CURSO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

L.D. KUDRIÁVTSEV

1

3 s. antes de n.e.
ARQUÍMEDES

1601 P. FERMAT 1665

1596 R.DESCARTES 1650

1643 I.NEWTON 1727

1646 G. LEIBNIZ 1716

1707 L. EULER 1783

1685 B.TAYLOR 1731

1717 J. D'ALEMBERT 1783

1736 J.LAGRANGE 1813

1777 C. GAUSS 1855

1749 P. LAPLACE 1827

1772 J. FOURIER 1837

1789 A.CAUCHY 1857

1781 B.BOLZANO 1848

1792 N.I. LOBACHEVSKI 1856

1902 M.V. OSTROGRADSKI 1862

ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР •

Л. Д. КУДРЯВЦЕВ

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Том I

МОСКВА
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»

CURSO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

L. D. KUDRIÁVTSEV

1

EDITORIAL MIR. MOSCÚ

Traducido del ruso por V. Fernández

Impreso en la URSS

На испанском языке

Indice

		Pág.
Prefacio		13

CAPÍTULO PRIMERO

Cálculo diferencial de las funciones de una variable

§ 1. Conjuntos y funciones. Símbolos lógicos — 15

- 1.1. Conjuntos. Operaciones sobre conjuntos — 15
- 1.2.* Funciones — 17
- 1.3.* Conjuntos finitos y números naturales. Sucesiones — 21
- 1.4. Símbolos lógicos — 22

§ 2. Números reales. Conjuntos numéricos — 24

- 2.1. Propiedades de los números reales — 24
- 2.2.* Propiedades de la adición y de la multiplicación — 27
- 2.3.* Propiedad de ordenamiento — 33
- 2.4.* Propiedad de continuidad de los números reales — 36
- 2.5.* Cortaduras en el conjunto de los números reales — 36
- 2.6.* Potencias racionales de los números reales — 40

§ 3. Conjuntos numéricos — 42

- 3.1. Recta numérica extendida — 42
- 3.2. Intervalos de números reales. Entornos — 43
- 3.3. Conjuntos acotados y no acotados — 45
- 3.4. Cotas superior e inferior de los conjuntos de números — 47
- 3.5. Principio de Arquímedes — 51
- 3.6. Principio de los segmentos encajados — 52

§ 4. Límite de una sucesión — 56

- 4.1. Definición de límite de una sucesión — 56
- 4.2. Límites infinitos — 60
- 4.3. Propiedades más sencillas del límite de una sucesión — 62
- 4.4. Acotación de las sucesiones convergentes — 65
- 4.5. Sucesiones monótonas — 66
- 4.6. Teorema de Bolzano — Weierstrass — 69
- 4.7. Criterio de Cauchy para la convergencia de sucesiones — 71
- 4.8. Sucesiones infinitesimales — 72
- 4.9. Propiedades de los límites relacionadas con las operaciones aritméticas sobre las sucesiones — 74
- 4.10. Representación de los números reales por fracciones decimales infinitas — 82
- 4.11.* Numerabilidad de los números racionales. Innumerabilidad de los números reales — 88
- 4.12.* Límites *superior* e inferior de las sucesiones — 92

			Pág.
§ 5.	Límite y continuidad de las funciones		94
	5.1.	Funciones reales	94
	5.2.	Formas de representar funciones	96
	5.3.	Funciones elementales y su clasificación	100
	5.4.	Primera definición de límite de una función	101
	5.5	Funciones continuas	108
	5.6.	Condiciones de la existencia del límite de una función	111
	5.7.	Segunda definición de límite de una función	112
	5.8.	Límite de una función por la unión de conjuntos	116
	5.9.	Límites unilaterales y continuidad unilateral	117
	5.10.	Propiedades de los límites de las funciones	120
	5.11.	Funciones infinitamente pequeñas e infinitamente grandes	124
	5.12.	Diferentes formas de escritura de la continuidad de una función en un punto	126
	5.13.	Clasificación de los puntos de discontinuidad de una función	128
	5.14.	Límites de las funciones monótonas	130
	5.15.	Criterio de Cauchy de existencia del límite de una función	135
	5.16.	Límite y continuidad de la composición de funciones	136
§ 6.	Propiedades de las funciones continuas sobre los intervalos		139
	6.1.	Acotación de las funciones continuas. Valores extremales	139
	6.2.	Valores intermedios de las funciones continuas	141
	6.3.	Funciones inversas	143
§ 7.	Continuidad de las funciones elementales		149
	7.1.	Polinomios y funciones racionales fraccionales	149
	7.2.	Funciones exponenciales, logarítmicas y potenciales	150
	7.3.	Funciones trigonométricas y trigonométricas inversas	157
	7.4.	Continuidad de funciones elementales	158
§ 8.	Comparación de funciones. Cálculo de los límites		159
	8.1.	Algunos límites notables	159
	8.2.	Comparación de funciones	163
	8.3.	Funciones equivalentes	171
	8.4.	Método de extracción de la parte principal de la función y su aplicación en el cálculo de límites	174
§ 9.	Derivada y diferencial		177
	9.1.	Definición de derivada	177
	9.2.	Diferencial de una función	179
	9.3.	Sentido geométrico de la derivada y la diferencial	184
	9.4.	Sentido físico de la derivada y de la diferencial	187
	9.5.	Reglas del cálculo de las derivadas, relacionadas con las operaciones aritméticas sobre las funciones	190
	9.6.	Derivada de la función inversa	193
	9.7.	Derivada y diferencial de una función compuesta	196
	9.8.	Funciones hiperbólicas y sus derivadas	202

		Pág.
§ 10.	Derivadas y diferenciales de órdenes superiores	204
10.1.	Derivadas de órdenes superiores	204
10.2.	Derivadas de órdenes superiores de la suma y del producto de funciones	206
10.3.	Derivadas de órdenes superiores de las funciones compuestas, de las funciones inversas y de las funciones dadas en forma paramétrica	207
10.4.	Diferenciales de órdenes superiores	210
§ 11.	Teoremas sobre el valor medio para las funciones diferenciables	212
11.1	Teorema de Fermat	212
11.2.	Teoremas de Rolle, Lagrange y Cauchy sobre los valores medios	213
§ 12.	Resolución de las indeterminaciones por la regla de L'Hospital	221
12.1.	Indeterminaciones de la forma 0/0	221
12.2.	Indeterminaciones de la forma ∞/∞	224
§ 13.	Fórmula de Taylor	231
13.1.	Deducción de la fórmula de Taylor	231
13.2.	El polinomio de Taylor como el polinomio de mejor aproximación de una función en un entorno del punto dado	234
13.3.	Ejemplos de desarrollo según la fórmula de Taylor	236
13.4.	Cálculo de límites con ayuda de la fórmula de Taylor (método de selección de la parte principal)	240
§ 14.	Investigación del comportamiento de las funciones	242
14.1.	Criterio de monotonía de las funciones	242
14.2.	Determinación de los valores máximos y mínimos de la función	243
14.3.	Convexidad y puntos de inflexión	251
14.4.	Asíntotas	258
14.5.	Construcción de gráficas de funciones	260
§ 15.	Función vectorial	270
15.1.	Concepto de límite y continuidad para una función vectorial	270
15.2.	Derivada y diferencial de una función vectorial	272
§ 16.	Longitud de curva	276
16.1.	Concepto de curva	276
16.2.*	Curvas dadas paramétricamente	279
16.3.	Orientación de una curva. Arco de curva. Suma de curvas. Representación implícita de curvas	283
16.4.	Tangente a la curva. Sentido geométrico de la derivada de una función vectorial	284
16.5.	Longitud del arco de una curva	287
16.6.	Curvas planas	293
16.7.	Sentido físico de la derivada de una función vectorial	295

		Pág
§ 17.	Curvatura de una curva	296
17.1.	Dos lemas. Componentes radial y transversal de la velocidad	296
17.2.	Definición de curvatura de una curva y su cálculo	299
17.3.	Normal principal. Plano osculador	301
17.4.	Centro de curvatura y evoluta de la curva	304
17.5.	Fórmulas para la curvatura y la evoluta de una curva plana	304

CAPÍTULO SEGUNDO

Cálculo diferencial de funciones de varias variables

§ 18.	Conjuntos en el plano y en el espacio	309
18.1.	Entornos de los puntos. Límites de las sucesiones de puntos	309
18.2.	Distintos tipos de conjuntos	319
18.3.	Compactos	329
18.4.	Espacios vectoriales de varias dimensiones	334
§ 19.	Límite y continuidad de funciones de varias variables	339
19.1.	Funciones de varias variables	339
19.2.	Límite de una función y su continuidad	340
19.3.	Funciones continuas	346
19.4.	Propiedades de los límites de las funciones de varias variables. Propiedades de las funciones continuas	347
19.5.	Límite y continuidad de la composición de funciones	348
19.6.	Teoremas acerca de las funciones continuas sobre los conjuntos	351
19.7.	Continuidad uniforme de las funciones. Módulo de continuidad	353
§ 20.	Derivadas parciales. Diferenciabilidad de las funciones de varias variables	359
20.1.	Derivadas parciales y diferenciales parciales	359
20.2.	Diferenciación de funciones en un punto	362
20.3.	Diferenciación de la función compuesta	369
20.4.	Invariancia de la forma de la primera diferencial con respecto a la elección de las variables. Regla de cálculo de las diferenciales	371
20.5.	Sentido geométrico de las derivadas parciales y de la diferencial total	377
20.6.	Gradiente de la función	379
20.7.	Derivada respecto a una dirección	380
20.8.	Ejemplo de la investigación de funciones de dos variables	385
§ 21.	Derivadas parciales y diferenciales de órdenes superiores	387
21.1.	Derivadas parciales de órdenes superiores	387
21.2.	Diferenciales de órdenes superiores	387

Pág.

CAPÍTULO TERCERO

Cálculo integral de las funciones de una variable

§ 22. Definición y propiedades de la integral indefinida 396

22.1. Primitiva e integral indefinida 396
22.2. Integrales de tabla 400
22.3. Integración por sustitución (cambio de variable) 402
22.4. Integración por partes 405

§ 23. Algunos conocimientos sobre números complejos y polinomios 407

23.1. Números complejos 407
23.2.* Teoría formal de los números complejos 412
23.3. Algunos conceptos del análisis en la región de los números complejos 413
23.4. Descomposición de polinomios en factores 416
23.5.* Máximo común divisor de polinomios 419
23.6. Descomposición de las fracciones racionales propias en fracciones elementales 423

§ 24. Integración de fracciones racionales 429

24.1. Integración de fracciones racionales elementales 429
24.2. Caso general 431
24.3.* Método de Ostrogradski 433

§ 25. Integración de algunas irracionalidades 438

25.1. Observaciones previas 438
25.2. Integrales del tipo $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right]dx$ 439
25.3. Integrales del tipo $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$. Sustituciones de Euler 441
25.4. Integrales del binomio diferencial 443
25.5 Integrales del tipo $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ 445

§ 26. Integración de algunas funciones trascendentes 447

26.1. Integrales del tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$ 447
26.2. Integrales del tipo $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$ 449
26.3. Integrales del tipo $\int \operatorname{sen} \alpha x \cos \beta x\, dx$ 450
26.4. Integrales de funciones trascendentes calculables integrando por partes 451
26.5. Integrales del tipo $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\, dx$ 453
26.6. Observaciones sobre las integrales no expresables a través de funciones elementales 453

§ 27. Integral definida 455

27.1. Definición de la integral según Riemann 455

			Pág
	27.2.	Acotación de una función integrable	459
	27.3.	Sumas superiores e inferiores de Darboux. Integrales superior e inferior de Darboux	461
	27.4.	Condiciones necesarias y suficientes de integrabilidad	464
	27.5.	Integrabilidad de las funciones continuas y monótonas	465
§ 28.	Propiedades de las funciones integrables		467
	28.1.	Propiedades de la integral definida	467
	28.2.	Primer teorema sobre el valor medio para la integral definida	479
	28.3.	Integrabilidad de las funciones continuas a trozos	483
	28.4*	Desigualdades integrales de Hölder y Minkowski	485
§ 29.	Integral definida con límite superior variable		487
	29.1.	Continuidad de la integral respecto al límite superior	487
	29.2.	Diferenciabilidad de la integral respecto al límite superior. Existencia de la primitiva de una función continua	488
	29.3.	Fórmula de Newton — Leibniz	491
§ 30.	Fórmula del cambio de variable en la integral e integración por partes		495
	30.1.	Cambio de variable	495
	30.2.	Integración por partes	498
	30.3*	Segundo teorema sobre el valor medio para la integral definida	501
	30.4.	Integral de una función vectorial	503
§ 31.	Medida de los conjuntos abiertos planos		505
	31.1.	Definición de medida (área) de conjuntos abiertos	505
	31.2.	Propiedades de la medida de los conjuntos abiertos	508
§ 32.	Algunas aplicaciones geométricas y físicas de la integral definida		512
	32.1.	Cálculo de las áreas	512
	32.2.	Volumen de un cuerpo de revolución	519
	32.3.	Cálculo de la longitud de curva	521
	32.4.	Area de una superficie de revolución	526
	32.5	Trabajo de una fuerza	529
	32.6.	Cálculo de los momentos estáticos y de las coordenadas del centro de gravedad de una curva	530
§ 33.	Integrales impropias		533
	33.1.	Definición de integrales impropias	533
	33.2.	Fórmulas de cálculo integral para las integrales impropias	540
	33.3.	Integrales impropias de funciones no negativas	545
	33.4.	Criterio de Cauchy de la convergencia de integrales impropias	552
	33.5.	Integrales absolutamente convergentes	553
	33.6.	Análisis de la convergencia de las integrales	557
§ 34*	Comportamiento asintótico de las integrales con límites de integración variables		562

CAPÍTULO CUARTO

Series

Pág.

§ 35. Series numéricas 569

35.1. Definición de serie y su convergencia 569
35.2. Propiedades de las series convergentes 572
35.3. Criterio de Cauchy de la convergencia de la serie 574
35.4. Series con términos no negativos 575
35.5. Criterio de comparación para las series con términos no negativos. Método de selección de la parte principal del término de la serie 578
35.6. Criterios de D'Alembert y de Cauchy para series con términos no negativos 582
35.7. Criterio integral de convergencia de las series con términos no negativos 585
35.8. Desigualdades de Hölder y de Minkowski para las sumas finitas e infinitas 587
35.9. Series de términos de signo variable 589
35.10. Series absolutamente convergentes. Aplicación de las series absolutamente convergentes a la investigación de la convergencia de las series arbitrarias 592
35.11. Criterios de D'Alembert y Cauchy para series numéricas arbitrarias 599
35.12. Series convergentes que no convergen absolutamente. Teorema de Riemann 600
35.13. Transformación de Abel. Criterios de convergencia de Dirichlet y de Abel 604
35.14. Comportamiento asintótico de los restos de las series convergentes y de las sumas parciales de algunas series divergentes 608
35.15. Sobre la sumabilidad de series por el método de las medias aritméticas 612

§ 36. Sucesiones funcionales y series de funciones 614

36.1. Convergencia de sucesiones funcionales y series de funciones 614
36.2. Convergencia uniforme de las sucesiones funcionales 617
36.3. Series de funciones uniformemente convergentes 624
36.4. Propiedades de las series y sucesiones uniformemente convergentes 634

§ 37. Series de potencias 642

37.1. Radio de convergencia y círculo de convergencia de una serie de potencias 642
37.2* Fórmula de Cauchy — Hadamard para el radio de convergencia de una serie de potencias 649
37.3. Funciones analíticas 651
37.4. Funciones analíticas reales 653
37.5. Desarrollo de funciones en series de potencias. Diferentes formas de escritura del término residual de la fórmula de Taylor 656

			Pág.
	37.6.	Desarrollo de las funciones elementales en series de Taylor	661
	37.7.	Métodos de desarrollo de las funciones en series de potencia	663
	37.8.	Fórmula de Stirling	674
	37.9.*	Fórmula y serie de Taylor para las funciones vectoriales	677
	37.10.*	Series de potencias asintóticas	679
	37.11.*	Propiedades de las series asintóticas de potencias	684
§ 38.*	Series múltiples		689
	38.1.	Series numéricas múltiples	689
	38.2.	Series de funciones múltiples	696
Indice alfabético de autores			700
Indice alfabético de materias			701

Prefacio

En el presente Curso de análisis matemático se exponen tanto los métodos clásicos tradicionales, como los modernos que han surgido en el transcurso de las últimas décadas. Los números reales se introducen axiomáticamente. Este camino permite exponer la información sobre los números, imprescindible para el análisis, en una forma más completa y compacta. Al mismo tiempo, dicho camino parece ser más perfecto desde el punto de vista lógico, pues, al recurrir a otros métodos de construcción de la teoría de números reales que se llaman corrientemente "constructivos" (cuando por base se toman fracciones decimales infinitas o secciones en el dominio de números racionales, o bien las clases de sucesiones fundamentales equivalentes de números racionales), de todas formas resulta necesario introducir el axioma de existencia (no contradicción) de un conjunto de números reales, en ausencia de los cuales las construcciones que se realizan están privadas de una terminación lógica. Por eso es más fácil, partiendo de la definición axiomática de los números reales, pasar en seguida al estudio del análisis matemático en el sentido propio de la palabra.

La exposición del material en el Curso se efectúa, en lo fundamental, sobre la base del método deductivo: todos los conceptos introducidos se estudian al principio, cuando sea posible, en las situaciones más simples y sólo después de haberse realizado su consideración detallada, sigue la generalización ulterior. Así, por ejemplo, el concepto de límite se estudia primeramente para las sucesiones numéricas y después, para las funciones de una sola variable, a continuación se introduce el concepto de límite según un conjunto en el espacio euclídeo, el de límite de las sumas integrales y, por fin, todo termina con la consideración de la noción general de límite según un filtro en un espacio topológico.

Los teoremas a demostrar no siempre se enuncian con la generalización máxima; a veces, con el fin de aclarar mejor la esencia de un problema que se considera, como también la idea de la demostración, la consideración se realiza sólo para las funciones suficientemente suaves. Tal punto de vista se justifica también por lo que, debido a la densidad de las funciones suaves en los espacios funcionales correspondientes, varios teoremas demostrados para estas funciones pueden extenderse, mediante un procedimiento único, consistente en el paso límite, a clases más amplias de funciones. Lamentablemente, esta idea no puede ser realizada hasta el fin sin que aumente considerablemente el volumen del libro, a consecuencia de lo cual la cuestión acerca de la densidad de las funciones "buenas" en diversos espacios funcionales se ha considerado en el Curso sólo para los casos más sencillos.

Una gran atención se presta en el libro a la resolución de problemas con ayuda de procedimientos basados en la teoría que se expone. Además, se recomiendan al lector, a título de trabajo individual, toda una serie de ejercicios y problemas. La resolución de problemas es muy útil para la asimilación activa del análisis matemático. No obstante, el surtido de los mismos, en lo que se refiere a su volumen, no puede sustituir ni mucho menos una recopilación de problemas. Algunos de los problemas ofrecidos son bastante difíciles. La resolución de éstos no es necesaria para dominar el material, exigiendo, sin embargo, mucho tiempo. Están asociados, por regla general, con hechos matemáticos interesantes y suficientemente profundos, para cuya exposición detallada faltaría lugar en el libro. La numeración de los ejercicios en el libro viene por separado en cada párrafo; la de los problemas, lo mismo que la de las figuras, es continua.

La exposición del análisis matemático se lleva a cabo a un nivel accesible para un amplio círculo de estudiantes. Las cuestiones que no integran los programas de matemáticas superiores para las especialidades de ingeniería y están dedicadas a un estudio más profundo de aquellos apartados del análisis que son indispensables para los estudiantes de las especialidades físico-matemáticas, se marcan con un asterisco. Gracias a esto, el manual puede utilizarse en los centros de enseñanza superior de distinto nivel de educación matemática. Una parte considerable del material reflejado en el libro se viene leyendo por el autor durante varios años en el Instituto físico-técnico de Moscú como un curso de conferencias del análisis matemático.

Especialmente para esta edición del manual en lengua española, el autor escribió de nuevo algunos de sus apartados. Esto se refiere, ante todo, a la exposición de la teoría de números reales, la de límite de las funciones y la teoría de integración de las funciones de una sola variable. La introducción de unas concepciones más generales en la teoría del límite e integración de las funciones hizo posible poner al lector al tanto de los problemas en consideración sin perjudicar la claridad, evidencia y sencillez de la exposición.

Autor

CAPÍTULO PRIMERO

CÁLCULO DIFERENCIAL DE LAS FUNCIONES DE UNA VARIABLE

§ 1. CONJUNTOS Y FUNCIONES. SÍMBOLOS LÓGICOS

1.1. CONJUNTOS. OPERACIONES SOBRE CONJUNTOS

En la matemática, los conceptos de conjunto, elemento y pertenencia de un elemento a un conjunto son conceptos primarios. Los conjuntos serán simbolizados con letras mayúsculas del alfabeto latino o de cualquier otro alfabeto: $A, B, \ldots, X, Y, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots,$ y los elementos de los conjuntos con letras minúsculas: $a, b, \ldots, x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$. Si a es un elemento del conjunto A, entonces se escribe que $a \in A$ (se lee "a pertenece al conjunto A") o, lo que significa lo mismo $A \ni a$. Si a no pertenece al conjunto A, entonces se escribe $a \notin A$ ó $A \not\ni a$.

Los conjuntos A y B se llaman *iguales*, si están formados por los mismos elementos. De esta manera, la igualdad $A = B$ significa, con respecto a los conjuntos, que un mismo conjunto está simbolizado con letras diferentes A y B.

La notación $A = \{a, b, c, \ldots\}$ significa que A está formado por los elementos a, b, c y posiblemente por algunos dados de uno u otro modo.

Si el conjunto A está formado por los elementos a_α, donde α recorre algún conjunto de índices $\mathfrak{A}$, entonces escribimos $A = \{a_\alpha\}$ o más detalladamente $A = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ o, si esto no conlleva a errores, simplemente $A = \{a\}$. Si el conjunto A está compuesto por elementos que poseen determinada propiedad, entonces escribiremos $A = \{a: \ldots\}$, donde en las llaves después de los dos puntos está escrita la propiedad señalada de los elementos del conjunto A. Por ejemplo, si a y b son dos números reales tales que $a \leqslant b$ y por $[a, b]$ se simboliza el conjunto de todos los números reales x que satisfacen las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, entonces la definición de este conjunto (segmento) con ayuda de los símbolos introducidos podemos escribirla de la siguiente manera:

$$[a, b] = \{x: a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Para mayor comodidad se introduce el concepto de conjunto vacío, el cual se representa por el símbolo $\varnothing$. Por definición el conjunto vacío no contiene elementos.

Si cada elemento del conjunto A es elemento del conjunto B entonces se dice que el conjunto A es parte del conjunto B, o que A es *subconjunto* del conjunto B, y se escribe $A \subset B$ (se lee: el conjunto A se contiene en el conjunto B) o lo que es lo mismo, $B \supset A$ (se lee: el conjunto B contiene el conjunto A).

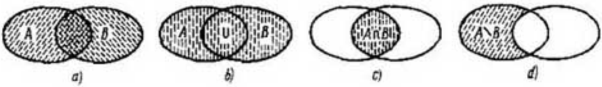


FIG. 1

Ejercicio. Demuéstrese que las inclusiones $A \subset B$ y $B \subset A$ se cumplen simultáneamente si y sólo si $A = B$.

De la definición del subconjunto se deduce que $A \subset A$ cualquiera que sea el conjunto A; se acostumbra considerar también por definición, que el conjunto vacío es subconjunto de cada conjunto: $\varnothing \subset A$. Si A es cualquier conjunto, entonces $\varnothing$ y A se llamarán *subconjuntos impropios;* si $A \subset B$ y existe un elemento $x \in B$ tal que $x \notin A$, entonces el conjunto A se llama *subconjunto propio* del conjunto B.

Si están dados dos conjuntos A y B (fig. 1, *a*), entonces por $A \cup B$ se simboliza el conjunto que se llama su *unión* o *suma* y cada elemento del cual pertenece al menos a uno de los conjuntos A y B (fig. 1, *b*). De esta forma, si algún elemento pertenece al conjunto $A \cup B$, entonces pertenece o bien sólo al conjunto A, o bien sólo al conjunto B, o bien pertenece a ambos conjuntos.

Por $A \cap B$ se simboliza el conjunto llamado intersección de los conjuntos A y B, la cual está formada por los elementos pertenecientes simultáneamente tanto al conjunto A como al conjunto B (fig. 1, *c*).

Por $A \setminus B$ se simboliza el conjunto llamado *diferencia* de los conjuntos A y B y compuesto por los elementos que pertenecen al conjunto A y no pertenecen al conjunto B (fig. 1, *d*). Se dice también que $A \setminus B$ se obtiene del conjunto A restando del mismo el conjunto B.

Si $B \subset A$, entonces la diferencia $A \setminus B$ se llama *complemento* del conjunto B hasta el conjunto A o complemento de B respecto a A.

Si está dado un sistema de conjuntos A_α (los términos: conjunto, sistema, colección, familia, clase serán utilizados como sinónimos), donde los valores de α forman una colección de índices de $\mathfrak{A}$, entonces se llama *unión* $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ *de los conjuntos* A_α el conjunto donde cada elemento pertenece al menos a uno de los conjuntos dados A_α, es decir, la condición $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ es equivalente a la siguiente: existe $\alpha \in \mathfrak{A}$ tal que $x \in A_\alpha$.

Se llama *intersección de los conjuntos* A_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ el conjunto denotado por

$$\bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha,$$

tal que cada uno de sus elementos pertenece a todos los conjuntos A_α, es decir, la condición $x \bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ significa: para todos los $\alpha \in \mathfrak{A}$ tiene lugar $x \in A_\alpha$.

Si $A_\alpha \subset E$ *para todos los* $\alpha \in \mathfrak{A}$ *, entonces*

$$E \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} (E \setminus A_\alpha), \tag{1.1}$$

$$E \setminus \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} (E \setminus A_\alpha) \tag{1.2}$$

Demostremos, por ejemplo, la igualdad (1.1). Si $x \in E \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$, entonces, por la definición de diferencia de conjuntos, $x \in E$ y $x \notin \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$. A su vez esto, por la definición de unión de conjuntos, es equivalente a que $x \in E$ y para todos los $\alpha \in A_\alpha$ tiene lugar la relación $x \notin A_\alpha$. Esto, de nuevo por la definición de diferencia de conjuntos, es equivalente a la afirmación de que para todos los $\alpha \in \mathfrak{A}$ tenemos $x \in E \setminus A_\alpha$. Finalmente, la última afirmación por la definición de intersección de conjuntos, significa que $x \in \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} (E \setminus A_\alpha)$. Así pues, las condiciones $x \in E \setminus \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ y $x \in \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} (E \setminus A_\alpha)$ son equivalentes, como consecuencia de lo cual se cumple la igualdad (1.1). La igualdad (1.2) se demuestra análogamente.

Con razonamientos similares se demuestra la validez de las siguintes igualdades para conjuntos A, B y C cualesquiera:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

En el siguiente punto 1.2* se analiza el concepto de función, y el punto 1.3* será dedicado a los conceptos de conjuntos finitos y sucesión. Se puede prescindir de los puntos y párrafos del curso señalados con asteriscos en una primera lectura y regresar a ellos sólo en caso de necesidad. En particular, para la comprensión del material posterior es suficiente tener una noción sobre la función — que se da en el curso de matemática elemental — en tanta correspondencia determinada entre los elementos de dos conjuntos. En este caso, el concepto de correspondencia se puede entender como un concepto primario.

1.2.* FUNCIONES

Diremos que *el número de elementos del conjunto A es igual a la unidad* 1, si en él se tiene un elemento $a \in A$ y no hay otros (dicho de otro modo, si del conjunto A se resta el conjunto formado por el elemento a, entonces se obtiene el conjunto vacío).

El conjunto A se llama *conjunto de 2 (dos) elementos*, si al restar de A el conjunto compuesto sólo por un elemento $a \in A$, es decir, el conjunto, cuyo número de elementos es igual a 1, resulta un conjunto cuyo número de elementos será también igual a la unidad. No es difícil demostrar, que esta definición no depende de la elección del elemento señalado $a \in A$, es decir, si $a \in A$ y $b \in A$, y además, $A \setminus \{a\}$ está formado por un elemento, entonces el conjunto $A \setminus \{b\}$ también está compuesto por un elemento (precisamente por el elemento a).

Sean dados los conjuntos $X = \{x\}$ e $Y = \{y\}$. El conjunto formado por dos elementos $x \in X$ e $y \in Y$, se llama *par* $\{x, y\}$ de los elementos x, y.

El par de la forma $\{x, \{x, y\}\}$, donde $x \in X$, $y \in Y$ y $\{x, y\}$ es un par de elementos x e y se llama *par ordenado* de los elementos x e y. El elemento x se llama primer elemento del par ordenado $\{x, \{x, y\}\}$, y el elemento y, segundo. El par ordenado $\{x,$

$\{x, y\}\}$ se denota por (x, y). En el futuro por par se entenderá habitualmente par ordenado.

El conjunto de todos los pares ordenados (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, se llama *producto de los conjuntos* X e Y y se denota por $X \times Y$. En ese caso no se supone que necesariamente el conjunto X sea diferente del conjunto Y, es decir, es posible el caso cuando $X = Y$.

Definición 1. *Cualquier conjunto $f = \{(x, y)\}$ de pares ordenados (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, tal que, para pares cualesquiera $(x', y') \in f$ y $(x'', y'') \in f$ de la condición $y' \neq y''$ se deduce que $x' \neq x''$, se llama función, o lo que es lo mismo, aplicación.*

Junto con los términos de "función' y "aplicación", en determinadas situaciones se utilizan los términos similares *transformación*, *morfismo* y *correspondencia.*

Las funciones se donotarán por diferentes letras: $f, g, \ldots, F, G, \ldots, \varphi, \psi, \ldots$.

El conjunto de todos los primeros elementos de los pares ordenados (x, y) de cierta función f se llama *dominio* (o *conjunto de definición*) de esta función y se denota por X_f, y el conjunto de todos los segundos elementos se llama *conjunto de sus valores* y se denota por Y_f. El mismo conjunto de pares ordenados $f = \{(x, y)\}$ analizado como subconjunto del producto $X \times Y$, se llama *gráfica de la función f.*

El elemento $x \in X_f$ se llama *argumento de la función f* o variable independiente, el elemento $y \in Y$, *variable dependiente*.

Si $f = \{(x, y)\}$ es una función (aplicación), se escribe $f : X_f \to Y$ y se dice, que f aplica el conjunto X_f en el conjunto Y. En caso de que $X = X_f$, se escribe simplemente $f : X \to Y$.

Si $f : X \to Y$ es una función, es decir, un conjunto de pares ordenados $f = \{(x, y)\}$, $x \in X$, $y \in Y$, que satisfacen las condiciones de la definición 1, y $(x, y) \in f$, entonces se escribe $y = f(x)$ (algunas veces simplemente $y = fx$) o $f : x \to y$, y se dice que la función f pone en correspondencia al elemento x el elemento y (la aplicación f aplica el elemento x en el elemento y) o lo que es lo mismo, el elemento y corresponde al elemento x. En este caso también se dice que el elemento y es el valor de la función f en el punto x, o la imagen del elemento x en la aplicación f.

Junto con el símbolo $f(x_0)$, para representar el valor de la función f en el punto x_0, se utiliza también la notación $f(x)|_{x=x_0}$.

Dado $y \in Y$, el conjunto de todos los elementos $x \in X$, tales que $f(x) = y$, se llama *preimagen del* elemento y y se denota por $f^{-1}(y)$. De esta forma

$$f^{-1}(y) = \{x : x \in X, f(x) = y\}.$$

Es evidente que si $y \in Y \setminus Y_f$, entonces $f^{-1}(y) = \varnothing$.

A veces la misma función f se denota por el símbolo $f(x)$. La notación de la función $f : X \to Y$ y de su valor en el punto $x \in X$ por un mismo símbolo $f(x)$ no lleva a confusiones, porque en cada caso concreto siempre está claro de qué se habla.

Comúnmente la notación $f(x)$ es más cómoda que la notación $f : x \mapsto y$ en los cálculos. Por ejemplo, la notación $f(x) = x^2$ es significativamente más cómoda y sencilla de utilizar en las transformaciones analíticas que la notación $f : x \mapsto x^2$.

Sea dada una aplicación $f : X \to Y$, es decir, una aplicación del conjunto X en el conjunto Y. Dicho de otro modo, a cada elemento $x \in X$ se ha puesto en correspondencia un elemento $y \in Y$ y además único, y cada elemento $y \in Y_f \subset Y$ está puesto en correspondencia por lo menos a un elemento $x \in X$.

Si $Y = X$, entonces se dice que la aplicación f aplica el conjunto X en sí mismo.

Si $Y = Y_f$, es decir, el conjunto Y coincide con el conjunto de los valores de la función f, entonces se dice que f aplica el conjunto X sobre el conjunto Y, o que la aplicación f es una aplicación sobreyectiva, más brevemente una *sobreyección*. De esta forma, la aplicación $f : X \to Y$ es una sobreyección, si para cualesquier elemento $y \in Y$ existe al menos un elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Es evidente que si $f : X \to Y$ y Y_f es el conjunto de valores de la función f, entonces $f : X \to Y_f$ es una aplicación sobreyectiva.

Si en la aplicación $f : X \to Y$ a diferentes $x \in X$ les corresponden $y \in Y$ diferentes, es decir, para $x' \neq x''$ tiene lugar $f(x') \neq f(x'')$, entonces la aplicación f se denomina aplicación biunívoca (correspondencia biunívoca) de X en Y o también aplicación de una hoja o *inyección*. De esta forma, la aplicación $f : X \to Y$ es de una hoja (inyectiva) si y sólo si la preimagen de cada elemento y perteneciente al conjunto de valores de la función $f : y \in Y_f$ está compuesta exactamente por un elemento.

Si la aplicación $f : X \to Y$ es al mismo tiempo biunívoca en el conjunto Y, es decir, es al mismo tiempo inyección y sobreyección, entonces naturalmente se llama *aplicación biunívoca* del conjunto X sobre el conjunto Y, o también, aplicación *biyectiva* (biyección) en Y.

De esta forma, la aplicación $f : X \to Y$ es una aplicación biunívoca del conjunto X sobre el conjunto Y si y sólo si para cualesquiera $x' \in X$ y $x'' \in X$, $x' \neq x''$, es válida la desigualdad $f(x') \neq f(x'')$, y cualquiera que sea $y \in Y$ existe el elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

La aplicación biunívoca del conjunto X sobre el conjunto Y, a menudo se denomina correspondencia biunívoca de los elementos de estos conjuntos.

Si $f : X \to Y$ y $A \subset X$, entonces el conjunto

$$B = \{y : y \in Y, y = f(x), x \in A\},$$

es decir, el conjunto de todos aquellos y, en cada uno de los cuales durante la aplicación f se aplica al menos un elemento del subconjunto A del conjunto X, se llama *imagen del subconjunto A* y se escribe $B = f(A)$.

En particular, siempre tenemos $Y_f = f(X)$.

Para las imágenes de los conjuntos $A \subset X$ y $B \subset X$ son válidas las siguientes relaciones fácilmente comprobables

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),$$

$$f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B),$$

y si $A \subset B$, entonces
$$f(A) \subset f(B).$$

Si $f : X \to Y$ y $B \subset Y$, entonces el conjunto

$$A = \{x : x \in X, f(x) \in B\},$$

se llama *preimagen del conjunto B* y se escribe $A = f^{-1}(B)$. De esta forma, la preimagen del conjunto B está compuesta por todos aquellos elementos $x \in X$, que por medio de la aplicación f se aplican en elementos de B, o lo que es lo mismo, que está compuesta por todas las preimágenes de los puntos $y \in B$:

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(y).$$

Para las preimágenes de los conjuntos $A \subset Y$ y $B \subset Y$ son válidas las siguientes relaciones fácilmente demostrables

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$$
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B),$$
$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B).$$

Y si $A \subset B$, entonces $\qquad f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

Si $A \subset X$, entonces la función $f : X \to Y$ de forma natural engendra una función definida sobre el conjunto A, que pone en correspondencia a cada elemento $x \in A$ el elemento $f(x)$. Esta función se llama *restricción de la función* f sobre el conjunto A y a veces se denota por $f|_A$ o sencillamente f_A.

De esta forma, $f_A : A \to Y$ y para cualquier $x \in A$ tiene lugar $f_A : x \to f(x)$. Si el conjunto A no coincide con el conjunto X, entonces la restricción f_A de la función f sobre el conjunto A tiene otro dominio que la función f y por lo tanto, es una función diferente de f. Con frecuencia la restricción de la función sobre un conjunto se denota por el mismo símbolo que la función inicial.

Si dos funciones f y g se analizan sobre el mismo conjunto X, más exacto, si se analizan las restricciones de las funciones f y g sobre el mismo conjunto X, entonces la notación $f = g$ sobre X significa que $f(x) = g(x)$ para cada $x \in X$. En este caso, se dice que la función f es idénticamente igual a la función g sobre el conjunto X.

Señalemos que las funciones en las cuales a todos los elementos de un conjunto les corresponde un mismo elemento, es decir, funciones en las cuales al variar los valores del argumento los valores de la función no varían, se llaman *constantes* (sobre el conjunto dado).

Así pues, si al variar una variable (el argumento de la función) la otra variable, que es función de la primera, no cambia (es decir, "no depende" de la primera variable), entonces éste es un caso particular y en determinado sentido el caso más sencillo de dependencia funcional.

Si $f : X \to Y$ y cada elemento $y \in Y_f$ representa un conjunto de elementos cualesquiera $y = \{z\}$, además entre estos conjuntos se tiene al menos uno que no es vacío, que tiene más de un elemento, entonces, esa función f se llama *función multiforme*. En este caso los elementos del conjunto $f(x) = \{z\}$ a menudo se nombran también valores de la función f en el punto x.

Si cada conjunto $f(x)$ está compuesto sólo por un elemento, entonces la función f se llama también *función unívoca*.

Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, entonces la función $F : x \to Z$ definida para cada $x \in X$ por la igualdad $F(x) = g(f(x))$ se llama *composición* (a veces *superposición*) de las funciones f y g, o *función compuesta* y se denota por $g \circ f$.

De esta forma, por la definición de cada $x \in X$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Sea dada la función $f : X \to Y$ y Y_f es el conjunto de sus valores. El conjunto de todos los posibles pares ordenados del tipo $(y, f^{-1}(y))$, $y \in Y_f$, forma la función que se denomina *función inversa* a la función f y se denota por f^{-1}. La función inversa f^{-1} pone en correspondencia a cada elemento $y \in Y_f$ su preimagen $f^{-1}(y)$, es decir, un conjunto de elementos. Por esto mismo, la función inversa es, en general, una función multiforme.

Si la aplicación $f : X \to Y$ es de una hoja (inyectiva), entonces la aplicación inversa, definida como siempre sobre Y_f, es una función unívoca y transforma Y_f sobre X, es decir, $f^{-1} : Y_f \to X$. En realidad, en este caso, las preimágenes de todos los puntos $y \in Y_f$ están compuestas exactamente por un punto $x \in X$.

1.3.* CONJUNTOS FINITOS Y NÚMEROS NATURALES. SUCESIONES

Una clase importante de conjuntos que se encuentra a menudo, es la clase de los así llamados conjuntos finitos. Para enunciar la definición de un conjunto finito, daremos primero la definición del concepto de número natural.

Definición 2. *El conjunto $N = \{n\}$ se llama conjunto de los números naturales si*

a) *uno de sus elementos se denota por el símbolo* 1;

b) *a cada elemento $n \in N$ se le pone en correspondencia exactamente un elemento de este conjunto denotado por n^* y denominado elemento posterior al elemento n;*

c) *para cualquier $n \in N$ tiene lugar $n^* \neq 1$;*

d) *de $n^* = m^*$, $n \in N$, $m \in N$, se deduce, que $n = m$;*

e) (*axioma de inducción*) *supongamos que el conjunto $M = \{m\} \subset N$ posee las propiedades*

1°) $1 \in M$;

2°) *si $m \in M$, entonces $m^* \in M$;*

entonces el conjunto M contiene todos los números naturales: $M = N$.

La definición axiomática dada del conjunto de los números naturales pertenece a Peano*), por eso las propiedades a) — e) se llaman *axiomas de Peano*.

Los elementos del conjunto N se denotan por 1, 2, 3, 4, ... (aquí después de cada número natural está escrito el que le sigue).

Definición 3. *El conjunto X se llama conjunto compuesto por n elementos, $n \in N$, si existe una aplicación biunívoca del conjunto X sobre el conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$.*

Si para un conjunto existe un número natural n, tal que el número de sus elementos es igual a n, entonces ese conjunto se llama finito.

Cualquier conjunto que no sea finito se llama *infinito*. Ejemplo de conjunto infinito es el conjunto de todos los números naturales.

El conjunto vacío se considera, por definición, finito, y su número de elementos igual a cero.

Si el conjunto que contiene m elementos, puede ser obtenido de un conjunto que contiene n elementos, restando de éste un conjunto finito, entonces el número natu-

---

*) I. G. Peano (1858 — 1932), matemático italiano.

ral m se llama menor que el número natural n o lo que es lo mismo, el número n se llama mayor que el número m; en este caso se escribe $m < n$, ó $n > m$.

Definición 4. *Sea X un conjunto cualquiera y N el conjunto de los números naturales. Cualquier aplicación $f : N \to X$* (véase el p. 1.2*) *se llama sucesión de elementos del conjunto X. El elemento $f(n)$ se denota por x_n y se llama elemento n-ésimo de la sucesión $f : N \to X$ y la sucesión como tal se denota por $\{x_n\}$ ó x_n, $n = 1, 2, \ldots$.*

Cada elemento x_n de la sucesión $\{x_n\}$ es un par ordenado, compuesto por el número $n \in N$ y el elemento x del conjunto X correspondiente a este número en la aplicación $f : N \to X$, es decir, $x_n = (n, x)$. El segundo elemento de este par se llama valor del elemento x_n de la sucesión $\{x_n\}$ y el primero, su número.

El conjunto de los elementos de una sucesión siempre es infinito. Dos elementos distintos de la sucesión pueden tener el mismo valor, pero a ciencia cierta se diferencian por sus números, los cuales son un conjunto infinito.

El conjunto de los valores de los elementos de la sucesión (a menudo se dice brevemente: conjunto de los valores de la sucesión) puede ser finito. Por ejemplo, si a todos los $n \in N$ los ponemos en correspondencia el mismo elemento $a \in X$, es decir, para todos los $n \in N$ tiene lugar $f(n) = a$, entonces, el conjunto de los valores de la sucesión $x_n = a$, $n = 1, 2, \ldots$, está compuesto por un elemento $a \in X$. Estas sucesiones se llaman *estacionarias*.

Si $n_1 < n_2$, $n_1 \in N$, $n_2 \in N$, entonces el término x_{n_1} de la sucesión $\{x_n\}$ se denomina término anterior al término x_{n_2} y el término x_{n_2}, término posterior al término x_{n_1}. En este sentido, los términos de la sucesión siempre están ordenados.

1.4. SÍMBOLOS LÓGICOS

En los razonamientos matemáticos con frecuencia se encuentran las expresiones "existe un elemento" que tiene algunas propiedades, y "cualquier elemento" entre los elementos que tienen alguna propiedad. En lugar de la palabra "existe" o de la expresión equivalente a ella "se encuentra" en ocasiones se escribe el símbolo $\exists$, es decir, la letra latina E al revés (de la palabra inglesa existence, existencia), y en lugar de las palabras "cualqueira", "cada", "todo", el símbolo $\forall$, es decir, una A latina invertida (de la palabra inglesa any, cualquiera). El símbolo $\exists$ se llama *símbolo de existencia* y el símbolo $\forall$, *símbolo de universalidad*.

Ejemplos. 1. La definición de la unión $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ de los conjuntos A_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, escribe con ayuda del símbolo lógico de existencia de la forma siguiente:

$$\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha = \{x : \exists_\alpha \in \mathfrak{A}, x \in A_\alpha\}$$

y la definición de la intersección $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$, escrita con ayuda del símbolo de generalidad tiene la forma

$$\bigcap A_\alpha = \{x : \forall_\alpha \in \mathfrak{A}, x \in A_\alpha\}.$$

2. Sea $\boldsymbol{R}$ el conjunto de los números reales y sea dada la función $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, es decir, la función definida sobre el conjunto de los números reales y que toma valores reales.

La función f se llama *función par*, si para cada $x \in \boldsymbol{R}$ se cumple la igualdad $f(-x) = f(x)$. Utilizando los símbolos lógicos esta condición se puede escribir más brevemente $\forall x \in \boldsymbol{R}: f(-x) = f(x)$.

3. La función $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ se llama *periódica* si existe tal número $T > 0$, que cualquiera que sea $x \in \boldsymbol{R}$ es válida la igualdad $f(x + T) = f(x)$. Utilizando los símbolos lógicos, esto se puede escribir de la siguiente forma:

$$(\exists T > 0)(\forall x \in \boldsymbol{R}): f(x + T) = f(x).$$

A menudo, para la comodidad de la lectura de las afirmaciones escritas con ayuda de algunos símbolos lógicos, todo lo que se relaciona con cada uno de ellos por separado se encierra entre paréntesis, como se ha hecho en la última fórmula. Los dos puntos en las fórmulas de este tipo significan "tiene lugar".

4. La función $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ no es par, si la condición $f(-x) = f(x)$ no se cumple para todos los $x \in \boldsymbol{R}$. Sin embargo, semejantes enunciados negativos no son muy cómodos para su utilización, ya que es muy difícil hacer conclusiones de algo que no hay. Es mucho más cómodo trabajar con las llamadas afirmaciones positivas que no contienen negación. En nuestro caso, la afirmación de que la igualdad $f(-x) = f(x)$ no se cumple para todos los $x \in \boldsymbol{R}$, es equivalente a la afirmación de que existe tal $x \in \boldsymbol{R}$ que $f(-x) \neq f(x)$ o en la escritura con símbolos,

$$\exists x \in \boldsymbol{R}: f(-x) \neq f(x).$$

5. La función $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ no es periódica, si cualquier número $T > 0$ no es su período, es decir, para cualquier $T > 0$ la igualdad $f(x + T) = f(x)$ no debe cumplirse para todos los $x \in \boldsymbol{R}$ o de forma positiva: para cualquier $T > 0$ se encuentra un $x \in \boldsymbol{R}$, para el cual $f(x + T) \neq f(x)$. Con ayuda de los símbolos lógicos esto se escribe de la siguiente forma:

$$(\forall T > 0)(\exists x \in \boldsymbol{R}): f(x + T) \neq f(x).$$

Comparando las escrituras hechas con ayuda de símbolos lógicos de las afirmaciones en los ejemplos 2 y 3 con sus negaciones en los ejemplos 4 y 5, vemos que en la construcción de la negación, los símbolos de existencia y universalidad se sustituyen el uno por el otro. Para que en un conjunto dado no exista un elemento, con cierta propiedad, es necesario que todos los elementos no tengan esta propiedad, es decir, en este caso, en la negación, el símbolo de existencia $\exists$ se convierte en el símbolo de universalidad $\forall$. Si no todos los elementos del conjunto examinado poseen cierta propiedad, entonces esto significa que en él existe un elemento, que no tiene dicha propiedad: el símbolo de universalidad se cambió por el símbolo de existencia.

Para no complicar al lector que no está acostumbrado al simbolismo lógico, la exposición posterior del material se hace de manera clásica, sin la utilización de los símbolos lógicos, los que sólo en elgunas ocasiones, se aplican paralelamente al texto fundamental. Por una parte, para acostumbrar al lector a su aplicación (lo que es muy útil al tomar notas de libros y conferencias), y por otra, por cuanto ellos no permiten más brevemente y a veces de forma más expresiva, aclarar la idea necesaria, ayudando con esto al lector a comprender el contenido de la cuestión expuesta.

Con el símbolo □ en el texto del libro se señala el final de la demostración dada. El símbolo $\Rightarrow$ significa "sigue" (una proposición se deduce de otra), el símbolo $\Leftrightarrow$ significa equivalencia de las afirmaciones que se encuentran a ambos lados del mismo. La abreviatura def significa, que la afirmación formulada es válida por definición (de la palabra inglesa definition, definición). Por ejemplo,

$$A \subset B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in A \Rightarrow x \in B),$$
$$(g \circ f)(x) \overset{\text{def}}{=} g(f(x)).$$

§ 2. NÚMEROS REALES. CONJUNTOS NUMÉRICOS

2.1. PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

En la matemática elemental se estudian los números reales. Al principio, en el proceso de cálculo surge la llamada *serie natural* de números $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$. En aritmética se introducen las operaciones de adición y multiplicación sobre los números naturales. En lo que respecta a la resta y la división, no siempre resultan posibles en el conjunto de los números naturales. Para que las cuatro operaciones aritméticas sean posibles para cualquier par de números (menos la operación de división entre cero, que carece de sentido), es necesario ampliar la clase de los números analizados. La necesidad de medir algunas magnitudes físicas y geométicas exige la ampliación de la reserva de números. Por eso, se introduce el cero y los números *negativos* enteros (del tipo $-1, -2, \ldots, -n, \ldots$) y después, los *racionales* (del tipo p/q, donde p, q son enteros $q \neq 0$).

La misma necesidad de medición de magnitudes y realización de operaciones tales como el extraer una raiz, el cálculo de logaritmos, resolución de ecuaciones algebraicas, conlleva a la ampliación posterior de la reserva de números analizados: aparecen los números irracionales y finalmente los *números complejos*. Todos los números racionales e irracionales forman el conjunto de los números reales.

Al conjunto de todos los números reales, como es de costumbre, vamos a denotarlo por $\boldsymbol{R}$ (de la palabra latina realus, real). Este conjunto forma una colección en la que están definidas las operaciones, relacionadas entre sí, de adición, multiplicación y comparación de los números por su magnitud y que tiene continuidad de determinado tipo. Recordemos brevemente las propiedades de los números reales, conocidas de la matemática elemental, y las completemos con la descripción de algunas propiedades que habitualmente no se analizan de forma suficientemente amplia.

1. OPERACIÓN DE ADICIÓN. Para cualquier par ordenado de números reales a y b está definido y además de forma única, el número denominado su *suma* y denotado por $a + b$, de forma tal, que tienen lugar las siguientes propiedades.

I_1. *Para cualquier par de números* a y b

$$a + b = b + a.$$

Esta propiedad se llama *ley conmutativa de la adición*.

I_2. *Para cualquier terna de números* a, b y c

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Esta propiedad se llama *ley asociativa de la adición*.

I_3. *Existe el número denotado por* 0 y denominado nulo, *tal que para cualquier número a*

$$a + 0 = a.$$

I_4. *Para cualquier número a existe el número denotado por* $-a$ *y llamado opuesto al número dado, tal que*

$$a + (-a) = 0.$$

II. OPERACIÓN DE MULTIPLICACIÓN. Para cualquier par de números a y b está definido y además de forma única el número denominado su *producto* y denotado por ab de forma tal que tiene lugar las siguientes propiedades.

II_1. *Para cualquier par de números a* y *b*

$$ab = ba.$$

Esta propiedad se denomina *ley conmutativa de la multiplicación*.

II_2. *Para cualquier terna de números a, b, c*

$$a(bc) = (ab)c.$$

Esta propiedad se denomina *ley asociativa de la multiplicación*.

II_3. *Existe un número denotado por* 1 *que se llama unidad, tal que para cualqueir número a*

$$a \cdot 1 = a.$$

II_4. *Para cualquier número* $a \neq 0$ *existe un número denotado* $1/a$ *ó* $\frac{1}{a}$ *que se llama elemento inverso, tal que*

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

III. RELACIÓN DE LAS OPERACIONES DE ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN.

Para cualquier terna de números a, b, c

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Esta propiedad se denomina *ley distributiva de la multiplicación* con relación a la suma.

IV. ORDENAMIENTO. *Para cada número a está definida una de las relaciones* $a > 0$ *(a es mayor que cero)*, $a = 0$ *(a es igual a cero) ó* $0 > a$ *(cero es mayor que a) y si* $a > 0$ *y* $b > 0$, *entonces*

IV_1. $a + b > 0$;

IV_2. $ab > 0$.

La propiedad IV da la posibilidad de introducir el concepto de comparación, o como a veces se dice, comparación por magnitud para dos números cualesquiera.

El número a se llama mayor que el número b y se escribe $a > b$ *o lo que es lo mismo, el número b se llama menor que a y se escribe* $b < a$, $\quad a - b > 0$.

La existencia de la comparación "mayor" o "menor" para cualquier par de números reales se llama *propiedad de ordenamiento del conjunto de todos los números reales*.

V. PROPIEDAD DE CONTINUIDAD. *Cualesquiera que sean los conjuntos no vacíos* $A \subset R$ y $B \subset R$, *en los cuales para dos elementos cualesquiera* $a \in A$ y $b \in B$ *se*

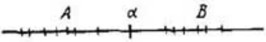


FIG. 2

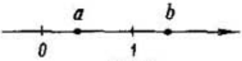


FIG. 3

cumple la desigualdad $a \leqslant b$, *existe un número* α *tal que para todos los* $a \in A$ *y* $b \in B$ *tiene lugar la relación* $$a \leqslant \alpha \leqslant b$$
(fig. 2).

La propiedad de continuidad de los números reales está relacionada con la más sencilla de las aplicaciones de la matemática en la práctica, con la medición de magnitudes. En la medición de cualquier magnitud física (o de otra naturaleza) con frecuencia se obtienen valores aproximados con mayor o menor exactitud. Si en el resultado de la medición experimental de la magnitud dada se obtiene una serie de números que dan el valor de la magnitud buscada con defecto (ellos juegan el papel de conjunto A en el enunciado dado anteriormente de la propiedad de continuidad) o con exceso (conjunto B), entonces, la propiedad de continuidad de los números reales expresa la seguridad objetiva de que la magnitud medida tiene determinado valor, situado entre sus valores aproximados, calculados con defecto o exceso.

De las propiedades de los números reales enumeradas I — V se deducen otras muchas propiedades de los mismos, por eso, se pueden decir que los números reales son el conjunto de elementos que poseen las propiedades I — V.

Para el lector meditabundo señalamos que la cita al principio del párrafo de que los números reales y sus propiedades son conocidos del curso de matemática elemental, no es imprescindible. Las propiedades enunciadas anteriormente de los números reales, se pueden tomar como definición inicial. Se debe sólo excluir el caso trivial. Es fácil comprobar que para el conjunto formado sólo por el cero se cumplen todas las propiedades I — V (en ese conjunto $1 = 0$). El conjunto, en el cual se tiene al menos un elemento diferente de cero se donomina no *trivial*.

Ahora, parafraseando el resultado de nuestros análisis obtenemos la siguiente definición.

Definición 2. *El conjunto no trivial de elementos que poseen las propiedades* I — V *se llama conjunto de los números reales. Cada elemento de este conjunto se llama numero real.*

Recordemos que el conjunto de los números reales se denota con la letra $\boldsymbol{R}$.

La construcción de la teoría de los números reales que se basa en esta definición se llama *axiomática* y las propiedades I — V, *axiomas de los números reales*.

Geométricamente, el conjunto de los números reales se representa con una recta orientada y los números sueltos, con los puntos de esta recta. Por eso, el conjunto de los números reales con frecuencia se llama recta numérica, o eje numérico, y los números sueltos, sus puntos (fig. 3). Teniendo en cuenta esta representación de los números reales, a veces, en lugar de a menor que b (respectivamente a mayor que b) se dice que el punto a está más a la izquierda que el punto b (respectivamente, a está más a la derecha que b).

En los puntos siguientes 2.2* — 2.6* serán analizadas más detalladamente las propiedades I — V de los números reales y deducidas algunas de sus consecuencias. Así como todos los puntos señalados con asteriscos, los puntos citados, en cualquier caso, pueden ser omitidos en la primera lectura sin grandes perjuicios para la asimilación del curso de análisis matemático. Para la comprensión del material siguiente (en el p. 2.5 y los que le siguen) es completamente suficiente la representación de los números reales que se da en el curso de matemática elemental.

2.2.* PROPIEDADES DE LA ADICIÓN Y DE LA MULTIPLICACIÓN

Consideremos algunas propiedades de la adición y la multiplicación que se derivan de las propiedades I, II y III. Ante todo, señalemos que para la operación de la adición existe la operación inversa, la resta, definámosla.

Para cualquier par ordenado de números $a \in \boldsymbol{R}$ y $b \in \boldsymbol{R}$ el número $a + (-b)$ se llama *diferencia* de los números a y b y se denota por $a - b$, es decir

$$a - b \overset{\text{def}}{=} a + (-b). \tag{2.1}$$

Si

$$a + b = c \tag{2.2}$$

entonces sumando a ambos miembros de esta igualdad el número $-b$ obtendremos $(a + b) + (-b) = c + (-b)$. De aquí, por la ley asociativa I_2 y la definición de diferencia tenemos

$$a + (b + (-b)) = c - b,$$

pero $b + (-b) = 0$, por consiguiente

$$a = c - b. \tag{2.3}$$

De esta forma, después de la adición al número a del número b, el número a se restaura restando de la suma $a + b$ el número b, por lo que la operación de resta se llama *operación inversa a la operación de la suma.*

Pasemos a las propiedades de la suma y la multiplicación de los números reales.

1°. *El número con la propiedad del cero es único.*

En efecto, supongamos que existen dos ceros, 0 y $0'$, entonces debido a $I_3: 0' + 0 = 0'$, $0 + 0' = 0$. Según la ley conmutativa I_2, los primeros miembros de estas igualdades son iguales y por consiguiente son iguales los segundos, es decir, $0 = 0'$. □

2°. *El número opuesto a uno dado es único.*

Supongamos que los números b y c son opuestos a cierto número a, es decir, $a + b = 0$ y $a + c = 0$. Entonces de la primera de estas igualdades tenemos $(a + b) + c = 0 + c$, es decir, $(a + b) + c = c$, de donde $(a + c) + b = c$; pero $a + c = 0$, por consiguiente $b = c$. □

3°. *Para cualquier número a es válida la igualdad*

$$-(-a) = a.$$

De la igualdad $a + (-a) = 0$ que define al elemento opuesto, por la conmutatividad de la suma, obtendremos $-a + a = 0$. Esto significa que $a = -(-a)$. □

4°. *Para cualquier número a es válida la igualdad*

$$a - a = 0.$$

En realidad $a - a = a + (-a) = 0$. □

5°. *Para números a y b cualesquiera tenemos:*

$$-a - b = -(a + b),$$

es decir, el número opuesto a la suma de dos números es igual a la suma de los números opuestos a ellos.

En efecto, $a + b + (-a - b) = (a - a) + (b - b) = 0$. □

6°. *La ecuación $a + x = b$ tiene en $\mathbf{R}$ solución que es única: $x = b - a$.*

En realidad, si la solución existe, entonces por (2.3) $x = b - a$. Con esto está demostrada la unicidad de la solución de la ecuación $a + x = b$. Para la existencia de la solución, es suficiente comprobar que el número $x = b - a$ es solución. Esto efectivamente es así:

$$a + (b - a) = a + [b + (-a)] = [a + (-a)] + b = b. \ \square$$

Para la operación de la multiplicación también existe la operación inversa, que se llama división y se define de la forma siguiente.

Para cualquier par de números ordenados a y b $b \neq 0$, el número $a \cdot \frac{1}{b}$ se lla- *cociente de la división de a* por b y se denota por $\frac{a}{b}$ ó a/b ó $a : b$, es decir.

$$\frac{a}{b} \overset{\text{def}}{=} a \cdot \frac{1}{b}, \quad b \neq 0.$$

Las propiedades análogas a las propiedades 1° — 6° para la suma son válidas también para la operación de multiplicación:

7°. *El número que tiene las propiedades de la unidad es único.*

8°. *El número inverso a un número dado diferente de cero es único.*

9°. *Para cualquier número $a \neq 0$ es válida la igualdad*

$$\frac{1}{1/a} = a.$$

10°. *Para cualquier número $a \neq 0$ es válida la igualdad*

$$a/a = 1.$$

11°. *Para cualesquiera números $a \neq 0$ y $b \neq 0$ tenemos la igualdad*

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab},$$

es decir, el número inverso al producto de dos números diferentes de cero es igual al producto de los números inversos a ellos.

12°. *La ecuación $ax = b$, $a \neq 0$ tiene solución en el conjunto de los números reales que es única.*

Las propiedades 7° — 12° se demuestran análogamente a las propiedades 1° — 6°. Todas las propiedades 1° — 12° analizadas tienen relación sólo con las operationes de adición y multiplicación. Estas operaciones permiten definir a los números naturales, enteros y racionales, la operación de elevar a una potencia entera y la operación de extraer una raíz. Hagamos esto.

El número $1 + 1$ se denota por 2, el número $2 + 1$ por 3, etc. Los números 1, 2, 3, ... , se llaman *números naturales*. Su notación y denominación coinciden con los números de los elementos en los conjuntos finitos (véase el p. 1.3*). Esto no es casual, por cuanto para obtener el número natural n en el nuevo sentido, se necesita tomar un conjunto finito de unidades, cuyo número de elementos fue denotado en el p. 1.2* por el mismo símbolo n, y sumarlas. La relación de orden introducida en el conjunto de los números naturales (véase el p. 1.3*) coincide con el orden que se tiene en este conjunto, de acuerdo con el ordenamiento del conjunto de todos los números reales (véase la propiedad IV en el p. 2.1), además, el número natural n^*, posterior a n, es $n + 1$, es decir, $n^* = n + 1$. Como ya se señaló, el conjunto de los números naturales se denota por N.

Observemos que aunque la unidad es única, como fue demostrado anteriormente, se pueden analizar varios ejemplares de unidad (como en general, varios ejemplares de cualquier elemento de cierto conjunto) al menos para que sea posible escribir la expresión $1 + 1$.

Los números $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ se llaman *números enteros*. El conjunto de los números enteros usualmente se denota por Z.

Más adelante se mostrará (véase la propiedad 8° en el p. 2.3*), que de todas las propiedades de los números reales enumeradas en el p. 2.1 se deriva que $1 > 0$.

Los números del tipo m/n donde m y n son enteros y $n \neq 0$, se llaman *números* racionales. El conjunto de los números racionales se denota usualmente por Q. Los números reales que no son racionales se llaman *irracionales*. Su conjunto se denota por I.

Supongamos que se da el número real a y el natural n. El número a multiplicado n veces por sí mismo se llama *potencia* n-ésima del número a y se denota por a^n. De esta forma

$$a^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ veces}}.$$

El número b tal que $b^n = a$ (si por supuesto existe) se llama *raíz de* n-ésimo grado del número a y se denota por $\sqrt[n]{a}$ ó $a^{1/n}$, es decir,

$$(\sqrt[n]{a})^n \overset{\text{def}}{=} a.$$

Por la definición se supone que $a^0 \overset{\text{def}}{=} 1$ y para cualquier $n \in N$ $a^{-n} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{a^n}$.

Si $a \geqslant 0$, $b = \sqrt[n]{a}$ y $b \geqslant 0$, entonces el número b se llama *valor aritmético de la raíz de* n-ésimo grado del número a. En el futuro por raíz de un número real no negativo entenderemos el valor aritmético de la raíz, si no se acuerda algo diferente.

Señalemos ahora varias propiedades referentes a la relación entre las operaciones de suma y multiplicación.

13°. *Para los números* a, b y c *cualesquiera tiene lugar la igualdad*

$$a(b - c) = ab - ac.$$

En realidad $a(b - c) = a(b - c) + ac - ac = a(b - c + c) - ac = ab - ac$. □

14°. *Para cualquier número a se cumple la igualdad*

$$a \cdot 0 = 0.$$

En efecto, tomemos cualquier b, entonces $b - b = 0$ (véase la propiedad 4°). Por esto, según la propiedad 13° tendremos:

$$a \cdot (0) = a(b - b) = ab - ab = 0. \square$$

De la propiedad 14°, a propósito, se deriva que la afirmación $1 \neq 0$, cuando existen las otras propiedades analizadas I — III, es equivalente a que existe al menos un número diferente de cero. Evidentemente, es suficiente mostrar, que si existe un número $a \neq 0$, entonces $1 \neq 0$. Demostremos esto: supongamos que existe $a \neq 0$, entonces de la igualdad $a \cdot 1 = a$ se deduce que $1 \neq 0$ ya que en el caso contrario, de acuerdo a la propiedad 14°, tendría lugar la igualdad $a = 0$.

15°. *Si $ab = 0$, entonces al menos uno de los factores a y b es igual a cero.*

Sea, por ejemplo, $a \neq 0$, entonces multiplicando la igualdad $ab = 0$ por $1/a$ obtendremos $\frac{1}{a}(ab) = \frac{1}{a} \cdot 0$, de donde $\left(\frac{1}{a}a\right)b = 0$, por consiguiente $b = 0$. $\square$

16°. *Para cualesquiera números a y b tenemos:*

$$(-a)b = -ab, (-a)(-b) = ab,$$

en particular, $(-1)\,a = -a$.

En realidad,

$$(-a)b = (-a)b + ab - ab = (-a + a)b - ab = -ab. \square$$

Utilizando esta igualdad tenemos

$$(-a)(-b) = -a(-b) = (-1)[a(-b)] = (-1)(-ab) = -(-ab) = ab. \square$$

De las propiedades I, II y III de los números reales y de los corolarios citados anteriormente, se pueden obtener las reglas de las operaciones aritméticas con fracciones, es decir, con los números del tipo a/b, $b \neq 0$, $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$.

17°. *La igualdad*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

$b \neq 0$, $d \neq 0$ *es válida si y sólo si* $ad = bc$.

Corolario (propiedad fundamental de una fracción). *Cualquiera que sea la fracción a/b, $b \neq 0$ y el número $c \neq 0$, tiene lugar la igualdad*

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$

En efecto, multiplicando ambos miembros de la igualdad $a/b = c/d$ por bd y utilizando la definición de la división, tendremos la siguiente cadena de igualdades equivalentes

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b}\,bd = \frac{c}{d}\,db \Leftrightarrow a \circ \frac{1}{b}\,bd = c\frac{1}{d}\,db \Leftrightarrow ad = cb. \square$$

18° *La suma de fracciones se realiza por la regla*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0.$$

Demostremos la validez de esta igualdad. Utilizando la definición de división, la distributividad de la suma con respecto a la multiplicación y la propiedad fundamental de una fracción obtendremos:

$$\frac{ad + bc}{bd} = (ad + bc)\frac{1}{bd} = ad\frac{1}{bd} + bc\frac{1}{bd} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}. \square$$

19°. *La multiplicación de fracciones se realiza por la regla*

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0.$$

Utilizando la definición de división y la propiedad 11° obtendremos

$$\frac{ac}{bd} = ac \cdot ac \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)\left(c \cdot \frac{1}{d}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}. \square$$

20°. *El elemento inverso a la fracción a/b, $a \neq 0$, $b \neq 0$ es la fracción b/a, es decir,* $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Esto se deduce directamente de la regla de la multiplicación de fracciones.

21°. *La división de fracciones se realiza por la regla*

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0, \quad d \neq 0.$$

Utilizando la definición de división, la propiedad anterior y la regla de multiplicación de fracciones tendremos:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}. \square$$

Deduzcamos ahora de las propiedades obtenidas las reglas de las operaciones con potencias.

22°. *Si m y n son números enteros y además en el caso de $m \leqslant 0$ ó $n \leqslant 0$ tiene lugar $a \neq 0$, entonces*

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

Si $m = 0$ ó $n = 0$, entonces la validez de las fórmulas es evidente.

En el caso cuando m y n son números naturales, entonces por la definición de potencia.

$$a^m a^n = \underbrace{a \ldots\ldots a}_{m \text{ veces}} \underbrace{a \ldots\ldots a}_{n \text{ veces}} = a^{m+n}.$$

Si $m < 0$, $n > 0$ y $a \neq 0$, entonces, haciendo $k = -m$ y utilizando la propiedad fundamental de una fracción (la posibilidad de la división simultánea del numerador y del denominador de una fracción por un mismo número diferente de cero sin alterar la igualdad), para $k \leqslant n$ tendremos

$$a^m a^n = a^{-k}a^n = \frac{a^n}{a^k} = \frac{\overbrace{a \,\ldots\ldots\, a}^{n \text{ veces}}}{\underbrace{a \,\ldots\ldots\, a}_{k \text{ veces}}} = a^{n-k} = a^{m+n}$$

y para $k > n$:

$$a^m a^n = \frac{a^n}{a^k} = \frac{1}{a^{k-n}} = a^{n-k} = a^{m+n}.$$

Si $m < 0, n < 0$ y $a \neq 0$, entonces, haciendo $k = -m, l = -n$ y utilizando la propiedad 11° obtendremos

$$a^m a^n = a^{-k}a^{-l} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a^l} = \frac{1}{a^{k+l}} = a^{-(k+l)} = a^{m+n}.$$

De forma semejante se comprueba la segunda fórmula de la propiedad 22°. □

Es fácil mostrar que las propiedades I_1, I_2, II_1, II_2 y III se extienden por inducción a cualquier número finito de términos. En calidad de ejemplo mostremos que para cualesquiera números $a_1, a_2, \ldots, a_n (n \geqslant 2)$ y b

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)b = a_1 b + a_2 b + \ldots + a_n b. \tag{2.4}$$

En realidad, para $n = 2$ esta fórmula es válida de acuerdo con la propiedad III.

