. Como ejemplo de tal cuerpo puede servir la Luna.

Supongamos que el aparato cósmico describe una trayectoria rectilínea perpendicular a la superficie del cuerpo celeste; donde  $m(t)$  es la masa del aparato en el momento  $t$ ; y  $x(t)$ , la distancia desde ese aparato hasta la superficie del cuerpo. Sobre el aparato cósmico actúa la fuerza de la gravedad  $\gamma m$  y la fuerza de tracción  $ku$ . Supongamos que los coeficientes  $\gamma > 0$  (aceleración de la gravedad) y  $k$  (aceleración de la fuerza de tracción) son constantes; sobre el control  $u$  se superpone la restricción  $0 \leq u \leq U$ . Entonces, conforme a la segunda ley de Newton, la dinámica del vuelo podrá ser descrita por las ecuaciones

$$m\ddot{x} = ku - \gamma m, \quad \dot{m} = -u, \quad 0 \leq u \leq U. \quad (*)$$

Planteémonos la tarea de aterrizar suavemente gastando la cantidad mínima de combustible (sin fijar el tiempo invertido en el aterrizaje). Eso conduce a la siguiente formalización (denotemos  $x(t)$  por  $x_1$ ;  $\dot{m}(0)$ , por  $x_2$ ;  $m(0)$ , por  $m_0$ ; y el tiempo invertido en el aterrizaje, por  $T$ ):

$$\begin{aligned} m_0 - m(T) \rightarrow \inf; \quad \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = (ku/m) - \gamma, \\ \dot{m} &= -u, \quad x_1(0) = \xi_1 > 0, \quad x_2(0) = \xi_2, \quad m(0) = m_0, \\ x_1(T) &= x_2(T) = 0, \quad 0 \leq u \leq U. \end{aligned}$$

Efectivamente, la diferencia entre la masa inicial y la masa final equivale a la cantidad de combustible consumido; los números  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$  y  $m_0$  caracterizan las posiciones iniciales y la masa primaria del aparato; y las relaciones  $x_1(T) = x_2(T) = 0$  significan que el aterrizaje ha sido suave: el aparato aterrizó en el punto necesario a velocidad nula.

Hemos llegado al problema de control óptimo. Escribimos la función de Lagrange:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \lambda_0(m_0 + m(T)) + \int_0^T & (p_1(\dot{x}_1 - x_2) + \\ & + p_2(\dot{x}_2 - \frac{ku}{m} + \gamma) + p_3(m + u)) dt + \mu_1 x_1(T) + \mu_2 x_2(T). \end{aligned}$$

Las condiciones de contorno que no llevan información y que se hallan en el extremo izquierdo no han sido incluidas en la función de Lagrange.

Por condiciones necesarias entendemos:

a) las ecuaciones de Euler

$$-\dot{p}_1 = 0, \quad -\dot{p}_2 - p_1 = 0, \quad -\dot{p}_3 + p_2 \frac{ku}{m^2} = 0;$$

b) la transversalidad en  $x$

$$p_1(T) = -\mu_1, \quad p_2(T) = -\mu_2, \quad p_3(T) = \lambda_0;$$

c) la optimidad en  $u$

$$\min_{0 \leq u \leq U} \left( p_3(t)u - p_2(t) \frac{ku}{m(t)} \right) = p_3(t) \hat{u}(t) - p_2(t) \frac{k\hat{u}(t)}{m(t)};$$

d) la estacionaridad en  $T$

$$-\lambda_0 \dot{m}(T) - \mu_1 \dot{x}_1(T) + \mu_2 \dot{x}_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 \hat{u}(T) - p_2(T) \left( \frac{k\hat{u}(T)}{m(T)} - \gamma \right) = 0.$$

De a) se deduce que

$$p_1(t) = p = \text{const.}, \quad p_2(t) = -pt + q, \quad (1)$$

$$q = \text{const.}$$

Denotemos  $\psi(t) = -p_3(t) + kp_2(t)/m(t)$ . Entonces, de a) obtenemos

$$\dot{\psi}(t) = -kp/m(t). \quad (2)$$

De la condición de estacionaridad en  $T$  llegamos a la igualdad

$$\psi(T) \hat{u}(T) = p_2(T) \gamma, \quad (3)$$

y de la optimidad en  $u$  hallamos

$$0 \text{ con } \psi(t) < 0,$$

$$\hat{u}(t) =$$

$$U \text{ con } \psi(t) > 0.$$

Si  $p = 0$ , de (2) se deduce que  $\psi(t) = \text{const.}$  En este caso  $\psi_0 \neq 0$ , de lo contrario, de (1) y (3) resultaría que  $p_2 \equiv 0$  y todos los factores de Lagrange serán ceros. Por eso  $\hat{u}(t) \equiv 0$ , o bien  $\hat{u}(t) \equiv U$ . Pero si  $p \neq 0$ , la función  $\psi$  será estrictamente monótona y, por lo tanto, tendremos la única conmutación de  $\hat{u}(t) \equiv 0$  a  $\hat{u}(t) \equiv U$  o, al revés, de  $\hat{u}(t) \equiv 0$  a  $\hat{u}(t) \equiv U$ . No obstante, es fácil comprender que el primer caso es imposible, ya que la aeronave no podrá aterrizar con el motor desconectado. Por consiguiente, sólo quedan dos posibilidades: o moverse sin conmutaciones de  $\hat{u}(t) \equiv U$ , o bien realizar una conmutación de cero a  $U$ .

Sea  $\tau$  el momento de conmutación. En este caso el movimiento del aparato con  $t \leq \tau$  se establece a base de las fórmulas de caída libre:

$$x_1 = \xi_1 + \xi_2 t - \gamma t^2/2, \quad x_2 = \xi_2 - \gamma t, \quad m(t) \equiv m_0.$$

En el plano fásico  $(x_1, x_2)$  estas relaciones determinan la parábola  $x_1 = \xi_1 + \xi_2 (\xi_2 - x_2)/\gamma - (\xi_2 - x_2)^2/2\gamma$ . El movimiento del aparato en el tramo  $[\tau, T]$  está determinado por las ecuaciones (\*), donde  $u(t) \equiv U$ .  $x_1(\tau) = \xi_1$ ,  $x_2(\tau) = \xi_2$ ,  $m(\tau) = m_0$ .

La solución correspondiente al problema de Cauchy es ( $\tau + \alpha = t$ ):

$$x_1(\tau + \alpha) = \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 \alpha - \frac{1}{2} \gamma \alpha^2 + k \alpha + \frac{km_0}{U} \left(1 - \frac{U\alpha}{m_0}\right) \ln \left(1 - \frac{U\alpha}{m_0}\right),$$

$$x_2(\tau + \alpha) = \bar{\xi}_2 - \gamma \alpha - k \ln \left(1 - U\alpha/m_0\right),$$

$$m = m_0 - U\alpha.$$

El conjunto de puntos  $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$  a partir de los cuales se puede llegar al origen de las coordenadas conectando el motor a plena potencia, se ofrece paraméricamente en forma de las ecuaciones  $x_1(\alpha) = x_2(\alpha) = 0$ . Excluyendo de estas últimas el parámetro  $\alpha$ , obtenemos la curva  $\Psi(\xi_1, \xi_2)$ . Así llegamos a la siguiente respuesta definitiva: *durante el tiempo  $\tau$  determinado por la primera raíz positiva de la ecuación*

$$\Psi(\xi_1 + \xi_2 \tau - \gamma \tau^2/2, \xi_2 - \gamma \tau) = 0, \quad (4)$$

*es necesario dejar que el aparato se mueva libremente y conectar después el empuje de reacción a plena potencia. Si con los valores dados de  $(\xi_1, \xi_2)$ , la ecuación (4) no tiene solución, el aterrizaje suave será imposible.* (Dicho problema se analiza detalladamente en el libro de A.M. Létoy «Dinámica del vuelo y su control.» Moscú, Naúka, 1969.) También se ofrecen muchos problemas interesantes de la teoría de control óptimo en la obra de Lie E.B. y Marcus L. «Fundamentos de la teoría de control óptimo» (Moscú, Naúka, 1972).

## 12.2. Problema de Goddard

Las cuestiones que aquí se analizan se refieren a un solo problema de la dinámica coheteril. El movimiento de un cohete manejado en un campo homogéneo se describe por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\dot{x} = v, \quad v = P\omega/m + g, \quad \dot{m} = -P/k.$$

Aquí  $x, v \in \mathbb{R}^3$  son los vectores de posición y velocidad del cohete;  $\omega$ , es un vector unitario en  $\mathbb{R}^3$ ;  $P$ , el valor del empuje de reacción del cohete;  $m$ , su masa;  $g$ , el valor vectorial que caracteriza el campo de gravedad (en nuestro caso, es decir, en el caso de campo homogéneo, el mismo es un valor constante); y  $k$  es una constante que refleja la dependencia existente entre el consumo de combustible y el empuje de reacción).

Sea  $u = P\omega/m$ . De la ecuación  $\dot{m} = -P/k$  obtenemos  $\omega(m/m) = -u/k$ . Multiplicando por  $\omega$  ambos miembros de la última ecuación y teniendo en cuenta que  $\omega$  y  $u$  son proporcionales, obtenemos

$$\frac{\dot{m}}{m} = -\frac{|u|}{k} \Rightarrow m(T_0) = m(0) \exp\left(-\frac{1}{k} \int_0^{T_0} |u| dt\right).$$

Supongamos que en el momento inicial  $t = 0$  conocemos la posición, la velocidad y la masa inicial del cohete. Debemos saber cómo manejar este último para que el mismo alcance, en un momento fijo  $T_0$ , un punto determinado con una velocidad dada y consumiendo la cantidad mínima de combustible. Es fácil comprender que dicho problema conduce a la siguiente formalización:

$$\int_0^{T_0} |u| dt \rightarrow \inf; \quad \ddot{x} = u + g, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0,$$

$$x(T_0) = x_1, \quad \dot{x}(T_0) = v_1. \quad (\text{Pr})$$

En el proceso de solución no importa que  $x$  pertenezca a  $\mathbf{R}^3$ . En lo sucesivo consideraremos que todos los vectores  $x$ ,  $g$ ,  $\dot{x}$  se encuentran en el espacio  $\mathbf{R}^n$ .

Resolvamos tal problema aplicando el método de dualidad y reduciéndolo al problema de Liapunov. En virtud de que  $\ddot{x} = u + g$  tenemos

$$\dot{x}(t) = v_0 + \int_0^t (u + g) d\tau \Rightarrow v_1 = v_0 + \int_0^{T_0} u dt + gT_0,$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \dot{x} d\tau \Rightarrow x_1 = x_0 + v_1 T_0 = \frac{gT_0^2}{2} + \int_0^{T_0} t u dt.$$

Así pues, hemos llegado al problema de Liapunov

$$\int_0^{T_0} |u| dt \rightarrow \inf; \quad \int_0^{T_0} u dt = \eta, \quad \int_0^{T_0} t u dt = \xi,$$

donde

$$\xi = x_0 - x_1 + v_1 T_0 - \frac{gT_0^2}{2}, \quad \eta = v_1 - v_0 - gT_0.$$

Designemos por  $S(\xi, \eta)$  el valor del problema. Naturalmente que  $S$  está determinada y es finita (y, por consiguiente, es continua) en todo  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ . Apliquemos el método de dualidad. Tenemos

$$S^*(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{(\xi, \eta)} (\langle \xi, p \rangle + \langle \eta, q \rangle -$$

$$- S(\xi, \eta)) = \sup_{(\xi, \eta)} (\langle \xi, p \rangle + \langle \eta, q \rangle - \inf \left\{ \int_0^{T_0} |u| dt \mid \int_0^{T_0} u dt = \eta,$$

$$\int_0^{T_0} t u dt = \xi \right\}) = \sup_{u(\cdot)} \left( \int_0^{T_0} (t \langle u(t), p \rangle + \langle u(t), q \rangle -$$



$$\begin{aligned}
 -u(t) \Big| \Big) dt) &= \int_0^{T_0} \sup_u (\langle u, tp+q \rangle - |u|) dt = \\
 &= \begin{cases} 0, & |tp+q| \leq 1 \forall t \in [0, T_0], \\ +\infty, & \exists \tau \in [0, T_0], \text{ tal que} \\ & |\tau p+q| > 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Describamos el conjunto  $A$  de pares  $(p, q)$  para los cuales  $|tp+q| \leq 1 \forall t \in [0, T_0]$ . Tenemos

$$\begin{aligned}
 tp+q &= \frac{t}{T_0}(T_0 p+q) + \left(1 - \frac{t}{T_0}\right) q \Rightarrow A = \\
 &= \{(p, q) \mid T_0 p+q \leq 1, |q| \leq 1\}.
 \end{aligned}$$

Ahora, valiéndonos del teorema de Fenchel—Moreau podemos hallar inmediatamente el valor numérico del problema (en el cálculo se introduce la designación  $r = T_0 p+q \Leftrightarrow p = (r-q)/T_0$ ):

$$\begin{aligned}
 S(\xi, \eta) &= S^{**}(\xi, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{(p, q)} (\langle \xi, p \rangle + \\
 &+ \langle \eta, q \rangle - S^*(p, q)) = \sup_{(p, q) \in A} (\langle \xi, p \rangle + \\
 &+ \langle \eta, q \rangle) \sup_{|r| \leq 1, |q| \leq 1} \left( \left\langle \xi, \frac{r}{T_0} \right\rangle + \left\langle \eta, \eta - \frac{\xi}{T_0} \right\rangle \right) = \\
 &= \left| \frac{\xi}{T_0} \right| + \left| \eta - \frac{\xi}{T_0} \right| = \left| \frac{x_1 - x_0}{T_0} - v_1 + \frac{\kappa T_0}{2} \right| + \left| \frac{x_1 - x_0}{T_0} - v_0 - \frac{\kappa T_0}{2} \right|.
 \end{aligned}$$

El control por impulsos

$$\hat{u}(t) = \left( \frac{x_1 - x_0}{T_0} - v_0 - \frac{\kappa T_0}{2} \right) \delta(t) - \left( \frac{x_1 - x_0}{T_0} - v_1 + \frac{\kappa T_0}{2} \right) \delta(t - T_0),$$

donde  $\delta(\cdot)$  es la  $\delta$ -función de Dirac, resulta evidentemente admisible y óptimo:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{T_0} \hat{u}(t) dt &= \eta, & \int_0^{T_0} t \hat{u}(t) dt &= \xi, \\
 \int_0^{T_0} |\hat{u}(t)| dt &= S(\xi, \eta).
 \end{aligned}$$

Precisamente esto proporciona la solución del problema. Es fácil demostrar que en un caso general, cuando los vectores  $\xi$  y  $\eta - \xi/T_0$  tienen distintas direcciones, existe una sola solución del problema (Pr). Sin embargo, en un caso degenerado, cuando ambos vectores  $\xi$  y  $\eta - \xi/T_0$  difieren de cero y tienen la misma dirección, hay tanto controles por impulsión (incluso por un solo impulso) como controles continuos. Este problema también se analiza en el libro «Fundamentos de la teoría de control óptimo» redactado por N.J. Rózov (Moscú, Znaniye, 1973).

### 12.3. Problema de Ulam

En el libro de S. Ulam «Problemas matemáticos no resueltos» (Moscú, Naúka, 1964) se plantea la tarea de «cómo minimizar la suma de las longitudes de los trayectos recorridos por los extremos de un segmento unitario que se desplaza en el plano de una posición dada

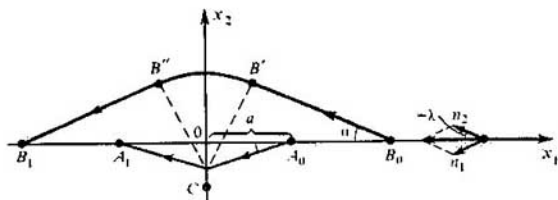


Fig. 4

a otra? Resolvamos un caso particular del problema, cuando es necesario convertir el segmento  $[A_0, B_0]$ ,  $A_0 = (a, 0)$  en segmento  $[A_1, B_1]$ ,  $A_1 = (-a, 0)$  (véase la fig. 4).

Resolvamos ese problema aplicándole el principio de Lagrange. Tenemos la siguiente formalización:

$$\int_0^{\pi} \left( \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} + \sqrt{(\dot{x}_1 - \text{sen } t)^2 + (\dot{x}_2 + \text{cos } t)^2} \right) dt \rightarrow \text{inf};$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(\pi) = \xi_1, \quad x_2(\pi) = \xi_2. \quad (\text{Pr})$$

La funcional en (Pr), como es fácil entender, expresa la suma de las longitudes de los trayectos recorridos por el punto inicial del segmento  $A(t) = (x_1(t), x_2(t))$  y el punto final  $B(t) = (x_1(t) + \text{cos } t, x_2(t) + \text{sen } t)$ . En este caso, el ángulo  $t$  formado por el segmento  $AB$  y el eje  $Ox_1$  varía monótonamente desde cero hasta  $\pi$ . S.V. Búrtsev demostró que para cualquier trayectoria  $H$  de transición del segmento  $A(0)B(0)$  al segmento  $A(\pi)B(\pi)$  y para cualquier  $\varepsilon > 0$  se hallará una trayectoria de tipo circunscrito, cuya funcional puede ser mayor no más que en  $\varepsilon$  de la suma de las longitudes de los trayectos recorridos por los extremos del segmento de la trayectoria  $H$ . Por consiguiente, la solución completa del problema (Pr) también proporcionará la solución del problema de Ulam. El problema (Pr) se reduce al problema de Liapunov:

$$\int_0^{\pi} (|u| + |u - v(t)|) dt \rightarrow \text{inf}; \quad \int_0^{\pi} u dt = \xi,$$

donde  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ ,  $u = \dot{x}$ ,  $v(t) = (\text{sen } t, -\text{cos } t)$ . Supongamos que  $L(t, u) = |u| + |u - v(t)| + \lambda u$  (el caso de  $\lambda_0 = 0$  es imposi-

ble). El principio de mínimo nos da

$$\min_{u \in \mathbb{R}^2} L(t, u) = L(t, \hat{u}) \Rightarrow -\lambda \in \partial_u (|u| + |u - v(t)|) (\hat{u}(t)). \quad (1)$$

De la expresión (1) y la fórmula para la subdiferencial de la suma obtenemos: si  $\hat{u}(t)$  no es igual a cero o a  $v(t)$ , entonces

$$\frac{\hat{u}(t)}{|\hat{u}(t)|} + \frac{\hat{u}(t) - v(t)}{|\hat{u}(t) - v(t)|} = -\lambda. \quad (2)$$

Descifremos la relación (2). Son posibles dos casos:  $|\lambda| < 2$  ó  $|\lambda| = 2$ . En el primer caso, de la relación (2) se deduce que la suma de dos vectores unidades es igual a  $-\lambda$ . A base de ello ambos vectores se determinan unívocamente con una precisión de hasta cambiarlos de lugares.

Así pues, sea  $-\lambda = n_1 + n_2$ . Entonces  $\hat{u}(t)/|\hat{u}(t)|$  será igual a  $n_1$  o a  $n_2$ , es decir, la dirección de la velocidad del primer extremo (a condición de que  $|\lambda| < 2$  y que se muevan ambos extremos) será  $n_1$  o  $n_2$ , mientras que la dirección del segundo extremo será  $n_2$  (si la dirección de la velocidad del punto  $A$  es igual a  $n_1$ ) o  $n_1$  (si la dirección de la velocidad del punto  $A$  es igual a  $n_2$ ). Pero si  $|\lambda| = 2$ , las velocidades de los puntos  $A$  y  $B$  tendrán la misma dirección, lo cual sólo es posible en los casos degenerados, que en nuestro caso particular no se realizan.

Por lo tanto, la dirección de la velocidad del extremo coincidirá con  $n_1$  o  $n_2$ , o bien esa velocidad será igual a cero o a  $v(t)$ .

Ahora es posible resolver el problema de Ulam con arreglo a nuestro caso. El movimiento se muestra en la fig. 4. El extremo izquierdo se mueve describiendo la línea quebrada  $A_0CA_1$ , y el derecho, describiendo el segmento  $B_0B'$ , después el arco  $B'B''$  de radio unitario (en ese momento el extremo izquierdo permanece fijo en el punto  $C$ ) y luego el segmento  $B''B_1$ . Las velocidades de los segmentos se hallan dirigidas a lo largo de los vectores  $n_1$  y  $n_2$  que, junto con el eje  $Ox_1$ , forman un ángulo  $\alpha$  igual a  $\arcsen \frac{1}{2\alpha+1}$  (el lector resolverá fácilmente el referido problema geométrico). Dicha trayectoria satisface el principio de mínimo y, por consiguiente, proporciona un mínimo al problema, ya que para  $\lambda_0 \neq 0$  la condición necesaria es suficiente.

#### 12.4. Teorema de Chébishev sobre la alternancia

En este punto y en el siguiente mostraremos cómo se debe aplicar el teorema de depuración. Demostremos el siguiente resultado.