Sea ahora (2.4) válida para $n = k$, mostremos que será válida también para $n = k + 1$. Aplicando primero la propiedad I_2 para $k + 1$ sumandos (considerando que ya está demostrada), después la propiedad III y utilizando la hipótesis de inducción, obtendremos

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1})b &= [(a_1 + \ldots + a_k) + a_{k+1}]b = \\ &= (a_1 + \ldots + a_k)b + a_{k+1}b = a_1 b + \ldots + a_k b + a_{k+1} b.\end{aligned}$$

De la fórmula (2.4) en el caso $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ se deduce que

$$nb = \underbrace{b + \ldots + b}_{n \text{ veces}},$$

es decir, que la multiplicación de un número por un número natural n se reduce a la suma de este número n veces.

OBSERVACIÓN. Señalemos que las propiedades I — III del p. 2.1 no describen totalmente a los números reales, en el sentido de que existen otros conjuntos diferentes del conjunto de los números reales, que satisfacen las mismas propiedades I — III si en ellos la palabra "número" en todos los casos se sustituye por la palabra "elemento" del conjunto analizado. Precisamente en este sentido, en el futuro por doquier se entiende la expresión "un conjunto que satisface cualquiera de las propiedades I — V".

Ejemplos de conjuntos que satisfacen las condiciones I, II y III son sólo números racionales o números complejos, conocidos de la matemática elemental, así como el conjunto de las funciones racionales, es decir, las funciones del tipo $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Los elementos de todos los conjuntos enumerados se pueden sumar y multiplicar y además estas operaciones se subordinan a las condiciones I, II y III. Los conjuntos que satisfacen estas exigencias y que contienen al menos un elemento diferente de cero se llaman *campos*.

De esta forma, los números racionales, los números reales, los números complejos y las funciones racionales forman campos.

Analicemos ahora las propiedades que distinguen al campo de los números reales entre todos los otros campos. Una de tales propiedades es la propiedad de ordenamiento de sus elementos.

2.3*. PROPIEDAD DE ORDENAMIENTO

Deduzcamos algunas consecuencias de las propiedades de ordenamiento IV y de las propiedades de la suma y la multiplicación I, II y III. Ante todo recordemos el concepto de comparación de la magnitud de dos números; el número a se llama número mayor que el número b : $a > b$, si $a - b > 0$.

Tienen lugar las siguientes propiedades de la comparación de las magnitudes de los números reales.

1°. *Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.*

Esta propiedad se llama *transitividad* de la relación de orden.

Si $a > b$ y $b > c$, entonces por definición, esto significa que $a - b > 0$ y $b - c > 0$. Sumando estas desigualdades, según IV_1 obtenemos: $(a - b) + (b - c) > 0$, es decir, $a - c > 0$. Esto significa que $a > c$. □

2°. *Si $a > b$, entonces para cualquier número c tenemos $a + c > b + c$.*

En realidad, la desigualdad $a > b$ significa que $a - b > 0$. Por cuanto según la propiedad 5° del p. 2.2* $a - b = a + c - c - b = (a + c) - (b + c)$, entonces $(a + c) - (b + c) > 0$ y por consiguiente $a + c > b + c$. □

3°. *Para dos números cualesquiera a y b se tiene exactamente una de las tres relaciones de orden $a > b$, $a = b$ ó $a < b$.*

En efecto, sean dados dos números a y b. Para su diferencia $a - b$ según la propiedad IV tiene lugar exactamente una de las relaciones $a - b > 0$, $a - b = 0$ ó $0 > a - b$.

Si $a - b > 0$, entonces por definición $a > b$. Si $a - b = 0$, entonces sumándole a ambos miembros de la igualdad el númbero b, obtenemos $a = b$. Finalmente si $0 > a - b$, entonces, sumándole sucesivamente a ambos miembros de la desigualdad $0 > a - b$ los números $-a$ y b (véase la propiedad anterior), obtendremos $b - a > 0$. Esto significa que $b > a$ o lo que es lo mismo $a < b$. □

La relación $a < b$ se lee "a es menor que b". La relación $a = b$ se lee "a es igual a b". La relación $a > b$ se lee "a es mayor que b".

La existencia de la relación transitiva de orden "mayor que", "menor que" entre dos números cualesquiera se llama usualmente *propiedad de ordenamiento del conjunto de los números reales o relación de orden.*

La escritura $a \leqslant b$ es equivalente a la escritura $b \geqslant a$ y significa que o bien $a = b$ o bien $a < b$. Por ejemplo, se puede escribir $2 \leqslant 2$, $2 \leqslant 5$. Naturalmente se puede escribir más exacto $2 = 2$, $2 < 5$, no obstante, las desigualdades $2 \leqslant 2$ y $2 \leqslant 5$ también son ciertas ya que denotan que "dos no es mayor que dos" y respectivamente que "dos no es mayor que cinco".

Las relaciones $a < b$, $a \leqslant b$, $a > b$, $a \geqslant b$ se llaman *desigualdades*. Las desigualdades $a < b$ y $a > b$ se llaman *desigualdades estrictas*.

4°. *Si $a < b$, entonces $-a > -b$.*

En particular, si $a > 0$, entonces $-a < 0$ y si $a < 0$, entonces $-a > 0$.

En efecto, de $a < b$ por definición tenemos $b - a > 0$. Por esto $-a = -a + b + (-b) = (b - a) + (-b) > 0 + (-b) = -b$. □

5°. *Si $a < b$ y $c \leqslant d$, entonces $a + c < b + d$, es decir, se puede efectuar la suma término por término de las desigualdades de un signo.*

En realidad, si $a < b$ y $c \leqslant d$, entonces, según la propiedad 2° de este punto $a + c < b + c$ y $c + b \leqslant d + b$, por eso en virtud de la transitividad del ordenamiento tenemos $a + c < b + d$. □

6°. *Si $a < b$ y $c \geqslant d$, entonces $a - c < b - d$, es decir, las desigualdades de signos opuestos se pueden restar en el sentido indicado.*

En efecto, de $c \geqslant d$ tenemos según la propiedad 4° de este punto $-c \leqslant -d$. Sumando las desigualdades $a < b$ y $-c \leqslant -d$ obtendremos $a - c < b - d$. □

7°. *Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.*

En realidad, según la propiedad 4° de este punto $-c > 0$, por la propiedad IV_2: $a(-c) < b(-c)$. De aquí, por la propiedad 16° del p. 2.2*, obtendremos $-ac < -bc$ y por consiguiente (véase la propiedad 4° de este punto) $ac > bc$. □

De la propiedad 7° demostrada ahora (para $a = 0$) y de la propiedad IV_2 se deriva la regla de los signos de la multiplicación de números reales: el *producto de dos factores del mismo signo* (o bien positivos simultáneamente o bien negativos simultáneamente) *es positivo y el producto de dos factores de signos desiguales* (uno de ellos es positivo y el otro, negativo) *es negativo*.

8°. *En un campo ordenado siempre es válida la desigualdad $1 > 0$.*

En realidad, ya vimos (véase la observación después de la propiedad 14° en el p. 2.2*), que de la condición de existencia del elemento $a \neq 0$ (esta condición se incluye en la definición de campo, véase el final del p. 2.2*) se deduce que $1 \neq 0$. Mostremos que la desigualdad $1 < 0$ no es posible. Supongamos lo contrario, o sea $1 < 0$. Tomemos cualquier $a > 0$. Por la definición de la unidad tenemos $a \cdot 1 = a$. Por la regla de los signos, el producto del número positivo a y del número negativo 1, según nuestra suposición, es un número negativo, es decir, $a < 0$, lo que es una contradicción.

De nuevo los números reales no son el único objeto que satisface los axiomas I — IV. Los conjuntos para los cuales son válidos estos axiomas se llaman *campos ordenados*. Un ejemplo de campo ordenado diferente del campo de los números reales es el campo de los números racionales. No obstante, ni el campo de los números complejos ni el campo de las fracciones racionales son campos ordenados.

En cualquier campo ordenado se puede introducir el concepto de valor absoluto de sus elementos. En su definición y en el estudio de sus propiedades, para la uniformidad de la exprosición hablaremos siempre de números y no de los elementos de un campo ordenado arbitrario.

Para cualquier número a, el número denotado por $|a|$ y definido por la fórmula

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geqslant 0, \\ -a & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

se llama *valor absoluto* del número a o lo que es lo mismo, su *módulo*.

Señalemos una serie de propiedades del valor absoluto.

1°. *Para cualquier número a se cumplen las desigualdades*

$$|a| \geqslant 0, \tag{2.5}$$

$$|a| = |-a|, \tag{2.6}$$

$$a \leqslant |a|, -a \leqslant |a|. \tag{2.7}$$

Demostremos la desigualdad (2.5). Si $a \geqslant 0$, entonces $|a| = a \geqslant 0$, si $a < 0$, entonces $|a| = -a > 0$ (propiedad 4° del p. 2.3*). □

Demostremos la igualdad (2.6). Si $a \geqslant 0$, entonces $|a| = a$ y $-a \leqslant 0$ por eso según la definicioñ de valor absoluto y la propiedad 3° del p. 2.2* obtendremos $|-a| = -(-a) = a = |a|$. Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$ y $-a > 0$; esto significa que $|-a| = -a$. □

Demostremos la desigualdad (2.7). Si $a \geqslant 0$, entonces $a = |a|$ y $-a \leqslant 0 \leqslant \leqslant a = |a|$, es decir, (2.7) se cumple. Si $a < 0$, entonces $a < 0 < -a = |a|$, es decir, (2.7) también se cumple. □

2°. *Para cualesquiera números a y b*

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|, \tag{2.8}$$

$$||a| - |b|| \leqslant |a - b|. \tag{2.9}$$

Demostremos estas desigualdades. Según (2.7) tenemos:

$$a \leqslant |a|, \quad -a \leqslant |a|, \quad b \leqslant |b|, \quad -b \leqslant |b|.$$

De aquí, por la propiedad 5° del p. 2.3* y la propiedad 5° del p. 2.2*

$$a + b \leqslant |a| + |b|, \quad -(a + b) \leqslant |a| + |b|.$$

Uno de los números $a + b$ o $-(a + b)$ es no negativo y por consiguiente coincide con $|a + b|$. La desigualdad (2.8) queda demostrada.

La desigualdad (2.9) es una consecuencia de la (2.8). En realidad

$$|a| - |b| = |(a - b) + b| - |b| \leqslant |a - b| + |b| - |b| = |a - b|;$$

análogamente $|b| - |a| \leqslant |b - a| = |a - b|$.

Por la propiedad 5° del p. 2.2* $|b| - |a| = -(|a| - |b|)$. Uno de los números $|a| - |b|$ y $-(|a| - |b|)$ coincide con $||a| - |b||$. La desigualdad (2.9) también queda demostrada. □

3°. *Para cualesquiera números a y b se cumple la igualdad* $|ab| = |a||b|$.

Esto se deduce inmediatamente de la definición de valor absoluto, de la propiedad 16° del p. 2.2* y de la regla de los signos en la multiplicación.

Veamos ahora la propiedad de continuidad que distingue el campo de los números reales entre todos los demás campos ordenados.

2.4.* PROPIEDAD DE CONTINUIDAD DE LOS NÚMEROS REALES

Un campo ordenado que satisface la propiedad V se llama *campo ordenado continuo*. El campo de los números racionales ya no es un campo ordenado continuo: en él se tienen los conjuntos A y B; para cualesquiera elementos $a \in A$ y $b \in B$ se cumple la desigualdad $a < b$ y al mismo tiempo no existe un número racional r tal que para todos los $a \in A$ y $b \in B$ se cumpla la relación $a \leqslant r \leqslant b$. Se puede mostrar, por ejemplo, que poseen esta propiedad el conjunto B compuesto por todos los números positivos r que satisfacen la desigualdad $r^2 > 2$ y el conjunto A al cual pertenecen todos los números racionales restantes.

Resulta que el conjunto de los números reales es en cierto sentido el único campo ordenado continuo, más preciso el único salvo un isomorfismo. Aclaremos qué significa esto.

Dos campos ordenados $\mathscr{P}$ *y* $\mathscr{P}'$ *se llaman isomorfos si existe una relación biunívoca de sus elementos* $f\colon \mathscr{P} \to \mathscr{P}'$ (véase el p. 1.2*), *tal que para dos elementos cualesquiera* $x \in \mathscr{P}$ *e* $y \in \mathscr{P}$ $x < y$, *se cumplen las condiciones* $f(x) < f(y)$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$.

Más brevemente, los campos ordenados $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}'$ se llaman *isomorfos* si existe una aplicación biunívoca de uno de ellos sobre el otro (biyección) que conserva el ordenamiento, la adición y la multiplicación de sus elementos.

Se puede mostrar que todos los campos ordenados continuos son isomorfos entre sí. Con esto se explica que en la literatura matemática se encuentran diferentes construcciones del conjunto de los números reales, que parten de diferentes objetos concretos, llevando todas ellas a conjuntos no triviales de elementos, que cumplen las propiedades I — V, es decir, a campos ordenados continuos y por consiguiente a conjuntos isomorfos. De esta forma llegamos a la siguiente definición del conjunto de los números reales.

Definición 2'. *Se llama conjunto de los números reales un campo ordenado continuo.*

El campo de los números racionales, como ya se señaló anteriormente, no posee la propiedad de la continuidad y el campo de los números reales sí. Por esto, a ciencia cierta, existen números reales que no son racionales, es decir, existen los números irracionales. De esta forma, el conjunto de los números reales se puede analizar como una extensión sustancial del conjunto de los números racionales, sustancial en el sentido de que el conjunto de los números racionales es un subconjunto propio del conjunto de los números reales. En esta extensión se conservan la propiedad de ordenamiento y las operaciones de adición y multiplicación. Resulta que los números reales, a diferencia de los racionales ya no se pueden extender hasta un conjunto mayor de forma tal que se conserven las propiedades señaladas (el ordenamiento y las operaciones de adición y multiplicación).

Esta propiedad se llama *propiedad de completitud de los números reales con respecto a su ordenamiento, a la adición y la multiplicación*.

2.5.* CORTADURAS EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

La propiedad de continuidad de los números reales se puede enunciar en diferentes términos. Aquí será analizado el enunciado de esta propiedad en los términos de las así llamadas cortaduras de los números reales. Ante todo definamos este concepto.

Definición 1. *Dos conjuntos $A \subset \mathbf{R}$ y $B \subset \mathbf{R}$ se llaman cortadura del conjunto de los números reales $\mathbf{R}$, si*

1°) *la unión de los conjuntos A y B comprende todo el conjunto de los números reales $\mathbf{R}$, $A \cup B = \mathbf{R}$;*

2°) *cada uno de los conjuntos A y B no es vacío, $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$;*

3°) *cada número del conjunto A es menor que cualquier número del conjunto B: si $a \in A$, $b \in B$, entonces $a < b$.*

La propiedad 1° significa que cada número real pertenece al menos a uno de los conjuntos A y B.

De la propiedad 3° evidentemente se deduce que los conjuntos A y B no se intersecan: $A \cap B = \varnothing$. En efecto, si se encontrara un elemento $x \in A \cap B$, es decir, $x \in A$ y $x \in B$, entonces de la propiedad 3° se deduciría que $x < x$.

La cortadura del conjunto de los números reales formada por los conjuntos A y B se denota por $A|B$. El conjunto A se llama clase *inferior* y el conjunto B clase *superior* de la cortadura dada.

Ejemplos simples de cortaduras se pueden obtener de la siguiente forma. Fijemos cualquier número $\alpha \in \mathbf{R}$. Llevemos inicialmente al conjunto A todos los números $x \leqslant \alpha$ y al conjunto B, todos los números $y > \alpha$

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \leqslant \alpha\}, \quad B \stackrel{\text{def}}{=} \{y : y > \alpha\}. \tag{2.10}$$

Los conjuntos A y B así definidos forman una cortadura, lo cual se establece con una comprobación directa del cumplimiento de las condiciones 1°, 2° y 3° de la definición 1.

Se puede actuar de otra forma: llevar al conjunto A todos los números $x < \alpha$ y al conjunto B todos los números $y \geqslant \alpha$:

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x < \alpha\}, \quad B \stackrel{\text{def}}{=} \{y : y \geqslant \alpha\}. \tag{2.11}$$

De nuevo, los conjuntos A y B forman una cortadura. En ambos casos (2.10) y (2.11) se dice que la cortadura la realiza el número α y se escribe $\alpha = A|B$.

Señalemos dos propiedades de las cortaduras realizadas por cierto número.

1°. *En el caso* (2.1) *en la clase A hay un número máximo que es el número α y en la clase B no hay uno mínimo.*

En el caso (2.2) *en la clase A no hay máximo y en la clase B hay un número mínimo que es el número α.*

Analicemos, por ejemplo, el primer caso (2.10). Entonces de la primera fórmula de (2.10) que define el conjunto A se ve claramente que α es el número máximo en la clase A.

Mostremos que en el conjunto B no hay un número mínimo. Supongamos lo contrario: supongamos que en B hay un número mínimo. Denotémoslo por β. Por cuanto $\beta \in B$, entonces por la segunda fórmula de (2.10) $\alpha < \beta$, por consiguiente $\alpha + \alpha < \alpha + \beta$, es decir, $\alpha < \dfrac{\alpha + \beta}{2}$, de donde, de nuevo, por la segunda fór-

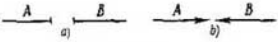


FIG. 4

mula de (2.10) obtenemos que $\frac{\alpha + \beta}{2} \in B$. Análogamente, de $\alpha < \beta$ tenemos $\alpha + \beta < \beta + \beta$, es decir, $\frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$ y ya que β es el número mínimo en la clase B, entonces, $\frac{\alpha + \beta}{2} \in A$. La contradicción obtenida demuestra la afirmación.

2°. *El número que realiza la cortadura es único.*

En realidad, supongamos que existe una cortadura que está definida por dos números distintos: $\alpha = A|B$ y $\beta = A|B$. Sea, por ejemplo, $\alpha < \beta$. Entonces, como vimos en la demostración de la propiedad anterior, $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$. De la desigualdad $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2}$ se deduce que tanto en el caso (2.10) como en el (2.11) tiene lugar $\frac{\alpha + \beta}{2} \in B$. Análogamente, de la desigualdad $\frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$ se deduce que $\frac{\alpha + \beta}{2} \in A$. Esto contradice que los conjuntos A y B no se intersecan.

La propiedad de continuidad de los números reales consiste en que no existe ninguna cortadura de los números reales fuera de aquellas que se realizan por cierto número real.

Analicemos precisamente la siguiente propiedad.

V°. Para cada cortadura $A|B$ del conjunto de los números reales existe el número α que realiza esta cortadura

$$\alpha = A|B.$$

Este número, de acuerdo con lo dicho anteriormente, es o el mayor en la clase inferior, entonces, en la superior no hay uno mínimo, o el menor en la clase superior, entonces en la inferior no hay uno máximo.

De esta forma, si $A|B$ es una cortadura del conjunto de los números reales, entonces por la propiedad de continuidad enunciada en la forma V* no puede ocurrir que en la clase A haya un número máximo y al mismo tiempo en la clase B haya uno mínimo (fig. 4, *a*). No puede ocurrir tampoco que en la clase A no haya máximo y al mismo tiempo en la clase B no haya un número mínimo (fig. 4, *b*). Dicho correctamente, la continuidad de los números reales significa que en su conjunto no hay ni saltos ni lagunas, más breve, no hay vacíos.

Una cortadura $A|B$ geométricamente significa una partición de la recta numérica en dos rayos que tienen el mismo origen y que van en sentidos opuestos y además uno de ellos contiene su origen común (rayo cerrado) y otro no (rayo abierto).

La propiedad de continuidad de los números reales enunciada en V, de igual forma que la propiedad V* equivalente a ella, se llama *principio de continuidad de los* *números reales según Dedekind**). En el futuro nos encontraremos con otros enfoques del concepto de continuidad del conjunto de los números reales (véase el p. 3.6).

Mostremos que la propiedad V* es equivalente a la propiedad V.

Supongamos que inicialmente se cumple la propiedad V y se da cualquier cortadura $A|B$. Por la tercera propiedad de las cortaduras, para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$ se cumple la desigualdad $a < b$, por lo que la pareja de conjuntos A y B satisface la condición enunciada en la propiedad V*. Por consiguiente, por esta propiedad, existe un número α tal que para todos los $a \in A$ y $b \in B$ se cumple la relación $a \leqslant \alpha \leqslant b$. El número α por la primera propiedad de las cortaduras pertenece a una de las clases A o B. Si $\alpha \in A$, entonces para todos los $a \in A$ y $b \in B$ se cumple la desigualdad $a \leqslant \alpha < b$, es decir, el número α realiza la cortadura $A|B$ y es el número mayor en la clase inferior. Análogamente, si $\alpha \in B$ entonces el número α también realiza la cortadura $A|B$ y es el menor en la clase superior B.

Supongamos ahora que al contrario se cumple la condición V* y están dados dos conjuntos no vacíos $A \subset \boldsymbol{R}$ y $B \subset \boldsymbol{R}$ tales que para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$ se cumple la desigualdad $a \leqslant b$. Denotemos por B^* el conjunto de números tal que cualquiera que sea $b^* \in B^*$ para cualquier $a \in A$ se cumple la desigualdad $a \leqslant b^*$ (el número b^* que posee esta condición se llama número que acota superiormente al conjunto A). Evidentemente,

$$B \subset B^*. \tag{2.12}$$

Por A^* denotemos todos los demás números reales:

$$A^* = \boldsymbol{R} \setminus B^*.$$

Mostremos que los conjuntos A^* y B^* forman una cortadura en el conjunto de los números reales y que el número α que realiza esta cortadura satisface la condición indicada en el enunciado de la propiedad V para los conjuntos dados A y B.

Ante todo comprobemos que los conjuntos A^* y B^* satisfacen todas las condiciones que deben satisfacer los conjuntos que forman una cortadura. En efecto, por cuanto al conjunto A^* se llevaron todos los números que no cayeron en el conjunto B^*, entonces su unión $A^* \cup B^*$ es el conjunto de todos los números reales $\boldsymbol{R}$:

$$A^* \cup B^* = \boldsymbol{R}. \tag{2.13}$$

El conjunto B^* a ciencia cierta no es vacío por la inclusión (2.12), ya que por condición, el conjunto B no es vacío. Así pues

$$B^* \neq \varnothing. \tag{2.14}$$

Demostremos que el conjunto A^* tampoco es vacío. Por condición, el conjunto A no es vacío**). Esto significa que existe al menos un número $a \in A$. Entonces, el número $a - 1$, a ciencia cierta, no pertenece al conjunto B^*, ya que $a - 1 < a$,

---

*) R. Dedekind (1831—1916), matemático alemán.

**) Observemos que no necesariamente $A \subset A^*$. Más aún, en el caso cuando el conjunto A está compuesto por un punto $a \in B$ (esto es permisible), los conjuntos A y A^* incluso no se intersecan ya que en este caso $A = \{a\} \subset B \subset B^*$.

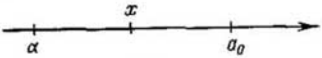


FIG. 5

$a \in A$, es decir, en el conjunto A se encontró un elemento mayor que $a - 1$. De esta forma $a - 1 \notin B^*$, ya que el conjunto B^* está compuesto sólo por los números mayores que todos los números de A o iguales a algunos de ellos. Por esto, $a - 1 \in A^*$, ya que al conjunto A^* pertenecen todos los números que no entran en B^*. Así pues, el conjunto A^* tampoco es vacío:

$$A^* \neq \varnothing. \tag{2.15}$$

Demostremos ahora que cada número $a^* \in A^*$ es menor que cualquier número $b^* \in B^*$:

$$a^* < b^*. \tag{2.16}$$

Supongamos lo contrario: supongamos que se encuentran los números $a^* \in A^*$ y $b^* \in B^*$ tales que $a^* \geqslant b^*$. Entonces, por la definición del conjunto B^*, para cualquier $a \in A$ se cumple la desigualdad $a \leqslant b^*$ y por consiguiente la desigualdad $a \leqslant a^*$. Esto significa que $a^* \in B^*$. De esta forma, el número a^* simultáneamente pertenece tanto al conjunto A^* como al conjunto B^*. Esto no es posible, ya que al conjunto A^* fueron llevados aquellos números que no se contienen en el conjunto B^*. La contradicción obtenida muestra que la desigualdad $a^* \geqslant b^*$ para la condición $a^* \in A$, $b^* \in B$ no es posible y por tanto se cumple la desigualdad (2.16).

El cumplimiento de las condiciones (2.13) — (2.16) significa que los conjuntos A^* y B^* efectivamente forman una cortadura en el conjunto de los números reales (véase la definición 1).

Sea α el número que realiza esta cortadura: $\alpha = A^*|B^*$. Tal número α existe por la suposición sobre el cumplimiento de la propiedad V*. Mostremos que $\alpha \in B^*$. Si esto no fuera así, entonces se encontraría un número $a_0 \in A$ tal que $a_0 > \alpha$. Escojamos cualquier x de forma tal que $\alpha < x < a_0$ (fig. 5). Por cuanto $x > \alpha$ y $\alpha = A^*|B^*$, entonces $x \in B^*$ y por consiguiente, para cualquier $a \in A$ debe cumplirse la desigualdad $x \geqslant a$, ya que B^* está compuesto sólo por tales números. No obstante, esta desigualdad no se cumple para $a = a_0$. La contradicción obtenida demuestra que $\alpha \in B^*$ y por esto el número α es el menor en la clase superior B^*, pero $B < B^*$, por consiguiente para cualesquiera $b \in B$ se cumple la desigualdad $\alpha \leqslant b$. Finalmente, por la propia definición del conjunto B^*, de la inculusión $\alpha \in B^*$ se deriva que para cualquier número $a \in A$ es válida la desigualdad $a \leqslant \alpha$.

Así pues, para todos los $a \in A$, $b \in B$ tiene lugar la desigualdad

$$a \leqslant \alpha \leqslant b.$$

Esto significa que la presencia de la propiedad V* conlleva la existencia de la propiedad V.

2.6*. POTENCIAS RACIONALES DE LOS NÚMEROS REALES

Señalemos que en el conjunto de los números reales para cualquier número $a \geqslant 0$ y cualquier número natural n existe siempre un número $b \geqslant 0$ que es la raíz de n-ésimo grado de a, es decir, existe $\sqrt[n]{a}$. No nos detendremos por ahora en la demostración de esta afirmación, aunque se podría realizar aquí, por ejemplo, sobre la base del concepto de cortadura, y la demostraremos más adelante (véase el ejemplo en el p. 6.3). Claro, en algunos casos, la raíz puede existir para $a < 0$. Por ejemplo, existe $\sqrt[3]{-8} = -2$, pero ya la raíz $\sqrt{-4}$ no existe, en el sentido de que no existe el número real $b = \sqrt{-4}$, ya que en el caso contrario sería válida la igualdad $b^2 = -4$ que contradice la regla de los signos en la multiplicación.

Enunciemos las propiedades de la raíz. Sean n y m números naturales y $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, entonces son válidas las fórmulas siguientes:

1°) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$; 4°) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$;

2°) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$, 5°) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

3°) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$;

Todas estas fórmulas se demuestran por un mismo método. Demostremos por ejemplo, la primera.

Sea $b = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$. Por la definición de raíz y por la propiedad 22° del p. 2.2* esto significa que $b^n = \sqrt[m]{a}$ y que $b^{mn} = a$. De aquí por la misma definición de raíz, se deduce que $b = \sqrt[mn]{a}$. De esta forma tenemos

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = b = \sqrt[mn]{a}. \square$$

Si $a < 0$ y todas las raíces que aparecen en la fórmula 1) existen, entonces también es válida y la demostración llevada a cabo mantiene su vigencia. En general, si $a < 0$ y todas las raíces que aparecen en cualquiera de las fórmulas 1) — 5) existen, entonces son válidas en este caso.

Teniendo el concepto de potencia y raíz enteras, definamos el concepto de potencia racional. Sea $a > 0$ y $r \in Q$, es decir, $r = m/n$, $m \in Z$, $n \in Z$, $n \neq 0$.

La potencia a^r se define con la igualdad

$$a^r \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}.$$

Señalemos las propiedades fundamentales de la potencia racional. Sea $a > 0$, $b > 0$, $r_1 \in Q$, $r_2 \in Q$, $r \in Q$, entonces

6°) $a^{r_1}a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$;

7°) $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$;

8°) $(ab)^r = a^r b^r$.

Demostremos, por ejemplo, la fórmula 6°). Si $r_1 = p/q$, $r_2 = m/n$, $q \neq 0$, $n \neq 0$, $p, q, m, n \in Z$, entonces, utilizando la definición de potencia racional, las propiedades de las raíces 2° y 3° y la propiedad 22 del p. 2.2* obtendremos:

$$a^{r_1}a^{r_2} = a^{p/q}a^{m/n} = \sqrt[q]{a^p}\,\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{np}}\,\sqrt[nq]{a^{mq}} =$$

$$= \sqrt[nq]{a^{np+mq}} = a^{\frac{np+mq}{nq}} = a^{p/q+\frac{m}{n}} = a^{r_1+r_2}. \square$$

De la propiedad 8° se deduce que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$$

En efecto,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = (ab^{-1})^r = a^r(b^{-1})^r = a^r b^{-r} = \frac{a^r}{b^r}.\square$$

Ejercicio. Sea $B = \{x : x^2 > 2,\ x > 0,\ x \in Q\}$ y $A = Q \setminus B$. Demuéstrese que los conjuntos A y B forman una cortadura en el campo de los números racionales Q y que esta cortadura no está definida por ningún número racional.

§ 3. CONJUNTOS NUMÉRICOS

3.1. RECTA NUMÉRICA EXTENDIDA

A menudo es cómodo completar el conjunto R de los números reales con los elementos que se denotan por $+\infty$ y $-\infty$ y que se llaman respectivamente *más y menos infinito*, considerando que por definición

$$-\infty < +\infty,$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, (-\infty) + (-\infty) = -\infty,$$

$$(+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty,$$

$$(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty.$$

Pero, por ejemplo, las operaciones $(+\infty) + (-\infty)$ o $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ ya no están definidas (véase también el p. 4.9). Además, para cualquier $a \in R$, por definición, se considera que se cumple la igualdad $\quad -\infty < a < +\infty$

y que son válidas las operaciones

$$a + (+\infty) = +\infty + a = +\infty, \quad -\infty + a = a + (-\infty) = -\infty;$$

para $a > 0$ $\quad a(+\infty) = (+\infty)a = +\infty, \quad a(-\infty) = (-\infty)a = -\infty;$

para $a < 0$ $\quad a(+\infty) = (+\infty)a = -\infty, \quad a(-\infty) = (-\infty)a = +\infty.$

Los infinitos $+\infty$ y $-\infty$ se llaman a veces "*números infinitos*" a diferencia de los números reales $a \in R$ que se llaman a su vez *números finitos*.

En lo adelante, por número se entenderá siempre un número real finito si no se acuerda algo diferente.

El conjunto R de los números reales completado con los elementos $+\infty$ y $-\infty$ se llama *conjunto extendido de los números reales* (o recta numérica extendida) y se denota por $\bar{R}$. Los elementos $+\infty$ y $-\infty$ se llaman a veces *puntos infinitamente alejados de la recta numérica extendida*, en contraposición a los números de la recta numérica R que se llaman también puntos finitos.

3.2. INTERVALOS DE NÚMEROS REALES. ENTORNOS

Recordemos la definición de ciertos subconjuntos de números reales muy importantes, que en el futuro se encontrarán a menudo. Si $a \leqslant b$, $a \in \bar{R}$, $b \in \bar{R}$, entonces, el conjunto $\{x : a \leqslant x \leqslant b\}$ se llama *segmento* de la recta numérica extendida $\bar{R}$ y se denota por $[a, b]$, es decir,

$$[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x : a \leqslant x \leqslant b\}, \quad a \in \bar{R}, b \in \bar{R}.$$

En el caso $a = b$ el segmento $[a, b]$ está constituido por un punto.

Si $a < b$, entonces el conjunto $\{x : a < x < b\}$ se llama *intervalo* y se denota por (a, b), es decir,

$$(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x : a < x < b\}.$$

El intervalo (a, b) se llama *interior del segmento* $[a, b]$.

Los conjuntos numéricos

$$[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x : a \leqslant x < b\} \quad \text{y} \quad (a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x : a < x \leqslant b\}$$

se llaman *intervelos semiabiertos*.

Los segmentos $[a, b]$, los intervalos (a, b) y los intervalos semiabiertos $[a, b)$, $(a, b]$ se llaman *intervalos*; los puntos a y b, sus *extremos*; a, el extremo derecho y b, el izquierdo y los puntos x son tales que $a < x < b$ se llaman sus *puntos interiores*.

Si a y b son finitos, es decir, $a \in R$ y $b \in R$, entonces el intervalo con extremos a y b se llama también *intervalo numérico* y el número $b - a$, su *longitud*.

Si al menos uno de los números a y b es infinto, entonces el intervalo con extremos a y b se llama *infinito*.

OBSERVACIÓN 1. Los intervalos de todos los tipos de la recta numérica extendida poseen la siguiente propiedad: *si los puntos $\alpha \in \bar{R}$ y $\beta \in \bar{R}$, $\alpha < \beta$ pertenecen a cierto intervalo con los extremos $a \in \bar{R}$ y $b \in \bar{R}$, entonces todo el segmento $[\alpha, \beta]$ pertenece a este intervalo.*

Para los intervalos de cada tipo esto se deduce directamente de su definición.

Un concepto importante para el futuro es el concepto de ε-entorno de un punto de la recta numérica extendida.

En el caso $a \in R$, es decir, cuando a es un número real, se llama ε-entorno $U(a, \varepsilon)$*), $\varepsilon > 0$, del número a el intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$:

$$U(a, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Si $a = +\infty$, entonces

$$U(+\infty, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right],$$

y si $a = -\infty$, entonces

$$U(-\infty, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \left[-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

*) La notación del entorno de un punto con el símbolo U viene del vocablo alemán Umgebung (entorno).

De esta forma, en todos los casos, es decir, cuando a es un número real o cuando a es uno de los infinitos $+\infty$, $-\infty$, con la disminución del número ε los ε-entornos correspondientes $U(a, \varepsilon)$ disminuyen: si $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, entonces $U(a, \varepsilon_1) \subset U(a, \varepsilon_2)$.

A veces resulta cómodo completar el conjunto de los números reales no con dos, sino con un infinito (sin signo) ∞. Su ε-entorno $U(\infty, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, se define por la igualdad

$$U(\infty, \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \left\{x : x \in R,\ |x| > \frac{1}{\varepsilon}\right\} \cup \{\infty\}.$$

Dicho de otra forma, el ε-entorno $U(\infty, \varepsilon)$ está compuesto por dos intervalos infinitos $\left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$, $\left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right)$ y por el propio elemento ∞. Este elemento a veces también se llama *punto infinitamente alejado* de la recta numérica. A diferencia de los infinitos con signo: $+\infty$ y $-\infty$, el infinito sin signo ∞ no está relacionado con los números reales por la relación de orden.

Cualquier ε-entorno de un punto finito o infinitamente alejado de la recta numérica se llama *entorno de este punto* y a menudo se denota simplemente por $U(a)$. A veces denotaremos a los entornos con otras letras, por ejemplo, con las letras V, W.

Junto con los entornos de los infinitos, definidos anteriormente, en el conjunto de los números reales completado por ellos, a veces se analizan los entornos de los infinitos ∞, $+\infty$ y $-\infty$ en el propio conjunto de los números reales: $U(\infty) \cap R$, $U(+\infty) \cap R$ y $U(-\infty) \cap R$. Los propios infinitos, naturalmente, ya no caen en estos entornos. Nos mantendremos en las definiciones dadas inicialmente (señalemos además que el lema que se demuestra más adelante se mantiene válido en el caso cuando en él por entornos de los infinitos entendemos sus entornos en el conjunto de los números reales).

Enunciemos en forma de lema una importante propiedad de los entornos.

Lema. *Para dos puntos diferentes cualesquiera de la recta numérica extendida (extendida o bien con ayuda de dos infinitos con signo o bien sólo con ayuda de un infinito sin signo) existen entornos que no se intersecan.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos inicialmente el caso de la recta numérica extendida $\overline{R}$ obtenida con la incorporación de dos infinitos con signo al conjunto de los números reales R. Mostremos que para cualesquiera $a \in \overline{R}$ y $b \in \overline{R}$, $a < b$, existen $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ tales que $U(a, \varepsilon_1) \cap U(b, \varepsilon_2) = \varnothing$. En realidad si a y b son números reales, entonces se puede tomar $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{b - a}{2}$ (fig. 6, *a*). Si a es un número real y $b = +\infty$, entonces, en calidad de los $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ señalados sirven, por ejemplo, $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = \frac{1}{|a| + 1}$ (fig. 6, *b*). Si $a = -\infty$ y b es un número real, entonces se puede tomar $\varepsilon_1 = \frac{1}{|b| + 1}$, $\varepsilon_2 = 1$ (fig. 6, *c*). Finalmente, si $a = -\infty$ y $b = +\infty$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ arbitrario, los entornos $U(-\infty, \varepsilon)$ y $U(+\infty, \varepsilon)$ no se intersecan (fig. 6, *d*).

Si la recta numérica R está completada sólo por un infinito ∞, entonces es suficiente analizar sólo el caso $a \in R$ y $b = \infty$ (ya que el caso $a \in R$ y $b \in R$ está analiza-

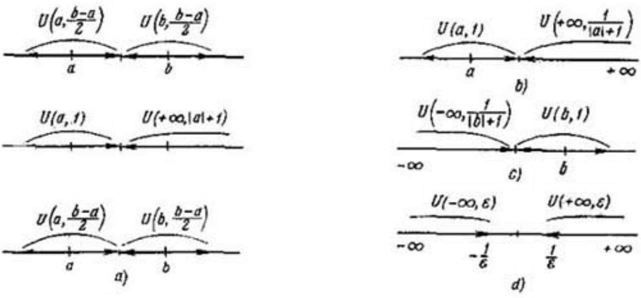


FIG. 6

do anteriormente), en el cual se puede tomar de nuevo (como para $a \in R$, $b = +\infty$) $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{|a| + 1}$. □

OBSERVACIÓN 2. En el caso $a < b$, $a \in \bar{R}$, $b \in \bar{R}$ y $U(a, \varepsilon_1) \cap U(b, \varepsilon_2) = \varnothing$ para cualesquiera $x \in U(a, \varepsilon_1)$ e $y \in U(b, \varepsilon_2)$, evidentemente es válida la desigualdad $x < y$.

Su validez se establece directamente con una comprobación de todos los casos aquí posibles, es decir, para $a \in R$, $b \in R$, para $a \in R$, $b = +\infty$, para $a = -\infty$, $b \in R$ y para $a = -\infty$, $b = +\infty$.

3.3. CONJUNTOS ACOTADOS Y NO ACOTADOS

Introduzcamos una serie de conceptos necesarios para el futuro y estudiemos algunas propiedades de los conjuntos numéricos.

Definición 3. *Si para el subconjunto E de números reales existe un número b tal que no es menor que cada número $x \in E$, es decir, para cualquier $x \in E$ se cumple la desigualdad $x \leqslant b$, entonces el conjunto E se llama acotado superiormente y el número b, número que acota superiormente el conjunto E.*

Un conjunto que no sea un conjunto acotado superiormente se llama *no acotado superiormente*.

Con ayuda de los símbolos lógicos la definición de conjunto acotado superiormente se escribe de la siguiente forma:

el conjunto $E \subset R$ está acotado superiormente $\Leftrightarrow$ $(\exists b \in R)(\forall x \in E) : x \leqslant b$, de aquí

el conjunto $E \subset R$ no está acotado superiormente $\Leftrightarrow$ $(\forall b \in R)(\exists x \in E) : x > b$, es decir, el conjunto E no está acotado por arriba si cualquiera que sea el número $b \in R$ se encuentra un número $x \in E$ tal que $x > b$.

Observemos que si el número b acota superiormente el conjunto E, es decir, para todas las $x \in E$ se cumple la desigualdad $x \leqslant b$ y $b < b'$, entonces, para todas las $x \in E$ evidentemente, tiene lugar la desigualdad $x \leqslant b'$, y por consiguiente, el número b' también acota superiormente el conjunto E.

Si en el conjunto E se tiene un número b que no es menor que todos los otros números de E, se decir, $b \in E$ y para todos los $x \in E$ se cumple la desigualdad $x \leqslant b$, entonces, el número b se llama *número máximo* o *mayor del conjunto* E : $b = \text{máx}$

Evidentemente, si en el conjunto E se tiene un número máximo, entonces, éste es único y el propio conjunto E, en este caso, está acotado superiormente por este número.

Señalemos además, que si el conjunto E no está acotado superiormente, entonces por la definición, esto significa que para cualquier número $b \in R$ existe al menos un elemento $x \in E$ tal que $x > b$. Prestemos atención a que en realidad hay un número infinito de tales elementos. En efecto, supongamos que hay un número finito de éstos: $x_1, \dots, x_n$, $n \in N$. Dicho de otro modo, para todos los $x \in E$ y $x \neq x_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ es válida la desigualdad $x \leqslant b$. Entonces, es evidente que para $b_0 = \text{máx}\{b, x_1, \dots, x_n\}$ y todos los $x \in E$ se cumple desigualdad $x \leqslant b_0$, es decir, pese a la suposición, el conjunto E resultó ser acotado.

De forma análoga al conjunto acotado superiormente, se define un conjunto acotado inferiormente.

Definición 4. *Si para el subconjunto E de números reales existe un número a tal que no es mayor que cada número $x \in E$, es decir, para cualquier $x \in E$ se cumple la desigualdad $a \leqslant x$, entonces, el conjunto E se llama acotado inferiormente y el número a, número que acota inferiormente este conjunto.*

Un conjunto que no esté acotado inferiormente se llama *conjunto no acotado inferiormente*.

Con ayuda de los símbolos lógicos la definición de conjunto acotado inferiormente se escribe de la siguiente forma:

el conjunto $E \subset R$ está acotado inferiormente $\Leftrightarrow (\exists a \in R)\ (\forall x \in E) : x \geqslant a$, de aquí

el conjunto $E \subset R$ no está acotado inferiormente $\Leftrightarrow (\forall a \in R)\ (\exists x \in E) : : x < a$, es decir, el conjunto E no está acotado inferiormente si cualquiera que sea el número $a \in R$ se encuentra un elemento $x \in E$ tal que $x < a$.

Es evidente que si el número a acota inferiormente el conjunto E, entonces cualquier número $a' < a$ también acota inferiormente este conjunto.

Si en el conjunto E se tiene un número a que es no mayor que todos los otros números de E, es decir, $a \in E$ y para todos los $x \in E$ se cumple la desigualdad $a \leqslant x$, entonces, el número a se llama *número mínimo* o *menor del conjunto* E: $a = \text{mín}\, E$.

Si en el conjunto E se tiene un número mínimo, entonces, éste es único y el propio conjunto E, en este caso, está acotado inferiormente por este número.

Definición 5. *Un conjunto acotado superior e inferiormente se llama simplemente conjunto acotado.*

Con otras palabras, el conjunto $E \subset R$ se llama acotado si existen números a y b tales que para cualquier $x \in E$ se cumple la desigualdad $a \leqslant x \leqslant b$.

Es evidente que un conjunto no acotado puede estar no acotado superior e infe-

Un conjunto que no está acotado se llama no acotado.

Ejercicio 3. Demuéstrese que el conjunto $E \subset \boldsymbol{R}$ está acotado si y sólo si existe un numero $a \geqslant 0$ tal que para todos los $x \in E$ se cumple la desigualdad $|x| \leqslant a$.

El segmento $[1, 2]$, el intervalo $(0, 1)$, el conjunto de los valores de la función $\operatorname{sen} x$ son ejemplos de conjuntos acotados. El intervalo infinito $(-5, +\infty)$, el conjunto de los números naturales $1, 2, 3, \ldots$ son conjuntos acotados inferiormente pero no acotados superiormente. Por último, el conjunto de todos los números enteros, de todos los números racionales, son conjuntos no acotados tanto superior como inferiormente.

La generalización formal de los conceptos de conjuntos acotados superiormente, acotados inferiormente y simplemente acotados sobre los subconjuntos del conjunto extendido $\overline{\boldsymbol{R}}$ de los números reales $\boldsymbol{R}$ (véase el p. 2.5) no nos lleva a conceptos sustanciales, ya que todos los subconjuntos del conjunto extendido de los números reales están acotados superiormente por el símbolo $+\infty$ e inferiormente por el símbolo $-\infty$ y por esto son simplemente acotados en $\overline{\boldsymbol{R}}$. No obstante, el concepto de elemento máximo (mínimo) de un conjunto también es sustancial en este caso. Su definición formalmente coincide con la definición correspondiente para los subconjuntos de conjunto no extendido de los números reales:

el número finito o infinito $c \in E \subset \overline{\boldsymbol{R}}$ se llama máximo (mínimo) en el conjunto $E \subset \overline{\boldsymbol{R}}$ si para todas las $x \in E$ se cumple la desigualdad $x \leqslant c$ (respectivamente $x \geqslant c$).

Más adelante nos serviremos de este concepto.

3.4. COTAS SUPERIOR E INFERIOR DE LOS CONJUNTOS DE NÚMEROS

Entre todos los números que acotan superiormente (inferiormente) un conjunto dado, el menor (mayor) de ellos, tiene un nombre especial.

Definición 6. *El menor entre todos los números que acotan superiormente el conjunto $E \subset \boldsymbol{R}$ se llama cota superior y se denota**) *por* $\sup E$ *o* $\sup\limits_{x \in E} \{x\}$.

Definición 7. *El mayor entre todos los números que acotan inferiormente el conjunto $E \subset \boldsymbol{R}$ se llama cota inferior y se denota***) *por* $\inf E$ *o* $\inf\limits_{x \in E} \{x\}$.

A veces, la cota superior (inferior) de un conjunto la llaman *cota superior (inferior) exacta* de este conjunto.

Señalemos que en las definiciones hechas no se analiza la cuestión de si existe o no el número menor (respectivamente mayor) entre todos los números que acotan superiormente (inferiormente) el conjunto dado, esto se hará más tarde. Aquí sólo se dice que si tal número existe entonces se llama cota superior (respectivamente inferior) del conjunto analizado. De la propia definición de cota superior (inferior) se deduce que si para un conjunto dado esta cota existe, entonces es única ya que en cualquier conjunto el número máximo (mínimo) puede ser uno solo.

*) Del vocablo latino supremum, mayor.

**) Del vocablo latino infimum, menor.

Analicemos las definiciones 6 y 7. Sea $\beta = \sup E$. Esto significa, en primer lugar que el número β acota superiormente el conjunto E, es decir, para cada $x \in E$ es válida la desigualdad $x \leqslant \beta$; en segundo lugar, que el número β es el menor entre todos los números que acotan superiormente el conjunto E, es decir, cualquiera que sea el número $\beta' < \beta$ ya no acota superiormente al conjunto E y esto significa que en el conjunto E se encuentra un número x, tal que $x > \beta'$.

Así en "forma aritmética" la definición 6 se puede escribir de la siguiente manera.

Definición 6'. *El número β se llama cota superior del conjunto E si*

1°) $\forall x \in E : x \leqslant \beta$,

2°) $(\forall \beta' < \beta)\ (\exists x \in E) : x > \beta'$.

La condición 2°) se puede parafrasear del siguiente modo:

2^1) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in E) : x > \beta - \varepsilon$.

Para convencerse de la equivalencia de las condiciones 2° y 2^1 es suficiente tomar β^* y ε relacionados por la igualdad $\beta^* = \beta - \varepsilon$ de lo cual se deriva que la condición $\varepsilon > 0$ es equivalente a la condición $\beta' < \beta$.

De forma análoga, si $\alpha = \inf E$, entonces por la definición 7, en primer lugar, el número α acota inferiormente el conjunto E y en segundo lugar cualquier número $\alpha' > \alpha$ ya no acota inferiormente este conjunto, ya que el número α es el mayor entre todos los números tales. Esto significa que para cualquier $\alpha^* > \alpha$ se encuentra $x \in E$ tal que $x < \alpha'$. Por consiguiente la definición 7 se puede parafrasear de la siguiente forma.

Definición 7'. *El número α se llama cota inferior del conjunto E si*

1°) $\forall x \in E : x \geqslant \alpha$,

2°) $(\forall \alpha' > \alpha)\ (\exists x \in E) : x < \alpha'$.

La condición 2°) es equivalente a la condición

2^1) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in E) : x < \alpha + \varepsilon$.

Para convencerse de la equivalencia de las condiciones 2°) y 2^1) es suficiente tomar $\alpha' = \alpha + \varepsilon$.

Hagamos algunas observaciones evidentes. Si un conjunto no vacío $E \subset R$ tiene cota superior $\beta \in R$ (tiene cota inferior $\alpha \in R$), entonces es acotado superiormente (respectivamente inferiormente). Esto se deduce de la condición 1° de la definición 6' (de la definición 7').

Si $\beta = \sup E$ ($\alpha = \inf E$) y el número b (el número a) acota superiormente (inferiormente) el conjunto E, entonces $\beta \leqslant b$ (respectivamente $a \leqslant \alpha$). Esto se deduce de que la cota superior (inferior) de un conjunto es el número menor (mayor) entre todos los números que acotan superiormente (inferiormente) el conjunto dado.

Si en el conjunto existe el número máximo (mínimo), entonces es cota superior (inferior) de este conjunto. En particular, tal situación tiene lugar para los conjuntos finitos: cualquier conjunto finito de números tiene un número máximo y uno mínimo y por tanto cota superior e inferior. En principio, se pueden hallar simplemente analizando todos los números del conjunto dado, ya que es finito. No obstante, en general, sólo en principio y no en la práctica: si en el conjunto finito analizado, dado por ciertas propiedades de sus elementos, hubiera muchos, entonces, analizarlos a todos no está al alcance incluso de una superpotente máquina computadora moderna.

Citemos ejemplos que ilustran el concepto de cota superior e inferior de un conjunto.

El conjunto de todos los números reales positivos, denotémoslo por $\boldsymbol{R}_+$, está acotado inferiormente por el número cero, ya que para cualquier $x \in \boldsymbol{R}_+$ tiene lugar $x > 0$ y además $\inf \boldsymbol{R}_+ = 0$. El conjunto $\boldsymbol{R}_+$ no está acotado superiormente, ya que no hay un número que acote superiormente todos los números positivos.

Si $E = [a, b]$ es un segmento, entonces $\inf E = a$, $\sup E = b$. Si $E = (a, b)$ es un intervalo, entonces, también, $\inf E = a$, $\sup E = b$. Si finalmente el conjunto E está compuesto por dos puntos a y b, $a \leqslant b$, es decir, $E = \{a\} \cup \{b\}$, entonces de nuevo $\inf E = a$, $\sup E = b$. Estos ejemplos muestran, en particular, que la cota superior (inferior) de un conjunto puede pertenecer al mismo conjunto o no.

Pasemos ahora al esclarecimiento de la cuestión: ¿ existe siempre la cota superior (inferior) de un conjunto de números? Si el conjunto no está acotado superiormente (inferiormente), entonces no existen números que lo acoten superiormente (inferiormente). Por consiguiente, no existe entre ellos el mínimo (máximo). De esta forma, si el conjunto no está acotado superiormente (inferiormente), entonces no tiene cota superior (inferior). En este caso, la respuesta a la pregunta planteada se obtuvo fácilmente. Si el conjunto está acotado superiormente (inferiormente), entonces la respuesta es dada por el siguiente teorema.

Teorema 1. *Cualquier conjunto de números no vacío acotado superiormente tiene cota superior y cualquier conjunto de números no vacío acotado inferiormente tiene cota inferior.*

DEMOSTRACIÓN. Sea A un conjunto de números no vacío acotado superiormente. Denotemos por B el conjunto de todos los números que acotan superiormente el conjunto A. Por cuanto el conjunto A está acotado superiormente, el conjunto B no es vacío. Cada elemento $y \in B$ acotado por arriba el conjunto A, es decir, para cualquier elemento $x \in A$ se cumple la desigualdad $x \leqslant y$. Por cuanto, x e y son elementos arbitrarios correspondientes a los conjuntos A y B, entonces por la propiedad de la continuidad de los números reales (véase la propiedad V en el p. 2.1) existe un número β tal que para cualesquiera $x \in A$ e $y \in B$ tiene lugar la desigualdad

$$x \leqslant \beta \leqslant y. \tag{3.2}$$

El cumplimiento de la desigualdad $x \leqslant \beta$ para todos los $x \in A$ significa que el número β acota superiormente el conjunto A y el cumpliemiento de la desigualdad $\beta \leqslant y$ para todos los $y \in B$, es decir, para todos los números que acotan superiormente el conjunto A, significa que el número β es el menor entre todos estos números, es decir, es la cota superior del conjunto A:

$$\beta = \sup A. \tag{3.3}$$

Así pues, la existencia de la cota superior para un conjunto no vacío acotado superiormente está demostrada.

Si ahora B es un conjunto de números no vacío acotado inferiormente, entonces llevamos al conjunto A todos los números que acotan inferiormente el conjunto B. Más adelante, razonando análogamente al caso analizado de la cota superior, fácilmente nos convencemos de que por la propiedad de la continuidad de los números reales existe un número α que para cualesquiera $x \in A$ e $y \in B$ se cumple la desigualdad

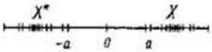


FIG. 7

$$X \leqslant \alpha \leqslant y. \tag{3.4}$$

Esto evidentemente significa que
$$\alpha = \inf B. \tag{3.5}$$

Por otra parte, la afirmación sobre la existencia de la cota inferior de un conjunto no vacío acotado inferiormente se puede obtener de la afirmación ya demostrada sobre la existencia de la cota superior de un conjunto no vacío acotado superiormente. Para esto es suficiente observar que si el conjunto E es un conjunto acotado inferiormente, entonces el conjunto E^* de todos los números es $-x$, donde $x \in E$, es decir, el conjunto sobre la recta numérica, simétrico al conjunto E con respecto al cero es ya un conjunto acotado superiormente (fig. 7). Efectivamente, si el número a acota inferiormente el conjunto E, entonces el número $-a$ acota superiormente el conjunto E^*. De aquí fácilmente se deduce que $\inf E = -\sup E^*$. □

El teorema sobre la existencia de las cotas superiores e inferiores pertenece a los tal llamados teoremas de existencia puros: en él se demuestra que en determinadas condiciones para el conjunto existe la cota superior, respectivamente la cota inferior. No obstante, de los razonamientos desarrollados en la demostración de este teorema no se deduce el método para encontrar estas cotas en un caso concreto. Esto se deduce de que la construcción del conjunto B, con ayuda del cual se realizó la demostración del teorema y que estaba constituido por todos los números que acotaban superiormente el conjunto analizado es equivalente a la búsqueda de la cota superior β de este conjunto. En realidad el problema de encontrar la cota superior (inferior) de un conjunto dado por ciertas condiciones de éste, puede resultar ser un problema muy difícil.

Si el conjunto no está acotado superiormente (inferiormente), entonces, como ya se señaló, ningún número puede ser su cota superior (inferior) ya que en general, no hay números que lo acoten superiormente (inferiormente). Para mayor comodidad se introduce la siguiente definición.

La cota superior de un conjunto no acotado superiormente se llama $+\infty$ y la cota inferior de un conjunto no acotado inferiormente se llama $-\infty$.

Esta definición es natural, ya que en los acuerdos tomados con respecto al uso de los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ en el p. 2.5 las cotas infinitas de los conjuntos así definidos también satisfacen las condiciones 1° y 2° de las definiciones 6' y 7'.

La comodidad de esta definición consiste en que ahora *cada conjunto de números no vacío tiene una cota superior que pertenece al conjunto extendido de los números reales.* Además, si el conjunto dado está acotado superiormente, entonces su cota superior es finita, si no está acotado superiormente, entonces es infinita y es igual a $+\infty$. La afirmación análoga es válida para la cota inferior.

Ejercicios. 4. Supongamos que están dados los conjuntos de números X_i, $i = 1, 2, \dots, n$ y sea
$$X \overset{\text{def}}{=} \{x : x = x_1 + \dots x_n, x_i \in X_i, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Demuéstrese que $\sup X = \sum_{i=1}^{n} \sup X_i$.

5. Supongamos que están dados los conjuntos de números X e Y y sea

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \{z : z = x - y, x \in X, y \in Y\}.$$

Demuéstrese que $\sup Z = \sup X - \inf Y$.

Mostremos ahora, que del teorema sobre la existencia de las cotas superiores e inferiores se derivan dos propiedades importantes de los números reales, el así llamado principio de Arquímedes[*)] y el principio de los segmentos encajados.

3.5. PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

El principio de Arquímedes de los números reales consiste en lo siguiente:

Teorema 2. *Cualquiera que sea el número real a, existe un número natural n tal que $n > a$*, es decir,

$$(\forall a \in R)(\exists n \in N) : n > a.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el principio de Arquímedes no se cumple. Esto significa que existe un número a tal que para todos los naturales n se cumple la desigualdad $n \leqslant a$, es decir $(\exists a \in R)(\forall n \in N) : n \leqslant a$. Esto quiere decir, que el número a acota superiormente el conjunto de los números naturales. Por esto, el conjunto de los números naturales como cualquier conjunto de números no vacío acotado superiormente, por el teorema 1 del p. 2.8 tiene una cota superior finita. Denotémosla por β, $\beta = \sup N$.

Por cuanto $\beta - 1 < \beta$, entonces por la condición 2° de la cota superior en la definición 6′ del p. 2.8 existe un número natural n tal que $n > \beta - 1$. Pero entonces, $n + 1 > \beta$ y por la definición de los números naturales $n + 1 \in N$. La desigualdad $n + 1 > \beta$ contradice que $\beta = \sup N$ ya que la cota superior de un conjunto lo acota superiormente (véase la propiedad 1° de la cota superior en la definición 6′ del p. 2.8). La contradicción obtenida muestra que el número a indicado no existe, es decir, que el principio de Arquímedes es válido. □

Corolario. *Cualesquiera que sean los números a y b, $0 < a < b$, existe un número natural n tal que $na > b$.*

En efecto, por el principio de Arquímedes, para el número b/a existe un natural n tal que $n > b/a$. Este es el número n buscado, ya que multiplicando la desigualdad $n > b/a$ por el número positivo a obtendremos $na > b$.

Esta afirmación tiene un simple sentido geométrico: si tomamos dos segmentos de longitudes a y b, $0 < a < b$, respectivamente, entonces trazando en el segmento mayor desde un extremo dado, el segmento menor, después de un número finito de pasos salimos de los límites del segmento mayor (fig. 8).

Ejemplo. Supongamos que el conjunto E está compuesto por los números del tipo $\frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Hallemos $\sup E$ e $\inf E$.

[*)] Arquímedes (287-212 a.n.e.), matemático y mecánico de la Antigua Grecia.

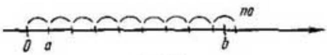


FIG. 8

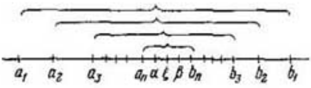


FIG. 9

Por cuanto el conjunto E tiene un número máximo 1, entonces éste es su cota superior: $\sup\limits_{n \in N} \left\{\frac{1}{n}\right\} = 1$. Para hallar la cota inferior del conjunto E observemos que para cualquier $n = 1, 2, \ldots$ es válida la desigualdad $\frac{1}{n} > 0$, es decir, el cero acota inferiormente el conjunto E. Mostremos que él es el mayor entre todos estos números. Sea $\varepsilon > 0$, entonces por el principio de Arquímedes existe un natural n tal que $n > \frac{1}{\varepsilon}$ o lo que es lo mismo $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Esta desigualdad muestra que cualquier número $\varepsilon > 0$ ya no acota inferiormente el conjunto E, ya que $\frac{1}{n} \in E$ para cualquier $n = 1, 2, \ldots$. Así pues, el cero es el mayor de todos los números que acotan inferiormente el conjunto E, es decir, $\inf\limits_{n \in N} \left\{\frac{1}{n}\right\} = 0$.

3.6. PRINCIPIO DE LOS SEGMENTOS ENCAJADOS

Ante todo aclaremos qué sistema de segmentos se llama encajado.

Definición 8. *El sistema de segmentos numéricos*

$[a_1 b_1], [a_2, b_2], \ldots , [a_n, b_n], \ldots , a_n \in R, \qquad b_n \in R, \quad n = 1, 2, \ldots ,$

se llama sistema de segmentos encajados si

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1, \tag{3.6}$$

es decir si cada segmento $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ *siguiente se contiene en el anterior* $[a_n, b_n]$ (fig. 9):

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots .$$

Teorema 3. *Para cualquier sistema de segmentos encajados existe al menos un número que pertenece a todos los segmentos del sistema dado.*

Esta propiedad de los números reales se llama también *continuidad del conjunto de los números reales en el sentido de Cantor**).

*) G. Cantor (1845 — 1918), matemático alemán.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Omega = \{[a_n, b_n]\}$ un sistema de segmentos encajados. Por las desigualdades (3.6) el conjunto $\{a_n\}$ de todos los extremos izquierdos del sistema Ω está acotado superiormente, por ejemplo, por el número b_1. Por esto, por el teorema sobre la existencia de la cota superior (véase el teorema 1 en el p. 3.4) para el conjunto $\{a_n\}$ existe la cota superior finita (fig. 9)

$$\alpha = \sup \{a_n\}. \tag{3.7}$$

Por cuanto el extremo derecho b_n de cualquier segmento del sistema Ω por las desigualdades (3.6) acota superiormente el conjunto $\{a_n\}$ y α es la cota superior de este conjunto, es decir, el menor de todos los números que acotan $\{a_n\}$ superiormente, entonces, para todos los $n = 1, 2, \ldots$ se cumple la desigualdad

$$\alpha \leqslant b_n. \tag{3.8}$$

Esto significa que el conjunto $\{b_n\}$ de todos los extremos derechos de los segmentos del sistema Ω está acotado inferiormente y por esto existe la cota inferior finita

$$\beta = \inf \{b_n\}. \tag{3.9}$$

Por cuanto, el número α de acuerdo con (3.8) acota inferiormente el conjunto $\{b_n\}$ y la cota inferior β de este conjunto es el mayor entre todos estos números, entonces $\beta \geqslant \alpha$. Así pues, tenemos que para todos los $n = 1, 2, \ldots$ son válidas las desigualdades

$$a_n \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b_n. \tag{3.10}$$

De aquí se deduce que cada punto del segmento $[\alpha, \beta]$ se contiene en todos los segmentos del sistema Ω: si $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, entonces para todos los $n = 1, 2, \ldots$ tiene lugar la desigualdad $a_n \leqslant x \leqslant b_n$, es decir, $x \in [a_n, b_n]$. □

OBSERVACIÓN. En la demostración del teorema 3 fue mostrado que cada punto del segmento $[\alpha, \beta]$ pertenece a todos los segmentos del sistema Ω y por consiguiente a su intersección, es decir,

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]. \tag{3.11}$$

Es fácil convencerse de la inclusión opuesta. Si $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, entonces para todos los $n = 1, 2, \ldots$ tenemos $a_n \leqslant x \leqslant b_n$. Por cuanto el número x acota superiormente el conjunto $\{a_n\}$ y $\alpha = \sup \{a_n\}$ es el menor entre todos estos números, entonces $\alpha \leqslant x$. Análogamente se muestra que $x \leqslant \beta$.

De esta forma, el punto x pertenece al segmento $[\alpha, \beta]$, es decir,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \subset [\alpha, \beta]. \tag{3.12}$$

De (3.11) y (3.12) se deduce que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = [\alpha, \beta]. \tag{3.13}$$

Definición 9. *Sea dado el sistema de segmentos* $[a_n, b_n]$, $a_n \in R$, $b_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$ *. Diremos que la longitud* $b_n - a_n$ *de los segmentos de este sistema tiende a cero si para cada número* $\varepsilon > 0$ *existe un número* n_ε *tal que para todos los números* $n \geqslant n_\varepsilon$ *se cumple la desigualdad* $b_n - a_n < \varepsilon$.

En el curso de matemática elemental se introduce el concepto de límite de una sucesión. La definición enunciada en los términos de límite, significa que $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. En nuestro curso, al límite de una sucesión le será dedicado el párrafo siguiente.

Señalemos que el término "número" es sinónimo de término "número natural". El índice ε del número n_ε muestra que este número depende del número dado $\varepsilon < 0$.

Teorema 4. *Para cualquier sistema* $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ *, de segmentos encajados con longitudes que tienden a cero existe un punto único* ξ *que pertenece a todos los segmentos del sistema dado* (véase la fig. 9) *y*

$$\xi = \sup_{n \in N} \{a_n\} = \inf_{n \in N} \{b_n\}. \tag{3.14}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon > 0$ un número arbitrario pero fijo. De la condición de que las longitudes de los segmentos $[a_n, b_n]$ tienden a cero se deduce que existe un número n_ε tal que para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad $b_n - a_n < \varepsilon$.

Por cuanto de la desigualdad (3.10) se deduce que $\beta - \alpha \leqslant b_n - a_n$, entonces $0 \leqslant \beta - \alpha < \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Esto es posible sólo en el caso cuando $\alpha = \beta$ (si $\beta > \alpha$ entonces, por ejemplo, para $\varepsilon = \beta - \alpha > 0$ la desigualdad indicada se convierte en una afirmación incierta $\beta - \alpha < \beta - \alpha$). De esta manera, el segmento $[\alpha, \beta]$ en este caso se convierte en un punto que denotaremos por $\xi = \alpha = \beta$.

Por la fórmula (3.13) esto significa que existe sólo un punto único ξ que pertenece a todos los segmentos $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$. La fórmula (3.14) se deduce de (3.7) y (3.9). □

Muy a menudo, en diferentes demostraciones se aplica la siguiente construcción de un sistema de segmentos encajados con longitudes que tienden a cero. Se toma un segmento $[a, b]$ y con el punto $(a + b)/2$ se divide en dos segmentos iguales $[a, (a + b)/2]$ y $[(a + b)/2; b]$ de longitud $(b - a)/2$. Más adelante, se escoge uno de estos segmentos (cuál específicamente depende de las condiciones del problema concreto), se denota por $[a_1, b_1]$ y de nuevo con su punto medio se divide en dos segmentos iguales, uno de los cuales se denota $[a_2, b_2]$ etc. Como resultado se obtiene un sistema de segmentos encajados $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, con longitudes $b_n - a_n = \dfrac{b - a}{2^n}$. Mostremos que estas longitudes tienden a cero.

En efecto, para cualquier $\varepsilon > 0$, por el principio de Arquímedes se encuentra un natural n_ε tal que $n_\varepsilon > \dfrac{b - a}{\varepsilon}$, pero entonces para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ se cumplirá la desigualdad $n > \dfrac{b - a}{\varepsilon}$ y por consiguiente la desigualdad $\dfrac{b - a}{n} < \varepsilon$. Observando que

$$2^n = (1 + 1)^n = 1 + n + \frac{n(n - 1)}{2} + \ldots > n,$$

obtenemos $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ para $n = 1, 2, \ldots$. Por esto, para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ es válida la desigualdad $\frac{b-a}{2^n} < \frac{b-a}{n} < \varepsilon$. Esto significa que las longitudes de los segmentos $[a_n, b_n]$ tienden a cero cuando n crece.

Observemos que el principio de los segmentos encajados es una propiedad inherente específicamente al conjunto de los números reales. Así, el campo de sólo los números racionales ya no posee la propiedad análoga.

Por ejemplo, si tomamos la sucesión de los "segmentos racionales" [1, 2], [1,4; 1,5], [1,41; 1,42], [1,414; 1,415],*) es decir, la sucesión de conjuntos de los números racionales que están en los segmentos, cuuos extremos a_n y b_n, $n = 1, 2, \cdots$, son los valores de $\sqrt{2}$ calculados respectivamente con defectos o con exceso salvo $1/10^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ **), entonces evidentemente no existe ningún número racional que pertenezca a todos estos segmentos. En realidad, tal número sólo podría ser el número $\sqrt{2}$ (¿ por qué?) que sin embargo no es racional***).

Se puede demostrar una afirmacion más exacta. Llamemos campo de Arquímedes a un campo si para él se cumple el principio de Arquímedes, es decir, es válida la afirmación del teorema 2 del p. 3.5. La propiedad de un campo ordenado (véase la definición de campo en la observación al final del p. 2.2*), que consiste en que para sus elementos se cumple la propiedad del p. 2.1 se llama continuidad del campo según Dedeking (véase además el p. 2.5*) y la propiedad de un campo ordenado que se expresa en que cada sistema de sus segmentos encajados tiene intersección no vacía, se llama continuidad del campo según Cantor.

Para los campos ordenados de Arquímedes se puede mostrar que su contituidad según Dedekind, continuidad según Cantor y la existencia de cota superior finita para cada conjunto no vacio acotado superiormente son equivalentes entre sí, es decir, de cualquiera de estas propiedades tomada como axioma se derivan las dos restantes.

Fue demostrado que de la cintinuidad según Dedekind se deduce la existencia de la cota superior finita para un conjunto acotado superiormente, de donde a su vez, se deduce la continuidad según Cantor. Para culminar la demostración de la equivalencia indicada de los tres conceptos de continuidad de los campos de Arquímedes es suficiente mostrar que de la continuidad según Cantor se deduce la continuidad según Dedekind. La demostración de esta afirmación se puede encontrar, por ejemplo, en el libro de L. D. Kudriavtsev "Análisis matemático", tomo 1 (Editorial "Mir").

Anteriormente se señaló (véase el p. 2.4*) que todos los campos ordenados continuos según Dedekind son isomorfos entre sí. Ahora vemos que cualquier campo

*) En el caso cuando los extremos del segmento $[a, b]$ están escritos en forma de fracción decimal, la coma entre a y b se cambia por un punto y coma.

**) Esto significa que $a_n^2 \leqslant 2 \leqslant b_n^2$ y $b_n - a_n = 1/10^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

***) La demostración de la irracionalidad del número $\sqrt{2}$ que a menudo se lleva a cabo en la matemática elemental se realiza más adelante en el p. 6.3.

ordenado de Arquímedes que posee una de las tres propiedades de continuidad señaladas también es isomorfo al conjunto de los números reales (además cuando existe la continuidad según Dedekind la exigencia de que el campo sea de Arquímedes se puede eliminar; como fue demostrado en el p. 2.9, en este caso, siempre tendrá lugar).

Como conclusión prestemos atención además a que la afirmación análoga al teorema 3 resulta ser incierta para los intervalos numéricos de otro tipo que no sean segmentos. Por ejemplo, el sistema de intervalos encajados $(0, 1/n)$, $n = 1, 2, \ldots$: cada intervalo siguiente se contiene en el anterior, es decir,

$$\left(0, \frac{1}{n+1}\right) \subset \left(0, \frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

tiene, como es fácil ver, una intersección vacía. Pero naturalmente, existen sistemas de intervalos encajados, que tienen intersección no vacía.

Problema 1. Demuéstrese con ayuda de las cortaduras que para cualquier número $a > 0$ y cualquier natural n existe la raíz $\sqrt[n]{a}$.

§ 4. LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

4.1. DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Ante todo definamos el concepto de una sucesión numérica.

Definición 1. *Supongamos que a cada número natural n se le ha puesto en correspondencia un cierto número real x_n (y a los números naturales diferentes n pueden resultar puestos en correspondencia números iguales). El conjunto de elementos x_n*[*)]*, $n = 1, 2, \ldots$, se llama sucesión numérica o simplemente sucesión; cada elemento x_n se llama elemento (o término) de esta sucesión y n, su número.*

A la sucesión numérica con elementos x_n la denotaremos por x_n, $n = 1, 2, \ldots$, o bien por $\{x_n\}$.

Según la propia definición, una sucesión contiene siempre un conjunto infinito de elementos: cualesquiera dos elementos distintos de la sucesión se diferencian al menos por sus números cuya cantidad es infinita.

Es evidente, que la sucesión numérica es un caso particular de función. Más preciso, una sucesión es una *función definida sobre el conjunto de los números naturales y que toma valor en el conjunto de los números reales*, es decir, una función de la forma $f : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}$ (véase el p. 1.3*).

A veces en calidad de números es cómodo utilizar no todos los números naturales, sino sólo algunos de ellos. Por ejemplo, los números naturales a partir de cierto número natural n_0 : x_n, $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$, o sólo los números pares: x_n, $n = 2, 4, \ldots$. Ocurre que para la numeración se usan no sólo los números naturales, sino

---

[*)] Aquí por elemento se entiende el par compuesto por el número natural y el número real correspondiente a él según la correspondencia analizada (llamado en lo adelante valor del elemento dado de la sucesión).

también otros números, por ejemplo x_n, $n = 0, 1, 2, \dots$ (aquí en calidad de un número más se agrega el cero). En todos estos casos se pueden numerar de nuevo los x_n utilizando todos los números naturales m y sólo ellos. En el primer ejemplo es necesario hacer $m = n - n_0 + 1$; en el segundo, $m = \frac{n}{2}$; en el tercero, $m = n + 1$.

Por esto, en casos similares, también se dice que los x_n forman una sucesión y claro está, se indica qué valores toman los números n.

Definición 2. *El número a se llama límite de una sucesión $\{x_n\}$ dada si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número n_ε tal que para todos los números $n > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad*

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

En este caso se escribe $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ o $x_n \to a$ cuando $n \to \infty$.

Utilizando los símbolos lógicos esta definición se puede escribir en la forma:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in N)(\forall n > n_\varepsilon) : |x_n - a| < \varepsilon.$$

La sucesión para la cual existe el límite se llama *convergente*.

De esta forma, la sucesión $\{x_n\}$ es convergente si existe un número a tal que para cualquier $\varepsilon > 0$ se encuentra un número n_ε tal que para todos los $n > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad $|x_n - a| < \varepsilon$.

Con el uso de los símbolos lógicos esta definición tiene la siguiente forma:

$$(\exists a \in R)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in N)(\forall n > n_\varepsilon) : |x_n - a| < \varepsilon.$$

Una sucesión que no es convergente se llama divergente.

Señalemos que la desigualdad (4.1) es equivalente a la desigualdad

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Recordemos que para un número $x \in R$ dado, cualquier intervalo del tipo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, donde $\varepsilon > 0$, se llama ε-*entorno* o simplemente entorno del número (punto) x y se denota por $U(x, \varepsilon)$ o $U(x)$.

Con ayuda del concepto de entorno, la definición del límite de una sucesión se puede enunciar de la siguiente forma.

Definición 2'. *El número a es el límite de la sucesión $\{x_n\}$ si en cualquiera de sus entornos se contienen casi todos los miembros de la sucesión, es decir, todos los términos de la sucesión excluyendo un número finito de ellos.*

De esta forma, el número a es el límite de la sucesión $\{x_n\}$ si cualquiera que sea el entorno del punto a, fuera de ella hay sólo un conjunto finito de elementos de la sucesión $\{x_n\}$, en particular, ni uno (es decir, un conjunto vacío, que como se sabe se considera entre los conjuntos finitos).

Si $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ y $x_n < a$ (respectivamente $x_n > a$) para todos los $n = 1, 2, \dots$, entonces se dice que la sucesión $\{x_n\}$ converge al número a *por la izquierda* (respectivamente *por la derecha*) y a veces en lugar de $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ se escribe $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a - 0$ (respectivamente $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a + 0$). En el caso cuando $a = 0$, en lugar de $0 + 0$ y $0 - 0$ se escribe respectivamente simplemente $+0$ y -0.

El concepto de límite de una sucesión está relacionado en determinado sentido con el problema, que aparece en la práctica, de obtención del valor de cierta magnitud que nos interese, con una exactitud $\varepsilon > 0$, dada con anterioridad. Los valores x_n aproximados sucesivos de la magnitud analizada pueden obtenerse como el resultado de la realización de ciertos experimentos o del cálculo a base de fórmulas recurrentes cualesquiera o por cualquier otra vía. Este problema será evidentemente resuelto si se halla un número n_ε a partir del cual todos los valores x_n se desviarán del valor exacto de la magnitud analizada en los límites de la exactitud dada. Naturalmente, si el n_ε indicado existe sólo para un $\varepsilon > 0$ dado, esto aún no significa que la sucesión $\{x_n\}$ converge: en la definición de límite de una sucesión se exige que el número correspondiente n_ε puede ser elegido para cualquier $\varepsilon > 0$.

Ejemplos 1. La sucesión $\{1/n\}$ converge y su límite es cero. En realidad, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, por el principio de Arquímedes (véase el p. 3.5) de los números reales, existe un número natural n_ε, tal que $n_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Por esto, para todos los $n > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad $0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ y esto significa que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Es evidente que la sucesión $\{1/n\}$ converge a cero por la derecha.

2. La sucesión $\left\{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}n\right\}$ es divergente. En realidad, cualquiera que sea el número a, fuera de su ε-entorno, por ejemplo, cuando $0 < \varepsilon < 1$, a ciencia cierta hay un número infinito de términos de la sucesión dada y esto significa que no es su límite.

3. La sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}n\right\}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}n = 0$, lo cual se deduce (¿por qué?) de que

$$\left|\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}n\right| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

La sucesión convergente $\left\{\dfrac{1}{n}\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}n\right\}$ no es una sucesión que converge hacia su límite por la izquierda o por la derecha.

4. La sucesión $\{n\}$ diverge.

En efecto, cualquiera que sea el número a, por ejemplo, para $\varepsilon = 1$ se encuentra, por el principio de Arquímides, un natural n_0 tal que $n_0 > a + 1$. Por consiguiente, para todos los naturales $n > n_0$ tendremos $n > a + 1$. Por esto, ningún número a puede ser límite de la sucesión $\{n\}$.

En los ejemplos 2 y 4 al demostrar la divergencia de las sucesiones, se utilizó la definición positiva de la condición de que el número a no es límite de la sucesión dada. Enunciemos esta definición.

Definición 3. *El número a no es**) *límite de la sucesión* $\{x_n\}$ *si existe* $\varepsilon > 0$ *tal que para cualquier natural n existe un natural* $m_n > n$**) *tal que*

$$|x_{m_n} - a| \geqslant \varepsilon.$$

---

*) Aquí la partícula "no" entra no en la definición, sino en el concepto definido.

**) El índice n en el número m_n muestra que este número depende de la elección del número n.

En símbolos lógicos esta definición tiene la forma

$$\lim_{n\to\infty} x_n \neq a \Leftrightarrow (\exists\varepsilon > 0)(\forall_n \in N)(\exists m > n): |x_m - a| \geqslant \varepsilon.$$

Recordemos que en el enunciado de la negación de cualquier afirmación, los símbolos lógicos de existencia $\exists$ y de universalidad $\forall$ se intercambian. Precisamente así ha ocurrido en el caso dado, de lo cual es fácil convencerse comparando las escrituras de las definiciones 2 y 4 en símbolos lógicos.

Observemos que la definición 3 no es una definición independiente, ella es una consecuencia lógica de la definición 2.

Ejercicios 1. Enúnciese la definición positiva del concepto de sucesión divergente.

2. Demuéstrese que si $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, entonces $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

Problema 2. Demuéstrese que la sucesión $\{x_n\}$ diverge si y sólo si existe un $\varepsilon > 0$ tal que cualquiera que sea el número real a y cualquiera que sea el número n, existe un número $m > n$ para el cual se cumple la desigualdad $|x_m - a| \geqslant \varepsilon$.

Ejercicio 3. Escríbanse la definición positiva de sucesión divergente y la condición del problema 2 en símbolos lógicos y compárense.

En los ejemplos analizados anteriormente, la existencia o ausencia de los límites para las sucesiones dadas fue bastante evidente y la demostración se redujo a la comprobación elemental de la definición de límite de una sucesión.

En calidad de ejemplo más complejo de la búsqueda del límite de una sucesión demostraremos la siguiente afirmación.

Ejemplo 5. *Si la sucesión $\{x_n\}$ converge, entonces la sucesión de las medias aritméticas de sus términos*

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

también converge y además, al mismo límite que la propia sucesión $\{x_n\}$.

Sea $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Ante todo, observemos que para cualesquiera números naturales n_0 y $n > n_0$ tiene lugar la igualdad

$$y_n - a = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - a =$$
$$= \frac{x_1 + \ldots + x_{n_0} - n_0 a}{n} + \frac{(x_{n_0+1} - a) + \ldots + (x_n - a)}{n}. \quad (4.2)$$

Si ahora está dado $\varepsilon > 0$, entonces por la definición de límite existe un número n_0 tal que para todos los $n > n_0$ se cumple la desigualdad

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.3)$$

Por cuanto $x_1 + \ldots + x_{n_0} - n_0 a$ es un número dado y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, entonces como no es difícil ver

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \ldots + x_{n_0} - n_0 a}{n} = 0.$$

Por consiguiente, existe un número m_0 tal que para todos los $n > m_0$ se cumple la desigualdad

$$\left| \frac{x_1 + \ldots + x_{n_0} - n_0 a}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.4}$$

Sea $n_\varepsilon = \text{máx}\,\{n_0, m_0\}$. Entonces para todos los números $n > n_\varepsilon$, por (4.2), (4.3) y (4.4) obtendremos

$$|y_n - a| \leqslant \left| \frac{x_1 + \ldots + x_{n_0} - n_0 a}{n} \right| + \frac{|x_{n_0+1} - a| + \ldots + |x_n - a|}{n} <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - n_0}{n}\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto significa que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. □

Ejercicio 4. Demuéstrese: 1) que la eliminación o sustitución de un número finito de elementos de una sucesión no influye en su convergencia, y en el caso de una sucesión convergente no influye en el valor de su límite;

2) si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$ y $z_n = \begin{cases} x_k & \text{cuando } n = 2k-1, \\ y_k & \text{cuando } n = 2k, \end{cases}$ $k = 1, 2, \ldots$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$.

4.2. LÍMITES INFINITOS

Para mayor comodidad se introduce también el concepto de sucesiones que tienden al infinito. Tales sucesiones se llaman *infinitas*. Definámoslas.

Definición 4. *La sucesión $\{x_n\}$ se llama infinita si para cualquier número ε existe un número n_ε tal que para todos los $n > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad $|x_n| > \varepsilon$.*

En este caso se utiliza el símbolo ∞ y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Si la sucesión x_n, $n = 1, 2, \ldots$, es tal que para cualquier número ε[*] existe n_ε tal que para todos los $n > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad $x_n > \varepsilon$ (respectivamente $x_n < \varepsilon$), entonces se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (respectivamente $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$). En todos estos casos se dice que la sucesión $\{x_n\}$ tiene *límite infinito*, igual respectivamente a ∞, $+\infty$ o $-\infty$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ o $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, es decir, $\{x_n\}$ es también una sucesión infinita. Es evidente que las sucesiones infinitas no tienen límite en el sentido que fue definido en el p. 3.1. La aplicación en este caso de la notación "lim" y la utilización de la palabra "límite" son tradicionales.

En el futuro siempre por límite de una sucesión entenderemos límite finito, es decir, un número, si no se acuerda lo contrario.

[*] Es necesario prestar atención a que aquí ε no se supone positivo.

El término de "sucesión convergente" se utiliza sólo para las sucesiones que tienen límite finito.

Recordemos que en el p. 3.2. fue introducido el concepto de entorno para los números reales y para los infinitos ∞, $+\infty$ y $-\infty$. Resulta que utilizando el concepto de entorno, las definiciones de límite finito o cualquier infinito de una sucesión numérica se puede enunciar de un modo único.

Definición 5. *El punto a, finito o infinito (es decir, $a \in R$ o a es uno de los infinitos ∞, $+\infty$ ó $-\infty$) se llama límite de una sucesión numérica $\{x_n\}$ si cualquiera que sea el entorno $U(a)$ del elemento a, para ella existe un número $n_0 \in N$ tal que para todos los $n \geqslant n_0$ es válida la inclusión $x_n \in U(a)$.*

Junto con las sucesiones numéricas, en nuestro curso se encontrarán sucesiones de puntos de la recta numérica extendida, es decir, colecciones $\{x_n\}$ de elementos del conjunto extendido de los números reales, numeradas por los números naturales $\overline{R}$ (véase el p. 2.5). De esta forma, elementos de estas sucesiones, conjuntamente con los números reales, pueden ser los puntos infinitamente alejados $+\infty$ y $-\infty$. Para tales sucesiones también se puede introducir el concepto de límite, análogo al límite de las sucesiones numéricas y que los contienen en sí como caso particular.

Definición 6. *El punto a de la recta numérica extendida $\overline{R}$ (es decir, un punto finito $a \in R$ o uno de los infinitos con signo: $+\infty$ o $-\infty$) se llama límite de la sucesión de puntos $x_n \in \overline{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, si cualquiera que sea el entorno $U(a)$ del punto a, para ella existe un número n_0 tal que para todos los números $n > n_0$ se cumple la inclusión*

$$x_n \in U(a).$$

OBSERVACIÓN 1. Para cualquier entorno $U(a, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, donde a es un número: $a \in \overline{R}$ o uno de los infinitos ∞, $+\infty$ o $-\infty$, existe un natural n tal que se cumple la inclusión $U\left(a, \frac{1}{n}\right) \subset U(a, \varepsilon)$. Para convencerse de esto es suficiente tomar $n \in N$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Por esto, si la sucesión $x_n \in R$ es tal que para cualquier $n = 1, 2, \ldots$ se cumple la inclusión $x_n \in U\left(a, \frac{1}{n}\right)$ (aquí a es un número real o uno de los infinitos ∞, $+\infty$ o $-\infty$), entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. En realidad, para cualquier entorno $U(a)$ existe un natural n_0 tal que $U\left(a, \frac{1}{n_0}\right) \subset U(a)$, entonces para todos los números $n > n_0$ tendremos $x_n \in U\left(a, \frac{1}{n}\right) \subset U\left(a, \frac{1}{n_0}\right) \subset U(a)$.

Esto significa que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

OBSERVACIÓN 2. Si la sucesión $x_n \in \overline{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, es tal que todos sus términos son iguales entre sí: $x_n = x_m$ para todos los $n \in N$ y $m \in N$, entonces ella, como es conocido, se llama *estacionaria*.

Cualquier sucesión estacionaria de puntos del conjunto extendido de los números reales tiene límite igual al valor común de sus términos. Esto se deduce directamente de que cada punto de la recta numérica extendida se contiene en cualquiera de sus entornos. En realidad, si para todos los $n \in N$ tiene lugar $x_n = a \in \overline{R}$, entonces para cualquier entorno $U(a)$ del punto a y todos los $n \in N$, de forma análoga se cumple la inclusión $x_n = a \in U(a)$.

En el futuro por sucesión siempre se entenderá sucesión numérica, es decir, una sucesión cuyos elementos son números reales si por supuesto no se acuerda especialmente algo diferente.

Ejercicios. 5. Cítese un ejemplo de sucesión no acotada que no sea infinita.

6. Demuéstrese que si $a_n \leqslant |b_n|$, $n = 1, 2, \ldots$, y $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \infty$.

7. Demuéstrese que cualquier subsucesión de una sucesión infinita también es una sucesión infinita.

8. Demuéstrese que la multiplicación término por término de una sucesión infinita por otra para la cual el valor absoluto de sus términos está acotado inferiormente por una constante positiva, da como producto una sucesión infinita.

4.3. PROPIEDADES MÁS SENCILLAS DEL LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Demostremos ante todo que la definición de límite es correcta en el sentido de que si éste existe, entonces es único.

Teorema 1. *Una sucesión de puntos de la recta numérica extendida puede tener sobre esta recta sólo un límite.*

Corolario. *Una sucesión numérica puede tener sólo un límite finito o infinito de signo definido.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Supongamos que la afirmación del teorema no es válida. Esto significa que existe una sucesión $x_n \in \overline{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ que tiene al menos dos límites diferentes $a \in \overline{R}$ y $b \in \overline{R}$. Tomemos $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ de forma tal que el ε_1-entorno del punto a no se interseca con el ε_2-entorno del punto b. Esto siempre se puede hacer por el lema del p. 3.2. (véase las figs. 6, a, b, c y d). Por la definición de límite, de la condición $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ se deduce que existe un número $n_1 \in N$ tal que para todos los números $n > n_1$, $n \in N$, tiene lugar la inclusión $x_n \in U(a, \varepsilon_1)$ y de la condición $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = b$ se deduce que existe un $n_2 \in N$ tal que para todos los $n > n_2$, $n \in N$, es válida la inclusión $x_n \in U(b, \varepsilon_2)$. Por consiguiente, si denotamos por n_0 al mayor de los números n_1 y n_2: $n_0 \overset{\text{def}}{=} \text{máx}\,\{n_1, n_2\}$, entonces para cualquier $n > n_0$ tendremos al mismo tiempo $x_n \in U(a, \varepsilon_1)$ y $x_n \in U(b, \varepsilon_2)$, es decir, $x_n \in U(a, \varepsilon_1) \cap U(b, \varepsilon_2)$. Esto contradice la condición $U(a, \varepsilon_1) \cap U(b, \varepsilon_2) = \varnothing$. $\square$

El corolario es un caso particular de la afirmación del teorema.

Para la unicidad del límite infinito de una sucesión de elementos de $\overline{R}$ es esencial analizar sólo los infinitos de signo definido, ya que si la sucesión tiene como límite un infinito con signo, entonces al mismo tiempo el infinito sin signo es su límite. Por ejemplo, si $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$, entonces, naturalmente, $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = \infty$.

Demostremos ahora algunas propiedades simples de los límites finitos e infinitos

I. *Si* $x_n \in \overline{R}$, $y_n \in \overline{R}$, $z_n \in \overline{R}$, $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$,

$$n = 1, 2, \ldots, \tag{4.5}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a \in \overline{R}, \tag{4.6}$$

entonces $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

DEMOSTRACIÓN. Sea dado $\varepsilon > 0$. Entonces, por la definición de límite existen $n_1 \in N$ y $n_2 \in N$ tales que para todos los $n > n_1$, $n \in N$, se cumple la inclusión $x_n \in U(a, \varepsilon)$ y para todos los $n > n_2$, $n \in N$, la inclusión $z_n \in U(a, \varepsilon)$. Por consiguiente, si denotamos por n_0 al mayor de los números n_1 y n_2: $n_0 \stackrel{\text{def}}{=} \max\{n_1, n_2\}$, entonces para todos los números $n > n_0$, $n \in N$, tendremos $x_n \in U(a, \varepsilon)$, $z_n \in U(a, \varepsilon)$ y por eso $[x_n, z_n] \subset U(a, \varepsilon)$ (véase la observación 1 en el p. 3.2). La desigualdad (4.5) significa que $y_n \in [x_n, z_n]$. Por consiguiente, para $n > n_0$ tiene lugar $y_n \in U(a, \varepsilon)$, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. $\square$

II. *Si* $x_n \leqslant y_n$, $x_n \in \overline{R}$, $y_n \in \overline{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *(respectivamente,* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$*), entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ *(respectivamente,* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$*).*

Esta propiedad es un fortalecimiento de la propiedad I para los límites infinitos: en este caso, la segunda sucesión $\{z_n\}$ no es necesaria.

DEMOSTRACIÓN. De la condición $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ se deduce que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in N$ tal que para todos los $n > n_\varepsilon$, $n \in N$, se cumple la condición $x_n > \varepsilon$. Por la desigualdad $x_n \leqslant y_n$ es evidente que para todos los $n > n_\varepsilon$ tiene también lugar la desigualdad $y_n > \varepsilon$. Esto significa que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$.

Análogamente se analiza el caso $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$. $\square$

III. *Si* $x_n \in \overline{R}$, $y_n \in \overline{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, *y existen los límites* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ *y además* $a < b$, $a \in \overline{R}$, $b \in \overline{R}$, *entonces existe un número* $n_0 \in N$ *tal que para todos los números* $n > n_0$, $n \in N$, se cumple la desigualdad $x_n < y_n$.

Corolario. *Si existe el límite* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \in \overline{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, $a \in \overline{R}$ *y* $a < C$ *(respectivamente,* $a > c$*)* $c \in \overline{R}$, *entonces existe* $n_0 \in N$ *tal que para todos los* $n > n_0$, $n \in N$, *es válida la desigualdad* $x_n < c$ *(respectivamente,* $x_n > c$*).*

DEMOSTRACIÓN. Escojamos cualesquiera $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ de forma tal que los entornos $U(a, \varepsilon_1)$ y $U(b, \varepsilon_2)$ no se intersequen (véase el p. 3.2). Entonces está claro que por la desigualdad $a < b$ para cualesquiera $x \in U(a, \varepsilon_1)$ e $y \in U(b, \varepsilon_2)$ se cumple la desigualdad $x < y$ (véase la observación 2 en el p. 3.2). Por la definición de límite existen tales $n_1 \in N$ y $n_2 \in N$ que para $n > n_1$, $n \in N$, se cumple la inclusión $x_n \in U(a, \varepsilon_1)$ y para $n > n_2$, $n \in N$, la inclusión $y_n \in U(b, \varepsilon_2)$. Por consiguiente, si hacemos $n_0 \stackrel{\text{def}}{=} \max\{n_1, n_2\}$, entonces para $n > n_0$ será válida la desigualdad $x_n < y_n$. $\square$

El corolario se deduce de la propiedad III si en ella en calidad de sucesión $\{y_n\}$ tomamos la sucesión estacionaria $y_n = c$, $n = 1, 2, \ldots$, (véase el p. 4.2).

IV. *Si existe* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \overline{R}$, $x_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$, *y para todos los* $n \in N$ *es* *valida la desigualdad* $x_n \leqslant b$ *(respectivamente, la desigualdad* $x_n \geqslant b$*),* $b \in \overline{R}$*, entonces* $a \leqslant b$ *(respectivamente,* $a \geqslant b$*).*

En efecto, si resultara ser $a > b$ (respectivamente, $a < b$), entonces por el corolario de la propiedad III se encontraría $n_0 \in N$ tal que para $n > n_0$, $n \in N$ tendría lugar la desigualdad $x_n > b$ (respectivamente, $x_n < b$) lo que contradice la suposición de que $x_n \leqslant b$ ($x_n \geqslant b$) para todos los $n \in N$. □

Señalemos que principalmente nos interesan las sucesiones numéricas. Las sucesiones de puntos de la recta numérica extendida se introdujeron ante todo para hacer más compacta la exposición: ellas permiten no analizar separadamente los casos de límites de las sucesiones, finitos e infinitos de signo determinado. Partiendo de los fines principales, en el futuro, las afirmaciones y definiciones serán enunciadas para las sucesiones numéricas, aunque muchos de ellos sin ningún trabajo se generalizan para el caso de las sucesiones de puntos de la recta numérica extendida.

OBSERVACIÓN. Si la sucesión $\{x_n\}$ tiene límite finito igual a a y si está dado cierto número $c > 0$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un número que de la misma forma que en la definición de límite, se denotará por n_ε que para todos los números $n > n_\varepsilon$ se cumpla la desigualdad

$$|x_n - a| < c\varepsilon.$$

En efecto, si hacemos $\varepsilon_1 = c\varepsilon$, entonces por la definición de límite de una sucesión existe un número n_{ε_1} tal que para todos los números $n > n_{\varepsilon_1}$ se cumple la desigualdad

$$|x_n - a| < \varepsilon_1 = c\varepsilon$$

y en calidad de número n_ε se puede tomar el número n_{ε_1}.

Por ejemplo, si $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número n_ε tal que para todos los números $n > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A veces resulta útil analizar la sucesión obtenida de una sucesión por el cambio de numeración de sus términos. En el futuro para tales sucesiones utilizaremos repetidas veces el siguiente lema.

Lema. *Si la sucesión* $x_n \in R$, $n = 1, 2, \dots$ *, tiene un límite finito o infinito y* $\{n_k\}$ *es una sucesión de números naturales tal que*

$$\lim_{k \to \infty} n_k = +\infty, \tag{4.7}$$

entonces la sucesión $\{x_{n_k}\}$ tiene ese mismo límite.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Esto significa que para cualquier entorno $U(a)$ del punto a existe un número n_0 tal que para todos los números $n > n_0$ se cumple la inclusión

$$x_n \in U(a). \tag{4.8}$$

Para el número n_0 por la condición (4.7) existe un número k_0 tal que para todos los números $k > k_0$ son válidas las desigualdades

$$n_k > n_0,$$

y por consiguiente, tiene lugar la inclusión

$$x_{n_k} \in U(a).$$

Esto significa que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. □

OBSERVACIÓN. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ y $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$, entonces a veces, del límite de la sucesión $\{x_{n_k}\}$ se puede decir más que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$: puede ocurrir que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$ o $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = -\infty$. Por ejemplo, $\lim\limits_{k\to\infty} (-n)^n = \infty$ y $\lim\limits_{k\to\infty} (-2k)^{2k} = +\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} [-(2k-1)]^{2k-1} = -\infty$.

Ejercicio 9*. Sea $k \to n_k$ alguna biyección del conjunto de los números naturales N sobre sí mismo: $k \in N$, $n_k \in N$. Demuéstrese que si la sucesión $\{x_n\}$ converge (diverge), entonces la sucesión $\{x_{n_k}\}$ converge (diverge) y en el caso de convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ o de la existencia para ella de cualquier límite infinito, la sucesión $\{x_{n_k}\}$ tiene ese mismo límite.

4.4. ACOTACIÓN DE LAS SUCESIONES CONVERGENTES

Es necesario diferenciar la *sucesión* $\{x_n\}$, es decir, el conjunto de los elementos a_n, y el *conjunto de los valores de sus elementos*. El primer conjunto siempre es infinito, ya que está constituido por un conjunto de elementos que se diferencian al menos por los números $n = 1, 2, \ldots$ El segundo conjunto está compuesto por todos los números que son valores de los elementos de la sucesión dada, que puede ser finito. Por ejemplo, la sucesión $x_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, como cualquier sucesión está compuesta por un número infinito de elementos y el conjunto de los valores de sus elementos está compuesto por un número 1.

Definición 7. *La sucesión se llama acotada superiormente (inferiormente) si el conjunto de los valores de los elementos de esta sucesión está acotado superiormente (inferiormente).*

En términos de los elementos de la sucesión esta definición puede ser enunciada de la siguiente forma.

Definición 7'. *La sucesión $\{x_n\}$ se llama acotada superiormente (inferiormente) si existe un número b tal que para todos los números $n = 1, 2, \ldots$ se cumple la desigualdad $x_n \leqslant b$ (respectivamente, la desigualdad $x_n \geqslant b$).*

Definición 8. *Una sucesión acotada superiormente e inferiormente se llama simplemente acotada.*

Es evidente que una sucesión $\{x_n\}$ está acotada si y sólo si existe tal número b que para todos los números $n = 1, 2, \ldots$ se cumple la desigualdad $|x_n| \leqslant b$.

Definición 9. *Una sucesión que no está acotada (superiormente, inferiormente) se llama no acotada (superiormente, inferiormente).*

Por ejemplo, las sucesiones $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ y $\left\{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}n\right\}$ están acotadas. La sucesión $\{n\}$ es no acotada, más exactamente, es acotada inferiormente, pero no está acotada superiormente y la sucesión $\left\{n \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}n\right\}$ es no acotada, tanto superior como inferiormente.

Teorema 2. *Si una sucesión tiene límite finito, entonces está acotada.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dada una sucesión convergente $\{x_n\}$ y sea $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Tomemos, por ejemplo, $\varepsilon = 1$. Por la definición de límite de una sucesión, existe n_1 tal que para todos los $n > n_1$ se cumple la desigualdad $|x_n - a| < 1$. Sea d el mayor de los números 1, $|x_1 - a|, \ldots, |x_{n_1} - a|$. Entonces para todos los $n = 1, 2, \ldots$ es válida la desigualdad $|x_n - a| \leqslant d$, es decir, para todos los n

$$a - d \leqslant x_n \leqslant a + d.$$

Esto significa que la sucesión está acotada. □

4.5. SUCESIONES MONÓTONAS

Definición 10. *La cota superior (inferior) de conjunto de los valores de los elementos de una sucesión* $\{x_n\}$ *se llama cota superior (inferior) de la sucesión dada y se denota por* $\sup\{x_n\}$ *o* $\sup_{n=1,2,\ldots} x_n$ *(respectivamente,* $\inf\{x_n\}$ *o* $\inf_{n=1,2,\ldots} x_n$*).*

Si la cota superior (inferior) es un número, entonces esta definición se puede enunciar de la siguiente forma.

Definición 10'. *El número a es cota superior (inferior) de la sucesión* x_n, $n = 1, 2, \ldots$ *si:*

1) *para todos los* $n = 1, 2, \ldots$ *se cumple la desigualdad* $x_n \leqslant a$ *(respectivamente, la desigualdad* $x_n \geqslant a$*);*

2) *para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe un número* n_ε *tal que* $x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$ *(respectivamente,* $x_{n_\varepsilon} < a + \varepsilon$*).*

De forma análoga se puede enunciar la definición de cota superior (inferior) de una sucesión en el caso cuando la cota indicada es infinita. (Hágase esto).

En calidad de ejemplos señalemos que $\sup\{1/n\} = 1$, $\inf\{1/n\} = 0$, $\sup\{n\} = +\infty$, $\inf\{n\} = 1$. Aquí por doquier $n = 1, 2, \ldots$

Definición 11. *La sucesión* $\{x_n\}$ *se llama sucesión creciente (decreciente) si para cada* $n = 1, 2, \ldots$ *se cumple la desigualdad* $x_n \leqslant x_{n+1}$ *(respectivamente, la desigualdad* $x_n \geqslant x_{n+1}$*)*).*

Las sucesiones crecientes y decrecientes se llaman *monótonas*. Por ejemplo, la sucesión $\{1/n\}$ decrece, la sucesión $\{n\}$ crece, y la sucesión $\left\{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} n\right\}$ no es monótona.

Teorema 3 (de Weierstrass)).** *Cualquier sucesión creciente (decreciente)* $\{x_n\}$ *tiene límite, finito si está acotada superiormente (inferiormente), e infinito igual a* $+\infty$ *(respectivamente,* $-\infty$*) si no está acotado superiormente (inferiormente) con la particularidad de que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$$

(respectivamente,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}).$$

---

*) Las sucesiones crecientes (decrecientes) también se llaman no decrecientes (no crecientes).

**) C. Weierstrass (1815—1897), matemático alemán.

FIG. 10

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la sucesión $\{x_n\}$ crece y está acotada superiormente. Por la última condición tiene cota superior finita (véase el teorema 1 en el p. 3.4). Sea $\beta \overset{\text{def}}{=} \sup \{x_n\}$. Mostremos que $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. De $\beta = \sup \{x_n\}$ se deduce que para todos los $n = 1, 2, \ldots$ es válida la desigualdad $x_n \leqslant \beta$ y que existe un número n_ε tal que $x_{n_\varepsilon} > \beta - \varepsilon$ (fig. 10). Entonces por el crecimiento de la sucesión $\{x_n\}$ para todos los números $n > n_\varepsilon$ tendremos: $\beta - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leqslant x_n \leqslant \beta$. Por eso para todos los $n > n_\varepsilon$, $n \in N$, se cumple la desigualdad $|x_n - \beta| < \varepsilon$. Esto significa que $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Si la sucesión $\{x_n\}$ no está acotada superiormente, entonces $\sup \{x_n\} = +\infty$ (véase el p. 3.4). Mostremos que en este caso $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

De nuevo, escogemos un $\varepsilon > 0$ de forma arbitraria. De que la sucesión $\{x_n\}$ no está acotada superiormente se deduce que existe un númro n_ε tal que $x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$. Entonces por el crecimiento de la sucesión $\{x_n\}$ para todos los números $n > n_\varepsilon$ tendremos $x_n \geqslant x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$. Esto significa que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

De forma análoga, se analiza el caso de las sucesiones decrecientes. Además, se puede reducir al caso de la sucesión creciente si observamos que para cada sucesión decreciente $\{x_n\}$ la sucesión $\{-x_n\}$ es creciente. ☐

OBSERVACIÓN 1. De esta forma, cualquier sucesión monótona tiene límite: finito si está acotada e infinito si no está acotada. Este límite es igual a $+\infty$ si la sucesión monótona no está acotada superiormente y es igual a $-\infty$ si no está acotada inferiormente.

Por cuanto cualquier subsucesión de una sucesión monótona también es monótona, entonces ella a su vez siempre tiene límite finito o infinito, que evidentemente coincide con el límite de toda la sucesión (véase el lema en el p. 4.3).

Vimos que si una sucesión converge, entonces está acotada (teorema 2), de donde, en particular, se deduce que si una sucesión creciente converge, entonces está acotada superiormente; por otro lado, si una sucesión creciente está acotada superiormente, entonces converge (teorema 3). De esta forma, es válida la siguiente afirmación.

Corolario. *Para que una sucesión creciente converja, es necesario y suficiente que esté acotada superiormente.*

La afirmación análoga también es válida para una sucesión decreciente.

OBSERVACIÓN 2. Si $[a_n, b_n]$ es un sistema de segmentos encajados que tienden a cero por longitud y ξ es el punto que pertenece a todos los segmentos del sistema dado, entonces

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{4.9}$$

En realidad, en el punto 3.6 fue mostrado que $\xi = \sup \{a_n\} = \inf \{b_n\}$. Por otro lado, la sucesión $\{a_n\}$ (respectivamente, $\{b_n\}$) crece (decrece) de donde se deduce (4.9).

Ejemplo. El número e.

$$\text{Sea } x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Mostremos que esta sucesión converge. Aplicando la fórmula del binomio de Newton obtenemos:

$$\begin{aligned} x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \\ &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots \\ &\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k} \cdot \frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{1 \cdot 2 \ldots n} \cdot \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots \\ &\ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots \\ &\ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Por cuanto en el paso de n a $n + 1$ el número de sumandos, que son positivos, crece y ademaś, cada sumando a partir del tercero crece:

$$1 - \frac{s}{n} < 1 - \frac{s}{n+1}, \quad s = 1, \ 2, \ldots, \ n - 1, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

entonces

$$x_n < x_{n+1}, n = 1, 2, \ldots .$$

Más adelante, observando que en (4.10) cada paréntesis del tipo $\left(1 - \frac{s}{n}\right)$ es menor que uno y $\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ para todos los $n = 1, 2, 3, \ldots$, tenemos

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leqslant 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

La suma $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$ (que se puede calcular fácilmente por la fórmula conocida de la matemática elemental para la suma de los términos de una progresión geométrica, es igual a $1 - \frac{1}{2^{n-1}}$), para cualquier $n = 1, 2, \ldots$, es menor que uno, por lo que finalmente

$$2 \leqslant x_n < x_{n+1} < 3. \tag{4.11}$$

Así pues, la sucesión $\{x_n\}$ crece y está acotada superiormente, lo que quiere decir, que por el teorema 3 tiene límite. Este límite se denota por la letra e.

Pasando al límite en (4.11) obtenemos $2 < e \leqslant 3$. Con estimaciones maś exactas se puede obtener que es válida la igualdad aproximada

$$e \approx 2{,}718281828459045.$$

Se demuestra también que el número e es irracional (véase el p. 35.14*)) y aún más, trascendente, es decir, no es raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros. El número e en el análisis matemático juega un papel importante. En particular, es la base de los logaritmos naturales.

4.6. TEOREMA DE BOLZANO — WEIERSTRASS

Ante todo introduzcamos el concepto de subsucesión de una sucesión dada.

Definición 7. *La sucesión y_k, $k = 1, 2, \ldots$, se llama subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$ si para cualquier k existe un natural n_k tal que $y_k = x_{n_k}$ y además $n_{k_1} < n_{k_2}$ si y sólo si $k_1 < k_2$. La sucesión $\{y_k\}$ se denota en este caso por $\{x_{n_k}\}$ o x_{n_k}, $k = 1, 2, \ldots$*

Dicho de otro modo, si se da una sucesión cualquiera y de algún subconjunto de sus elementos se forma una nueva sucesión, entonces ésta se llama *subsucesión de la sucesión inicial*, si el orden seguido por los elementos en él es el mismo que el de la sucesión dada.

Así, la sucesión $1, 3, 5, \ldots, 2n + 1 \ldots$ es una subsucesión y la sucesión $2, 1, 3, 4, \ldots, n, \ldots$ no es subsucesión de la serie natural de números $1, 2, \ldots, n \ldots$ En ambos casos, los elementos de las sucesiones forman un subconjunto*) del conjunto de los números naturales, pero en el primer caso, los miembros de la sucesión están ubicados en el mismo orden que en la serie natural de números, y en el segundo caso, este orden está alterado.

Si $\{x_{n_k}\}$ es subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$, entonces evidentemente $n_k \geqslant k$, $k = 1, 2, \ldots$, por consiguiente

$$\lim_{k \to \infty} n_k = +\infty. \tag{4.7}$$

De aquí se deduce por el lema del p. 4.3 que si la sucesión tiene límite finito o infinito, entonces cualquiera de sus subsucesiones tiene ese mismo límite.

En el p. 4.4 fue demostrado que cualquier sucesión convergente está acotada. La afirmación inversa, por supuesto, no es cierta. Por ejemplo, la sucesión $x_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots$, está acotada y diverge. No obstante, resulta que cualquier sucesión acotada contiene una subsucesión convergente. Esta afirmación se llama teorema de Bolzano-Weierstrass**) o propiedad de compacidad de una sucesión acotada.

Teorema 4. *De cualquier sucesión acotada se puede extraer una subsucesión convergente y de cualquier sucesión no acotada se puede extraer una subsucesión infinita cuyo límite es un infinito de signo definido.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada, es decir, que existe un segmento $[a, b]$ tal que $a \leqslant x_n \leqslant b$ para todos los $n = 1, 2, \ldots$. Dividamos al segmento $[a, b]$ en dos segmentos iguales. Al menos uno de los segmentos obtenidos contiene un

---

*) Recordemos (véase el p. 1.1) que el propio conjunto se considera su subconjunto.

**) B. Bolzano (1781—1848), matemático checo.

número infinito de elementos de la sucesión dada. Denotémoslo por $[a_1, b_1]$. Sea x_{n_1} cualquiera de los elementos de la sucesión dada que pertenece al segmento $[a_1, b_1]$.

Dividamos el segmento $[a_1, b_1]$ en dos segmentos iguales; de nuevo, al menos uno de los dos segmentos obtenidos contiene un número infinito de términos de la sucesión inicial, denotémoslo por $[a_2, b_2]$. Por cuanto, en el segmento $[a_2, b_2]$ hay un número infinito de términos de la sucesión $\{x_n\}$, se encuentra un término x_{n_2} tal que $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ y $n_2 > n_1$. Continuando este proceso, obtenemos una sucesión de segmentos $[a_k, b_k]$ en la cual cada segmento posterior es la mitad del anterior, y una sucesión de tales elementos $\{x_{n_k}\}$ de la sucesión dada que $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \dots$ y $n_{k''} > n_{k'}$ cuando $k'' > k'$. La sucesión $\{x_{n_k}\}$ es subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$ por construcción. Mostremos que esta subsucesión es convergente.

La sucesión de segmentos $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \dots$, es una sucesión de segmentos encajados cuyas longitudes tienden a cero, ya que $b_k - a_k = \dfrac{b - a}{2^k} \to 0$ cuando $k \to \infty$. Por el principio de los segmentos encajados (véase el p. 3.6) existe un punto ξ único que pertenece a todos estos segmentos. Como vimos (véase (4.9) en la observación 2 al teorema 3), $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = \xi$, pero $a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k$, $k = 1, 2, \dots$, por lo que por la propiedad I (véase el p. 4.3) de las sucesiones convergentes, la sucesión $\{x_{n_k}\}$ también converge y $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$.

Supongamos que ahora la sucesión $\{x_n\}$ no está acotada. Entonces no está acotada superiormente o bien no está acotada inferiormente o bien tiene lugar uno y lo otro. Supongamos para mayor exactitud que la sucesión $\{x_n\}$ no está acotada superiormente. Entonces existe un número $n_1 \in N$ tal que $x_{n_1} > 1$.

Es evidente que la sucesión x_n, $n = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots$, tampoco está acotada superiormente, ya que se obtiene de la sucesión x_n, $n = 1, 2, \dots$, no acotada superiormente con la exclusión de un número finito de términos. Por esto, existe $n_2 > n_1$, $n_2 \in N$, tal que $x_{n_2} > 2$.

Continuando este proceso obtenemos una sucesión de números n_k tales que

$$n_1 < n_2 < \dots n_k < \dots$$

y

$$x_{n_1} > 1, \quad x_{n_2} > 2, \dots, \quad x_{n_k} > k, \dots$$

De aquí se deduce, que $\{x_{n_k}\}$ es una subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$, y debido a la propiedad II del p. 4.3, que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$. $\square$

OBSERVACIÓN. La segunda afirmación del teorema 4 puede ser precisada. Como se ve de la demostración dada, en ella se mostró que si la sucesión no es acotada superiormente, entonces ésta contiene una subsucesión que tiende hacia $+\infty$. Análogamente, si la sucesión no es acotada inferiormente, entonces ella contiene una subsucesión, que tiende hacia $-\infty$.

Definición 13. *El límite, finito o infinito, de signo determinado, de una subsucesión de cierta sucesión se llama límite parcial de la sucesión dada.*

El teorema de Bolzano — Weierstrass (primera parte del teorema 4) y su análogo para las sucesiones no acotadas (segunda parte del teorema 4), muestra que

cualquier sucesión tiene al menos un límite parcial finito o infinito, además, es a ciencia cierta, finito si la sucesión dada es acotada.

De esta forma, cada sucesión numérica $\{x_n\}$, $x_n \in R$, tiene al menos un límite parcial en el conjunto ampliado de los números reales, es decir, el conjunto de los límites parciales en $\bar{R}$ para cualquier sucesión siempre es no vacío.

Ejercicios. 10. Demuéstrese que para que una sucesión sea convergente, es necesario y suficiente que sea acotada y tenga un límite parcial único.

11. Demuéstrese que el elemento a (un número o uno de los infinitos con signo: $+\infty$ o $-\infty$) es un límite parcial de una sucesión si, y sólo si, en cualquiera de sus entornos se contiene un número infinito de términos de la sucesión dada.

4.7. CRITERIO DE CAUCHY PARA LA CONVERGENCIA DE SUCESIONES

Hasta ahora no se ha dado un criterio suficientemente general con ayuda del cual se pueda conocer, si una sucesión dada es convergente o no. La propia definición de sucesión convergente es poco cómoda para esto, ya que en ella interviene el valor del límite, el que puede ser desconocido. Por esto, es deseable tener un criterio tal para la definición de convergencia y divergencia de una sucesión, que se basase solamente en las propiedades de los elementos de la sucesión dada. El teorema 5, que se expone a continuación, da precisamente un criterio semejante.

Definición 14. *Diremos que la sucesión $\{x_n\}$ satisface la condición de Cauchy*[*)], *si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número n_ε tal que para todos los números n y m, que satisfacen las condiciones $n > n_\varepsilon$, $m > n_\varepsilon$, se cumple la desigualdad*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{4.12}$$

Las sucesiones, que satisfacen la condición de Cauchy, se llaman también *sucesiones fundamentales.*

Con ayuda de los símbolos lógicos, la condición de Cauchy se escribe de la forma siguiente:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in N)(\forall n \in N, \forall m \in N, n > n_\varepsilon, m > n_\varepsilon) : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

La condición (4.12) se puede enunciar de la siguiente forma.

Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número n_ε tal que para todos los números $n > n_\varepsilon$ y todos los enteros no negativos p

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon. \tag{4.13}$$

Para convencerse de la equivalencia de las condiciones (4.12) y (4.13) es suficiente hacer $p = n - m$, si $n \geqslant m$, y $p = m - n$ si $m > n$.

Teorema 5 (criterio de Cauchy). *Para que una sucesión converja es necesario y suficiente que satisfaga la condición de Cauchy.*

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Supongamos que la sucesión $\{x_n\}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Demos $\varepsilon > 0$; entonces de acuerdo con la definición de límite de una

---

[*)] A. L. Cauchy (1798—1857), matemático francés.

sucesión, existe n_ε tal que para todos los números $n > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea ahora $n > n_\varepsilon$ y $m > n_\varepsilon$, entonces

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

es decir, se cumple la condición de Cauchy.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Supongamos que la sucesión $\{x_n\}$ satisface la condición de Cauchy, es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe n_ε tal que si $n > n_\varepsilon$ y $m > n_\varepsilon$, entonces $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Tomemos, por ejemplo, $\varepsilon = 1$, entonces existe n_1 tal que para $n > n_1$ y $m > n_1$ se cumple la desigualdad $|x_n - x_m| < 1$. En particular, si $n > n_1$ y $m = n_1 + 1$, entonces $|x_n - x_{n_1+1}| < 1$, es decir, $x_{n_1+1} - 1 < x_n < x_{n_1+1} + 1$ cuando $n > n_1$. Esto significa que la sucesión x_n, $n = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots$ está acotada. Por esto, por el teorema 4, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ convergente.

Sea $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = a$. Mostremos que toda la sucesión $\{x_n\}$ dada, también converge y tiene como límite al número a. Demos cierto $\varepsilon > 0$. Entonces, en primer lugar, por la definición de límite de una sucesión, existe k_ε tal que para todos los números $k > k_\varepsilon$, o lo que es lo mismo, por la definición de subsucesión, para todos los $n_k > n_{k_\varepsilon}$ se cumple la desigualdad $|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

En segundo lugar, ya que la sucesión $\{x_n\}$ satisface la condición de Cauchy, entonces existe n_ε tal que para todos los $n > n_\varepsilon$ y todos los $m > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hagamos $N_\varepsilon = \text{máx}\,\{n_\varepsilon, n_{k_\varepsilon}\}$ y fijemos cierto $n_k > N_\varepsilon$. Entonces, para todos los $n > N_\varepsilon$ obtendremos:

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

y esto demuestra que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. □

Ejercicios. 12. Enúnciense las condiciones positivas necesarias y suficientes que sean la negación del criterio de Cauchy para que la sucesión no tenga límite.

13. Demuéstrese que para que la sucesión $\{x_n\}$ sea convergente es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista $n_\varepsilon \in N$ tal que para todos los $n > n_\varepsilon$, $n \in N$, se cumpla la desigualdad $|x_n - x_{n_\varepsilon}| < \varepsilon$.

Problema 3. Aclárese si se deduce o no la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ de la condición de que para cualquier natural p existe el límite $\lim\limits_{n \to \infty} (x_{n+p} - x_n) = 0$.

4.8. SUCESIONES INFINITESIMALES

Sobre las sucesiones se pueden efectuar las operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y devisión. Definámoslas.

Definición 15. *Sean dadas las sucesiones* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$; *se llaman suma, diferencia y producto de estas sucesiones respectivamente las sucesiones* $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$ *y* $\{x_ny_n\}$. *Si* $y_n \neq 0, n = 1, 2, \ldots$, *entonces se llama cociente de la división de la sucesión* $\{x_n\}$ *entre la sucesión* $\{y_n\}$ *la sucesión* $\{x_n/y_n\}$. *Finalmente, se llama producto de la sucesión* $\{x_n\}$ *por un número c la sucesión* $\{cx_n\}$.

Si la sucesión $\{y_n\}$ es tal que en ella se tiene sólo un número finito de elementos iguales a cero, es decir, existe $n_0 \in N$ tal que para $n \geqslant n_0$, $n \in N$, se cumple la desigualdad $y_n \neq 0$, entonces se puede analizar la sucesión $\{x_n/y_n\}$ entendiendo por ella la sucesión con números $n \geqslant n_0$.

Definición 16. *La sucesión* $\{\alpha_n\}$ *se llama infinitesimal si* $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0$.

Ya nos encontramos en el p. 4.1 con las sucesiones infinitesimales $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$, $\alpha_n = \dfrac{1}{n} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} n$, $n = 1, 2, \ldots$

Señalemos algunas propiedades de las sucesiones infinitesimales.

I. *La suma algebraica de un número finito de sucesiones infinitésimas es una sucesión infinitésima.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ sucesiones infinitesimales. Mostremos que las sucesiones $\{\alpha_n + \beta_n\}$ y $\{\alpha_n - \beta_n\}$ son también infinitésimas. Demos un $\varepsilon > 0$, entonces existe (¿por qué?) un número n_ε tal que para todos los $n > n_\varepsilon$ se cumplen las desigualdades $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ y $|\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Por esto, para $n > n_\varepsilon$ tenemos

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

lo que significa que $\lim\limits_{n \to \infty} (\alpha_n \pm \beta_n) = 0$.

La afirmación correspondiente para cualquier número finito de sumandos se deriva de lo demostrado por inducción. □

Problema 4. Definiendo la suma de un número infinito de sumandos numerados (concepto generalizado de la suma de un número finito de sumandos) y luego la suma de un número infinito de sucesiones, constrúyase un ejemplo de un número infinito de sucesiones infinitesimales cuya suma no es una sucesión infinitésima.

II. El producto de una sucesión infinitesimal por una sucesión acotada es una sucesión infinitesimal.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión infinitesimal y $\{x_n\}$, una sucesión acotada, es decir, existe un número $b > 0$ tal que para todos los números $n = 1, 2, \ldots$ se cumple la desigualdad $|x_n| \leqslant b$.

Demos un $\varepsilon > 0$; por la definición de sucesión infinitesimal existe un número n_ε tal que para todos los $n > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{b}$. Por esto, para todos los $n > n_\varepsilon$ tenemos

$$|\alpha_n x_n| = |\alpha_n| |x_n| < \frac{\varepsilon}{b} \cdot b = \varepsilon,$$

lo que significa que la sucesión $\{\alpha_n x_n\}$ es infinitesimal. □

Corolario. *El producto de un número finito de sucesiones infinitesimales es una sucesión infinitesimal.*

Esto se deduce directamente por inducción de la propiedad II si observamos que una sucesión infinitesimal, como cualquier sucesión que tiene límite, está acotada (véase el teorema 2 del p. 3.4).

Problema 5. Definiendo el producto de un número infinito de factores numerados (concepto generalizado de producto de un número finito de factores) y luego el producto de un número infinito de sucesiones, constrúyase un ejemplo de un número infinito de sucesiones infinitesimales, cuyo producto no sea una sucesión infinitesimal.

Ejercicio 14. Demuéstrese que para que una sucesión $x_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, sea infinitesimal es necesario y suficiente que la sucesión $1/x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, sea infinita.

4.9. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES RELACIONADAS CON LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS SOBRE LAS SUCESIONES

Lema. *Para que el número a sea el límite de la sucesión $\{x_n\}$ es necesario y suficiente que su término x_n sea del tipo $x_n = a + \alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$, donde $\{\alpha_n\}$ es una sucesión infinitesimal.*

En realidad, sea dada una sucesión cualquiera $\{x_n\}$ y el número a; hagamos $\alpha_n \overset{def}{=} x_n - a$. Entonces, la condición $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ por la definición de límite de la sucesión es equivalente a que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in N$ tal que para todos los $n > n_0$, $n \in N$, se cumple la desigualdad $|x_n - a| < \varepsilon$, es decir, la desigualdad $|\alpha_n| < \varepsilon$ y esto es equivalente a $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. □

Este lema muestra el papel singular de las sucesiones infinitesimales en el estudio del concepto de límite, ya que el concepto general de límite de una sucesión con ayuda de este lema se reduce al concepto del límite nulo. Esta circunstancia más adelante se utiliza ampliamente en el estudio de una serie de propiedades de las sucesiones convergentes.

1°. *Si $x_n = c$, $n = 1, 2, \ldots$ (es decir, la sucesión $\{x_n\}$ es estacionaria), entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.*

Dicho brevemente, el límite de una constante es igual a esta misma constante.

En realidad, la sucesión $x_n - c = c - c = 0$ es infinitesimal y por esto, por el lema, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. □

2°. *Si la sucesión $\{x_n\}$ es convergente, entonces también es convergente la sucesión $\{|x_n|\}$, además, si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in R$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número n_ε tal que para todos los números $n > n_\varepsilon$, se cumple la desigualdad $|x_n - a| < \varepsilon$, pero $\big||x_n| - |a|\big| < |x_n - a|$. Por lo tanto, para todos los números $n > n_\varepsilon$ tiene lugar la desigualdad $\big||x_n| - |a|\big| < \varepsilon$ y esto significa que $\lim |x_n| = |a|$. □

3°. *Si las sucesiones* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *convergen, entonces las sucesiones* $\{x_n \pm y_n\}$ *también convergen y*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n,$$

es decir, el límite de la suma algebraica de dos sucesiones convergentes es igual a la suma de los límites de las sucesiones dadas.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Por la necesidad de las condiciones del lema para la existencia del límite tenemos

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

donde $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$. Por consiguiente, $x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n)$, $n = 1, 2, \dots$, donde por la propiedad I de las sucesiones infinitesimales (véase el p. 4.8) $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n) = 0$. Por esto, según la suficiencia de las condiciones del lema para la existencia del límite, tenemos

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n. \ \square$$

Corolario. *El límite de la suma algebraica finita de sucesiones convergentes es igual a esa misma suma algebraica de los límites de las sucesiones sueltas.*

Esto se deduce directamente por inducción de la propiedad demostrada de los límites de las sucesiones convergentes.

4°. *Si las sucesiones* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *convergen, entonces la sucesión* $\{x_n y_n\}$ *también converge y*

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n,$$

es decir, el límite del producto de sucesiones convergentes existe y es igual al producto de los límites de las sucesiones dadas.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, entonces

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

donde, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$; por lo que $x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n)$.

Por las propiedades I y II de las sucesiones infinitesimales (véase el p. 4.8) $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n) = 0$; por lo que

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Corolario 1. *Si la sucesión* $\{x_n\}$ *converge, entonces para cualquier número* c, *la sucesión* $\{cx_n\}$ *también converge y*

$$\lim_{n\to\infty} cx_n = c \lim_{n\to\infty} x_n,$$

es decir, una constante se puede sacar fuera del signo del límite.

Esta afirmación se deduce inmediatamente de las propiedades 1° y 4°.

Corolario 2. *Si* $\{x_n\}$ *es una sucesión convergente y* k *es un número natural, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k = (\lim_{n\to\infty} x_n)^k.$$

Esto se deduce directamente de la propiedad 4° por inducción.

5°. *Si las sucesiones* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *convergen*, $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$, *y* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, *entonces, la sucesión* $\{x_n/y_n\}$ *converge y*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n},$$

es decir, en las suposiciones hechas, el límite del cociente de sucesiones convergentes existe y es igual al cociente de los límites de las sucesiones dadas.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$ y para mayor exactitud, $b > 0$. Entonces,

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

donde $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$ y por el corolario de la propiedad III de los límites de las sucesiones del p. 4.3 existe un número n_0 tal que para todos números $n > n_0$ se cumple la desigualdad $y_n > \frac{b}{2} > 0$ (efectivamente, observando que $\frac{b}{2} < b$, en la propiedad indicada en calidad de c hace falta tomar $c = \frac{b}{2}$), aquí se utiliza la suposición de que $b > 0$; por lo que para $n > n_0$ tenemos $\frac{1}{y_n} < \frac{2}{b}$ (por cuanto $y_n \neq 0$, entonces por él se puede dividir).

A continuación

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b(b + \beta_n)} (\alpha_n b - \beta_n a). \tag{4.14}$$

Aquí $0 < \dfrac{1}{b(b + \beta_n)} = \dfrac{1}{b y_n} < \dfrac{2}{b^2}$, es decir, la sucesión $1/(b(b + \beta_n))$, $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$, está acotada (de aquí, claramente se deduce que esta sucesión está acotada para todos los $n = 1, 2, \dots$).

Por las propiedades de las sucesiones infinitesimales, la sucesión $\{\alpha_n b - \beta_n b\}$ es infinitesimal, por lo que la sucesión $\left\{\dfrac{1}{b(b + \beta_n)} (\alpha_n b - \beta_n a)\right\}$ es infinitesimal. Por esto, de (4.14) se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n},$$

De forma análoga se analiza el caso cuando $b < 0$. □

OBSERVACIÓN. En el caso de sucesiones que tienen límites infinitos las afirmaciones análogas a 3° — 5°, en general, no tienen lugar. Por ejemplo, sea $x_n = n + 1$, $y_n = n$, $n = 1, 2, \dots$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 1.$$

Si $x_n = 2n$, $y_n = n$, $n = 1, 2, \dots$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = +\infty.$$

Si ahora $x_n = n + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$, $y_n = n$, $n = 1, 2, \dots$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty,$$

y la sucesión $x_n - y_n = \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$, $n = 1, 2, \dots$, no tiene ni límite finito ni infinito.

Estos ejemplos muestran que en suposiciones iguales, con respecto a las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ que tienen límites infinitos, para las sucesiones $\{x_n - y_n\}$ pueden encontrarse los casos más diversos. Junto con esto, algunas generalizaciones de las propiedades 3° — 5° en el caso de sucesiones con límites infinitos, no obstante, tienen lugar. Por ejemplo, si $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ (o $\lim_{n\to\infty} y_n$ es finito), entonces $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = +\infty$ o si $\alpha > 0$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (se recomienda demostrarlo por sí mismo).

Ejercicio 15. Demuéstrese que si $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ y la sucesión $\{y_n\}$ está acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = +\infty$.

Ejemplos. 1. Sea $a > 0$, $x_0 > 0$ y

$$x_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right), \quad n = 1, 2, \dots . \tag{4.15}$$

Demostremos que $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$. Por inducción, es evidente que $x_n > 0$ para todos los $n = 0, 1, 2, \dots$. Mostremos inicialmente que

$$x_n \geqslant \sqrt{a}, n = 1, 2, \dots . \tag{4.16}$$

Para esto, observemos previamente, que de la desigualdad evidente $(t - 1)^2 \geqslant 0$ en el caso de $t > 0$ se deduce la desigualdad $t + \frac{1}{t} \geqslant 2$. Utilizando esta desigualdad para $t = \frac{x_n}{\sqrt{a}}$ por (4.15) obtenemos:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right) \geqslant \frac{\sqrt{a}}{2}2 = \sqrt{a}, \quad n = 0, 1, 2 \dots .$$

Mostremos ahora que la sucesión x_n, $n = 1, 2, \dots$, decrece monótonamente. Aplicando la desigualdad (4.16) obtenemos:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{x_n}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right) \leqslant \frac{x_n}{2}2 = x_n, \qquad n = 1, 2, \dots . \tag{4.17}$$

Así pues, $\sqrt{a} \leqslant \dots \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n \leqslant \dots \leqslant x_1$, dondequiera que esté ubicada "la aproximación nula" $x_0 > 0$, es decir, la sucesión $\{x_n\}$ está acotada inferiormente y decrece monótonamente, por eso, según el teorema 3, tiene límite.

Sea $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Pasando al límite en la igualdad (4.15), cuando $n \to \infty$ obte-

nemos la igualdad
$$x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)$$
de donde $x^2 = a$ y ya que $x_n \geqslant 0$, entonces $x \geqslant 0$ y por eso $x = \sqrt{a}$.

La fórmula (4.15) puede servir para el cálculo aproximado de los valores de la raíz cuadrada del número a. En efecto, ella se aplica en la práctica con este fin, en particular, en los cálculos con las máquinas calculadoras de acción rápida.

No es difícil calcular la exactitud con la que la aproximación n-ésima, es decir, el término x_n, da el valor de la raíz $\sqrt{a}$.

De fórmula recurrente (4.15) tenemos:
$$x_{n+1}-\sqrt{a}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)-\sqrt{a}=\frac{1}{2x_n}(x_n^2-2x_n\sqrt{a}+a)=$$
$$=\frac{1}{2x_n}(x_n-\sqrt{a})^2,\quad n=0,1,2,\dots$$

Aplicando la desigualdad (4.16) de aquí hallamos:
$$0\leqslant x_{n+1}-\sqrt{a}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{a}}(x_n-\sqrt{a})^2,\quad n=1,2,\dots .$$

La estimación obtenida no es totalmente cómoda en la práctica, por cuanto no conocemos el valor de la raíz $\sqrt{a}$, pues ésta es precisamente la que buscamos. No obstante, siempre se puede hallar un c aproximado tal que $0 < c < \sqrt{a}$ y se puede escoger $x_0 \geqslant c$, entonces, de la estimación obtenida tendremos
$$0\leqslant x_{n+1}-\sqrt{a}\leqslant\frac{1}{2c}(x_n-\sqrt{a})^2,\quad n=0,1,2,\dots ,$$
o
$$\frac{1}{2c}(x_{n+1}-\sqrt{a})\leqslant\left[\frac{1}{2c}(x_n-\sqrt{a})\right]^2,\quad n=0,1,2,\dots ,$$

De aquí, por inducción, hallamos:
$$\frac{1}{2c}(x_n-\sqrt{a})\leqslant\left[\frac{1}{2c}(x_{n-1}-\sqrt{a})\right]^2\leqslant$$
$$\leqslant\left[\left(\frac{1}{2c}(x_{n-2}-\sqrt{a})\right)^2\right]^2\leqslant\dots\leqslant\left[\frac{1}{2c}(x_0-\sqrt{a})\right]^{2^n}. \tag{4.18}$$

Si escogemos la aproximación nula x_0 de forma tal, que
$$q\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2c}|x_0-\sqrt{a}|<1,$$

entonces de (4.18) se obtendrá que
$$0\leqslant x_n-\sqrt{a}\leqslant 2cq^{2^n},\ n=1,2,\dots .$$

es decir, la sucesión (4.15) converge al valor de la raíz mucho más rápido que la progresión geométrica con denominador q, $0 < q < 1$.

Para la ilustración del cálculo aproximado de la raíz por la fórmula (4.15) demos los resultados del cálculo de $\sqrt{2}$ en la computadora, en el caso cuando en calidad de aproximación nula x_0 fue escogido $x_0 = 1$:

$$x_1 = \mathbf{1}{,}50000000000000000000000000000000000000000000000000000000000$$

$$x_2 = \mathbf{1{,}41}666666666666666666666666666666666666666666666666666666666$$

$$x_3 = \mathbf{1{,}41421}568627450980392156862745098039215686274509803921568627$$

$$x_4 = \mathbf{1{,}41421356237}468991062629557889013491011655962211574404458490$$

$$x_5 = \mathbf{1{,}41421356237309504880168}9623502530243614981925776197428 49828$$

$$x_6 = \mathbf{1{,}41421356237309504880168872420969807856967187537}723400156101$$

$$x_7 = \mathbf{1{,}41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667}$$

Aquí, con cifras gruesas se resaltan los números que son la aproximación correcta de $\sqrt{2}$ con exactitud hasta el número de las cifras significativas que entran en el número resaltado, (estas cifras se estabilizan en el proceso de cálculo). El número de las cifras correctas en este sentido, se duplica (como puede verse en la tabla) en el paso a la siguiente aproximación: en x_1 se tiene una cifra correcta, en x_2 ya son 3; en x_3, 6; en x_4, 12; en x_5, 24; en x_6, 48, y x_7 ya da la aproximación correcta de $\sqrt{2}$ con 60 cifras significativas, es decir, con todos los órdenes utilizados.

Observemos que si el número $a > 0$ es tal que su raíz se calcula en forma finita, en el sentido de que existe tal fracción decimal finita x que $x^2 = a$, entonces esta fracción puede ser hallada (en cualquier caso en principio) con ayuda del método clásico del cálculo de raíz "por columna". En el caso del cálculo de la raíz de este número con ayuda de la fórmula (4.15), si x_0 es escogido diferente del valor exacto de la raíz: $x_0 \neq \sqrt{a}$, entonces el valor exacto de la raíz indicada no se obtiene en ningún paso. Esto se deduce de que en el caso de $x_0 \neq \sqrt{a}$ la sucesión (4.15) decrece estrictamente: $x_{n+1} < x_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Antes de analizar los ejemplos posteriores demostremos una desigualdad útil.

Lema (desigualdad de Bernoulli)*). *Sea $\alpha > 0$, entonces para cualquier natural n es válida la desigualdad*

$$(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha. \tag{4.19}$$

DEMOSTRACIÓN. Por la fórmula del binomio de Newton tenemos

$$(1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \ldots + \alpha^n.$$

Todos los sumandos en el segundo miembro de la igualdad son positivos; eliminando todos, menos el primero y el segundo, con lo cual el segundo miembro sólo puede disminuir, obtenemos la desigualdad buscada (4.19)

Volvamos al análisis de los ejemplos.

2. Si $p > 1$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} p^n = +\infty$, y si $0 < p < 1$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} p^n = 0$.

Sea inicialmente $p > 1$, entonces $p = 1 + \alpha$, donde $\alpha > 0$ y por la desigualdad de Bernoulli (véase (4.19))

$$p^n = (1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha > n\alpha.$$

*) J. Bernoulli (1654—1705), matemático suizo.

Por cuanto $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha n = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, $\alpha > 0$, entonces también $\lim\limits_{n\to\infty} p^n = +\infty$.

Si ahora $0 < p < 1$, entonces $q = \dfrac{1}{p} > 1$ y

$$\lim_{n\to\infty} p^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} q^n} = 0,$$

ya que por lo demostrado $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

3. Para cualquier $a > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1, \tag{4.20}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = 1. \tag{4.21}$$

Sea inicialmente $a > 1$, entonces $b \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a} > 1$. En realidad, por la definición de la raíz $b^n = a$. Si fuera $b \leqslant 1$ entonces, multiplicando por sí misma esta desigualdad n veces, obtendríamos que $a = b^n \leqslant 1$, pero esto contradice la condición $a > 1$. Pongamos

$$x_n \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a} - 1. \tag{4.22}$$

Por lo dicho, $x_n > 0$. De (4.22) se deduce que $a = (1 + x_n)^n$. Aplicando la desigualdad de Bernoulli obtenemos

$$a = (1 + x_n)^n > nx_n.$$

Por consiguiente, $0 < x_n < \dfrac{a}{n}$, por lo que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, de donde por (4.22)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Si ahora, $0 < a < 1$, entonces $b \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{a} > 1$ y ya que por lo demostrado $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}} = 1.$$

Si $a = 1$, entonces $\sqrt[n]{a} = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, y por consiguiente también $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

De esta forma, (4.20) está demostrada para cualquier $a > 0$. De aquí inmediatamente se deduce (4.21):

$$\lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{1/n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n}} = 1. \square$$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$, $a > 0$.