*Para que el polinomio  $\hat{p}(\cdot)$  de potencia  $\leq n-1$  difiera lo menos posible de la función continua  $x(\cdot)$  en la métrica del espacio  $C([t_0, t_1])$ , es necesario y suficiente que se hallen  $s \geq n+1$  puntos en los que  $x(\cdot) - \hat{p}(t)$  adquiera sucesivamente sus valores máximo y mínimo.*

Recordemos que el polinomio de desviación mínima en el espacio  $C([t_0, t_1])$  se determina a base de la relación

$$\left( \mathcal{P}_n = \left\{ p(\cdot) \mid p(t) = \sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right\} \right)$$

$$\|x(\cdot) - \hat{p}(\cdot)\|_{C([t_0, t_1])} = \min_{p(\cdot) \in \mathcal{P}_n} \|x(\cdot) - p(\cdot)\|_{C([t_0, t_1])}.$$

◁ Necesidad. Es lógico suponer que  $x(\cdot) \in \mathcal{P}_n$ . Examinemos un problema convexo sin acotaciones en  $\mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} f(x) = \max_{t \in [t_0, t_1]} f(t, x) &:= \|x(\cdot) - p(\cdot)\|_{C([t_0, t_1])} := \\ &= \max_{t \in [t_0, t_1]} |x(t) - \sum_{k=1}^n x_k t^{k-1}| \rightarrow \inf. \end{aligned}$$

La función  $f$  es continua y, como es fácil de entender, crece hasta la infinidad. Eso significa que, según el corolario del teorema de Weierstrass, la solución  $\hat{x}$  del problema es real y entonces  $0 \in \partial f(\hat{x})$ . Apliquemos el teorema de depuración. Según este teorema, si  $0 \in \partial f(\hat{x})$ , se hallarán  $s \leq n + 1$  puntos  $t_0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_s \leq t_1$ ,  $s$  números  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  y  $s$  vectores  $y_i \in \partial_x f(\tau_i, \hat{x})$  tales que

$$f(\tau_i, \hat{x}) = \|x(\cdot) - \hat{p}(\cdot)\|_{C([t_0, t_1])}, \quad \sum_{i=1}^s \alpha_i = 1, \quad \sum_{i=1}^s \alpha_i y_i = 0. \quad (1)$$

A consecuencia de que  $f(\tau_i, \hat{x}) \neq 0$ , la subdiferencial  $\partial_x f(\tau_i, \hat{x})$  coincide con la derivada. Diferenciando  $x \rightarrow f(\tau_i, x)$  con arreglo a  $x$  en el punto  $\hat{x}$ , obtenemos

$$y_i = \text{sign}(x(\tau_i) - \hat{p}(\tau_i)) (1, \tau_i, \dots, \tau_i^{n-1}). \quad (2)$$

De las expresiones (1) y (2) se deduce que el sistema

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \alpha_i \text{sign}(x(\tau_i) - \hat{p}(\tau_i)) \tau_i^k &= 0, \\ k &= 0, 1, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (3)$$

tiene una solución no trivial y, por consiguiente,  $s = n + 1$ . Multiplicando la  $k$ -ésima ecuación por  $x_k$  y sumando, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \text{sign}(x(\tau_i) - \hat{p}(\tau_i)) p(\tau_i) = 0 \quad \forall p(\cdot) \in \mathcal{P}_n. \quad (4)$$

Sea  $p_i(\cdot) \in \mathcal{P}_n$ ,  $1 \leq i \leq n$  un polinomio tal que  $p_i(\tau_j) = \delta_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

De la expresión (4) obtenemos

$$\alpha_i \text{sign}(x(\tau_i) - \hat{p}(\tau_i)) + \alpha_{n+1} \text{sign}(x(\tau_{n+1}) - \hat{p}(\tau_{n+1})) p_i(\tau_{n+1}) = 0,$$

es decir,

$\text{sign}(x_i(\tau_i) - \hat{p}(\tau_i)) = -\text{sign}(x(\tau_{n+1}) - \hat{p}(\tau_{n+1})) \text{sign } p_i(\tau_{n+1});$  (5)  
 pero, como es fácil de entender (de la definición de  $p_i(\tau_{n+1})$ ),  $\text{sign } p_i(\tau_{n+1}) = (-1)^{i-n}$ , es decir,  $\text{sign}(x(\tau_{n+1}) - \hat{p}(\tau_{n+1})) = -\text{sign}(x(\tau_n) - \hat{p}(\tau_n)) = \text{sign}(x(\tau_{n-1}) - \hat{p}(\tau_{n-1})) = \dots$ , con otras palabras, la función  $x(\cdot) - \hat{p}(\cdot)$ , alternándose en los puntos  $\{\tau_i\}_{i=1}^{n+1}$ , adopta sus valores máximo y mínimo.

**Suficiencia.** Sea que la función  $x(\cdot) - \hat{p}(\cdot)$ , alternándose en los puntos  $t_0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_s \leq t_1$ ,  $s \geq n+1$ , adopta los valores máximo y mínimo. Si admitimos que, para cierto  $\bar{p}(\cdot) \in \mathcal{P}^n$ ,

$$\|x(\cdot) - \bar{p}(\cdot)\|_{C([t_0, t_1])} < \|x(\cdot) - \hat{p}(\cdot)\|_{C([t_0, t_1])},$$

resultará que los números  $\hat{p}(\tau_i) - \bar{p}(\tau_i)$ , alternándose, serán ora negativos, ora positivos. Pero en este caso la función  $\hat{p}(\cdot) - \bar{p}(\cdot)$  deberá tener  $\geq n$  ceros. Sin embargo, eso es imposible, ya que  $\hat{p}(\cdot) - \bar{p}(\cdot)$  es un polinomio de potencia  $\leq n-1$ . Hemos obtenido una contradicción, de la cual se desprende lo que queríamos demostrar.

## 12.5. Desigualdad de Bernstein

A cualquier polinomio trigonométrico  $x(\cdot)$  de potencia  $n$  le corresponde la desigualdad

$$\|\dot{x}(\cdot)\|_{C(-\pi, \pi)} \leq n \|x(\cdot)\|_{C(-\pi, \pi)}.$$

Dicha desigualdad es exacta y la misma se alcanza en la función  $t \rightarrow A \sin(nt + \varphi)$ .

◁ Analicemos el siguiente problema extremal en  $\mathbb{R}^{2n-1}$ :

$$f_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\dot{x}(0) = -\sum_{h=1}^n kx_h \rightarrow \inf;$$

$$f_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{t \in [-\pi, \pi]} \left| x_0 + \sum_{h=1}^n (x_h \sin kt + x_{h+n} \cos kt) \right| \leq 1$$

( $t = x_0, x_1, \dots, x_{2n}$ ),

$$x(t) = x_0 + \sum_{h=1}^n (x_h \sin kt + x_{h+n} \cos kt). \quad (\text{Pr})$$

Es un problema de programación convexa, ya que las funciones  $f_i$ ,  $i = 1, 2$  son convexas. Del teorema de Weierstrass, así como de la circunstancia de que el conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid f_i(x) \leq 1\}$  es compacto, se deduce que la solución del problema (Pr) es real. Denotémosla por

$\hat{x} \Leftrightarrow \hat{x}(t)$ . Aplicando el teorema de Kuhn — Tucker (punto 2.3) (y teniendo en cuenta que se cumple la condición de Slater), estableceremos el hecho de que existe un número  $\lambda > 0$  con el que la función  $x \rightarrow \mathcal{L}(x, \lambda) := f_0(x) + \lambda(f_1(x) - 1)$  tiene mínimo en  $\hat{x}$ , es decir,  $0 \in \partial_x \mathcal{L}(\hat{x}, \lambda)$ .

Se entiende que  $\lambda \neq 0$ . Del teorema de depuración (punto 8.2) se deduce que existen  $s \leq 2n + 2$  puntos  $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_s$  entre los cuales  $|\hat{x}(\tau_i)| = 1$  y  $s$  números  $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_i > 0, \sum \alpha_i = 1$  son tales que (semejante caso fue examinado más detalladamente en el punto anterior):

$$\lambda \sum_{i=1}^s \alpha_i \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_i) (1, \operatorname{sign} \tau_i, \dots, \cos n\tau_i) - \\ - (0, 1, 2, \dots, n, 0, \dots, 0) = (0, \dots, 0),$$

de donde, multiplicando, respectivamente, por  $x_0, \dots, x_{2n}$ , llegamos a la igualdad

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_i) x(\tau_i) = -\dot{\hat{x}}(0) \forall x(t) = \\ = x_0 + \sum_{k=1}^n (x_k \operatorname{sen} kt + x_{k+n} \operatorname{cos} kt). \quad (1)$$

Por supuesto que  $s \leq 2n$ , ya que en los puntos  $\tau_i \hat{x}(\tau_i)$  el valor de  $\hat{x}$  alcanza su máximo y, por lo tanto,  $\dot{\hat{x}}(\tau_i) = 0$ , mientras que el polinomio  $\hat{x}(\cdot)$  de potencia  $n$  no puede tener más de  $2n$  ceros. Si admitimos que  $s < 2n$ , al valor de  $\{\tau_i\}_{i=1}^s$  le agregaremos el punto cero (que, por lo visto, no figura entre  $\{\tau_i\}$ , ya que de lo contrario el valor del problema (Pr) sería igual a  $\dot{\hat{x}}(0) = 0$ , lo cual es absurdo) y, probablemente, varios puntos más a fin de obtener un sistema  $\{\tau_i\}_{i=1}^s$  de  $2n$  puntos diferentes. Existe el polinomio  $\bar{x}(\cdot)$  de potencia  $n$  cuyos puntos  $\{\tau_i\}_{i=1}^{2n}$  son sus ceros. Entonces  $\bar{x}(0) \neq 0$ , ya que el cero del polinomio de potencia  $n$  con  $2n$  ceros no puede ser múltiple. Ha resultado una contradicción: por una parte  $\bar{x}(0) \neq 0$ , y por otra parte (de la expresión 1)  $\bar{x}(0) = 0$ . Así,  $s = 2n$  y, por lo tanto, el polinomio  $1 - \hat{x}^2(\cdot)$  de potencia  $2n$  tiene raíz doble en cada punto  $\tau_i$ . En esos mismos puntos el polinomio  $\hat{x}^2(\cdot)$  de potencia  $2n$  también tiene raíces dobles. Eso significa que los referidos polinomios son proporcionales. Igualando los coeficientes superiores llegamos a la ecuación  $\hat{x}^2(\cdot) = n^2(1 - \hat{x}^2(\cdot))$ . Integrando esta última obtenemos

$\hat{x}(t) = \text{sen } nt$ . Hemos demostrado que  $|\dot{x}(0)| \leq n \|x(\cdot)\|_{C([- \pi, \pi])}$ . Supongamos que  $(T_{\tau}x)(t) = x(t + \tau)$ ,  $\tau \in [- \pi, \pi]$ . Entonces  $|\dot{x}(\tau)| = \left| \frac{d}{dt} (T_{\tau}x)(0) \right| \leq n \| (T_{\tau}x)(\cdot) \|_{C([- \pi, \pi])} = n \| x(\cdot) \|_{C([- \pi, \pi])}$ .

## 12.6. Problema de excitación de un oscilador

Examinemos el siguiente problema extremal

$$T \rightarrow \inf; \ddot{x} + (1 - \varepsilon u)x = 0, \quad x(0) = \xi_1, \quad \dot{x}(0) = \xi_2, \\ x^2(T) + \dot{x}^2(T) = 1, \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

Aclaremos su contenido físico. La ecuación  $\ddot{x} - s(t)x = 0$  es, en realidad, la ecuación de un oscilador armónico de rigidez variable  $s(\cdot)$ . En nuestro caso la rigidez puede variar dentro de los límites de  $1 - \varepsilon \leq s(t) \leq 1$ . En estado no excitado, cuando  $u = 0$ , la energía del oscilador es igual a  $(x^2 + \dot{x}^2)/2$ . Por consiguiente, el problema consiste en establecer una ley de variación (excitación) tal de la rigidez del oscilador, con la que, después de suprimir dicha excitación, la energía del oscilador alcance un valor dado en el menor tiempo posible.

Denotando  $x = x_1$ ,  $\dot{x} = x_2$  llegamos a la siguiente formalización:

$$T \rightarrow \inf; \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = (-1 - \varepsilon u)x_1, \\ x_1(0) = \xi_1, \quad x_2(0) = \xi_2, \quad x_1^2(T) + x_2^2(T) = 1, \\ 0 \leq u \leq 1.$$

Escribimos la función de Lagrange:

$$\mathcal{L} = \lambda_0 T + \int_0^T (p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 + (1 - \varepsilon u)x_1)) dt + \\ + \frac{\mu}{2} (x_1^2(T) + x_2^2(T)) + \mu_1 x_1(0) + \mu_2 x_2(0).$$

Condiciones necesarias:

- ecuaciones de Euler:  $\dot{p}_1 = (1 - \varepsilon u)p_2$ ,  $\dot{p}_2 = -p_1$ ;
- transversalidad en  $x$ :  $p_1(T) = -\mu x_1(T)$ ,  $p_2(T) = -\mu x_2(T)$ ,  $p_1(0) = \mu_1$ ,  $p_2(0) = \mu_2$ ;
- optimidad en  $u$ :

$$\max_{0 \leq u \leq 1} p_2(t)x_1(t)_u = p_2(t)x_1(t)u(t);$$

$$d) \text{ estacionaridad en } T: 0 = \lambda_0 + \mu(x_1(T)\dot{x}_1(T) + \dot{x}_2(T)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda_0 = -\varepsilon \mu x_1(T)x_2(T)u(T).$$

De la condición c) se deduce que

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } p_2(t) x_1(t) > 0, \\ 0, & \text{si } p_2(t) x_1(t) < 0. \end{cases}$$

Así pues, la conmutación puede ocurrir en los momentos cuando  $x = x_1$  o cuando  $p = p_2$  alcancen los ejes verticales de los planos fásicos  $(x, \dot{x})$  y  $(p, \dot{p})$ .

De la condición a) se deduce que  $x$  y  $p$  satisfacen una misma ecuación:

$$\ddot{y} + (1 - \varepsilon u)y = 0 \quad (1)$$

y, además,

$$p(T) = -\mu x_2(T), \dot{p}(T) = \mu x_1(T). \quad (2)$$

Por supuesto que  $\mu \neq 0$ , ya que, de lo contrario,  $p \equiv 0 \Rightarrow p_1 \equiv 0 \Rightarrow \lambda_0 = \mu_1 = \mu_2 = 0$  será una contradicción (puesto que todos los factores de Lagrange no pueden reducirse simultáneamente a cero). Además,  $u(T-0) = 1$ , ya que, de lo contrario, la energía necesaria se conseguiría en un tiempo inferior a  $T$  (recordemos que cuando  $u = 0$  la energía no varía).

Para precisar el asunto examinemos el caso de  $\mu > 0$  y  $\lambda_0 > 0$ . Entonces, podemos suponer que  $\mu = 1$ . El punto  $(x(T), \dot{x}(T))$  se encuentra, por consiguiente, en la segunda o en la cuarta parte del plano fásico. Para aclarar mejor la cuestión estimemos que en la cuarta parte del plano tenemos  $x(T) = \cos \alpha$ ,  $\dot{x}(T) = \sin \alpha$ ,  $-\pi/2 < \alpha < 0$ . Entonces, en virtud de (1) y (2) y de la igualdad  $\mu = 1$ , obtenemos  $p(T) = -\dot{x}(T) = \cos(\alpha - \pi/2)$ ,  $\dot{p}(T) = x(T) = \sin(\alpha - \pi/2)$ . Por lo tanto, el vector  $(p(T), \dot{p}(T))$  se halla virado respecto al vector  $(x(T), \dot{x}(T))$  a un ángulo de  $\pi/2$  en dirección contraria a las agujas del reloj. Por último, señalemos que para  $u = 0$  los puntos  $(x, \dot{x})$  y  $(p, \dot{p})$  se mueven en el plano fásico describiendo circunferencias y, en estado excitado, describiendo elipses  $x^2 + \dot{x}^2/(1 - \varepsilon) = a$ , y en ambos casos ellos se mueven en sentido de las agujas del reloj.

Ahora resolvamos el problema comenzando por el final y, además, mentalmente dejemos el sistema en estado excitado para un tiempo algo más prolongado después del momento  $T$  hasta que  $x$  se reduzca a cero. Designemos por  $\bar{T}$  ese momento. El punto  $(x(\bar{T}), \dot{x}(\bar{T}))$  se halla dispuesto en el eje vertical. Supongamos que en el momento  $\bar{T}$  el vector  $(p(\bar{T}), \dot{p}(\bar{T}))$  ha ocupado la posición  $p(\bar{T}) = \rho \cos \omega$ ,  $\dot{p}(\bar{T}) = \rho \sin \omega$ ,  $\omega = \omega(\alpha)$ . Posteriormente calcularemos  $\omega(\alpha)$  y resultará que  $\omega(\alpha) > 0$ . Ahora nos moveremos en «dirección contraria». Al principio nuestro oscilador resultará exci-



tado y los puntos  $(x, \dot{x})$ ,  $(p, \dot{p})$  se moverán describiendo elipses. El vector  $(p, \dot{p})$  alcanzará primero el eje vertical y en ese momento el punto  $(x, \dot{x})$  formará con el eje  $x$  un ángulo igual a  $-\omega(\alpha)$ . En ese mismo instante se efectuará la última conmutación e inmediatamente después de ella (si el movimiento se realiza en sentido contrario) la rigidez resultará igual a la unidad y ambos vectores realizarán movimiento circular. Al seguir moviéndose en dirección contraria a las agujas del reloj, el vector  $(x, \dot{x})$  alcanzará primero el eje vertical y en ese momento se efectuará la penúltima conmutación. A su vez, en ese mismo momento el vector  $(p, \dot{p})$  formará con el eje horizontal un ángulo igual a  $-\omega(\alpha) + \pi$ , etc.

Por consiguiente, siempre que la trayectoria física atraviese el eje vertical, la rigidez variará de  $1 - \varepsilon$  a  $1$ , y cuando dicha trayectoria atraviese la recta  $\dot{x} = -\operatorname{tg} \omega(\alpha) x$ , la rigidez variará de  $1$  a  $1 - \varepsilon$ . Sólo queda calcular  $\omega(\alpha)$ . Cerca del punto  $t = T$  la función  $x(\cdot)$  tiene el siguiente aspecto:

$$x(t) = A \cos(\sqrt{1-\varepsilon}(t-T) - \gamma),$$

de donde, utilizando las igualdades  $x(T) = \cos \alpha$ ,  $\dot{x}(T) = \operatorname{sen} \alpha$ , obtenemos:

$$A = \frac{\sqrt{1-\varepsilon} \cos^2 \alpha}{1-\varepsilon}, \quad \operatorname{sen} \gamma = -\frac{\operatorname{sen} \alpha}{A \sqrt{1-\varepsilon}}, \quad \cos \gamma = \frac{\cos \alpha}{A}.$$

Análogamente, cerca del punto  $t = T$  la función  $p(\cdot)$  tiene el aspecto siguiente:

$$p(t) = B \cos(\sqrt{1-\varepsilon}(t-T) + \delta),$$

$$B = \frac{\sqrt{1-\varepsilon} \operatorname{sen}^2 \alpha}{\sqrt{1-\varepsilon}}, \quad \operatorname{sen} \delta = -\frac{\cos \alpha}{B \sqrt{1-\varepsilon}}, \quad \cos \delta = -\frac{\operatorname{sen} \alpha}{B}.$$

El momento  $\tau$  de la última conmutación se deduce de la siguiente condición:

$$p(\tau) = 0, \quad \dot{p}(\tau) > 0 \Rightarrow \sqrt{1-\varepsilon}(\tau-T) + \delta = -\pi/2 \Rightarrow x(\tau) = A \operatorname{sen}(\gamma - \delta) = \frac{1}{B \sqrt{1-\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon} \operatorname{sen}^2 \alpha},$$

$$\dot{x}(\tau) = A \sqrt{1-\varepsilon} \cos(\gamma - \delta) = \frac{\varepsilon \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{B \sqrt{1-\varepsilon}} = \frac{\varepsilon \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\sqrt{1-\varepsilon} \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

y, por consiguiente,

$$\operatorname{tg} \omega(\alpha) = -\frac{\dot{x}(\tau)}{x(\tau)} = -\varepsilon \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha.$$

Aquí finaliza la construcción del cuadro físico.

El referido problema fue examinado en el artículo de Yu. G. Evtushenko «Cálculo aproximado de problemas de control óptimo». PMM, 34, 1 (1970), págs. 95—104; véase también [11], págs. 435—439.

### 12.7. Reducción de la forma cuadrática a los ejes principales

Supongamos que  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  es una matriz simétrica

$$(a_{ij} = a_{ji}) \text{ y que } Q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \langle Ax, x \rangle$$

es la forma cuadrática correspondiente a esa matriz.

**Teorema.** En el espacio  $\mathbb{R}^n$  existe una base ortonormalizada  $f_1, \dots, f_n$  en la que la forma cuadrática  $Q$  admite la representación

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, f_i \rangle^2.$$

En la base  $f_1, \dots, f_n$  la matriz de forma  $Q$  es diagonal. Las direcciones de los vectores  $f_i$  se llaman *ejes principales de forma  $Q$* , mientras que el paso a la base  $f_i$  se denomina *reducción de la forma a los ejes principales*.

◁ A). Examinemos el primer problema extremal:

$$Q(x) = \langle Ax, x \rangle \rightarrow \sup; \langle x, x \rangle = 1. \quad (\text{Pr}_1)$$

La solución  $\hat{x} = f_1$  del problema  $(\text{Pr}_1)$  existe en virtud del teorema de Weierstrass, ya que la esfera  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, x \rangle = 1\}$  es un compacto en  $\mathbb{R}^n$ , y la función  $Q(x)$  es continua. En este caso  $\langle f_1, f_1 \rangle = 1$  y la función de Lagrange del problema  $(\text{Pr}_1)$  tendrá el siguiente aspecto:

$$\mathcal{L} = -\lambda_0 \langle Ax, x \rangle + \lambda_1 (\langle x, x \rangle - 1).$$

La condición de extremo necesaria es, en realidad, la condición de estacionaridad

$$\hat{\mathcal{L}}_x = 0 \iff -\lambda_0 A f_1 + \lambda_1 f_1 = 0.$$

Si  $\lambda_0 = 0$ , entonces  $\lambda_1 \neq 0$  (ya que no todos los factores de Lagrange son ceros) y de la condición de estacionaridad obtendremos  $f_1 = 0$ , lo cual contradice la condición  $\langle f_1, f_1 \rangle = 1$ . Por lo tanto,  $\lambda_0 \neq 0$ . Supongamos que  $\lambda_0 = 1$ . En este caso, de la condición de estacionaridad se deduce que  $A f_1 = \lambda_1 f_1$ , es decir,  $f_1$  es un vector propio de la matriz  $A$  y  $Q(f_1) = \langle A f_1, f_1 \rangle = \lambda_1 \langle f_1, f_1 \rangle$ .

B) Seguidamente procedemos del siguiente modo. Examinemos el segundo problema extremal

$$Q(x) = \langle Ax, x \rangle \rightarrow \sup; \langle x, x \rangle = 1, \langle x, f_1 \rangle = 0. \quad (\text{Pr}_2)$$

La solución  $\hat{x} = f_2$  del problema  $(\text{Pr}_2)$  existe en virtud del teorema de Weierstrass, ya que el conjunto  $B \cap L_1$  es compacto ( $L_1 =$

$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, f_1 \rangle = 0\}$ . Además,  $\langle f_2, f_2 \rangle = 1$ ,  $\langle f_2, f_1 \rangle = 0$ . La función de Lagrange del problema (Pr<sub>2</sub>) es  $\mathcal{L} = -\lambda_0 \langle Ax, x \rangle + \lambda_2 (\langle x, x \rangle - 1) + 2\mu \langle x, f_1 \rangle$ .

La condición de extremo necesaria es la condición de estacionariedad

$$\hat{\mathcal{L}}_x = 0 \Leftrightarrow -\lambda_0 A f_2 + \lambda_2 f_2 + \mu f_1 = 0.$$

Multiplicando escalarmente por  $f_1$  la última igualdad, obtenemos

$$\begin{aligned} \mu &= \lambda_0 \langle A f_2, f_1 \rangle = \lambda_0 \langle f_2, A f_1 \rangle = \\ &= \lambda_0 \lambda_1 \langle f_2, f_1 \rangle = 0. \end{aligned}$$

El hecho de que  $\lambda_0 \neq 0$  ahora también podrá ser demostrado igual que en el primer problema. Supongamos que  $\lambda_0 = 1$ . En este caso, tomando en consideración la igualdad  $\mu = 0$ , de la condición de estacionariedad se deducirá que  $A f_2 = \lambda_2 f_2$ , es decir,  $f_2$  es un vector propio de la matriz  $A$  y  $Q(f_2) = \langle A f_2, f_2 \rangle = \lambda_2 \langle f_2, f_2 \rangle$ .