En realidad, sea $n_0 \in N$ tal que $\frac{a}{n_0} < \frac{1}{2}$. Entonces para todos los $n > n_0$ será válida la desigualdad $\frac{a}{n} < \frac{1}{2}$ y por esto

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n_0}}{n_0!} \frac{a}{n_0+1} \frac{a}{n_0+2} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a^{n_0}}{n_0!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}.$$

Ya que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{n_0}}{n_0!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} = \frac{2^{n_0}a^{n_0}}{n_0!} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

La igualdad (4.23) se puede demostrar de otra forma. Analicemos la sucesión $x_n = \frac{a^n}{n!}$, entonces $x_{n+1} = x_n \frac{a}{n+1}$, y cuando $n+1 > a$, se cumple la desigualdad $x_{n+1} < x_n$, es decir, a partir de cierto número, la sucesión $\{x_n\}$ decrece. Ya que, además, para todos los $n \in N$ tiene lugar la desigualdad $x_n > 0$, entonces esta sucesión es acotada inferiormente, y, por lo tanto, tiene límite finito. Sea $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Pasando al límite para $n \to \infty$ en la igualdad $x_{n+1} = x_n \frac{a}{n+1}$, obtenemos $x = x \cdot 0$,de donde $x = 0$, es decir, tenemos otra vez (4.23).

$$5. \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty. \tag{4.24}$$

Ya que para cualquier $a > 0$ tiene lugar la igualdad (4.23), entonces para cualquier $a > 0$ existe un $n_a \in N$ tal que para todos los $n > n_a$ se cumple la desigualdad

$$\frac{a^n}{n!} < 1,$$

es decir, cuando $n > n_a$, tiene lugar $\sqrt[n]{n!} > a$, y ya que $a > 0$ es arbitrario, entonces esto significa que es válida la igualdad (4.24).

$$6. \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = e. \tag{4.25}$$

Recordemos (véase el p. 4.5) que el número e es el límite de la sucesión

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = e. \tag{4.26}$$

Hagamos

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Se demostró (véase (4.11)) que

$$x_n < s_n, n = 1, 2, \ldots. \tag{4.27}$$

Por otra parte, fijando en la fórmula (4.10) un $k \geqslant 1$ arbitrario y elijiendo $n > k$, eliminemos en el segundo miembro de la igualdad (4.10) todos los sumandos, a partir del $(k + 2)$-ésimo orden. Como resultado, obtenemos la desigualdad

$$x_n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Pasando al límite en esta desigualdad para $n \to \infty$ y un k fijo, y notando que el segundo miembro tiene como límite s_k, obtenemos, por (4.26), la desigualdad

$$e \geqslant s_k, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{4.28}$$

Uniendo (4.27) y (4.28), tendremos

$$x_n < s_n \leqslant e, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

De aquí, según (4.26), se deduce directamente que $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = e$, es decir, la igualdad (4.25).

OBSERVACIÓN. Para el cálculo aproximado del número e, la fórmula

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

no es muy cómoda, ya que cuando se pasa de n a $n + 1$, hay que realizar todos los cálculos de nuevo. La fórmula aproximada

$$e \approx s_n$$

en este sentido está mejor acondicionada para los cálculos numéricos, ya que durante el paso de n a $n + 1$, es necesario agregar al valor ya hallado s_n el número $\dfrac{1}{(n+1)!}$:

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)!},$$

es decir, los cálculos efectuados cuando se hallaba s_n, no se pierden. Además, en este caso, es fácil establecer también la estimación del error cuando se sustituye el número e por el valor de la suma s_n. (Esto será hecho en el p. 34.14, véase el ejemplo 4).

Ejercicio 16. Sea $a_0 > 0, b_0 \geqslant 0, a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, b_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$. Demuéstrese que las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tienden a un mismo límite a y que $0 \leqslant a - a_n \leqslant \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}, 0 \leqslant b_n - a \leqslant \dfrac{|b_0 - a_0|}{2^n}$.

4.10. REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES POR FRACCIONES DECIMALES INFINITAS

Sea dado cualquier número a, para mayor exactitud $a \geqslant 0$. Por el principio de Arquímedes existe un número entero $n_0 > a$. Entre los números $n = 1, 2, \ldots, n_0$, tomemos el menor que tiene la propiedad $n > a$ y denotémoslo por $\alpha_0 + 1$, entonces $\alpha_0 \leqslant a < \alpha_0 + 1$.

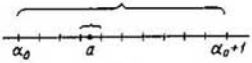


FIG. 11

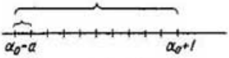


FIG. 12

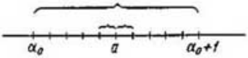


FIG. 13

Dividamos el segmento $I_0 = [\alpha_0, \alpha_0 + 1]$ en diez segmentos iguales, es decir, analicemos los segmentos

$$[\alpha_0, \alpha_1; \alpha_0, \alpha_1 + 1/10],$$

donde $\alpha_1 = 0, 1, 2, \ldots, 9$.

Son posibles dos casos: o bien el punto a no coincide con ninguno de los puntos de división (fig. 11), o bien el punto a coincide con uno de los puntos de división (figs. 12, 13). En el primer caso, el punto a pertenece sólo a uno de estos segmentos. Denotémoslo por

$$I_1 = \left[\alpha_0, \alpha_1; \alpha_0, \alpha_1 + \frac{1}{10}\right],$$

donde α_1 denota el número del segmento, es decir, una de las cifras $0, 1, \ldots, 9$.

En el segundo caso, el punto a puede pertenecer a dos segmentos vecinos (fig. 13). Entonces por $I_1 = \left[\alpha_0, \alpha_1; \alpha_0, \alpha_1 + \dfrac{1}{10}\right]$ denotamos aquel de ellos para el cual el punto a es el extremo izquierdo. En todos los casos $a \in I_1$. Dividamos el segmento I_1 a su vez en diez segmentos iguales y por $I_2 = \left[\alpha_0, \alpha_1\alpha_2; \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 + \dfrac{1}{10^2}\right]$ denotemos aquel de los segmentos obtenidos que contiene a y para el cual a no es extremo derecho. Continuando este proceso obtendremos un sistema de segmentos encajados

$$I_n = [\underline{a}_n, \overline{a}_n], \quad n = 1, 2, \ldots,$$

donde

$$\underline{a}_n = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n, \quad \overline{a}_n = \alpha_0, \quad \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \frac{1}{10^n}$$

y α_n es una de las cifras $0, 1, 2, \cdots, 9$. Cada uno de los segmentos I_n contiene a, y a no es su extremo derecho,

$$a \in I_n, \; a \neq \overline{a}_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots;$$

la longitud del segmento I_n es igual a 10^{-n} y por consiguiente tiende a cero cuando $n \to \infty$.

Las fracciones decimales finitas $\underline{a}_n$ y $\overline{a}_n$ se llaman *fracciones decimales que aproximan el número a*. Más exactamente, el número $\underline{a}_n$ es la *aproximación decimal inferior* de orden n y el número $\overline{a}_n$, la *aproximación decimal superior* del mismo orden del número a. Ellas poseen las siguientes propiedades que se deducen directamente de su definición:

$$\underline{a}_n \leqslant a < \overline{a}_n, \tag{4.29}$$

$$\underline{a}_n \leqslant \underline{a}_{n+1}, \ \overline{a}_{n+1} \leqslant \overline{a}_n, \tag{4.30}$$

$$\overline{a}_n - \underline{a}_n = 1/10^n. \tag{4.31}$$

En el caso cuando $a < 0$, entonces, suponiendo que $b = -a$, determinamos

$$\underline{a}_n = -\overline{b}_n, \quad \overline{a}_n = -\underline{b}_n$$

y las propiedades (4.29) — (4.31) evidentemente se conservan, sólo en la desigualdad (4.29) los signos $\leqslant$ y $<$ se intercambian.

La propiedad (4.30) significa que los segmentos $[\underline{a}_n, \overline{a}_n]$ forman un sistema de segmentos encajados. De la propiedad (4.31) se deduce que las longitudes de los segmentos $[\underline{a}_n, \overline{a}_n]$ tienden a cero. Finalmente, (4.29) significa que el punto a pertenece a todos estos segmentos, por lo que por la observación 2 del p. 4.5 es el límite de sus extremos $\underline{a}_n$ y $\overline{a}_n$.

Así pues, en particular, está demostrado el siguiente lema.

Lema 1. *Cualquiera que sea el número a, la sucesión $\{\underline{a}_n\}$ crece monótonamente, la sucesión $\{\overline{a}_n\}$ decrece monótonamente, y*

$$\lim_{n\to\infty} \underline{a}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = a.$$

Corolario. *Cualquier número real es el límite de una sucesión de números racionales.*

El corolario del lema se deriva de que $\underline{a}_n$ y $\overline{a}_n$ son números racionales.

Sea ahora, de nuevo, $a \geqslant 0$ y $\underline{a}_n = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$. Pongamos en correspondencia al número a la fracción decimal infinita $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$. Subrayemos que aquí α_0 es un número entero no negativo y α_n, $n = 1, 2, \ldots$, una de las cifras $0, 1, 2, \ldots, 9$. Por cuanto, el número a es el único número que pertenece a todos los segmentos I_n, $n = 1, 2, \ldots$, entonces, en la correspondencia indicada, a números diferentes les corresponden diferentes fracciones decimales, es decir, que se diferencian al menos en un α_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Observemos a continuación que en nuestra construcción no puede obtenerse una fracción con período compuesto por la única cifra 9. En efecto, supongamos que al número a le corresponde la fracción $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{n_0} 9 \ldots 9 \ldots$, donde en el caso de $n_0 \neq 0$ se cumple la desigualdad $\alpha_{n_0} \neq 9$. Entonces por la construcción,

$$a \in \left[\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{n_0} 9 \ldots 9;\ \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{n_0} + \frac{1}{10^{n_0}}\right]$$

para todos los $n \geqslant n_0$, donde n es el número de los símbolos decimales después de la coma en la fracción $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{n_0} 9 \ldots 9$. De aquí se deduce que a es el extremo derecho de todos los segmentos I_n, $n \geqslant n_0$, lo que contradice la elección de estos segmentos.

De esta forma, por la correspondencia establecida, a cada número real $a \geqslant 0$ le corresponde cierta fracción decimal infinita que no tiene período compuesto por una sola cifra 9. Tales fracciones decimales se llaman *admisibles*.

Finalmente, cada fracción decimal infinita y admisible $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ como resultado de la correspondencia descrita resulta puesta en correspondencia a cierto número a, y específicamente a aquel número único que pertenece a todos los segmentos:

$$\left[\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n; \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n + \frac{1}{10^n}\right], \quad n = 1, 2, \dots .$$

Esta correspondencia se puede extender también a los números negativos: si al número $a > 0$ le corresponde la fracción $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$, entonces al número $-a$ le ponemos en correspondencia la fracción $-\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$.

Los resultados obtenidos se pueden enunciar en forma del teorema siguiente.

Teorema 6. *Entre el conjunto de todos los números reales y el conjunto de las fracciones decimales admisibles existe una correspondencia biunívoca, y, además, si en esta correspondencia al número a le corresponde la fracción $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \dots \alpha_n \dots$, entonces*

$$\pm \lim_{n\to\infty} \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n = a.$$

La fracción decimal infinita $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ correspondiente al número a se llama su *notación decimal* y se utiliza para su designación, por lo que se escribe

$$a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$$

Si una fracción decimal infinita tiene período compuesto sólo por ceros, $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n 00 \dots 0 \dots$, y, además, $\alpha_n \neq 0$, entonces se dice que esta fracción tiene n cifras significativas después de la coma; y generalmente, el cero en el período no se escribe, es decir, el número indicado se escribe con la fracción decimal finita $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$ (precisamente, tal escritura se usó anteriormente).

OBSERVACIÓN 1. A cualquier fracción decimal infinita

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$$

(no necesariamente admisible) se le puede también poner en correspondencia de forma natural un número real único perteneciente a todos los segmentos:

$$\left[\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n; \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n + \frac{1}{10^n}\right].$$

No obstante, la correspondencia obtenida aquí ya *no será biunívoca*: puede ocurrir que a fracciones decimales diferentes les corresponda un mismo número real. Especialmente, a las fracciones del tipo

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n 99 \dots 9 \dots \quad \text{y} \quad \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots (\alpha_n + 1)\, 00 \dots 0 \dots \ (\alpha_n \neq 9)$$

les corresponde un mismo número. En la construcción descrita anteriormente de la correspondencia de los números reales y las fracciones decimales infinitas obtendríamos no sólo fracciones decimales admisibles, si hubiéramos rechazado la condición de elegir cada vez aquel segmento I_n para el cual a no es su extremo derecho.

Utilizando la escritura de los números reales, con ayuda de las fracciones decimales infinitas se puede obtener la regla para su comparación por su magnitud y las reglas de las operaciones aritméticas sobre ellas. Uno y otro se reducen a las operaciones análogas sobre sus correspondientes aproximaciones decimales y, tal vez, a un paso límite. Enunciemos estos resultados en forma de lemas.

Lema 2. *Sean a y b números reales. Entonces $a < b$ si y sólo si existe un natural n_0 tal que para todos los $n > n_0$, tiene lugar la desigualdad*

$$a_n < b_n.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $a < b$. De $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$, por la propiedad III de los límites de las sucesiones del p. 4.3, se deduce inmediatamente la existencia del número exigido n_0, es decir, tal que para todos los números $n > n_0$ se cumple la desigualdad $a_n < b_n$.

Viceversa, si existe el número señalado n_0, entonces el caso $a > b$ es imposible, por lo demostrado. Es imposible también el caso $a = b$, ya que entonces por la univocidad de la escritura de los números con ayuda de las fracciones decimales admisibles, para todos los $n = 1, 2, \ldots$, tendría lugar la igualdad $a_n = b_n$. Por lo tanto, $a < b$. □

Lema 3. *Sean a y b dos números reales, entonces*

$$\lim_{n \to \infty}(a_n + b_n) = a + b, \quad \lim_{n \to \infty}(a_n - b_n) = a - b, \quad \lim_{n \to \infty} \underline{a}_n \underline{b}_n = ab$$

y cuando $b \neq 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n} = \frac{a}{b}.\text{*)}$$

Todas las afirmaciones de este lema se deducen directamente del lema 1 y de las propiedades de los límites, relacionadas con las operaciones aritméticas sobre las sucesiones (véase el p. 4.9).

OBSERVACIÓN 2. Del lema 3 se deduce que para realizar, con un grado dado de exactitud, cualquier operación aritmética sobre números escritos en forma de fracciones decimales admisibles, es necesario tomar con suficiente exactitud las aproximaciones decimales finitas y realizar sobre ellas las operaciones correspondientes. En la suma, resta y multiplicación como resultado se obtiene de nuevo una fracción decimal finita. En el caso de la división, el cociente de dos fracciones decimales finitas será, en general, una fracción decimal infinita, y, como es conocido de la matemática elemental, periódica. No obstante, en este caso, también se puede obtener el resultado, con cualquier grado de exactitud, expresado en fracción decimal finita. Por ejemplo, si $\underline{(\underline{a}_n/\underline{b}_n)}_n$ es la aproximación decimal inferior de orden n para el cociente $\underline{a}_n/\underline{b}_n$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} \underline{\left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right)}_n = \frac{a}{b} \tag{4.32}$$

y, por consiguiente, el cociente a/b, $b \neq 0$ se puede expresar con ayuda de frac-

*) Puede ocurrir que para algunos n tengamos $\underline{b}_n = 0$ y, por consiguiente, la expresión $\underline{a}_n/\underline{b}_n$ carece de sentido. No obstante, por la condición $b \neq 0$ y la propiedad III de los límites de las sucesiones, demostrada en el p. 4.3, existe n_0 tal que $\underline{b}_n \neq 0$ para $n \geqslant n_0$. En este caso, en lugar de la sucesión $\underline{a}_n/\underline{b}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, es necesario analizar la sucesión $\underline{a}_n/\underline{b}_n$, $n = n_0$, $n_0 + 1, \ldots$.

ciones decimales finitas del tipo $\underline{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)}_n$ con cualquier exactitud.

Para la demostración de la igualdad (4.32) hagamos

$$\alpha_n = \frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n} - \frac{a}{b};$$

por el lema 3 tenemos (véase el lema en el p. 4.9) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Ahora, utilizando (4.29) y (4.31) obtenemos

$$\underline{\left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right)}_n - \frac{a}{b} = \left[\underline{\left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right)}_n - \frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right] + \left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n} - \frac{a}{b}\right) < \frac{1}{10^n} + \alpha_n.$$

Y por cuanto $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10^n} + \alpha_n\right) = 0$, entonces la igualdad (4.32) queda demostrada.

OBSERVACIÓN 3. Como resultado de los cálculos señalados anteriormente con las aproximaciones decimales inferiores de orden n, en el caso de la suma $\underline{a}_n + \underline{b}_n$, de la resta $\underline{a}_n - \underline{b}_n$ y de la división $\underline{(\underline{a}_n/\underline{b}_n)}_n$, de nuevo obtendremos fracciones decimales finitas con no más de n cifras significativas después de la coma. En la multiplicación $\underline{a}_n\underline{b}_n$, se obtendrá, en general, una fracción decimal con $2n$ cifras significativas después de la coma. Si $\underline{(\underline{a}_n\underline{b}_n)}_n$ es la aproximación decimal inferior del producto $\underline{a}_n\underline{b}_n$, entonces análogamente a (4.32) se demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} \underline{(\underline{a}_n\underline{b}_n)}_n = ab.$$

De esta forma, en los cálculos aproximados de las sumas $a + b$, de las diferencias $a - b$, de los productos ab y de los cocientes a/b, $b \neq 0$, respectivamente por las fórmulas

$$\underline{a}_n + \underline{b}_n, \quad \underline{a}_n - \underline{b}_n, \quad \underline{(\underline{a}_n\underline{b}_n)}_n \quad \text{y} \quad \underline{(\underline{a}_n/\underline{b}_n)}_n,$$

como resultado de las operaciones indicadas sobre las fracciones decimales finitas $\underline{a}_n$ y $\underline{b}_n$ que tienen no más de n cifras significativas después de la coma, se obtienen de nuevo fracciones decimales con no más de n cifras significativas después de la coma y, además, el resultado puede ser obtenido con cualquier grado de exactitud dado. Precisamente de esta forma se realizan comúnmente las operaciones con números en la práctica.

OBSERVACIÓN 4. Señalemos que en la construcción del método de notación de los números reales con sucesiones de cifras, como base fue tomado el número 10 (los segmentos se dividieron consecutivamente en diez partes iguales). En lugar del número 10 se puede tomar cualquier número natural n. En la utilización de máquinas computadoras de acción rápida a menudo se usa el tal llamado sistema binario de notación de los números, correspondiente al caso $n = 2$. En la escritura de un número en el sistema binario participan sólo dos cifras, 0 y 1. Por ejemplo, el número 14,625 en el sistema binario tendrá la forma 1110,101, ya que

$$14{,}625 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3}$$

y las cifras en el sistema binario de escritura de un número son los coeficientes correspondientes a su descomposición según las potencias del dos.

OBSERVACIÓN 5. En la exposición de la teoría de los números reales se puede ir también en orden contrario: definir a los números reales como fracciones decimales infinitas y admisibles y utilizando esta escritura introducir en ellos de la forma correspondiente la relación de orden y las operaciones aritméticas.

Existen otras construcciones de los números reales, que parten de otros objetos concretos, no obstante, todas ellas nos llevan a conjuntos de elementos que satisfacen las propiedades I — V del p. 2.1. Recordemos (véase el p. 2.4*) que la presencia de las propiedades I — V definen unívocamente el conjunto de elementos que poseen estas propiedades. Unívocamente en el sentido de que dos conjuntos cualesquiera, para cuyos elementos se cumplen las condiciones I — V, son isomorfos con respecto a las operaciones de suma y multiplicación y a la propiedad de ordenamiento. Aquí nos encontramos con un rasgo característico de los métodos matemáticos de investigación, para los cuales es absolutamente indiferente la naturaleza de los elementos, y sólo son importantes las "relaciones cuantitativas" entre ellos, las cuales en el caso dado se expresan con las propiedades I — V.

4.11* NUMERABILIDAD DE LOS NÚMEROS RACIONALES. INNUMERABILIDAD DE LOS NÚMEROS REALES

Surge una pregunta natural: ¿si todos los conjuntos infinitos contienen un número igual de elementos o hay diferentes infinitos? Ante todo, resulta que no se entiende qué significa, en general, el término "igual número de elementos" para los conjuntos infinitos. La comparación de conjuntos infinitos por la cantidad de elementos contenidos en ellos o, como se acostumbra decir, por su potencia, es cómodo realizarla con ayuda del concepto de correspondencia biunívoca entre los elementos de los conjuntos (véase el p. 1.2*).

Definición 17. *Dos conjuntos se llaman equipotentes, si entre sus elementos se puede establecer una correspondencia biunívoca.*

Desde este punto de vista los números naturales $1, 2, \ldots, n, \ldots$ forman un conjunto equipotente al conjunto de los números pares $2, 4, \ldots, 2n, \ldots$ aunque a primera vista parece que los últimos son dos veces menores. La correspondencia biunívoca exigida se obtiene si al número natural n se le pone en correspondencia el número $2n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Los números pares forman una parte del conjunto de los números naturales, no obstante, estos conjuntos son equipotentes, por consiguiente, en el caso de conjuntos infinitos, ¡una parte puede igualarse en nuestro sentido al todo!

Definición 18. *Un conjunto equipotente al conjunto de todos los números naturales se llama numerable.*

De esta forma, si X es numerable, entonces entre el conjunto X y el conjunto de los números naturales se puede establecer una correspondencia biunívoca o, como se dice, se pueden numerar los elementos del conjunto X, entendiendo por número de cada elemento $x \in X$ el número natural que le corresponde en la correspondencia indicada.

Los conjuntos numerables en el sentido definido son los conjuntos infinitos más simples. Precisamente es válido el siguiente lema.

Lema 1. *Cualquier conjunto infinito contiene un subconjunto numerable.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, sea X un conjunto infinito. Tomemos cualquiera de sus elementos y denotémoslo por x_1. Ya que X es un conjunto infinito, en él, a ciencia cierta, se tiene al menos un elemento diferente de x_1. Elijamos cualquiera de estos elementos y denotémoslo por x_2.

Supongamos que en el conjunto X ya se escogieron los elementos $x_1, \ldots, x_n$. Por cuanto X es un conjunto infinito, entonces en él, a ciencia cierta, hay otros elementos más; escojamos cualquiera de los elementos restantes y denotémoslo por x_{n+1}, etc. Como resultado obtuvimos los elementos $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, que forman un subconjunto numerable del conjunto X. $\square$

Lema 2. *Cualquier subconjunto infinito de un conjunto numerable es numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un conjunto numerable, sus elementos pueden ser numerados: $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Sea Y un subconjunto infinito del conjunto X. Denotemos por b_1 el elemento del conjunto Y que se encuentra primeramente en la serie $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$, es decir, aquel de los elementos $a_n \in X$ que pertenece al conjunto Y y tiene el número mínimo $n_0 : b_1 = a_{n_0}$. Por b_2 denotemos aquel de los elementos a_n que pertenece al conjunto Y y tiene el número menor entre los números $n > n_0$, etc. Cada elemento del conjunto Y se encuentra en la serie $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n, \ldots$, por lo que después de un número finito de pasos, será denotado por b_m, y por cuanto el conjunto Y es infinito, entonces el índice m toma cualquier valor $1, 2, 3, \ldots$. De esta forma, todos los elementos del conjunto Y resultaron numerados con los números naturales $m = 1, 2, \ldots$. Esto significa que el conjunto Y es un conjunto numerable. $\square$

El siguiente teorema da un ejemplo interesante de conjunto numerable.

Teorema 7. *El conjunto de todos los números racionales es un conjunto numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Coloquemos los números racionales en una tabla de la siguiente forma. En la primera fila pongamos todos los números enteros en orden creciente por su valor absoluto y de forma tal que después de cada número natural esté colocado el opuesto a él:

$$0, 1, -1, 2, -2, \ldots, n, -n, \ldots, n \in N.$$

En la segunda fila coloquemos todas las fracciones racionales irreducibles con denominador 2, ordenadas por su valor absoluto y de nuevo, después de cada número positivo ponemos el opuesto a él:

$$1/2, -1/2, 3/2, -3/2, 5/2, -5/2, \ldots .$$

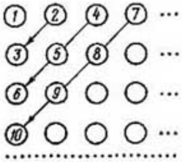
En general, en la n-ésima fila coloquemos todas las fracciones racionales irreducibles con denominador n, ordenadas por su valor absoluto de forma tal que después de cada número positivo va el opuesto.

Como resultado obtendremos una tabla con un número infinito de filas y columnas:

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \dots \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \dots \\
\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Es evidente que cada número racional cae en algún lugar en esta tabla.

Numeremos ahora los elementos de la tabla obtenida, de acuerdo al siguiente esquema (en los círculos están los números de los elementos correspondientes, la flecha indica el sentido de la numeración):



Como resultado, todos los números racionales resultan numerados, es decir, el conjunto Q de los números racionales es numerable. □

Naturalmente, surge la pregunta: ¿existen conjuntos infinitos que no sean numerables? Resulta que sí, existen y se llaman, naturalmente, *conjuntos innumerables*. Un ejemplo importante de conjunto innumerable se establece con el teorema que sigue.

Teorema 8 (de Cantor). *El conjunto de todos los números reales es innumerable.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos lo contrario, que logramos numerar todos los números reales: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$; escribámoslos con ayuda de fracciones decimales admisibles:

$$\begin{array}{l}
x_1 = \alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)} \ \dots \ \alpha_m^{(1)} \dots \\
x_2 = \alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(2)} \ \dots \ \alpha_m^{(2)} \dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_n = \alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)}\alpha_1^{(n)} \ \dots \ \alpha_m^{(n)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array} \tag{4.33}$$

FIG. 14

FIG. 15

Aquí $\alpha_m^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots$, denota una de las cifras 0, 1, 2, ..., 9 y $\alpha_0^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, un número entero con uno u otro signo.

Escojamos la cifra α_n, $n = 1, 2, \dots$, de forma tal que $\alpha_n \neq \alpha_n^{(n)}$ y $\alpha_n \neq 9$. Entonces, la fracción $0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ es admisible, pero el número $a = 0, \alpha_1\alpha_2 \dots \dots \alpha_n \dots$, a ciencia cierta, no está entre los números x_n, $n = 1, 2, \dots$, ya que la fracción decimal $0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$, al menos en un signo decimal se diferencia de cada una de las fracciones decimales (4.33). La contradicción obtenida demuestra el teorema. □

Corolario 1. *El conjunto de los números reales que forman cualquier intervalo es innumerable.*

DEMOSTRACIÓN. Demostremos que más aún, el conjunto de los números reales de cualquier intervalo es equipotente al conjunto de todos los números reales.

En realidad, ante todo, cualquier intervalo es equipotente al intervalo $(-1, +1)$. Una correspondencia biunívoca entre el intervalo (a, b) y $(-1, +1)$ se puede establecer, por ejemplo, con ayuda de la representación lineal $x = \dfrac{2t - a - b}{b - a}$. Si $a < t < b$, entonces $-1 < x < +1$. El intervalo $(-1, +1)$ biunívocamente con ayuda de la aplicación

$$f(x) = \frac{x}{1 - |x|}, \quad -1 < x < 1,$$

se aplica sobre todo el eje real (compruébese esto). De esta forma, resulta que el intervalo (a, b) es equipotente a todo el eje real y, por consiguiente, es un conjunto innumerable. □

Una correspondencia biunívoca entre un intervalo y toda la recta es fácil de realizar visualmente con el método geométrico: inicialmente, proyectamos una semicircunferencia abierta, es decir, una semicircunferencia sin sus puntos extremos con ayuda de una proyección paralela sobre el intervalo (fig. 14) y, por tanto, establecemos una correspondencia biunívoca entre sus puntos. Luego, con ayuda de una proyección central desde el centro de la semicircunferencia, la proyectamos sobre la recta (fig. 15). Esta proyección también establece una correspondencia biunívoca, pero esta vez, entre la semicircunferencia indicada y toda la recta.

Corolario 2. *En cualquier intervalo se tienen números irracionales.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, si en cierto intervalo no hubiera números irracionales, entonces esto significaría que todos los puntos de este intervalo son números racionales, es decir, son un subconjunto del conjunto numerable de los números racionales y por tanto conforman un conjunto finito, o numerable (véase el lema 2) lo cual contradice el corolario 1. □

OBSERVACIÓN. En el punto 4.10 se demostró que un número real es el límite de una sucesión de números racionales (por ejemplo, de sus aproximaciones decimales superiores). De aquí inmediatamente se deduce que cualquier intervalo contiene una cantidad infinita de números racionales. En realidad, supongamos que está dado el intervalo (a, b). Escojamos cualquier número $\xi \in (a, b)$, por ejemplo, $\xi = \frac{a+b}{2}$. Entonces, si $\overline{\xi}_n$, $n = 1, 2, \dots$, son las aproximaciones decimales superiores para ξ, pues $\overline{\xi}_n \neq \xi$ y $\lim\limits_{n \to \infty} \overline{\xi}_n = \xi$. Por cuanto el intervalo (a, b) es un entorno del punto escogido ξ, entonces, por la definición de límite de una sucesión, casi todos los números racionales $\overline{\xi}_n$ se contendrán en el intervalo (a, b). Dicho de otro modo, se encuentra un número n_0 tal que para todos los números $n \geqslant n_0$ se cumplirá la desigualdad $a < \overline{\xi}_n < b$, es decir, $\overline{\xi}_n$, $n = n_0, n_0 + 1, \dots$, son los números racionales buscados.

De esta forma, en cualquier intervalo del eje numérico se contienen tanto números racionales, como irracionales. Esta propiedad se expresa brevemente diciendo que "los números racionales e irracionales forman subconjuntos siempre densos del conjunto de los números reales".

Ejercicio 17. *Demuéstrese que los conjuntos de los puntos de un intervalo, segmento e intervalo semiabierto son equipotentes.*

4.12* LÍMITES SUPERIOR E INFERIOR DE LAS SUCESIONES

En el p. 4.6 fue demostrado que cualquier sucesión numérica siempre tiene al menos un límite parcial finito o infinito. El mayor y menor de ellos (más adelante será mostrado que siempre existen) juegan un papel singular en la teoría de sucesiones. Aquí los conceptos de "mayor" y "menor" se interpretan en el sentido del conjunto extentido de los números reales $\overline{R}$ (véase el p. 3.1), es decir, en particular, el mayor elemento (menor) del conjunto $X \subset \overline{R}$ puede resultar $+\infty$ (respectivamente, $-\infty$). Esto tendrá lugar cuando $+\infty \in X$ $(-\infty \in X)$. En nuestro caso, esto significa que el infinito del signo correspondiente es un límite parcial de la sucesión analizada.

No todo conjunto en la recta numérica extendida tiene elemento máximo (mínimo). Sin embargo, si este conjunto es el conjunto de los límites parciales de cierta sucesión, entonces en él existe siempre un elemento máximo y un elemento mínimo.

Definición 19. *El mayor límite parcial de la sucesión* $\{x_n\}$ *se llama límite superior y se denota por* $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, x_n$ *y el menor límite parcial se llama límite inferior y se denota por* $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, x_n$.

Teorema 9. *Cualquier sucesión* $\{x_n\}$ *tiene límite parcial tanto superior como inferior.*

DEMOSTRACIÓN. Demostremos la existencia del límite parcial superior. Para la sucesión $\{x_n\}$ dada son posibles dos casos: está acotada superiormente o bien no lo está. Si no está acotada superiormente, entonces $+\infty$ es un límite parcial y evidentemente el mayor, es decir, $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, x_n = +\infty$.

Si la sucesión $\{x_n\}$ está acotada superiormente, entonces de nuevo, son posibles dos casos: el conjunto de sus límites finitos que denotaremos por A no es vacío o bien es vacío. Analicemos inicialmente el primer caso. De la acotación superior de la sucesión $\{x_n\}$ dada se deduce la acotación superior del conjunto no vacío A de sus límites parciales finitos. Por esto, el conjunto A tiene una cota superior finita. Mostremos que $b = \sup A$ es un límite parcial, es decir, que $b \in A$. En efecto, si $b \notin A$, entonces existiría $\varepsilon > 0$ tal que en el intervalo $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ se contendría sólo un número finito de términos de la sucesión $\{x_n\}$ (en particular, ninguno) y por lo tanto, (¿por qué?) en este intervalo no habría ni un elemento de A, lo cual contradice la condición $b = \sup A$.

De esta forma $b \in A$ y, por consiguiente, es el mayor elemento del conjunto A, por lo que $b = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

En el otro caso, es decir, cuando la sucesión $\{x_n\}$ está acotada superiormente y el conjunto de sus límites parciales finitos A es vacío, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ (demuéstrese esto), es decir, en este caso el conjunto de sus límites parciales está compuesto por un elemento $-\infty$ que a su vez es el mayor en este conjunto, es decir, aquí

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\infty.$$

De forma análoga, para cualquier sucesión se demuestra la existencia del límite parcial menor (finito o infinito). □

Ejercicio 18. Sea $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$. Hállese $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$.

Teorema 10. *Para que el número a sea el límite superior de la sucesión $\{x_n\}$ es necesario y suficiente que para cualquier número $\varepsilon > 0$ se cumplan las dos condiciones siguientes.*

1. *Existe un número n_ε tal para todos los números $n \geqslant n_\varepsilon$ es válida la desigualdad $x_n < a + \varepsilon$.*

2. *Para cualquier número n_0 existe un número n' (que depende de ε y de n_0) tal que $n' > n_0$ y $x_{n'} > a - \varepsilon$.*

La condición 1 significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ fijo, en la sucesión $\{x_n\}$ existe sólo un número finito de términos x_n tales que $x_n \geqslant a + \varepsilon$ (su número es menor que n_ε).

La condición 2 significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ fijo, en la sucesión $\{x_n\}$ existe un número infinito de términos x_n tales que $x_n > a + \varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sea $a = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ y supongamos que $\varepsilon > 0$ está dado. Si en el intervalo semiabierto $[a + \varepsilon, +\infty]$ hubiera una cantidad infinita de elementos de la sucesión $\{x_n\}$, entonces se encontraría una subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$ cuyos elementos pertenecen a este intervalo semiabierto y que tiene límite infinito o finito. Denotémoslo por b. Es evidente que $b \geqslant a + \varepsilon > a$, lo que contradice que a es el límite parcial mayor de la sucesión $\{x_n\}$. La propiedad 1 queda demostrada.

Más adelante, por cuanto el límite superior es también un límite parcial, entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Casi todos los términos de la sucesión $\{x_{n_k}\}$ son mayores que $a - \varepsilon$ y por consiguiente existe una cantidad infinita de términos de la sucesión $\{x_n\}$ dada, mayores que $a - \varepsilon$. La condición 2 también queda demostrada.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Supongamos que el número a satisface las condiciones 1 y 2. Mostremos que entonces a es un límite parcial. Tomemos $\varepsilon = 1/k$, $k = 1, 2, \ldots$. Para cada natural k existe un número n_k tal que $x_{n_k} > a - 1/k$ (por la condición 2) y $x_{n_k} < a + 1/k$ (por la condición 1). Por cuanto, para cualquier k el conjunto de los elementos x_n de la sucesión dada, para los cuales se cumple la desigualdad $a - \frac{1}{k} < x_n < a + \frac{1}{k}$, es infinito, entonces, los números n_k se puede escoger sucesivamente ($k = 1, 2, \ldots$) de forma tal que $n_{k_1} < n_{k_2}$ cuando $k_1 < k_2$. Como resultado obtendremos la subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de la sucesión $\{x_n\}$ dada. De la desigualdad $|a - x_{n_k}| < \frac{1}{k}$ se deduce que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, es decir, que a es un límite parcial de la sucesión $\{x_n\}$.

Mostremos ahora que el número a es el límite parcial mayor. En efecto, si se encontrara un límite parcial b de la sucesión $\{x_n\}$ tal que $b > a$, entonces, tomando $\varepsilon > 0$ de forma tal que $a + \varepsilon < b$, obtendríamos que sobre el intervalo $(a + \varepsilon, +\infty)$ se encontrará un número infinito de términos de la sucesión $\{x_n\}$ (y precisamente, casi todos los términos de la subsucesión convergente a b). Esto contradice la condición 1. □

Ejercicios. 19. Demuéstrese que para que una sucesión tenga límite (finito o infinito, igual a uno de los símbolos $+\infty$ o $-\infty$), es necesario y suficiente que $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$.

20. Demuéstrese que $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n$.

21. Demuéstrese que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \inf_n \left\{\sup_{m\geqslant n} x_m\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{m\geqslant n} x_m\right\},$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \sup_n \left\{\inf_{m\geqslant n} x_m\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\inf_{m\geqslant n} x_m\right\}.$$

§ 5. LÍMITE Y CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES

5.1. FUNCIONES REALES

En el estudio de unos u otros procesos del mundo real (físicos, químicos, biológicos, económicos y otros) constantemente nos encontramos con unas u otras magnitudes que los caracterizan y que cambian en el transcurso de los procesos analizados. A menudo ocurre que la variación de una magnitud va acompañada por la variación de otra o incluso, aún más, la variación de una magnitud es causa de la variación de otra. Las variaciones relacionadas entre sí de las características numéricas de las magnitudes analizadas nos llevan a su dependencia funcional en los modelos matemáticos correspondientes. Por esto, el concepto de función es uno de los conceptos más importantes en la matemática y sus aplicaciones.

En nuestro curso de análisis matemático, inicialmente serán estudiadas sólo las funciones reales de un argumento real, es decir, las funciones $f: X \to \boldsymbol{R}$, donde $X \subset \boldsymbol{R}$ y $x \neq \varnothing$. Las variables independientes y dependientes se llaman en este caso, *variables reales*. Luego aparecen las funciones de varias variables, es decir, las funciones definidas sobre cierto conjunto de elementos, cada uno de los cuales es un conjunto ordenado de números. Se estudiarán también las funciones que toman valores complejos, las funciones cuyos argumentos son números complejos y otras funciones de naturaleza más general.

Sobre las funciones que toman valores numéricos (tales funciones se llaman *funciones numéricas*) se pueden realizar diferentes operaciones aritméticas. Si están dadas dos funciones numéricas f y g definidas sobre un mismo conjunto X y c es un número (o, como se dice a menudo, una constante), entonces la función cf se define como la función que toma en cada punto $x \in X$ el valor $cf(x)$; la función $f + g$ como la función que toma en cada punto $x \in X$ el valor $f(x) + g(x)$; fg como la función que toma en cada punto $x \in X$ el valor $f(x)g(x)$; y finalmente f/g como la función que en cada punto $x \in X$ es igual a $f(x)/g(x)$ (lo cual, naturalmente, tiene sentido sólo para $g(x) \neq 0$).

La función numérica f definida sobre el conjunto X se llama *acotada superiormente* (*acotada inferiormente*) si el conjunto de sus valores está acotado superiormente (inferiormente). Dicho de otro modo, la función f está acotada superiormente (inferiormente) si existe una constante M tal que para cada $x \in X$ se cumple la desigualdad $f(x) \leqslant M$ (respectivamente $f(x) \geqslant M$).

La función f acotada sobre el conjunto X tanto superior como inferiormente se llama simplemente *acotada* sobre este conjunto. Evidentemente esta función está acotada sobre el conjunto X si y sólo si existe un número $M > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant$ $\leqslant M$ para cada $x \in X$.

La cota superior (inferior) del conjunto de los valores Y_f de la función numérica $y = f(x)$ definida sobre el conjunto X se llama *cota superior* (*inferior*) de la función f y se denota por

$$\sup f,\ \sup_X f,\ \sup_{x \in X} f(x)\ \left(\inf f,\ \inf_X f,\ \inf_{x \in X} f(x)\right).$$

Más detalladamente, esto significa que, por ejemplo, $\lambda = \sup f$, si, en primer lugar, para cada $x \in X$ se cumple la desigualdad $f(x) \leqslant \lambda$ y, en segundo lugar, para cada $\lambda' < \lambda$ existe $x_{\lambda'} \in X$ tal que $f(x_{\lambda'}) > \lambda'$. El índice λ' del elemento del conjunto X muestra que éste depende de la elección del número λ'

En la definición dada la cota superior (inferior) de una función puede ser tanto finita como infinita.

Por los resultados del p. 3.4 la función f está acotada superiormente (inferiormente) sobre el conjunto X si y sólo si tiene sobre este conjunto cota superior (inferior) finita.

Ejercicios. 1. Demuéstrese que si la función f no está acotada superiormente (respectivamente inferiormente) sobre el segmento $[a, b]$, entonces existe una sucesión de puntos $x_n \in$ $\in [a, b]$, $n = 1, 2, \ldots$, tal que $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = +\infty$ (respectivamente, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = -\infty$).

2. Demuéstrese que si la función no está acotada sobre un segmento, entonces existe un punto de este segmento, en cada entorno del cual la función no está acotada. ¿Es válida esta afirmación para un intervalo?

3. Constrúyase un ejemplo de función definida sobre un segmento y no acotada sobre él.

Diremos que la función numérica f definida sobre el conjunto X toma en el punto $x_0 \in X$ el *valor máximo* (respectivamente, *mínimo*) si $f(x) \leqslant f(x_0)$ (respectivamente, $f(x) \geqslant f(x_0)$) para cada punto $x \in X$. En este caso, escribiremos $f(x_0) = \max\limits_X f$ o $f(x_0) = \max f$ (respectivamente, $f(x_0) = \min\limits_X f$ ó $f(x_0) = \min f$).

Los valores máximos y mínimos se llaman *extremales*.

Es evidente, que si la función f toma en el punto x_0 el valor máximo (mínimo), entonces $f(x_0) = \sup f$ (respectivamente, $f(x_0) = \inf f$).

Señalemos, además, que si están dados los conjuntos X, Y y la aplicación f que pone en correspondencia a cada elemento del conjunto X un único elemento del conjunto Y, entonces con esto la función f definida sobre el conjunto X y con el conjunto de valores contenido en el conjunto Y está definida totalmente. En particular, es indiferente con qué letra se denota el argumento y con la cuál el valor de la función. Así, en la aplicación dada f, las escrituras $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ y $v = f(u)$, $u \in X$, $v \in Y$ denotan lo mismo. Por ejemplo, $y = \log_a x$, $x > 0$, y $x = \log_a y$, $y > 0$, denotan una misma función.

Hagamos para concluir una observación sobre la terminología. En el caso del entorno de un punto, junto con la expresión "función definida sobre un entorno" se utiliza "función definida en un entorno". En expresiones semejantes, utilizadas usualmente para conjuntos abiertos, las preposiciones "en" y "sobre" tienen un mismo sentido.

5.2. FORMAS DE REPRESENTAR FUNCIONES

En este capítulo se estudian sólo las funciones reales de una variable real, es decir, las funciones f tales que $f\colon X \to \boldsymbol{R}$, $X \subset \boldsymbol{R}$, $X \neq \varnothing$. Por esto nos detendremos aquí sólo en las formas de representar tales funciones.

Ante todo las funciones se pueden representar (definir) con ayuda de fórmulas: *método analítico*. Para esto se utiliza cierta reserva de funciones estudiadas y especialmente denotadas, operaciones algebraicas y pasos límites. Por ejemplo, $y = ax + b$, $y = ax^2$, $y = \operatorname{sen} x$, $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 1 + \sqrt{\log \cos 2\pi x}$.

Siempre por función representada por cierta fórmula se entiende la función definida sobre el conjunto de todos aquellos números reales para los cuales, en primer lugar, la fórmula indicada tiene sentido y, en segundo lugar, en el proceso de la realización de todos los cálculos necesarios a base de esta fórmula se obtienen sólo números reales y, además, el resultado final de los cálculos para el número dado x del dominio de la función analizada (conjunto de definición) es su *valor* en el punto x. Así, el campo de existencia de la función $f(x) = \dfrac{x + |x|}{\sqrt{1 - x^2}}$ es el intervalo $(-1, 1)$, aunque esta función toma valores reales en la semirrecta $x < 1$ con el "punto excluido" $x = -1$.

Señalemos que en esta definición las funciones reales $f(x) = x$ y $f(x) = (\sqrt{x})^2$ tienen diferentes dominios: la primera está definida sobre el conjunto de todos los números reales y la segunda, sólo sobre el conjunto de todos los no negativos.

A veces la función se da con ayuda de varias fórmulas, por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{para} \quad x > 0, \\ 0 & \text{para} \quad x = 0, \\ x - 1 & \text{para} \quad x < 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Una función puede darse también simplemente con ayuda de la descripción de la correspondencia. Pongamos en correspondencia a cada número $x > 0$ el número 1, al número 0, el número 0 y a cada $x < 0$, el número -1. Como resultado obtendremos una función definida sobre todo el eje real y que toma tres valores: 1, 0 y -1. Esta función tiene una notación especial $\operatorname{sign} x$ *) y, naturalmente, puede ser escrita con ayuda de varias fórmulas:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad x > 0, \\ 0 & \text{para} \quad x = 0, \\ -1 & \text{para} \quad x < 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Otro ejemplo: a cada número racional pongámosle en correspondencia el número 1 y a cada irracional, el cero. La función obtenida se llama *función de Dirichlet* **).

Señalemos que cualquier fórmula es una escritura simbólica de cierta correspondencia descrita anteriormente en algún lugar, así que al fin y al cabo no hay diferencia principal entre la representación de una función con ayuda de una fórmula o con ayuda de la descripción de la correspondencia; esta diferencia es simplemente externa.

Es necesario también tener en cuenta que cualquier función definida por primera vez, si para ella se introduce una notación especial, puede servir para la definición de otras funciones con ayuda de fórmulas que incluyan este nuevo símbolo.

Si se habla de funciones reales de un argumento real, entonces para la presentación evidente del carácter de la dependencia funcional, a menudo se construyen las gráficas de las funciones.

Se llama gráfica de la función $y = f(x)$ (*x e y son números*) *el conjunto de puntos sobre el plano con coordenadas* $(x, f(x))$, $x \in X$ (*X, como siempre, es el campo de definición de la función*).

Así, la gráfica de la función (5.1) tiene la forma representada en la fig. 16, la gráfica de la función $\operatorname{sign} x$ (véase (5.2)), en la fig. 17, y la gráfica de la función $y = 1 + \sqrt{\log \cos 2\pi x}$ está compuesta por puntos sueltos (fig. 18).

El conjunto de puntos $\{(x, y): x \in X, y \geqslant f(x)\}$ se llama *supergráfica* de la función f dada y el conjunto $\{(x, y): x \in X, y \leqslant f(x)\}$ *su subgráfica*.

*) *Signum* en latín significa "signo".

**) L. Dirichlet (1805 — 1859), matemático alemán.

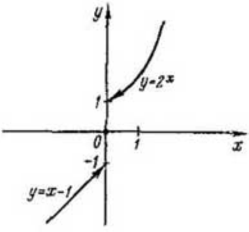


FIG. 16

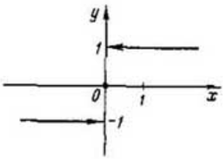


FIG. 17

La representación gráfica de una función también puede servir para la definición de la dependencia funcional. Claro, esta definición será aproximada, porque la medición de los segmentos prácticamente puede realizarse sólo con determinado grado de exactitud. Como ejemplos de definición gráfica de funciones que se encuentran en la práctica, pueden servir, por ejemplo, las indicaciones de un oscilógrafo.

Una función se puede representar además *con ayuda de tablas*, es decir, para algunos valores de la variable x indicar los valores respectivos de la variable y. Los datos de las tablas pueden ser obtenidos tanto directamente de un experimento como con ayuda de unos u otros cálculos matemáticos. Ejemplos de tal definición de las funciones son las tablas logarítmicas y las tablas de las funciones trigonométricas.

Por último, en la realización de cálculos numéricos en computadoras, las funciones se dan *con ayuda de programas*, para su cálculo con los valores necesarios del argumento, o los valores exigidos de la función, en forma preparada, se introducen de uno u otro modo en la memoria de la computadora.

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones:

4. $y = 2x + 1$.
5. $y = ax + b$.
6. $y = a/x$.
7. $y = 2x^2$.
8. $y = ax^2 + bx + c$.
9. $y = 2^x$.
10. $y = (1/2)^x$.
11. $y = \log x$.
12. $y = \log_{1/2} x$.

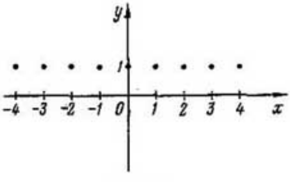


FIG. 18

13. $y = \operatorname{sen} 2x$.
14. $y = 2\cos(3x + 2) + 1$
15. $y = \operatorname{tg} 3x$.
16. $y = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x$
17. $y = \operatorname{arcsen} x$.
18. $y = 3\arccos\frac{x}{2} + 1$.
19. $y = \operatorname{arctg} x$.
20. $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$.
21. $y = \frac{x^2(x - 1)^2}{x + 1}$.

Analicemos más detalladamente algunos métodos analíticos especiales de definición de una función.

FUNCIONES IMPLÍCITAS. Supongamos que está dada una ecuación del tipo

$$F(x, y) = 0, \tag{5.3}$$

es decir, está dada la función $F(x, y)$ de dos variables reales x e y y se analizan sólo aquellos pares x, y (si existen) para los cuales se cumple la condición (5.3).

Supongamos que existe el conjunto X tal que para cada $x_0 \in X$ existe al menos un número y que satisface la ecuación $F(x_0, y) = 0$. Denotemos uno de estos y por y_0 y pongámosle en correspondencia al número $x_0 \in X$. Como resultado obtendremos la función f definida sobre el conjunto X y tal que $F(x_0, f(x_0)) = 0$ para todos los $x_0 \in X$. En este caso se dice que la función f se da implícitamente por la ecuación (5.3). La misma ecuación (5.3) define, en general, no una, sino cierto conjunto de funciones.

Las funciones definidas implícitamente por ecuaciones del tipo (5.3) se llaman *funciones implícitas* a diferencia de las funciones definidas por una fórmula resoluble con respecto a la variable y, es decir, por una fórmula del tipo $y = f(x)$.

El término "función implícita" refleja no el carácter de la dependencia funcional, sino sólo el método de su representación. Una misma función se puede dar tanto explícita como implícitamente. Por ejemplo, las funciones $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ y $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ pueden ser definidas también de forma implícita con ayuda de la ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$, en el sentido de que entran en el conjunto de las funciones definidas por esta ecuación.

FUNCIONES COMPUESTAS. Recordemos que si están definidas las funciones $y = f(x)$ y $z = F(y)$ y, además, el dominio de la función F contiene el campo de valores de la función f, entonces a cada x del dominio de la función f, de forma natural, le corresponde un z tal que $z = F(y)$, donde $y = f(x)$. Esta función definida por la correspondencia $z = F[f(x)]$ se llama, como es conocido, *función compuesta* o *composición* (*superposición*) de las funciones f y F y se denota por $F \circ f$, es decir,

$$(F \circ f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} F(f(x)).$$

Una función compuesta refleja no el carácter de la dependencia funcional, sino sólo el método de su representación: puede ocurrir que una misma función puede ser representada tanto con ayuda de composiciones de algunas funciones como sin su ayuda. Por ejemplo, la función compuesta $z = 2^y$, $y = \log_2(1 + \operatorname{sen}^2 x)$ definida con ayuda de las superposiciones de las funciones logarítmica y exponencial puede ser representada sin esta composición $z = 1 + \operatorname{sen}^2 x$.

De forma similar, se pueden analizar las funciones compuestas que son la composición de más de dos funciones, por ejemplo, la función $w =$

$= \text{sen} \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ se puede analizar como la composición de las siguientes funciones: $w = \text{sen}\, v$, $v = \log u$, $u = 1 + z$, $z = 1/y$, $y = \sqrt{x}$.

5.3. FUNCIONES ELEMENTALES Y SU CLASIFICACIÓN

Las funciones: constante $y = c$, c es una constante, potencial $y = x^\alpha$, exponencial $y = a^x$ $(a > 0)$, logarítmica $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, trigonométricas $y = \text{sen}\, x$, $y = \cos x$, $y = \text{tg}\, x$, $y = \text{ctg}\, x$, y trigonométricas inversas $y = \text{arcsen}\, x$, $y = \arccos x$, $y = \text{arctg}\, x$ e $y = \text{arcctg}\, x$ se llaman *principales funciones elementales.*

Cualquier función que pueda ser dada en forma explícita con ayuda de una fórmula que contiene sólo un número finito de operaciones aritméticas y de composiciones de las principales funciones elementales se llama simplemente función elemental.

Por campo de existencia de una función elemental en correspondencia con el acuerdo general sobre las funciones dadas por fórmulas (véase el p. 5.2), comúnmente se entiende el conjunto de todos los números reales x para los cuales, en primer lugar, la fórmula que define la función elemental analizada tiene sentido y, en segundo lugar, en el proceso de realización de todos los cálculos necesarios por esta fórmula se obtienen sólo números reales.

Las funciones analizadas anteriormente representadas por las fórmulas $y = ax + b$, $y = ax^2$, $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 1 + \sqrt{\log \cos 2\pi x}$, $y = \text{sen} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $y = \frac{x + |x|}{\sqrt{1 - x^2}}$ (observemos que $|x| = \sqrt{x^2}$ es una función elemental) son funciones elementales.

Las funciones elementales comúnmente se dividen en las siguientes clases.

1. POLINOMIOS. A los polinomios pertenecen las funciones que pueden ser definidas por fórmulas del tipo

$$y = P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Si $a_n \neq 0$, entonces el número n se llama grado del polinomio dado. Los polinomios de primer grado también se llaman funciones lineales.

2. FUNCIONES RACIONALES (FRACCIONES RACIONALES). A esta clase de funciones pertenecen las funciones que pueden ser definidas de la forma

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Notemos que la clase de los polinomios está contenida en la clase de las funciones racionales.

3. FUNCIONES IRRACIONALES. Se llama función irracional la función que no es racional, la que puede ser representada con ayuda de composiciones de un número fi-

nito de funciones racionales, funciones potenciales con exponentes racionales y las cuatro operaciones aritméticas. Por ejemplo, la función

$$y = \sqrt[5]{(x - 1)/(x^2 + \sqrt{x})}$$

es una función irracional.

4. FUNCIONES TRASCENDENTES. Las funciones elementales que no son racionales ni irracionales se llaman funciones elementales trascendentes. Se puede mostrar que todas las funciones trigonométricas directas e inversas y también la exponencial y logarítmica son funciones trascendentes.

Por cuanto en nuestro curso de análisis se estudian principalmente las funciones reales de uno o varios argumentos reales, en lugar de "función real" diremos y escribiremos simplemente "función" En aquellos casos cuando se analicen funciones de otra naturaleza, esto se acordará especialmente o bien quedará claro del contexto.

5.4. PRIMERA DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Pasemos ahora al estudio de uno de los conceptos más fundamentales del análisis matemático, el concepto de límite de una función. Como "puntos" vamos a entender puntos finitos o infinitamente alejados, es decir, o bien números reales, o bien uno de los infinitos ∞, $+\infty$ o $-\infty$. Daremos primeramente la definición de límite de la función $f: X \to \boldsymbol{R}$, $X \subset \boldsymbol{R}$ en términos de límites de sucesiones. Esta definición frecuentemente se nombra definición de límite de la función según Heine *).

Definición 1. *El punto a se llama límite de la función $f: X \to R$ en el punto x_0 (o lo que es lo mismo cuando $x \to x_0$ **), si para cualquier sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$,* que tiene como límite el punto x_0, *es decir, tal que*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0, \tag{5.4}$$

la sucesión $\{f(x_n)\}$ tiene como límite el punto a, es decir,

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a. \tag{5.5}$$

En el caso cuando a es el límite de la función f en el punto x_0, se escribe

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad ó \quad f(x) \to a \text{ cuando } x \to x_0,$$

y si x_0 es un número $x_0 \in R$, entonces, a veces también se escribe

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = a.$$

Subrayemos que en la definición 1 x_0 y a pueden ser tanto números reales, como los infinitos: ∞, $+\infty$ y $-\infty$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ y a es un número real, entonces se dice que en el punto x_0 la función f tiene *límite finito* (igual a a).

---

*) H. Heine (1821 — 1881), matemático alemán.

**) La notación "cuando $x \to x_0$" se lee "cuando x tiende a x_0".

La definición de límite para la función dada $f\colon X \to R$, tiene sentido, naturalmente, si y sólo si para el punto x_0 realmente existen sucesiones de puntos $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, que tengan como límite (finito o infinito) el punto x_0: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Definición 2. *Sea $X \subset R$. El punto x_0, para el cual existe la sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, que tiene como límite el punto x_0:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \tag{5.6}$$

se llama punto de adherencia del conjunto X.

Si el punto de adherencia x_0 del conjunto X es uno de los infinitos ∞, $+\infty$ ó $-\infty$, entonces se denomina también *punto de adherencia infinitamente alejado*. Es evidente que si $x_0 = \infty$ es un punto de adherencia infinitamente alejado del conjunto X, entonces el conjunto es no acotado; si $x_0 = +\infty$ (respectivamente, $x_0 = -\infty$) es un punto de adherencia infinitamente alejado del conjunto X, entonces el conjunto es no acotado superiormente (respectivamente, inferiormente).

Es evidente que cualquier punto x_0, perteneciente al mismo conjunto X, es su punto de adherencia, ya que la sucesión estacionaria $x_n = x_0 \in X$, $n = 1, 2, \dots$, satisface las condiciones de la definición 2: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ y $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$. Pero sin duda, en los conjuntos pueden existir puntos de adherencia finitos no pertenecientes a estos conjuntos. Así, por ejemplo, los puntos $x = a$ y $x = b$ son puntos de adherencia del intervalo (a, b) y no están incluidos en él.

Ejercicio 22. Demuéstrese que si el punto x_0 es un punto de adherencia del conjunto X y $X \subset Y \subset R$, entonces el punto x_0 es un punto de adherencia del conjunto Y.

OBSERVACIÓN 1. No es difícil convencerse de que un punto es punto de adherencia del conjunto dado si y sólo si cualquiera de sus entornos se interseca con este conjunto.

En realidad, si x_0 es un punto de adherencia del conjunto X, entonces existe una sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ y, por lo tanto, en cualquier entorno del punto x_0 caerán todos los términos de esta sucesión a partir de un cierto término (ellos son puntos del conjunto X).

Viceversa, si en cualquier entorno del punto x_0 se tienen puntos del conjunto X, entonces, eligiendo para cada natural n algún punto en la intersección no vacía por hipótesis $X \cap U\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ y denotándolo por x_n, es decir,

$$x_n \in X \cap U\left(x_0, \frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

obtenemos una sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \to x_0$ (véase la observación 1 en el p. 4.2) y $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$. Esto significa que x_0 es un punto de adherencia del conjunto X. $\square$

Para cualquier conjunto no vacío $X \subset R$, su cota superior $\beta = \sup X$ y cota inferior $\alpha = \inf X$ son sus puntos de adherencia (ellos pueden ser finitos o infinitos). Esto inmediatamente se deduce, por el lema 1, de la definición 6' de cota superior y de la definición 7' de cota inferior, ya que en estas definiciones se exige que en cualquier entorno de la cota correspondiente del conjunto se encuentre un punto de éste (e incluso por un lado de la cota analizada).

De la definición 1 de límite de la función, se deduce directamente que en el punto de adherencia de la definición, la función no puede tener dos límites distintos, es decir, como se dice, la definición señalada es unívoca.

Más adelante, de la definición de límite de la función se deduce que los valores tomados por la función en los puntos que se encuentran fuera de cualquier entorno dado del punto x_0 no influyen en la existencia ni en el valor del límite de la función en el punto x_0. Dicho figuradamente el hecho de que existe o no el límite de la función en el punto dado x_0 y si existe, entonces, cuál es su valor, se determina completamente por los valores de la función en la intersección $U(x_0) \cap X$ de cualquier entorno $U(x_0)$ del punto x_0 (que es un punto de adherencia del conjunto X) con este mismo conjunto. En realidad, cualquiera que sea el entorno $U(x_0)$ y cualquiera que sea la sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ se encuentra un número n_0 tal que cuando $n > n_0$, $n \in N$, va a tener lugar la inclusión $x_n \in U(x_0) \cap X$, y el número finito de términos restantes $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ de la sucesión $\{f(x_n)\}$ no influye en la existencia de su límite, ni en su valor, si éste existe.

Las propiedades de la función, que dependen sólo de los valores de la función en cualquier entorno del punto analizado, dicho más exacto, que no varían durante el paso a la restricción de la función en la intersección de su conjunto de definición con cualquier entorno del punto, se llaman propiedades locales de la función en el punto dado. De lo dicho se deduce, que tanto la existencia del límite en el punto, como su valor, si éste existe, son propiedades locales de la función en este punto.

Ejemplos. 1. Sea

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1}. \tag{5.7}$$

El conjunto X, sobre el cual está definida la función (5.7) se obtiene del conjunto de todos los números reales $\boldsymbol{R}$ restando del mismo la unidad: $X = \boldsymbol{R} \setminus \{1\}$. Aclaremos si existe o no el límite de la función f (5.7) en el punto $x_0 = 0$.

Tomemos cualquier sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$. Entonces, basándonos en los teoremas del p. 4.9, obtenemos

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{2x_n^2 + x_n - 1}{x_n - 1} = \frac{2\left(\lim\limits_{n \to \infty} x_n\right)^2 + \lim\limits_{n \to \infty} x_n - 1}{\lim\limits_{n \to \infty} x_n - 1} = 1.$$

De esta manera, existe $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 1$, y ya que él no depende de la elección de la sucesión $x_n \to 0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces también existe el límite $\lim\limits_{n \to \infty} f(x) = 1$.

2. Analicemos la función

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x} \tag{5.8}$$

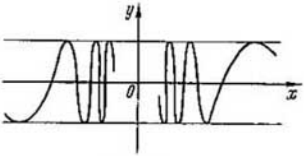


FIG. 19

(fig. 19). Ella está definida sobre el conjunto $X = R \setminus \{0\}$. Aclaremos de nuevo, si existe o no para la función f el límite en el punto $x_0 = 0$. Tomemos dos sucesiones

$$x_n = \frac{1}{\pi n} \quad \text{y} \quad x_n' = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Es evidente que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n' = 0, x_n \neq 0, x_n' \neq 0$ (la condición $x \neq 0$ en este caso significa que $x \in X$), $f(x_n) = \operatorname{sen} \pi n = 0$, $f(x_n') = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Por esto, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = 1$, lo que significa que el límite de la función (5.8) cuando $x \to 0$ no existe.

3. Sea

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 2}.$$

Hallemos el límite de esta función cuando $x \to \infty$. Su dominio es el conjunto $X = R \setminus \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$. Tomando cualquier sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$ $\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ tendremos

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 + x_n + 1}{x_n^2 - 2} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n^2}}{1 - \frac{2}{x_n^2}} = \frac{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^2}}{1 - 2\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^2}} = 1.$$

De aquí se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 2} = 1.$$

Ejercicio 23. Demuéstrese que el límite $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ no existe, y los límites $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ existen y hállense.

En el estudio de los límites de las funciones, frecuentemente tenemos que operar con los límites de las restricciones de las funciones sobre uno u otro conjunto, es decir, con límites de funciones que se obtienen de las funciones dadas analizándolas no sobre todo el conjunto, sobre el cual ellas están definidas, sino sobre un contenido en éste.

Defínción 3. *Sea $f\colon X \to R$. El límite de la restricción $f_E\colon E \to R$, $E \subset X$, de la función f sobre el conjunto E en el punto x_0, se llama límite de la función f por el conjunto E en este punto y se denota por*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x).$$

De esta forma

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to x_0} f_E(x), \tag{5.9}$$

es decir, el límite de la función por el conjunto $E \subset X$ no es un concepto nuevo en comparación con el límite de la función, éste es sencillamente el límite, en el sentido de la definición 1 de la función que es la restricción de la dada sobre este conjunto E.

El concepto de límite de la función por un conjunto en el punto x_0 tiene sentido sólo para un conjunto E, para el cual el punto x_0 es su punto de adherencia (en este caso evidentemente, es un punto de adherencia del conjunto X).

Utilizando la terminología de la definición 3, se puede decir que el límite de la función en el sentido de la definición 1 es su límite en el punto x_0 por todo el conjunto de definición X de la función f

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x).$$

En el caso, cuando la función f está dada por una fórmula, entonces por $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ se entiende el límite de esta función en el punto x_0 por todo el conjunto de valores X, para los cuales la fórmula señalada tiene sentido y para los cuales en el proceso de realización de todos los cálculos según esta fórmula se obtienen sólo números reales (véase el p. 5.2).

Ejemplo 4. Sea f la función de Dirichlet (véase el p. 5.2), es decir, la función igual a 1 sobre el conjunto Q de todos los números racionales e igual a cero sobre el conjunto I de todos los números irracionales. Entonces, en el punto $x_0 = 0$ su límite por el conjunto de los números racionales es igual a 1:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in Q}} f(x) = 1,$$

y por el conjunto de los irracionales es igual a cero:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in I}} f(x) = 0.$$

Por todo el conjunto de los números reales (es decir, por el conjunto de definición de la función de Dirichlet) el límite en el punto $x_0 = 0$ no existe, ya que la exis-

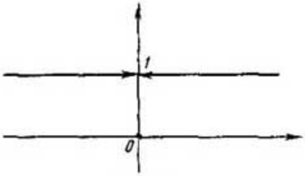


FIG. 20

tencia o no del límite de la sucesión $\{f(x_n)\}$ para $n \to \infty$ depende, en el caso dado, de la elección de la sucesión $\{x_n\}$ que tiende a cero.

Destaquemos la siguiente sencilla afirmación.

Lema 1. *Si $f\colon x \to \mathbf{R}$, $E \subset X$, x_0 es un punto de adherencia del conjunto E y existe el límite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ de la función f en el punto x_0 (es decir, el límite por el conjunto X), entonces, en el punto x_0 existe también el límite de la función f por el conjunto E y los valores de ambos límites son iguales:*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x). \tag{5.10}$$

DEMOSTRACIÓN. Si para cualquier sucesión $x_n \subset X$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ todas las sucesiones $\{f(x_n)\}$ tienen un mismo límite a, entonces esto, a ciencia cierta, es válido también para cualquier sucesión $x_n \in E$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, ya que $E \subset X$. □

Destaquemos un caso de límite de la función en el punto, que se encuentra con frecuencia, cuando el límite se toma por el así llamado entorno reducido de este punto o por la intersección del entorno reducido con el conjunto de definición de la función estudiada.

Definición 4. *Se denomina ε-entorno reducido del punto x_0 el conjunto que se obtiene al eliminar el punto x_0 de su ε-entorno.*

El ε-entorno reducido del punto x_0 se denota por $\mathring{U}(x_0, \varepsilon)$:

$$\mathring{U}(x_0, \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} U(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}. \tag{5.11}$$

Cualquier ε-entorno reducido del punto x_0 se llama sencillamente entorno reducido y se denota también por $\mathring{U}(x_0)$.

Ejemplo 5. Analicemos la función $f(x) = |\operatorname{sign} x|$ (véase la difinición de la función $\operatorname{sign} x$ en el p. 5.2). Su gráfica está representada en la fig. 20. Cualquiera que sea el entorno del cero $U(0)$, para esta función, en el punto $x_0 = 0$, evidentemente, existe el límite por el entorno reducido $\mathring{U}(0)$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathring{U}(0)}} |\operatorname{sign} x| = 1.$$

Además, el límite $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \in U(0)}} |\operatorname{sing} x|$ por todo el entorno $U(0)$ en el punto $x_0 = 0$ para la función $|\operatorname{sign} x|$ no existe, ya que, por ejemplo, para la sucesión

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{si } n = 2k, \\ 0, & \text{si } n = 2k - 1, \\ & k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

tenemos $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ (y, por lo tanto, todos sus términos a partir de uno, van a encontrarse en el entorno $U(0)$ dado), y la sucesión $|\operatorname{sign} x_n|$ no tiene límite (en los lugares pares tiene valor uno y en los impares, cero).

Los ejemplos 4 y 5 analizados muestran, en particular, que una misma función puede tener límite en un punto por un conjunto y por otro no tener límite en este punto o tenerlo, pero distinto.

OBSERVACIÓN 2. Si las funciones f y g están definidas en un entorno $U(x_0)$ del punto x_0, excepto, quizá, el mismo punto x_0, y para cada x perteneciente al entorno reducido $\mathring{U}(x_0)$, $x \in \mathring{U}(x_0)$, ellas toman valores iguales

$$f(x) = g(x),$$

entonces, sus límites por el entorno reducido $\mathring{U}(x_0)$ existen o no simultáneamente, y si existen, entonces son iguales entre sí

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathring{U}(x_0)}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathring{U}(x_0)}} g(x),$$

ya que en su definición participan sólo los valores de las funciones en los puntos del entorno reducido $\mathring{U}(x_0)$.

En esta sencilla observación está basada la llamada regla de resolución de las indeterminaciones, con ayuda de la simplificación de fracciones. Aclarémosla con un ejemplo.

Ejemplo 6. Hallemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{(2x^2 + x - 1)x}{x^2 - x}. \tag{5.12}$$

La repetición de los razonamientos, análogos a aquellos con ayuda de los cuales fue calculado el límite en el ejemplo 1, nos lleva a la expresión $\dfrac{0}{0}$, es decir, a una indeterminación, sin responder de este modo a la pregunta sobre la existencia del límite (5.12), ni a la cuestión sobre su valor, si éste existe. Por eso, analicemos la función

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1}$$

obtenida de la función

$$g(x) = \frac{(2x^2 + x - 1)x}{x^2 - x},$$

que se encuentra bajo el signo del límite en la expresión (5.12), simplificando el segundo miembro de la igualdad por x. Las funciones f y g coinciden en el entorno reducido $\mathring{U}(0, 1) = (-1, 1) \setminus \{0\}$ del punto $x_0 = 0$ y, por eso, según la observación hecha anteriormente, al mismo tiempo tienen límites o no en este punto por el entorno reducido señalado, además en el caso en que existan estos límites, son iguales. En el ejemplo 1 fue mostrado que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ por todo el dominio de la función f, por lo tanto por su subconjunto $\mathring{U}(0, 1)$. De esta forma,

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathring{U}(0,1)}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathring{U}(0,1)}} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

(la primera igualdad es válida porque el límite es una propiedad local de la función). Estos razonamientos son la base de los cálculos que en la notación utilizada comúnmente tienen la forma

$$\lim_{x \to 0} \frac{(2x^2 + x - 1)x}{x^2 - x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1} = 1.$$

OBSERVACIÓN 3. Un caso particular de límite (finito o infinito) de una función es el límite de una sucesión (finito o infinito, respectivamente). En realidad, la sucesión $x_n \in \boldsymbol{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, es una función definida sobre el conjunto de los números naturales:

$$f\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}$$

y, además, $f(n) = x_n$, $n = 1, 2, \ldots$. La definición dada anteriormente de límite de una sucesión $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ (véase la definición 5 en el p. 4.2) y la definición de su límite, como de un caso particular de la definición de límite de una función $\lim\limits_{n \to \infty} f(n)$ (véase la definición 1 de este punto), son equivalentes porque si la sucesión $\{x_n\}$ tiene límite (finito o infinito) en el sentido de la definición 5 del p. 4.2, entonces para cualquier elección de la sucesión de los números naturales $\{n_k\}$, tal que $\lim\limits_{k \to \infty} n_k = +\infty$, la sucesión $\{x_{n_k}\}$ tiene el mismo límite que la sucesión $\{x_n\}$ (véase el lema en el p. 4.3) como esto se exige en la definición 1.

5.5. FUNCIONES CONTINUAS

En el estudio del límite de una función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ cuando $x \to x_0$ puede suceder que $x_0 \in X$ (entonces, x_0 es un número: $x_0 \in \boldsymbol{R}$) o viceversa, que $x_0 \notin X$. El caso $x_0 \in X$ presenta especial interés ya que conlleva al concepto importante de función continua. Su estudio lo comenzaremos por la demostración del siguiente lema.

Lema 2. *Sea $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ y $x_0 \in X$. Entonces, para que la función f tenga límite en el punto x_0 es necesario y suficiente que*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{5.13}$$

DEMOSTRACIÓN. La suficiencia de la condición (5.13) para la existencia del límite de la función f en el punto x_0 es evidente: esta condición es incluso más fuerte, ya que ella afirma no sólo la existencia del límite, sino que señala su valor igual a $f(x_0)$.

Demostremos la necesidad de la condición (5.13) para la existencia del límite de la función f en el punto x_0. Supongamos que para la función f en el punto x_0 existe el límite igual a a:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a. \tag{5.14}$$

Según la definición de límite, esto significa que para cualquier sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, es válida la igualdad

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a. \tag{5.15}$$

En particular, por cuanto $x_0 \in X$ esta igualdad es válida para la sucesión estacionaria, formada por un único punto x_0, es decir, para la sucesión $x_n = x_0$, $n = 1, 2, \ldots$ En este caso, (5.15) tiene la forma

$$\lim_{n \to \infty} f(x_0) = a. \tag{5.16}$$

Por otro lado, ya que el límite de una constante es igual a esa misma constante, entonces

$$\lim_{n \to \infty} f(x_0) = f(x_0). \tag{5.17}$$

Comparando (5.16) y (5.17) obtenemos

$$f(x_0) = a. \ \square$$

Definamos ahora el concepto de función continua en un punto dado.

Defínción 5. *La función $f\colon X \to R$ se llama continua en el punto $x_0 \in X$ si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{5.18}$$

La condición (5.18) significa que en el caso de continuidad de la función f en el punto x_0, el límite de f en este punto se halla por una regla muy sencilla: se debe calcular el valor de la función f en el punto x_0.

Según el lema 2, la condición (5.18) es equivalente a que la función $f\colon X \to R$ tiene límite en el punto x_0 y que $x_0 \in X$. Se sobrentiende que en el caso, cuando para la función $f\colon X \to R$ el límite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ es igual a uno de los infinitos ∞, $+\infty$ ó $-\infty$, entonces, a ciencia cierta, $x_0 \notin X$. En el caso contrario, para la sucesión estacionaria $x_n = x_0$, $n = 1, 2, \ldots$, tendría lugar $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(x_0) = f(x_0)$ y ya que, por condición, la función toma sólo valores numéricos, entonces, a pesar de la suposición, el límite $\lim_{x \to x_0} f_x$ sería finito. De lo dicho se deduce, en particular, que si para la función en algún punto existe límite infinito, entonces en él la función, a ciencia cierta, no es continua.

Señalemos además, que en la definición 5, el punto x_0, en el cual se define el concepto de continuidad de la función, pertenece a la recta numérica R, es decir, no es un punto infinito.

Para realizar el análisis del concepto de continuidad de la función en el punto, daremos las definiciones de puntos aislados y límite de los conjuntos.

Definición 6. *El punto $x_0 \in X$ se llama punto aislado del conjunto $X \subset R$ si existe un entorno $U(x_0)$ de este punto cuya intersección $U(x_0) \cap X$ con el conjunto X está compuesta sólo por un punto x_0:*

$$U(x_0) \cap X = \{x_0\}. \tag{5.19}$$

Todos los puntos del conjunto de los números naturales N son aislados, y el conjunto Q de todos los números racionales no tiene ningunos puntos aislados.

Definición 7. *El punto $x_0 \in R$ se llama punto de acumulación del conjunto $X \subset R$, si en cualquiera de sus entornos existe un punto diferente de él y perteneciente al conjunto X.*

Un punto de acumulación de un conjunto puede pertenecer o no a éste. Por ejemplo, cada punto del segmento $[a, b]$ es un punto de acumulación del intervalo (a, b). En este caso, los puntos a y b no pertenecen al intervalo señalado, y todos los restantes están contenidos en él.

Si un punto pertenece a un conjunto, entonces, por las definiciones 6 y 7, es un punto aislado de éste, si y sólo si, no es un punto de acumulación.

Cualquier punto adherente del conjunto es o bien un punto aislado de este conjunto, o bien es su punto de acumulación, ya que o bien en cualquiera de sus entornos se contiene un punto del conjunto, diferente de él (entonces, este punto es de acumulación), o bien existe un entorno, que no contiene puntos del conjunto que no coincidan con él, y, por eso, ya que en este entorno, no obstante, existe un punto del conjunto (o sea, el punto dado por hipótesis, es su punto de adherencia), entonces este punto resulta ser el mismo, por lo tanto, en primer lugar, pertenece al conjunto analizado, y, en segundo lugar, es un punto aislado de este conjunto.

Es válida la proposición siguiente.

Lema 3. *Cualquier función es continua en cada punto aislado del conjunto de su definición.*

DEMOSTRACIÓN. Sea x_0 un punto aislado del conjunto de definición X de la función f. Entonces, por la definición 6, existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0, cuya intersección con el conjunto X está compuesta por un único punto x_0, es decir, $U(x_0) \cap X = \{x_0\}$. Cualquiera que sea la sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$ $\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, para el entorno señalado, por la definición de límite de una sucesión, existe un número n_0 tal que para todos los números $n > n_0$, se cumple la inclusión $x_n \in U(x_0)$ y, por lo tanto, la inclusión $x_n \in U(x_0) \cap X$. Pero ya que $U(x_0) \cap$ $\cap X = \{x_0\}$, entonces para todos los $n > n_0$ tenemos $x_n = x_0$. Esto significa que a partir del número $n_0 + 1$, la sucesión $\{f(x_n)\}$ se hace estacionaria: $f(x_n) = f(x_0)$ para $n > n_0$. Por esto, existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, que por la elección arbitraria de la sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, significa que se cumple la condición (5.18), es decir, la función f es continua en el punto x_0.

Ejemplo. La función $f(x) = \sqrt{\ln \cos 2\pi x} + 1$ (véase el p. 5.2) está definida sólo para los valores enteros del argumento $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. De esta forma, cada punto del conjunto de definición de esta función es un punto aislado de éste, por esto, según el lema 3, la función analizada es continua en todos los puntos de su conjunto de definición.

Del lema 3 se deduce que la cuestión sobre el límite de una función en un punto aislado del conjunto de su definición se resuelve muy fácilmente: existe siempre y es igual a $f(x_0)$. Por esto, el concepto de límite de una función (en particular, su continuidad), tiene sentido sólo para los puntos de acumulación del conjunto de definición de la función.

Ejercicio 24. Demostrar que la función $f: X \to R$ es continua en el punto de acumulación $x_0 \in X$ del conjunto X si y sólo si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathring{U}(x_0) \cap X}} f(x) = f(x_0).$$

De modo semejante a como se analizó el límite de la función por cualquier conjunto, perteneciente a su dominio, se puede, en particular, analizar la continuidad de la función por el conjunto correspondiente.

Definición 8. *Sea $f: X \to R$ y $x_0 \in E \subset X$. La función f se llama continua en el punto x_0 por el conjunto E, si*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = f(x_0).$$

Dicho de otra forma, *la función f se llama continua en el punto $x_0 \in E$ por el conjunto E, si en este punto es continua la restricción f_E de esta función sobre el conjunto E*:

$$\lim_{x \to x_0} f_E(x) = f_E(x).$$

Sobre la función $f: X \to R$, continua en el punto $x_0 \in X$ en el sentido de la definición 5, se puede decir que ella es continua en este punto según el conjunto X.

Por ejemplo, la función de Dirichlet f (véase el ejemplo 3 en el p. 5.4) es continua en el punto $x_0 = 0$ por el conjunto Q de todos los números racionales, ya que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in Q}} f(x) = 1 = f(0)$$

y no es continua en él por el conjunto de todos los números reales, o sea, el límite en el punto $x_0 = 0$ por el conjunto de todos los números reales, para la función de Dirichlet sencillamente no existe.

5.6. CONDICIONES DE LA EXISTENCIA DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Por la definición de límite, la función $f: X \to R$ tiene límite en el punto x_0, si cualquiera que sea la sucesión $x_n \to 0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, la sucesión de los valores correspondientes de la función $\{f(x_n)\}$ tiene límite (finito o infinito), y estos límites no dependen de la elección de las sucesiones señaladas $\{x_n\}$, es decir, todas las sucesiones $\{f(x_n)\}$ tienen, el mismo límite a: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$. Este valor a es el límite de la función f en el punto x_0.

Mostremos que si debilitamos la hipótesis, de forma más precisa, si suponemos sólo la existencia del límite, finito o infinito de un signo determinado, para cada una de las sucesiones analizadas $\{f(x_n)\}$, entonces de esto se deducirá, que todos estos límites coinciden, y de esta forma la función f en este caso, tendrá límite en el punto x_0

Lema 4. *Para que la función $f: X \to R$ tenga límite finito o infinito de signo determinado, en el punto x_0, que es punto adherente del conjunto X, es necesario y suficiente que para cualquier sucesión $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$,* la sucesión de los valores correspondientes de la función $\{f(x_n)\}$ *tenga límite finito o infinito de un signo determinado.*

Corolario. *Para que la función $f: X \to R$ tenga límite en el punto x_0, que es un punto adherente del conjunto X, es necesario y suficiente que para cualquier sucesión $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, la sucesión de los valores correspondientes de la función $\{f(x_n)\}$ sea convergente.*

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. La necesidad de la condición, enunciada en las hipótesis del lema, para la existencia del límite de la función f cuando $x \to x_0$, está contenida en la propia definición de este concepto (véase la definición 1 en el p. 5.4), en la que se afirma la existencia del límite $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ para todas las sucesiones $\{x_n\}$ analizadas.

Demostremos la suficiencia de la condición señalada en el lema, para la existencia del límite de la función. Sea $f: X \to R$ y para cualquier sucesión $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, la sucesión $\{f(x_n)\}$ tiene límite (finito o infinito de signo determinado). Analicemos dos sucesiones cualesquiera $x_n' \to x_0$ y $x_n'' \to x_0$, $x_n' \in X$, $x_n'' \in X$, $n = 1, 2, \dots$. Entonces la sucesión

$$x_n = \begin{cases} x_k', & \text{si } n = 2k - 1, \\ x_n'', & \text{si } n = 2k, \end{cases}$$

$$k = 1, 2, \dots$$

también tiene como límite el punto x_0 (finito o infinito) y $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$. Por esto, según la suposición hecha, existen los límites $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, además, las sucesiones $\{f(x_n')\}$ y $\{f(x_n'')\}$ son subsucesiones de la sucesión $f(x_n)$, ya que las sucesiones $\{x_n'\}$ y $\{x_n''\}$ son subsucesiones de la sucesión $\{x_n\}$.

Recordemos ahora, que si una sucesión tiene límite (finito o infinito), entonces cualquiera de sus subsucesiones tiene el mismo límite (véase el p. 4.6). Por esto

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = \lim_{n\to\infty} f(x_n), \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n'') = \lim_{n\to\infty} f(x_n),$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = \lim_{n\to\infty} f(x_n'').$$

De esta forma, los límites de las sucesiones $\{f(x_n)\}$, donde $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, no dependen de la elección de las sucesiones $\{x_n\}$. Designando el valor común de los límites de las sucesiones $\{f(x_n)\}$ por a, tendremos, por la definición 1 del p. 5.4, que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

La afirmación del corolario se deduce directamente del lema 4 (recordemos que el término "sucesión convergente" se utiliza sólo para las sucesiones que tienen límite finito).

5.7. SEGUNDA DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Existe otra definición del límite de una función, que no utiliza el concepto de límite de una sucesión, sino que se enuncia en términos de entornos y se llama defi-

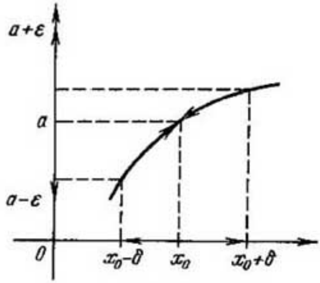


FIG. 21

nición del límite de una función según Cauchy. Esta definición es equivalente a la definición 1 en el p. 5.4.

Definición 9. *El punto a se llama límite de la función $f: X \to R$ cuando $x \to x_0$ (o lo que es lo mismo, en el punto x_0), si para cualquier entorno $U(a)$ del punto a existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que*

$$f(X \cap U(x_0)) \subset U(a). \tag{5.20}$$

El límite según Cauchy para una función también lo denotaremos por $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Esto es natural, ya que el concepto de límite de una función dado según Cauchy, como se ha señalado más arriba y próximamente será demostrado, es equivalente a la definición de límite de una función dada en el p. 5.4.

La figura 21 ilustra la definición 9 en el caso cuando x_0 y a son números reales y el conjunto X es un entorno reducido del punto x_0.

Utilizando los símbolos lógicos la definición 9 puede ser escrita en la forma siguiente:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall U(a))(\exists U(x_0)) : f(X \cap U(x_0)) \subset U(a).$$

Descifrando detalladamente la inclusión (5.20), la definición 9 se puede enunciar de la forma siguiente.

El punto a se llama límite de la función $f: X \to R$ cuando $x \to x_0$, si para cualquier entorno $U(a)$ del punto a existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que para cualquier punto

$$x \in X \cap U(x_0) \tag{5.21}$$

se cumple la inclusión

$$f(x) \in U(a). \tag{5.22}$$

En símbolos lógicos esta definición se presenta en la forma siguiente:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall U(a))(\exists U(x_0))(\forall x \in X \cap U(x_0)) : f(x) \in U(a). \tag{5.23}$$

Recordando la definición de entornos de los puntos finitos e infinitamente alejados, la definición 9 puede ser expresada, en cada caso concreto, en términos de desigualdades. Enunciemos inicialmente en esta forma la definición del límite finito en un punto finito.

El número a se llama límite de la función f en el punto $x_0 \in \boldsymbol{R}$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ *) tal que para todos los x, que satisfacen las condiciones

$$|x - x_0| < \delta, \quad x \in X,$$

se cumple la desigualdad

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

En símbolos lógicos esta definición tiene el aspecto siguiente:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \boldsymbol{R} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X, \quad |x - x_0| < \delta) : |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Demos un ejemplo más de la definición de límites infinitos en términos de desigualdades. Por ejemplo, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ para la función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todos los x que satisfacen la condición

$$x > \delta, \quad x \in X,$$

se cumple la desigualdad

$$f(x) < -\varepsilon$$

o en símbolos lógicos

$$\lim_{x \to +x_0} f(x) = -\infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X, x > \delta) : f(x) < -\varepsilon.$$

De lo dicho se ve que pueden encontrarse diferentes combinaciones del paso a los valores límites (tanto finitos, como infinitos) de las variables dependientes e independientes. El enunciado de la definición de límite de una función para cada caso particular en términos de desigualdades, o como se dice también, a veces, "en el lenguaje de ε y δ", aunque frecuentemente es más cómodo en situaciones concretas (por esto es necesario saber hacerlo) conviene peor para resolver cuestiones generales, ya que exige la realización de demostraciones especiales para cada caso por separado, en correspondencia con el enunciado de la definición dada. Por esto, es cómodo utilizar la definición 9, que abarca todos los casos concretos.

Pasemos ahora a la comparación de las definiciones de límite de una función dadas por Heine (definición 1) y por Cauchy (definición 9).

Teorema 1. *Las definiciones 1 y 9 de límite de una función en un punto adherente del conjunto de definición de una función son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. I. Sean $f\colon X \to \boldsymbol{R}$, x_0 un punto adherente del conjunto X y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ en el sentido de la definición 1. Mostremos que entonces se cumple también la condición que se encuentra en la parte derecha de la fórmula (5.23).

Supongamos que esto no es así, es decir, que

---

*) A veces se escribe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ para subrayar que la elección de δ depende de ε.

$$(\exists\, U(a))(\forall\, U(x_0))(\exists x \in X \cap U(x_0)) : f(x) \notin U(a) \tag{5.24}$$

o, dicho de otra forma, se encuentra un entorno $U(a)$ del punto a tal que en cualquier entorno $U(x_0)$ del punto x_0 existe un punto $x \in X$ tal que los valores de la función $f(x)$ en este punto no pertenecen al entorno $U(a)$. En particular, los puntos x señalados se encuentran en cada entorno $U\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$. Denotémoslos por x_n, es decir,

$$x_n \in X \cap U\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \tag{5.25}$$

y

$$f(x_n) \notin U(a). \tag{5.26}$$

De la condición (5.25) se deduce que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \tag{5.27}$$

(véase la observación 1 en el p. 4.2). Ya que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ en el sentido de la definición 1, entonces para cualquier sucesión $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, tiene lugar la igualdad $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$. Por la definición de límite de una sucesión, esto significa que para cualquier entorno $U(a)$ existe un número n_0 tal que para todos los números $n > n_0$ tiene lugar la inclusión

$$f(x_n) \in U(a). \tag{5.28}$$

Sin embargo, si se toma el entorno $U(a)$ del punto a, según la condición (5.24), y después se construye, como esto fue hecho anteriormente, la sucesión $\{x_n\}$, que satisface las condiciones (5.25) y (5.26), y, por lo tanto, la condición (5.27), entonces, para ella, por la condición (5.26), para ningún n_0 se cumplirá la condición (5.28). La contradicción obtenida demuestra la afirmación hecha. $\square$

II. Sea ahora $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, en el sentido de la definición 9 de límite de la función, $f: X \to \boldsymbol{R}$, x_0 es un punto adherente del conjunto X y sea

$$x_n \to x_0, \quad x_n \in X, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{5.29}$$

Mostremos que entonces

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a, \tag{5.30}$$

es decir, que el punto a es límite de la función f en el sentido de la definición 1.

Demos un entorno arbitrario $U(a)$ del punto a y escojamos para él el entorno $U(x_0)$ del punto x_0, que satisface las condiciones (5.21) — (5.22). Para este entorno $U(x_0)$, por la condición (5.29) se encuentra un número n_0 tal que para todos los números $n > n_0$ se cumplirá la inclusión

$$x_n \in X \cap U(x_0).$$

Pero entonces por (5.22) tendremos

$$f(x_n) \in U(a).$$

Esto significa que se cumple la condición (5.30). $\square$

El límite de una función, como fue señalado en el p. 5.4, es una propiedad local de la función en el sentido de que su existencia para una función en el punto dado, y si existe, entonces también su valor no dependen de la restricción de la función de la intersección de cualquier entorno del punto x_0 con el conjunto de definición de la función dada. Esto también se ve claramente de la definición 9: si se da un entorno arbitrario $U_0(x_0)$ del punto x_0 y se agrega en la definición 9 la condición complementaria, que consiste en que todos los entornos $U(x_0)$, cuya existencia se afirmaba allí, deben además estar contenidas en el entorno $U_0(x_0)$:

$$U(x_0) \subset U_0(x_0),$$

entonces se obtiene una definición equivalente a la inicial. En efecto, si la condición (5.23) se cumple para cierto entorno $U(x_0)$ del punto x_0, entonces se cumple también para cualquier entorno de este punto contenido en él.

Para concluir, señalemos que por límite de una función en un punto dado, usualmente se entiende un límite finito, si no se ha dicho otra cosa, y por $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0)$, cuando no se ha dicho nada sobre el conjunto por el cual se toma el límite, se denota el límite, finito o infinito, por todo el conjunto de definición de la función f.

Ejercicio 25. Demuéstrese que si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geqslant 1$, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \infty$.

La definición de límite de una función en un punto, sin mayor esfuerzo, puede ser generalizada también para las funciones cuyos conjuntos de sus valores, así como los conjuntos de definición pertenecen al conjunto extendido de los números reales $\overline{R}$, es decir, para las funciones de la forma $f\colon X \to \overline{R}$, $X \subset \overline{R}$. El lector en caso de necesidad puede enunciar las definiciones correspondientes por sí mismo.

5.8. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN POR LA UNIÓN DE CONJUNTOS

Ya sabemos que si la función $f\colon X \to R$ tiene límite en el punto x_0, que es punto adherente del conjunto $E \subset X$, entonces tiene el mismo límite en este punto también por conjunto E (véase el lema 1 en el p. 5.4). Demostremos una propiedad sencilla, pero útil en el futuro, de los límites de funciones por los conjuntos.

Lema 5. *Sean $f\colon X \to R$, $X_1 \subset X$, $X_2 \subset X$ y x_0 un punto adherente de los conjuntos $X_1 \neq \varnothing$ y $X_2 \neq \varnothing$. Entonces, si la función f para $x \to x_0$ tiene límites, finitos o infinitos, por los conjuntos X_1 y X_2 y además ellos son iguales*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_2}} f(x) = a, \tag{5.31}$$

entonces tiene el mismo límite por el conjunto $X_1 \cup X_2$:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_1 \cup X_2}} f(x) = a. \tag{5.32}$$

DEMOSTRACIÓN. Por la igualdad (5.31), para cualquier entorno $U(a, \varepsilon)$ del punto a, existen entornos $U(x_0, \delta_1)$ y $U(x_0, \delta_2)$ del punto x_0 tales que

$$f(X_1 \cap U(x_0, \delta_1) \subset U(a, \varepsilon), f(X_2 \cap U(x_0, \delta_2)) \subset U(a, \varepsilon). \tag{5.33}$$

Sea

$$\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\},$$

entonces

$$U(x_0, \delta) \subset U(x_0, \delta_1) \text{ y } U(x_0, \delta) \subset U(x_0, \delta_2),$$

y por esto

$$(X_1 \cup X_2) \cap U(x_0, \delta) = (X_1 \cap U(x_0, \delta)) \cup (X_2 \cap \cap U(x_0, \delta)) \subset (X_1 \cap U(x_0, \delta_1)) \cup (X_2 \cap U(x_0, \delta_2)).$$

Por consiguiente, por (5.33):

$$f((X_1 \cup X_2) \cap U(x_0, \delta)) \subset f(X_1 \cap U(x_0, \delta_1)) \cup f(X_2 \cap U(x_0, \delta_2)) \subset U(a, \varepsilon).$$

Esto significa, por la definición 9, el cumplimiento de las condiciones (5.32). □

Ejemplo. Si $\{x_n\}$ es una sucesión tal que $\lim\limits_{k \to \infty} x_{2k} = \lim\limits_{k \to \infty} x_{2k-1} = a$ y a es un número real o bien uno de los infinitos ∞, $+\infty$ o $-\infty$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Esto se deduce directamente del lema 5 si analizamos la función $f(n) = x_n$, $n \in N$, y hacemos $X_1 = \{2k\}$, $X_2 = \{2k - 1\}$, $k = 1, 2, \ldots$.

5.9. LÍMITES UNILATERALES Y CONTINUIDAD UNILATERAL

En el estudio de las funciones, a veces resulta útil el análisis de los límites de sus restricciones sobre los conjuntos correspondientes al caso particular cuando estos conjuntos son partes de los conjuntos de definición de las funciones dadas, que están por un lado del punto, en el cual se analiza el límite. Estos límites se llaman *límites unilaterales*. Este concepto tiene sentido sólo cuando en realidad existen los conjuntos que están por lados diferentes del punto x_0, en el cual se analiza el límite. En el caso cuando el punto x_0 es uno de los infinitos ∞, $+\infty$ o $-\infty$, esto, a ciencia cierta, no es posible. Por esto, en el presente punto, en el futuro supondremos siempre que x_0 es un número real: $x_0 \in R$. Introduzcamos para simplificar la escritura algunas notaciones.

Para cualquier conjunto $X \in R$ y para $x_0 \in R$ haremos:

$$X_-(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{x : x \in X, x \leqslant x_0\},$$

$$X_+(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{x : x \ni X, x \geqslant x_0\}.$$

Dicho de otro modo, el conjunto $X_+(x_0)$, respectivamente $X_-(x_0)$, es la intersección del conjunto X con el rayo cerrado del eje numérico, cuyo vértice es el punto x_0 y que está dirigido en el sentido positivo, respectivamente negativo.

Definición 10. *Sea f: $X \to R$ y $x_0 \in R$. El punto a se llama límite de la función f por la izquierda, respectivamente por la derecha, cuando $x \to x_0$, si es límite de la* *función f para $x \to x_0$ por el conjunto $X_-(x_0)$, es decir,*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_-(x_0)}} f(x) = a,$$

respectivamente, por el conjunto $X_+(x_0)$, es decir

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_+(x_0)}} f(x) = a.$$

Para los límites por la izquierda y por la derecha de la función f por el conjunto $X \setminus \{x_0\}$ se tienen notaciones especiales: el límite por la izquierda se denota por $f(x_0 - 0)$ o $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ y el límite por la derecha por $f(x_0 + 0)$ o $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. De esta forma,

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \subset X_-(x_0) \setminus \{x_0\}}} f(x),$$

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_+(x_0) \setminus \{x_0\}}} f(x).$$

Si $x_0 = 0$, entonces en lugar de $0 + 0$, respectivamente, en lugar de $0 - 0$, tanto en el caso de los límites de las funciones, como en el caso de los límites de las sucesiones (véase el p. 4.1), se escribe simplemente $+0$, respectivamente -0.

Los límites por la izquierda y por la derecha se llaman límites unilaterales. Si el punto x_0 es la cota superior para el conjunto $X_-(x_0) \setminus \{x_0\}$ y la cota inferior para $X_+(x_0) \setminus \{x_0\}$ (X es el conjunto de definición de la función f):

$$x_0 = \sup(X_-(x_0) \setminus \{x_0\}) = \inf(X_+(x_0) \setminus \{x_0\}),$$

entonces el límite común de la función f cuando $x \to x_0$ se llama también límite bilateral.

En calidad de ejemplo analicemos la función $y = \operatorname{sign} x$ (véase el ejemplo en el p. 5.2 y fig. 17). Sean $x_n > 0$, $x_n' < 0$, $n = 1, 2, \dots$ y $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} x_n' = 0$. Entonces

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{sign} x_n = \lim_{n \to \infty} 1 = 1, \quad \lim_{n \to \infty} \operatorname{sign} x_n' = \lim_{n \to \infty} (-1) = -1.$$

Esto significa que

$$\lim_{x \to +0} \operatorname{sign} x = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -0} \operatorname{sign} x = -1.$$

El concepto de límite por la izquierda, respectivamente por la derecha, cuando $x \to x_0$ (como en general, el concepto de límite en un punto) tiene sentido sólo cuando x_0 es un punto de adherencia del conjunto por el cual se toma el límite, en el caso dado, del conjunto $X_-(x_0)$, respectivamente del conjunto $X_+(x_0)$. Por cuanto cada uno de estos conjuntos está por un lado del punto x_0, entonces él es su punto de adherencia si y sólo si

$$x_0 = \sup X_-(x_0)$$

y respectivamente

$$x_0 = \inf X_+(x_0).$$

Teorema 2. *La función f: $X \to \boldsymbol{R}$ tiene límite en el punto $x_0 = \sup X_-(x_0) = \inf X_+(x_0)$, $X_-(x_0) \neq \varnothing$, $X_+(x_0) \neq \varnothing$ si y sólo si en este punto existen los límites de la función f tanto por la izquierda como por la derecha y son iguales. En este caso, su valor común es el límite de la función en el punto x_0.*

Corolario. *Para que la función f: $X \to \boldsymbol{R}$ tenga el límite bilateral por el conjunto $X \setminus \{x_0\}$ en el punto x_0 es necesario y suficiente que existan y sean iguales entre sí los límites unilaterales $f(x_0 - 0)$ y $f(x_0 + 0)$.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. En realidad, sea f: $X \to \boldsymbol{R}$, $x_0 = \sup X_-(x_0) = \inf X_+(x_0)$ y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, es decir, para la función f existe el límite (por el conjunto X) en el punto x_0. Pero entonces, en este punto, ese mismo límite existe para la restricción por cualquier conjunto (véase el lema 1 en el p. 5.4), en particular, por los conjuntos $X_-(x_0)$ y $X_+(x_0)$, es decir, existen ambos límites unilaterales cuando $x \to x_0$ y son iguales a a:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_-(x_0)}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_+(x_0)}} f(x) = a. \tag{5.34}$$

Supongamos, por el contrario, que en el punto $x_0 = \sup X_-(x_0) = \inf X_+(x_0)$ se cumple la condición (5.34). Entonces, por cuanto $X = X_-(x_0) \cup X_+(x_0)$, entonces por el lema 5 existe el límite $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x)$ y es igual a a:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = a.$$

Para convencerse de la validez del corolario es suficiente aplicar el teorema 2 a la restricción de la función f: $X \to \boldsymbol{R}$ sobre el conjunto $X \setminus \{x_0\}$.

Si uno de los límites unilaterales de la función en cierto punto coincide con el valor de la función en este punto, entonces tal función se llama continua unilateralmente en el punto analizado. Enunciemos esta definición más detalladamente.

Definición 11. *La función f: $X \to \boldsymbol{R}$ se llama continua por la izquierda, respectivamente por la derecha, en el punto $x_0 \in X$, si*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_-(x_0)}} f(x) = f(x_0),$$

respectivamente, si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_+(x_0)}} f(x) = f(x_0).$$

Ejemplo. Analicemos la función definida sobre todo el eje numérico e igual, para cada número real x, al mayor entero que sea menor o igual que x. Esta función tiene una notación especial $y = [x]$ y se lee "y es la parte entera de x" o "y es igual a entier x" *). Su gráfica se representa en la fig. 22. La función $[x]$ en los puntos ente-

*) entier, entero (del francés).

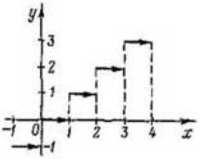


FIG. 22

ros $x = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, de la recta numérica es continua por la derecha y descontinua por la izquierda. En todos los otros puntos es continua tanto por la derecha como por la izquierda. De esta forma, en particular, la función $[x]$ es continua por la derecha en todos los puntos del eje numérico.

OBSERVACIÓN. Si para la función $f: X \to R$ existe el límite finito $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, y además, para todos los $x \in X$ se cumple la desigualdad $f(x) < a$ (respectivamente, la desigualdad $f(x) > a$), entonces se escribe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a - 0$ (respectivamente, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a + 0$). En este caso, si $a = 0$, entonces, en lugar de $0 + 0$ y $0 - 0$ se escribe simplemente $+0$ y -0.

5.10. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES DE LAS FUNCIONES

Todas las funciones analizadas en este punto están definidas sobre cierto conjunto $X \subset R$ y todos sus límites se toman por el conjunto X en cierto punto x_0, que es un punto de adherencia (finito o infinitamente alejado) del conjunto X. Recordemos que x_0 es un número real: $x_0 \in R$, entonces x_0 es un punto común de adherencia del conjunto X. Si $x_0 = \infty$, entonces el conjunto X no está acotado, y si $x_0 = +\infty$ o $x_0 = -\infty$, entonces el conjunto X no está acotado superior, respectivamente inferiormente.

1°. *Si la función $f: X \to R$ tiene límite finito en el punto x_0, entonces existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que la función f está acotada sobre la intersección $U(x_0) \cap X$ de este entorno con el conjunto de definición X de la función f.*

Corolario. *La función $f: X \to R$ continua en el punto $x_0 \in X$ está acotada sobre la intersección de cierto entorno de este punto con el conjunto X.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ un límite finito, entonces por la definición del p. 5, para cualquier $\varepsilon > 0$, en particular para $\varepsilon = 1$, existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que $f(X \cap U(x_0)) \subset U(a, 1)$, es decir, para todos los $x \in X \cap U(x_0)$ se cumple la inclusión $f(x) \in U(a, 1)$. Dicho de otro modo, para todos los $x \in X \cap U(x_0)$ es válida la desigualdad

$$a - 1 < f(x) < a + 1,$$

y esto significa que la función f está acotada sobre la intersección $X \cap U(x_0)$. □

El corolario se deriva directamente de la afirmación demostrada, ya que la continuidad de la función en el punto es un caso particular de la existencia del límite finito en el punto.

2 °. **(Lema sobre la conservación del signo).** *Si la función $f: X \to \boldsymbol{R}$ tiene en el punto x_0 límite diferente de cero: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, entonces existen un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 y el número $c > 0$ tales que para todos los puntos x del dominio X de la función f que pertenecen al entorno $U(x_0)$, es decir, para todos los $x \in X \cap U(x_0)$ se cumple la desigualdad*

$$\begin{aligned} f(x) &> c \quad \text{si} \quad a > 0, \\ f(x) &< -c \quad \text{si} \quad a < 0. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Corolario 1. *Si la función $f: X \to \boldsymbol{R}$ es continua en el punto $x_0 \in X$ y $f(x_0) \neq 0$, entonces existen un entorno $U(x_0)$ del punto x_0* y una constante c > 0 *tales que para todos los $x \in X \cap U(x_0)$ se cumple la desigualdad*

$$\begin{aligned} f(x) &> c \quad \text{si} \quad f(x_0) > 0, \\ f(x) &< -c \quad \text{si} \quad f(x_0) < 0. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Corolario 2. *Si la función $f: X \to \boldsymbol{R}$ es continua en el punto $x_0 \in X$ y $f(x_0) > c$ (respectivamente, $f(x_0) < c$), entonces existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que para todos los puntos $x \in X \cap U(x_0)$ se cumple la desigualdad $f(x) > c$ (respectivamente, $f(x) < c$).*

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 2 °. Sea $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \boldsymbol{R}$ y $a \neq 0$. Entonces, por la definición de límite, para cualquier $\varepsilon > 0$, en particular, para $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$ existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que para todos los $x \in X \cap U(x_0)$ se cumple la inclusión $f(x) \in U\left(a, \dfrac{|a|}{2}\right)$, es decir, es válida la desigualdad

$$a - \frac{|a|}{2} < f(x) < a + \frac{|a|}{2}.$$

Dicho de otro modo, cuando $a > 0$:

$$f(x) > a - \frac{|a|}{2} = \frac{a}{2} > 0$$

y cuando $a < 0$;

$$f(x) < a + \frac{|a|}{2} = -|a| + \frac{|a|}{2} = -\frac{|a|}{2} < 0.$$

De esta forma, la desigualdad (5.35) se cumple para $c = \dfrac{|a|}{2}$.

El corolario 1 se deriva de la afirmación demostrada, ya que en el caso de la continuidad de la función f en el punto x_0 su límite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ es finito e igual a $f(x_0)$. Como se ve de la demostración, en calidad de constante c, en este caso se puede tomar $c = \dfrac{|f(x_0)|}{2}$.

Para obtener la afirmación del corolario 2 es suficiente aplicar el corolario 1 a la función $f(x) - c$, la cual, como es fácil ver, también es continua en el punto x_0.

OBSERVACIÓN. Si en el punto x_0 la función $f\colon X \to R$ tiene el límite infinito igual a ∞, $+\infty$ o $-\infty$, entonces, para cualquier $c > 0$ tiene lugar la afirmación análoga a la propiedad 2°. Esto se deduce directamente de la definición de límite infinito enunciada en términos de desigualdades. Precisamente, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ (respectivamente, $+\infty$ o $-\infty$) significa que para cualquier $c > 0$ existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que para todos los $x \in X \cap U(x_0)$ se cumple la desigualdad $|f(x)| > c$ (respectivamente, la desigualdad $f(x) > c$ o $f(x) < -c$).

3°. *Si $f(x) = c$ es una constante $x \in X$, entonces* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$.

4°. *Si $f(x) \geqslant a$, $x \in X$, y existe el límite finito o infinito de signo determinado* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, *entonces*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \geqslant a. \tag{5.37}$$

5°. *Si $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$, $x \in X$, y existen los límites finitos o infinitos de signo determinado* $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = a$, *entonces*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a. \tag{5.38}$$

6°. *Si existen los límites finitos* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ *entonces existen también los límites finitos* $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)]$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\,g(x)$ *y si* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, *entonces existe el límite* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *además*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x), \tag{5.39}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\,g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x), \tag{5.40}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}. \tag{5.41}$$

Corolario 1. *Si existe el límite finito* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, *entonces para cualquier número* $c \in R$ *existe el límite* $\lim\limits_{x \to x_0} cf(x)$ *y además*

$$\lim_{x \to x_0} cf(x) = c \lim_{x \to x_0} f(x). \tag{5.42}$$

En el caso $c \neq 0$ la igualdad (5.42) es válida para los límites infinitos de signo determinado.

Corolario 2. *Si las funciones f y g son continuas en el punto $x_0 \in X$, entonces las funciones cf (c es una constante), $f + g$, fg y, si además $g(x_0) \neq 0$, también la función $\dfrac{f}{g}$ son continuas en el punto x_0.*

Observemos que según las suposiciones enunciadas en la afirmación 6 y su corolario 2, el cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, naturalmente, puede no estar definido sobre todo el conjunto X inicial, ya que en él pueden existir puntos x en los cuales $g(x) = 0$. No obstante, por la propiedad 2, de la condición $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$ se deduce que existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 sobre la intersección del cual con el conjunto X se cumple la desigualdad $g(x) \neq 0$ y por consiguiente, sobre esta intersección ya está definido el cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. En la fórmula (5.41) por límite se sobrentiende el límite de la restricción de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sobre el conjunto $U(x_0) \cap X$. Puesto que el límite de la función en el punto es una propiedad local (véase el p. 5.4 y el p. 5.7), este límite no depende de la elección del entorno $U(x_0)$ indicado.

Las propiedades 3 ° — 6 ° pueden ser demostradas con un método único, basado en las propiedades correspondientes de los límites de las sucesiones (véase el p. 4.9).

Demostremos, por ejemplo, la fórmula (5.40). Sea $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ y $b = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Entonces, por la definición 15 de límite de una función (véase el p. 5.9), para cualquier sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ son válidas las igualdades

$$a = \lim_{n \to \infty} f(x_n), \quad b = \lim_{n \to \infty} g(x_n).$$

Por esto, recordando que el límite del producto de sucesiones convergentes existe y es igual al producto de sus límites (véase el p. 4.9), obtendremos que existe el límite

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n)\, g(x_n) = ab. \tag{5.43}$$

Por cuanto este límite, siendo igual a ab, no depende de la elección de la sucesión $\{x_n\}$ indicada, entonces, por la misma definición 15, la igualdad (5.43) demostrada significa que

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = ab = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x). \ \square$$

El corolario 1 por la propiedad 3 es un caso particular de la fórmula (5.40). El corolario 2 se deriva directamente de la propiedad 6, por cuanto la continuidad de una función en el punto significa la existencia del límite finito para ella en este punto, igual al valor de la función en este punto. Por ejemplo,

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0)\, g(x_0), \tag{5.44}$$

ya que los límites $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ por la continuidad de las funciones f y g en el punto x_0 son iguales a $f(x_0)$ y $g(x_0)$, respectivamente. El cumplimiento de la igualdad (5.44) significa que el producto fg es continuo en el punto x_0.

5.11. FUNCIONES INFINITAMENTE PEQUEÑAS E INFINITAMENTE GRANDES

Supondremos que todas las funciones analizadas en este punto están definidas sobre el conjunto $X \subset R$ y analizaremos sus límites finitos o infinitos cuando el argumento tiende a un punto x_0 finito o infinitamente alejado.

Definición 12. *La función $\alpha: X \to R$ se llama infinitamente pequeña (infinitesimal) para $x \to x_0$, si*

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0. \tag{5.45}$$

Las funciones infinitamente pequeñas juegan un papel singular entre todas las funciones que tienen límite, relacionado, en particular, con que el concepto general de límite finito puede ser reducido al concepto de un infinitésimo. Enunciemos esta afirmación en forma de lema.

Lema 6. *El límite finito $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe y es igual a a si y sólo si $f(x) = a + \alpha(x)$, $x \in X$, donde $\alpha = \alpha(x)$ es un infinitésimo cuando $x \to x_0$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, entonces, haciendo $\alpha(x) = f(x) - a$, $x \in X$, obtendremos que $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - a = a - a = 0$.

Viceversa, si $f(x) = a + \alpha(x)$, $x \in X$ y $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a + \lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = a$. □

Teorema 3. *La suma y el producto de un número finito de infinitésimos para $x \to x_0$ y también el producto de un infinitésimo para $x \to x_0$ por una función acotada sobre X son infinitésimos cuando $x \to x_0$.*

DEMOSTRACIÓN. El hecho de que la suma y el producto de un número finito de infinitésimos son infinitésimos se deduce directamente de la propiedad de la suma y del producto de los límites de las funciones (véase la propiedad 6 en el p. 5.10), en el particular cuando estos límites son iguales a cero.

Demostremos la última afirmación del teorema. Sean $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ y $f(x)$ una función acotada, es decir, existe una constante $b > 0$ tal que para todos los $x \in X$ se cumple la desigualdad $|f(x)| \leqslant b$. Si $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, es una sucesión tal que $\lim\limits_{n \to x_0} x_n = 0$, entonces por la definición 15 de límite de una función (véase el p. 5.9) tendremos $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha(x_n) = 0$. Por cuanto para todos los $n = 1, 2, \cdots$ se cumple la desigualdad $|f(x_n)| \leqslant b$, entonces la sucesión $\{f(x_n)\}$ está acotada. Pero el producto de una sucesión infinitesimal, en el caso dado de la sucesión $\{\alpha(x_n)\}$, por una sucesión acotada, en el caso dado por $\{f(x_n)\}$, es una sucesión infinitesimal (véase la propiedad 2 ° en el p. 4.8), por eso $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)\alpha(x_n) = 0$. Por cuanto esto es cierto para cualquier sucesión $\{x_n\}$ indicada, entonces, por la definición de límite de una función, obtendremos $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\alpha(x) = 0$ y esto significa que la función $f(x)\alpha(x)$ es infinitamente pequeña cuando $x \to x_0$. □

Junto con las funciones infinitamente pequeñas, en el análisis, a menudo se encuentran las funciones infinitamente grandes. Definámoslas.

Definición 13. *La función $f: X \to R$ se llama infinitamente grande (infinita) para $x \to x_0$ si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty. \tag{5.46}$$

Entre las funciones infinitas e infinitesimales existe una estrecha relación. Precisamente, la magnitud inversa a una función infinita es infinitesimal y viceversa. Más exactamente, son válidas las siguientes afirmaciones.

Lema 7. *Si la función $f: X \to R$ es infinitamente grande para $x \to x_0$, entonces la función $\frac{1}{f}$ es infinitamente pequeña para $x \to x_0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Entonces, por la condición $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que para todos los puntos $x \in U(x_0) \cap X$ se cumple la desigualdad

$$|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$$

y por consiguiente, la desigualdad

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon.$$

Esto significa que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, es decir, que la función $\dfrac{1}{f(x)}$ es infinitesimal.

OBSERVACIÓN 1. Como siempre, cuando se habla de un cociente de funciones con un denominador que tiene límite diferente de cero, aqui por $\dfrac{1}{f(x)}$ se entiende, en general, el cociente de la división de 1 por la restricción de la función f sobre la intersección $U(x_0) \cap X$ del entorno $U(x_0)$ del punto x_0 con el dominio X de la función f tal que para todos los puntos $x \in U(x_0) \cap X$ la función f es diferente de cero. La existencia del entorno $U(x_0)$ indicado se deriva de la propiedad 2 de los límites de las funciones (véase el p. 5.10). Es más, esto fue obtenido otra vez en el proceso de demostración del lema 9: evidentemente de la condición $|f(x)| > \dfrac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, se deduce que $f(x) \neq 0$.

OBSERVACIÓN 2. Si al contrario $\alpha(x)$ es una función infinitamente pequeña para $x \to x_0$, entonces la magnitud inversa $\dfrac{1}{\alpha(x)}$, puede resultar que no estará definida sobre un conjunto para el cual el punto x_0 será un punto de adherencia (por ejemplo, a ciencia cierta, esto ocurre cuando $\alpha(x) \equiv 0$ sobre X) por esto, el concepto de $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{\alpha(x)}$ cuando $x \in X$ no tendrá sentido. No obstante, si X_0 es un subconjunto del conjunto X sobre el cual $\alpha(x) \neq 0$:

$$X_0 = \{x: x \in X,\ \alpha(x) \neq 0\}$$

y si x_0 es un punto de adherencia del conjunto X_0, entonces la función $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ está definida sobre X_0 y sobre este conjunto

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_0}} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty.$$

Precisamente en este caso, se dice que la función inversa a una infinitamente pequeña es infinitamente grande.

El hecho de que la función inversa a una infinitamente pequeña es infinitamente grande y viceversa, hace naturales las siguientes notaciones simbólicas que se utilizan a menudo para abreviar la escritura: para cualquier número $a > 0$ se escribe

$$\frac{a}{+0} = +\infty, \ \frac{a}{-0} = -\infty, \ \frac{a}{0} = \infty, \ \frac{a}{+\infty} = +0, \ \frac{a}{-\infty} = -0, \ \frac{a}{\infty} = 0. \qquad (5.47)$$

OBSERVACIÓN 3. Las propiedades de los límites finitos relacionadas con las operaciones aritméticas sobre los límites (véase la propiedad 6 en el p. 5.10) no se trasladan directamente a las funciones infinitamente grandes. No obstante, algunas analogías tienen lugar.

Por ejemplo, si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$. No obstante, sobre la existencia de cualquier límite $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)]$, en general, aquí no se puede afirmar nada. Se puede mostrar que las afirmaciones positivas sobre los límites infinitos tienen lugar en los casos para los cuales fueron definidas algunas "operaciones aritméticas" con infinitos por las fórmulas (5.47) y en el p. 3.1.

5.12. DIFERENTES FORMAS DE ESCRITURA DE LA CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

La condición de continuidad de la función f dada sobre el conjunto X en el punto x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (5.18)$$

se puede entender tanto en el sentido de la definición de límite de una función según Heine (véase la definición 1 en el p. 5.4) como en el sentido de la definición según Cauchy (véase la definición 9 en el p. 5.7). En el primer caso esto significa que para cualquier sucesión

$$x_n \in X, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0, \qquad (5.48)$$

se cumple la condición

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0). \qquad (5.49)$$

En el segundo caso, que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todos los puntos x que satisfacen la condición

$$|x - x_0| < \delta, \quad x \in X \qquad (5.50)$$

se cumple la desigualdad (fig. 23).

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \qquad (5.51)$$

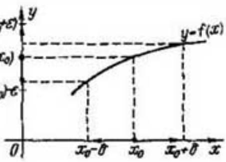


FIG. 23

El concepto de continuidad de una función enunciada en términos de sucesiones (definición (5.48) — (5.49)) representa la circunstancia que a menudo se encuentra en la práctica y que consiste en que en la medición indirecta de cierto valor y_0 de una magnitud y con ayuda del parámetro x, del cual depende continuamente esta magnitud: $y = f(x)$, se tiene la seguridad objetiva de que cuanto más exactamente obtengamos (como consecuencia de experimentos cualesquiera, mediciones o cálculos) sucesivamente los valores x_n, $n = 1, 2, \ldots$, que acercan los valores del parámetro x_0 al cual corresponde el valor y_0, más exactamente se obtendrán los valores aproximados correspondientes $y_n = f(x_n)$ de la magnitud $y_0 = f(x_0)$.

La definición (5.50) — (5.51) de continuidad de una función f en el punto x_0 se puede aún parafrasear de la forma: la función f es continua en el punto x_0 si cualquiera que sea el grado de exactitud dado $\varepsilon > 0$ para los valores de la función f, existe tal grado de exactitud $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ para el argumento, que en cuanto tomemos el valor del argumento x igual a x_0 con exactitud δ, es decir, que satisface la condición (5.50), y tomemos en él el valor de la función f, entonces obtendremos el valor $f(x_0)$ con el grado de exactitud dado, es decir, se cumplirá la desigualdad (5.51). Lo dicho, naturalmente, es una paráfrasis literaria de la definición (5.50) — (5.51), que aclara la representación intuitiva sobre una función continua.

Por cuanto la continuidad de una función en un punto es un caso particular de la existencia del límite de una función, entonces la definición de continuidad de una función en un punto se puede dar en términos de entornos, sólo hace falta agregarle a la condición (5.20) la exigencia: $x_0 \in X$. De esta forma, la función f definida sobre el conjunto X es continua en el punto si para cualquier entorno $U(y_0)$ del punto $y_0 = f(x_0)$ existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que se cumple la inclusión

$$f(U(x_0) \cap X) \subset U(y_0), \quad x_0 \in X. \tag{5.52}$$

Finalmente, trasladando la constante $f(x_0)$ en la igualdad (5.18) al segundo miembro, incluyéndola bajo el signo del límite y observando que la notación $x \to x_0$ en el límite de la función es equivalente a la notación $x - x_0 \to 0$ (véase el p. 5.4), obtendremos

$$\lim_{x - x_0 \to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0. \tag{5.53}$$

La diferencia $x - x_0$ se llama *incremento del argumento* y se denota por Δx, y la diferencia $f(x) - f(x_0)$, *incremento de la función* $y = f(x)$ correspondiente al incremento dado del argumento Δx y se denota por Δy. De esta forma,

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad x_0 \in X, \quad x \in X. \tag{5.54}$$

En esta notación, la igualdad (5.50) se transcribe de la forma

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \tag{5.55}$$

es decir, dicho descriptivamente, la continuidad de una función en un punto significa que a un incremento infinitamente pequeño del argumento le corresponde un incremento infinitamente pequeño de la función.

Ejemplos. 1. La función $f(x) = c$, donde c es una constante, es continua sobre toda la recta numérica.

En realidad, para cualquier $x_0 \in \boldsymbol{R}$ tiene lugar

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c = f(x_0). \ \square$$

2. La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua en cada punto $x_0 \neq 0$.

En realidad,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = -\frac{\Delta x_0}{(x_0 + \Delta x)x_0},$$

de donde para $x_0 \neq 0$ tenemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{(x_0 + \Delta x)x_0} = -\frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} (x_0 + \Delta x)x_0} = \frac{0}{x_0^2} = 0.$$

Esto, por (5.52) significa la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el punto $x_0 \neq 0$. $\square$

3. La función $f(x) = |\operatorname{sign} x|$ (véase la fig. 20) no es continua en el punto $x_0 = 0$, ya que el límite de esta función (por todo el eje numérico) en el punto $x_0 = 0$ simplemente no existe (véase el ejemplo 4 en el p. 5.4).

Ejercicios. 26. Aclárese con qué grado de exactitud es suficiente dar los valores del argumento de la función x^3 en un punto x_0 dado para obtener el valor de la función con un grado de exactitud $\varepsilon > 0$ dado.

27. Aclárese si la función

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \dfrac{1}{x} & \text{para} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{para} \quad x = 0 \end{cases}$$

es continua en el punto $x = 0$.

5.13. CLASIFICACIÓN DE LOS PUNTOS DE DISCONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Definición 14. *Supongamos que la función f está definida en cierto entorno del punto x_0 excepto, posiblemente, del propio punto.*

El punto x_0 se llama punto de discontinuidad de la función f si la función f no está definida en el punto x_0 o si está definida en este punto pero no es continua en él.

Ejercicio 28. Enúnciese en sentido positivo la definición de punto de discontinuidad de una función.

Definición 15. *Si x_0 es un punto de discontinuidad de la función f y existen los límites unilaterales finitos* [*)

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \quad \text{y} \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x),$$

entonces el punto x_0 se llama punto de discontinuidad de primer género.

La magnitud $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ se llama *salto de la función f* en el punto x_0. Si el salto de la función f en el punto de discontinuidad x_0 es igual a cero, es decir, $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$, entonces x_0 se llama *punto de discontinuidad evitable.*

El último término está justificado con que si en este caso se define de nuevo o se define la función f (si la función f no estaba definida en el punto x_0) haciendo

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0), \tag{5.56}$$

entonces se obtendrá una función continua en el punto x_0.

En efecto, mostremos que si para la función $f\colon X \to R$ se cumple la condición (5.56), entonces es continua en el punto x_0. Hagamos $X_1 = X \setminus \{x_0\}$ y $X_2 = \{x_0\}$. Por el teorema 2 del p. 5.9 de la igualdad $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$ se deduce que en el punto x_0 existe el límite de la función f por el conjunto X_1, y además, por la condición (5.56) es igual a $f(x_0)$:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_1}} f(x) = f(x_0).$$

Por otro lado, el límite de la función f cuando $x \to x_0$ por el conjunto $X_2 = \{x_0\}$ de un solo punto, evidentemente es igual a $f(x_0)$ (el límite de una constante es igual a esta propia constante):

$$\lim_{x \to x_0,\, x \in X_2} f(x) = f(x_0).$$

Por esto, por el lema 5 del p. 5.8, para $x \to x_0$ la función f tiene el límite igual a $f(x_0)$ por el conjunto $X = X_1 \cup X_2$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Esto significa que la función f es continua en el punto x_0.

El punto de discontinuidad de una función que no sea punto de discontinuidad de primer género se llama punto de discontinuidad de segundo género.

Es evidente que en los puntos de discontinuidad de segundo género al menos uno de los límites $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ o $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ no existe. Aquí, por límite, como comúnmente se hace, se entiende sólo límite finito.

Ejercicio 29. Enúnciese en sentido positivo la definición de punto de discontinuidad de segundo género.

Las funciones $\operatorname{sign} x$ (véase la fig. 17 en el p. 5.2) y $|\operatorname{sign} x|$ (véase la fig. 20 en el p. 5.4) tienen en el punto $x_0 = 0$ discontinuidad de primer género y además, para la

[*) Recordemos que límites unilaterales $f(x_0 - 0)$ y $f(x_0 + 0)$ se toman por el conjunto que no contiene el propio punto x_0.

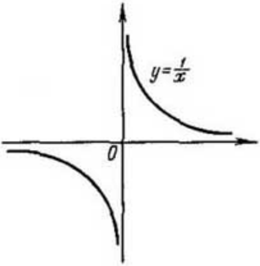


FIG. 24

función $|\operatorname{sign} x|$ es una discontinuidad evitable y las funciones $\frac{1}{x}$ (fig. 24) y sen $\frac{1}{x}$ (fig. 19 en el p. 5.4) en el punto $x_0 = 0$ tienen discontinuidad de segundo género.

5.14. LÍMITES DE LAS FUNCIONES MONÓTONAS

Definición 16. *La función f: $X \to R$, $X \subset R$ se llama creciente (decreciente) sobre el conjunto X si para cualesquiera $x_1 \in X$ y $x_2 \in X$ tales que $x_1 < x_2$, se cumple la desigualdad $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (respectivamente, la desigualdad $f(x_1) \geqslant \geqslant f(x_2)$).*

Las funciones crecientes (decrecientes) se llaman también no decrecientes (respectivamente no crecientes).

Si la función es creciente (decreciente) sobre el conjunto X, entonces también se dice que crece (decrece) sobre este conjunto.

Si la función f crece (decrece) sobre el conjunto X, entonces la función $-f$ obtenida de f con un cambio de signo para todos sus valores, es decir,

$$(-f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} -f(x), \quad x \in X,$$

es una función decreciente (creciente) sobre el conjunto X.

Las funciones crecientes y decrecientes sobre el conjunto X se llaman monótonas sobre este conjunto.

Teorema 4. *Supongamos que la función f: $X \to R$ crece sobre el conjunto X, $\alpha = \inf X$, $\beta = \sup X$ y además $\alpha \notin X$, $\beta \notin X$, entonces para la función f en el punto α existe el límite por la derecha y*

$$\lim_{x \to \alpha + 0} f(x) = \inf_{x \in X} f(x)$$

y en el punto β, el límite por la izquierda y

$$\lim_{x \to \beta - 0} f(x) = \sup_{x \in X} f(x).$$

De esta forma, si en las condiciones del teorema la función f está acotada superiormente, entonces en el punto β para ella existe el límite finito por la izquierda, y si f no está acotada superiormente, entonces $\lim\limits_{x \to \beta - 0} f(x) = +\infty$.

Por analogía, si la función f está acotada inferiormente, entonces en el punto α para ella existe el límite finito por la derecha y si f no está acotada inferiormente, entonces $\lim\limits_{x \to \alpha + 0} f(x) = -\infty$.

Afirmaciones semejantes son válidas también para las funciones decrecientes, que se pueden obtener pasando de la función f a la función $-f$.

Corolario. *Si la función f es monótona sobre el conjunto X, $x_0 \in \mathbf{R}$, los conjuntos $X_<(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{x\colon x \in X, x < x_0\}$ y $X_>(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{x\colon x \in X, x > x_0\}$ son no vacíos, y x_0 es un punto de adherencia de cada uno de ellos, entonces en el punto x_0 existen los límites unilaterales finitos*

$$f(x_0 - 0) = \sup_{X_>(x_0)} f(x) \quad \text{y} \quad f(x_0 + 0) = \inf_{X_>(x_0)} f(x), \tag{5.57}$$

además, en el caso de una función creciente

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0 + 0) \tag{5.58}$$

y en el caso de una decreciente

$$f(x_0 - 0) \geqslant f(x_0 + 0). \tag{5.59}$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Sea

$$b = \sup_{x \in X} f(x) \leqslant +\infty$$

y $\beta = \sup X$, $\beta \notin X$. Demos un entorno arbitrario $U(b)$ del punto b y sean η su extremo izquierdo. Evidentemente

$$\eta < b$$

y por esto, por la definición de cota superior de una función existe un punto $\xi \in X$ tal que

$$f(\xi) > \eta, \tag{5.60}$$

además, por las condiciones $\xi \in X$, $\beta = \sup X$ y $\beta \notin X$ tendremos

$$\xi < \beta.$$

Denotemos por $U(\beta)$ el entorno del punto β para el cual ξ es el extremo izquierdo (es decir, si β es un número real, entonces es el extremo izquierdo del intervalo $U(\beta, \varepsilon) = (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$, $\varepsilon = \beta - \xi$, y si $\beta = +\infty$, entonces es el extremo izquierdo del intervalo semiabierto infinito $(\xi, +\infty]$). Entonces para cualquier punto

$$x \in X \cap U(\beta) \tag{5.61}$$

tiene lugar la desigualdad (fig. 25)

$$\xi < x$$

y por consiguiente, en virtud del crecimiento de la función f, la desigualdad

$$f(\xi) \leqslant f(x).$$

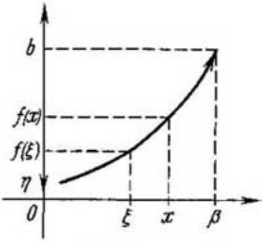


FIG. 25

Por esto, para todos los x que satisfacen la condición (5.61) tendremos (véase (5.60))

$$\eta < f(x) \leqslant \sup_X f(x) = b. \tag{5.62}$$

Recordando que el punto η es el extremo izquierdo del entorno $U(b)$ del punto b, obtendremos de (5.62) la inclusión

$$f(x) \in U(b).$$

De esta forma, para cualquier entorno $U(b)$ del punto b existe un entorno $U(\beta)$ del punto β tal que en cuanto $x \in X \cap U(\beta)$, se cumple la inclusión $f(x) \in U(\beta)$. Esto significa que

$$\lim_{x \to \beta - 0} f(x) = b = \sup_X f(x).$$

Análogamente se demuestra que $\lim\limits_{x \to \alpha + 0} f(x) = \inf\limits_X f(x)$. □

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Supongamos, para mayor exactitud, que la función f crece sobre el conjunto X y x_0 es un punto de adherencia de los conjuntos no vacíos $X_<(x_0)$ y $X_>(x_0)$. Entonces, para cualesquiera puntos $x' \in X_<(x_0)$ y $x'' \in X_>(x_0)$ es válida la desigualdad

$$f(x') \leqslant f(x'').$$

Por esto, la función f está acotada superiormente sobre el conjunto $X_<(x_0)$ por el número $f(x'')$ y está acotada inferiormente sobre el conjunto $X_>(x_0)$ por el número $f(x')$. Por lo tanto

$$\sup_{X_<(x_0)} f(x) \leqslant f(x''), \quad \inf_{X_>(x_0)} f(x) \geqslant f(x'). \tag{5.63}$$

En particular, las cotas superiores e inferiores indicadas son finitas y además, por cuanto la primera de las desigualdades (5.63) es válida para cualquier punto $x'' \in X_>(x_0)$, entonces, pasando en su segundo miembro a la cota inferior de los valores de la función sobre el conjunto $X_>(x_0)$ obtendremos

$$\sup_{X_<(x_0)} f(x_0) \leqslant \inf_{X_>(x_0)} f(x). \tag{5.64}$$

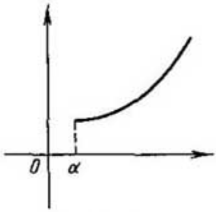


FIG. 26

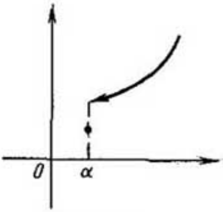


FIG. 27

Con esto culmina la demostración del corolario, ya que, por el teorema 4, los límites por la izquierda $f(x_0 - 0)$ y por la derecha $f(x_0 + 0)$ existen y además

$$f(x_0 - 0) = \sup_{X_{<}(x_0)} f(x), \quad f(x_0 + 0) = \inf_{X_{>}(x_0)} f(x)$$

por lo que las desigualdades (5.58) coinciden con la desigualdad (5.64). □

OBSERVACIÓN 1. En el teorema 4 para la función creciente $f: X \to R$ fueron analizados los casos cuando $\inf X = \alpha \notin X$ y $\sup X = \beta \notin X$. Si por ejemplo, $\alpha \in X$, entonces, como para una función arbitraria (no monótona), aquí son posibles dos casos: el límite $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x \in X}} f(x)$ puede existir (entonces la función f es continua en el punto α) (fig. 26) o no existir (fig. 27). Una situación análoga tiene lugar para el punto β.

OBSERVACIÓN 2. De la matemática elemental es conocido que la función

$$f(r) = a^r, \quad a > 0, \tag{5.65}$$

donde r es un número racional: $r \in Q$, es monótona sobre el conjunto de todos los números racionales Q (véase también el p. 2.6*). Por cuanto cualquier número real x es límite de números racionales (véase el corolario del lema 1 en el p. 4.10), entonces por el teorema 4 para cualquier $x \in R$ existen los límites $f(x - 0)$ y $f(x + 0)$ (por el conjunto de los números racionales ya que sólo por ellos está definida la función f aquí analizada). En el futuro (véase el p. 7.2) será mostrado que en el caso de la función (5.65) tiene lugar la igualdad

$$f(x - 0) = f(x + 0).$$

Este valor común de los límites unilaterales de la función (5.65) en el punto x se denota por a^x.

Este ejemplo muestra que el concepto de límite por los conjuntos se encuentra ya en las situaciones más simples.

OBSERVACIÓN 3*. Del teorema 4 se deduce que cualquier función monótona sobre un intervalo finito o infinito puede tener sólo puntos de discontinuidad de primer género, el conjunto de los cuales puede ser, a lo sumo, numerable (es decir, finito o numerable).

En realidad, supongamos para mayor exactitud, que la función f: $(a, b) \to R$ crece sobre el intervalo (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Ante todo, por el corolario del teorema 4, la función f en cada punto $x_0 \in (a, b)$ tiene límites finitos por la izquierda $f(x_0 - 0)$ y por la derecha $f(x_0 + 0)$ y por consiguiente puede tener sólo discontinuidades de primer género (véase la definición de punto de discontinuidad de primer género en el p. 5.13) y además no puede tener puntos de discontinuidad evitable. En efecto, si $x_0 \in (a, b)$, entonces para todos los $x' \in (a, x_0)$ y $x'' \in \in (x_0, b)$ por el crecimiento de la función f es válida la desigualdad

$$f(x') \leqslant f(x_0) \leqslant f(x''),$$

de donde

$$\sup_{(a, x_0)} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \inf_{(x_0, b)} f(x). \tag{5.66}$$

Por cuanto aquí $(a, x_0) = \{x \in (a, b) : x < x_0\}$ y $(x_0, b) = \{x \in (a, b) : x > x_0\}$, entonces por (5.57) la desigualdad (5.66) se puede escribir en la forma

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0). \tag{5.67}$$

Si x_0 fuera un punto de discontinuidad evitable, es decir, tuviera lugar la igualdad $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, entonces por (5.67) se cumpliría la condición

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$$

que significa (véase el p. 5.9) que f es continua en el punto x_0.

Así pues, si x_0 es un punto de discontinuidad de la función f, entonces

$$f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0).$$

Hagámosle corresponder a cada punto de discontinuidad x_0 de la función f el intervalo $(f(x_0 - 0), f(x_0 + 0))$ y mostremos que estos intervalos no se intersecan. En realidad, si x_1 y x_2 son dos puntos de discontinuidad de la función f y por ejemplo, $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1 + 0) \leqslant f(x_2 - 0)$. Demostremos esto. Por el crecimiento de la función f para cualesquiera puntos x' y x'' tales que $x_1 < x' < < x'' < x_2$ es válida la desigualdad $f(x') \leqslant f(x'')$. Pasando en esta desigualdad al límite cuando $x' \to x_1 + 0$, obtendremos $f(x_1 + 0) \leqslant f(x'')$. Haciendo tender x'' a x_2 por la izquierda: $x'' \to x_2 - 0$, tendremos

$$f(x_1 + 0) = f(x_2 - 0),$$

es decir, el extremo derecho del intervalo $(f(x_1 - 0), f(x_1 + 0))$ no es mayor que el extremo izquierdo del intervalo $(f(x_2 - 0), f(x_2 + 0))$. De aquí evidentemente se deduce que los intervalos indicados no se intersecan.