C) Después, examinando el tercer problema

$$\begin{aligned} Q(x) = \langle Ax, x \rangle \rightarrow \sup; \quad \langle x, x \rangle = 1, \quad \langle x, f_i \rangle = 0, \\ i = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (\text{Pr}_3)$$

obtendremos el tercer vector propio  $f_3$  y, procediendo análogamente, llegaremos a la base ortonormalizada  $\{f_i\}_{i=1}^n$  de los propios vectores de la matriz  $A$  con sus propios números  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ .

Entonces

$$\begin{aligned} x = \sum_{i=1}^n \langle x, f_i \rangle f_i \Rightarrow Ax = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x, f_j \rangle f_j \Rightarrow Q(x) = \langle Ax, x \rangle = \\ = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x, f_j \rangle f_j \sum_{i=1}^n \langle x, f_i \rangle f_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, f_i \rangle^2. \quad \triangleright \end{aligned}$$

## Problemas

En los problemas 1—10 es necesario examinar las aplicaciones sobre la diferenciabilidad según Frechet y hallar las derivadas en el caso de dicha diferenciabilidad.

1.  $f: X \rightarrow Y$ ,  $f(x) = Ax$ ;  $X, Y$  son espacios normalizados,  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ .

2.  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1^2 + x_2^2)$ ,  $\hat{x} = (1, 2)$ .

$H$  es el espacio de Hilbert en los problemas 3—5.

3.  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \langle x, x \rangle$ .

4.  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

5.  $f: H \setminus \{0\} \rightarrow H$ ,  $f(x) = x' \|x\|$ .

6.  $f: \mathcal{L}_2([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x(\cdot)) = \int_0^1 x^3(t) dt$ .

7.  $f: \mathcal{L}_2([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x(\cdot)) = \left( \int_0^1 x^2(t) dt \right)^3$ .

8.  $f: C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x(0)$ .

9.  $f: C(0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x(\cdot)) = x^2(1)$ .

10.  $f: C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x(\cdot)) = \text{sen } x(1)$ .

En los problemas 11—12 señalar los puntos donde las funciones  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  no son diferenciables según Frechet.

11.  $f(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ .

12.  $f(x) = \sum_{j=1}^n |x_j|$ .

En los problemas 13—19 hallar la norma de la funcional lineal continua  $x^*$  en el espacio  $X$ .

13.  $X = C([0, 1])$ ,  $\langle x^*, x(\cdot) \rangle = \int_0^1 x(t) \text{sen } \pi t dt - x\left(\frac{1}{2}\right)$ .

14.  $X = C([0, 1])$ ,  $\langle x^*, x(\cdot) \rangle = -x(0) + \int_{1/2}^1 x(t) dt$ .

15.  $X = C([0, 1])$ ,  $\langle x^*, x(\cdot) \rangle = x(0) + 3 \int_0^1 x(t) dt - 4x(1)$ .

16.  $X = l_2$ ,  $\langle x^*, x \rangle = x_1/2 + x_2/4 + \dots + x_n/2^n + \dots$ .

17.  $X = l_2$ ,  $\langle x^*, x \rangle = (x_1 - x_2)/2 + (x_3 - x_4)/2^2 + \dots + (x_{2n-1} - x_{2n})/2^n + \dots$ .

$$18. X = \mathcal{L}_2([0, 1]), \langle x^*, x(\cdot) \rangle = \int_0^1 x(t) \operatorname{sen} \pi t \, dt,$$

$$19. X = \mathcal{L}_2([0, 1]), \langle x^*, x(\cdot) \rangle = \int_0^{1/2} xt = -2 \int_{1/2}^1 x(t) \, dt.$$

20.  $\epsilon \Lambda : I_2 \rightarrow I_2$ ,  $\Lambda x = (x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots)$ ,  $\Lambda^* = ?$   
 En los problemas 21–28 hallar los conjuntos tangentes  $T_x M$  o  $T_x^+ M$  al

conjunto  $M$  en el punto  $\hat{x}$ .

$$21. \epsilon M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_+^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}, \hat{x} = (0, 1), T_x M, T_x^+ M = ?$$

$$22. \epsilon M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_+^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}, \hat{x} = (0, 0), T_x M, T_x^+ M = ?$$

$$23. \epsilon M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 \leq x_2^2\}, \hat{x} = (0, 0), T_x M = ?$$

$$24. \epsilon M = \{x(\cdot) \in C([0, 1]) \mid \int_0^1 \operatorname{sen} x(t) \, dt = \frac{2}{\pi}, \hat{x}(t) = \pi t, T_x M = ?$$

$$25. \epsilon M = \{x(\cdot) \in C([0, 1]) \mid \operatorname{sen} x(0) = \cos x(1) = 0\}, \hat{x} = \pi t/2, T_x M = ?$$

$$26. M \text{ es un conjunto de números racionales, } \epsilon T_x M = ?$$

$$27. \epsilon M = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\} \subset \mathbb{R}, \hat{x} = 0, T_x^+ M = ?$$

$$28. \epsilon M = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right\} \subset \mathbb{R}, \hat{x} = 0, T_x M = ?$$

$$29. xy + 50/x + 20/y \rightarrow \text{extr.}$$

$$30. x^2 - y^2 - 4x + 6y \rightarrow \text{extr.}$$

$$31. 3x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 12y \rightarrow \text{extr.}$$

$$32. x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 + x_1 - 2x_3 \rightarrow \text{extr.}$$

$$33. 3x_1 x_2 - x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 \rightarrow \text{extr.}$$

$$34. e^{xy} \rightarrow \text{extr}; x + y = 1.$$

$$35. xy^2 z^3 \rightarrow \text{extr}; x + y + z = 1.$$

$$36. xyz \rightarrow \text{extr}; x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

$$37. \sum_{i=1}^n x_i^2 \rightarrow \text{extr}; \sum_{i=1}^n x_i^4 \leq 1.$$

$$38. 2x_1^2 + 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 \rightarrow \text{extr}; 8x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leq 40, 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, x_2 \geq 0.$$

$$39. e^{x_1 - x_2} - x_1 - x_2 \rightarrow \text{extr}; x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$40. 3x_1^2 - 11x_1 - 3x_2 - x_3 \rightarrow \text{extr}; x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 7 \leq 0, 5x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2, x_3 \geq 0.$$

$$41. x^2 + xy + y^2 + 3|x + y - 2| \rightarrow \text{inf.}$$

$$42. x^2 + y^2 + 2\max(x, y) \rightarrow \text{inf.}$$

$$43. x^2 + y^2 + 2\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \rightarrow \text{inf.}$$

$$44. x^2 + y^2 + 2\alpha|x + y - 1| \rightarrow \text{inf} (\alpha > 0).$$

$$45. \text{Hallar la distancia desde el punto } (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \text{ hasta el cono } x_3 \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

46. Inscribir en un círculo unitario un triángulo con la máxima suma de los cuadrados de los lados, ponderada con los pesos positivos.

47. En cada uno de los lados de un triángulo dado hallar un punto tal que el triángulo formado tenga un perímetro mínimo (problema de Schwarz).

48. Hallar en el plano un punto tal que la suma de las distancias desde él hasta tres puntos dados sea la distancia mínima (problema de Steiner).

49. Hallar el valor mínimo de la función lineal en el espacio  $l_2$  situado en la frontera de un elipsoide cuyas longitudes de sus ejes tienden monótonamente a cero. ¿Tendrá una normal cualquier punto de la frontera del elipsoide, es decir, podrá el mismo servir de punto extremo de la funcional lineal?

50. Dividir el número 8 en dos partes, de tal modo que el producto de su multiplicación por la diferencia sea el producto máximo (problema de Tartaglia).

51. Hallar el triángulo rectángulo de mayor área, si la suma de las longitudes de sus catetos es igual a un número dado (problema de Fermat) (en 1638 Fermat ilustró, valiéndose de ese problema, su método de obtención de mínimos, conocido con el nombre de teorema de Fermat).

52. En el lado  $BC$  del triángulo  $ABC$  hallar un punto  $E$ , de tal modo que el paralelogramo  $ADEF$ , cuyos puntos  $D$  y  $F$  se encuentran respectivamente en los lados  $AB$  y  $AC$ , tenga el área más grande (problema de Euclides). (Es el único problema de extremo examinado en los «Elementos» de Euclides.)

53. Problema del polinomio de Legendre de segundo orden:

$$\int_{-1}^1 (t^2 + x_1 t + x_2)^2 dt \rightarrow \inf.$$

54. Entre todas las magnitudes discretas aleatorias capaces de adoptar  $n$  valores, hallar el valor aleatorio de máxima entropía. (Entropía del conjunto de números positivos  $p_1, \dots, p_n$  cuya suma es igual a la unidad, se denomina el número

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i).$$

55. Entre los cilindros inscritos en una esfera de radio unidad hallar el cilindro de mayor volumen (problema de Kepler). (Ese problema fue planteado y resuelto geoméricamente por Kepler en «Estereometría de los toneles de vino» en el año 1615.)

56. En la esfera unidad del espacio  $R^n$  inscribir el cilindro de mayor volumen\* (problema generalizado de Kepler).

57. En la esfera unidad del espacio  $R^n$  inscribir el cono de mayor volumen\*.

58. Entre todos los  $n$ -angulares de perímetro determinado hallar el  $n$ -angular de mayor área (problema de Zenodor).

59. En un círculo inscribir un triángulo cuya suma de los cuadrados de sus lados sea máxima.

60. Tenemos un ángulo y un punto dentro de él. Trazar por ese punto un segmento cuyos extremos se hallen en los lados del ángulo, de tal modo que el triángulo obtenido tenga un área máxima.

61. En el problema 60 minimizar el perímetro del triángulo.

62. Hallar el área máxima de un cuadrilátero de lados determinados.

63. Entre los segmentos esféricos que tienen una superficie lateral de área determinada, hallar el segmento de máximo volumen (problema de Arquímedes).

64. En una recta dada hallar un punto  $C$  tal que la suma de las distancias desde  $C$  hasta los puntos  $A$  y  $B$  sea mínima (problema de Herón).

65. Entre todos los tetraedros de base y altura determinadas, hallar el tetraedro de superficie lateral mínima.

66. Entre todos los tetraedros que tienen una superficie de área determinada, hallar el tetraedro de volumen máximo.

\* En los problemas 56 y 57 son posibles distintas formalizaciones relacionadas con diversas concepciones de los términos «cilindro» y «cono». En nuestro caso, de aquí en adelante un cilindro en  $R^n$  significará el producto de una esfera  $(n-1)$ -dimensional por un segmento ortogonal; mientras que un cono en  $R^n$  significará la envoltura convexa de una esfera  $m$   $(n-1)$ -dimensional y su segmento ortogonal.

67. En el plano se dan tres puntos:  $x_1, x_2$  y  $x_3$ . Hallar un punto  $x_0$  tal que la suma de los cuadrados de las distancias desde  $x_0$  hasta  $x_1, x_2, x_3$  sea mínima.

68. En el espacio  $R^n$  se dan  $N$  puntos  $x_1, \dots, x_N$  y  $N$  números positivos  $m_1, \dots, m_N$ . Hallar un punto  $x_0$  tal que la suma ponderada con los pesos  $m_i$  de los cuadrados de las distancias desde  $x_0$  hasta  $x_1, \dots, x_N$  sea mínima.

69. Resolver el problema 68 a condición de que el punto buscado  $x_0$  pertenezca a una esfera unidad.

70. Resolver el problema 68 a condición de que el punto buscado  $x_0$  se encuentre en una esfera unidad.

71. (P) Hallar la distancia desde el punto hasta la elipse. ¿Cuántas normales se pueden trazar desde el punto hasta la elipse (problema de Apolonio)?

72. Resolver el problema de Apolonio con arreglo a una parábola.

73. Hallar la distancia desde el punto hasta el hiperplano en el espacio de Hilbert.

74. Hallar la distancia desde un punto en el espacio  $R^n$  hasta una recta.

75. Hallar el mínimo de la funcional lineal

$$l(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

en una esfera unidad.

76. En la elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  inscribir un rectángulo de área máxima y cuyos lados sean paralelos a los ejes de coordenadas.

En los problemas 77—79 comprobar si es finito el valor numérico del problema y estudiar los puntos dados con arreglo a su optimalidad.

77.  $x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \sup;$   
 $-2x_1 + x_2 + x_3 = 4,$   
 $-x_1 + 2x_2 - x_3 = -1,$   
 $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, x_0 = (0, 1, 3).$

78.  $x_1 + 4x_2 - 7x_3 \rightarrow \sup;$   
 $2x_1 - 2x_2 + 14x_3 = 2,$   
 $x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 0,$   
 $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, x_0 = (2, 1, 0).$

79.  $x_1 + 3x_2 - x_3 = x - x_5 \rightarrow \sup;$   
 $x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 1,$   
 $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1,$   
 $x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 = 3,$   
 $x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5,$   
 $x_0 = (1, 1, 1, 0, 0).$

80.  $2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \rightarrow \sup;$   
 $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 30,$   
 $4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 40,$   
 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 25,$   
 $x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4.$

Resolver los problemas de programación lineal 81—85 recurriendo al método simplex y utilizando el punto dado  $x_0$  en calidad de punto extremo inicial.

81.  $x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \sup;$   
 $x_1 - 2x_2 - x_3 = -1,$   
 $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, x_0 = (1, 1, 0).$

82.  $2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \sup;$   
 $x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4,$   
 $x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1,$   
 $x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4,$   
 $x_0 = (0, 0, 1, 1).$

83.  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \sup;$   
 $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 19,$   
 $x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 = 2,$   
 $x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5,$   
 $x_0 = (0, 0, 1, 2, 0).$

84.  $-2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 + x_6 \rightarrow \text{sup};$   
 $3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 9x_5 + 3x_6 = 15,$   
 $x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 = 5,$   
 $x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6, x_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 4)$
85.  $x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 - 2x_6 + 2x_7 \rightarrow \text{sup};$   
 $x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_6 + x_7 = 7,$   
 $x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_5 + 2x_6 + 3x_7 = 12,$   
 $x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 + 3x_7 = 8,$   
 $x_3 + 3x_4 + x_5 - 2x_6 + x_7 = 4,$   
 $x_i \geq 0, i = 1, \dots, 7, x_0 = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 3).$

86.  $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin t \, dt \rightarrow \text{extr}; |x| \leq 1, x(\mp \pi) = 0.$

87.  $\int_0^{T_0} |x| \, dt \rightarrow \text{inf}; \dot{x} \geq A, x(0) = 0, x(T_0) = \xi (A < 0).$

88.  $\int_0^1 x^2 \, dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 1.$

89.  $\int_0^1 \dot{x}^2 \, dt + \alpha x^2(1) \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0.$

90.  $\int_0^T \dot{x}^2 \, dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, T + x(T) + 1 = 0.$

91.  $\int_0^T \dot{x}^2 \, dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, (T-1)x^2(T) + 2 = 0.$

92.  $\int_0^T \dot{x}^2 \, dt \rightarrow \text{extr}; |x| \leq 1, x(0) = 0, x(1) = \xi.$

93.  $x(2) \rightarrow \text{extr}; |x| \leq 2, \int_0^1 \dot{x}^2 \, dt = 2, x(0) = 0.$

94.  $\int_0^{T_0} \dot{x}^2 \, dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x(T_0) = \xi.$

95.  $\int_0^{3/2} (\dot{x}^2 + 2x) \, dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x\left(\frac{3}{2}\right) = 1.$

96.  $\int_0^T (\dot{x}^2 - \dot{x}^3) \, dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x(T_0) = \xi.$

97.  $\int_0^1 \cos \dot{x} \, dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x(1) = \pi.$



$$98. \int_0^{T_0} \dot{\text{sen}} x dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x(T_0) = \xi.$$

$$99. \int_0^{T_0} \dot{\text{cos}} x dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x(T_0) = \xi.$$

$$100. \int_0^{T_0} \dot{x} e^x dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x(T_0) = \xi.$$

$$101. \int_0^T (\dot{x}^2 + 5x) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x(T_0) = \xi.$$

$$102. \int_0^1 (1 - \dot{x}^2)^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x(1) = \xi.$$

$$103. \int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - \dot{x}x^3) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x(T_0) = 0$$

(examinar la extremal admisible  $\hat{x}(t) = 0$  con arreglo a su extremo).

$$104. \int_0^1 (\dot{x}^2 - 4\dot{x}^2x + 2tx^4) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0,$$

$x(1) = 0$  (examinar la extremal admisible  $\hat{x}(t) = 0$  con arreglo a su extremo).

$$105. \int_0^T \dot{x}^3 dt \rightarrow \text{extr}; T + x(T) = 1, x(0) = 0.$$

$$106. \int_0^T (\dot{x}^2 + x) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 1.$$

$$107. \int_0^T (\dot{x}^2 + x) dt \rightarrow \text{extr}; x(T) = T.$$

$$108. \int_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x(T) = \xi.$$

$$109. \int_0^T (\dot{x}^2 + x) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x(T) = T.$$

$$110. \int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0.$$

$$111. \int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = x(T_0) = 0.$$

112.  $\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x) dt \rightarrow \text{extr}; |\dot{x}| \leq 1, x(0) = 0.$
113.  $\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x) dt \rightarrow \text{extr}; |\dot{x}| \leq 1, x(0) = x(T_0) = 0$
114.  $\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x) dt \rightarrow \text{extr}; |\dot{x}| \leq 1, x(0) = 0.$
115.  $\int_0^T (\dot{x}^2 - x) dt \rightarrow \text{extr}; |\dot{x}| \leq 1, x(0) = 0, x(T) = 0.$
116.  $\int_0^1 (x^2 - \dot{x}^2) e^{2t} dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x(1) = e.$
117.  $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^1 x dt = 1, x(0) = 0.$
118.  $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^1 x dt = 1, x(0) = x(1) = 0.$
119.  $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^1 tx dt = 0, x(0) = 1.$
120.  $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^1 x dt = \int_0^1 tx dx = 0, x(0) = 1.$
121.  $\int_0^T \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^T x dt = 1, x(0) = 3.$
122.  $\int_0^T \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^T x dt = \frac{1}{3}, x(T) = 1.$
123.  $\int_0^\pi \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^\pi x \sin t dt = 1, x(0) = 0.$
124.  $\int_0^\pi \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^\pi x \sin t dt = 1, x(0) = x(\pi) = 0.$
125.  $\int_0^\pi \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^\pi x \cos t dt = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi x \sin t dt = -2, x(0) = 0.$
126.  $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^1 xe^t dt = 1, x(0) = 0.$

$$127. \int_1^2 t^2 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_1^2 tx dt = \frac{7}{3}, x(1)=1, x(2)=2.$$

$$128. \int_0^{e-1} (t+1) \dot{x}^2 dt + 2x(0) [x(e-1)] \rightarrow \text{extr}.$$

$$129. \int_1^2 t^2 \dot{x}^2 dt - 2x(1) + x^2(2) \rightarrow \text{extr}.$$

$$130. \int_1^e (t\dot{x}^2 + 2x) dt \rightarrow \text{extr}; x(1)=0.$$

$$131. \int_1^e (t\dot{x}^2 + 2x) dt \rightarrow \text{extr}; x(1)=x(e)=0.$$

$$132. \int_0^1 (1+t) \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(0)=0, x(1)=1$$

$$133. \int_1^2 t^2 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(1)=3, x(2)=1.$$

$$134. \int_2^3 (t^2-1) \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(2)=0, x(3)=1.$$

$$135. \int_0^1 (t^2 \dot{x}^2 + 12x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0)=0, x(1)=1 \text{ (ejemplo de Hilbert)}$$

$$136. \int_0^1 (\dot{x}^2 + 3x^2) e^{2t} dt \rightarrow \text{extr}; x(0)=1, x(1)=e.$$

$$137. \int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2) dt - 2x(1) \operatorname{sh} 1 \rightarrow \text{extr}.$$

$$138. \int_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x^2) dt + \alpha x^2(T_0) \rightarrow \text{extr}.$$

$$139. \int_1^e 2x(t\dot{x} + x) dt + 3x^2(1) - x^2(e) - 4x(e) \rightarrow \text{extr}.$$

En los problemas de Boltz 140-142 hallar las extremales admisibles

$$140. \int_0^3 4x^2 \dot{x}^2 dt + x^4(0) - 8x(3) \rightarrow \text{extr}.$$

$$141. \int_0^1 e^x \dot{x}^2 dt + 4e^{x(0)} + 32e^{-x(1)} \rightarrow \text{extr.}$$

$$142. \int_0^1 e^{t+1} (\dot{x}^2 + 2x^2) dt + 2x(1)(x(0)+1) \rightarrow \text{extr.}$$

$$143. \int_0^1 x^2 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(0)=1, x(1)=\sqrt[3]{2}.$$

$$144. \int_0^{4/3} \frac{x}{x^2} dt \rightarrow \text{extr}; x(0)=1, x\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{9}.$$

$$145. \int_0^1 e^{-x} \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(0)=0, x(1)=\ln 4.$$

$$146. \int_0^1 (\dot{x}^2 + x\dot{x} + 12tx) dt \rightarrow \text{extr}; x(0)=x(1)=0.$$

$$147. \int_0^1 (\dot{x}^2 - 2x\dot{x} + 2x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(1)=1.$$

$$148. \int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 4xsh t) dt \rightarrow \text{extr}; x(0)=0.$$

$$149. \int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 4xsh t) dt \rightarrow \text{extr}; x(0)=-1, x(1)=0.$$

$$150. \int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2) dt - x^2(1) \rightarrow \text{extr}; x(0)=1.$$

$$151. \int_0^T (\dot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0)=0, x(T)=1.$$

En los problemas 152—153 hallar las extremales admisibles.

$$152. \int_0^T (\dot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(T) + T - 1 = 0.$$

$$153. \int_0^T (\dot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0)=0, T + x(T) + 1 = 0.$$

$$154. \int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2 - 2x) dt - 2x^2(0) - x^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \text{extr.}$$