Así pues, a los puntos de discontinuidad de una función monótona f: $(a, b) \to R$ se puede poner en correspondencia biunívoca cierto sistema de intervalos que no se intersecan dos a dos. En cada uno de estos intervalos escojamos un número racional (tales números siempre existen en virtud de que el conjunto de los números racionales es siempre denso en el eje numérico, véase la observación en el p. 4.11*). Como resultado se obtendrá ua correspondencia biunívoca entre lol intervalos del sistema indicado y por consiguiente entre los puntos de discontinuidad de la función f y cierto subconjunto del conjunto de los números racionales. Pero cualquier subconjunto de un conjunto numerable (como es el conjunto de los números racionales, véase el p. 4.11*) es finito o numerable, por consiguiente, el conjunto de los puntos de discontinuidad de una función monótona es finito o numerable.

5.15. CRITERIO DE CAUCHY DE EXISTENCIA DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

En el presente punto por analogía con el caso de las sucesiones será obtenida la condición necesaria y suficiente para que la función tenga límite finito en un punto x_0 dado y además, esta condición será enunciada sólo en términos de los valores de la propia función por lo que el propio valor del límite indicado, en esta condición no participa.

Como antes, por punto x_0 se entiende un número real o uno de los infinitos ∞, $+\infty$ o $-\infty$ y el punto x_0 es punto de adherencia del conjunto de definición de la función analizada.

Teorema 5 (criterio de Cauchy). *Para que la función $f: X \to R$ tenga límite finito en el punto x_0 es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que para cualesquiera $x' \in U(x_0) \cap X$ y $x'' \in U(x_0) \cap X$ se cumpla la desigualdad*

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sean $f: X \to R$ y $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in R$. Esto significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 que para cada $x \in U(x_0) \cap X$ es válida la desigualdad

$$|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.68}$$

Sean $x' \in U(x_0) \cap X$ y $x'' \in U(x_0) \cap X$, entonces por (5.68) tendremos

$$|f(x'') - f(x')| = |[f(x'') - a] + [a - f(x')]| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x'') - a| + |a - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \ \square$$

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Sea $f: X \to R$ una función tal que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que para todos los

$$x' \in U(x_0) \cap X, \ x'' \in U(x_0) \cap X \tag{5.69}$$

se cumple la desigualdad

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon. \tag{5.70}$$

Mostremos que de aquí se deduce la existencia para f del límite finito en el punto x_0. Tomemos cualquier sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \tag{5.71}$$

y demos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Para este ε, por la suposición hecha, existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 que satisface las condiciones (5.69) — (5.70). Por la condición

(5.71) para este entorno $U(x_0)$ existe un $n_0 \in N$ tal que para todos los $n > n_0$, $n \in N$, tiene lugar $x_n \in U(x_0)$ y ya que $x_n \in X$, entonces $x_n \in U(x_0) \cap X$, $n = n_0 + 1$, $n_0 + 2$, ... De aquí, recordando las suposiciones (5.69) — (5.70) obtendremos que para todos los $n > n_0$ y todos los $m > n_0$ se cumple la desigualdad

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

es decir, la sucesión $\{f(x_n)\}$ satisface las condiciones del criterio de Cauchy para las sucesiones numéricas (véase el p. 4.7) y por consiguiente converge.

De esta forma, para cada sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge. De aquí, como es conocido (véase el lema 4 en el p. 5.6), se deduce la existencia del límite finito $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. □

En el caso cuando x_0 es un número la condición de Cauchy se puede enunciar de la siguiente forma.

Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x' \in X$ y $x'' \in X$, que satisfacen las condiciones $|x' - x_0| < \delta$, $|x'' - x_0| < \delta$ se cumple la desigualdad

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

En el caso cuando $x_0 = \infty$ la condición de Cauchy se puede dar de la siguiente forma.

Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x' \in X$ y $x'' \in X$ que satisfacen las condiciones $|x'| > \delta$, $|x''| > \delta$ se cumple la desigualdad

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

Para el caso de los límites unilaterales la condición de Cauchy se puede parafrasear sin el término de entorno, de la siguiente forma: para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un η ($\eta < x_0$ cuando se analiza el límite por la izquierda y $\eta > x_0$ cuando el límite por la derecha), tal que para cualesquiera $x' \in X$ y $x'' \in X$ que satisfacen la condición $\eta < x' \leqslant x_0$, $\eta < x'' \leqslant x_0$ ó, respectivamente, $x_0 \leqslant x' < \eta$, $x_0 \leqslant x'' < \eta$ se cumple la desigualdad $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Señalemos que todos estos criterios de existencia del límite de una función, relacionados con diferentes casos y que tienen diferentes enunciados, gracias a la terminología acertadamente escogida (el concepto de entorno) obtuvieron una demostración única.

5.16. LÍMITE Y CONTINUIDAD DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Analicemos la cuestión sobre la existencia de los límites finitos e infinitos de las composiciones de funciones, cada una de las cuales tiene el límite correspondiente.

Si f: $X \to R$, g: $X \to R$ y se cumple la condición $f(X) \subset Y$, entonces sobre el conjunto X está definida la composición $g_0 f$ de las funciones f y g o como se dice, la función compuesta $g[f(x)]$. Se analizarán los límites finitos o infinitos $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim\limits_{y \to y_0} g(y)$ donde x_0 e y_0 se supondrán puntos de adherencia finitos o infinitamente alejados (véase el p. 5.4) de los conjuntos (X) y $f(X)$, respectivamente.

Teorema 6. *Supongamos que f: $X \to R$, g: $Y \to R$, $f(X) \subset Y$ y existen los límites finitos o infinitos*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \tag{5.72}$$

$$\lim_{y \to y_0} g(y), \tag{5.73}$$

entonces, cuando $x \to x_0$ existe también el límite (finito o infinito) de la función compuesta $g[f(x)]$ y además

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = \lim_{y \to y_0} g(y).$$

Corolario. *Si f: $X \to R$, g: $Y \to R$, $f(X) \subset Y$ y la función f es continua en el punto $x_0 \in X$ y la función g es continua en el punto $y_0 = f(x_0)$, entonces la función $g[f(x)]$ es continua en el punto x_0.*

Más brevemente, pero menos exacto la función continua de una función continua es continua.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Denotemos el valor del límite (5.73) por z_0:

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = z_0$$

(z_0 es un número o uno de los infinitos) y fijemos de forma arbitraria un entorno $U = U(z_0)$ del punto z_0. Entonces, por la definición de límite, existe un entorno $V = V(y_0)$ del punto y_0 que si

$$y \in Y \cap V(y_0), \tag{5.74}$$

entonces

$$g(y) \in U(z_0). \tag{5.75}$$

Más adelante, para el entorno $V(y_0)$ obtenido, por la existencia del límite (5.72) se encuentra un entorno $W = W(x_0)$ tal que si

$$x \in X \cap W(x_0), \tag{5.76}$$

entonces

$$f(x) \in V(y_0)$$

y ya que $f(x) \in Y$, entonces

$$f(x) \in Y \cap V(y_0). \tag{5.77}$$

Del cumplimiento de las condiciones (5.76) — (5.77) por (5.74) — (5.75) para $y = f(x)$ tenemos: si se cumple la inclusión (5.76), entonces

$$g[f(x)] \in U(z_0)$$

(véase la fig. 28). Por cuanto el entorno $U(z_0)$ del punto z_0 era arbitrario, esto significa que cuando $x \to x_0$ para la función $g[f(x)]$ existe el límite igual a z_0:

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = z_0 = \lim_{y \to y_0} g(y). \ \square$$

La afirmación del corolario es un caso particular del teorema cuando $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ y $\lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0)$ (en estas suposiciones los puntos x_0 e

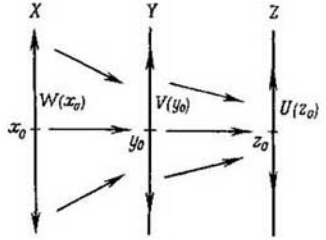


FIG. 28

y_0 perteneciendo a los conjuntos X y Y, respectivamente, siempre son sus puntos de adherencia):
$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = \lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0) = g[f(x_0)].$$

OBSERVACIÓN 1. Si $f: X \to \boldsymbol{R}$, $g: Y \to \boldsymbol{R}$, existe el límite (5.72) y el conjunto Y contiene cierto entorno $V(y_0)$ del punto y_0:
$$V(y_0) \subset Y, \tag{5.78}$$
entonces, por la existencia del límite (5.72) se encuentra un entorno $W = W(x_0)$ del punto x_0 tal que
$$f(X \cap W) \subset V(y_0) \subset Y$$
y por consiguiente para la restricción f_0 de la función f sobre el conjunto $X \cap W$ se cumple la inclusión
$$f_0(X \cap W) \subset Y. \tag{5.79}$$

De esta forma, si pasamos a la restricción f_0 de la función f, entonces en la suposición complementaria indicada (5.78), en las condiciones del teorema 7 se puede no exigir la existencia de la composición de las funciones g y f_0, es decir, el cumplimiento de la condición $f(X) \subset Y$, pues en el sentido indicado anteriormente ella se cumple automáticamente, precisamente tiene lugar la inclusión (5.79) y por esto existe la composición $g_0 f_0$.

OBSERVACIÓN 2. La afirmación del corolario del teorema 7 se puede escribir en forma de fórmula
$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = g[\lim_{x \to x_0} f(x)] \tag{5.80}$$
de la cual se ve que, dicho en sentido figurado, *la operación del paso límite es permutable con la operación de composición con una función continua.*

En realidad, la parte izquierda de la igualdad (5.80) por la continuidad de la función $g[f(x)]$ en el punto x_0 (véase el corolario del teorema 6) es igual a $g[f(x_0)]$. A este mismo valor $g[f(x_0)]$ es igual la parte derecha de la igualdad, pero ya por la continuidad de la función f en el mismo punto x_0.

OBSERVACIÓN 3. La fórmula demostrada en el teorema 7
$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = \lim_{y \to y_0} g(y), \tag{5.81}$$

donde $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ se puede analizar como *la regla del cambio de variable para el cálculo de los límites de las funciones compuestas.*

Utilizando la notación de la composición de funciones $g_0 f$ la igualdad (5.81) se puede escribir en la forma

$$\lim_{x \to x_0} (g_0 f)(x) = \lim_{y \to y_0} g(y).$$

OBSERVACIÓN 4. Sean $f: X \to \boldsymbol{R}$, $g: Y \to \boldsymbol{R}$ y $f(X) \subset Y$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$. En este caso, por el teorema 6, de la existencia del límite (finito o infinito), que aparece en el segundo miembro de la igualdad (5.81), se deduce la existencia del límite correspondiente en el primer miembro y la igualdad de estos límites. Si además, la aplicación $f: X \to Y$ es una aplicación biunívoca del conjunto X *sobre el conjunto* Y, es decir, sobre Y existe la función inversa unívoca f^{-1} y si $\lim\limits_{y \to y_0} f^{-1}(y) = x_0$, entonces viceversa, de la existencia del límite finito o infinito que aparece en el primer miembro de la igualdad (5.81) se deduce la existencia del límite correspondiente que aparece en el primer miembro.

De esta forma, *según las suposiciones hechas, el límite (finito o infinito)* $\lim\limits_{x \to x_0} g[f(x)]$ *existe si y sólo si existe el límite* $\lim\limits_{y \to y_0} g(y)$ *(respectivamente, finito o infinito) y además, en el caso de que existan son iguales.*

En un sentido esta afirmación es el contenido del teorema 6. En el otro, también se deduce de este teorema si lo aplicamos a la composición $(g_0 f) \circ f^{-1}$ de las funciones f^{-1} y $g \circ f$. Por el teorema 6, de la existencia de los límites $\lim\limits_{y \to y_0} f^{-1}(y) = x_0$ y $\lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x)$ se deduce que existe el límite

$$\lim_{y \to y_0} ((g \circ f) \circ f^{-1})(y) = \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x),$$

pero $(g \circ f) \circ f^{-1} = g \circ (f \circ f^{-1}) = g$. De esta forma, existe el límite $\lim\limits_{y \to y_0} g(y)$ y $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = \lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x)$.

§ 6. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS SOBRE LOS INTERVALOS

6.1. ACOTACIÓN DE LAS FUNCIONES CONTINUAS. VALORES EXTREMALES

En el presente párrafo será estudiada una serie de propiedades importantes de las funciones continuas y que encuentran muchas aplicaciones.

Definición 1. *La función* $f: X \to \boldsymbol{R}$, $X \subset \boldsymbol{R}$ *se llama continua sobre el conjunto* X, *si es continua por* X *en cada uno de sus puntos* (véase las definiciones 5 y 8 en el p. 5.6).

Una clase importante de funciones continuas es la clase de funciones continuas sobre los intervalos del eje numérico. Comencemos su estudio por las funciones continuas sobre los segmentos. Si la función f es continua sobre el segmento $[a, b]$

entonces su continuidad en el punto $x = a$ es equivalente a la continuidad por la derecha y su continuidad en el punto $x = b$, a la continuidad por la izquierda en este punto.

Diremos que la función $f: X \to R$ alcanza sobre el conjunto X su cota superior (inferior) $\beta = \sup_X f$ ($\alpha = \inf_X f$) si existe un punto $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = \beta$ (respectivamente, $f(x_0) = \alpha$).

Teorema 1 (de Weierstrass). *Cualquier función continua sobre un segmento está acotada y alcanza sobre él su cota superior y su cota inferior.*

DEMOSTRACIÓN. Sea la función f continua sobre el segmento $[a, b]$ y sea

$$M = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x);$$

M, como cualquier cota superior de un conjunto no vacío de números, puede ser finita o infinita, igual a $+\infty$. Mostremos que $M < +\infty$ y que existe un punto $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = M$.

Escojamos cualquier sucesión de números a_n, $n = 1, 2, \ldots$, tales que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = M, \quad a_n < M, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{6.1}$$

Por la definición de cota superior de una función, para cada a_n, $n = 1, 2, \ldots$, existe un punto $x_n \in [a, b]$ tal que

$$f(x_n) > a_n, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{6.2}$$

Por otro lado, por cuanto M es la cota superior de la función f, entonces para todos los puntos $x \in [a, b]$ es válida la desigualdad

$$f(x) \leqslant M. \tag{6.3}$$

La sucesión $\{x_n\}$ está acotada: $a \leqslant x_n \leqslant b$, $n = 1, 2, \ldots$, por lo que por el teorema de Bolzano — Weierstrass (véase el p. 4.6) de ella se puede extraer una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}$

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0. \tag{6.4}$$

Por cuanto $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$, $k = 1, 2, \ldots$, entonces (¿por qué?), también $a \leqslant$ $\leqslant x_0 \leqslant b$.

De las desigualdades (6.2) y (6.3) se deduce que para todos los $k = 1, 2, \ldots$, son válidas las desigualdades

$$a_{n_k} < f(x_{n_k}) \leqslant M. \tag{6.5}$$

El límite de cualquier subsucesión de una sucesión que tiene límite finito o infinito es igual al límite de toda la sucesión, por lo que de (6.1) tenemos $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = M$. Pasando en (6.5) al límite cuando $k \to \infty$ obtenemos

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = M. \tag{6.6}$$

Por otro lado, por la continuidad de la función f sobre el segmento $[a, b]$, ella es continua en el punto x_0 de este segmento, y por consiguiente, de (6.4) se deduce que

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0). \tag{6.7}$$

De (6.6) y (6.7) obtenemos $M = f(x_0)$.

De esta forma está demostrado que la cota superior M de la función f coincide con el valor de la función en el punto x_0 y por consiguiente es finita. Por eso, la función f está acotada superiormente y su cota superior se alcanza en el punto $x_0 \in [a, b]$.

Análogamente se demuestra que una función continua sobre un segmento está acotada inferiormente y que alcanza sobre él su cota inferior. □

El teorema análogo al teorema 1 no es válido para los intervalos que no son segmentos, de esto es fácil convencerse construyendo los ejemplos correspondientes. Por ejemplo, la función $y = \dfrac{1}{x}$ es continua en cada punto del intervalo (0; 1) y junto con esto no está acotada sobre él; la función $y = x$ es continua sobre todo el eje numérico y no está acotada sobre él.

Señalemos además, que si la función f es continua no sobre un segmento, sino sobre un intervalo de otro tipo e incluso, además está acotada sobre él, en general, no tiene valor máximo y mínimo. Por ejemplo, las funciones $y = x$ sobre el intervalo (0; 1) e $y = \operatorname{arctg} x$ sobre toda la recta numérica, aunque son continuas (la continuidad de la función $y = \operatorname{arctg} x$ será demostrada en el p. 7.3) y están acotadas en los intervalos indicados, no alcanzan sus cotas superiores e inferiores.

Ejercicio 1. Sea la función f definida y continua sobre el segmento $[a, b]$ y $f(x) > 0$ para todos los $x \in [a, b]$. Entonces existe $c > 0$ tal que $f(x) > c$ para todos los $x \in [a, b]$.

6.2. VALORES INTERMEDIOS DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

Teorema 2 (de Bolzano — Cauchy). *Si la función f es continua sobre el segmento $[a, b]$ y $f(a) = A$, $f(b) = B$, entoces para cualquier C incluida entre A y B existe un punto $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = C$.*

Dicho de otro modo, *una función continua sobre un segmento, tomando dos valores cualesquiera, toma cualquier valor que se encuentre entre ellos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea para mayor exactitud $f(a) = A < B = f(b)$, $A < C < B$. Dividamos al segmento $[a, b]$ con el punto x_0 en dos segmentos iguales por longitud, entonces o bien $f(x_0) = C$ y el punto buscado $\xi = x_0$ se ha encontrado, o bien $f(x_0) \neq C$ y entonces sobre los extremos de uno de los segmentos obtenidos la función f toma valores que están por lados diferentes del número C, más exacto, en el extremo izquierdo el valor es menor que C y en el derecho, mayor.

Denotemos este segmento por $[a_1, b_1]$ y dividámoslo de nuevo en dos segmentos iguales por longitud, etc. Como resultado después de un número finito de pasos o bien llegamos al punto ξ buscado, en el cual $f(\xi) = C$ o bien obtendremos una sucesión de segmentos encajados $[a_n, b_n]$ que tienden a cero por su longitud y tales que

$$f(a_n) < C < f(b_n). \tag{6.8}$$

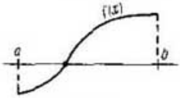


FIG. 29

Sea ξ el punto común de todos los segmento $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ (véase el p. 3.6). Como sabemos (véase (4.9)), $\xi = \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$. Por esto, por la continuidad de la función f

$$f(\xi) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} f(b_n). \tag{6.9}$$

De (6.8) obtendremos (véase el p. 4.3)

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) \leqslant C \leqslant \lim_{n \to \infty} f(b_n). \tag{6.10}$$

De (6.9) y (6.10) se deduce que $f(\xi) = C$. □

Corolario 1. *Si una función es continua sobre un segmento y en sus extremos toma valores de diferente signo, entonces en este segmento existe al menos un punto en el cual la función se iguala a cero.*

Este corolario es un caso particular del teorema (fig. 29).

Corolario 2. *Sea f una función continua sobre el segmento $[a, b]$ y $M = \sup f$, $m = \inf f$. Entonces la función f toma todos los valores del segmento $[m, M]$ y sólo estos valores.*

Para la demostración observemos que si $M = \sup\limits_{[a, b]} f$, $m = \inf\limits_{[a, b]} f$, entonces $m \leqslant f(x) \leqslant M$ y por el teorema 1, existen los puntos $\alpha \in [a, b]$ y $\beta \in [a, b]$ tales que $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$. Ahora el corolario analizado se deduce directamente del teorema 2 aplicándolo al segmento $[\alpha, \beta]$ si $\alpha \leqslant \beta$ o, respectivamente, al segmento $[\beta, \alpha]$ si $\beta < \alpha$.

De esta forma, *el conjunto de todos los valores de la función dada, continua sobre cierto segmento es también un segmento.*

Señalemos que la propiedad de las funciones continuas de tomar todos los valores intermedios es válida para cualquier intervalo (finito o infinito). Precisamente: si una función continua sobre cierto intervalo toma en dos de sus puntos a y b, y además $a < b$, dos valores cualesquiera, entonces toma cualquier valor intermedio. En realidad, por el teorema 2, la función analizada, a ciencia cierta, toma el valor indicado en algún punto del segmento $[a, b]$ que es una parte del intervalo inicial.

OBSERVACIÓN. Tanto en el teorema 1 como en el teorema 2 fue demostrada la existencia del punto sobre el segmento dado, en el cual el valor de la función continua analizada posee determinada propiedad (en el primer teorema en este punto se alcanza el valor extremal, en el segundo se toma el valor intermedio dado). No obstante, entre los métodos aplicados para la demostración de estas afirmaciones se tiene una diferencia sustancial. El método de demostración del teorema 2 da la posibilidad no sólo de demostrar en el caso general la existencia del punto indicado, sino en realidad hallarlo con cualquier grado de exactitud dado, para cada función concreta: es necesario dividir el segmento en el cual se busca el punto, un número suficiente de veces por la mitad, eligiendo cada vez una mitad según la regla indicada en la demostración; los extremos del segmento obtenido serán los valores aproximados del punto indicado.

El método de demostración del teorema 1 no permite indicar un medio con ayuda del cual para cada función continua sobre el segmento sea posible hallar los puntos en los cuales ésta toma sus valores extremales. Esto está condicionado por que la demostración de este teorema está basada en el teorema de Bolzano — Weierstrass que afirma sólo la posibilidad de extraer de cada sucesión acotada una subsucesión convergente. Un método concreto, o como se acostumbra decir, un *algoritmo* para la extracción de cualquier sucesión acotada una subsucesión convergente, no existe.

Observemos además, que en la utilización de cualquier algoritmo en la práctica es importante con qué rapidez éste nos lleva al objetivo. Desde este punto de vista, en la resolución aproximada de la ecuación $f(x) = 0$ comúnmente se aplica no el método de la división sucesiva del segmento por la mitad, sino otros algoritmos que nos llevan al objetivo más rápidamente (véase el Complemento al final del segundo tomo, § 60).

Problema 6. Demuéstrese que una función continua y periódica sobre todo el eje numérico diferente de una constante tiene un periodo mínimo. Cítese un ejemplo de función periódica definida sobre todo el eje numérico y diferente de una constante, que no tenga periodo mínimo.

6.3. FUNCIONES INVERSAS

Definición 2. *La función f definida sobre un conjunto numérico X se llama estrictamente creciente* (*estrictamente decreciente*) *si para dos números cualesquiera $x_1 \in X$ y $x_2 \in X$ tales que $x_1 < x_2$ se cumple la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ (respectivamente $f(x_1) > f(x_2)$).*

Una función estrictamente creciente o estrictamente decreciente se llama estrictamente monótona.

Si una función es estrictamente creciente (decreciente) sobre el conjunto X, entonces diremos también que crece (decrece) estrictamente sobre este conjunto.

Es evidente que una función estrictamente monótona (creciente, decreciente) es también simplemente monótona (respectivamente, creciente, decreciente), en el sentido de la definición 16 del p. 5.14.

Lema 1. *Supongamos que la función f crece* (*decrece*) *estrictamente sobre cierto conjunto $X \in R$ y sea Y el conjunto de sus valores. Entonces la función inversa f^{-1}* (*véase* el p. 1.2*) *es una función unívoca, estrictamente creciente* (*decreciente*) *sobre el conjunto Y.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, para mayor exactitud, que la función f crece monótonamente sobre el conjunto X. Demostremos que la función inversa es unívoca.

Supongamos lo contrario. Supongamos que existe un punto $y \in Y$ tal que el conjunto $f^{-1}(y)$ contiene al menos dos puntos diferentes x_1 y x_2:

$$x_1 \in f^{-1}(y) \quad \text{y} \quad x_2 \in f^{-1}(y), \quad x_1 \neq x_2,$$

por consiguiente

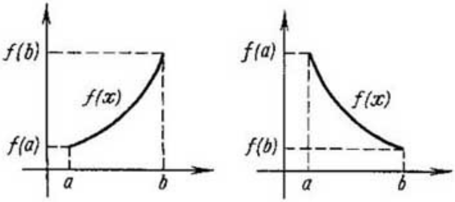


FIG. 30

$$f(x_1) = f(x_2). \tag{6.11}$$

Para dos números x_1 y x_2, $x_1 \neq x_2$ es válida una de las desigualdades: $x_1 < x_2$ ó $x_1 > x_2$; en el primer caso, por el crecimiento monótono estricto de la función f tenemos $f(x_1) < f(x_2)$ y en el segundo $f(x_1) > f(x_2)$, es decir, en ambos casos la igualdad (6.11) no se cumple. De esta forma, para cada $y \in Y$ el conjunto $f^{-1}(y)$ está compuesto exactamente por un punto, es decir, la función f^{-1} es unívoca.

Demostremos ahora que la función f^{-1} crece estrictamente sobre el conjunto Y. Sea

$$y_1 < y_2, \quad y_1 \in Y, \quad y_2 \in Y \tag{6.12}$$

y sean $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Por consiguiente $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Para dos números cualesquiera x_1 y x_2 es válida una de las tres relaciones: o bien $x_1 > x_2$, o bien $x_1 = x_2$, o bien $x_1 < x_2$. Si $x_1 > x_2$ ó $x_1 = x_2$, entonces respectivamente sería $y_1 > y_2$ (por el crecimiento mónotono estricto de la función f) o $y_1 = y_2$ (por la univocidad), lo cual estaría en contradicción con la desigualdad (6.12). De esta forma, de la desigualdad (6.12) se deduce que $x_1 < x_2$ y esto significa el crecimiento estricto de la función f^{-1} sobre el conjunto Y.

En el caso del decrecimiento estricto de la función f sobre el conjunto, la demostración se puede o bien realizar de forma análoga, o bien llevarla al caso ya analizado con el análisis de la función $-f$, ya que cuando la función f decrece estrictamente sobre el conjunto x, la función $-f$ crece estrictamente sobre este conjunto. □

Teorema 3. *Supongamos que la función f está definida, crece (decrece) estrictamente y es continua sobre el segmento* $[a, b]$, *entonces la función inversa* f^{-1} *está definida, es unívoca, crece (decrece) estrictamente y es continua sobre el segmento con extremos en los puntos* $f(a)$ *y* $f(b)$ (fig. 30).

DEMOSTRACIÓN. Realicemos la demostración del teorema para las funciones estrictamente crecientes. Sean $c = f(a)$, $d = f(b)$.

Mostremos que el dominio de la función inversa f^{-1} es el segmento $[c, d]$ o lo que es lo mismo, que $[c, d]$ es el conjunto de valores de la función f. En realidad, del crecimiento monótono de la función f se deduce que $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$, es decir, que $f(x) \in [c, d]$ para cualquier $x \in [a, b]$. Por otro lado, cualquiera que sea $y \in [c, d]$, es decir, $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, por el teorema 2 existe un punto $x \in [a, b]$ tal que

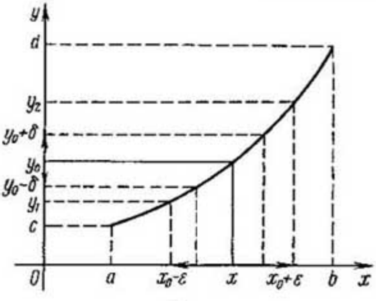


FIG. 31

$f(x) = y$. De esta forma, todos los valores de la función f dada están sobre el segmento $[c, d]$ y cada punto de este segmento es valor de la función f en cierto punto. Esto significa que el segmento $[c, d]$ es el conjunto de valores de la función f.

Señalemos que esta afirmación se deduce también del corolario 2 del teorema 2 si observamos que en el caso dado

$$c = \min_{[a, b]} f(x), \; d = \max_{[a, b]} f(x).$$

En virtud del lema, la función f^{-1} es unívoca y crece estrictamente sobre el segmento $[c, d]$.

Mostremos, finalmente, que la función f^{-1} es continua sobre $[c, d]$. Sean $y_0 \in [c, d]$ y $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Sea $c < y_0 < d$, es decir, y_0 es un punto interior del segmento $[c, d]$, entonces por el crecimiento estricto de la función f^{-1} también $a < x_0 < b$. Fijemos cierto $\varepsilon > 0$. Sin perder generalidad en los razonamientos futuros se puede considerar (¿por qué?), que ε es tal que

$$a \leqslant x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon \leqslant b. \tag{6.13}$$

Sean $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. Entonces de la condición (6.13) por el crecimiento estricto de la función f se deduce que

$$c \leqslant y_1 < y_0 < y_2 \leqslant d.$$

Tomemos $\delta > 0$ de forma tal que $y_1 \leqslant y_0 - \delta < y_0 + \delta \leqslant y_2$ (fig. 31). Si ahora escogemos y de forma tal que $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$, entonces con más razón

$$y_1 < y < y_2,$$

y por consiguiente, por el crecimiento estricto de la función f^{-1} es válida la desigualdad

$$x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_0 + \varepsilon.$$

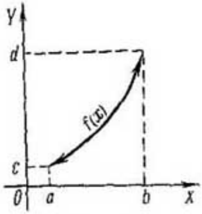


FIG. 32

De esta forma, para $\varepsilon > 0$ está indicado $\delta > 0$ tal que para todos los $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ se cumple la desigualdad

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon,$$

es decir, la función f^{-1} es continua en el punto y_0. Si ahora $y_0 = c$ o $y_0 = d$, entonces con razonamientos análogos se demuestra que la función f^{-1} es continua por la derecha en el punto c y continua por la izquierda en el punto d.

El teorema para las funciones estrictamente crecientes está demostrado completamente.

Recordemos que la función f decrece estrictamente si y sólo si la función $-f$ crece estrictamente, por lo que la validez del teorema para las funciones estrictamente decrecientes se deduce del caso analizado. □

Analicemos ahora el caso de una función definida sobre un intervalo.

Teorema 4. *Supongamos que la función f está definida, crece (decrece) estrictamente y es continua sobre el intervalo (a, b) (finito o infinito) y sean*

$$c = \lim_{x \to a+0} f(x), \quad d = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

Entonces la función inversa f^{-1} está definida, es unívoca, crece (decrece) estrictamente y es continua sobre el intervalo (finito o infinito) con extremos c y d (fig. 32).

Además, en el caso cuando $a = -\infty$ por $\lim\limits_{x \to -\infty+0} f(x)$ se entiende $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y en el caso $b = +\infty$ por el límite $\lim\limits_{x \to +\infty-0} f(x)$ el límite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos para mayor exactitud, que la función f crece estrictamente en el intervalo (a, b). Mostremos que en este caso el conjunto de sus valores es el intervalo (c, d). En efecto, por el teorema sobre los límites de las funciones monótonas (véase el p. 5.14) tenemos: $c = \inf\limits_{(a, b)} f$, $d = \sup\limits_{(a, b)} f$ y por consiguiente para cualquier $x \in (a, b)$ es válida la desigualdad $c \leqslant f(x) \leqslant d$. Es más para todos los $x \in (a, b)$ se cumplen también las desigualdades $f(x) \neq c$, $f(x) \neq d$. En realidad, si por ejemplo, existiera un x_0 tal que $a < x_0 < b$ y $f(x_0) = c$ (esto, evidentemente, es posible sólo cuando la cota inferior c es finita), entonces para $a < x < x_0$ se cumpliría la desigualdad $f(x) < f(x_0) = c$, lo cual estaría en contra-

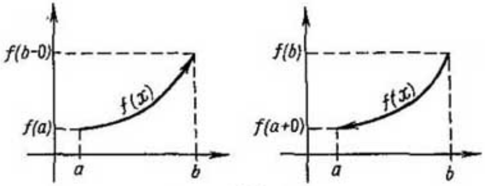


FIG. 33

dicción con que $c = \inf f$. Así pues, para todos los $x \in (a, b)$ se cumplen las desigualdades $c < f(x) < d$. Por otro lado, por cuanto $c = \inf\limits_{(a,b)} f$, $d = \sup\limits_{(a,b)} f$ entonces para cualquier y, $c < y < d$, existen $x_1 \in (a, b)$ y $x_2 \in (a, b)$ tales que $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$ satisfacen las desigualdades

$$c < y_1 < y < y_2 < d.$$

De aquí se deduce que $x_1 < x_2$ *) y por cuanto $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$, entonces según el teorema de Bolzano — Cauchy sobre los valores intermedios de las funciones continuas existe un punto $x \in [x_1, x_2]$ tal que $f(x) = y$. De esta forma, para cualquier punto $y \in (c, d)$ existe un punto $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = y$.

Por lo mismo, está demostrado que efectivamente, el conjunto de valores de la función f, o lo que es lo mismo, el conjunto de definición de la función inversa f^{-1} es el intervalo (c, d). El hecho de que la función f^{-1} es unívoca y crece estrictamente en el intervalo (c, d) se deduce del lema. Su continuidad se demuestra repitiendo al pie de la letra la demostración de la continuidad de la función inversa en el teorema anterior. Finalmente, como antes, el teorema para una función monótona estrictamente decreciente se deriva del teorema ya demostrado sobre la función monótona estrictamente creciente con ayuda del análisis de la función $-f$. □

OBSERVACIÓN. De forma análoga se demuestra que si una función crece estrictamente y es continua sobre el intervalo semiabierto $[a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, o sobre $(a, b]$, $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, entonces la función inversa está definida, crece estrictamente y es continua sobre el intervalo semiabierto $[c, d)$, donde $c = f(a)$, $d = \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$ y respectivamente sobre $(c, d]$, donde $c = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $d = f(b)$ (fig. 33).

El caso de una función $f(x)$ estrictamente decreciente sobre un intervalo semiabierto se puede reducir al caso de una función estrictamente creciente analizando la función $-f(x)$.

Ejemplo. Para cualquier entero positivo n, la función potencial $y = x^n$ crece estrictamente y es continua en el semieje positivo $x \geqslant 0$.

*) El caso $x_1 \geqslant x_2$ no es posible, ya que entonces en virtud del crecimiento de la función f se cumpliría la desigualdad $y_1 \geqslant y_2$.

En efecto, si $0 \leqslant x_1 < x_2$, entonces, multiplicando n veces estas desigualdades, obtendremos $x_1^n < x_2^n$, es decir la función $y = x^n$, $n = 1, 2, \ldots$, crece monótona y estrictamente. Para la demostración de la continuidad de la función $y = x^n$ observemos que la función $y = f(x) = x$ es continua en cualquier punto $x_0 \in \boldsymbol{R}$. En efecto, en este caso $y_0 = f(x_0) = x_0$ por lo que $\Delta y = y - y_0 = x - x_0 = \Delta x$. Por consiguiente, si está dado $\varepsilon > 0$, entonces tomando $\delta = \varepsilon$ obtendremos que de la condición $|\Delta x| < \delta$ se deduce $|\Delta y| = |\Delta x| < \delta = \varepsilon$. Esto significa la continuidad de la función $y = x$ en el punto $x = x_0$. La función $y = x^n$ es el producto de n funciones iguales $f(x) = x$ y por esto (véase el p. 5.10) también es continua en todos los puntos $x \in \boldsymbol{R}$.

De que $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, evidentemente se deduce que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $n = 1, 2, \ldots$ Además, en el cero la función $y = x^n$ es igual a cero. Por esto, de acuerdo con la observación al teorema 4, el conjunto de valores de la función potencial $y = x^n$ cuando $x \geqslant 0$ es el eje no negativo $y \geqslant 0$.

La función inversa a la función $y^n = x$ es la raíz de n-ésimo grado $\sqrt[n]{y}$, $n = 1, 2, \ldots$. Según el teorema 4, por las propiedades demostradas de la función potencial $y = x^n$, la raíz de n-ésimo grado $\sqrt[n]{y}$, $n = 1, 2, \ldots$, está definida para cualquier y no negativo.

Así pues, de los teoremas demostrados se deduce, en particular, *la existencia y la unicidad de la raíz positiva de n-ésimo grado de cualquier número positivo.*

OBSERVACIÓN. Del ejemplo analizado se deduce de nuevo que cualquier intervalo contiene números irracionales (véase el corolario 2 del teorema 8 en el p. 4.11*). Mostremos inicialmente que el número $\sqrt{2}$ (cuya existencia se deduce del ejemplo analizado anteriormente) es irracional. Supongamos lo contrario: supongamos que existe un número racional igual a la raíz cuadrada del dos. Escribamos este número en forma de fracción irreducible p/q (p y q son números naturales primos entre sí):

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Entonces $p^2 = 2q^2$ y por consiguiente el número p se divide por 2. En efecto, si p fuera impar, es decir, $p = 2k + 1$, $k \in N$, entonces $p^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + + 2k + 1$ también sería impar y la igualdad $p^2 = 2q^2$ no tendría lugar. Así pues, $p = 2k$ pero entonces $4k^2 = 2q^2$, $q^2 = 2k^2$. De aquí, como antes se deduce que q es un número par. La paridad de los números $p = q$ contradice la suposición de que la fracción p/q es irreducible.

De lo demostrado, evidentemente se deduce que cualquier número del tipo $m\sqrt{2}/n$, donde m y n son números naturales, también es irracional. En realidad, si fuera racional $\dfrac{m\sqrt{2}}{n} = \dfrac{p}{q}$, entonces $\sqrt{2}$ resultaría ser un número racional: $\sqrt{2} = \dfrac{np}{mq}$. De aquí, a su vez, se deduce que cualquier intervalo contiene un número irracional (compárese con el p. 4.11*) y además, del tipo $m\sqrt{2}/n$, donde m y n son enteros.

En efecto, sea $0 \leqslant a < b$. Elijamos el natural n de forma tal que

$$\sqrt{2}/n < b - a$$

y después el natural m de forma tal que

$$\frac{(m-1)\sqrt{2}}{n} \leqslant a < \frac{m\sqrt{2}}{n}.$$

Entonces $a < \dfrac{m\sqrt{2}}{n} < b$. Si $a < b \leqslant 0$, entonces por lo demostrado existen los enteros m y n tales que

$$0 \leqslant -b < \frac{m\sqrt{2}}{n} < -a;$$

y por esto

$$a < -\frac{m\sqrt{2}}{n} < b.$$

En el caso $a < 0 < b$, por lo demostrado existen los enteros m y n tales que $a < 0 < \dfrac{m\sqrt{2}}{n} < b$. □

§ 7. CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

7.1. POLINOMIOS Y FUNCIONES RACIONALES FRACCIONALES

Teorema 1. *Cualquier polinomio es continuo en cada punto.*

En realidad, la función $y = c$, donde c es una constante, es continua sobre todo el eje numérico, lo cual fue mostrado en el ejemplo 1 del p. 5.12.

Las funciones del tipo $y = x^n$ también son continuas para cada $n \in N$ dado, en cualquier punto $x \in R$. Esto fue mostrado en el p. 6.3 (véase el ejemplo allí dado).

Cualquier polinomio se obtiene de las funciones del tipo $y = c$ e $y = x^n$ con ayuda de la suma y multiplicación y por esto es una función continua en cada punto (véase el p. 5.10).

Teorema 2. *Cualquier función racional $P(x)/Q(x)$ ($P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios) es continua en todos los puntos del eje numérico $\boldsymbol{R}$, en los cuales su denominador $Q(x)$ no se anula.*

Esto se deduce directamente de que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ son continuos en cada punto $x \in R$ y el cociente de funciones continuas también es continuo en todos los puntos del eje numérico en los cuales el denominador no se anula (véase el p. 5.10).

Este teorema es muy cómodo utilizarlo hallando los límites de las funciones racionales. Supongamos que se exige hallar $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Para esto es necesario inicialmente realizar, si por supuesto, esto es posible, la reducción de la función $P(x)/Q(x)$ por el factor $(x - x_0)^n$ con el mayor exponente posible $n \geqslant 1$. Si denotamos por $P_1(x)/Q_1(x)$ la fracción racional obtenida, entonces (véase el p. 5.4)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Si $Q_1(x_0) \neq 0$, entonces por el teorema 2, este límite es simplemente igual a $P_1(x_0)/Q_1(x_0)$; si $Q_1(x_0) = 0$ (y por lo tanto $P_1(x_0) \neq 0$, ya que en el caso contrario la fracción $P_1(x)/Q_1(x)$ seriá reducible por $(x - x_0)$), entonces este límite es igual a ∞.

Ejemplos. 1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 2}{x + 1} = -\dfrac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 2}{x - 1} = \infty$.

7.2. FUNCIONES EXPONENCIALES, LOGARÍTMICAS Y POTENCIALES

Recordemos las propiedades de la potencia a^r, donde $a > 0$, r es número racional: $r = p/q$, p y q son enteros, $q \neq 0$.

1 °. Sea $r_1 < r_2$. Si $a > 1$, entonces $a^{r_1} < a^{r_2}$ y si $a < 1$ entonces $a^{r_1} > a^{r_2}$.

2 °. $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$.

3 °. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$.

4 °. $(ab)^r = a^r b^r$.

Aquí en todos casos r, r_1 y r_2 son números racionales. Recordemos además, que $a^{\circ} = 1$. De la propiedad 2 ° se deduce que $a^r \cdot a^{-r} = a^{\circ} = 1$, de donde

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}. \tag{7.1}$$

A continuación, de la propiedad 1° y de (7.1) se deduce que $a^r > 0$ para cualquier racional r. En efecto, si $r > 0$ y $a \geqslant 1$, entonces por 1° $a^r \geqslant a^0 = 1 > 0$. De aqui, por (7.1) tenemos

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} > 0.$$

De forma análoga se demuestra la desigualdad $a^r > 0$ cuando $a < 1$.

Señalemos además, que para cualesquiera $a > 0$, $b > 0$ y $r \in Q$ tiene lugar

$$(ab)^r = a^r b^r.$$

Recordemos que (véase el ejemplo 3 en el p. 4.9)

$$\lim_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1, \quad a > 0, \tag{7.2}$$

y con ayuda de esto demostremos el siguiente lema.

Lema 1. *Para cualquier $a > 0$ tiene lugar la igualdad*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in Q}} a^x = 1. \tag{7.3}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $a > 1$, para mayor exactitud. Fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por (7.2) se encuentra un $n_0 \in N$ tal que

$$\left| a^{\frac{1}{n_0}} - 1 \right| < \varepsilon, \left| a^{-\frac{1}{n_0}} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Por consiguiente (véase la propiedad 1 ° de la potencia con exponentes racionales)

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \varepsilon.$$

Si x es un número racional y $|x| < \frac{1}{n_0}$, es decir

$$-\frac{1}{n_0} < x < \frac{1}{n_0},$$

entonces por la misma propiedad 1 ° se cumplirá la desigualdad

$$a^{-\frac{1}{n_0}} < a^x < a^{\frac{1}{n_0}}$$

y por esto, la desigualdad

$$1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon.$$

De esta forma, si x es un número racional y $|x| < \delta$ donde $\delta = \frac{1}{n_0}$, entonces

$$|a^x - 1| < \varepsilon.$$

Esto significa la validez de la igualdad (7.3).

Si $0 < a < 1$, entonces el lema se demuestra análogamente, sólo es necesario utilizar que la función a^x, $0 < a < 1$, decrece estrictamente sobre el conjunto de los números racionales Q. En el caso $a = 1$ el lema es evidente. □

Definamos ahora la potencia a^x para cualquier real x y $a > 0$.

Definición 1. *Sean $a > 0$, x un número real arbitrario y Q el conjunto de todos los números racionales. Hagamos*

$$a^x = \lim_{\substack{r \to x \\ r \in Q}} a^r. \tag{7.5}$$

Esta definición tiene sentido, ya que cada punto del eje numérico es un punto de adherencia del conjunto de todos los números racionales (véase el corolario del lema 1 en el p. 4.9). Ella es correcta en el sentido de que el límite señalado existe, como esto será demostrado, para cualquier número real $x \in R$. En la demostración utilizaremos la definición del límite de una función según Heine (véase la definición 1 en el p. 5.4).

Sea $a > 0$, $x \in R$, $r_n \in Q$, $n = 1, 2, \ldots$, y $\lim_{n \to \infty} r_n = x$. Mostremos que la sucesión $\{a^{r_n}\}$ satisface las condiciones del criterio de Cauchy (véase el p. 3.7) y por lo tanto es una sucesión convergente. Para esto es necesario estimar la diferencia

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m}|a^{r_n - r_m} - 1|, \quad n \in N, \quad m \in N. \tag{7.6}$$

La sucesión $\{r_n\}$ converge y por consiguiente está acotada (véase el p. 3.4), por esto existe un número A que sin perder generalidad podemos considerar racional (¿por qué?), tal que $-A < r_n < A$. De aquí, en el caso $a \geqslant 1$ tenemos $a^{-A} \leqslant a^{r_n} \leqslant a^A$, y en el caso $a < 1$, respectivamente, $a^{-A} > a^{r_n} > a^A$, $n = 1, 2, \ldots$, por lo que para cualquier $a > 0$ existe un número B tal que

$$a^{r_n} \leqslant B, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7.7}$$

($B = a^A$ cuando $a \geqslant 1$ y $B = a^{-A}$ cuando $a < 1$), es decir, la sucesión $\{a^{r_n}\}$ está acotada superiormente por el número B.

A continuación, por el lema, para cualquier $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta = \delta_{(\varepsilon)} > 0$ tal que para todos los racionales r que satisfacen la condición $|r| < \delta$ se sumple la desigualdad

$$|a^r - 1| < \frac{\varepsilon}{B}. \tag{7.8}$$

De la convergencia de la sucesión $\{r_n\}$, por el criterio de Cauchy (véase el p. 3.7), se deduce que para el $\delta > 0$ hallado existe un número n_δ tal que para todos los $n > n_\delta$ y $m > n_\delta$ se cumple la desigualdad $|r_n - r_m| < \delta$ y esto quiere decir, que por (7.8) se cumple la desigualdad

$$|a^{r_n - r_m} - 1| < \frac{\varepsilon}{B}. \tag{7.9}$$

De (7.6), (7.7) y (7.9) se deriva que para todos los $n \geqslant n_\delta$ y $m \geqslant n_\delta$ es válida la desigualdad $|a^{r_n} - a^{r_m}| < \varepsilon$, de donde, por el criterio de Cauchy, se deduce que la sucesión $\{a^{r_n}\}$ converge.

Así pues, para cualquier sucesión de números racionales r_n, $n = 1, 2, \dots$, $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = x$, la sucesión a^{r_n} converge. De aquí, por el lema 4 del p. 5.6, directamente se deduce la existencia del límite (7.5) de la función a^r, $r \in Q$, en el punto $x \in R$.

El hecho de que la definición de a^x es correcta está demostrado. □

La definición 1 es natural en el sentido de que en el caso cuando x es un número racional r, entonces la potencia a^x coincide con el valor a^r en el sentido anteriormente conocido. En realidad, si $x = r$ es un número racional, entonces en calidad de sucesión de los números racionales r_n, $n = 1, 2, \dots$, convergente a $x = r$, se puede tomar $r_n = r$, $n = 1, 2, \dots$ Entonces, por la definición 1

$$a^x = \lim_{n \to \infty} a^{r_n} = \lim_{n \to \infty} a^r = a^r. \tag{7.10}$$

Definición 2. *Sea dado cierto número $a > 0$. La función a^x definida para todos $x \in R$ se llama función exponencial con base a.*

Por definición $1^x = 1$ para todos los reales x. Por esto el caso $a = 1$ no brinda ningún interés para su estudio y en el futuro no lo analizaremos.

Teorema 3. *La función exponencial a^x ($a > 0$) posee las siguientes propiedades.*

1°. *Cuando $a > 1$, crece estrictamente y cuando $a < 1$ decrece estrictamente sobre todo el eje numérico.*

Para cualesquiera reales x e y son válidas las igualdades:

2°. $a^x a^y = a^{x+y}$.

3°. $(a^x)^y = a^{xy}$.

4°. *La función a^x es continua sobre todo el eje numérico.*

5°. *El conjunto de los valores de la función a^x, $a > 0$, $a \neq 1$ es el conjunto de todos los números positivos.*

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 1°. Sean para mayor exactitud $a > 1$ y $x < y$. Existen (¿por qué?) los números racionales r' y r'' tales que $x < r' < r'' < y$. Escojamos cualesquiera sucesiones de números racionales $\{r_n'\}$ y $\{r_n''\}$ de forma tal que $\lim\limits_{n \to \infty} r_n' = x$, $\lim\limits_{n \to \infty} r_n'' = y$ y $r_n' < r' < r'' < r_n''$ para todos los $n = 1, 2, \dots$. Entonces

$$a^{r_n'} < a^{r'} < a^{r''} < a^{r_n''}; \tag{7.11}$$

pasando al límite cuando $n \to \infty$ obtendremos

$$a^x \leqslant a^{r'} < a^{r''} \leqslant a^y. \tag{7.12}$$

De esta forma, si $x < y$, entonces $a^x < a^y$, lo que significa el crecimiento estricto de la función a^x cuando $a > 1$.

El caso $a < 1$ se analiza de forma análoga.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 2°. Sean $\{r_n'\}$ y $\{r_n''\}$ sucesiones de números racionales tales que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n' = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n'' = y$ y por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty}(r_n' + r_n'') = x + y$ (véase el p. 3.9). Entonces, por la definición de función exponencial:

$$a^{x+y} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n' + r_n''} = \lim_{n\to\infty}(a^{r_n'}a^{r_n''}) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n'} \lim_{n\to\infty} a^{r_n''} = a^x a^y.$$

Antes de pasar a la demostración de las propiedades siguientes, observemos que de la propiedad 2° se deduce que para cualquier real x es válida la igualdad $a^x a^{-x} = a^0 = 1$, por eso $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 4° [a]. Ante todo señalemos que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in R}} a^x = 1.$$

Esta igualdad, por la monotonía estricta ya establecida sobre todo el eje numérico, de la función a^x (propiedad 1°), se demuestra al pie de la letra como la igualdad (7.3) (véase el lema), sólo no se debe suponer que $x \in Q$, sino analizar cualesquiera $x \in R$.

Sea x dado, $x \in R$, $y = a^x$ y

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x a^{\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1).$$

Entonces, por lo dicho

$$\lim_{\Delta x\to 0} a^{\Delta x} = 1$$

y por esto

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = a^x \lim_{\Delta x\to 0}(a^{\Delta x} - 1) = 0,$$

esto significa la continuidad de la función a^x en el punto x. □

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 3°. Sea inicialmente $y = p$ un número entero positivo, entonces aplicando p veces la propiedad 2° obtendremos

$$(a^x)^p = \underbrace{a^x \cdot a^x \ldots a^x}_{p \text{ veces}} = a^{\overbrace{x + x + \ldots + x}^{p \text{ veces}}} = a^{xp}. \tag{7.13}$$

Sea a continuación $y = \dfrac{1}{q}$, donde q es un número entero positivo. Mostremos que $(a^x)^{1/q} = a^{x/q}$, es decir, que $a^{x/q}$ es la raíz de grado q-ésimo del número a^x. Pa-

---

[a] La propiedad 3° será demostrada después de la demostración de la propiedad 4°.

ra esto, por la definición de raíz, es necesario demostrar que $(a^{\frac{x}{q}})^q = a^x$; esto se deduce de la igualdad (7.13).

Sea ahora $y = \frac{p}{q}$, p y q son naturales, entonces, por lo ya demostrado

$$(a^x)^{p/q} = [(a^x)^p]^{1/q} = (a^{xp})^{1/q} = a^{xp/q}.$$

Si $y = -\frac{p}{q}$, entonces

$$(a^x)^{-p/q} = \frac{1}{(a^x)^{p/q}} = \frac{1}{a^{xp/q}} = a^{-xp/q}.$$

Finalmente, es evidente que $(a^x)^0 = 1 = a^0$. De esta forma está demostrado que para cualquier real x y cualquier racional r

$$(a^x)^r = a^{xr}. \tag{7.14}$$

Supongamos ahora dado aún otro número real y. Analicemos una sucesión arbitraria $\{r_n\}$ de números racionales convergente a y. Entonces, por (7.14), para todos los $n = 1, 2, \ldots$ tendremos

$$(a^x)^{r_n} = a^{xr_n}. \tag{7.15}$$

Por cuanto $\lim\limits_{n \to \infty} xr_n = xy$, entonces por la continuidad de la función a^x demostrada anteriormente

$$\lim_{n \to \infty} a^{xr_n} = a^{xy}. \tag{7.16}$$

Por otro lado, por la definición de la función exponencial

$$\lim_{n \to \infty} (a^x)^{r_n} = (a^x)^y. \tag{7.17}$$

Pasando al límite en la igualdad (7.15) cuando $n \to \infty$, de (7.16) y (7.17) obtendremos la propiedad analizada para cualesquiera $x, y \in \boldsymbol{R}$. $\square$

De las propiedades 2° y 3° se deduce que

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}, \quad a > 0, \quad x \in \boldsymbol{R}.$$

En efecto

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = (a^{-1})^x = a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \ \square$$

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 5° Sea de nuevo para mayor exactitud $a > 1$. Para demostrar que el conjunto de los valores de la función a^x es el conjunto de todos los números positivos, es decir, el intervalo infinito $(0, +\infty)$, en virtud de su continuidad y crecimiento estricto sobre todo el eje numérico, por el teorema 4 del p. 6.3, es suficiente mostrar que

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0. \tag{7.18}$$

Por cuanto, en virtud de la monotonía de la función a^x los límites (finitos o infinitos) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x$ existen, entonces es suficiente demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} a^{x'_n} = 0$$

para cualesquiera sucesiones dadas $x_n \to +\infty, x'_n \to -\infty$, por ejemplo, para las sucesiones $x_n = n, x'_n = -n, n = 1, 2, \ldots$

Por suposición $a > 1$, es decir, $a = 1 + \alpha$, donde $\alpha > 0$. Por esto, de acuerdo con la desigualdad de Bernoulli (véase el lema en el p. 4.9)

$$a^n = (1 + \alpha)^n > n\alpha,$$

y ya que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha = +\infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty.$$

De aquí

$$\lim_{n\to\infty} a^{-n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^n} = 0.$$

Con esto, la igualdad (7.18) cuando $a > 1$ está demostrada.

Si ahora $0 < a < 1$, entonces $b = \dfrac{1}{a} > 1$ y

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} b^x} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \frac{1}{\lim\limits_{x\to-\infty} b^x} = +\infty.$$

OBSERVACIÓN 1. Por cuanto de todos los valores el conjunto de la función a^x, $a > 0, a \neq 1$, constituye el conjunto de todos los números reales positivos, entonces, en particular, para cualquier $x \in R$ tiene lugar la desigualdad

$$a^x > 0.$$

OBSERVACIÓN 2. Si $a > 0, b > 0$, entonces para cualquier $x \in R$ es válida la igualdad

$$(ab)^x = a^x b^x.$$

En efecto, si $r_n \to x, r_n \in Q, n = 1, 2, \ldots$, entonces

$$(ab)^x = \lim_{n\to\infty}(ab)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} b^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \lim_{n\to\infty} b^{r_n} = a^x b^x. \ \square$$

Ejercicio. Sean $a > 0, b > 0$. Demuéstrese que para cualquier $x \in R$ tiene lugar la igualdad $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

OBSERVACIÓN 3. Si r es un número racional y $r > 0$, entonces $0^r = 0$ y por consiguiente, para cualquier número real $x > 0$ existe el límite

$$\lim_{\substack{r\to x \\ r\in Q}} 0^r = 0.$$

Por esto, para $x > 0$ la definición (7.5) se puede extender al caso $a = 0$ y además tendrá lugar la igualdad

$$0^x = 0, x > 0.$$

Sea a un número positivo distinto de la unidad. De la matemática elemental es conocido que la operación inversa a la elevación a una potencia y que pone en correspondencia a un número dado $x > 0$ el número y tal que $a^y = x$ (claramente, si el y indicado existe), se llama determinación por logaritmos con base a. El número y se llama logaritmo de base a del número x y se denota por $\log_a x$. De esta forma, por definición

$$a^{\log_a x} = x \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Cuando $a = e$ el logaritmo del número x se denota por $\ln x$ y se llama logaritmo natural del número x.

Definición 3. *La función que pone en correspondencia a cada número x su logaritmo $\log_a x$ con base a ($a > 0$, $a \neq 1$) si este logaritmo existe, se llama función logarítmica $y = \log_a x$.*

Teorema 4. *La función $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ está definida para todos los $x > 0$ y sobre este conjunto es una función estrictamente monótona (creciente cuando $a > 1$ y decreciente cuando $a < 1$) y continua. Ella tiene las siguientes propiedades:*

1°) $\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$, $x_1 > 0, x_2 > 0$;

2°) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$, $x > 0$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

DEMOSTRACIÓN. Por cuanto el conjunto de los valores de la función a^x, $a > 0$, $a \neq 1$ es el conjunto de todos los números positivos $(0, +\infty)$, entonces este conjunto es el conjunto de definición de la función inversa, es decir, de la función $\log_a x$.

Con esto, en particular, está demostrada la existencia del logaritmo de cualquier número positivo. Las afirmaciones restantes del teorema 4 se deducen directamente del teorema 4 del p. 6.3 y del teorema 3 del presente párrafo.

Por ejemplo, mostremos cómo la propiedad 1° se deriva de las propiedades de la función exponencial indicadas en el teorema 3. Hagamos

$$y_1 = \log_a x_1, \quad y_2 = \log_a x_2,$$

por la definición de logaritmo esto significa que

$$x_1 = a^{y_1}, x_2 = a^{y_2}.$$

De aquí (véase la propiedad 1° de la función exponencial en el teorema 3), tenemos

$$x_1 x_2 = a^{y_1} a^{y_2} = a^{y_1 + y_2},$$

y por consiguiente, de nuevo, por la definición de logaritmo

$$\log_a x_1 x_2 = y_1 + y_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2. \ \square$$

Definición 4. *Sea dado un número real α. La función x^α definida para todos los $x > 0$ se llama función potencial con exponente α.*

Teorema 5. *La función potencial a^α es continua para todos los $x > 0$.*

En efecto, de la definición de logaritmo tenemos $x = e^{\ln x}$, y por esto $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, es decir, x^α es la composición de la función exponencial e^u y la función logarítmica multiplicada por una constante: $u = \alpha \ln x$. Las funciones exponencial y logarítmica son continuas (véase los teoremas 3 y 4), por lo que en virtud del teorema de la continuidad de la composición de funciones continuas (véase el p. 5.2), la función x^α también es continua. $\square$

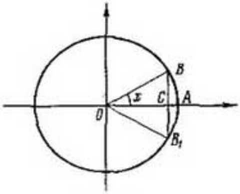


FIG. 34

En el análisis de la función $y = x^\alpha$ se suponía que $x > 0$, ya que cuando $x \leqslant 0$ la expresión x^α tiene sentido en la región de los números reales no para todos los α. No obstante, si α es racional y x^α tiene sentido cuando $x < 0$ (por ejemplo, x^2, $\frac{1}{x^3}$, $\sqrt[5]{x}$), entonces la función $y = x^\alpha$ será para $\alpha > 0$ continua sobre todo el eje real y para $\alpha < 0$ sobre todo el eje real menos el punto $x = 0$.

En estos casos la función $y = x^\alpha$ también se llama potencial.

Cuando $x \neq 0$ esto se deduce directamente del teorema 5, ya que la función $y = x^\alpha$, si está definida también para todos los $x < 0$, será siempre par o impar y si una función par o impar es continua para $x > 0$, entonces es continua también para $x < 0$ (¿por qué?). Si en el punto $x = 0$ una función par o impar es continua por la derecha e igual a cero, entonces simplemente es continua en este punto (¿por qué?). Este caso tiene lugar cuando $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to +0} x^\alpha = 0 = 0^\alpha,$$

ya que $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ y (véase el teorema 4) $\lim\limits_{x \to +0} \ln x = -\infty$ por lo que en este caso la función x^α es continua también cuando $x = 0$.

7.3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Pasemos a la cuestión sobre la continuidad de las funciones trigonométricas. En este caso no daremos las definiciones analíticas estrictas de estas funciones (como fue hecho anteriormente con la función exponencial), sino que utilizamos su definición geométrica, conocida de la matemática elemental. En el futuro x siempre es un número real y por $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ sobrentenderemos las funciones trigonométricas correspondientes del ángulo cuya medida radial es igual a x.

Lema 2. *Para cualquier real x es válida la desigualdad*

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant |x|.$$

DEMOSTRACIÓN. Analicemos una circunferencia de radio R con centro en el punto O. Supongamos que el radio OB forma el ángulo x, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, con el radio OA, y el radio OB_1 es simétrico al radio OB con respecto a OA (fig. 34).

Bajemos desde el punto B la perpendicular BC al radio OA. Entonces, $BC = R\operatorname{sen} x$ y ya que $BC = CB_1$, tendremos $BB_1 = 2R\operatorname{sen} x$. Como es conocido, la longitud del arco BAB_1 es igual a $2Rx$. La longitud del segmento que une dos puntos no sobrepasa la longitud del arco de circunferencia que une esos mismos puntos lo que significa $2R\operatorname{sen} x \leqslant 2Rx$, es decir, $\operatorname{sen} x \leqslant x$.

Si ahora $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x < 0$, entonces $0 < -x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ y por esto, según lo demostrado, $\operatorname{sen}(-x) \leqslant -x$, pero en este caso $\operatorname{sen}(-x) = |\operatorname{sen} x|$ y $-x = |x|$, por consiguiente $|\operatorname{sen} x| \leqslant |x|$. De esta forma, si $|x| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, entonces $|\operatorname{sen} x| \leqslant |x|$. Si $|x| > \dfrac{\pi}{2}$, entonces $|\operatorname{sen} x| \leqslant 1 < \dfrac{\pi}{2} < |x|$. □

Teorema 6. *Las funciones* $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ *son continuas sobre todo el eje numérico.*

Corolario. *Las funciones* $y = \operatorname{tg} x$ *e* $y = \operatorname{ctg} x$ *son continuas para todos los* x, *para los cuales* $\cos x$, *respectivamente* $\operatorname{sen} x$, *no se anulan.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que $|\operatorname{sen}\alpha| \leqslant 1$, $|\cos\alpha| \leqslant 1$, para cualquier α y por el lema $\left|\operatorname{sen}\dfrac{\Delta x}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}|\Delta x|$, entonces

$$|\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x| \leqslant 2\left|\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}\right|\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant |\Delta x|,$$

$$|\cos(x + \Delta x) - \cos x| \leqslant 2\left|\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}\right|\left|\operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant |\Delta x|.$$

De aquí se deduce que cuando $\Delta x \to 0$ los primeros miembros de la desigualdad también tienden a cero. Esto significa la continuidad de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

La continuidad de $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ en los puntos en los cuales los denominadores no se anulan, se deduce de la continuidad de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ y del teorema sobre el cociente de funciones continuas (véase el p. 5.2).

Teorema 7. *Las funciones trigonométricas inversas* $\operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ *y* $\operatorname{arcctg} x$ *son continuas en sus dominios.*

Esto se deduce directamente de los teoremas 3 y 4 del § 6 y de la continuidad y monotonía estricta de las funciones $\operatorname{sen} x$ sobre el segmento $[-\pi/2, \pi/2]$, $\cos(x)$ sobre el segmento $[0, \pi]$, $\operatorname{tg} x$ sobre el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ y $\operatorname{ctg} x$ sobre el intervalo $(0, \pi)$.

7.4. CONTINUIDAD DE FUNCIONES ELEMENTALES

La continuidad de las principales funciones elementales demostrada en este párrafo permite obtener también un teorema sobre la continuidad de funciones elementales arbitrarias.

Teorema 8. *Cualquie. junción elemental es continua en todos los puntos de su conjunto de definición.*

DEMOSTRACIÓN. Por definición cualquier función elemental se obtiene de las principales funciones elementales con ayuda de un número finito de operaciones aritméticas y composiciones (véase el p. 5.3), por esto su continuidad sobre el conjunto de definición se deduce inmediatamente de la continuidad de las principales funciones elementales sobre los conjuntos de su definición (teoremas 1 — 7), de las propiedades de los límites de funciones, relacionadas con las operaciones aritméticas sobre las funciones (véase el p. 5.10) y de la continuidad de la composición de funciones continuas (véase el p. 5.16).

§ 8. COMPARACIÓN DE FUNCIONES. CÁLCULO DE LOS LÍMITES

8.1. ALGUNOS LÍMITES NOTABLES

En este punto se calcularán límites que en el futuro se encontrarán en repetidas ocasiones.

Lema 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \tag{8.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Analicemos el círculo de radio R con centro en el punto O. Supongamos que el radio OB forma el ángulo x, $0 < x < \pi/2$, con el radio OA. Unamos el punto A y el punto B con un segmento y bajemos una perpendicular desde el punto A hacia el radio OA hasta su intersección en el punto C con la prolongación del radio OB (fig. 35). Entonces el área del triángulo AOB es igual a $\frac{1}{2} R^2 \operatorname{sen} x$, el área del sector AOB es igual a $\frac{1}{2} R^2 x$ y el área del triángulo AOC es igual a $\frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x$. El triángulo AOB es una parte del sector AOB, el que a su vez es una parte del triángulo AOC; por esto,

$$\frac{1}{2} R^2 \operatorname{sen} x < \frac{1}{2} R^2 x < \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x,$$

de donde

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x,$$

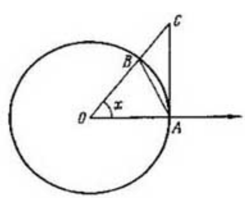


FIG. 35

por lo tanto,

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

o, sustituyendo las magnitudes por sus inversas

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1. \tag{8.2}$$

Observemos que por la paridad de las funciones $\cos x$ y $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ la desigualdad (8.2) es válida también cuando $\pi/2 < x < 0$.

Ya que la función $\cos x$ es continua y $\cos 0 = 1$, entonces de (8.2) cuando $x \to 0$ se deduce (véase el p. 5.10) la igualdad (8.1). □

Corolario 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1. \tag{8.3}$$

En realidad,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

Corolario 2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = 1. \tag{8.4}$$

La función $y = \operatorname{sen} x$ es estrictamente monótona y continua sobre el segmento $[-\pi/2, \pi/2]$, por esto, la función inversa $x = \operatorname{arcsen} y$ también es estrictamente monótona y continua sobre el segmento $[-1, 1]$. Ya que $\operatorname{sen} 0 = 0$ entonces

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{y \to 0} x = \lim_{y \to 0} \operatorname{arcsen} x = 0.$$

Para calcular el límite (8.4), apliquemos la regla de cambio de variables para los límites de las funciones continuas (véase el teorema 6 en p. 5.16). Haciendo $x = \operatorname{sen} y$, tenemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} y)}{\operatorname{sen} y} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\operatorname{sen} y} = 1.$$

Corolario 3.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1. \tag{8.5}$$

Esta igualdad se obtiene de (8.3) análogamente a la anterior.

Lema 2.

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e. \tag{8.6}$$

Anteriormente (véase el p. 4.5) fue demostrado que

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \tag{8.7}$$

donde $n = 1, 2, \ldots$.

De aquí, por el lema del p. 4.3 se deduce que para cualquier sucesión $\{n_k\}$ de números naturales, tal que

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty \tag{8.8}$$

tenemos

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e. \tag{8.9}$$

Sea ahora la sucesión $\{x_k\}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = +0$, es decir,

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0 \quad \text{y} \quad x_k > 0. \tag{8.10}$$

Mostremos que $\lim\limits_{k\to\infty}(1+x_k)^{1/x_k} = e$. En este caso, sin perder generalidad se puede considerar que $x_k < 1$, $k = 1, 2, \ldots$ (¿por qué?). Para cualquier x_k se encuentra un natural n_k tal que $n_k + 1 > \dfrac{1}{x_k} \geqslant n_k$, y por lo tanto $\dfrac{1}{n_k+1} < x_k \leqslant \dfrac{1}{n_k}$, además por (8.10) $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$. Por esto tenemos:

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < (1+x_k)^{1/x_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} \tag{8.11}$$

Notando que por (8.9)

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n_k+1}\right)} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n_k+1}\right)} = e$$

y

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\cdot\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right) = e$$

y al pasar al límite en la desigualdad (8.11), cuando $k\to\infty$ obtenemos

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{1/x_k} = e. \tag{8.12}$$

Por cuanto $\{x_k\}$ es una sucesión arbitraria, que satisface las condiciones (8.10), entonces con esto está demostrado que

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{1/x} = e. \tag{8.13}$$

Sea ahora la sucesión $\{x_k\}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = -0$, es decir,

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0, \quad x_k < 0. \tag{8.14}$$

Pongamos $y_k = -x_k$, entonces $y_k > 0$ y $\lim_{k\to\infty} y_k = 0$, y sin perder generalidad se puede considerar que $y_k < 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Entonces

$$\lim_{k\to\infty}(1 + x_k)^{1/x_k} = \lim_{k\to\infty}(1 - y_k)^{-1/y_k} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{1 - y_k}\right)^{1/y_k} = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{y_k}{1 - y_k}\right)^{1/y_k} = \lim_{k\to\infty}(1 + z_k)^{1/z_k + 1},$$

donde

$$z_k = \frac{y_k}{1 - y_k} > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} z_k = 0$$

y por la igualdad (8.13) ya demostrada

$$\lim_{k\to\infty}(1 + x_k)^{1/x_k} = \lim_{k\to\infty}(1 + z_k)^{1/z_k}\cdot \lim_{k\to\infty}(1 + z_k) = e.$$

Pero $\{x_k\}$ era una sucesión arbitraria que satisfacía las condiciones (8.14), por eso

$$\lim_{x\to -0}(1 + x)^{1/x} = e. \tag{8.15}$$

De esta manera, la función $(1 + x)^{1/x}$, $x \neq 0$, tiene en el punto 0 límites por la derecha y por la izquierda iguales al mismo número e. Por eso, existe su límite por ambos lados cuando $x \to 0$ también igual a e (véase el p. 5.9). □

Corolario 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1 + x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad a > 0, \ a \neq 1 \tag{8.16}$$

y, en particular, cuando $a = e$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

En realidad, utilizando la continuidad de la función logarítmica (véase el teorema 4 del § 7), la continuidad de la composición de funciones (véase p. 5.16) y la igualdad (8.6) obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1 + x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1 + x)^{1/x} = \log_a \lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

Corolario 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \tag{8.17}$$

En particular, si $a = e$ entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1. \tag{8.18}$$

La función $y = a^x - 1$ es estrictamente monótona y continua en todo el eje real, por eso la función inversa $x = \dfrac{\ln(1 + y)}{\ln a}$ es también estrictamente monótona y continua cuando $y > -1$. Por cuanto, para $x = 0$ tenemos también $y = 0$, entonces las notaciones $x \to 0$ e $y \to 0$ son equivalentes (véase la observación 4 al final del p. 5.16). Utilizaremos para el cálculo del límite (8.17) la regla del cambio de variables (véase el teorema 6 en el p. 5.16). Poniendo $x = \frac{\ln(1+y)}{\ln a}$, obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y\ln a}{\ln(1+y)} = \ln a\,\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}} = \ln a.$$

8.2. COMPARACIÓN DE FUNCIONES

Como ya sabemos, la suma, la diferencia y el producto de funciones infinitamente pequeñas son también funciones infinitamente pequeñas: no podemos, sin embargo, decir esto de su cociente; la división de un infinitésimo por otro puede llevarnos a los casos más diversos, como se muestra en los ejemplos dados a continuación de las funciones infinitamente pequeñas $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ para $x \to 0$.

Sean, por ejemplo, $\alpha(x) = x$ y $\beta(x) = x^2$, entonces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to 0} x = 0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty.$$

Si $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = 2x$, entonces $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 2$, y si $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, entonces el límite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ no existe.

Todas las funciones que se analizarán en el futuro en este párrafo se suponen definidas sobre cierto conjunto $X \subset \boldsymbol{R}$, por x_0 se entiende o bien un número: $x_0 \in \boldsymbol{R}$ o bien uno de los infinitos ∞, $+\infty$ o $-\infty$. En el caso cuando x_0 es un número, entonces x_0 es un punto adherente del conjunto X y, además, tiene sentido sólo en el caso cuando x_0 sea un punto de acumulación del conjunto X. Además, puede ocurrir que $x_0 \in X$ o $x_0 \notin X$. Lo último, a ciencia cierta, tendrá lugar si la función analizada tiene algún límite infinito en el punto x_0. Si el punto x_0 es uno de los infinitos ∞, $+\infty$, $-\infty$, entonces, el conjunto X se supone no acotado, superior o inferiormente respectivamente.

Nos ocuparemos de la cuestión de la comparación de funciones en un entorno del punto x_0, en particular, de la comparación de las funciones infinitamente pequeñas e infinitamente grandes, estos casos son fundamentales.

Definición 1. *Si para las funciones $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ y $g\colon X \to \boldsymbol{R}$ existen un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 y la constante $x > 0$ tales que para todas las $x \in U(x_0) \cap X$ se cumple la desigualdad*

$$|f(x)| \leqslant c\,|g(x)|,$$

entonces la función f se llama acotada en comparación con la función g sobre $U(x_0) \cap X$ y en este caso se escribe

$$f(x) = O(g(x)),\quad x \to x_0$$

(se lee: $f(x)$ es O grande de $g(x)$ cuando x tiende a x_0).

Subrayemos que la escritura $x \to x_0$ tiene aquí otro sentido que el usual: sólo señala que la propiedad analizada tiene lugar únicamente en un entorno del punto x_0; aquí no se habla de ningún límite.

Lema 3. *Si* $f(x) = \varphi(x)g(x)$, $x \in X$, *y existe el límite finito*

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = k,$$

entonces

$$f(x) = O(g(x)),\ x \to x_0.$$

DEMOSTRACIÓN. De la existencia del límite finito $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = k$ por la propiedad 1° de límites de funciones del p. 5.10 se deduce la existencia de un entorno $U(x_0)$ del punto x_0, tal que la función φ es acotada sobre $U(x_0) \cap X$, es decir, se tiene una constante $c > 0$ tal que para todos los $x \in U(x_0) \cap X$ se cumple la desigualdad $|\varphi(x)| \leqslant c$ y, por consiguiente, la desigualdad $|f(x)| = |\varphi(x)|\,|g(x)| \leqslant c\,|g(x)|$. Esto significa que $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$. $\square$

Ejemplos. 1. $\frac{1}{x} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ cuando $x \to 0$, ya que $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$ cuando $|x| \leqslant 1$.
2. $\frac{1}{x^2} = O\left(\frac{1}{x}\right)$ cuando $x \to \infty$ ya que $\frac{1}{x^2} \leqslant \left|\frac{1}{x}\right|$ cuando $|x| \geqslant 1$.

La escritura

$$f(x) = O(1),\quad x \to x_0$$

significa que la función f está acotada en cierto entorno del punto x_0, por ejemplo, $\frac{\operatorname{tg} 2x}{x} = O(1)$ cuando $x \to 0$, ya que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} = 2$ y, por lo tanto, la función $\frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$ está acotada en un entorno del punto $x = 0$.

Definición 2. *Si las funciones* $f(x)$ *y* $g(x)$ *son tales que* $f = O(g)$ *y* $g = O(f)$ *cuando* $x \to x_0$, *entonces se llaman funciones de un mismo grado cuando* $x \to x_0$; *esto se escribe de la forma*

$$f(x) \asymp g(x),\quad x \to x_0.$$

Este concepto tiene mayor contenido en el caso cuando las funciones f y g son o bien infinitamente pequeñas o bien infinitamente grandes cuando $x \to x_0$. Por ejemplo, las funciones $\alpha = x$ y $\beta = x\left(2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$ son infinitesimales del mismo orden cuando $x \to 0$, ya que

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{1}{\left|2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right|} \leqslant \frac{1}{2 - \left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right|} \leqslant 1,$$

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leqslant 2 + \left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leqslant 3.$$

Lema 4. *Si existe el límite finito* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$, *entonces* $f(x) \asymp g(x)$, $x \to x_0$.

DEMOSTRACIÓN. Por cuanto, cuando $x \to x_0$, está definido el límite de la fracción $\frac{f(x)}{g(x)}$, entonces existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que para todos los puntos $x \in U(x_0) \cap X$ se cumple la desigualdad $g(x) \neq 0$. Para estos x pongamos

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Entonces $f(x) = \varphi(x)\,g(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = k$. Por consiguiente, según el lema 3, $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$.

Por cuanto $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$, entonces existe también un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que para todos los $x \in U(x_0) \cap X$ tendremos $\frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ (véase la propiedad 2° de los límites de las funciones en el p. 5.10), y por consiguiente $f(x) \neq 0$. Para $x \in U(x_0) \cap X$ pongamos $\psi(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$, entonces $g(x) = \psi(x) f(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = \frac{1}{k}$. Por esto, da nuevo, poe el lema 3, $g(x) = O(f(x))$, $x \to x_0$. □

En calidad de ejemplo tomemos las funciones $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = \operatorname{sen} x^2$. Tenemos $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{3} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} = \frac{1}{3}$ (véase (8.1)), por eso según el lema 4, las funciones $3x^2$ y $\operatorname{sen} x^2$ son de un mismo orden cuando $x \to 0$.

Definición 3. *Las funciones $f\colon X \to R$ y $g\colon X \to R$ se llaman equivalentes cuando $x \to x_0$ si existe un entorno $U = U(x_0)$ del punto x_0 y la función $\varphi\colon U \cap X \to R$ tales que para todos los $x \in U \cap X$ tiene lugar la igualdad*

$$f(x) = \varphi(x) g(x) \tag{8.20}$$

y

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1. \tag{8.21}$$

Si se cumple la propiedad (8.21), entonces se encuentra un entorno $U' = U(x_0)$ del punto x_0 tal que para $x \in U' \cap X$ se cumple la desigualdad $\varphi(x) \neq 0$ (véase la propiedad 2 de los límites de las funciones en el p. 5.10). Suponiendo $\psi(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$, $x \in U' \cap X$ vemos que las condiciones (8.20) y (8.21) son equivalentes a las condiciones

$$g(x) = \psi(x) f(x), \quad x \in U' \cap X, \tag{8.20'}$$

$$\lim_{x \to x_0} \psi(x) = 1. \tag{8.21'}$$

De esta forma, si las funciones f y g son equivalentes cuando $x \to x_0$, entonces las funciones g y f también son equivalentes cuando $x \to x_0$, es decir, la equivalencia de dos funciones posee la propiedad de simetría.

Señalemos que, como fácilmente se ve, la propiedad de las funciones de ser funciones de un mismo orden también es una propiedad simétrica, y la propiedad de una función de ser "O grande" con respecto a otra ya no es simétrica.

Ejemplos. 1. $\frac{x^2}{1+x^4} \sim x^2$ cuando $x \to 0$. En realidad, suponiendo $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^4}$ obtenemos

$$\frac{x^2}{1+x^4} = \varphi(x)x^2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x^4} = 1.$$

2. $\frac{x^6}{1+x^4} \sim x^2$ cuando $x \to \infty$. En realidad, si $\varphi(x) = \frac{x^4}{1+x^4}$, entonces

$$\frac{x^6}{1+x^4} = \varphi(x)x^2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^4}{1+x^4} = 1.$$

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ equivalentes cuando $x \to x_0$ se llaman también *asintóticamente iguales* cuando $x \to x_0$. La *igualdad asintótica* (equivalencia) de las funciones, se denota por el símbolo $\sim$:

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{cuando} \quad x \to x_0. \tag{8.22}$$

De lo dicho anteriormente se deduce que si $f \sim g$ cuando $x \to x_0$, entonces $g \sim f$ cuando $x \to x_0$.

Supongamos que existe un entorno punzado $\mathring{U}(x_0)$ del punto x_0 tal que para todos los $x \in \mathring{U}(x_0) \cap X$ se cumplen las desigualdades $f(x) \neq 0$ y $g(x) \neq 0$ y en el caso de $x_0 \in X$ las funciones f y g, además, son continuas en el punto x_0. Entonces, las condiciones (8.20) y (8.21) son equivalentes a la relación

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathring{U}(x_0) \cap X}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

y, por consiguiente, a la relación

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1.$$

En efecto, está claro que estas relaciones, suponiendo que las funciones f y g no se anulan, se deducen inmediatamente de las condiciones (8.20) y (8.21). Viceversa, si ellas se cumplen, entonces es suficiente hacer $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in \mathring{U}(x_0) \cap X$ y si $x_0 \in X$, entonces también $\varphi(x_0) = 1$; entonces, evidentemente, para la función φ se cumplen las condiciones (8.20) y (8.21).

Si

$$f \sim g \text{ y } g \sim h \quad \text{cuando} \quad x \to x_0, \tag{8.23}$$

entonces

$$f \sim h \quad \text{cuando} \quad x \to x_0. \tag{8.24}$$

En realidad, de las condiciones (8.23) se deduce que existen un entorno $U = U(x_0)$ del punto x_0 y las funciones $\varphi: U \cap X \to R$ y $\psi: U \cap X \to R$ tales que para todos los $x \in U \cap X$ tienen lugar las igualdades

$$f(x) = \varphi(x)g(x),\ g(x) = \varphi(x)h(x)$$

y

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \psi(x) = 1,$$

por esto

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x)h(x),$$

donde $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)\psi(x) = 1$, es decir, se cumple la igualdad asintótica (8.24).

De los resultados del p. 8.1 se deduce que cuando $x \to 0$ es válida la siguiente equivalencia de infinitésimos:

$$x \sim \operatorname{sen} x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arcsen} x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1 + x) \sim e^x - 1.$$

De esta equivalencia se deducen también relaciones más generales que enunciaremos en forma de lema independiente.

Lema 4. *Si la función $u(x)$ es tal que*

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = 0, \tag{8.25}$$

entonces, cuando $x \to x_0$

$$u(x) \sim \operatorname{sen} u(x) \sim \operatorname{tg} u(x) \sim \operatorname{arcsen} u(x) \sim \operatorname{arctg} u(x) \sim$$
$$\sim \ln[1 + u(x)] \sim e^{u(x)} - 1. \tag{8.26}$$

DEMOSTRACIÓN. Mostremos, por ejemplo, que

$$\operatorname{sen} u(x) \sim u(x) \quad \text{para} \quad x \to x_0, \tag{8.27}$$

donde $u\colon X \to R$ y $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$. Definamos para todos los $x \in X$ la función φ: $X \to R$ de la siguiente forma

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} u(x)}{u(x)} & \text{si} \quad u(x) \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad u(x) = 0 \end{cases} \tag{8.28}$$

y mostremos que

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1. \tag{8.29}$$

Para esto, dividamos el conjunto X en dos subconjuntos

$$X_1 = \{x \in X\colon u(x) \neq 0\} \quad \text{y} \quad X_2 = \{x \in X\colon u(x) = 0\}. \tag{8.30}$$

Sean inicialmente los conjuntos X_1 y X_2 no vacíos y x_0 un punto de adherencia finito o infinitamente alejado de cada uno de ellos.

La función $\dfrac{\operatorname{sen} u(x)}{u(x)}$ está definida sobre el conjunto X_1 y por el teorema sobre el límite de la función compuesta (véase el teorema 7 en el p. 5.17) tenemos

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_1}} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen} u(x)}{u(x)} = \lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1.$$

Aquí fue utilizada una de las propiedades de los límites de las funciones: si la función $\left(\text{en el caso dado } \frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)$ tiene límite para $u \to u_0$ por algún conjunto (en el caso dado para $u \to 0$ por el eje numérico reducido en el punto $u = 0$), entonces tiene ese mismo límite para $u = u_0$ por cualquier subconjunto (véase el lema 6 en el p. 5.9).

Sobre el conjunto X_2 la función φ es idénticamente igual a 1, por lo que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_2}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_2}} 1 = 1.$$

De esta forma, sobre cada uno de los conjuntos X_1 y X_2 la función φ cuando $x \to x_0$ tiene un mismo límite igual a 1, y ya que

$$X = X_1 \cup X_2,$$

entonces, cuando $x \to x_0$ tiene ese mismo límite por todo el conjunto X (véase el lema 7 en el p. 5.9), es decir, en el caso analizado la igualdad (8.29) está demostrada.

Si uno de los conjuntos X_1 o X_2 resulta ser vacío o el punto x_0 no es punto de adherencia (finito o infinitamente alejado) de uno de ellos, entonces la igualdad (8.29) también tendrá lugar ya que en estos casos el límite de la función φ cuando $x \to x_0$ por el conjunto X, se reduce al límite por uno de los conjuntos X_1 o X_2, para los cuales la igualdad del límite analizado a la unidad por ellos ya está establecida.

Así pues, la igualdad (8.29) está demostrada y ya que de (8.28) se deduce que para todos los $x \in U(x_0) \cap X$ tiene lugar la relación $\operatorname{sen} u(x) = \varphi(x)u(x)$, entonces está demostrada la validez de la igualdad asintótica (8.27).

Análogamente se demuestran las fórmulas asintóticas restantes de (8.26). □

Definición 4. *Sea $f\colon X \to R$ y $\alpha\colon X \to R$. La función α* se llama infinitesimal cuando $x \to x_0$ *en comparación con la función f si existen el entorno $U(x_0)$ del punto x_0 y la función infinitesimal para $x \to x_0$, $\varepsilon\colon X \to R$:*

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0, \tag{8.31}$$

que para todos los $x \in U(x_0) \cap X$ tiene lugar

$$\alpha(x) = \varepsilon(x)f(x). \tag{8.32}$$

Si la función α es infinitesimal para $x \to x_0$ en comparación con la función f, entonces se escribe

$$\alpha(x) = o(f(x)), \quad x \to x_0$$

(se lee "$\alpha(x)$ es o pequeña de la función $f(x)$ cuando $x \to x_0$").

Según esta definición, por ejemplo, la escritura "$\alpha(x) = o(1), x \to x_0$" significa simplemente que la función α es infinitesimal cuando $x \to x_0$.

Si existe tal entorno reducido $\mathring{U} = \mathring{U}(x_0)$ del punto x_0, que para todos los puntos $x \in \mathring{U} \cap X$ se cumple la desigualdad $f(x) \neq 0$, y en el caso de $x_0 \in X$ las funciones α y f además son continuas en el punto x_0, entonces las condiciones (8.31) — (8.32) son equivalentes a la condición

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathring{U} \cap X}} \frac{\alpha(x)}{f(x)} = 0. \tag{8.33}$$

En realidad, al suponer que la función f es diferente de cero, la condición (8.33) se deriva directamente de (8.31) — (8.32). Viceversa, si se cumple (8.33), entonces es suficiente hacer

$$\varepsilon(x) = \frac{\alpha(x)}{f(x)}, \quad x \in \mathring{U} \cap X$$

y si $x_0 \in X$, entonces, además, $\varepsilon(o) = 0$, para que se cumplan condiciones (8.31) — (8.32).

En el caso, cuando $f(x)$ es infinitesimal para $x \to x_0$, entonces se dice que $\alpha = o(f)$ para $x \to x_0$ es *infinitesimal de orden superior que f.*

Por ejemplo, $x^3 = o(\operatorname{sen} x^2)$ cuando $x \to 0$, ya que

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\operatorname{sen} x^2} = \lim_{x \to 0} x \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x^2} = 0 \cdot 1 = 0.$$

De igual forma, $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ y $x = o(x^2)$ cuando $x \to \infty$.

Señalemos que si $f = o(g)$ para $x \to x_0$, entonces, como antes, $f = O(g)$ para $x \to x_0$. En realidad, sea $f = \varepsilon g$ donde $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon = 0$. Entonces, la función $\varepsilon = \varepsilon(x)$ está acotada sobre la intersección del conjunto X con cierto entorno $U(x_0)$ del punto x_0 (véase el p. 5.10): $|\varepsilon(x)| \leqslant c$ y, por consiguiente, $|f(x)| \leqslant c|g(x)|$, $x \in X \cap U(x_0)$. Esto significa que $f = O(g)$, $x \to x_0$.

Reuniendo los conceptos fundamentales introducidos en este punto obtendremos: supongamos que existen un entorno $U = U(x_0)$ del punto x_0 y una función $\varphi: U \cap X \to R$ tales que

$$f(x) = \varphi(x) g(x),$$

entonces

si la función $\varphi(x)$ está acotada sobre U, entonces $f(x) = O(g(x))$;

si $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$, entonces $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$;

si $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$, entonces $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$;

Ejercicio 1. Sea $\beta = O(\alpha^2)$ cuando $x \to x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$. Demuéstrese que entonces, $\beta = o(\alpha)$ cuando $x \to x_0$.

Utilizando las igualdades con los símbolos O y o se debe tener en cuenta que éstas no son igualdades en el sentido común de la palabra. Así pues, si

$$\alpha_1 = o(\beta) \quad \text{cuando} \quad x \to x_0, \quad \alpha_2 = o(\beta) \quad \text{cuando} \quad x \to x_0,$$

entonces sería erróneo hacer de aquí la conclusión de que $\alpha_1 = \alpha_2$ como en las igualdades comunes. Por ejemplo, $x^3 = o(x)$ y $x^2 = o(x)$, cuando $x \to 0$, pero $x^2 \neq x^3$.

De forma análoga, si

$$f + O(f) = g + O(f) \quad \text{cuando} \quad x \to x_0,$$

entonces sería erróneo hacer la conclusión de que $f = g$.

Es que un mismo símbolo $O(f)$ o $o(f)$ puede denotar distintas funciones concretas. Esta circunstancia está relacionada con que al definir los símbolos $O(f)$ y $o(f)$ introducimos clases completas de funciones, que presentan determinadas propiedades (la clase de funciones acotadas en un entorno del punto x_0 en comparación con la función f y la clase de funciones infinitamente pequeñas en comparación con $f(x)$ cuando $x \to x_0$) y sería correcto escribir no $\alpha = O(f)$ y $\alpha = o(f)$ sino $\alpha \in O(f)$ y $\alpha \in o(f)$. Sin embargo, esto nos llevaría a una mayor complicación del cálculo con las fórmulas, en las cuales se encuentran los símbolos O y o. Por eso, conservaremos la notación anterior $\alpha = O(f)$ y $\alpha = o(f)$ pero vamos a leer siempre estas igualdades en correspondencia con las definiciones dadas anteriormente, sólo en un sentido, de izquierda a derecha (si, claro está, no se acuerda otra cosa). Por ejemplo, la notación

$$\alpha = o(f), \quad x \to x_0$$

significa que la función α es infinitesimal en comparación con la función f cuando $x \to x_0$, pero de ningún modo que cualquier infinitésimo en comparación con f es igual a α.

En calidad de ejemplo para la utilización de estos símbolos demostremos la igualdad

$$o(cf) = o(f), \tag{8.34}$$

donde c es una constante.

Por lo dicho, es necesario mostrar que si $g = o(cf)$, entonces $g = o(f)$. Efectivamente, si $g = o(cf)$, entonces $g = \varepsilon cf$ donde $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Hagamos $\varepsilon_1 = c\varepsilon$, entonces $g = \varepsilon_1 f$, donde, evidentemente, $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$ y esto significa que $g = o(f)$. □

En conclusión señalemos que lo dicho sobre la utilización de los símbolos o y O no excluye, claro está, que fórmulas aisladas con estos símbolos puedan resultar válidas no sólo cuando se les lee de izquierda a derecha sino también de derecha a izquierda, así que la fórmula (8.34) para $c \neq 0$ es válida cuando se lee de derecha a izquierda.

Ejercicios. Demuéstrese que si α es infinitesimal para $x \to x_0$, entonces para $x \to x_0$:

2. $o(\alpha^2) = o(\alpha)$,
3. $o(\alpha) \cdot O(\alpha) = o(\alpha^2)$,
4. $o(\alpha) + o(\alpha) = o(\alpha)$,
5. $\alpha \cdot o(\alpha) = o(\alpha^2)$,
6. $o(\alpha + \alpha^2) = o(\alpha)$,
7. $o^2(\alpha) = o(\alpha^2)$,
8. $cO(\alpha) + o(\alpha) = O(\alpha)$ (c es una constante),
9. $o(o(\alpha)) = o(\alpha)$,
10. $O(O(\alpha)) = O(\alpha)$,
11. Si $|\beta| \leqslant o(\alpha)$ entonces $\beta = o(\alpha)$.
12. Sean $\lim\limits_{t \to b} f(t) = a$ y $f(t) \neq a$ para $t \neq b$ en un entorno del punto $t = b$. Demuéstrese que entonces, si $\varphi(x) = o[\psi(x)]$ cuando $x \to a$, entonces $\varphi[f(t)] = o[\psi[f(t)]]$ cuando $t \to b$; y si $\varphi(x) = O[\psi(x)]$ cuando $x \to a$, entonces $\varphi[f(t)] = O[\psi[f(t)]]$ cuando $t \to b$.

8.3. FUNCIONES EQUIVALENTES

Si la función $f(x)$ se sustituye con algún objetivo por $g(x)$, entonces la diferencia $f(x) - g(x)$ se llama *error absoluto* y la razón $\frac{f(x) - g(x)}{f(x)}$, *error relativo* de la sustitución dada. Si se estudia el comportamiento de la función $f(x)$ cuando $x \to x_0$, entonces a menudo es conveniente sustituirla por una función $g(x)$ tal que 1) la función $g(x)$ en un sentido determinado es más sencilla que la función $f(x)$; 2) el error absoluto tiende a cero cuando $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = 0.$$

En este caso se dice que $g(x)$ aproxima la función $f(x)$ en las cercanías del punto x_0. Por ejemplo, todas las funciones infinitamente pequeñas f y g para $x \to x_0$ tienen esta propiedad.

Más adelante será demostrado que entre todas ellas sólo las que son equivalentes entre sí

$$g(x) \sim f(x), \quad x \to x_0,$$

tienen la propiedad de que no sólo el error absoluto $f(x) - g(x)$, sino también el relativo $\frac{f(x) - g(x)}{f(x)}$, tiende a cero, cuando $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{f(x)} = 0.$$

En este sentido, las funciones equivalentes a la función dada la aproximan mejor que otras funciones.

Por ejemplo, las funciones $x, \frac{1}{2}x, 2x, 10x$ son infinitesimales cuando $x \to 0$ al igual que $\operatorname{sen} x$ y, por eso, los errores absolutos, cuando se cambia $\operatorname{sen} x$ de cada una de ellas, tienden a cero cuando $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x - x) = \lim_{x \to 0} \left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x - 2x) = \lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x - 10x) = 0.$$

Pero sólo una de todas las funciones mencionadas anteriormente, precisamente $g(x) = x$ tiene la propiedad de que el error relativo en la sustitución $\operatorname{sen} x$ de esta función tiende a cero cuando $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x}{\operatorname{sen} x}\right) = 0.$$

La tendencia del error relativo $\frac{f(x) - g(x)}{f(x)}$ a cero cuando $x \to x_0$, se puede escribir usando el símbolo "*o* pequeña"

$$f(x) - g(x) = o(f(x)), \quad x \to x_0.$$

Enunciemos la propiedad característica mencionada de las funciones equivalentes en forma de teorema.

Teorema 1. *Para que las funciones $f\colon X \to R$ y $g\colon X \to R$ sean equivalentes cuando $x \to x_0$, es necesario y suficiente que para $x \to x_0$ se cumpla la condición*

$$f(x) = g(x) + o(g(x)). \tag{8.35}$$

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sea $f \sim g$ cuando $x \to x_0$, entonces por la definición 3, existen un entorno $U = U(x_0)$ del punto x_0 y una función $\varphi\colon U \cap X \to R$ tales que para todos los $x \in U \cap X$ se cumplen las condiciones

$$f(x) = \varphi(x)g(x)$$

y

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1.$$

Entonces

$$f(x) - g(x) = \varphi(x)g(x) - g(x) = [\varphi(x) - 1]g(x) = \varepsilon(x)g(x),$$

donde $\varepsilon(x) = \varphi(x) - 1$, $x \in U \cap X$, y por esto $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Esto significa que $\varepsilon(x)g(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$, es decir, tiene lugar (8.35). □

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Si se cumple la condición (8.35), entonces, por la definición 4, existen un entorno $U = U(x_0)$ del punto x_0 y una función $\varepsilon\colon U \cap X \to R$ tales que para todos los $x \in U \cap X$ se cumplen las condiciones

$$f(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0;$$

entonces $f(x) = [1 + \varepsilon(x)]\,g(x) = \varphi(x)g(x)$, donde $\varphi(x) = 1 + \varepsilon(x)$, $x \in U \cap X$, y por esto $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$. Esto significa que $f \sim g$, $x \to x_0$. □

Ejemplo. $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \to 0$.

En efecto, por el teorema 1, es suficiente mostrar que $\operatorname{ctg} x \sim \dfrac{1}{x}$, $x \to 0$. Esto se deduce inmediatamente de (8.3):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1.$$

En el caso cuando existe un entorno reducido $\mathring{U}(x_0)$ del punto x_0 tal que las funciones $f\colon X \to R$ y $g\colon X \to R$ no se anulan sobre la intersección $\mathring{U}(x_0) \cap X$, el teorema 1 es equivalente a la afirmación de que las funciones f y g son equivalentes cuando $x \to x_0$ si y sólo si el error relativo $\dfrac{f(x) - g(x)}{f(x)}$ $\Biggl($o por la simetría del concepto de equivalencia de las funciones, la relación $\dfrac{f(x) - g(x)}{g(x)}\Biggr)$ tiende a cero cuando $x \to x_0$.

Corolario. *Sea* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = c \neq 0$. *Entonces* $g \sim cf$ *y* $g(x) = cf(x) + o(f(x))$ *cuando* $x \to x_0$.

DEMOSTRACIÓN. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = c \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{cf(x)} = 1$, y por tanto $g \sim cf$ cuando $x \to x_0$. De aquí, por el teorema 1 tenemos $g(x) = cf(x) + o(cf(x))$, de donde (véase el final del p. 8.2) $g(x) = cf(x) + o(f(x)),\ x \to x_0$. □

Teorema 2. *Sean $f(x) \sim f_1(x)$ y $g(x) \sim g_1(x)$ cuando $x \to x_0$. Entonces, si existe*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \tag{8.36}$$

entonces existe también $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, y además

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \tag{8.37}$$

DEMOSTRACIÓN. Las condiciones $f \sim f_1$ y $g \sim g_1$ cuando $x \to x_0$ significan que existen un entorno $U = U(x_0)$ y las funciones $\varphi\colon U \cap X \to R$ y $\psi\colon U \cap X \to R$ tales que cuando $x \in U \cap X$ tienen lugar las igualdades

$$f(x) = \varphi(x) f_1(x),$$
$$g(x) = \psi(x) g_1(x)$$

y

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \psi(x) = 1.$$

Además, por cuanto existe el límite (8.36), entonces se encuentra un entorno $U_1 = U(x_0)$ del punto x_0 tal que la función $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ estará definida sobre el conjunto $U_1 \cap X$ y, por consiguiente, por doquier, sobre este conjunto se cumplirá la desigualdad $g_1(x) \neq 0$. Por cuando $g(x) = \psi(x) g_1(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = 1$, entonces se encuentra un entorno $U_2 = U(x_0) \subset U_1$ del punto x_0 tal que para todos los $x \in U_2 \cap X$ se cumplirá la desigualdad $\psi(x) \neq 0$ (véase la propiedad 2 de los límites de las funciones en el p. 5.10), y por lo tanto, la desigualdad $g(x) \neq 0$. Por esto, la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ está definida sobre el conjunto $U_2 \cap X$ y tiene sentido hablar de su límite en el punto x_0.

Ahora tenemos:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) f_1(x)}{\psi(x) g_1(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x)} \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \ \square$$

Por cuanto ambos miembros de la igualdad (8.37) son equivalentes, entonces, del teorema demostrado se deduce que el límite del primer miembro existe si y sólo si existe el límite de segundo miembro y en el caso de que existan ambos, coinciden. Esto hace muy cómodo la utilización del teorema 2 en la práctica: se le puede utilizar para el cálculo de límites, sin saber a priori si existe o no el límite en cuestión.

Ejercicio 13. Demuéstrese la igualdad (8.34) en el caso, cuando el límite $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ es igual a ∞, $+\infty$ o $-\infty$.

8.4. MÉTODO DE EXTRACCIÓN DE LA PARTE PRINCIPAL DE LA FUNCIÓN Y SU APLICACIÓN EN EL CÁLCULO DE LÍMITES

Sean dadas las funciones $\alpha: X \to R$ y $\beta: X \to R$. Si la función β para todos los $x \in X$ es representable en la forma

$$\beta(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x)), \quad x \to x_0$$

entonces, la función α se llama *parte principal* de la función β cuando $x \to x_0$.

Ejemplos. 1. La parte principal de la función $\operatorname{sen} x$ cuando $x \to 0$ es igual a x, ya que $\operatorname{sen} x = x + o(x)$ cuando $x \to 0$.

2. Si $P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, entonces la función $a_n x^n$ es la parte principal del polinomio $P_n(x)$ cuando $x \to \infty$, ya que $P_n(x) = a_n x^n + o(x^n)$ cuando $x \to \infty$.

Si está dada la función $\beta: X \to R$, entonces su parte principal cuando $x \to x_0$ no se define unívocamente: según el teorema 1, cualquier función α equivalente a β cuando $x \to x_0$ es su parte principal cuando $x \to x_0$. Por ejemplo, sea $\beta = x + x^2 + x^3$. Por cuanto, por un lado $x^2 + x^3 = o(x)$ cuando $x \to 0$, entonces $\beta = x + o(x)$ cuando $x \to 0$, y por otro lado, $x^3 = o(x + x^2)$, cuando $x \to 0$, entonces $\beta = x + x^2 + o(x + x^2)$ cuando $x \to 0$. En el primer caso como parte principal puede considerarse $\alpha = x$, en el segundo $\alpha = x + x^2$. No obstante, si nos planteamos un tipo determinado de parte principal, entonces, si se elige acertadamente, se puede lograr que la parte principal del tipo señalado quedará definida unívocamente.

En particular, es válido el siguiente lema.

Lema 5. *Sean $X \subset R$, $x_0 \in R$ y x_0 un punto de acumulación del conjunto X. Si la función β: $X \to R$ posee para $x \to x_0$ una parte principal del tipo $A(x - x_0)^k$, $A \neq 0$, donde A y k son constantes, entonces entre todas sus partes principales de tal tipo ella está definida de modo único.*

En realidad, sean para $x \to x_0$

$$\beta(x) = A(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k), \quad A \neq 0,$$

y

$$\beta(x) = A_1(x - x_0)^{k_1} + o((x - x_0)^{k_1}), \quad A \neq 0.$$

Entonces $\beta(x) = A(x - x_0)^k$, $\beta(x) \sim A_1(x - x_0)^{k_1}$ cuando $x \to x_0$, $x \in X$. Por esto $A(x - x_0)^k \sim A_1(x - x_0)^{k_1}$, $x \to x_0$, $x \in X$, es decir

$$1 = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} \frac{A(x - x_0)^k}{A_1(x - x_0)^{k_1}} = \frac{A}{A_1} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} (x - x_0)^{k - k_1}$$

que es válido sólo en el caso de $A = A_1$ y $k = k_1$. □

El concepto de parte principal de una función es útil, en el estudio de infinitésimos e infinitos y con mucho éxito se utiliza en la resolución de variados problemas del análisis matemático. A menudo se logra sustituir un infinitésimo de tipo complejo analítico por una función más sencilla (en cierto sentido), en el entorno del punto dado, salvo los infinitésimos de orden superior. Por ejemplo, si $\beta(x)$ se logra presentar de la forma $\beta(x) = A(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$, esto significa, que salvo los infinitésimos de orden superior que $(x - x_0)^k$ cuando $x \to x_0$ el infinitésimo $\beta(x)$ se comporta en el entorno del punto x_0 como la función potencial $A(x - x_0)^k$.

Mostremos en los ejemplos, cómo el método de extracción de la parte principal de los infinitésimos se aplica en el cálculo de los límites de las funciones. En este proceso serán ampliamente utilizadas las relaciones de equivalencia obtenidas en (8.26).

Supongamos es exige hallar el límite (significa demostrar también que existe)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x + x^2) + \operatorname{arcsen} 3x - 5x^3}{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{tg}^2 x + (e^x - 1)^5}.$$

Utilizando la equivalencia demostrada anteriormente (véase (8.26)) $\ln(1 + u) \sim u$ cuando $u \to 0$ tenemos $\ln(1 + x + x^2) \sim x + x^2$ cuando $x \to 0$, por eso (véase el teorema 1) $\ln(1 + x + x^2) = x + x^2 + o(x + x^2)$. Sin embargo, $o(x + x^2) = o(x)$ (¿por qué?) y $x^2 = o(x)$ cuando $x \to 0$, por lo tanto

$$\ln(1 + x + x^2) = x + o(x) \text{ cuando } x \to 0.$$

Más adelante, $\operatorname{arcsen} 3x \sim 3x$ y como consecuencia de esto

$$\operatorname{arcsen} 3x = 3x + o(3x) = 3x + o(x).$$

Es evidente también que

$$5x^3 = o(x).$$

De la igualdad asintótica $\operatorname{sen} 2x \sim 2x$ obtenemos

$$\operatorname{sen} 2x = 2x + o(2x) = 2x + o(x)$$

de $\operatorname{tg}^2 x \sim x^2$ tendremos

$$\operatorname{tg}^2 x = x^2 + o(x^2) = o(x)$$

y de $(e^x - 1)^5 \sim x^5$ de forma análoga

$$(e^x - 1)^5 = x^5 + o(x^5) = o(x).$$

Todas estas relaciones se cumplen cuando $x \to 0$. Ahora tenemos

$$\ln(1 + x + x^2) + \operatorname{arcsen} 3x - 5x^3 =$$
$$= x + o(x) + 3x + o(x) - o(x) = 4x + o(x),$$
$$\operatorname{sen} 2x + \operatorname{tg}^2 x + (e^x - 1)^5 = 2x + o(x) + o(x) = 2x + o(x),$$

por eso

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x + x^2) + \operatorname{arcsen} 3x - 5x^3}{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{tg}^2 x + (e^x - 1)^5} = \lim_{x \to 0} \frac{4x + o(x)}{2x + o(x)}.$$

Pero $4x + o(x) \sim 4x$ y $2x + o(x) \sim 2x$ cuando $x \to 0$ y por lo tanto, por el teorema 2,

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x + o(x)}{2x + o(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{4x}{2x} = 2.$$

De esta manera, el límite buscado existe y es igual a 2.

En el cálculo de límite de funciones con ayuda del método de extracción de la parte principal se debe tener en cuenta que en los casos no estudiados en el p. 8.3, no se pueden sustituir en general, los infinitésimos por sus equivalentes. Así, por ejemplo, al buscar el límite de la expresión $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$ sería un error sustituir la función $\operatorname{sen} x$ por la función x equivalente cuando $x \to 0$. El método natural de resolución de problemas semejantes será dado en 13.4.

Para la búsqueda de límites del tipo $u(x)^{v(x)}$ es conveniente hallar el límite de sus logaritmos. Veamos un ejemplo semejante. Hallemos el límite $\lim\limits_{x\to 0}\cos^{1/x^2} 2x$. Observando que

$$\cos^{1/x^2} 2x = e^{\ln\cos^{1/x^2} 2x} \tag{8.38}$$

vemos que debemos calcular el límite

$$\lim_{x\to 0}\ln\cos^{1/x^2} 2x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\operatorname{sen}^2 2x)}{x^2}.$$

Ya que

$$\ln(1-\operatorname{sen}^2 2x) \sim -\operatorname{sen}^2 2x \sim -(2x)^2 = -4x^2,$$

entonces de aquí, por el teorema 2 de este párrafo, tenemos

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\operatorname{sen}^2 2x)}{x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2} = -2;$$

de esta forma

$$\lim_{x\to 0}\ln\cos^{1/x^2} 2x = -2.$$

Por la continuidad de la función exponencial de (8.38) tenemos

$$\lim_{x\to 0}\cos^{1/x^2} 2x = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln\cos^{1/x^2} 2x} = \frac{1}{e^2}.$$

El método de cálculo de los límites con ayuda de la extracción de la parte principal de una función es muy cómodo, sencillo y, además, un método bastante general. Algunas dificultades en su aplicación están relacionadas, por ahora, con que todavía no hay un método suficientemente general de extracción de la parte principal de la función. Esta dificultad será eliminada más adelante (véase el § 13).

Ejercicios. Calcúlense los límites:

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x - \operatorname{sen}^2 x}{x^2 + \ln(1+3x)}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - b^x}{x}$ $(a, b > 0;\ a, b \neq 1)$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

19. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\ln\operatorname{tg} x}{\cos 2x}$. *Indicación.* Es útil hacer la sustitución $x = \dfrac{\pi}{4} - y$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$.

21. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}(1 + 2\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

18. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(1 + e^{\alpha x})}{\ln(1 + e^{\beta x})}$.
$(\alpha > 0, \beta > 0)$.

23. $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} a}\right)^{1/(x-a)}$

§ 9. DERIVADA Y DIFERENCIAL

9.1. DEFINICIÓN DE DERIVADA

Definición 4. *Sea la función $y = f(x)$ definida en cierto entorno del punto $x_0 \in \boldsymbol{R}$ y sea x un punto arbitrario de este entorno. Si la relación*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

tiene límite cuando $x \to x_0$, entonces este límite se llama derivada de la función f en el punto x_0 o, lo que es lo mismo, para $x = x_0$ y se denota por $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{9.1}$$

Si introducimos la notación $x - x_0 = \Delta x$, entonces la definición (9.1) se escribe en la forma

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Suponiendo $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$, omitiendo las notaciones del argumento y denotando la derivada sencillamente por y' obtenemos otra notación de la definición de derivada:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Si para algún valor de x_0 existen los límites

$$\text{o bien } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty, \text{ o bien } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty,$$
$$\text{o bien } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty,$$

entonces se dice que cuando $x = x_0$ existe la *derivada infinita*, respectivamente, *derivada infinita de signo determinado* igual a $+\infty$ o $-\infty$.

En el futuro, por la expresión "la función tiene derivada" entenderemos siempre la existencia de derivada finita, si no se acuerda lo contrario.

Definición 2. *Si la función f está definida en algún entorno a la derecha (o a la izquierda) del punto x_0 y existe el límite finito o infinito (de determinado signo)*

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \left(\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right),$$

entonces se denomina respectivamente derivada finita o infinita a la derecha (izquierda) de la función f en el punto x_0 y se denota por $f'_+(x_0)$ (o $f'_-(x_0)$).

Las derivadas a la derecha y a la izquierda se llaman derivadas unilaterales.

Del teorema sobre los límites unilaterales (véase el p. 4.5) se deduce que la función $f(x)$, definida en un entorno del punto x_0 tiene derivada $f'(x_0)$ si y sólo si $f'_-(x_0)$ y $f'_+(x_0)$ existen y $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. En este caso, $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Si la función $f(x)$ está definida sobre cierto intervalo, y en cada uno de sus puntos existe la derivada (por derivada en un extremo, que pertenece al intervalo, naturalmente se entiende la derivada utilateral correspondiente), entonces la derivada, evidentemente, es también una función definida sobre el intervalo dado, y se le denota por $f'(x)$. Si $y = f(x)$, entonces en lugar de $f'(x_0)$ se escribe también $y'\big|_{x = x_0}$.

El cálculo de la derivada de una función se llama *derivación*.

Ejemplos. 1. $y = c$ (c es una constante).

Ya que $\Delta y = c - c = 0$, entonces $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ y de esta forma

$$c' = 0.$$

2. $y = \operatorname{sen} x$. Tenemos

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2},$$

por eso

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\operatorname{sen}\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

De esta forma

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x.$$

3. $y = \cos x$. Ya que

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2},$$

entonces tendremos

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0}\operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\operatorname{sen}\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} = -\operatorname{sen} x.$$

De esta forma

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x.$$

4. $y = a^x$. Tenemos $\Delta y = a^{x + \Delta x} - a^x = a^x(a^x - 1)$ y por eso

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

de aquí, por la fórmula (8.17) obtenemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x\lim_{\Delta x \to 0}\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x\ln a.$$

De esta forma $(a^x)' = a^x\ln a$ y, en particular,

$$(e^x)' = e^x.$$

La última igualdad demuestra que el número e tiene una notable propiedad: *la función exponencial con base e tiene derivada que coincide con la misma función.* Con esto se explica que en el análisis matemático en calidad de base de las potencias y de base de los logaritmos se utiliza preferentemente el número e. Esto es muy cómodo, ya que simplifica los cálculos.

5. $y = x^n$, n es un número natural. Utilizando la regla de elevación del binomio a una potencia, hallamos

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n,$$

de donde, cuando $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}\Delta x + \ldots + \Delta x^{n-1}.$$

Ya que cuando $\Delta x \to 0$ todos los sumandos de la parte derecha que contienen al factor Δx a una potencia con exponente natural, tienden a cero, entonces $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$; de esta forma

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Más adelante veremos que esta fórmula es válida cuando n es un número real arbitrario.

9.2. DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

Definición 3. *La función $y = f(x)$, definida en cierto entorno $U(x_0)$ del punto $x_0 \in R$ se llama diferenciable cuando $x = x_0$, si su incremento en este punto, es decir,*

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad x_0 + \Delta x \in U(x_0),$$

es representable en la forma

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \tag{9.2}$$

*donde A es una constante**), *y*

$$\alpha(\Delta x) = o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

La función lineal $A\Delta x$ (de la variable Δx) se llama diferencial de la función f en el punto x_0 y se designa por $df(x_0)$, o, más brevemente, por dy.

De esta forma

$$\Delta y = dy + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0, \tag{9.3}$$

$$dy = A\Delta x. \tag{9.4}$$

Dicho de otra forma, la diferenciabilidad de la función f en el punto x_0 significa que la función

---

*) Para un x_0 dado la constante A es cierto número, que no depende de Δx; naturalmente, cuando varía el punto x_0, el número A en general varía.

$$\alpha(\Delta x) = \Delta y - A\Delta x, \quad x_0 + \Delta x \in U(x_0),$$

es tal que

$$\alpha(\Delta x) = \varepsilon(\Delta x)\Delta x,$$

donde

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0;$$

además, ya que $\alpha(0) = 0$, entonces el valor de la función $\varepsilon(\Delta x)$ para $\Delta x = 0$ no se determina a base de la igualdad $\alpha(\Delta x) = \varepsilon(\Delta x)\Delta x$, es decir, la función $\varepsilon(\Delta x)$ está definida sólo en el entorno reducido $\mathring{U}(x_0)$ del punto x_0, y, por lo tanto, el límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x)$ se entiende en el sentido del límite por este entorno reducido $\mathring{U}(x_0)$.

Es evidente, que es válida también la afirmación inversa, si para $\Delta x \neq 0$, $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, el incremento Δy de la función f en el punto x_0 es representable en la forma

$$\Delta y = A\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x,$$

donde

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0,$$

entonces la función f será diferenciable en el punto x_0. En realidad, si en este caso hacemos

$$\alpha(\Delta x) = \begin{cases} \varepsilon(\Delta x)\Delta x & \text{cuando} \quad \Delta x \neq 0, \\ 0 & \text{cuando} \quad \Delta x = 0, \end{cases}$$

entonces es evidente que la igualdad (9.2) se cumplirá para todos los Δx tales que $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$.

Señalemos que la diferencial $dy = A\Delta x$ como cualquier función lineal, está definida para cualquier valor Δx: $-\infty < \Delta x < +\infty$, mientras que el incremento $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, naturalmente, se puede analizar sólo para tales Δx para los cuales $x_0 + \Delta x$ pertenece al dominio de la función f.

Si $A \neq 0$, es decir, si $dy \not\equiv 0$, entonces la diferenciabilidad de la función en el punto x_0 significa que salvo los infnitésimos de orden superior que el incremento del argumento Δx, el incremento de la función Δy es una función lineal de Δx. Utilizando la terminología del p. 8.4, se puede decir que la parte principal del incremento de la función Δy en el punto x_0 es una función lineal con respecto a Δx; además, el incremento Δy y la diferencial dy son infinitésimos equivalentes cuando $\Delta x \to 0$ (véase el p. 8.3).

Si, además, $A = 0$, es decir, $dy \equiv 0$, entonces $\Delta y = o(\Delta x)$ cuando $\Delta x \to 0$. De esta forma, cuando $A = 0$, el incremento Δy es un infinitésimo de orden superior a Δx cuando $\Delta x \to 0$.

Para mayor simetría de la notación de la diferencial, el incremento Δx lo denotan por dx y lo llaman diferencial de la variable independiente. De esta forma, la diferencial se puede escribir en la forma

$$dy = Adx.$$

Ejemplo. Hallemos la diferencial de la función $y = x^3$. En este caso,

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Cuando $\Delta x \to 0$, la parte principal lineal de la expresión que está a la derecha, es igual a $3x^2\Delta x$, por lo que $dy = 3x^2 dx$.

Sea $f(x_0) = y_0$. Sustituyendo en (9.3) los valores $\Delta y = f(x) - y_0$, $\Delta x = x - x_0$, $dy = A(x - x_0)$ obtenemos

$$f(x) = y_0 + A(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0. \tag{9.5}$$

Así, si la función $f(x)$ es diferenciable en el punto x_0, entonces salvo los infinitésimos de orden superior a $x - x_0$ en la cercanía de x_0, es igual a la función lineal; dicho de otro modo, en este caso, la función f en el entorno del punto x_0 se comporta "casi como una función lineal"

$$y_0 + A(x - x_0),$$

con la particularidad de que el error en la sustitución de la función f por esta función lineal será tanto menor, cuanto menor sea la diferencia $x - x_0$ y más aún, la relación de este error por la diferencia $x - x_0$ tiende a cero cuando $x \to x_0$.

Si la función f es diferenciable en cada punto de un intervalo, su diferencial es una función de dos variables: la variable del punto x y la variable dx:

$$dy = A(x)dx.$$

Aclaremos, ahora, la relación entre diferenciabilidad en el punto y existencia de la derivada en el mismo punto.

Teorema 1. *Para que la función f sea diferenciable en un punto x_0, es necesario y suficiente que tenga en este punto derivada y, además,*

$$dy = f'(x_0)dx. \tag{9.6}$$

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sea la función f diferenciable en el punto x_0, es decir, $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$. Entonces

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

Por eso la derivada $f'(x_0)$ existe y es igual a A. De aquí $dy = f'(x_0)dx$.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Supongamos que existe la derivada $f'(x_0)$, es decir, existe el límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Entonces

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x)$$

donde $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$ y para $\Delta x \neq 0$.

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x. \tag{9.7}$$

Ya que $\varepsilon(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$ cuando $\Delta x \to 0$ el hecho de que se cumpla la igualdad (9.7) significa la diferenciabilidad de la función f en el punto x_0. □

Subrayemos que en el teorema 1 se habla de la derivada finita.

De esta forma *la diferenciabilidad* de la función $f(x)$ en el punto x_0 *es equivalente a la existencia* en este punto *de la derivada finita* $f'(x_0)$.

De lo demostrado se deduce que el coeficiente A, que aparece en la definición de la diferencial (véase (9.4)), se determina unívocamente, precisamente $A = f'(x_0)$; de esta forma también *la diferencial de la función en el punto dado se determina unívocamente*. Esto, además, se deriva también del lema del p. 8.4 sobre la unicidad de la parte principal del tipo $A(x - x_0)^k$ de una función infinitesimal.

De la fórmula (9.6) hallamos $y' = \dfrac{dy}{dx}$. El segundo miembro es una fracción, cuyo numerador es la diferencial de la función y el denominador, la diferencial del argumento.

La fórmula (9.6) permite hallar las diferenciales de las funciones, si sus derivadas son conocidas. Así, por ejemplo, utilizando las derivadas halladas en el p. 9.1, obtenemos:

$$dc = 0 \quad (c \text{ es una constante}), \quad d\cos x = -\operatorname{sen} x\,dx,$$
$$d\operatorname{sen} x = \cos x\,dx, \quad da^x = a^x \ln a\,dx,$$

en particular, $de^x = e^x dx$

$$dx^n = nx^{n-1}dx \quad (n \text{ es un número natural}).$$

Como conclusión aclaremos la relación entre la diferenciabilidad y la continuidad en un punto dado.

Teorema 2. *Si la función f es diferenciable en un punto, entonces es continua en este punto.*

Corolario. *Si la función en algún punto tiene derivada, entonces es continua en este punto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea la función f diferenciable en el punto x_0, es decir, en este punto $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ cuando $\Delta x \to 0$. Entonces

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = A \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} o(\Delta x) = 0,$$

lo que significa la continuidad de la función f cuando $x = x_0$. $\square$

El corolario se deriva directamente de los teoremas 1 y 2.

Prestemos atención a que si la función tiene en el punto derivada infinita, entonces puede ser discontinua en ese punto.

Ejercicio 1. Constrúyase un ejemplo de función que tenga en algún punto derivada infinita y sea discontinua en ese punto.

Observemos que la afirmación inversa al teorema 2, no es cierta, es decir, de la continuidad de la función f en el punto dado no se deduce su diferenciabilidad, o, lo que es equivalente (véase el teorema 1), la existencia de la derivada en este punto.

Citemos ejemplos que reafirmen esto.

1. La función $f(x) = |x|$, evidentemente es continua en el punto $x = 0$ (como en todos los demás), pero no tiene derivada en este punto.

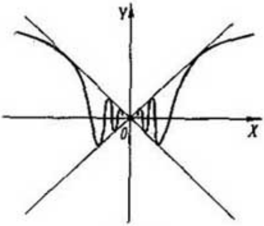


FIG. 36

En realidad, cuando $x \geqslant 0$ tenemos $y = |x| = x$, por eso para el punto $x_0 = 0$ obtendremos $\Delta y = \Delta x$. Por lo tanto

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

De forma análoga, cuando $x \leqslant 0$ tenemos $y = |x| = -x$, por eso para el punto $x_0 = 0$ en este caso obtendremos $\Delta y = -\Delta x$. Por lo tanto

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$

Con esto queda demostrado que la función $f(x) = |x|$ no tiene derivada cuando $x = 0$, sin embargo, en este punto existen las derivadas tanto por la derecha como por la izquierda.

Señalemos, además, que cuando $x > 0$, tiene lugar la igualdad $(|x|)' = x' = 1$, y cuando $x < 0$, respectivamente, $(|x|)' = (-x)' = -1$; por eso, para cualquier $x \neq 0$ es válida la fórmula

$$|x|' = \operatorname{sign} x.$$

El ejemplo siguiente muestra que una función puede no tener ninguna derivada unilateral en un punto de continuidad.

2. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{cuando} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{cuando} \quad x = 0. \end{cases}$$

(fig. 36). Entonces, en el punto $x = 0$ tenemos $\Delta y = \Delta x \operatorname{sen} \dfrac{1}{\Delta x}$ de donde $|\Delta y| \leqslant |\Delta x|$ y, por eso, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, es decir, la función analizada es continua cuando $x = 0$. Simultáneamente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{sen} \dfrac{1}{\Delta x}$, y por cuanto $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ no tiene en el punto $x = 0$ límite por la derecha, ni por la izquierda (véase el ejemplo 2 en el p. 4.4), entonces para la función $f(x)$ no existen las derivadas unilaterales cuando $x = 0$.

Ejercicio 2. Introdúzcase el concepto de diferenciabilidad de una función por la derecha (por la izquierda) en un punto dado y demuéstrese que la diferenciabilidad por la derecha (por la izquierda) en un punto dado es equivalente a la existencia, en este punto, de la derivada por la derecha (por la izquierda).

Si la función f tiene derivada en cada punto de cierto intervalo (es diferenciable en cada punto de ese intervalo), entonces se dice que la función f *tiene derivada*, o que ella es *diferenciable sobre el intervalo* indicado.

9.3. SENTIDO GEOMÉTRICO DE LA DERIVADA Y LA DIFERENCIAL

Los conceptos de derivada y de diferencial de una función en un punto dado están relacionados con el concepto de la tangente a la gráfica de la función en este punto. Para aclarar esta relación, definiremos ante todo la tangente.

Sea la función $y = f(x)$ definida sobre el intervalo (a, b) y continua en el punto $x_0 \in (a, b)$. Sean $y_0 = f(x_0)$, $M_0 = (x_0, y_0)$, $x_0 + \Delta x \in (a, b)$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $M = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Tracemos la secante M_0M (fig. 37). Ella tiene la ecuación

$$y = k(\Delta x)(x - x_0) + y_0, \tag{9.8}$$

donde

$$k(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{9.9}$$

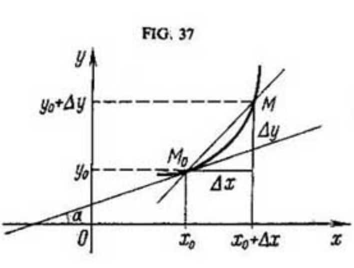
Mostremos que cuando $\Delta x \to 0$ la distancia $|M_0M|$ desde el punto M_0 hasta el punto M tiende a cero (en este caso se dice que el punto M tiende al punto M_0 y se escribe $M \to M_0$). En realidad, por la continuidad de la función f, cuando $x = x_0$, tenemos $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Por lo tanto, cuando $\Delta x \to 0$

$$|M_0M| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0.$$

Definición 4. *Si existe el límite finito* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = k_0$, *entonces la recta, cuya ecuación*

$$y = k_0(x - x_0) + y_0, \tag{9.10}$$

FIG. 37



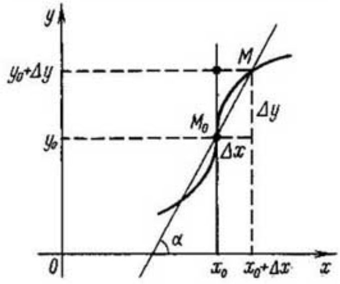


FIG. 38

se obtiene de la ecuación $y = k(\Delta x)(x - x_0) + y_0$ *cuando* $\Delta x \to t$ *(fig. 37), se llama tangente* (oblicua) *a la gráfica de la función f en el punto* (x_0, y_0).

Si $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \infty$, *entonces la recta (fig.* 38) *cuya ecuación*

$$x = x_0 \tag{9.11}$$

se obtiene para $\Delta x \to 0$ *de la ecuación de la secante escrita de la forma* $\dfrac{y}{k(\Delta x)} = x - x_0 + \dfrac{y_0}{k(\Delta x)}$, *se llama tangente* (vertical) *a la gráfica de la función f en el punto* (x_0, y_0).

Las rectas (9.10) en el caso del límite finito $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x)$ y (9.11) en el caso, cuando este límite es infinito, se llaman *posiciones límite de la recta* (9.8). Por esto, la definición de tangente dada anteriormente con relación a la gráfica de la función se puede parafrasear de la siguiente forma.

La posición límite de la secante M_0M *cuando* $\Delta x \to 0$ *o, lo que es lo mismo, cuando* $M \to M_0$, *se denomina tangente a la gráfica de la función f en el punto* M_0.

Observemos ahora que en virtud de la igualdad (9.9) la existencia del límite finito $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ significa la existencia de la derivada finita $f'(x_0) = k$. Por lo tanto, si la función f en el punto x_0 tiene la derivada, entonces la ecuación de la tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene la forma

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 , \tag{9.12}$$

donde $y_0 = f(x_0)$. Si $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, es decir, $f'(x_0) = \infty$, entonces por (9.9) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \infty$ y, por lo tanto, (véase (9.11), la ecuación de la tangente será

$$x = x_0.$$

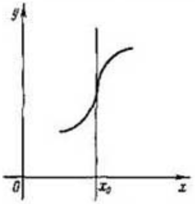


FIG. 39

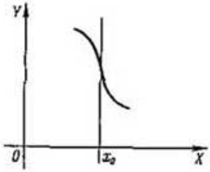


FIG. 40

Como es conocido de la geometría analítica, el coeficiente $f'(x_0)$ en la ecuación (9.12) es igual a la tangente del ángulo (véase la fig. 37) que la recta analizada forma con el sentido positivo del eje Ox:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha,$$

es decir, la derivada de la función en un punto es igual a la tangente del ángulo entre la tangente en el punto correspondiente de la gráfica de la función y el eje de las abscisas.

El primer sumando del primer miembro de la ecuación (9.12), es decir, la expresión $f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)\Delta x$, $\Delta x = x - x_0$, es la diferencial dy de la función f en el punto x_0. Por lo tanto, según la igualdad (9.12)

$$y - y_0 = dy,$$

donde y es ordenada variable de la tangente. De esta forma la diferencial de la función en un punto dado, es igual *al incremento de la ordenada de la tangente* en el punto correspondiente de la gráfica de la función.

OBSERVACIÓN. Si en el punto x_0 existe el límite infinito $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, entonces puede ser igual a $+\infty$ o $-\infty$. En este caso, cuando $x = x_0$, existe la derivada infinita $y' = +\infty$ o $y' = -\infty$ y la gráfica de la función $y = f(x)$ en el entorno del punto x_0 tiene la forma esquemáticamente representada en las figs. 39 y 40.

Es posible también el caso, cuando el límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ no es infinito de un signo determinado y, por lo tanto, en este punto no *existe* derivada finita ni infinita de signo determinado, sino sólo $f'(x_0) = \infty$. Esto, por ejemplo, puede ocurrir, si en el punto x_0 existen derivadas unilaterales infinitas de diferentes signos. Entonces, en el entorno del punto x_0, la gráfica de la función tiene la forma esquemáticamente representada en las figs. 41 y 42.

Ejemplo. Hallemos la tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (1; 1).

De acuerdo con el p. 9.1 (véase el ejemplo 5) $y' = 2x$, por eso $y'|_{x=1} = 2$. Según la fórmula (9.12), la tangente buscada tiene la ecuación $y = 2(x - 1) + 1$, es decir, $y = 2x - 1$.

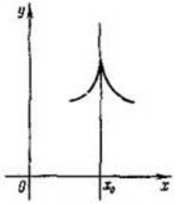


FIG. 41

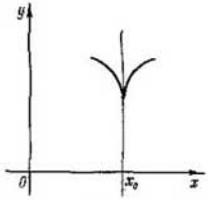


FIG. 42

Si la función f es diferenciable en el punto x_0, entonces, sustituyendo en la fórmula (9.5) $A = f'(x_0)$ (véase el teorema 1 del presente párrafo), tenemos

$$f(x) = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0,$$

y según (9.12) ($y_{\text{tang}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$) obtenemos

$$f(x) - y_{\text{tang}} = o(x - x), \quad x \to x_0.$$

De esta forma, la tangente oblicua a la gráfica de la función tiene la propiedad de que la diferencia de las ordenadas de la gráfica y esta tangente es un infinitésimo de orden superior para $x \to x_0$ en comparación con el incremento del argumento.

Al contrario, si existe una recta no vertical

$$y_{\text{rec}} = A(x - x_0) + y_0, \tag{9.13}$$

que pasa por el punto (x_0, y_0), y tal que

$$f(x) - y_{\text{rec}} = o(x - x_0), \quad x \to x_0, \tag{9.14}$$

entonces, esta recta es la tangente a la gráfica de la función en el punto (x_0, y_0). En realidad, en este caso,

$$f(x) - [A(x - x_0) + y_0] = o(x - x_0),$$

es decir,

$$\Delta y = f(x) - y_0 = A(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0,$$

por lo tanto, la función f es diferenciable en el punto x_0 (véase (9.2)) y $A = f'(x_0)$ (véase el teorema 1), es decir, la recta indicada coincide con la tangente (9.12).

De esta forma, *la condición* (9.14) *es necesaria y suficiente para que la recta* (9.13) *sea la tangente oblicua a la gráfica de la función* $f(x)$ *en el punto* (x_0, y_0). De aquí, en particular, se deduce que si existe la recta (9.13) con la propiedad (9.14), entonces ella es única (lo último se deriva, por ejemplo, de que la diferencial de la función es única, o de que la tangente a la gráfica de la función en el punto dado es única).

9.4. SENTIDO FÍSICO DE LA DERIVADA Y DE LA DIFERENCIAL

Sea la función $f(x)$ definida en un entorno del punto x_0. Utilizaremos, como anteriormente, las notaciones $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)$. Sea, para mayor exactitud, $\Delta x > 0$. La relación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, igual a la variación de la variable y sobre el segmento $[x_0, x_0 + \Delta x]$ con respecto a la unidad de medición de la variable x, naturalmente, se denomina *magnitud de la velocidad media* de la variación de y sobre el segmento $[x_0, x_0 + \Delta x]$ con respecto a x. Cuando Δx tiende a cero, es decir, cuando se contrae el segmento $[x_0, x_0 + \Delta x]$ hacia el punto x_0, la relación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ da la magnitud de la velocidad media de la variación y con relación a x en un segmento cada vez menor, que contiene el punto x_0. Todo lo dicho, naturalmente, es válido también cuando $\Delta x < 0$ para el segmento $[x_0 + \Delta x, x_0]$.

Por esto, al límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, si él existe, es decir, a la derivada $f'(x_0)$, es natural llamarlo *magnitud de la velocidad* de la variación de la variable y con respecto a la variable x en el punto x_0.

Señalemos que si en el punto x_0 existe la derivada $f'(x_0)$, entonces, analizando el límite de las velocidades medias de variación de y con respecto a x sobre los segmentos $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$, $(\Delta x > 0)$, que contienen el punto x_0 en su interior en calidad de centro, cuando se contraen hacia el punto x_0 (para $\Delta x \to 0$) llegaremos en el límite al mismo valor de la magnitud de la velocidad de variación de y con respecto a x, en el punto x_0, es decir, a $f'(x_0)$. En realidad, la magnitud de la velocidad media de la variación de y con respecto a x sobre el segmento $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$ es igual a $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$ (al cociente de la división de la variación de la función por la longitud del segmento, sobre el cual ocurrió esta variación); de aquí

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x}\right] = f'(x_0).$$

Es interesante observar que la relación de diferencias $\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$, en el sentido conocido, aproxima mejor el valor de la derivada f' en el punto x que $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (véase sobre esto en el p. 60.6).

Sobre la interpretación de la derivada como el valor de la velocidad de variación de una magnitud con respecto a otra está basada la aplicación de la derivada al estudio de los fenómenos físicos.

La aplicación de la diferencial está basada en que la sustitución del incremento de la función por su diferencial permite sustituir *cualquier* función diferenciable en el punto x_0, por una función lineal en un entorno suficientemente pequeño del punto x_0, es decir, considerar que el proceso de variación de la variable dependiente "en un entorno pequeño" ocurre linealmente con respecto al argumento. Dicho de

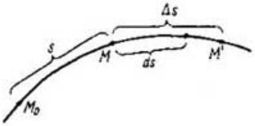


FIG. 43

otra forma, se puede considerar que la variación de la función es directamente proporcional a la variacion del argumento, o como se dice, que el proceso mencionado en este "pequeño entorno" ocurre uniformemente. Con esta sustitución, el error obtenido es un infinitésimo de orden superior que el incremento del argumento.

Ejemplos 1. Sea $s = s(t)$ la ley del movimiento de un punto material *) (fig. 43); s, la longitud del recorrido calculado a lo largo de la trayectoria *desde* un punto inicial M_0; t, el tiempo. Sea M la posición del punto en el instante t y M', en el instante $t + \Delta t$ y Δs la longitud del recorrido desde M hasta M', es decir, $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$.

La relación $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ se denomina en mecánica *magnitud de la velocidad media* del movimiento en el tramo desde M hasta M' y $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = v$, magnitud de la velocidad en el punto M o *magnitud de la velocidad instantánea* en el instante t; de este modo $v = \dfrac{ds}{dt}$.

Por la definición de diferencial $ds = vdt$; por lo tanto, la diferencial del recorrido es igual a la distancia que recorrería el punto en un intervalo de tiempo desde el momento t hasta $t + \Delta t$, si este punto se moviera uniformemente con velocidad igual a la velocidad instantánea del punto en el instante t. La magnitud Δs de la traslación real del punto es igual a $\Delta s = ds + o(\Delta t)$.

Vemos que desde el punto de vista de la mecánica, la sustitución de Δs por ds significa que consideramos el movimiento uniforme en el tramo dado (en el sentido de la magnitud de la velocidad **)).

2. Sea $q = q(t)$ la cantidad de electricidad que pasa por la sección transversal de un conductor; t, el tiempo; Δt, un intervalo de tiempo; $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$ la cantidad de electricidad que pasa a través de la sección dada en el intervalo de tiempo desde el momento t hasta el momento $t + \Delta t$. Entonces $\dfrac{\Delta q}{\Delta t}$ se llama la *intensidad media de la corriente* en el intervalo de tiempo Δt y se denota por I_{med} y el límite

---

*) No se debe confundir la ley del movimiento del punto con la ecuación de su trayectoria que tiene el tipo $r = r(t)$, donde r es el radio vector del punto que se mueve.

**) Es necesario tener en cuenta, que la velocidad es un vector y por eso, se caracteriza no sólo por su magnitud sino también por su dirección.

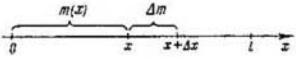


FIG. 44

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} I_{\text{med}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$ se llama *intensidad de la corriente en el instante t dado* o *corriente instantánea* y se denota por I. De esta forma, $I = \dfrac{dq}{dt}$. La diferencial $dq = I\Delta t$ es igual a la cantidad de corriente que pasa a través de la sección transversal del conductor en el intervalo de tiempo Δt, si la intensidad de la corriente fuera constante e igual a la intensidad de la corriente en el instante t. Como siempre, $\Delta q - dq = o(\Delta t)$.

3. Supongamos que está dada una barra no homogénea*) de longitud l y que $m = m(x)$ es la masa de la parte de la barra de longitud x, $0 \leqslant x \leqslant l$, medida desde un extremo fijo (fig. 44). Entonces $\Delta m = m(x + \Delta x) - m(x)$ es la masa de la parte de la barra limitada por los puntos situados respectivamente a las distancias x y $x + \Delta x$ del extremo señalado. La magnitud $\dfrac{\Delta m}{\Delta x}$ se llama *densidad lineal media* de la barra en el tramo señalado y se denota por ρ_{med}. El límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \rho_{\text{med}} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta m}{\Delta x}$ se llama *densidad lineal* de la barra en el punto dado y se denota por ρ. De esta forma

$$\rho = \frac{dm}{dx}.$$

Si la densidad ρ es constante, entonces la barra será homogénea.

Para una barra no homogénea arbitraria, en general, la diferencial $dm = \rho\Delta x$ es igual a la masa de la barra homogénea de longitud Δx con densidad constante ρ, igual a la densidad de la barra analizada en el punto dado.