155.  $\int_0^T (\dot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(T_0) = \xi.$
156.  $\int_0^T (\dot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(T) = \xi.$
157.  $\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \text{extr}; |\dot{x}| \leq 1, x(T_0) = \xi.$
158.  $\int_0^T (\dot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \text{extr}; |\dot{x}| \leq 1, x(T) = \xi.$
159.  $\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x(T_0) = \xi.$
160.  $\int_0^T (\dot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x(T) = \xi.$
161.  $\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \text{extr}; |\dot{x}| \leq 1, x(0) = 0, x(T_0) = \xi.$
162.  $\int_0^T (\dot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \text{extr}; |\dot{x}| \leq 1, x(0) = 0, x(T) = \xi.$
163.  $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^1 xe^t dt = \frac{e^2 + 1}{4}, x(0) = 0, x(1) = e.$
164.  $\int_0^{\pi/4} (\dot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 1.$
165.  $\int_0^{\pi} (\dot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr}; |\dot{x}| \leq 1, x(0) = 0.$
166.  $\int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
167.  $\int_0^{3\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr}; |\dot{x}| \leq 1, x(0) = x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$
168.  $\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr}; |\dot{x}| \leq 1, x(0) = 0.$
169.  $\int_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr}; |\dot{x}| \leq 1, x(0) = x(T_0) = 0.$

$$170. \int_{\pi/4}^{\pi/2} (x^2 - \dot{x}^2 + 4x \operatorname{sen} t) dt \rightarrow \text{extr}; x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$171. \int_0^{\pi/2} (x^2 - x^2 + 4x \operatorname{cost}) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$172. \int_0^{T_0} (x^2 - x^2 - 4x \operatorname{sen} t) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x(T_0) = \xi.$$

$$173. \int_0^{\pi} (x^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^{\pi} x \cos t dt = 1, x(0) = x(\pi) = 0.$$

$$174. \int_0^1 x^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^1 x^2 dt = 1.$$

$$175. \int_0^1 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^1 x^2 dt = 1, \int_0^1 x dt = 0.$$

$$176. \int_0^1 x^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^1 x^2 dt = 1, x(0) = 0.$$

$$177. \int_0^1 x^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^1 x^2 dt = 1, x(0) = x(1) = 0.$$

$$178. \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 1.$$

$$179. \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = x(1) = 1 (x > 0).$$

$$180. \int_0^T \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 1, 2T + x(T) = 2 (x > 0).$$

$$181. \int_0^T \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 1, T - x(T) = 1.$$

$$182. \int_0^T \sqrt{1+x^2} dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, T^2 x(T) = 1.$$

$$183. \int_0^1 x dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dt = \frac{\pi}{2}, x(1) = 0.$$

$$184. (P) \int_{-T_0}^{T_0} x dt \rightarrow \text{extr}; \int_{-T_0}^{T_0} \sqrt{1+x^2} dt = l, x(-T_0) = x(T_0) = 0 \quad (\text{problema de Didon})$$

$$185. \int_{-T_0}^{T_0} x \sqrt{1+x^2} dt \rightarrow \text{extr};$$

$$\int_{-T_0}^{T_0} \sqrt{1+x^2} dt = l, \quad x(-T_0) = x(T_0) = 0.$$

$$186. \int_0^{T_0} x \sqrt{1+x^2} dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(T_0) = \xi.$$

$$187. \int_{-T_0}^{T_0} x \sqrt{1+x^2} dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(T_0) = x(-T_0) = \xi \quad (\text{problema de la mínima superficie de rotación}).$$

$$188. \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x}} dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad (x_0 > 0, \quad x_1 > 0) \quad (\text{problema de la braquistocrona}).$$

$$189. \int_0^{T_0} \sqrt{x+h} \sqrt{1+x^2} dt \rightarrow \text{inf}; \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = \xi.$$

$$190. \int_0^1 \left( \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2} + x_1 x_2 \right) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x_1(0) = x_2(0) = 1.$$

$$191. \int_0^{\pi/2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1 x_2) dt \rightarrow \text{extr}; \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1 \frac{\pi}{2} = 1,$$

$$x_2 \frac{\pi}{2} = -1.$$

$$192. \int_0^1 \dot{x}_1 \dot{x}_2 dt \rightarrow \text{extr}; \quad \int_0^1 x_1 dt = \int_0^1 x_2 dt = 0, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = 1,$$

$$x_2(1) = 2.$$

$$193. \int_0^1 \dot{x}_1 \dot{x}_2 dt \rightarrow \text{extr}; \quad \int_0^1 x_1 dt = 1, \quad x_1(0) = x_1(1) = 0; \quad \int_0^1 x_2 dt = 0,$$

$$x_2(0) = 0, \quad x_2(1) = 1.$$

$$194. \int_0^1 (\dot{x}_1 \dot{x}_2 + x_1 x_2) dt + x_1(0) x_2(1) + x_1(1) x_2(0) \rightarrow \text{extr}.$$

$$195. \int_0^1 (x_1 + x_2) dt \rightarrow \text{extr}; \quad \int_0^1 \dot{x}_1 \dot{x}_2 dt = 0, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = 1,$$

$$x_2(1) = -3.$$

$$196. \int_0^1 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) dt \rightarrow \text{extr}; \quad \dot{x}y - y\dot{x} = 1, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = \text{sen } 1, \quad y(0) = 1,$$

$$y(1) = \text{cos } 1.$$

$$197. \int_0^1 \left( \frac{x^2 + \dot{x}^2}{2} + |\dot{x}| \right) dt \rightarrow \inf; x(1) = \xi.$$

$$198. \int_0^{T_0} (xy - y\dot{x}) dt \rightarrow \sup; x(0) = x(T_0), y(0) = y(T_0), x^2 + y^2 \leq 1,$$

$$199. (P) \int_0^{T_0} \frac{t dt}{1+x^2} \rightarrow \inf; \dot{x} \geq 0, x(0) = 0, x(T_0) = \xi \text{ (problema aerodinámico de Newton).}$$

$$200. \int_0^1 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(1) = \dot{x}(0) = 0, \dot{x}(1) = 1.$$

$$201. \int_0^1 \ddot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = \dot{x}(1) = 0, \ddot{x}(0) = 1.$$

$$202. \int_0^1 \ddot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = \dot{x}(0) = 0, \ddot{x}(1) = 1.$$

$$203. \int_0^1 \ddot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = \dot{x}(1) = 0, \ddot{x}(0) = -1, \ddot{x}(1) = 1.$$

$$204. \int_0^1 (\ddot{x}^2 - 48x) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = x(1) = 0.$$

$$205. \int_0^1 (\ddot{x}^2 - 48x) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = 0.$$

$$206. \int_0^1 (\ddot{x}^2 - 48x) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = \dot{x}(1) = 0.$$

$$207. \int_0^e e^{-t} \ddot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1, x(1) = e, \dot{x}(1) = 2e.$$

$$208. \int_1^e t \ddot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(1) = 0, \dot{x}(1) = 1, \dot{x}(e) = 2.$$

$$209. \int_1^e t \ddot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(1) = 0, \dot{x}(1) = 1, x(e) = e, \dot{x}(e) = 2.$$

$$210. \int_1^e (t+1) t \ddot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(1) = 0, \dot{x}(1) = 1, x(e) = e, \dot{x}(e) = 2.$$



$$211. \int_1^e t^2 \ddot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(1)=0, \dot{x}(1)=1, \dot{x}(e)=\frac{1}{e}.$$

$$212. \int_1^e t^2 \ddot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(1)=0, x(e)=\dot{x}(1)=1, \dot{x}(e)=\frac{1}{e}.$$

$$213. \int_1^e t^2 \ddot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(1)=1, \dot{x}(1)=-1, \dot{x}(e)=-\frac{1}{e^2}.$$

$$214. \int_0^1 (\ddot{x}-x)^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(0)=1.$$

$$215. \int_0^1 (\ddot{x}-x)^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(0)=1, \dot{x}(0)=0.$$

$$216. \int_0^1 (\ddot{x}-x)^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(0)=0, x(1)=\text{ch } 1, \dot{x}(1)=\text{ch } 1 + \text{sh } 1.$$

$$217. \int_0^1 (\ddot{x}-x)^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(0)=\dot{x}(0)=0, x(1)=\text{sh } (1), \dot{x}(1)=\text{ch } (1) +$$

+ sh 1.

$$218. \int_0^{\pi/2} (\ddot{x}+x)^2 dt + x^2(0) \rightarrow \text{extr}.$$

$$219. \int_0^{\pi/2} (\ddot{x}+x)^2 dt + x^2(0) \rightarrow \text{extr}; x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

$$220. \int_0^{\pi/2} (\ddot{x}+x)^2 dt + x^2(0) \rightarrow \text{extr}; x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, x\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

$$221. \int_0^{\pi/2} (\ddot{x}+x)^2 dt + x^2(0) \rightarrow \text{extr}; x\left(\frac{\pi}{2}\right)=\dot{x}(0)=0, \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

$$222. \int_0^1 (x^2 + (\ddot{x} + \sqrt{2x})^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0)=1.$$

$$223. \int_1^e t^2 \ddot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; x(1)=1, \dot{x}(1)=-1, x(e)=\frac{1}{e}, \dot{x}(e)=-\frac{1}{e^2}.$$

$$224. \int_0^{\pi} (\ddot{x}^2 + 4x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0)=\dot{x}(0)=0, x(\pi)=\text{sh } \pi.$$

225.  $\int_0^{\pi} (\ddot{x}^2 + 4x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = x(\pi) = 0, \dot{x}(\pi) = \text{sh } \pi.$
226.  $\int_0^{\pi} (\dot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 1.$
227.  $\int_0^{\pi} (\ddot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr}; \dot{x}(0) = 1.$
228.  $\int_0^{\pi/2} (\ddot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
229.  $\int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr}; \dot{x}(0) = 0, \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
230.  $\int_0^{\pi/2} (\ddot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr}; \dot{x}(0) = \dot{x}(\pi) = 0, x(\pi) = 1,$
231.  $\int_0^{\pi/2} (\ddot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, x(0) = \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$
232.  $\int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$
233.  $\int_0^{\pi} (\ddot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = x(\pi) = 0, \dot{x}(0) = 1, \dot{x}(\pi) = -1.$
234.  $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 0, x(1) = \text{sh } 1, \dot{x}(1) = \text{bh } 1.$
235.  $\int_0^1 (\ddot{x}^2 + x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = 1; \dot{x}(0) = 0, x(1) = \text{ch } 1, \dot{x}(1) = \text{sh } 1.$
236.  $\int_0^{\pi/2} (\ddot{x}^2 - \dot{x}^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = \dot{x}(0) = 0, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
237.  $\int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr}; x(0) = \dot{x}(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
238.  $\int_0^2 x dt \rightarrow \text{extr}; |\dot{x}| \leq 2, x(0) + x(2) = 0, \dot{x}(0) = 0.$
239.  $\int_0^1 x dt \rightarrow \text{extr}; |\dot{x}| \leq 2, x(0) + x(1) = 0, \dot{x}(0) + \dot{x}(1) = 0.$

240.  $\int_0^2 x dt \rightarrow \text{inf}; |\ddot{x}| \leq 2, x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0.$
241.  $\int_0^4 x dt \rightarrow \text{extr}; |\ddot{x}| \leq 2, x(0) + x(4) = 0, \dot{x}(0) = \dot{x}(4) = 0.$
242.  $T \rightarrow \text{inf}; |\ddot{x}| \leq 2, x(-1), x(T) = -1, \dot{x}(-1) = \dot{x}(T) = 0.$
243.  $T \rightarrow \text{inf}; -1 \leq \ddot{x} \leq 3, x(0) = 1, \dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0, x(T) = -1.$
244.  $\int_0^4 x dt \rightarrow \text{extr}; |\ddot{x}| \leq 2, x(0) = x(4) = 0.$
245.  $\int_0^4 x dt \rightarrow \text{extr}; |\ddot{x}| \leq 2, x(0) = \dot{x}(4) = x(4) = 0.$
246.  $\int_0^4 x dt \rightarrow \text{extr}; |\ddot{x}| \leq 2, x(0) = \dot{x}(0) = x(4) = \dot{x}(4) = 0.$
247.  $\int_0^2 |\ddot{x}| dt \rightarrow \text{inf}; \ddot{x} \geq -2, x(0) = 0, x(2) = -1, \dot{x}(2) = -2.$
248.  $\int_0^2 \ddot{x}^2 dt \rightarrow \text{inf}; \ddot{x} \geq 6, x(0) = \dot{x}(0) = 0, x(2) = 17.$
249.  $\int_0^1 x^2 dt \rightarrow \text{inf}; |\ddot{x}| \leq 1, x(0) = \dot{x}(0) = 0, x(1) = -\frac{11}{24}.$
250.  $\int_0^1 \ddot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^1 x dt = 1, x(0) = 0.$
251.  $\int_0^1 \ddot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^1 x dt = 1, x(1) = \dot{x}(0) = 0.$
252.  $\int_0^1 \ddot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^1 x dt = 1, x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(1) = 0.$
253.  $\int_0^1 \ddot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \int_0^1 x dt = 1, x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = \dot{x}(1) = 0.$
254.  $T \rightarrow \text{extr}; \int_0^T \ddot{x}^2 dt = 1, x(0) = \dot{x}(0) = 0, \dot{x}(T) = 1.$
255.  $T \rightarrow \text{extr}; \int_0^T \ddot{x}^2 dt = 1, x(0) = \dot{x}(0) = x(T) = 0, \dot{x}(T) = 1.$

$$256. \dot{x}(1) \rightarrow \text{extr}; \int_0^1 \ddot{x}^2 dt = 4, \quad x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = 0.$$

$$257. \int_0^1 \ddot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0), \quad x(1) = 1.$$

$$258. \int_0^1 x^2 dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

$$259. \int_0^1 \ddot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = \dot{x}(1) = 0, \quad x(1) = 1.$$

$$260. \int_0^1 \ddot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}; \quad x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = \dot{x}(1) = \ddot{x}(1) = 0, \quad x(1) = 1.$$

## Respuestas, indicaciones y soluciones

Con arreglo a la introducción. 1.  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + 2e^{-x_1^2}$ . 2.  $f(x_1, x_2) = \sin x_2 - x_1^2$ . 3.  $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - 3x_2^2)$ .  
4. No. Analizar la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left( 2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Con arreglo al punto 1.1. 1. La función  $N$  proporciona la norma para los siguientes valores de los parámetros: a)  $p \geq 1$ ; b). c)  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ; d)  $a_{11} > 0$ ,  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ . 2. La equivalencia de las normas se deduce de la desigualdad  $\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \sqrt{2}\|x\|_\infty$ . 4. Es preciso suponer que  $\|x\| = \inf \{t > 0 \mid x/t \in B\}$ . 7. Por ejemplo, el espacio de funciones continuas en

el segmento  $[0, 1]$  con la norma  $\|x(\cdot)\| = \left( \int_0^1 x^2(t) dt \right)^{1/2}$  es un espacio normalizado pero no banachiano.

9. No, ya que la funcional no está acotada.

10. a)  $\|x\| = \max \left( \frac{|x_1|}{|a_1|}, \frac{|x_2|}{|a_2|} \right)$ ; b)  $\|x\| = \max \left( \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 + \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2, \left| \frac{x_1}{b_1} \right|, \left| \frac{x_2}{b_2} \right| \right)$ .

11. Es necesario tomar, por ejemplo, la envoltura lineal de las funciones  $f_1(t) = \sin 2\pi t$ ,  $f_2(t) = \cos 2\pi t$ . Entonces  $\|x_1 f_1(\cdot) + x_2 f_2(\cdot)\|_{C([0, 1])} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ .

12. a)  $(|y_1|^2 + |y_2|^2)^{1/2}$ ; b)  $|y_1| + |y_2|$ ; c)  $(|y_1|^q + |y_2|^q)^{1/q}$ ,  $1/p + 1/q = 1$ ; d)  $(b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + b_{22}y_2^2)^{1/2}$ , donde  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = A^{-1}$ ,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ .

Con arreglo al punto 1.2. 1.  $f(x) = x$ ,  $C = (-1, 1)$ . 2.  $X = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \arctg x$ .

4. a) No; b) no; c) no; d) sí.

5. Una esfera unidad en el espacio  $l_2$  (y en general en cualquier espacio de dimensión infinita).

6. Es necesario, por ejemplo, inscribir en la esfera unidad del espacio  $l_2$  un número infinito  $B(x_n, \rho)$ ,  $n \geq 1$  de esferas de radio fijo  $\rho$  que no se intersequen, y suponer que

$$f(x) = \begin{cases} \|x\| - 1, & \|x\| \geq 1, \\ (1 - 1/n)(\|x - x_n\| - \rho), & x \in B(x_n, \rho), \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

En este caso la cota inferior de la funcional  $f$  es igual a  $-\rho$  pero ella no se alcanza en ningún punto.

$$7. X = C([-1, 1]), L = \left\{ x(\cdot) \int_{-1}^1 x(t) \operatorname{sign} t dt = 0 \right\}, \hat{x}(t) = t.$$

8. Se puede examinar, por ejemplo, la funcional  $l(x, y) = x + y$ .

Con arreglo al punto 1.3. 1.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \hat{x} = 0$ . 2.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|, \hat{x} = 0$  ( $\delta f(\hat{x}, h)$  no existe cuando  $\hat{x} = 0$ ). 3.  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  en las coordenadas polares  $x = (x_1, x_2) = (r \cos \varphi, r \operatorname{sen} \varphi)$  está determinada por la igualdad  $f(x) = r \cos 3\varphi, \hat{x} = 0$  (para  $h = (r \cos \varphi, r \operatorname{sen} \varphi)$   $f(\hat{x}, h) = r \cos 3\varphi$  en una función no lineal en  $h$ ).

$$4. f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x_1 = x_2^2, x_2 > 0, \\ 0, & \text{en los demás casos,} \end{cases}$$

$\hat{x} = (0, 0)$ .  $\delta f(\hat{x}, h) = 0 \forall h \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow f'_r(\hat{x}) = 0$ . La derivada de Frechet no existe en el punto  $\hat{x}$ , ya que la función  $f$  no es continua en ese punto (de la diferenciabilidad de dicha función, según Frechet, se deduce su continuidad en el punto  $\hat{x}$ ).

$$5. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ es racional,} \\ 0, & x \text{ es irracional} \end{cases} \hat{x} = 0.$$

Por consiguiente, la derivada de Frechet  $f'(\hat{x}) = 0$ . La función en cero no es estrictamente diferenciable, o sea, no es continua en el entorno del cero (de la estricta diferenciabilidad de tal función en un punto se deduce su continuidad en cierto entorno de ese punto).

Con arreglo al punto 1.4. Sea  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2)$ .

$$\psi(y_1, y_2) = \begin{cases} 1, & y_1 = y_2^2, y_2 > 0, \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

La función  $\varphi$  es diferenciable según Frechet en el punto  $(0, 0)$  (e incluso estrictamente); y  $\psi$  es diferenciable según Gateaux en el punto  $(0, 0)$ , pero la función

$$f(x) = (\psi \circ \varphi)(x) = \begin{cases} 1, & x_2 = |x_1| > 0, \\ 0, & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

no es diferenciable según Gateaux en el punto  $(0, 0)$  (o incluso en ese punto ella no tiene derivadas en las direcciones  $h = (1, 1)$  y  $h = (-1, 1)$ ).

2. Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = (\operatorname{sen} x, -\cos x)$ . En este caso  $f'(x)[h] = h(\cos x, \operatorname{sen} x)$ . Por otra parte,  $f(2\pi) - f(0) = 0 \neq f'(c)[2\pi - 0] = 2\pi(\cos c, \operatorname{sen} c)$ , es decir, la fórmula de incrementos no tiene lugar.

Con arreglo al punto 1.5.5. a)  $a \geq 0$ ; b)  $a \geq 0, b \geq 0$ ; c) puede ser cualquier número; d)  $p \geq 1$ ; e)  $a_{11} > 0, a_{11}a_{22} - a_{22}^2 \geq 0$ , o bien  $a_{11} = a_{22} = 0, a_{22} \geq 0$ .

6. a) sí; b) sí.

$$7. a) f^*(y) = \begin{cases} y(\ln y - 1), & y > 0, \\ 0, & y = 0, \\ +\infty, & y < 0; \end{cases}$$

b)  $a < 0 \Rightarrow f^*(y) = +\infty$ ;  $a = 0 \Rightarrow f^*(y) = \delta\{b\} - c$ ;  $a > 0 \Rightarrow f^*(y) = \frac{(y-b)^2}{4a} - c$ ;

c)  $p > 1 \Rightarrow f^*(y) = |y|^{p'/p}, 1/p + 1/p' = 1$ ;  $p = 1 \Rightarrow f^*(y) = \delta[-1, 1]$ ;  $0 < p < 1 \Rightarrow f^*(y) = \delta\{0\}$ ; d)  $f^*y = 0$ ; e)  $f^*(y) = \max\{ay, by\}$ .

8. a)  $\delta \{(a_1, a_2)\} - b$ ; b)  $a_{11} > 0, a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \Rightarrow f^*(y) = \langle A^{-1}y, y \rangle / 4, a_{11} > 0, a_{11}a_{12} - a_{12}^2 = 0, 0$  bien  $a_{11} = a_{12} = 0, a_{22} > 0 \Rightarrow f^*(y) = \langle A^{-1}y, y \rangle / 4, y \in \text{Im } A, +\infty, y \notin \text{Im } A, a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0 \Rightarrow f^*(y) = \delta \{0\}; f^*(y) = +\infty$

en los demás casos donde  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ;

$$c) f^*(y) = \begin{cases} \lambda (\ln \lambda - 1), (y_1, y_2) = \lambda (a_1, a_2), \lambda > 0, \\ 0, y = 0 \\ +\infty, \text{ en los demás casos;} \end{cases}$$

$$d) f^*(y) = (|a_1 y_1|^{p'} + |a_2 y_2|^{p'})^{1/p'}, 1/p' + 1/p = 1;$$

$$e) f^*(y) = \begin{cases} 0, y_i \geq 0, i = 1, \dots, n \sum_{i=1}^n y_i = 1, \\ +\infty, \text{ en los demás casos.} \end{cases}$$

$$9. a) f^{**}(x) \equiv 0; b) f^{**}(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)^2, |x| \geq 1, \\ 0, |x| < 1; \end{cases} c) f^{**}(x) \equiv -1;$$

$$d) f^{**}(x) = 0; e) f^{**}(x) = |x| + |x - a|; f) f^{**}(x) = \begin{cases} ||x| - 1|, |x| \geq 1, \\ 0, |x| < 1. \end{cases}$$

10. a)  $|y_1| + |y_2| \leq 1$ ; b)  $|y_1|^2 + |y_2|^2 \leq 1$ ; c) un triángulo con vértices  $(-2, 0), (1 \pm \sqrt{3}), 0$ ; d)  $B_{p'} = \{(y_1, y_2) \mid |y_1|^{p'} + |y_2|^{p'} \leq 1, 1/p' + 1/p = 1\}$ ; e)  $(a_1 y_1)^2 + (a_2 y_2)^2 \leq 1$ .

11. a)  $[-1, 1]$ ; b)  $[0, 1]$ ; c)  $(-1, 0)$ .

$$12. a) |y| \leq 1; b) \sum_{i=1}^n |y_i| = 1; c) \sum_{i=1}^n y_i = 1, y_i \geq 0, i = 1, \dots, n;$$

d)  $[0, a]$ .

$$13. \{B^* = x^* \in X^* \mid \|x^*\|_{X^*} \leq 1\}.$$

14. a)  $[-1, 1]$ ; b)  $\{x^* \in C^* \mid \langle [0, 1] / \langle x^*, x(\cdot) \rangle = \mu_1 x(1/6) - \mu_2 x(1/2) + \mu_3 x(5/6), \mu_i \geq 0, \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 = 1\}$ .

$$15. \max \{x_1 + \sqrt{3}x_2, x_1 - \sqrt{3}x_2, -2x_2\}.$$

$$16. (\mu A)^* = \delta A^0.$$

17. De la desigualdad de Young se deduce inmediatamente que  $|x|^{2/2} \leq f(x)$ . Pasando a las funciones conjugadas y partiendo del hecho de que  $\varphi \leq \psi \Rightarrow \varphi^* \geq \psi^*$  llegamos a la desigualdad opuesta  $f(x) \geq |x|^{2/2}$ , de donde precisamente se deduce lo requerido.

$$18. f(t) = e^{-t}, g(x) = x^2, f \circ g = e^{-x^2}.$$

19.  $f_1(x_1, x_2) = \delta A_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2) = \delta A_2(x_1, x_2), A_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 x_2 \geq 1\}, A_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_1 x_2 \leq -1\}$ .

Con arreglo al punto 11.1.1. Reduzcamos el problema de forma canónica a un problema de mínimo:  $-\langle c, x \rangle \rightarrow \inf$ . Designando  $-x = \tilde{x}$  obtenemos

$$\langle c, \tilde{x} \rangle \rightarrow \inf; A\tilde{x} = -b, \tilde{x} \leq 0, \quad (\text{Pr}')$$

además,  $S_{\text{Pr can}} = -S_{\text{Pr}'}$ . Hallemos la función  $S^*(b^*)$  conjugada con

la  $S$ -función del problema (Pr')  $S(b) = \inf \{\langle c, x \rangle \mid A\tilde{x} = -b, \tilde{x} \leq 0\}$

$$S^*(b^*) = \sup \{\langle b^*, b \rangle - S(b)\} = \sup_b \{\langle b^*, b \rangle - \inf_x \{\langle c, x \rangle \mid A\tilde{x} = -b, x \leq 0\}\} = \sup_{b, x} \{\langle b^*, b \rangle - \langle c, \tilde{x} \rangle \mid A\tilde{x} = -b, \tilde{x} \leq 0\} = \sup_x \{\langle b, -A\tilde{x} \rangle -$$

$-\langle c, \tilde{x} \mid x \leq 0 \rangle = \sup_{\tilde{x} \leq 0} (-A^* \cdot b^* - c, \tilde{x}) = \begin{cases} 0, & -A^*b^* - c \geq 0, \\ +\infty, & \text{de otra manera.} \end{cases}$   
 Hallemos la segunda función  $S^{**}(b)$  conjugada con la función  $S$ :

$$S^{**}(b) = \sup_{b^*} (\langle b^*, b \rangle - S^*(b^*)) = \sup_{b^*} \{ \langle b^*, b \rangle \mid -A^*b^* \geq c \}.$$

Por consiguiente,  $S_{Pr_{can}^*} = -S^{**}(b) = \inf \{ \langle b, -b^* \rangle \mid -A^*b^* \geq c \}$ .  
 Suponiendo que  $y = -b^*$  obtenemos un problema dual con respecto a  $(Pr_{can})$ :

$$\langle b, y \rangle \rightarrow \inf; \quad A^*y \geq c. \quad (Pr_{can}^*)$$

2. Reduzcamos el problema de forma normal a un problema de mínimo.  
 $-\langle c, x \rangle \rightarrow \inf$ . Denotando  $\tilde{x} = -x$  obtenemos

$$\langle c, \tilde{x} \rangle \rightarrow \inf; \quad -A\tilde{x} \leq b, \tilde{x} \leq 0, \quad (Pr')$$

en este caso  $S_{Pr_{norm}} = -S_{Pr'}$ .

Hallemos la función  $S^*(b^*)$  conjugada con la  $S$ -función  $S(b) = \inf \{ \langle c, \tilde{x} \rangle \mid -A\tilde{x} \leq b, \tilde{x} \leq 0 \}$  del problema  $Pr'$ :

$$\begin{aligned} S^*(b^*) &= \sup_b (\langle b^*, b \rangle - S(b)) = \sup_b (\langle b^*, b \rangle - \inf \{ \langle c, \tilde{x} \rangle \mid -A\tilde{x} \leq b, \tilde{x} \leq 0 \}) = \\ &= \sup_{\tilde{x} \leq 0} \sup_{b \geq -A\tilde{x}} (\langle b^*, b \rangle - \langle c, \tilde{x} \rangle) = \begin{cases} \sup_{\tilde{x} \leq 0} (\langle b^*, -A\tilde{x} \rangle - \langle c, \tilde{x} \rangle), & b^* \leq 0, \\ +\infty, & \text{de otra manera} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \sup_{\tilde{x} \leq 0} \langle -A^*b^* - c, \tilde{x} \rangle, & b^* \leq 0, \\ +\infty, & \text{de otra manera} \end{cases} = \begin{cases} 0, & -A^*b^* - c \geq 0, \quad b^* \leq 0, \\ +\infty, & \text{de otra manera,} \end{cases} \end{aligned}$$

Hallemos la segunda función  $S^{**}(b)$  conjugada con la función  $S$ :

$$S^{**}(b) = \sup (\langle b^*, b \rangle - S^*(b^*)) = \sup \{ \langle b, b^* \rangle \mid -A^*b^* \geq c, b^* \leq 0 \}.$$

Por consiguiente,  $S_{Pr_{nor}^*} = -S^{**}(b) = \inf \{ \langle b, -b^* \rangle \mid A^*b^* \leq c, -b^* \geq 0 \}$ .  
 Suponiendo que  $y = -b^*$  obtenemos un problema dual con respecto a  $Pr_{norm}$ :

$$\langle b, y \rangle \rightarrow \inf; \quad A^*y \geq c, \quad y \geq 0. \quad (Pr_{norm}^*)$$

3. Reduzcamos el problema de forma canónica a un problema de mínimo:  
 $-\langle c, x \rangle \rightarrow \inf$ . Denotando  $\tilde{x} = -x$  obtenemos

$$\langle c, \tilde{x} \rangle \rightarrow \inf; \quad \tilde{A}\tilde{x} = -b, \tilde{x} \leq 0, \quad (Pr')$$

además,  $S_{Pr_{norm}} = -S_{Pr'}$ . Sustituyendo la igualdad  $\tilde{A}\tilde{x} = -b$  por dos desigualdades  $\tilde{A}\tilde{x} \leq -b, \tilde{A}\tilde{x} \geq -b$  ( $\Leftrightarrow -\tilde{A}\tilde{x} \leq b$ ) obtenemos

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \inf; \quad \begin{pmatrix} A \\ -A \\ I \end{pmatrix} \tilde{x} \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (Pr')$$



Este último es un problema general de programación lineal. Escribamos para él su problema dual:

$$\langle (-b, b, 0), (y_1, y_2, y_3) \rangle \rightarrow \sup;$$

$$(A^* - AI) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = c, \quad y_i \leq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{Pr}'^*)$$

$y_1, y_2 \in R^m, y_3 \in R^n$  ( $\Leftrightarrow \langle b, -y_1 \rangle + \langle b, y_2 \rangle \rightarrow \sup; A^*y_1 - A^*y_2 - y_3 = c, \dots$ )  
Denotando  $y = y_1 - y_2$  obtenemos  $A^*y = c - y_3 \geq c$ . Ha resultado el problema

$$- \langle b, y \rangle \rightarrow \sup; \quad A^*y \geq c \quad (\text{Pr}''^*)$$

y su versión equivalente ( $S_{\text{Pr}''^*}^{\text{norm}} = -S_{\text{Pr}'^*}$ )

$$\langle b, y \rangle \rightarrow \inf; \quad A^*y \geq c,$$

la cual es dual con respecto a  $\text{Pr}_{\text{norm}}$ .

4. Realicemos la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que  $|f(z')| < \infty$  para cierto punto  $z' \in R^n$ . Entonces, en virtud de la convexidad de la supergráfica de la función  $f$ , se deduce que  $f(z) = -\infty \forall z \in [z_0, z]$ , lo cual contradice el carácter cerrado de la supergráfica de  $f$ .

1.  $f'(\hat{x})[h] = Ah$ . 2.  $f'(\hat{x})[h] = Ah, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ . 3.  $f'(x)[h] = 2\langle \hat{x}, h \rangle$ .

4.  $f'(\hat{x})[h] = \langle \hat{x}, h \rangle / \|\hat{x}\|$  (véase la solución en [AGT, N°. 1.7]). 5.  $f'(\hat{x})[h] = h / \|\hat{x}\| - \hat{x}(\hat{x}, h) / \|\hat{x}\|^3$ . 6.  $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = 3 \int_0^1 h(t) \hat{x}^2(t) dt$ . 7.  $f'(\hat{x}(\cdot)) \times [h(\cdot)] = 6 \left( \int_0^1 \hat{x}^2(t) dt \right)^2 \int_0^1 h(t) \hat{x}(t) dt$ . 8.  $f'(\hat{x}(\cdot)) [h(\cdot)] = h(0)$ .

9.  $f'(\hat{x}(\cdot)) \times [h(\cdot)] = 2\hat{x}(1)h(1)$ . 10.  $f'(\hat{x}(\cdot)) [h(\cdot)] = h(1) \cos \hat{x}(1)$ . 11.  $\{x \mid |x_i| = |x_j| \text{ para ciertos valores de } i \neq j\}$ . 12.  $\{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \dots x_n = 0\}$ . 13.  $1 + 2/\pi$ . 14.  $3/2$ . 15. 8 (véase la solución en [AGT, N°. 1.30]). 16.  $1/\sqrt{3}$ . 17.  $\sqrt{2}/\sqrt{3}$ . 18.  $1/\sqrt{2}$  (véase la solución en [AGT, N°. 1.36]). 19.  $\sqrt{5}/2$ . 20.  $\Lambda^*: l_2 \rightarrow l_2, \Lambda^*y = (0, y_1, y_2, \dots), y = (y_1, y_2, \dots)$ . 21.  $T_x M = \{0\}$ ,  $T_x^+ M = R^2$ . 22.  $T_x M = R_+ \times R, T_x^+ M =$

$= R^2 \setminus R_+^2$ . 23.  $\{0\}$ . 24.  $T_x M = \{x(\cdot) \in C([0, 1]) \mid \int_0^1 x(t) \cos \pi t dt = 0\}$

(véase la solución en [AGT, N°. 1.49]). 25.  $\{h(\cdot) \in C([0, 1]) \mid h(0) = h(1) = 0\}$ . 26.  $R$ . 27.  $R_+$  (véase la solución en [AGT, N°. 1.52]). 28.  $\{0\}$ . 29.  $(5, 2) \in \text{locmín}, S_{\text{mín}} = -\infty, S_{\text{máx}} = +\infty$ . 30.  $S_{\text{mín}} = -\infty, S_{\text{máx}} = +\infty$ .  $(2, 3) \notin \text{locextr}$ . 31.  $S_{\text{mín}} = -\infty, S_{\text{máx}} = +\infty, (8, -10) \notin \text{locextr}$ . 32.  $(-2/3, -1/3, 1) \in \text{absmín}, S_{\text{mín}} = -4/3, S_{\text{máx}} = +\infty$ . 33.  $(1, 1) \in \text{locmáx}, S_{\text{máx}} = +\infty, S_{\text{mín}} = -\infty, (0, 0), (0, 3), (3, 0) \notin \text{locextr}$ . 34.  $(1/2, 1/2) \in \text{absmáx}, S_{\text{máx}} = e^{1/4}, S_{\text{mín}} = 0$  no se alcanza. 35.  $(1/6, 1/3, 1/2) \in \text{locmáx}$   $(t, 0, 1-t) \in \text{locmáx} \forall t > 1/2$  y  $t < 0, (t, 0, 1-t) \in \text{locmín} \forall 0 < t < 1, S_{\text{máx}} = +\infty, S_{\text{mín}} = -\infty$ . 36.  $(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}), (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6},$

- $1/\sqrt{6}$ ,  $(-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}) \in \text{absmín}$ ,  $\{(-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}), (-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}), (2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})\} \in \text{absmáx}$ ,  $S_{\text{máx}} = -S_{\text{mín}} = 1/3\sqrt{6}$ .  
 37.  $(0, \dots, 0) \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{mín}} = 0$ ,  $(\pm n^{-1/4}, \dots, \pm n^{-1/4}) \in \text{absmáx}$ ,  $S_{\text{máx}} = \sqrt{n}$ . 38.  $(-2, 0, 7) \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$  ( $x_n = (-n, 0, 2n + 3)$ ). 39.  $(0, 1) \in \text{absmín}$ ,  $(1, 0) \in \text{absmáx}$ . 40.  $(0, 1, 0) \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . 41.  $(1, 1) \in \text{absmín}$ . 42.  $(-1/2, -1/2) \in \text{absmín}$ . 43.  $a^2 + b^2 \leq 1 \Rightarrow (a, b) \in \text{absmín}$ ;  $a^2 + b^2 > 1 \Rightarrow (a/\sqrt{a^2 + b^2}, b/\sqrt{a^2 + b^2}) \in \text{absmín}$ . 44.  $0 < \alpha \leq 1/2 \Rightarrow (\alpha, \alpha) \in \text{absmín}$ ;  $\alpha > 1/2 \Rightarrow (1/2, 1/2) \in \text{absmín}$ . 45.  $\beta = \xi_3 + \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \leq 0 \Rightarrow (0, 0, 0) \in \text{absmín}$ ;  $\beta > 0 \Rightarrow (\beta \xi_1 / \sqrt{2(\xi_1^2 + \xi_2^2)}, \beta \xi_2 / \sqrt{2(\xi_1^2 + \xi_2^2)}, \beta / \sqrt{2}) \in \text{absmín}$ . 46. Si es posible la construcción de un triángulo con lados de longitud  $m_1 m_2$ ,  $m_0 m_1$  y  $m_0 m_2$  y con ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  entre los lados de longitud  $m_1 m_2$ ,  $m_0 m_1$ ,  $m_1 m_2$  y  $m_0 m_2$ ,  $m_0 m_2$  respectivamente, el ángulo entre los vectores  $\hat{x}_1$  y  $e = (1, 0)$  (vértices  $\hat{x}_1$ ,  $\hat{x}_2$ ,  $e$  del triángulo) será igual a  $\pi - \alpha_1$ , y el ángulo entre  $\hat{x}_2$  y  $e$  constituirá  $\pi - \alpha_2$ . Si dicha construcción es posible, entonces  $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = -e$  o  $\hat{x}_1 = -e$ ,  $\hat{x}_2 = e$ . 47. Los puntos buscados en un triángulo acutángulo son las bases de las alturas. El triángulo de perímetro mínimo en un triángulo rectángulo o en un triángulo obtusángulo se degenera en altura trazada hacia el lado mayor. 48. Si todos los ángulos del triángulo son menores de  $120^\circ$ , la solución del problema será el punto donde todos los lados del triángulo se ven bajo un ángulo de  $120^\circ$  (punto de Torricelli); pero si uno de los ángulos del triángulo es mayor o igual a  $120^\circ$ , la solución del problema coincidirá con el vértice de ese ángulo (véase la solución en [AGT N.º 4.12]). 49. El punto  $x$  con coordenadas  $x_k = -a_k b_k^2 / \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2 b_k^2}$  proporciona un mínimo absoluto a la funcional  $S_{\text{mín}} = -\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2 b_k^2}$ , y las normales sólo son posibles en el subespacio  $A^{-1}l^2$ , donde  $A: \{x_k\} \rightarrow \{x_k/b_k^2\}$  (véase la solución en [AGT, N.º 4.7]). 50.  $4 \pm 4/\sqrt{3}$  (véase la solución en [AGT N.º 2.21]). 51. Un triángulo isósceles. 52. El punto  $E$  es el centro de  $[BC]$  (véase la solución en [ATF, pág. 31]). 53.  $t^2 - 1/3 \in \text{absmín}$ . 54.  $\hat{p} = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n) \in \text{absmáx}$ ,  $\hat{p}_1 = \dots = \hat{p}_n = 1/n$ . 55.  $h = 2/\sqrt{3}$ . 56. El radio de la base es igual a  $((n-1)/n)^{1/2}$ . 57. La altura del cono es igual a  $1 + 1/n$ . 58. Un polígono regular. 59. Un triángulo regular. 60. La recta buscada posee la propiedad de que su segmento comprendido entre los lados del ángulo es dividido en dos partes iguales por un punto dado (véase la solución en [AGT, N.º 2.45]). 61. Es preciso trazar una circunferencia (de radio mayor de los dos radios posibles) por un punto tangente a los lados del ángulo, y trazar después un segmento tangente a esa circunferencia (véase la solución en [AGT, N.º 2.46]). 62. El área del cuadrilátero inscrito en el círculo. 63. El segmento esférico buscado es una semiesfera (véase la solución en [AGT, N.º 2.48]). 64. Si los puntos permanecen por distintos lados de la recta, el punto buscado será la intersección de la recta  $AB$  con la recta dada. Supongamos que los puntos se encuentran por un lado de la recta. Representemos uno de ellos, por ejemplo, el punto  $A$ , simétricamente respecto a la recta dada. Obtendremos el punto  $A'$ . La intersección de la recta  $A'B$  con la recta dada es precisamente el punto  $C$  buscado. 65. El vértice del tetraedro debe proyectarse en el centro del círculo inscrito en la base. 66. Un tetraedro regular. 67.  $x_0 = (x_1 + x_2 + x_3)/3$  es el centro de gravedad del triángulo  $x_1 x_2 x_3$ . 68.  $x_0 = \left( \sum_{i=1}^N m_i x_i \right) / \sum_{i=1}^N m_i$  es el centro de masas.

69. Denotemos  $\hat{x} = \left( \sum_{i=1}^N m_i x_i \right) / \sum_{i=1}^N m_i$ . Si  $\hat{x} \leq 1$  resultará que  $x_0 = \hat{x}$ ;

pero si  $|\hat{x}| > 1$ , entonces  $x_0 = \hat{x}/|\hat{x}|$ .

70. Denotemos  $\hat{x} = \left( \sum_{i=1}^N m_i x_i \right) / \sum_{i=1}^N m_i$ . Si  $x = 0$ , en este caso  $x_0$  tendrá

cualquier valor; pero si  $\hat{x} \neq 0$  resultará que  $x_0 = \hat{x}/|\hat{x}|$ .

71. Solución. Formalización

$$f_0(x_1, x_2) = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 \rightarrow \inf;$$

$$f_1(x_1, x_2) = (x_1/a_1)^2 + (x_2/a_2)^2 - 1 = 0.$$

Función de Lagrange

$$\mathcal{L} = \lambda_0 ((x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2) + \lambda ((x_1/a_1)^2 + (x_2/a_2)^2).$$

Condición necesaria

$$\mathcal{L}_{x_i} = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 (x_i - \xi_i) + \lambda x_i / a_i^2 = 0, \\ i = 1, 2.$$

Si  $\lambda_0 = 0$  tendremos  $\lambda \neq 0$ , ya que no todos los factores de Lagrange son ceros. Por consiguiente,  $x_1 = x_2 = 0$ , pero este punto no se encuentra en la elipse. Supongamos que  $\lambda_0 = 1 \Rightarrow x_i = \xi_i a_i^2 / (a_i^2 + \lambda)$ ,  $i = 1, 2$ . Introduciéndolo en la ecuación de la elipse obtenemos

$$\varphi(\lambda) = \frac{\xi_1^2 a_1^2}{(a_1^2 + \lambda)^2} + \frac{\xi_2^2 a_2^2}{(a_2^2 + \lambda)^2} = 1. \quad (*)$$

El número de puntos estacionarios del problema (es decir, de puntos correspondientes a los valores de  $\lambda$  que satisfacen la ecuación (\*)) no es mayor de cua-

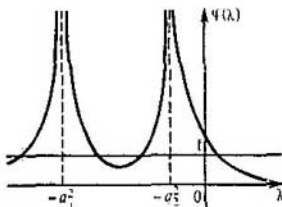


Fig. 5

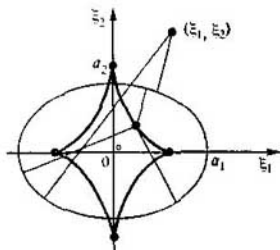


Fig. 6

tro (fig. 5); la desigualdad  $\varphi(0) = \xi_1^2/a_1^2 + \xi_2^2/a_2^2 > 1$  muestra que  $\varphi(\lambda)$  está representado para el punto  $(\xi_1, \xi_2)$  situado fuera de la elipse.

Un a elipse es un conjunto cerrado y acotado. Según el teorema de Weierstrass, la solución del problema es real. Para solucionarlo por completo es necesario resolver la ecuación (\*), obtener  $\lambda_i$ , hallar los puntos  $x(\lambda_i)$  correspondientes e introducirlos en  $f_0$  y, por último, determinar el valor mínimo de los valores de la funcional obtenidos.

Las relaciones  $x_i - \xi_i + \lambda x_i / a_i^2 = 0$ ,  $i = 1, 2$  tienen un sentido geométricamente explícito: el vector  $\xi - x$  es proporcional al vector gradiente de la

función  $f_1$  en el punto  $x$ , es decir, el vector  $\xi - x$  se halla situado en una normal respecto a la elipse. Ese hecho fue establecido por primera vez por Apolonio.

De las relaciones obtenidas deducamos la ecuación de la curva que «separa» los puntos  $\xi$  hacia los cuales se pueden trazar dos normales desde los puntos hacia los cuales se pueden trazar cuatro normales. Es evidente que dicha separación se produzca para los valores de  $\lambda$  que satisfacen la relación (\*) y para los que

$$\varphi'(\lambda) = -\frac{2\xi_1^2 a_1^2}{(a_1^2 + \lambda)^3} - \frac{2\xi_2^2 a_2^2}{(a_2^2 + \lambda)^3} = 0,$$

$$\lambda \in (-a_1^2, -a_2^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1^2 + \lambda = A (\xi_1 a_1)^{2/3}, \quad a_2^2 + \lambda = -A (\xi_2 a_2)^{2/3},$$

donde  $A = (a_1^2 - a_2^2) / ((\xi_1 a_1)^{2/3} + (\xi_2 a_2)^{2/3})$ .

Sustituyendo en (\*) obtenemos la ecuación de la curva de separación  $(\xi_1 a_1)^{2/3} + (\xi_2 a_2)^{2/3} = (a_1^2 - a_2^2)^{2/3}$  también conocida como ecuación de la astroide. Cada punto fuera de la astroide tiene dos normales; dentro de ella, cuatro; y en la propia astroide, tres (a excepción de los vértices, donde hay dos normales (fig. 6)).

72. Del punto con coordenadas  $(\xi_1, \xi_2)$ , hacia la parábola  $y = ax^2$  ( $a > 0$ ) se pueden trazar tres normales siempre que ese punto se encuentre más arriba de la curva  $\xi_2 = 3 \cdot 2^{-4/3} a^{-1/3} \xi_1^{2/3} + 2^{-1} a^{-1}$ ; dos normales de los puntos situados en dicha curva, excepto el punto  $(0, 2^{-1} a^{-1})$ ; y una normal de los puntos situados más abajo de esa curva y el punto  $(0, 2^{-1} a^{-1})$ . 73. La distancia desde el punto  $x_0$  hasta el hiperplano  $\langle a, x \rangle = b$  constituye  $| \langle a, x_0 \rangle - b | / | a |$  (véase la solución en [AGT, N° 2.61]). 74. La distancia desde el punto  $x_0$  hasta la recta  $at + b$ ,

$a, b \in \mathbb{R}^n$  es igual a  $(| \hat{x} - b |^2 - (\langle \hat{x} - b, a \rangle / | a |)^2)^{1/2}$ . 75.  $\hat{x} = -a / | a | \in \in \text{absmín}$ ,  $l(\hat{x}) = | a |$ . 76. Los lados del rectángulo son  $\sqrt{2a}$  y  $\sqrt{2b}$ . 77. El problema no tiene solución. 78. El punto  $x_0$  no proporciona máximo al problema. 79.  $x_0 \in \text{absmáx}$ . 80.  $(0, 0, 4, 13) \in \text{absmáx}$ ,  $S_{\text{máx}} = 77$ . 81.  $(2, 0, 3) \in \in \text{absmáx}$ ,  $S_{\text{máx}} = 5$ . 82.  $(2, 1, 0, 0) \in \text{absmáx}$ ,  $S_{\text{máx}} = 5$ . 83.  $(5, 3, 0, 0, 0) \in \in \text{absmáx}$ ,  $S_{\text{máx}} = 8$ . 84.  $(0, 5, 5, 0, 0, 0) \in \text{absmáx}$ ,  $S_{\text{máx}} = 10$ . 85.  $(1, 0, 0, 1, 0, 1, 3) \in \text{absmáx}$ ,  $S_{\text{máx}} = 10$ .

$$86. \hat{x} = \begin{cases} \pi + t, & -\pi \leq t \leq -\pi/2, \\ -t, & |t| < \pi/2, \hat{x} \in \text{absmín}, -\hat{x} \in \text{absmáx}. \\ t - \pi, & \pi/2 \leq t \leq \pi, \end{cases}$$

87.  $\xi < AT_0 \Rightarrow$  no hay funciones admisibles;  $\xi = AT_0 \Rightarrow \hat{x} = At \in \text{absmín}$ ;  $AT_0 < \xi < 0 \Rightarrow$  cualquier función monótonamente decreciente admisible  $\in \in \text{absmín}$ ;  $\xi = 0 \Rightarrow \hat{x} = 0 \in \text{absmín}$ ;  $\xi > 0 \Rightarrow$  cualquier función monótonamente creciente  $\in \text{absmín}$ ; (véase la solución en [AGT, N° 10.3]). 88.  $\hat{x} = t \in \text{absmín}$ ,

$S_{\text{máx}} = +\infty$ . 89.  $\alpha > -1 \Rightarrow \hat{x} = 0 \in \text{absmín}$ ,  $\alpha = -1 \Rightarrow \hat{x} = Ct \in \text{absmín} \forall C \in \mathbb{R}$ ,  $S_{\text{mín}} = 0$ ;  $\alpha < -1 \Rightarrow S_{\text{mín}} = -\infty$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . 90.  $\hat{T} = 1$ ,

$\hat{x} = -2t \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . 91.  $\hat{T} = 1/2$ ,  $\hat{x} = \pm 4t \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . 92.  $|\xi| > 1 \Rightarrow$  no hay funciones admisibles.  $|\xi| \leq 1 \Rightarrow S_{\text{máx}} = +\infty$  se alcanza en cualquier línea quebrada ( $|\dot{x}(t)| = \pm 1$  fuera de los puntos de curvatura) que une los puntos  $(0, 0)$  y  $(1, \xi)$ ;  $S_{\text{mín}} = \xi^2$ ,  $\xi t \in \text{absmín}$ .

93.  $t \in \text{absmáx}$ ,  $-t \in \text{absmín}$ . 94.  $\hat{x}(t) = \xi t / T_0$ ,  $\xi > 0 \Rightarrow \hat{x} \in \text{locmín}$ ,  $\xi < 0 \Rightarrow \hat{x} \in \text{locmáx}$ ,  $\xi = 0 \Rightarrow \hat{x} \in \text{locextr}$ ;  $\forall \xi \hat{x} - \text{locextr}$  no fuerte,  $S_{\text{mín}} = -\infty$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . 95.  $\hat{x} = (2t/3)^{3/2}$ ,  $\hat{x} \in \text{locmín}$ ,  $\hat{x} - \text{locextr}$  no fuerte,

$S_{\min} = -\infty$ ,  $S_{\max} = +\infty$ . 96.  $\hat{x} = \xi t / T_0$ ,  $\xi > T_0/3 \Rightarrow \hat{x} \in \text{locmín}$ ,  $\xi < T_0/3 \Rightarrow \hat{x} \in \text{locmáx}$ ,  $\xi = T_0/3 \Rightarrow \hat{x} \notin \text{locextr}$ ,  $\forall \xi \hat{x} - \text{locextr}$  no fuerte,

$S_{\min} = -\infty$ ,  $S_{\max} = +\infty$ . 97.  $S_{\min} = -1$ ,  $S_{\max} = +1$ ,  $\hat{x} = \pi t \in \text{absmín}$ . 98.  $S_{\min} = -T_0$ ,  $S_{\max} = +T_0$ ;  $2k\pi < \xi/T_0 < \pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\hat{x} = \xi t / T_0 \in \text{locmáx}$ ;  $2k\pi - \pi < \xi/T_0 < 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \hat{x} \in \text{locmín}$ ; no se cumple la condición necesaria de Weierstrass  $\Rightarrow$  y en ambos casos  $\hat{x}$  es locextr no fuerte;  $\xi/T_0 = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  se requiere un análisis complementario.

99.  $S_{\min} = -T_0$ ,  $S_{\max} = T_0$ ;  $\pi/2 + 2k\pi < \xi/T_0 < 3\pi/2$ ,  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \hat{x} \in \text{locmín}$ ;  $-\pi/2 + 2k\pi < \xi/T_0 < \pi/2$ ,  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \hat{x} \in \text{locmáx}$ ; no se cumple la condición necesaria de Weierstrass  $\Rightarrow$  y en ambos casos  $\hat{x}$  es locextr no fuerte;  $\xi/T_0 = \pi/2 + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  se requiere un análisis complementario.

100.  $S_{\min} = -\infty$ ,  $S_{\max} = +\infty$ ;  $T_0 > -\xi/2 \Rightarrow \hat{x} = \xi t / T_0 \in \text{locmín}$ ;  $T_0 < -\xi/2 \Rightarrow \hat{x} \in \text{locmáx}$ ; no se cumple la condición necesaria de Weierstrass  $\Rightarrow$  y en ambos casos  $\hat{x}$  es locextr no fuerte;  $T_0 = -\xi/2 \Rightarrow$  se requiere un análisis complementario.

101.  $S_{\min} = -\infty$ ,  $S_{\max} = +\infty$ ;  $\xi \geq 4T_0^{5/4}/5 \Rightarrow \hat{x}_1 = 4((t + C)^{5/4} - C^{5/4})/5 \in \text{locmín}$ ,  $\xi \leq -4T_0^{5/4}/5 \Rightarrow \hat{x}_2 = 4(C^{5/4} - (t + C)^{5/4})/5 \in \text{locmáx}$ , donde  $C$  se deduce de la ecuación  $4((T_0 + C)^{5/4} - C^{5/4})/5 = |\xi|$ . No se cumple la condición necesaria de Weierstrass y, por consiguiente, en ambos casos  $\hat{x}$  es locextr no fuerte. Para  $|\xi| < 4T_0^{5/4}/5$  no hay extremales admisibles.

102.  $|\xi| < 1/\sqrt{3} \Rightarrow \hat{x} = \xi t \in \text{locmáx}$ ;  $|\xi| > 1/\sqrt{3} \Rightarrow \hat{x} \in \text{locmín}$ , además, para  $|\xi| < 1$  esa extremal no proporciona un mínimo fuerte, ya que no se cumple la condición de Weierstrass.

103. La extremal  $\hat{x} = 0$  satisface las condiciones de contorno, pero ella no es la solución del problema: según el teorema de Bogoliúbov,  $S_{\min} = -\infty$ ,  $S_{\max} = +\infty$ .

104. La extremal  $\hat{x} = 0$  satisface las condiciones de contorno. En la misma se cumplen las condiciones suficientes de mínimo débil, ya que el campo  $x(t, \lambda) = \lambda$  contournea esa extremal y se cumple la condición de Legendre:  $\hat{L}_{xx}(t) = 2 > 0$ . También se cumple la condición

necesaria de Weierstrass, ya que la función  $x^2 + 2tx^4$  es convexa. Pero en este caso no hay mínimo fuerte. Es suficiente valerse de la línea quebrada  $x(t; k, h) = kt/h$  cuando  $0 \leq t \leq h$  y de  $k(1-t)/(1-h)$  cuando  $h \leq t \leq 1$ , y para cualquier  $k > 0$  elegir  $h > 0$  de tal modo que  $\mathcal{J}(x(\cdot; k, h)) < 0$ .

105.  $S_{\min} = -\infty$ ,  $S_{\max} = +\infty$ ,  $x = 0 \notin \text{locextr}$ . 106.  $S_{\min} = -\infty$  ( $x_n(t) = 1 - t$ ,  $T_n = n$ ),  $S_{\max} = +\infty$ . Extremal admisible:  $\hat{x} = t^2/4 - t + 1$  ( $\hat{T} = 2$ )  $\notin \text{locextr}$ .

107.  $S_{\min} = -\infty$  ( $x_n(t) = (t^2 - nt^2)/4 + t$ ,  $T_n = n$ ),  $S_{\max} = +\infty$ . Extremal admisible:  $\hat{x} = t^2/4 - 8$  ( $\hat{T} = 8$ )  $\notin \text{locextr}$ .

108.  $S_{\min} = -\infty$ . Extremal admisible:  $\hat{x} = t^2/4 - (1 + \sqrt{5})t$  ( $\hat{T} = 8 + 4\sqrt{5}$ )  $\notin \text{locextr}$ .

109.  $S_{\min} = -\infty$  ( $x_n(t) = (t^2 - nt)/4 + t$ ,  $T_n = n$ ),  $S_{\max} = +\infty$ . Extremal admisible:  $\hat{x} = t^2/4 - (1 + \sqrt{5})t$  ( $\hat{T} = 8 + 4\sqrt{5}$ )  $\notin \text{locextr}$ .

110.  $(2tT_0 - t^2)/4 \in \text{locextr}$ .

$$\left( x_n(t) = \begin{cases} -t, & 0 \leq t \leq 1, \\ -1, & 1 \leq t \leq n-1, \quad T_n = n \\ (\xi + 1)(t - n + 1) - 1, & n-1 \leq t \leq n, \end{cases} \right).$$

Extremal admisible:  $\hat{x} = t^2/4 - (1 + \sqrt{5})t$  ( $\hat{T} = 8 + 4\sqrt{5}$ )  $\notin \text{locextr}$ ,  $S_{\max} = +\infty$ .

109.  $S_{\min} = -\infty$  ( $x_n(t) = (t^2 - nt)/4 + t$ ,  $T_n = n$ ),  $S_{\max} = +\infty$ . Extremal admisible:  $\hat{x} = t^2/4 - (1 + \sqrt{5})t$  ( $\hat{T} = 8 + 4\sqrt{5}$ )  $\notin \text{locextr}$ .

110.  $(2tT_0 - t^2)/4 \in \text{locextr}$ .

220

$\in \text{absmín}, S_{\text{mín}} = -T_0^3/12, S_{\text{máx}} = +\infty$ . 111.  $(tT_0 - t^2)/4 \in \text{absmín}, S_{\text{mín}} = -T_0^3/48, S_{\text{máx}} = +\infty$ . 112.  $T_0 \leq 2 \Rightarrow \hat{x}_{\text{mín}} = (2tT_0 - t^2)/4 \in \text{absmín}, S_{\text{mín}} = -T_0^3/12$ ;  $T_0 > 2 \Rightarrow \hat{x}_{\text{mín}} = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq T_0 - 2 \\ T_0 - 1 - (t - T_0)^2/4, & T_0 - 2 \leq t \leq T_0 \end{cases} \hat{x}_{\text{mín}} \in$   
 $\in \text{absmín}, \hat{x}_{\text{máx}} = -t \in \text{absmáx}, S_{\text{máx}} = T_0 + T_0^3/2$ . 113.  $T_0 \leq 4 \Rightarrow \hat{x}_{\text{mín}} = (tT_0 - t^2)/4 \in \text{absmín}, S_{\text{mín}} = -T_0^3/48$ ;

$$T_0 > 4 \Rightarrow \hat{x}_{\text{mín}} = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq T_0/2 - 2 \\ T_0/2 - 1 - (t - T_0/2)^2/4, & T_0/2 - 2 \leq t \leq T_0/2 + 2 \\ T_0 - t, & T_0/2 + 2 \leq t \leq T_0, \end{cases}$$

$\hat{x}_{\text{mín}} \in \text{absmín}, \hat{x}_{\text{máx}} = \begin{cases} -t, & 0 \leq t \leq T_0/2 \\ t - T_0, & T_0/2 \leq t \leq T_0, \end{cases} \hat{x}_{\text{máx}} \in \text{absmáx}, S_{\text{máx}} = -T_0 + T_0^3/4$ . 114. No hay extremales admisibles.  $S_{\text{mín}} = -\infty$  ( $x(t) = t \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{J}(x(\cdot), T) = T - T^2/2 \rightarrow -\infty$  cuando  $T \rightarrow +\infty$  o cuando  $x(t) = \hat{x}_{\text{mín}}(t)$  es la extremal admisible de la respuesta al problema 112.  $S_{\text{máx}} = +\infty$  ( $x(t) = -t \Rightarrow \mathcal{J}(x(\cdot), T) = T + T^2/2 \rightarrow +\infty$  cuando  $T \rightarrow +\infty$ ). 115. No hay extremales admisibles.  $S_{\text{mín}} = -\infty$  ( $x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq T/2, \\ T - t, & T/2 \leq t \leq T, \end{cases} \Rightarrow \mathcal{J}(x(\cdot), T) =$

$= T - T^2/4$  o bien  $x(t) = \hat{x}_{\text{mín}}(t)$  es la extremal admisible de la respuesta al problema 113  $\Rightarrow \mathcal{J}(x(\cdot), T) \rightarrow -\infty$  cuando  $T \rightarrow +\infty$ ).  $S_{\text{máx}} = +\infty$  ( $x(t) = \begin{cases} -t, & 0 \leq t \leq T/2, \\ t - T, & T/2 \leq t \leq T, \end{cases} \mathcal{J}(x(\cdot), T) = T + T^2/4 \rightarrow +\infty$  cuando

$T \rightarrow +\infty$ ). 116.  $te^{2-t} \in \text{absmáx}, S_{\text{mín}} = -\infty$ . 117.  $3t - 3t^2/2 \in \text{absmín}, S_{\text{mín}} = -\infty, S_{\text{máx}} = +\infty$  ( $x_n(t) = \frac{\pi}{2}(2n+1) \text{sen } \pi(2n+1)t$ ). 118.  $6t - 6t^2 \in \text{absmín}, S_{\text{mín}} = 12, S_{\text{máx}} = +\infty$  ( $x_n(t) = (\pi/2)(2n+1) \text{sen } \pi(2n+1)t$ ). 119.  $5t^3/8 - 15t^2/8 + 1 \in \text{absmín}, S_{\text{mín}} = 15/8, S_{\text{máx}} = +\infty$ . 120.  $-20t^3/3 + 14t^2 - 8t + 1 \in \text{absmín}, S_{\text{mín}} = 8, S_{\text{máx}} = +\infty$ . 121.  $\hat{x}(t) = 3(\hat{T} = 1/3) \in \text{absmín}, S_{\text{máx}} = +\infty$ ; hay una extremal admisible más:  $3(t-1)^2(\hat{T} = 1)$ . 122.  $\hat{x}(t) = 1(\hat{T} = 1/3) \in \text{absmín}, S_{\text{máx}} = +\infty$ ; hay una extremal admisible más:

$t^2(\hat{T} = 1)$ . 123.  $2(t + \text{sen } t)/(3\pi) \in \text{absmín}, S_{\text{máx}} = -\infty$ . 124.  $(2/\pi) \text{sen } t \in \text{absmín}, S_{\text{máx}} = +\infty$ . 125.  $\cos t - 1 \in \text{absmín}, S_{\text{máx}} = +\infty$ . 126.  $S_{\text{máx}} = +\infty, 2(e^t - et - 1)/(e^2 - 4e + 1) \in \text{absmín}$ . 127.  $t \in \text{absmín}, S_{\text{máx}} = +\infty$  (véase la solución en [AGT, № 6.15]). 128.  $\ln(t+1) - 1 \in \text{absmín}, S_{\text{máx}} = +\infty$ . 129.  $1/t + 1/2 \in \text{absmín}, S_{\text{máx}} = +\infty$ . 130.  $t - e \ln t - 1 \in \text{absmín}, S_{\text{máx}} = +\infty$ . 131.  $S_{\text{máx}} = +\infty, t + (1-e) \ln t - 1 \in \text{absmín}$ . 132.  $(\ln(t+1))/\ln 2 \in \text{absmín}, S_{\text{máx}} = +\infty$ . 133.  $4/t - 1 \in \text{absmín}, S_{\text{máx}} = +\infty$ . 134.  $(\ln(3(t-1)/(t+1)))/\ln(3/2) \in \text{absmín}, S_{\text{máx}} = +\infty$ . 135.  $t^3 \in \text{absmín}, S_{\text{máx}} = +\infty$ . 136.  $e^t \in \text{absmín}, S_{\text{máx}} = +\infty$ . 137.  $\text{ch } t \in \text{absmín}, S_{\text{máx}} = +\infty$ . 138.  $\alpha > -th T_0 \Rightarrow \hat{x} = 0 \in \text{absmín}, S_{\text{mín}} = 0$ ;  $\alpha = -th T_0 \Rightarrow C \text{ ch } t \in \text{absmín} \forall C \in \mathbb{R}, S_{\text{mín}} = 0$ ;

$\alpha < -th T_0 \Rightarrow \hat{x} = 0 \notin \text{locmín}, S_{\text{mín}} = -\infty$  ( $x_n = n \text{ ch } t$ );  $S_{\text{máx}} = +\infty \forall \alpha$  (véase la solución en [AGT, № 5.5]). 139.  $\ln t + 1 \in \text{absmín}, S_{\text{máx}} = +\infty$ .

140.  $\hat{x}_1 = \sqrt[3]{4t^3/3}$ ,  $\hat{x}_2 = \sqrt{t+1}$ . 141.  $2 \ln(t+1)$ . 142.  $-e^t/(e^3+1)$ .  
 143.  $\hat{x} = \sqrt{t+1} \in \text{absmín}$ .  $S_{\text{mín}} = +\infty$ . Indicación. Al demostrar el valor mínimo se puede utilizar el hecho de que  $(\dot{x}x)^2 = \left(\frac{d}{dt} \frac{x^2}{2}\right)^2$ . 144.  $\hat{x}_1 = (t-1)^2 \notin \text{locextr}$ ,  $\hat{x}_2 = (t-2)^2/4 \in \text{locmín}$  (fuerte);  $S_{\text{mín}} = -\infty$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ .  
 145.  $2 \ln(t+1) \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ .

146.  $t^3 - t \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . 147.  $(\sqrt{2} \operatorname{ch} \sqrt{2t} + \operatorname{sh} \sqrt{2t}) / (\sqrt{2} \operatorname{ch} \sqrt{2} + \operatorname{sh} \sqrt{2}) \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . 148.  $t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t (\operatorname{sh} 1 + \operatorname{ch} 1) / \operatorname{ch} 1 \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . 149.  $(t-1) \operatorname{ch} t \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . 150.  $e^t \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$  (véase la solución en [AGT, № 5.106]). 151. No hay extremales admisibles.  $S_{\text{mín}} = 1$  ( $x_n = \operatorname{sh} t / \operatorname{sh} T_n$ ,  $T_n = n$ ),  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . 152.  $\hat{x} = 2 \operatorname{sh} \hat{T} \operatorname{ch} t$ ,  $\hat{T}$  es la única solución de la ecuación  $\operatorname{sh} 2\hat{T} + \hat{T} = 1$ . 153.  $\hat{x} = -2 \operatorname{ch} \hat{T} \operatorname{sh} t$ ,  $\hat{T}$  es la única solución de la ecuación  $\operatorname{sh} 2\hat{T} = \hat{T} + 1$ . 154.  $S_{\text{máx}} = +\infty$ ,  $S_{\text{mín}} = -\infty$  ( $x_n(t) = n$ ),  $\hat{x} = \cos t - t \notin \text{locextr}$ . 155.  $S_{\text{máx}} = +\infty$ ,  $(\xi \operatorname{ch} t / \operatorname{ch} T_0) \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{mín}} = \xi^2 \operatorname{th} T_0$ . 156.  $\xi = 0 \Rightarrow \hat{x}(t) = 0$  ( $\hat{T} > 0$  es cualquiera)  $\in \text{absmín}$ ;  $\xi \neq 0 \Rightarrow$  no hay extremales admisibles.  $S_{\text{mín}} = 0$  ( $x(t) = \xi \operatorname{ch} t / \operatorname{ch} T \Rightarrow \mathcal{J}(x(\cdot), T) = \xi^2 \operatorname{th} T \rightarrow 0$  cuando  $T \rightarrow 0$ ), ( $S_{\text{máx}} = +\infty$  ( $x(t) = \xi \Rightarrow \mathcal{J}(x(\cdot), T) = \xi^2 T \rightarrow +\infty$  cuando  $T \rightarrow \infty$ )). 157.  $|\xi| \leq \operatorname{cth} T_0 \Rightarrow \hat{x} = \xi \operatorname{ch} t / \operatorname{ch} T_0 \in \text{absmín}$ ;

$$|\xi| > \operatorname{cth} T_0 \Rightarrow \hat{x} = \begin{cases} \operatorname{sign} \xi \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} \tau}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ \xi + (t - T_0) \operatorname{sign} \xi, & \tau \leq t \leq T_0, \end{cases}$$

$\hat{x} \in \text{absmín}$ , donde  $\tau$  se deduce de la ecuación  $|\xi| = \operatorname{cth} \tau - \tau + T_0$ .  $\hat{x} = \xi - (t - T_0) \operatorname{sign} \xi \in \text{absmáx}$ . 158.  $\xi = 0 \Rightarrow \hat{x}(t) = 0$  ( $\hat{T} > 0$  es cualquiera)  $\in \text{absmín}$ ;  $\xi \neq 0 \Rightarrow$  no hay extremales admisibles.  $S_{\text{mín}} = 0$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ ,  $x(t) = \xi \Rightarrow \mathcal{J}(x(\cdot), T) = \xi^2 T \rightarrow 0$  cuando  $T \rightarrow 0$  y  $\mathcal{J}(x(\cdot), T) \rightarrow +\infty$  cuando  $T \rightarrow +\infty$ . 159.  $(\xi \operatorname{sh} t) / \operatorname{sh} T_0 \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{mín}} = \xi^2 \operatorname{cth} T_0$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ .

160.  $\xi = 0 \Rightarrow \hat{x}(t) = 0$  ( $\hat{T} > 0$  es cualquiera)  $\in \text{absmín}$ ;  $\xi \neq 0 \Rightarrow$  no hay extremales admisibles.  $S_{\text{mín}} = \xi^2$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$  ( $x(t) = (\xi \operatorname{sh} t) / \operatorname{sh} T \Rightarrow \mathcal{J}(x(\cdot), T) = \xi^2 \operatorname{cth} T \rightarrow \xi^2$  cuando  $T \rightarrow +\infty$  y  $\mathcal{J}(x(\cdot), T) \rightarrow +\infty$  cuando  $T \rightarrow 0$ ). 161.  $|\xi| > T_0 \Rightarrow$  no hay funciones admisibles.  $|\xi| \leq \operatorname{th} T_0 \Rightarrow \xi \operatorname{sh} t / \operatorname{sh} T_0 \in \text{absmín}$ ,

$$S_{\text{mín}} = \xi^2 \operatorname{cth} T_0, \operatorname{th} T_0 < |\xi| \leq T_0 \Rightarrow \hat{x}_{\text{mín}} = \begin{cases} \operatorname{sh} T / \operatorname{sh} \tau \operatorname{sign} \xi, & 0 \leq t \leq \tau, \\ \xi + (t - T_0) \operatorname{sign} \xi, & \tau \leq t \leq T_0 \end{cases}$$

( $\tau$  es la raíz de la ecuación  $T_0 + \operatorname{th} \tau - \tau = |\xi|$ ),  $\hat{x}_{\text{mín}} \in \text{absmín}$   $S_{\text{mín}} = |\xi| + |\xi|^3/3 - \operatorname{th}^3 \tau/3$ ,  $\hat{x}_{\text{máx}} = \begin{cases} t \operatorname{sign} \xi, & 0 \leq t \leq (T_0 + \xi)/2, \\ \xi + (T_0 - t) \operatorname{sign} \xi, & (T_0 + \xi)/2 \leq t \leq T_0. \end{cases}$   $\hat{x}_{\text{máx}} \in$

$\text{absmáx}$ . 162.  $\xi = 0 \Rightarrow \hat{x}(t) = 0$  ( $\hat{T} > 0$ ) es cualquiera  $\in \text{absmín}$ ;  $\xi \neq 0 \Rightarrow$  no hay extremales admisibles.  $|\xi| < 1 \Rightarrow S_{\text{mín}} = \xi^2$ ,  $x = \xi \operatorname{sh} t / \operatorname{sh} T \Rightarrow \mathcal{J}(x(\cdot), T) = \xi^2 \operatorname{cth} T \rightarrow \xi^2$  cuando  $T \rightarrow +\infty$ ;  $|\xi| \geq 1 \Rightarrow S_{\text{mín}} = |\xi|^3/3 + |\xi| - 1/3$ ,

$x(t) = \hat{x}_{\min}(t)$  de la respuesta al problema 161  $\Rightarrow \mathcal{J}(x(\cdot), T) \rightarrow S_{\min}$  cuando  $T \rightarrow +\infty$ .  $S_{\max} = +\infty$  ( $x(t) = \xi t/T \Rightarrow \mathcal{J}(x(\cdot), T) = \xi^2/T + \xi^2 T/3 \rightarrow +\infty$  cuando  $T \rightarrow +\infty$ ). 163.  $t e^t \in \text{absmín}$ ,  $S_{\max} = +\infty$ . 164.  $\cos t + \sin t \in \text{absmín}$ ,  $S_{\max} = +\infty$ . 165.  $\hat{x} = \pm \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \tau, \\ -\cos t / \sin \tau, & \tau \leq t \leq \pi, \end{cases}$  ( $\tau$  es la solución de la ecuación  $\tau \operatorname{tg} \tau = -1$ ),  $\hat{x}_{\min} \in \text{absmín}$ ,  $S_{\min} = -\tau^3/3$ ,  $S_{\max} = \pi$ . 166.  $\sin t \in \text{absmín}$ ,  $S_{\min} = 0$ ,  $S_{\max} = +\infty$ .

167.  $\hat{x} = \pm \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \tau, \\ -\cos(t - 3\pi/4) / \sin(\tau - 3\pi/4), & 0 \leq t \leq 3\pi/2 - \tau, \\ 3\pi/2 - t, & 3\pi/2 - \tau \leq t \leq 3\pi/2, \end{cases}$  ( $\tau$  es la raíz de la ecuación  $3\pi/2 = 2\tau + 2 \operatorname{arctg} \tau^{-1}$ )  $\in \text{absmín}$ ,  $S_{\min} = -2\tau^3/3$ ,  $S_{\max} = 3\pi/2$ .

168.  $T_0 < \pi/2 \Rightarrow \hat{x} = 0 \in \text{absmín}$ ,  $S_{\min} = 0$ ;  $T_0 = \pi/2 \Rightarrow C \sin t \in \text{absmín} \forall |C| \leq 1$ ,  $S_{\min} = 0$ ;

$T_0 > \pi/2 \Rightarrow \hat{x} = \pm \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \tau, \\ \sqrt{1 + \tau^2} \cos(t - T_0), & \tau \leq t \leq T_0, \end{cases}$   $\hat{x} \in \text{absmín}$  ( $\tau$  es la raíz de la ecuación  $\tau \operatorname{ctg}(T_0 - \tau) = 1$ ,  $\tau \in (T_0 - \pi/2, T_0)$ );  $S_{\min} = -\tau^3/3$ ,  $S_{\max} = T_0$ .

169.  $T_0 \leq \pi \Rightarrow \hat{x} = 0 \in \text{absmín}$ .  $S_{\min} = 0$ ;  $T_0 = \pi \Rightarrow C \sin t \in \text{absmín} \forall |C| \leq 1$ ,  $S_{\min} = 0$ ;  $T_0 > \pi \Rightarrow \hat{x} = \pm \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \tau, \\ \sqrt{1 + \tau^2} \cos(t - T_0/2), & \tau \leq t \leq T_0 - \tau, \end{cases}$   $\hat{x} \in \text{absmín}$  ( $\tau$  es la raíz de la ecuación  $\tau \operatorname{tg}(T_0/2 - \tau) = 1$ , situada en el segmento  $[T_0/2 - \pi/2, T_0/2]$ );  $S_{\min} = -\frac{2}{3} \tau^2$ ,  $S_{\max} = T_0$  ( $x_n(t) = \int_0^t \operatorname{sign} \sin 2\pi n \tau d\tau$ ). 170.  $(t - \pi/4 + 1) \cos t \in \text{absmáx}$ ,  $S_{\min} = -\infty$ . 171.  $t \sin t \in \text{absmín}$ ,  $S_{\max} = +\infty$ .

172.  $T_0 < \pi \Rightarrow (\xi - T_0 \cos T_0) \sin t / \sin T_0 + t \cos t \in \text{absmín}$ ;  $T_0 = \pi \Rightarrow \cos \xi = -\pi t \cos t + C \sin t \in \text{absmín} \forall C \in \mathbb{R}$ ;  $T_0 > \pi \Rightarrow$  son las extremales admisibles  $\notin \text{locextr}$  y  $S_{\min} = -\infty$ ;  $S_{\max} = +\infty$ . 173.  $(-4/\pi)t \sin t + C \sin t \forall C \in \mathbb{R}$ . 174.  $\hat{x} = \pm t \in \text{absmín}$ ,  $S_{\min} = 0$ ,  $S_{\max} = +\infty$ . También son funciones extremales admisibles  $\hat{x}(t) = \pm \sqrt{2} \cos \pi k t$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

175.  $\pm \sqrt{2} \cos \pi t \in \text{absmín}$ ,  $S_{\min} = \pi^2$ ,  $S_{\max} = +\infty$ . También son funciones extremales admisibles  $\pm \sqrt{2} \cos \pi k t$ ,  $k = 2, 3, \dots$ . 176. Funciones extremales admisibles son  $\hat{x}_k = \pm \sqrt{2} \sin((1/2 + k)\pi t)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\hat{x}_1 \in \text{absmín}$ . 177. Funciones extremales admisibles son  $\hat{x}_k = \pm \sqrt{2} \sin k\pi t$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $\hat{x}_1 \in \text{absmín}$ ,  $S_{\min} = \pi^2$ ,  $S_{\max} = +\infty$  (véase la solución en [AGT, № 6.17]). 178.  $\hat{x} = \sqrt{2 - (t-1)^2}$ . 179.  $S_{\max} = +\infty$ ,  $\sqrt{1 - t^2 + t} \in \text{absmín}$ . 180.  $S_{\max} = +\infty$ ,  $\sqrt{2 - (t-1)^2} \in \text{absmín}$  ( $\hat{T} = 1 - \sqrt{2/5}$ ). 181.  $\hat{x} = \sqrt{1 - t^2 + 2t}$ ,  $\hat{T} = 2$ .

182.  $\hat{x} = t / \sqrt{2}$ ,  $\hat{T} = 2^{1/2}$ . 183.  $\sqrt{1 - t^2} \in \text{absmáx}$ ,  $-\sqrt{1 - t^2} \in \text{absmín}$ .

184. Solución. Lagrangiana:  $L = \lambda_0 x + \lambda \sqrt{1 + \dot{x}^2}$ . Ecuación de Euler  $-\frac{d}{dt} \frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} + \lambda_0 = 0$ .  $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \dot{x} = \text{const}$ . Entonces, de las condiciones en



los extremos y de la condición isoperimétrica se deduce que  $\hat{x} = 0$ ,  $l = 2T_0$ ,  $\lambda_0 = 1 \frac{\lambda x}{\sqrt{1+x^2}} = t + C_1 \Rightarrow \dot{x} = \frac{t+C_1}{\pm \sqrt{\lambda^2 - (t-C_1)^2}}$ . Solución general:  $(t + C_1)^2 + (x + C_2)^2 = \lambda^2$ . De las condiciones en los extremos se desprende que  $C_1 = 0$ .

Para  $2T_0 < l < \pi T_0$  hay una sola extremal (con una precisión de hasta un signo) que es el arco de longitud  $l$  de la circunferencia que pasa por los puntos  $(\pm T_0, 0)$  y cuyo centro se encuentra en el eje  $x$ . Cuando  $l < 2T_0$  y  $l > \pi T_0$  no hay extremales. 185. Cuando  $l < 2T_0$  tampoco hay extremales,  $l = 2T_0 \Rightarrow \hat{x} = 0$ ,  $l > 2T_0 \Rightarrow \hat{x} = \pm C (\text{ch}(t/C) - \text{ch}(T_0/C))$ , donde el coeficiente  $C > 0$  sólo se deduce de la ecuación  $2C \text{sh}(T_0/C) = l$ . 186. Las extremales en el problema se representan en forma de líneas en cadena de tipo  $C \text{ch}(t/C)$ . Supongamos que  $\alpha$  se deduce de las ecuaciones  $\alpha = \text{sh } \tau$ ,  $\tau = \text{cth } \tau$ . Entonces, si  $|\xi| < \alpha T_0$  no habrá extremal; si  $|\xi| = \alpha T_0 \Rightarrow$  habrá una extremal; y si  $|\xi| > \alpha T_0$  habrá dos extremales. 187. Las extremales en el problema se representan en forma de líneas en cadena:  $x = C \text{ch}(t+D)/C$ . La constante  $D$  en el problema es igual a cero y la constante  $C$  ha de ser deducida de la ecuación  $C \text{ch} T_0/C = \xi$ . Si ahora tratamos de deducir  $\alpha$  del sistema de ecuaciones  $\tau = \text{cth } \tau$ ,  $\alpha = \text{sh } \tau$ , en este caso, para  $|\xi/T_0| = \alpha > \alpha$  tendremos dos extremales admisibles; para  $|\xi/T_0| = \alpha$ , una extremal admisible; y para  $|\xi/T_0| < \alpha$  no habrá extremales admisibles. El análisis detallado del problema se da en [11, pág. 427]. 188. La extremal se escribe de la siguiente forma paramétrica:

$$x = \frac{a^2}{2} (1 - \cos \tau), \quad t = \frac{a^2}{2} (\tau - \text{sen } \tau) + c.$$

Las constantes  $a$  y  $c$  se deducen unívocamente de las condiciones iniciales. La extremal admisible puede ser incluida en el campo de extremales que cubren la banda  $t_0 \leq t \leq t_1$ ,  $x > 0$ ; el integrante es cuasi regular. La fórmula principal de Weierstrass conduce a que la extremal admisible proporciona absmín,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . 189. Las extremales que satisfacen la condición inicial  $x(0) = 0$  son de la forma  $X(t, \alpha) = \alpha t + (1 + \alpha^2) t^2/4h$ . La ecuación de la envolvente de dicha familia es de tipo  $x = -h + t^2/(4h)$  (en balística tal curva es conocida con el nombre de *curva de seguridad*). Si el punto  $(T_0, \xi)$  se encuentra fuera de la curva de seguridad, no habrá extremal admisible; si ese punto se halla en la curva, habrá una sola extremal admisible; y si el mismo se encuentra debajo de la curva de seguridad, tendremos dos extremales admisibles. En este caso la extremal superior (*pendiente*) se interseca con la envolvente, es decir, ella tiene dentro un punto conjugado  $(0, T_0)$  y, por consiguiente, no proporciona un extremo fuerte. Sin embargo, el punto inferior proporciona un mínimo fuerte. La cuestión

acerca de absmín requiere un análisis complementario. 190.  $S_{\text{máx}} = +\infty$ ,  $\hat{x} = (\hat{x}_1,$

$\hat{x}_2) = (\text{ch}(t-1)/\text{ch } 1, \text{ch}(t-1)/\text{ch } 1) \in \text{absmín}$ . 191.  $S_{\text{máx}} = +\infty$ ,  $\hat{x} = (\hat{x}_1,$

$\hat{x}_2) = (\text{sen } t, -\text{sen } t) \in \text{absmín}$ . 192.  $S_{\text{máx}} = +\infty$ ,  $S_{\text{mín}} = -\infty$ . Extremal

admisible:  $\hat{x} = (3t^2 - 2t, 6t^2 - 4t)$ . 193.  $x_1 = -6t^2 + 6t$ ,  $x_2 = 3t^2 - 2t$

(extremal admisible),  $S_{\text{mín}} = -\infty$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . 194.  $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = 0 \in \text{locextr}$ ,  $S_{\text{mín}} = -\infty$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . Indicación. Utilizar el teorema de Bogoliúbov.

195.  $\hat{x}^2 = (\hat{x}_1^2, \hat{x}_2^2) = (3t^2 - 2t, 3t^2 - 6t)$ ,  $\hat{x}_2^2 = (\hat{x}_1^2, \hat{x}_2^2) = (-3t^2 + 4t, -3t^2)$  (extremales admisibles);  $S_{\text{mín}} = -\infty$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . 196. La única extremal

admisible es  $\hat{x} = \text{sen } t$ ,  $\hat{y} = \text{cos } t$  (véase la solución en [AGT, N° 823]).

197.  $|\xi| \leq 1 \Rightarrow \hat{x} = \xi$ ,  $|\xi| > 1 \Rightarrow \hat{x} = \begin{cases} C \\ C \text{ch}(t - 1/|C|) \end{cases}$ ,  $1/|C| \leq t \leq 1$ ,

donde  $C$  se deduce de la ecuación  $C \text{ ch } (1 - 1/|C|) = \xi$ . Dado que el problema es convexo,  $\hat{x} \in \text{absmín. 198. Trayectoria óptima: circunferencia de radio } T_0/(2\pi)$  (véase la solución en [ATF, pág. 110]). 199. Solución. Formalización:

$$\int_0^{T_0} \frac{t \, dt}{1+u^2} \rightarrow \text{inf}; \quad \dot{x} = u, \quad u \geq 0,$$

$x(0) = 0, x(T_0) = \xi$ . Función de Lagrange:

$$\mathcal{L} = \int_0^{T_0} L \, dt + \lambda_1 x(0) + \lambda_2 x(T_0), \quad L = \frac{\lambda_0 t}{1+u^2} + p(\dot{x} - u).$$

Condiciones necesarias:

- a) sistema de ecuaciones de Euler:  $-\dot{p} = 0$ ;  
 b) transversalidad en  $x$ :  $p(0) = \lambda_1, p(T_0) = -\lambda_2$ ;  
 c) principio de mínimo:

$$\min_{u \geq 0} \left( \frac{\lambda_0 t}{1+u^2} - pu \right) = \frac{\lambda_0 t}{1+\hat{u}^2} - p\hat{u}.$$

Si  $\lambda_0 = 0$  resultará que  $p = \text{const} \neq 0$  ( $p = 0 \stackrel{(b)}{\Rightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , o sea, todos los factores de Lagrange serán ceros)  $\Rightarrow \hat{u} = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0$ . De las condiciones en los extremos se deduce que para  $\xi = 0$  tendremos  $\hat{x} = 0$ .

Supongamos que  $\lambda_0 = 1 \stackrel{(a)}{\Rightarrow} p = \text{const} < 0$  ( $p \geq 0 \Rightarrow$  la función  $t/(1+u^2) - pu$  decrecerá monótonamente con el incremento de  $u$  y no alcanzará el mínimo). Si  $\hat{u}(t) > 0$ , en este caso  $L_u = 0 \stackrel{(c)}{\Rightarrow}$  se deducirá de la ecuación

$$p = -\frac{2ut}{(1+u^2)^2}. \quad (1)$$

Para pequeños valores tendremos  $t \min_{u \geq 0} L(t, u) = L(t, 0)$ . Por lo tanto,

$$\hat{u} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \tau \\ \hat{u}(t), & \tau \leq t \leq T_0 \end{cases}$$

El momento de curvatura del control  $\tau$  se deduce de las ecuaciones

$$p = -\frac{2\hat{u}(\tau)\tau}{(1+\hat{u}^2(\tau))^2}, \quad \tau = \frac{\tau}{1+\hat{u}^2(\tau)} - p\hat{u}(\tau) \quad (2)$$

(la segunda ecuación  $L(\tau - 0) = L(\tau)$  en (2) es la condición de coincidencia de los mínimos  $L$  en el punto  $\tau$ ). De la segunda ecuación resulta que  $-\hat{u}^2(\tau)\tau/(1+\hat{u}^2(\tau)) = p\hat{u}(\tau)$ , de donde  $p = -\tau\hat{u}(\tau)/(1+\hat{u}^2(\tau))$ . Introduciendo esta relación de en la primera ecuación de la relación (2) obtendremos  $\hat{u}^2(\tau) = 1 \Rightarrow \hat{u}(\tau) = 1$  (ya que  $\hat{u} \geq 0$ ), y en este caso, de la primera ecuación (2) otra vez obtendremos la igualdad  $\tau = -2p$ .

Después de la curvatura la solución óptima satisfará la relación (1) de la cual se deduce que

$$t = -\frac{p(1+u^2)^2}{2u} = -\frac{p}{2} \left( \frac{1}{u} + 2u + u^3 \right).$$

Pero

$$\frac{dx}{dt} = u \Rightarrow \frac{dx}{du} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{du} = u \frac{dt}{du} = -\frac{p}{2} \left( -\frac{1}{u} + 2u + 3u^3 \right).$$

Integrando esa relación y teniendo en cuenta la igualdad  $\hat{x}(\tau) = 0$ ,  $\hat{u}(\tau) = 1$  obtenemos las ecuaciones paramétricas de la curva óptima buscada:

$$\hat{x} = -\frac{p}{2} \left( \ln \frac{1}{u} + u^2 + \frac{3}{4} u^4 \right) + \frac{7}{8} p,$$

$$t = -\frac{p}{2} \left( \frac{1}{u} + 2u + u^3 \right), \quad p < 0.$$

Dicha curva se llama *curva de Newton*. Mostremos que  $\hat{x}$  proporciona un mínimo absoluto al problema. Debido al principio de mínimo, para cualquier función admisible

$$x(\cdot) \in KC^1([0, T_0]), \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = \xi,$$

$$t/(1 + \dot{x}^2(t)) - p\dot{x}(t) \geq t/(1 + \dot{\hat{x}}^2(t)) - p\dot{\hat{x}}(t).$$

Integrando esta relación y teniendo en cuenta que

$$\int_0^{T_0} \dot{\hat{x}}(t) dt = \int_0^{T_0} \dot{x}(t) dt = \xi$$

obtenemos

$$\int_0^{T_0} \frac{t dt}{1 + \dot{\hat{x}}^2} \geq \int_0^{T_0} \frac{t dt}{1 + \dot{x}^2}.$$

Por consiguiente,  $\hat{x}(\cdot) \in \text{absmín}$ . 200.  $S_{\text{máx}} = +\infty$ ;  $(t^2 - 1)/2 \in \text{absmín}$ . 201.  $S_{\text{máx}} = +\infty$ ;  $t - t^2/2 \in \text{absmín}$ . 202.  $S_{\text{máx}} = +\infty$ ;  $t^2/2 \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{mín}} = 1$ . 203.  $S_{\text{máx}} = +\infty$ ;  $t^2 - t \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{mín}} = 4$ . 204.  $S_{\text{máx}} = +\infty$ ;  $t^4 - 2t^3 + t \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{mín}} = -24/5$ . 205.  $S_{\text{máx}} = +\infty$ ,  $t^4 - 5t^3/2 + 3t^2/2 \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{mín}} = -9/5$ . 206.  $S_{\text{máx}} = +\infty$ ,  $t^4 - 2t^3 + t^2 \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{mín}} = -4/5$ . 207.  $te^t \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . 208.  $S_{\text{máx}} = +\infty$ ,  $t \ln t \in \text{absmín}$ . 209.  $S_{\text{máx}} = +\infty$ ,  $t \ln t \in \text{absmín}$ . 210.  $t \ln t \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . 211.  $S_{\text{máx}} = +\infty$ ,  $\ln t \in \text{absmín}$ . 212.  $S_{\text{máx}} = +\infty$ ,  $\ln t \in \text{absmín}$ . 213.  $S_{\text{máx}} = +\infty$ ,  $1/t \in \text{absmín}$ . 214.  $\hat{x} = \text{ch } t + C \text{ sh } t \in \text{absmín} \forall C \in \mathbb{R}$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . 215.  $\hat{x} = \text{ch } t \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . 216.  $\hat{x} = t \text{ ch } t \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . 217.  $\hat{x} = t \text{ sh } t \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . 218.  $\hat{x} = C \text{ sen } t \in \text{absmín} \forall C \in \mathbb{R}$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . 219.  $\hat{x} = \text{sen } t \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . 220.  $\hat{x} = -2(t+2) \cos t / (4+\pi) \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . 221.  $\hat{x} = \frac{(2t\pi + 4\pi) \cos t + (4t - 2\pi) \text{sen } t}{4 - 4\pi - \pi^2} \in \text{absmín}$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . 222.  $\hat{x} \in \text{absmín}$ ,

donde  $\hat{x} = (C_1 t + C_2) \text{ ch } t + (C_3 t + C_4) \text{ sh } t$ , las constantes incógnitas  $C_1, C_2, C_3,$

$C_4$  se deducen de la condición  $\hat{x}(0) = 1$ ,  $\hat{u}(0) = \hat{u}(1) = \dot{\hat{x}}(1) = 0$ ,  $\hat{u} = \hat{x} + \sqrt{2} \dot{\hat{x}}$ ,  $S_{\text{máx}} = +\infty$ . 223.  $S_{\text{máx}} = +\infty$ ,  $1/t \in \text{absmín}$ . 224.  $S_{\text{máx}} = +\infty$ ,  $\text{ch } t \text{ sen } t - \text{sh } t (t\pi \text{ sen } t + \cos t) \in \text{absmín}$ . 225.  $S_{\text{máx}} = +\infty$ ,  $\text{ch } t \text{ sen } t - \text{sh } t \cos t \in \text{absmín}$ .

226.  $S_{\text{máx}} = +\infty$ ,  $S_{\text{mín}} = -\infty$ ;  $\left( \cos t - \text{ch } t - \frac{1 + \text{ch } \pi}{\text{sh } \pi} (\text{ch } t + \text{sen } t) \right) / 2 \in$

- $\in$  locextr. 227.  $S_{\max} = +\infty$ ,  $S_{\min} = -\infty$ ;  $\left(\operatorname{sen} t + \operatorname{cth} \frac{\pi}{2} \cos t - \frac{\operatorname{ch} t + \operatorname{ch}(\pi - t)}{\operatorname{sh} \pi}\right) / 2 \in$  locextr. 228.  $S_{\max} = +\infty$ ,  $(\operatorname{sen} t)/2 + (\operatorname{sh} t) / \left(2 \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}\right) \in$   
 $\in$  absmín. 229.  $S_{\max} = +\infty$ ,  $S_{\min} = -\infty$ ;  $\frac{\operatorname{ch} t}{2 \operatorname{sh}(\pi/2)} - \frac{\cos t}{2} \in$  locextr.  
 230.  $S_{\max} = +\infty$ ,  $\hat{x} = -\cos t \in$  locextr;  $S_{\min} = -\infty$  ( $x_n(t) = \hat{x}(t) + n(\operatorname{ch}(\pi - t)) + \cos t - \frac{\operatorname{sh} \pi}{\operatorname{ch} \pi + 1}(\operatorname{sh}(\pi - t) + \operatorname{sen} t)$ ). 231.  $S_{\max} = +\infty$ ;  $\operatorname{sen} t \in$  absmín,  $S_{\min} = 0$ .  
 232.  $S_{\max} = +\infty$ .  $\left(1 + \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}\right) (\operatorname{sen} t - \operatorname{sh} t)/2 + \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} (\operatorname{ch} t - \cos t)/2 \in$  absmín.  
 233.  $S_{\max} = +\infty$ ,  $\operatorname{sen} t \in$  absmín. 234.  $S_{\max} = +\infty$ ,  $\operatorname{sh} t \in$  absmín. 235.  $S_{\max} = +\infty$ ,  $\operatorname{ch} t \in$  absmín. 236.  $S_{\max} = +\infty$ ,  $1 - \cos t \in$  absmín. 237.  $S_{\max} = +\infty$ ,  $2(\operatorname{sen} t - \cos T - t + 1)/(4 - n) \in$  absmín. 238.  $t^2 - 2 \in$  absmín,  $2 - t^2 \in$  absmáx.  
 239.  $t^2 - t \in$  absmín,  $t - t^2 \in$  absmáx. 240.  $\hat{x} = \begin{cases} -t^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ (t-2)^2 - 2, & 1 \leq t \leq 2, \end{cases} \in$  absmín.  
 241.  $\hat{x} = \begin{cases} -t^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ (t-2)^2 - 2, & 1 \leq t \leq 3, \\ -(t-4)^2, & 3 \leq t \leq 4, \end{cases} \in$  absmín,  $-\hat{x} \in$  absmáx.  
 242.  $\left(\hat{x} = \begin{cases} -t^2 - 2t, & -1 \leq t \leq 0, \\ t^2 - 2t, & 0 \leq t \leq 1, \end{cases} \hat{T} = 1\right) \in$  absmín.  
 243.  $\hat{x} = \begin{cases} -t^2/2 + 1, & 0 \leq t \leq \sqrt{3}, \\ (\sqrt{3}t - 4)^2/2 - 1, & \sqrt{3} \leq t \leq \hat{T}, \end{cases} \hat{T} = 4/\sqrt{3} \in$  absmín  
 244.  $S_{\max} = -S_{\min} = 32/3$ ;  $\hat{x}(t) = t^2 - 4t \in$  absmín,  $-\hat{x} \in$  absmáx. 245.  $S_{\max} = -S_{\min} = 32(2 - \sqrt{3})/\sqrt{3}$ ;  
 $\hat{x} = \begin{cases} t^2 + (8 - 8\sqrt{2})t, & 0 \leq t \leq 2\sqrt{2}, \\ -(t-4)^2, & 2\sqrt{2} \leq t \leq 4, \end{cases} \hat{x} \in$  absmín,  $-\hat{x} \in$  absmáx.  
 246.  $\hat{x} = \begin{cases} -t^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ (t-2)^2 - 2, & 1 \leq t \leq 3, \\ -(t-4)^2, & 3 \leq t \leq 4, \end{cases} \hat{x} \in$  absmín,  $-\hat{x} \in$  absmáx.  
 $S_{\min} = -S_{\max} = -4$ .  
 247.  $\hat{x} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ -(t-1)^2, & 1 \leq t \leq 2, \end{cases} \in$  absmín.  
 248.  $\hat{x} = \begin{cases} -t^3 + 6t^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ 3t^2 + 3t - 1, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases} \in$  absmín.  
 249.  $\hat{x} = \begin{cases} -t^2/2, & 0 \leq t \leq 1/2, \\ t^2/3 - t^2 + t/4 - 1/24, & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \in$  absmín.  
 250.  $S_{\max} = +\infty$ ;  $2t \in$  absmín,  $S_{\min} = 0$ . 251.  $S_{\max} = +\infty$ ;  $5(t^4 - 6t^2 + 5)/16 \in$   
 $\in$  absmín,  $S_{\min} = 15/2$ . 252.  $S_{\max} = +\infty$ ;  $15t^2(t-2)^2/8 \in$  absmín,  $S_{\min} = 45$ .  
 253.  $S_{\max} = +\infty$ ;  $30t^2(t-1)^2 \in$  absmín,  $S_{\min} = 720$ . 254.  $S_{\max} = +\infty$ ;  $\hat{x} =$   
 $= t^2/2 (\hat{T} = 1) \in$  absmín. 255.  $S_{\max} = +\infty$ ,  $\hat{x} = t^2/16 - t^2/4 (\hat{T} = 4) \in$  absmín.  
 256.  $t^3 - t^2 \in$  absmáx,  $t^2 - t^3 \in$  absmín. 257.  $S_{\max} = +\infty$ ;  $(t^2 + 2t + 2)/5 \in$  absmín,  
 $S_{\min} = 0$ . 258.  $S_{\max} = +\infty$ ;  $(t^3 - 5t^2 + 10t^2)/6 \in$  absmín,  $S_{\min} = 20$ . 259.  $S_{\max} =$   
 $= +\infty$ ;  $(8t^5 - 25t^4 + 20t^3)/3 \in$  absmín,  $S_{\min} = 320$ . 260.  $S_{\max} = +\infty$ ;  $6t^5 -$   
 $- 15t^4 + 10t^3 \in$  absmín,  $S_{\min} = 720$ .

## Breve tabla cronológica

Por lo visto, el problema isoperimétrico clásico fue discutido aún en el siglo V antes de nuestra era, ya que de él hace mención Aristóteles (384—322 a.n.e.).

En las obras de Euclides (s. III a.n.e.), Arquímedes (287—212 a.n.e.) y Apolonio (alrededor de 260—170 a.n.e.) se encuentran problemas de geometría antigua.

Condición necesaria: teorema de Fermat (Fermat, 1629; Newton, 1671; Leibniz, 1684).

Principio de variaciones: Fermat, 1662.

Problema de Newton: Newton, 1687.

Problema de la braquistocrona: J. Bernoulli, 1696.

Trabajos de Euler (1707—1783) sobre el cálculo de variaciones (desde 1726).

Deducción de la ecuación de Euler por el método directo: Euler, 1744.

Regla de solución del problema isoperimétrico: Euler, 1744 (demostración estricta: Weierstrass, alrededor de 1880).

Problema de derivadas superiores (ecuación de Euler — Poisson): Euler, 1744; Poisson, 1833.

Trabajos de Lagrange (1736—1813) sobre el cálculo de variaciones (desde 1755).

Método de variaciones de Lagrange: Lagrange, 1759.

Ecuación de Euler para un problema multidimensional: Euler, 1770, Gauss, 1813; Ostrogradski, 1826; Poisson, 1831.

Problema de Lagrange: planteamiento y definición de la regla de factores: Lagrange, 1788, demostración de dicha regla; Mayer, 1886.

Condición de Legendre: Legendre, 1786.

Regla de los factores de Lagrange para problemas de dimensión finita: Lagrange, 1797.

Teoría de Hamilton — Jacobi: Hamilton, 1834, Jacobi, 1837.

Condiciones de extremo débil: Jacobi, 1837.

Condiciones de extremo fuerte: Weierstrass, alrededor de 1880.

Teoría del campo: Kneser, Hilbert, 1900.

Principios del análisis de dimensión infinita: Volterra, 1887; Hilbert, 1906; Banach, 1932.

Principios del análisis convexo de conjuntos: Minkowski, 1891; de funciones: Fenchel, 1949.

Programación lineal y convexa: L. V. Kantoróvich, 1939; Danzig, 1947; Kuhn — Tucker, 1951.

Teoría de control óptimo: L. S. Pontriaguin y su escuela, 1953—1961.

## Lista de designaciones

- $\{x \mid P(x)\}$ , conjunto de elementos  $x$  dotados de la propiedad  $P(x)$ .  
 $x(\cdot)$ , designación con que se subraya que  $x(\cdot)$  es un elemento del espacio funcional
- $F \circ G$ , superposición de las aplicaciones  $G$  y  $F$ :  $(F \circ G)(x) = F(G(x))$   
 $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , recta numérica ampliada  
 $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cup \{+\}$   
 $\mathbb{R}_+^n$ , octante no negativo en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$   
 $\hat{B}(x, r) = \{y \mid \|y - x\| \leq r\}$ , esfera cerrada de radio  $r$  con centro  $x$   
 $\tilde{B}(x, r) = \{y \mid \|y - x\| < r\}$ , esfera abierta de radio  $r$  con centro  $x$   
 $T_x M(T_x + M)$ , conjunto de vectores tangentes (unilaterales tangentes) al conjunto  $M$  en el punto  $x$   
 $X^*$ , espacio conjugado con  $X$   
 $\langle x^*, x \rangle$ , valor de la funcional lineal  $x^*$  en el elemento  $x$   
 $A^\perp = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x \rangle = 0 \forall x \in A\}$ , anulador del conjunto  $A$   
 $\text{dom } f = \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}$ , conjunto efectivo de la función  $f$   
 $\text{epi } f = \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times X \mid \alpha \geq f(x), x \in \text{dom } f\}$ , supergráfica de la función  $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$   
 $\text{lin } A$ , envoltura lineal del conjunto  $A$   
 $\text{co } A$ , envoltura convexa del conjunto  $A$   
 $\text{cone } A$ , envoltura cónica del conjunto  $A$   
 $\text{extr } A$ , colección de puntos extremos del conjunto  $A$   
 $\mathcal{L}(X, Y)$ , espacio de aplicaciones lineales continuas del espacio  $X$  en el espacio  $Y$ ; las aplicaciones de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  pueden identificarse con las matrices de esas mismas aplicaciones  
 $I$ , operador unidad (matriz)  
 $\Lambda^*$ , operador conjugado con el operador  $\Lambda$ ,  $\langle \Lambda^* y^*, x \rangle = \langle y^*, \Lambda x \rangle$   
 $U \in \mathcal{O}(X)$ , el conjunto  $U$  está abierto en el espacio  $X$   
 $U \in \mathcal{O}(x, X)$ , el conjunto  $U$  que contiene el elemento  $x$  está abierto en  $X$   
 $\text{cl } X$ , colección de conjuntos cerrados en el espacio  $X$   
 $SL(X)$ , conjunto de funciones sublineales en el espacio  $X$   
 $C([t_0, t_1])$ , espacio de funciones continuas en el segmento  $[t_0, t_1]$  con la norma  $\|x(\cdot)\|_0 = \max_{t \in [t_0, t_1]} |x(t)|$   
 $C^r([t_0, t_1])$ , espacio de funciones  $r$  veces continuamente diferenciables en el segmento  $[t_0, t_1]$  con la norma  $\|x(\cdot)\|_r = \max \{\|x(\cdot)\|_0, \|\dot{x}(\cdot)\|_0, \dots, \|x^{(r)}(\cdot)\|_0\}$   
 $KC([t_0, t_1])$ , espacio de funciones continuas a trozos en el segmento  $[t_0, t_1]$ , es decir, que tienen no más de un número finito de discontinuidades de primera especie (en los puntos de discontinuidad existen límites finitos por la izquierda y por la derecha)  
 $\delta F(x, \cdot)$ , variación de la aplicación  $F$  en el punto  $x$  según Lagrange  
 $F \in D^k(x)$ , la aplicación  $F$  es  $k$  veces ( $k > 1$ ) diferenciable en el punto  $x$  según Frechet  
 $F \in SD(x)$ , la aplicación  $F$  es estrictamente diferenciable en el punto  $x$  según Frechet  
 $\partial F(x)$ , subdiferencial de la función  $F$  en el punto  $x$   
 $\hat{x} \in \text{absmín}$  (absmáx, absextr),  $\hat{x}$  proporciona un mínimo (máximo o extremo) absoluto al problema  
 $\hat{x} \in \text{locmín}$  (locmáx, locextr),  $\hat{x}$  proporciona un mínimo (máximo o extremo) local al problema  
 $S_{Pr}$ , valor numérico de problema Pr  
 $(P)$ , problema reducido a solución

## Bibliografía

- AGT Alexéev V. M., Galéev E. M., Tijomírov V. M. Colección de problemas de optimización. Moscú, Naúka, 1984 (en ruso).
- ATF Alexéev V. M., Tijomírov V. M., Fomín S. V. Control óptimo. Moscú, Naúka, 1979 (en ruso).
- KF Kolmogórov A. N., Fomín S. V. Elementos de la teoría de funciones y el análisis funcional. Moscú, Mir, 1978.
1. Ajiezer N. Z. Cálculo de variaciones. Járkov, Editorial de la Universidad de Járkov, 1981 (en ruso).
  2. Bliss G. A. Conferencias del cálculo de variaciones. Moscú, IL, 1950 (en ruso).
  3. Boltianski V. G. Métodos matemáticos de control óptimo. Moscú, Naúka, 1969 (en ruso).
  4. Busláev V. S. Cálculo de variaciones. Leningrado, Editorial de la Universidad estatal de Leningrado, 1980 (en ruso).
  5. Vasiliev F. P. Métodos numéricos de solución de problemas extremales. Moscú, Naúka, 1980 (en ruso).
  6. Gabásov R., Ktrílova F. M. Métodos de optimización. Minsk, Editorial de la Universidad Estatal de Bielorrusia, 1981 (en ruso).
  7. Gavurin M. K., Malozémov V. N. Problemas extremales con acotaciones lineales. Leningrado, Editorial de la Universidad Estatal de Leningrado, 1984 (en ruso).
  8. Gelfand I. M., Fomín S. V. Cálculo de variaciones. Moscú, Fizmatgiz, 1964 (en ruso).
  9. Zastavski Yu. L. Colección de problemas de programación lineal. Moscú, Naúka, 1969 (en ruso).
  10. Zórich V. A. Análisis matemático, primera y segunda partes. Moscú, Naúka, 1981, 1984 (en ruso).
  11. Iofte A. D., Tijomírov V. M. Teoría de los problemas extremales. Moscú, Naúka, 1974 (en ruso).
  12. Krasnov M. L., Makárenko G. I., Kiselev A. I. Cálculo variacional. Moscú, Mir, 1976.
  13. Karmánov V. G. Programación matemática. Moscú, Naúka, 1980 (en ruso).
  14. Mantúrov O. V., Matvéev N. M. Curso de matemáticas superiores. Moscú, Visshaya shkola, 1986 (en ruso).
  15. Nikolski S. M. Curso de análisis matemático. Tomos 1 y 2. Moscú, Naúka, 1975 (en ruso).
  16. Poliakov B. T. Introducción a la optimización. Moscú, Naúka 1983 (en ruso).
  17. Pontriaguín L. S. y otros. Teoría matemática de los procesos óptimos. Moscú, Naúka, 1976 (en ruso).
  18. Pshentchni B. N. Condiciones de extremo necesarias. Moscú, Naúka, 1982 (en ruso).
  19. Pshentchni B. N. Análisis convexo y problemas extremales. Moscú, Naúka, 1980 (en ruso).
  20. Rockafellar R. Convex Analysis. Princeton (USA): Princeton University Press, 1970.
  21. Sújarev A. G., Timójov A. V., Fiódorov V. V. Curso de métodos de optimización. Moscú, Naúka, 1986 (en ruso).
  22. Young L. Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory. Philadelphia: Saunders, 1969.

## Índice alfabético de materias

- Aguja elemental 104  
Anulador 122
- Bipolar 40, 132
- Campo de extremales 161  
— central 161  
Condición de Weierstrass 143, 149  
— de Jacobi 143, 151  
— de Legendre 143, 150  
— de Slater 56
- Derivada direccional 26  
Desigualdad de Bernstein 188  
— de Jensen 38  
— de Young 132  
Diferenciabilidad según Gateaux 27  
— estricta 26, 29  
— según Frechet 26
- Ecuación de Jacobi 147, 148  
— de Euler 150, 174  
— de Euler-Poisson 99, 100  
Envoltura cónica convexa 39
- Factores de Lagrange 15, 52  
Fórmula de Weierstrass, principal 165  
— de Taylor 33  
Función de Weierstrass 148  
— cerrada 42  
— conjugada 42  
— convexa 42  
— — homogénea 42  
— de apoyo 41, 132, 141  
— de inclinación del campo 162  
— indicadora 42, 133  
— de Lagrange 15  
— de Minkowski 41, 132  
— propia 42  
— segunda conjugada 40
- Integral de impulso 83  
— de energía 83  
Integrante casi regular 148  
— regular 148
- Jacobiano 34
- Lagrangiana 52, 55  
Lema de Banach 156  
— de dualidad para el problema sobre la distancia más corta 156  
— de incremento de la funcional 105  
— de minimax 141  
— de no trivialidad del anulador 122  
— de propiedades de variación elemental 104  
— de redondeo de los ángulos 145  
— de variación acicular 107  
— del carácter cerrado de la imagen 123  
— del cono conjugado 155  
— del operador inverso derecho 122  
— del sistema centrado 106  
— de Dubois-Reimond 78  
— de Hoffman 156
- Máximo (mínimo) 12  
— absoluto 13  
— débil 9  
— fuerte 9  
— local 13
- Método de Newton 63  
— de gradiente 63  
Método simplex 65
- Operador regular (sobreyectivo) 157  
— conjugado 21
- Paquete de agujas 106  
Polar 40, 132  
Principio de Lagrange 14, 89  
— del máximo de Pontriaguin 102  
Problema de Apolonio 102  
— de Arquímedes 197  
— de Bolz 76, 151  
— de derivadas superiores 98  
— de extremos móviles 96  
— de acción rápida 112  
— de control óptimo 101, 172  
— de problemas lineales en variables fásicas 172  
— elemental del cálculo clásico de variaciones 81, 143  
— dual 130, 168



- de aterrizaje suave de un aparato cósmico 179
- de programación convexa 48, 55, 166
- de programación lineal 64, 166
- de forma canónica 65, 168
- de forma normal 65, 168
- de Euclides 8, 19, 197
- de Fermat 9
- de Goddard 182
- de Herón 197
- isoperimétrico 8, 85
- de Kepler 197
- de Lagrange 89
- de Liapunov 169
- de Newton, aerodinámico 180
- de Schwarz 196
- de Steiner 196
- de Tartaglia 197
- de Ulam 185
- de Zenodor 197
- Puntos admisibles 13
  - conjugados 147
  - críticos 14
  - estacionarios 15
  - extremos 74
- Separabilidad 23, 117
  - estricta 23
- S-función 164
- Subdiferencial 41, 132
- Supergráfica 38, 134
- Teorema de Banach del operador inverso 122
  - de Bogolúbov 178
  - de bipolar 42, 133
  - de compacidad de la polar y la subdiferencial 43
  - de depuración 46, 137
  - de diferencial total 33
  - de separabilidad, segundo 23, 120
  - —, primero 23, 119
  - de superposición 29
  - del espacio tangente 34, 37
  - del valor medio 31
  - de Dubowizki-Miliútín 45, 136
  - de Euler-Lagrange 90
  - de Fenchel-Moreau 42, 133
  - de Fermat 9, 54
  - de Hahn-Banach 117
  - de Helli 130
  - de Kuhn-Tucker 55, 168
  - de Liapunov 126, 127
  - de Lusternik 34
  - de Michael de la selección continua 123
  - de Minkowski 43
  - de Moreau-Rocafellar 45, 136
  - de Tonelli 177
  - de Weierstrass 22
- Terminante 152
- Transformación de Legendre—Young-Fenchel 40, 44, 132
- Variación acicular de control 104
  - de funciones 108
- Variaciones de Lagrange 26, 78
- Vector tangente 36
  - unilateral (semitangente) 36