En este ejemplo vemos que interpretando la derivada como magnitud de la velocidad, debemos comprender esto en el sentido más amplio de la palabra. Por ejemplo, la densidad de la barra es también "velocidad", precisamente, la velocidad de variación de la masa con la variación de la longitud.

9.5. REGLAS DEL CÁLCULO DE LAS DERIVADAS, RELACIONADAS CON LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS SOBRE LAS FUNCIONES

Obtengamos ahora las fórmulas para las derivadas de la suma, el producto y el cociente de funciones.

Teorema 3. *Sean las funciones* $y_1 = f_1(x)$ e $y_2 = f_2(x)$ *definidas en un entorno del punto* $x_0 \in \boldsymbol{R}$ *y que tengan en el propio* x_0 derivadas, *entonces las funciones*

*) Una barra se llama homogénea si cualesquiera dos tramos de igual longitud tienen igual masa y no homogénea en el caso contrario.

$f_1(x) + f_2(x), f_1(x)f_2(x)$, y si $f_2(x_0) \neq 0$, entonces también la función $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, tienen en el punto x_0 derivadas y además

$$(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2', \tag{9.15}$$

$$(y_1 y_2)' = y_1' y_2 + y_1 y_2', \tag{9.16}$$

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y_1' y_2 - y_1 y_2'}{y_2^2} \tag{9.17}$$

(en todas las fórmulas (9.15), (9.16) y (9.17) $x = x_0$).

Corolario 1. *Si la función $y = f(x)$ tiene derivada en el punto x_0 y $c \in R$, entonces la función $cf(x)$ también tiene derivada en este punto y además*

$$(cy)' = cy' \quad (x = x_0). \tag{9.18}$$

Corolario 2. *Si las funciones $y_k = f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, tienen derivadas en el punto x_0, entonces cualquier combinación lineal de éstas también tiene derivada en este punto, y además*

$$(c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n)' = c_1 y_1' + \ldots + c_n y_n', \; c_k \in R, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{9.19}$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Sean $y_1 = f_1(x)$ e $y_2 = f_2(x)$ funciones definidas en un entorno $U(x_0)$ del punto x_0, $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$ y

$$\Delta y_1 = f_1(x_0 + \Delta x) - f_1(x_0), \quad \Delta y_2 = f_2(x_0 + \Delta x) - f_2(x_0).$$

Para simplificar la escritura, a veces omitiremos la notación del argumento, analizando los incrementos de las funciones sólo en el punto x_0.

Si

$$y = y_1 + y_2$$

entonces

$$\Delta y = (y_1 + \Delta y_1 + y_2 + \Delta y_2) - (y_1 + y_2) = \Delta y_1 + \Delta y_2,$$

de donde, para $\Delta x \neq 0$ obtendremos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x}.$$

Pasando aquí al límite, cuando $\Delta x \to 0$ y observando que en virtud de la existencia de las derivadas de las funciones f_1 y f_2 en el punto x_0, el límite del segundo miembro de esta igualdad existe y es igual a $y_1' + y_2'$, obtendremos que existe también el límite de su primer miembro, es decir, existe la derivada y' y además

$$y' = y_1' + y_2',$$

es decir, la fórmula (9.15) está demostrada.

Si $y = y_1 y_2$, entonces de forma análoga sucesivamente tendremos

$$\Delta y = (y_1 + \Delta y_1)(y_2 + \Delta y_2) - y_1 y_2 = \Delta y_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot \Delta y_2 + \Delta y_1 \cdot \Delta y_2,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x} y_2 + y_1 \frac{\Delta y_2}{\Delta x} + \frac{\Delta y_1}{\Delta x} \Delta y_2.$$

De la existencia de la derivada $f_2'(x_0)$ se deduce la continuidad de la función f_2 en el punto x_0: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y_2 = 0$; además $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y_1}{\Delta x} = y_1'$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y_2}{\Delta x} = y_2'$. Por esto, pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$, de la igualdad obtenida obtendremos

$$y' = y_1'y_2 + y_1y_2',$$

es decir, la fórmula (9.16) queda demostrada.

Por último, si $y = \dfrac{y_1}{y_2}$ y $f_2(x_0) \neq 0$, entonces

$$\Delta y = \frac{y_1 + \Delta y_1}{y_2 + \Delta y_2} - \frac{y_1}{y_2} = \frac{\Delta y_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot \Delta y_2}{(y_2 + \Delta y_2)y_2},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\Delta y_1}{\Delta x}y_2 - y_1\dfrac{\Delta y_2}{\Delta x}}{(y_2 + \Delta y_2)y_2}.$$

De aquí, recordando de nuevo que de la existencia de la derivada se deduce la continuidad de la función y, por consiguiente, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y_2 = 0$, obtendremos

$$y' = \frac{y_1'y_2 - y_1y_2'}{y_2^2},$$

es decir, la fórmula (9.17) también queda demostrada.

El corolario 1 se deriva inmediatamente de (9.16) si recordamos que $c' = 0$ (véase el ejemplo 1 en el p. 9.1) y el corolario 2 se obtiene inmediatamente de las fórmulas (9.15) y (9.18) por el método de inducción matemática.

OBSERVACIÓN. Utilizando las propiedades de los límites infinitos, relacionadas con las operaciones aritméticas sobre las funciones (véase el p. 4.7) se pueden establecer las propiedades correspondientes de las derivadas infinitas. Por ejemplo, si existe la derivada finita $y_1'(x_0)$ y la derivada infinita $y_2'(x_0)$ (de signo determinado), entonces la función $y(x) \overset{\text{def}}{=} y_1(x) + y_2(x)$, en el punto x_0, tiene la derivada infinita del mismo signo. Por ejemplo, si $y_2'(x_0) = +\infty$, entonces $y'(x_0) = +\infty$. En realidad, $\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2$. Por eso, si existe el límite finito $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y_1}{\Delta x}$ y $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y_2}{\Delta x} = +\infty$, entonces

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_2}{\Delta x} = +\infty,$$

es decir $y'(x_0) = +\infty$.

Ejemplos. 1. Sea $y = e^x \operatorname{sen} x - 2x^2 \cos x$, según las fórmulas (9.15), (9.17) y (9.19) tenemos

$$y' = (e^x \operatorname{sen} x)' - 2(x^2 \cos x)' = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - 2(2x \cos x - x^2 \operatorname{sen} x).$$

2. Sea $y = tg x$; ya que $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, entonces, por la fórmula (9.18) obtenemos

$$y' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

de esta forma,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3. De forma análoga, para $y = \operatorname{ctg} x$

$$y' = \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{(-\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x},$$

es decir,

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Las propiedades 1° y 2° se trasladan a las diferenciales de las funciones. Teniendo en cuenta las mismas suposiciones con respecto a la diferenciabilidad en el punto x_0 tenemos

$$d(y_1 + y_2) = dy_1 + dy_2; \qquad d(y_1 y_2) = y_2 dy_1 + y_1 dy_2 \quad ;$$

$$d(cy) = c\,dy; \qquad d\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \frac{y_2 dy_1 - y_1 dy_2}{y_2^2}.$$

Calculemos por ejemplo, la diferencial del producto $y = y_1 y_2$:

$$dy = y'\,dx = (y_1 y_2)'\,dx = y_1' y_2 dx + y_1 y_2' dx = y_2 dy_1 + y_1 dy_2,$$

ya que $y_1' dx = dy_1$, $y_2' dx = dy_2$.

De forma análoga se demuestran también las fórmulas restantes.

9.6. DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Teorema 3. *Sea la función $y = f(x)$ continua y estrictamente monótona en un entorno del punto x_0 y supongamos que cuando $x = x_0$ existe la derivada $\frac{df(x_0)}{dx} \neq 0$; entonces la función inversa $x = f^{-1}(y)$ también tiene derivada en el punto $y_0 = f(x_0)$ y además*

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dy}}, \tag{9.20}$$

es decir, la derivada de la función inversa es igual a la magnitud inversa de la derivada de la función dada.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un entorno del punto x_0, sobre el cual la función f está definida, es continua y estrictamente monótona y analizaremos f sólo en este entorno. Entonces, como demostramos anteriormente (véase el p. 6.3), la función inversa está definida y es continua sobre un intervalo que contiene el punto y_0 y que es la imagen del entorno del punto x_0, señalado anteriormente. Por eso, si $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $y = f(x)$, entonces $\Delta x \to 0$ es equivalente a $\Delta y \to 0$ en el sentido de que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ (para la función f) y $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$ (para la función f^{-1}).

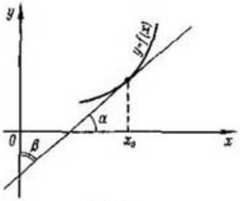


FIG. 45

Para cualesquiera $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$ tenemos

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Cuando $\Delta x \to 0$ (o, lo que es lo mismo según lo dicho anteriormente, cuando $\Delta y \to 0$) el límite del *segundo miembro* existe, es decir, existe también el límite del primer miembro, y además

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dx}}.$$

$$\text{Pero } \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{df^{-1}(y_0)}{dy}, \text{ por eso } \frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dx}}. \ \square$$

Este teorema permite una interpretación geométrica evidente (fig. 45). Como es conocido, $\dfrac{df(x_0)}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$, donde α es el valor del ángulo formado por la tangente a la gráfica de la función f en el punto (x_0, y_0) con el sentido positivo del eje Ox, y $\dfrac{df^{-1}(y_0)}{dx} = \operatorname{tg}\beta$, donde β es el valor del ángulo formado por la misma tangente con el eje Oy.

Es evidente que $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, y por esto $\dfrac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\beta} =$

$$= \frac{1}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dx}}.$$

Ejercicios. 1. Demuéstrese que si la función $y = f(x)$ es continua y estrictamente monótona en un entorno del punto x_0, si en este punto existe la derivada y $\dfrac{df(x_0)}{dx} = 0$, entonces la función inversa $f^{-1}(y)$ tiene en el punto $y_0 = f(x_0)$ derivada infinita; por lo tanto, si consideramos convencionalmente que $\frac{1}{0} = \infty$, entonces la fórmula (9.20) también es válida en este caso.

2. Enúnciese y demuéstrese el análogo del teorema 3 para las derivadas unilaterales (finitas e infinitas).

Ejemplos. 1. $y = \operatorname{arcsen} x$, $x = \operatorname{sen} y$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Aplicando la fórmula (9.20) obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y}.$$

Ya que $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, entonces $\cos y > 0$, por esto $\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. De este modo

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2. $y = \operatorname{arcsen} x$, $x = \cos y$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
De forma análoga al ejemplo anterior tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = (\arccos x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\operatorname{sen} y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

es decir,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. $y = \operatorname{arctg} x$, $x = \operatorname{tg} y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, $-\infty < x < +\infty$, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2};$$

así pues

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4. $y = \operatorname{arctg} x$, $x = \operatorname{ctg} y$, $0 < y < \pi$, $-\infty < x < \infty$. En este caso

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\operatorname{sen}^2 y = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2},$$

es decir,

$$(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

5. Si $y = \log_a x$, $x = a^y$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $-\infty < y < +\infty$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = (\log_a x)' = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a},$$

es decir,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

en particular, cuando $a = e$ tenemos

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

9.7. DERIVADA Y DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Teorema 4. *Supongamos que la función $y = f(x)$ tiene derivada en el punto x_0 y la función $z = F(y)$ tiene derivada en el punto $y_0 = f(x_0)$. Entonces la función compuesta $\Phi(x) = F[f(x)]$ también tiene derivada cuando $x = x_0$ y además*

$$\Phi'(x_0) = F'(y_0)f'(x_0). \tag{9.21}$$

Si la función compuesta Φ la denotamos por el símbolo $\Phi = F \circ f$ (véase el p. 4.2) entonces la fórmula (9.21) se puede escribir de la forma

$$(F \circ f)'(x_0) = F'(f(x_0))f'(x_0).$$

Es necesario prestar atención a que la afirmación sobre la existencia en el punto x_0 de la derivada de la función compuesta $F[f(x)]$ contiene en sí la suposición de que la función compuesta analizada tiene sentido, es decir, está definida en un entorno del punto x^0.

Omitiendo el valor del argumento y utilizando la notación de la derivada con ayuda de las diferenciales, la igualdad (9.21) se puede transcribir de la forma

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 2 del presente párrafo, las funciones $y = f(x)$ y $z = F(y)$ son continuas respectivamente en los puntos x_0 e y_0 y, por consiguiente, según el teorema 2 del p. 5.2 en un entorno del punto x_0 está definida la función compuesta $\Phi(x) = F[f(x)]$.

Hagamos como siempre $\Delta y = y - y_0$, $\Delta x = x - x_0$. La función F tiene en el punto y_0 derivada y, por eso, es diferenciable en este punto (véase el p. 9.2), así pues, cuando $\Delta y \neq 0$ tiene lugar

$$\Delta z = F'(y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y, \tag{9.22}$$

donde $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$. La función $\varepsilon(\Delta y)$ no está definida cuando $\Delta y = 0$. Para el futuro es más cómodo definirla también para $\Delta y = 0$. Esto se puede hacer de forma arbitraria. Lo más sencillo es prolongarla "por continuidad", haciendo $\varepsilon(0) = 0$. La función $\varepsilon(\Delta y)$ definida de esta forma es continua cuando $\Delta y = 0$.

Por cuanto ahora la función $\varepsilon(\Delta y)$ está definida también para $\Delta y = 0$, entonces la igualdad (9.22) se puede analizar también cuando $\Delta y = 0$, y además, evidentemente, sigue siendo válida para cualquier definición complementaria de la función $\varepsilon(\Delta y)$ cuando $\Delta y = 0$, en particular, para $\varepsilon(0) = 0$.

Dividiendo ambos miembros de la igualdad (9.22) por $\Delta x \neq 0$, obtendremos

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = F'(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (9.23)$$

La función $y = f(x)$ tiene derivada en el punto x_0, es decir, existe el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0). \qquad (9.24)$$

De la existencia de la derivada $f'(x_0)$ se deduce la continuidad de la función $y = f(x)$ en el punto x_0:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Cuando $\Delta x = 0$ tenemos $\Delta y = 0$. Por consiguiente, el incremento Δy analizado como función de Δx es continuo en el punto $\Delta x = 0$. Por esto, según la regla del cambio de variable en las relaciones límites que contienen funciones continuas (véase el p. 5.2)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0. \qquad (9.25)$$

Ahora de (9.23) pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$, en virtud de (9.24) y (9.25) obtendremos la fórmula (9.21). □

OBSERVACIÓN 1. En la demostración del teorema se dijo que $\varepsilon(\Delta y)$ se puede también definir arbitrariamente cuando $\Delta y = 0$. No obstante, si por ejemplo, tomamos $\varepsilon(0) = 1$, entonces, a primera vista, la fórmula (9.21) no se obtiene, y no sólo porque en este caso no se puede aplicar la regla del cambio de variables para el límite de una función continua, sino también porque si $\varepsilon(0) = 1$ y si existen $\Delta x \neq 0$ tales, para los cuales $\Delta y = 0$, entonces la igualdad (9.25) no será válida. Esto, no obstante, no influye en el resultado final. En efecto, si para $\Delta x \neq 0$ tan pequeños como se quiere existe $\Delta y = 0$, entonces de aquí fácilmente se deduce que

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

y, por consiguiente, el segundo sumando en el segundo miembro de la igualdad (9.23) de todas formas tiende a cero cuando $\Delta x \to 0$ (más aún, en este caso, como es fácil ver, todos los términos de la igualdad (9.23) tienden a cero). Hubiéramos podido servirnos también de que de la fórmula (9.2) se deduce que $\alpha(0) = 0$.

En el ejemplo de la demostración del teorema 4 se ve cómo la construcción bien elejida (en el caso dado, simplemente la definición complementaria en el cero de la función $\varepsilon(\Delta y)$ con el cero, que permitió utilizar la regla del cambio de variables para los límites de las funciones continuas) puede simplificar sustancialmente la demostración.

OBSERVACIÓN 2. La fórmula (9.21) para la derivada de una función compuesta sigue siendo válida en el caso cuando por derivadas se entienden las derivadas unilaterales correspondientes, si sólo exigimos preliminarmente que la función compuesta necesaria para la definición de la derivada unilateral (o bilateral) analizada, que aparece en la parte izquierda de la fórmula (9.21), tenga sentido.

Corolario (invariancia de la forma de la primera diferencial con respecto a la transformación de la variable independiente):

$$dz = F'(y_0)dy = \Phi'(x_0)dx. \tag{9.26}$$

En esta fórmula $dy = f'(x)dx$ es la diferencial de la función y dx, la diferencial de la variable independiente.

De esta forma, la diferencial de la función tiene la misma forma: el producto de la derivada respecto a cierta variable por "la diferencial de esta variable" independientemente de si esta variable es a su vez una función o una variable independiente.

Demostremos esto. De acuerdo con la fórmula (9.6) $dz = \Phi'(x_0)dx$ de donde, aplicando la fórmula (9.21) para la derivada de una función compuesta, obtendremos $dz = F'(y_0)f'(x_0)dx$, pero $f'(x_0)dx = dy$ y por esto $dz = F'(y_0)dy$, lo que se exigía demostrar.

La fórmula (9.26) se puede interpretar de una forma algo diferente si recordamos que la diferencial de una función en un punto es una función lineal con respecto a la diferencial de la variable independiente. Según (9.21) la diferencial de la función $\Phi(x) = F[f(x)]$ tiene la forma $d\Phi = F'(y_0)f'(x_0)dx$, es decir, es el resultado de la sustitución de la función lineal $dy = f'(x_0)dx$ por medio de la cual está dada la diferencial df (donde $y = f(x)$) en la función lineal $dz = F'(y_0)dy$, que define la diferencial dF (donde $z = F(y)$). Dicho de otro modo, la diferencial de la composición $\Phi = F \circ f$ es la composición de las diferenciales dF y df:

$$d(F \circ f) = dF \circ df.$$

Señalemos que el teorema 4 por inducción se extiende a la superposición (composición) de cualquier número finito de funciones. Por ejemplo, para la función compuesta del tipo $z(y(x(t)))$ en el caso de la diferenciabilidad de las funciones $z(y)$, $y(x)$ y $x(t)$ en los puntos correspondientes, tiene lugar la fórmula

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Si se necesita analizar la función compuesta $z = z(y)$, $y = y(x)$, entonces para la notación de la derivada de z se utiliza también el índice inferior x o y que indica respecto a la cuál de las variables se calcula la derivada, es decir, se escribe z'_x o z'_y. A menudo para mayor simplicidad la virgulilla se omite, es decir, en lugar de z'_x se escribe simplemente z_x. En estas notaciones la fórmula (9.21) tiene la forma

$$z_x = z_y y_x.$$

Ejemplos. 1. Sea $y = x^\alpha$, $x > 0$, hallemos $\frac{dy}{dx}$. Tenemos $x^\alpha = e^u$, donde $u = \alpha \ln x$. Observando que $\frac{du}{dx} = \frac{\alpha}{x}$, obtenemos

$$\frac{dx^\alpha}{dx} = \frac{de^u}{dx} = \frac{de^u}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot \frac{\alpha}{x} = e^{\alpha \ln x}\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

De esta forma,

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Así, si $y = x^2$, entonces $y' = 2x$;

si $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, entonces $y' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x}2$;

si $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$, entonces $y' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Si la función $y = x^{\alpha}$ está definida para $x = 0$ o para $x < 0$, entonces para estos valores de x también tiene derivada $y' = \alpha x^{\alpha - 1}$. Por ejemplo, para $\alpha = 1$, es decir, para la función $y = x$ en el punto $x = 0$ como en todos los otros puntos $y' = 1$.

2. Sea $y = \ln|x|$, $x \neq 0$, entonces para $x > 0$ tenemos

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

y para $x < 0$

$$y' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x}.$$

De esta forma, para todas las $x \neq 0$ es válida la fórmula

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}. \tag{9.27}$$

De aquí, por la regla de la diferenciación de una función compuesta, para cualquier función $u(x)$ en los puntos x, en los cuales existe la derivada $u'(x)$ y $u(x) \neq 0$, tiene lugar la relación

$$(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}. \tag{9.28}$$

OBSERVACIÓN. La fórmula (9.27) puede ser obtenida inmediatamente para todas las $x \neq 0$ de la fórmula de la diferenciación de las funciones compuestas, si recordamos que para $x \neq 0$ es válida la igualdad $|x|' = \operatorname{sign} x$ (véase el ejemplo 1 al final del p. 9.21). En efecto, haciendo $u = |x|$ obtendremos para todas las $x \neq 0$:

$$\frac{d\ln|x|}{dx} = \frac{d\ln u}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\operatorname{sign} x = \frac{\operatorname{sign} x}{|x|} = \frac{1}{x}.$$

3. Hallemos la derivada de la función

$$y = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|, \quad x \neq a, \quad x \neq -a.$$

En virtud de la fórmula (9.28) tenemos

$$y' = \frac{1}{2a}\frac{x+a}{x-a}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)' = \frac{1}{2a}\frac{x+a}{x-a}\frac{x+a-(x-a)}{(x+a)^2} = \frac{1}{x^2-a^2}.$$

4. Hallemos la derivada de la función $y = \ln|x + \sqrt{x^2 + A}|$. Análogamente al ejemplo anterior obtendremos

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + A}}(x + \sqrt{x^2 + A})' =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + A}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + A}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}}.$$

5. Sea $y = \ln^2 \operatorname{arcsen}\frac{1}{x}$, $x > 1$. Hallemos la derivada y la diferencial de esta función:

$$y' = \left(\ln^2 \operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right)' = 2\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\left(\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= 2\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\frac{1}{\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right)' = 2\frac{\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}{\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= -\frac{2\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}{|x|\sqrt{x^2-1}\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}.$$

De aquí la diferencial se halla inmediatamente por la fórmula $dy = y'\,dx$; no obstante, si no tuviéramos todavía una expresión lista para la derivada, entonces fuera posible hallar la diferencial inmediatamente utilizando su invariancia con respecto a la elección de las variables:

$$d\left(\ln^2\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right) = 2\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\,d\left(\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right) =$$

$$= 2\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\frac{1}{\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}\,d\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{2\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}{\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\,d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-2\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}{|x|\sqrt{x^2-1}\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}\,dx.$$

5. Introduzcamos con ayuda del teorema 4 una fórmula más que se utiliza a menudo. Sea $y = u^v$, donde $u = u(x) > 0$, $v = v(x)$. Representemos nuestra función en la forma de $y = e^{v\ln u}$ y calculemos $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{de^{v\ln u}}{dx} = e^{v\ln u}\frac{d}{dx}(v\ln u) = u^v\left(\frac{dv}{dx}\ln u + \frac{v}{u}\frac{du}{dx}\right) =$$

$$= u^v\frac{dv}{dx}\ln u + vu^{v-1}\frac{du}{dx}. \quad (9.29)$$

De esta forma, la derivada de la función u^v es igual a la suma de dos sumandos, de los cuales el primero coincide con la derivada de u^v suponiendo que u es una constante, y el segundo, con la derivada de u^v suponiendo que v es una constante.

Con ayuda de la regla de diferenciación de una función compuesta se pueden hallar también las *derivadas de funciones dadas implícitamente*.

6. Sea la función diferenciable $y = y(x)$ dada implícitamente con la ecuación $F(x, y) = 0$ (véase el p. 4.2). (La cuestión sobre cómo establecer que la ecuación dada en realidad define cierta función y si ésta será diferenciable, por ahora la deja-

mos a un lado, ella será estudiada en el futuro.) Diferenciando la identidad $F(x, y(x)) \equiv 0$ como una función compuesta se puede calcular la derivada $\frac{dy}{dx}$.

En calidad de ejemplo calculemos la derivada de la función implícita $y(x)$ definida por la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$. En el caso concreto dado la existencia de semejante función no provoca duda ya que ésta por ejemplo, es $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ y también $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$. Diferenciemos la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ considerando y función de x. Obtendremos $2x + 2yy' = 0$, de donde $y' = -\frac{x}{y}$.

Con problemas semejantes resulta encontrarse en la geometría. Supongamos, por ejemplo, que se exige hallar la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto (3; 4). La pendiente k de la tangente es igual a la derivada: $k = y'$, luego en nuestro caso $k = -\frac{x}{y}$. Para el punto analizado $k = -\frac{3}{4}$, por lo que la ecuación de la tangente buscada se puede escribir de la forma $y - 4 = -\frac{3(x-3)}{4}$, es decir, $3x + 4y - 25 = 0$.

Apliquemos el método de diferenciación de las funciones implícitas a la deducción de fórmulas obtenidas anteriormente por otro camino.

7. Analicemos de nuevo la función $y = u^v$. Hallando el logaritmo obtenemos su definición implícita $\ln y = v \ln u$. Diferenciando ambos miembros de esta ecuación tendremos $\frac{y'}{y} = v' \ln u + \frac{v}{u} u'$ (la expresión $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$ se llama *derivada logarítmica* de la función $y(x)$), o $y' = y(v' \ln u + \frac{v}{y} u')$; sustituyendo aquí $y = u^v$ llegamos de nuevo a la fórmula (9.29).

Otro ejemplo. La función $y = \arcsen x$ se define implícitamente con la ecuación $x = \operatorname{sen} y$. Diferenciando ambos miembros respecto a x obtenemos $1 = y' \cos y$ de donde $y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, es decir, lo mismo que en el p. 9.6.

8. En el caso cuando la función se da no con una fórmula, sino con varias, el cálculo de la derivada es necesario a veces realizarlo directamente partiendo de la definición de la derivada. Hallemos, por ejemplo, la derivada de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{cuando} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{cuando} \quad x = 0. \end{cases}$$

Cuando $x \neq 0$ la derivada existe y se calcula por las fórmulas de diferenciación: $f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. En el punto $x = 0$ la derivada se obtiene directamente por su definición

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

De esta forma, la función $f(x)$ es diferenciable sobre todo el eje numérico.

OBSERVACIÓN. Utilizando el teorema 4 todas las fórmulas obtenidas para las principales funciones elementales se pueden escribir en una forma algo más general: si $u = u(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u; \qquad (e^u)' = e^u u';$$

$$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u; \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u}\ (u > 0);$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}; \qquad (\operatorname{arc\,sen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}};$$

$$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u}; \qquad (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}};$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha - 1} u' \quad (u > 0); \qquad (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1 + u^2};$$

$$(a^u)' = a^u u' \ln a; \qquad (\operatorname{arcctg} u) = -\frac{u'}{1 + u^2}.$$

De las fórmulas citadas se ve (cuando $u = x$) que las derivadas de las principales funciones elementales son funciones elementales.

Las fórmulas obtenidas en conjunto dan la posibilidad de calcular la derivada y la diferencial de cualquier función elemental en el caso cuando esta derivada existe.

Es necesario tener en cuenta, no obstante, que no cualquier función elemental tiene derivadas en todos los puntos de su dominio. Un ejemplo de función elemental diferenciable no en todos los puntos, es la función $|x| = \sqrt{x^2}$; ella, como sabemos, no tiene derivada en el punto $x = 0$ (véase el p. 9.2).

Ejercicios. 5. Respóndase a las preguntas: ¿Es posible demostrar la fórmula $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$ cuando $dy \neq 0$, multiplicando y dividiendo simplemente $\frac{dz}{dx}$ por dy? ¿Se puede o no demostrar la fórmula $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ cuando $dx \neq 0$ dividiendo el numerador y el denominador de la fracción $\frac{dx}{dy}$ por dx?

6. Aclárese si la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{cuando } x \neq 0, \\ 0 & \text{cuando } x = 0 \end{cases}$$

será continua en el punto $y = 0$. ¿Tendrá derivada en este punto? ¿Tendrá en él derivadas unilaterales?

9.8. FUNCIONES HIPERBÓLICAS Y SUS DERIVADAS

Definición 5. *Las funciones* $(e^x + e^{-x})/2$ *y* $(e^x - e^{-x})/2$ *se llaman respectivamente coseno hiperbólico y seno hiperbólico y se denotan por* ch x *y* sh x:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

Es válida la fórmula

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1. \tag{9.30}$$

En efecto,

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{2x} - e^{-2x} + 2 - e^{-2x}\right) = 1.$$

También es válida la fórmula

$$\mathrm{sh}\, 2x = 2\,\mathrm{sh}\, x\,\mathrm{ch}\, x;$$

en realidad,

$$2\,\mathrm{sh}\, x\,\mathrm{ch}\, x = 2\,\frac{e^x + e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \mathrm{sh}\, 2x.$$

Estas fórmulas recuerdan las relaciones entre el seno y el coseno usuales (circulares, como a veces los llaman). Para $\mathrm{sh}\, x$ y $\mathrm{ch}\, x$ se tiene otra serie de relaciones, análogas a las fórmulas correspondientes para $\mathrm{sen}\, x$ y $\cos x$. Con esto se explica el nombre de las funciones $\mathrm{sh}\, x$ y $\mathrm{ch}\, x$. El epíteto "hiperbólico" está relacionado con el hecho de que las fórmulas

$$x = a\,\mathrm{ch}\, t, \quad y = a\,\mathrm{sh}\, t \tag{9.31}$$

definen paramétricamente una hipérbola, de forma semejante a como las fórmulas

$$x = a\cos t, \quad y = a\,\mathrm{sen}\, t \tag{9.32}$$

definen paramétricamente una circunferencia. En realidad, si elevamos al cuadrado las igualdades (9.31), restamos una de otra y nos servimos de la fórmula (9.30), entonces obtendremos $x^2 - y^2 = a^2$, es decir, la ecuación de una hipérbola equilátera.

De forma semejante, de la ecuación (9.32) se deriva $x^2 + y^2 = a^2$, es decir, la ecuación de una circunferencia.

Hallemos las derivadas del seno y coseno hiperbólicos.

Observando que $(e^{-x})' = -e^{-x}$, tenemos

$$(\mathrm{ch}\, x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}\, x,$$

$$(\mathrm{sh}\, x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}\, x.$$

De esta forma

$$(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x, \quad (\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x.$$

Los cocientes $\frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}$ y $\frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}$ por analogía con los senos y cosenos usuales, respectivamente se llaman *tangente hiperbólica y cotangente hiperbólica* y se denotan por

$$\frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} = \mathrm{th}\, x, \quad \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x} = \mathrm{cth}\, x.$$

Ejercicios. 7. Calcúlense las derivadas de las funciones $\operatorname{th} x$ y $\operatorname{cth} x$. Constrúyanse las gráficas de las funciones $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{th} x$ e $y = \operatorname{cth} x$. Hállense las derivadas de sus funciones inversas. Exprésense las funciones inversas indicadas y sus derivadas con logaritmos (la función inversa a $\operatorname{ch} x$ se define con la condición complementaria de que sus valores sean no negativos).

Calcúlense las derivadas de las siguientes funciones (en todos los puntos en los cuales esto es posible).

8. $y = x^2(x^3 - 1)^4$.

9. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$.

10. $y = \sqrt[3]{x}$.

11. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

12. $y = x^2 \operatorname{sen} 2x + 2x \cos 3x$.

13. $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$.

14. $y = \sqrt[5]{x} \operatorname{ctg} 2x - \dfrac{1}{2} \ln x \operatorname{arctg} x$.

15. $y = 2^{x^3} \ln \arccos x$.

16. $y = \arccos \dfrac{1}{x}$.

17. $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a}$.

18. $y = x^2 |x|$.

19. $y = x^x$.

20. $y = |x| \ln |x|$.

21. $y = \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2})$.

22. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ln \dfrac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}$.

23. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x + 1}{x - 1}$.

24. $y = \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 - x}{1 + x}$.

25. $y = \sqrt[x]{x}$.

26. $y = x^{x^a} + x^{a^x} + x^{x^x}$.

27. $y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x} + (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$.

28. $y = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} - \ln \operatorname{cth} \dfrac{x}{2}$.

29. $y = \arccos \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$.

30. $y = \dfrac{b}{a} x + \dfrac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \times \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\dfrac{a - b}{a + b}} \operatorname{th} \dfrac{x}{2} \right) \quad (0 \leqslant b < a)$.

§ 10. DERIVADAS Y DIFERENCIALES DE ÓRDENES SUPERIORES

10.1. DERIVADAS DE ÓRDENES SUPERIORES

Definición 1. *Supongamos que la función $f(x)$ está definida sobre el intervalo (a, b), tiene derivada $f'(x)$ en cada punto $x \in (a, b)$* y $x_0 \in (a, b)$. *Si para $x = x_0$ existe la derivada de la función $f'(x)$, entonces ella se llama segunda derivada* (o *derivada de segundo orden*) *de la función f y se denota por $f''(x_0)$* o $f^{(2)}(x_0)$.

De esta forma, $f''(x_0) = [f'(x)]'_{x = x_0}$ o suprimiendo la notación del argumento, $y'' = (y')'$. Análogamente se define la derivada $y^{(n)}$ de cualquier orden $n = 1, 2, \ldots$: *si existe la derivada $y^{(n-1)}$ de orden* $(n - 1)$ (aquí por derivada de orden nulo se sobreentiende la propia función: $y^{(0)} = y$ y por derivada de primer orden, y'), entonces, por definición, $y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$.

Recordando cómo se definía la derivada (véase el p. 9.1), la definición de la derivada n-ésima en un punto x_0 se puede escribir en forma de límite

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Señalemos que de la suposición de que la función f tiene en el punto x_0 derivada de orden n se deduce, por la definición de la última, que en cierto entorno del punto x_0, la función f tiene la derivada de orden $n - 1$ y por consiguiente, para $n > 1$, todas las derivadas de orden inferior $k < n - 1$ (las cuales, además, son continuas en este entorno, por cuanto tienen derivada en todos sus puntos, véanse los teoremas 1 y 2 en el p. 9.2), en particular, la propia función está definida en cierto entorno del punto x_0.

Todo lo dicho aquí se extiende de una forma natural a las así llamadas derivadas unilaterales de orden superior, lo que el lector puede hacer por su cuenta sin gran trabajo.

Definición 2. *Una función se llama n veces continuamente diferenciable sobre un intervalo, si en todos los puntos de este intervalo tiene derivadas continuas hasta de orden n inclusive* ($n = 1, 2, \dots$).

En este caso, en cualquiera de los extremos del intervalo analizado, cuando este extremo pertenece al intervalo, por derivada, como es usual, entenderemos las correspondientes derivadas unilaterales.

Para que la función sea n veces continuamente diferenciable sobre un intervalo, es suficiente que tenga sobre éste derivada continua de orden n. En realidad, según la definición, la existencia de la derivada de orden n sobre el intervalo analizado presupone la existencia sobre éste, de la derivada de orden $n - 1$, y por cuanto de la existencia de la derivada de orden $n - 1$, y por cuanto de la existencia de la derivada de cualquier función en un punto se deduce la continuidad de la función en este punto, entonces la derivada de orden $n - 1$ es continua sobre el intervalo dado. Análogamente, en el caso de $n > 1$ se demuestra la continuidad la derivada de orden $n - 2$, etc.

Ejemplos. 1. $y = x^3, y' = 3x^2, y'' = 6x, y^{(3)} = 6, y^{(4)} = y^{(5)} = \dots = 0.$

2. $y = a^x, y' = a^x \ln a, y'' = a^x \ln^2 a, y^3 = a^x \ln^3 a$. En general, por inducción es fácil establecer que $y^{(n)} = a^x \ln^n a$. En particular, $(e^x)^{(n)} = e^x, n = 0, 1, 2, \dots$.

3. $y = \operatorname{sen} x$. Calculando sucesivamente las derivadas obtenemos $y' = \cos x$, $y'' = -\operatorname{sen} x, y^{(3)} = -\cos x, y^{(4)} = \operatorname{sen} x$, en lo adelante las derivadas se repiten en el mismo orden. Para escribir el resultado obtenido con una sola fórmula, observemos que $\cos \alpha = \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, y por esto $y' = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$, etc.

Por inducción $(\operatorname{sen} x)^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ para cualquier $n = 1, 2, \dots$.

4. $y = \cos x$. Observando que $-\operatorname{sen} \alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, de forma análoga al ejemplo anterior obtendremos

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), n = 1, 2, \dots$$

10.2. DERIVADAS DE ÓRDENES SUPERIORES DE LA SUMA Y DEL PRODUCTO DE FUNCIONES

Teorema 1. *Supongamos que las funciones $y_1 = f_1(x)$ e $y_2 = f_2(x)$ tienen derivadas de n-ésimo orden en el punto x_0; entonces las funciones $y_1 + y_2 = f_1(x) + f_2(x)$ e $y_1y_2 = f_1(x)f_2(x)$ también tienen derivadas de orden n en el punto x_0, además*

$$(y_1 + y_2)^{(n)} = y_1^{(n)} + y_2^{(n)}, \tag{10.1}$$

$$(y_1y_2)^{(n)} = y_1^{(n)}y_2 + C_n^1y_1^{(n-1)}y_2^{(1)} + C_n^2y_1^{(n-2)}y_2^{(2)} + \dots + y_1y_2^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)}y_2^{(k)}, \tag{10.2}$$

donde, como es usual, C_n^k denota el número de combinaciones de n elementos respecto a k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$).

La fórmula (10.2) usualmente se llama *fórmula de Leibniz* [*)], *simbólicamente puede ser escrita en la forma siguiente, que es cómoda para ser recordada*

$$(y_1y_2)^{(n)} = (y_1 + y_2)^{[n]}.$$

El índice $[n]$ significa, que la expresion $(y_1 + y_2)^{[n]}$ se escribe de forma semejante al binomio de Newton, es decir en forma de suma con los mismos coeficientes que en la fórmula binomial, sólo que las potencias de las funciones y_1 e y_2 se sustituyen por sus derivadas del orden correspondiente (véase (10.2)).

Las fórmulas (10.1) y (10.2) se demuestran por inducción. Para $n = 1$, es decir, para las derivadas de primer orden, fueron demostradas en el p. 9.5. Supongamos ahora que estas fórmulas son válidas para las derivadas de n-ésimo orden. Demostremos su validez para las derivadas de orden $n + 1$.

En el caso de la suma de functiones tenemos:

$$(y_1 + y_2)^{(n+1)} = [(y_1 + y_2)^{(n)}]' = (y(n) + y_2^{(n)})' = (y_1^{(n)})' + (y_2^{(n)})' = y_1^{(n+1)} + y_2^{(n+1)}.$$

La fórmula (10.2) queda demostrada.

En el caso del producto de functiones los cálculos son algo más complejos:

$$(y_1y_2)^{(n+1)} = [(y_1y_2)^{(n)}]' = \Big[\sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)}y_2^{(k)}\Big]v\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k[y_1^{(n+1-k)}y_2^{(k)} + y_1^{(n-k)}y_2^{(k+1)}] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n+1-k)}y_2^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)}y_2^{(k+1)} =$$

$$= y_1^{(n+1)}y_2^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} C_k^n y_1^{(n+1-k)}y_2^{(k)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k y_1^{(n-k)}y_2^{(k+1)} + y_1^{(0)}y_2^{(n+1)}.$$

[*)] G. Leibniz (1664 — 1761), filósofo y matemático alemán.

Aquí hemos utilizado el hecho de que $C_n^0 = C_n^n = 1$. Ahora, cambiemos el índice de la sumación en la segunda suma, haciendo $k = p - 1$; entonces el nuevo índice de la sumación p variará desde 1 hasta n. Después de esto en las sumas obtenidas unamos dos a dos los sumandos que contienen derivadas del mismo orden. Denotando el índice general de la sumación por p, tendremos

$$(y_1y_2)^{(n+1)} = y_1^{(n+1)}y_2^{(0)} + \sum_{p=1}^{n} (C_n^p + C_n^{p-1})y_1^{(n+1-p)}y_2^{(p)} + y_1^{(0)}y_2^{(n+1)}.$$

De apuí, notando que $C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^p$ *) y que $C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1$, obtendremos

$$(y_1y_2)^{(n+1)} = y_1^{(n+1)}y_2^{(0)} + \sum_{p=1}^{n} C_{n+1}^p y_1^{(n+1-p)}y_2^{(p)} + y_1^{(0)}y_2^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p y_1^{(n+1-p)}y_2^{(p)}. \square$$

Corolario. *Si c es una constante e $y = f(x)$ es una función que tiene derivada de n-ésimo orden en el punto x_0, entonces la función $cf(x)$ también tiene derivada de orden n cuando $x = x_0$, además*

$$(cy)^{(n)} = cy^{(n)}. \tag{10.3}$$

En realidad, si en la fórmula (10.2) hacemos $y_1 = c$, $y_2 = y$, entonces obtenemos la fórmula (10.3). Por otra parte, se deduce de una forma completamente evidente si se aplica n veces la fórmula (9.19) a la función cy.

Analicemos un ejemplo. Sea $y = x^3 \operatorname{sen} x$. Hallemos con ayuda de la fórmula de Leibniz la derivada $y^{(10)}$:

$$(x^3 \operatorname{sen} x)^{(10)} = x^3 \operatorname{sen}\left(x + 10\frac{\pi}{2}\right) + 10 \cdot 3x^2 \operatorname{sen}\left(x + 9\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ 10 \cdot 9 \cdot 3x \operatorname{sen}\left(x + 8 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 10 \cdot 9 \cdot 8 \operatorname{sen}\left(x + 7\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -x^3 \operatorname{sen} x + 30x^2 \cos x + 270x \operatorname{sen} x - 720 \cos x.$$

10.3. DERIVADAS DE ÓRDENES SUPERIORES DE LAS FUNCIONES COMPUESTAS, DE LAS FUNCIONES INVERSAS Y DE LAS FUNCIONES DADAS EN FORMA PARAMÉTRICA

Supongamos que la función $y = y(x)$ tiene segunda derivada en el punto x_0, y $z = z(y)$ tiene segunda derivada en el punto $y_0 = y(x_0)$. Entonces la función compuesta $z\,[y(x)]$ tiene para $x = x_0$ segunda derivada, además

---

*) En efecto, si se fija uno de los $n + 1$ elementos que componen las combinaciones de p elementos, entonces el número de combinaciones en las cuales intervino este elemento fijado será igual a C_n^{p-1}, y el número de combinaciones de las que no intervino será igual a C_n^p, por esto $C_{n+1}^p = C_n^{p-1} + C_n^p$.

$$z''_{xx} = z''_{yy}\, y'^2_x + z'_y y''_{xx}. \tag{10.4}$$

En efecto, por cuanto existen las derivadas $y''(x_0)$ y $z''(y_0)$, entonces existen también $y'(x_0)$ y $z'(y_0)$. Por consiguiente, las funciones $y(x)$ y $z(y)$ son continuas en los puntos x_0 e y_0, respectivamente. Por esto, en cierto entorno del punto x_0 está definida la función compuesta $z = z[y(x)]$. Diferenciándola y omitiendo para simplificar la notación del argumento, tenemos $z'_x = z'_y y'_x$; diferenciando otra vez respecto a x obtendremos

$$z''_{xx} = (z'_y)'_x y'_x + z'_y y''_{xx} = z''_{yy} y'^2_x + z'_y y''_{xx}. \square$$

De forma análoga se calculan, en las suposiciones correspondientes, las derivadas de orden superior de la función compuesta. Este método permite también demostrar la existencia y hallar las derivadas de orden superior de una functión inversa.

Sea la función $y = y(x)$ continua y estrictamente monótona en cierto entorno del punto x_0 (compárese con el p. 9.6) y supongamos que cuando $x = x_0$ existen las derivadas y' e y'', y además $y'(x_0) \neq 0$; entonces la función inversa $x = x(y)$ tiene segunda derivada en el punto $y_0 = y(x_0)$ y además puede ser expresada por los valores de las derivadas y' e y'' de la función $y(x)$ cuando $x = x_0$.

En realidad, omitiendo, como anteriormente las notaciones del argumento, por el teorema 3 del § 9 (véase el p. 9.6), tenemos $x'_y = 1/y'_x$. Calculando la derivada respecto a y de ambas partes e aplicando en la parte derecha la regla de diferenciación de una función compuesta obtenemos

$$x''_{yy} = (x'_y)_y = \left|\frac{1}{y'_x}\right|_x x'_y = -\frac{y''_{xx}}{y'^2_x}\cdot\frac{1}{y'_x} = -\frac{y''_{xx}}{y'^3}.$$

De forma análoga en las suposiciones correspondientes, se calculan *las derivadas de orden superior para la función inversa.*

De forma semejante se puede proceder en el caso de la tal llamada definición paramétrica de una función.

Definición 3. *Sean $x = x(t)$ e $y = y(t)$ funciones definidas en cierto entorno del punto t_0 y una de ellas, por ejemplo, $x = x(t)$ continua y estrictamente monótona en el entorno indicado; entonces existe la función inversa a $x(t)$, la función $t = t(x)$ y en cierto entorno del punto $x_0 = x(t_0)$ tiene sentido la composición $y(t(x))$. Esta función y de x se llama función definida paramétricamente por las fórmulas $x = x(t)$, $y = y(t)$.*

Deduzcamos las fórmulas para la diferenciación de las funciones definidas paramétricamente.

Si las funciones $x(t)$ e $y(t)$ tienen derivadas en el punto t_0 y se x' $(t_0 \neq 0)$, entonces la función $y(t(x))$ definida paramétricamente también tiene derivada en el punto $x_0 = x(t_0)$ y además

$$y'_x = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}. \tag{10.5}$$

En realidad, por la regla de diferenciación de la función compuesta tenemos (omitiendo la notación del argumento)

$$y'_x = y'_t t'_x; \tag{10.6}$$

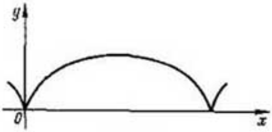


FIG. 46

por la regla de diferenciación de la función inversa

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}. \tag{10.7}$$

De las fórmulas (10.6) y (10.7) se deduce la fórmula (10.5). *Si además existen* $x''_{tt}(t_0)$ *e* $y''_{tt}(t_0)$, *entonces existe también* $y''_{xx}(x_0)$, *además*

$$y''_{xx} = (y'_x)_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)_t t'_x = \frac{y''_{yy}x'_t - y'_t x''_{tt}}{x'^3_t}.$$

Análogamente se calculan *las derivadas de orden superior de las funciones dadas en forma paramétrica.*

Analicemos en calidad de ejemplo de función dada en forma paramétrica

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad (a \neq 0, -\infty < t < +\infty). \tag{10.8}$$

Su gráfica se llama *cicloide* (fig. 46). Sea, para mayor exactitud, $a > 0$; entonces la función $x(t) = a(t - \operatorname{sen} t)$ crece estrictamente monótona. En realidad, sea $\Delta t > 0$, entonces, notando que $0 < \operatorname{sen}\frac{\Delta t}{2} < \frac{\Delta t}{2}$, tenemos

$$x(t + \Delta t) - x(t) = a\{\Delta t - [\operatorname{sen}(t + \Delta t) - \operatorname{sen} t]\} =$$

$$= a\left[\Delta t - 2\cos\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\Delta t}{2}\right] > a\left(t\Delta - 2\cdot 1\cdot\frac{\Delta t}{2}\right) = 0,$$

lo que significa el crecimiento estrictamente monótono de la función $x(t)$. Por esto existe la función inversa unívoca $t = t(x)$.

A continuación, $x'_t = a(1 - \cos t) = 2a\operatorname{sen}^2\frac{t}{2} \geqslant 0$, $y'_t = a\operatorname{sen} t$, y x'_t se anula sólo los puntos del tipo $t = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Por esto, si $t \neq 2k\pi$, entonces por la regla de diferenciación de una función definida paramétricamente tenemos

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\operatorname{sen} t}{2\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2};$$

$$y''_{xx} = \left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)_x = \left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)'_x\frac{1}{x'_t} = -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 t/2}\cdot\frac{1}{2a\operatorname{sen}^2 t/2} = -\frac{1}{4a\operatorname{sen}^4\frac{t}{2}}.$$

Ejercicio 1. Demuéstrese que el cicloide (10.8) es la trayectoria de un punto de una circunferencia de radio a que rueda sin deslizamiento por el eje de las x.

10.4. DIFERENCIALES DE ÓRDENES SUPERIORES

En el presente punto, para mayor comodidad, a veces, en lugar del símbolo de diferenciación d escribiremos la letra δ, es decir, en lugar de dy, dx escribiremos δy, δx.

Sea la función $y = f(x)$ diferenciable sobre cierto intervalo (a, b). Como es conocido, su diferencial.

$$dy = f'(x)dx,$$

que se llama también su primera diferencial, depende de dos variables: x y dx. Sea $f'(x)$ a su vez diferenciable en cierto punto $x_0 \in (a, b)$. Entonces la diferencial en este punto de la función dy analizada como una función sólo de x (es decir, para cierto dx dado), si para su notación utilizamos el símbolo δ, tiene la forma

$$\delta(dy) = \delta[f'(x)dx]|_{x = x_0} = [f'(x)dx]'|_{x = x_0}\delta x = f''(x_0)dx\,\delta x.$$

Definición 4. *El valor de la diferencial $\delta(dy)$, es decir, de la diferencial de la primera diferencial en cierto punto x_0 cuando $dx = \delta x$, se llama segunda diferencial de la función f en este punto y se denota por d^2y, es decir,*

$$d^2y = f''(x_0)dx^2 \tag{10.9}$$

(por dx^2 y en general por dx^n, $n \in N$, se denota $(dx)^2$, respectivamente, por $(dx)^n$ y no por $d(x^n)$).

Observemos que en virtud de esta definición $d^2x = 0$ ya que en el cálculo de las diferenciales consideramos el incremento $dx = \Delta x$ constante.

De forma semejante, en el caso cuando la derivada de $(n - 1)$-ésimo orden $y^{(n-1)}$ es diferenciable en el punto x_0 o lo que es equivalente, cuando para $x = x_0$ existe la derivada de n-ésimo $y^{(n)}$, se define *la diferencial de n-ésimo orden $d^n y$* de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 como la diferencial de la diferencial de $(n - 1)$-ésimo orden $d^{n-1}y$ en la cual está tomada $\delta x = dx$:

$$d^n y = \delta(d^{n-1}y)|_{\delta x = dx}.$$

Mostremos que es válida la fórmula

$$d^n y = y^{(n)}dx^n, n = 1, 2, \dots \tag{10.10}$$

Su demostración la realizaremos por inducción. Para $n = 1$ y $n = 2$ está demostrada. Sea esta fórmula válida para las diferenciales de orden $n = 1$:

$$d^{n-1}y = y^{(n-1)}dx^{n-1}.$$

Entonces, por la definición dada anteriormente, para el cálculo de la diferencial de n-ésimo orden $d^{(n)}y$ es necesario calcular inicialmente la diferencial (la denotaremos por el símbolo δ) de $d^{n-1}y$:

$$\delta(d^{n-1}y) = \delta(y^{(n-1)}dx^{n-1}) = (y^{(n-1)}dx^{n-1})'\delta x = y^{(n)}\delta x\,dx^{n-1},$$

y luego poniendo $\delta x = dx$:

$$d^n y = \delta(d^{n-1}y)|_{\delta x = dx} = y^{(n)}dx^n. \ \square$$

De la fórmula (10.10) se deduce que

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}. \tag{10.11}$$

Señalemos algunas propiedades de las diferenciales de orden superior

1°. $d^n(y_1 + y_2) = d^n y_1 + d^n y_2$.
2°. $d^n(cy) = cd^n y$, c es una constante.

3°. $d^n(y_1 y_2) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k dy_1^{n-k} dy_2^k$ o utilizando

la escritura simbólica, $\quad d^n(y_1y_2) = (dy_1 + dy_2)^{[n]}$,

donde la expresión $(dy_1 + dy_2)^{[n]}$ se escribe según la fórmula del binomio de Newton, es decir, es una suma del tipo $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k}y_1 d^k y_2$; y además, para cualquier función u se considera que $d^0 u = u^{(0)}dx^{(0)} = u$.

Estas propiedades se deducen directamente de las fórmulas correspondientes para las derivadas de n-èsimo orden (véașe (10.1), (10.2), (10.3) y (10.10)).

OBSERVACIÓN IMPORTANTE. Las fórmulas (10.10) y (10.11) son válidas en general para $n > 1$ (a diferencia del caso $n = 1$) si y sólo si x es una variable independiente. En el caso de las diferenciales de orden superior respecto a variables dependientes, todo es más complejo.

Supongamos $z = z(y)$, $y = y(x)$, que tiene sentido la composición $z[y(x)]$ y las funciones $z(y)$ e $y(x)$ son dos veces diferenciables. Entonces

$$dz = z'_y dy,$$

diferenciando otra vez y no recurriendo, para mayor sencillez, al símbolo δ, es decir, considerando la notación $d(dz)$ equivalente a la notación $\delta(dz)|_{\delta x = dx}$ (así se procede siempre en la práctica), además aquí por $\delta(dz)$ se entiende la diferencial respecto a x de la función $dz = z'_y(y)dy = z'_y[y(x)]y'_x(x)dx$, obtenemos

$$d^2z = d(dz) = d(z'_y dy) = d(z'_y)dy + z'_y d(dy) = z''_{yy}dy^2 + z'_y d^2 y \tag{10.12}$$

(hemos escrito $dz'_y = z''_{yy}dy$ a base de las fórmulas (9.26), es decir, utilizando la invariancia de la primera diferencial).

Comparando las fórmulas (10.9) y (10.12) vemos que se diferencian en el segundo término y ya que en general $d^2y \neq 0$, entonces son diferentes sustancialmente. Dividiendo ambos miembros de la igualdad (10.12) por dx^2 obtenemos la fórmula de la segunda derivada para una función compuesta:

$$z''_{xx} = z''_{yy}y'^2_x + z'_y y''_{xx},$$

que fue obtenida por nosotros anteriormente (véase (10.4)) por otro camino.

De forma semejante, pueden ser calculadas las diferenciales y las derivadas de orden superior de una función compuesta.

Ejercicios. Calcúlense las derivadas y diferenciales:

2. $y^{(8)}$ para la función $y = \sqrt{x}$.
3. $y^{(50)}$ para la funcion $y = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$.
4. $y^{(n)}$ para la función $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.
5. $y^{(n)}$ para la función $y = \operatorname{sen}^2 x$.
6. $y^{(n)}$ para la función $y = x \operatorname{ch} x$.
7. $d^n y$ para la función $y = x^n e^x$.
8. $d^n y$ para la función $y = \dfrac{\ln x}{x}$.
9. y''_{xx} para la función $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.
10. y'''_{xxx} para la función $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$.
11. y'_x e y''_{xx} para la función $x = y - a \operatorname{sen} y$.
12. y'_x e y''_{xx} para la función $x^2 + 2xy - y^2 = 1$.

§ 11. TEOREMAS SOBRE EL VALOR MEDIO PARA LAS FUNCIONES DIFERENCIABLES

11.1. TEOREMA DE FERMAT

Si la función f tiene en cierto punto x_0 derivada finita o infinita, de signo determinado, entonces $f(x)$ se llama función que tiene para $x = x_0$ derivada en el sentido amplio.

Teorema 1 (de Fermat *)). *Sea la función f definida en cierto entorno del punto x_0 y que toma en este punto su valor máximo o su valor mínimo. Entonces, si para $x = x_0$ existe la derivada en el sentido amplio, ella es igual a cero.*

DEMOSTRACIÓN. Sea la función f definida en el entorno $U(x_0)$ del punto x_0 y toma para mayor definición, si $x = x_0$, su valor máximo, es decir, para todos los $x \in U(x_0)$ se cumple la desigualdad $(f(x) \leqslant f(x_0)$. Entonces, si $x < x_0$, tenemos

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \tag{11.1}$$

y si $x > x_0$, entonces

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0. \tag{11.2}$$

Si existe la derivada en el sentido amplio, es decir, si existe el límite, finito o infinito, de signo determinado

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

entonces, pasando al límite cuando $x \to x_0 - 0$ en la desigualdad (11.1), obtenemos $f'(x_0) \geqslant 0$; análogamente de la desigualdad (11.2) cuando $x \to x_0 + 0$ encontra-

*) P. Fermat (1601 — 1665), matemático francès.

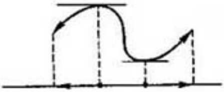


FIG. 47

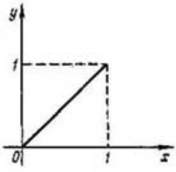


FIG. 48

mos $f'(x_0) \leqslant 0$. Estas desigualdades se cumplen simultáneamente sólo cuando $f'(x_0) = 0$. □

La interpretación geométrica del teorema de Fermat consiste en que si para $x = x_0$ la función f toma su valor máximo o mínimo sobre cierto entorno del punto x, entonces la tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0, f(x_0))$ es paralela al eje Ox (fig. 47).

OBSERVACIÓN. Si la función f toma su valor máximo o mínimo para $x_0 = x$ en comparación con sus valores en los puntos que se encuentran a un lado del punto x_0, y tiene en x_0 derivada (unilateral), entonces esta derivada puede no igualarse a cero. Así por ejemplo, la función $f(x) = x$, analizada sobre el segmento $[0, 1]$, toma para $x = 0$, su valor mínimo y para $x = 1$ su valor máximo, sin embargo, tanto en un punto como en el otro la derivada es igual a la unidad (véase la fig. 48).

11.2. TEOREMAS DE ROLLE, LAGRANGE Y CAUCHY SOBRE LOS VALORES MEDIOS

Teorema 2. **(de Rolle *)).** *Sea la función f*

1) *continua sobre el segmento $[a, b]$;*

2) *tenga en cada punto del intervalo (a, b) derivada finita o infinita, de signo determinado;*

3) *tome valores iguales en los extremos del segmento, es decir, $f(a) = f(b)$; entonces existe al menos un punto ξ, $a < \xi < b$, tal que $f'(\xi) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Ya sabemos que una función, continua sobre segmento, toma sus valores máximo y mínimo en ciertos puntos de este segmento (véase el p. 6.1). Sea $M = \max f(x)$, $m = \min f(x)$; entonces para todos los $x \in [a, b]$ se cumple la desigualdad $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Si $m = M$, entonces la función f es constante y, por lo tanto $f' \equiv 0$ sobre $[a, b]$. En calidad de punto ξ en este caso se puede tomar cualquier punto del intervalo (a, b).

Si $m \neq M$, entonces de la condición $f(a) = f(b)$ se deduce que, al menos uno de los valores m o M no se alcanza en los extremos del segmento $[a, b]$. Sea M este valor, es decir, existe un punto $\xi \in (a, b)$, tal que $f(\xi) = M$, y por lo tanto, en este

*) M. Rolle (1652 — 1719), matemático francés.

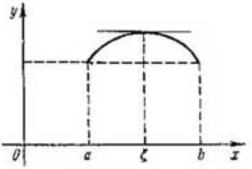


FIG. 49

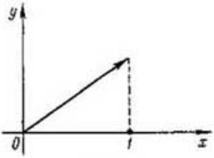


FIG. 50

punto ξ la función f alcanza su valor máximo también sobre el intervalo (a, b). Por esto del teorema de Fermat se deduce que $f'(\xi) = 0$. □

El teorema de Rolle geométricamente significa que en la gráfica de una función, continua sobre un segmento y diferenciable en él, que toma valores idénticos en sus extremos, existe un punto en el cual la tangente es paralela al eje de las abscisas (fig. 49).

Señalemos que todas las premisas del teorema de Rolle son esenciales. Para convencerse de esto, es suficiente mostrar los ejemplos de funciones, para los cuales se cumplieran dos de las tres condiciones del teorema, pero no se cumpliera la tercera y para las cuales no existiera el punto ξ tal que $f'(\xi) = 0$. (Durante esto, por la condición 3, en la que se habla sobre los valores de la función en los puntos extremos del intervalo, se debe analizar solamente las funciones, definidas sobre los segmentos.)

La función $f(x)$, definida sobre el segmento Ç0, 1] e igual a x si $0 \leqslant x < 1$, y a 0 si $x = 1$, satisface las condiciones 2 y 3, pero no satisface la condición 1 (fig. 50).

La función $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$, satisface las condiciones 1 y 3, pero no satisface la condición 2 (fig. 51).

Y por último, la función $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, satisface las condiciones 1 y 2, pero no satisface la condición 3 (véase la fig. 48).

Para todas estas funciones no existe un punto en el cual sus derivadas se hagan cero.

Llamemos la atención al hecho de que, según las condiciones del teorema de Rolle, el segmento $[a, b]$ puede contener puntos en los cuales la función tiene derivada infinita, es decir, en los cuales o bien $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$, o bien $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$. Esta exigencia no se puede debilitar, sustituyéndola por la condi-

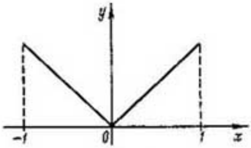


FIG. 51

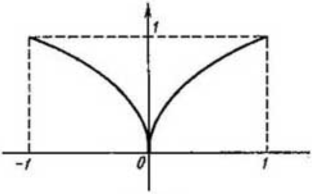


FIG. 52

ción $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$. Por ejemplo, para la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ (fig. 52), no existe un punto $\xi \in [-1, 1]$, en el cual la derivada de esta función se haga cero. Al mismo tiempo la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ satisface todas las condiciones del teorema de Rolle sobre el segmento $[-1, 1]$, a excepción de que en el punto $x = 0$ esta función no tiene ni derivada finita ni infinita de signo determinado.

En efecto, para este punto, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, además, este límite no es infinito de signo determinado.

Este ejemplo muestra la conveniencia de que en el p. 11.1 al concepto de derivada en el "sentido amplio", junto con las derivadas finitas, se incorporaron sólo las derivadas infinitas de *signo determinado*.

Señalemos que con la construcción de los ejemplos correspondientes (si, naturalmente, es factible), se comprueba habitualmente en matemática, la esencialidad de las condiciones de los teoremas demostrados.

En el futuro no realizaremos la comprobación de la necesidad de las condiciones de los teoremas, dejándole al lector su realización a medida de sus propias necesidades.

Si la función $f(x)$ satisface las condiciones del teorema de Rolle sobre el segmento $[a, b]$, entonces la función $F(x) = f(x) - f(a)$ es igual a cero en sus extremos y $F'(x) = f'(x)$, en particular, estas derivadas se hacen iguales a cero simultáneamente. Por esto, el teorema de Rolle es equivalente a la afirmación: si una función es continua sobre cierto segmento, se hace nula en sus extremos y es diferenciable en todos sus puntos internos, entonces existe un punto interno en el cual la derivada de la función se hace igual a cero. Dicho brevemente,

entre dos ceros de una función diferenciable se encuentra siempre al menos un cero de su derivada.

Ejercicios. 1. Demuéstrese que si la función f satisface las condiciones del teorema de Rolle sobre el segmento $[a, b]$ y no es constante, entonces, en este segmento existen los puntos ξ_1 y ξ_2 tales que $f'(\xi_1) > 0$ y $f'(\xi_2) < 0$.

2. Cítese un ejemplo de función que sea continua sobre el segmento $[a, b]$, que tenga derivada en cada punto del intervalo (a, b), pero que no tenga derivada (unilateral) en el punto a.

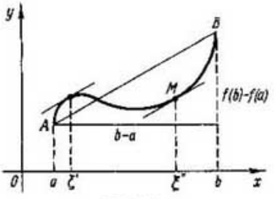


FIG. 53

Teorema 3 (de Lagrange *)). *Si la función f se continua sobre el segmento $[a, b]$ y en cada punto del intervalo (a, b) tiene derivada finita o infinita de signo determinado, entonces, en este intervalo existe al menos un punto ξ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{11.3}$$

Este teorema, evidentemente, es una generalización del teorema de Rolle.

DEMOSTRACIÓN. Analicemos la función auxiliar

$$F(x) = f(x) - \lambda x \tag{11.4}$$

y definamos el número λ de forma tal que $F(a) = F(b)$, es decir, que $f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$. Esto es equivalente a que

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{11.5}$$

Para la función F se cumplen todas las condiciones del teorema de Rolle. En efecto, la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$, y la función λx, al ser lineal, es continua sobre todo el eje numérico; por esto, también la función $F(x) = f(x) - \lambda x$ será continua sobre el segmento $[a, b]$. La función f tiene en todos los puntos del intervalo (a, b) derivada finita o infinita, y la función λx derivada finita en todos los puntos del eje numérico, por esto, su diferencia, $F(x)$ también tiene en todos los puntos del intervalo (a, b) derivada finita o infinita (véase la observación en el p. 9.5). Finalmente, en los extremos del segmento $[a, b]$ por la elección de λ (véase (11.5)) la función F alcanza valores idénticos. Por esto, existe al menos un punto ξ, $(a < \xi < b)$ tal que $F'(\xi) = 0$. De (11.4) obtenemos $F'(x) = f'(x) - \lambda$, por esto $f'(\xi) - \lambda = 0$. Sustituyendo aquí λ de (11.5), obtenemos

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \square \tag{11.6}$$

El sentido geométrico del teorema de Lagrange consiste en lo siguiente. Sean $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ los extremos de la gráfica de la función f, y AB la cuerda que une los puntos A y B (fig. 53). Entonces la relación $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es igual a la tan-

---

*) J. L. Lagrange (1736 — 1813), matemático y mecánico francés.

gente del ángulo β entre la cuerda AB y el eje Ox, es decir,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg} \beta$$

y la derivada $f'(\xi)$, como es sabido (véase el p. 9.3), es igual a la tangente del ángulo α entre la tangente a la gráfica de la función f en el punto $(\xi, f(\xi))$ y el sentido positivo del eje Ox, es decir, $f'(\xi) = \operatorname{tg} \alpha$. Por esto, la igualdad (11.6) puede ser escrita en la forma

$$\mathrm{fg}\, \alpha = \operatorname{tg} \beta.$$

De esta forma, el teorema de Lagrange muestra que en el intervalo (a, b) debe encontrarse un punto ξ (quizá, no único, véase la fig. 53, donde los puntos ξ' y ξ'' satisfacen las condiciones del teorema), en el cual la tangente a la gráfica es paralela a la cuerda AB.

El teorema de Lagrange encontrará una serie de aplicaciones importantes en el futuro.

Demos otras formas, de notación de la fórmula (11.3). Sea $a < \xi < b$ y $\dfrac{\xi - a}{b - a} = \theta$. Entonces

$$\xi = a + \theta(b - a), \quad 0 < \theta < 1. \tag{11.7}$$

Por el contrario, si ξ se expresa por la fórmula (11.7), entonces, como es fácil ver, $a < \xi < b$. De esta forma, en la forma (11.7) pueden ser representados todos los puntos del intervalo (a, b) y solamente ellos. Por esto, la fórmula (11.3) puede ser escrita en la forma

$$f(b) - f(a) = f'[a + \theta(b - a)](b - a), \quad 0 < \theta < 1. \tag{11.8}$$

Hagamos ahora $a = x$, $b - a = \Delta x$, y por tanto, $b = x + \Delta x$; entonces (11.8) toma la forma

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x, \quad 0 < \theta < 1. \tag{11.9}$$

La fórmula (11.9), así como las fórmulas equivalentes (11.3) y (11.8), se llaman *fórmulas de los incrementos finitos de Lagrange*, o sencillamente *fórmula de los incrementos finitos*, a diferencia de la igualdad aproximada

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x \tag{11.10}$$

la que se llama a veces fórmula de los incrementos infinitesimales. Esta expresa el hecho de que el primer miembro y el segundo miembro de la igualdad aproximada (11.10) son iguales entre sí para la función f diferenciable en el punto x "salvo infinitésimos de orden superior al del incremento Δx cuando $\Delta x \to 0$".

OBSERVACIÓN. La fórmula de Lagrange (11.3) puede ser representada en la forma

$$f(a) - f(b) = f'(\xi)(a - b)$$

donde $a < b$. De esta forma, es válida no sólo cuando $a < b$, sino también para $a > b$.

Señalemos tres corolarios del teorema de Lagrange, útiles en el futuro.

Corolario 1. *Sea la función f*

1) continua sobre un intervalo (funito o infinito),

2) tiene derivada nula en todos los puntos de este intervalo, a excepción, puede ser, de un conjunto finito de éstos.

Entonces la función f es constante sobre el intervalo señalado.

En efecto, supongamos que la función f satisface las condiciones enunciadas sobre el segmento Δ, $x_1 \in \Delta$, $x_2 \in \Delta$, $x_1 < x_2$. Numeremos en orden creciente a aquellos puintos del intervalo Δ, en los cuales la derivada $f'(x)$ o bien no existe, o bien existe pero no es igual a cero: $f'(x) \neq 0$, y que se encuentran sobre el intervalo (x_1, x_2). Denotémoslos por $a_1, a_2, \dots, a_n$. Sobre cada uno de los segmentos $[x_1, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{k-1}, a_k], \dots, [a_n, x_2]$ la función f es continua y en todos sus puntos interiores tiene derivada (nula) y, por lo tanto, satisface las condiciones del teorema de Lagrange. Según este teorema aplicable a cada uno de los segmentos señalados, tendremos

$$\begin{gathered} f(a_1) - f(x_1) = f'(\xi_1)(a_1 - x_1) = 0, \quad x_1 < \xi_1 < a_1, \\ f(a_2) - f(a_1) = f'(\xi_2)(a_2 - a_1) = 0, \quad a_1 < \xi_2 < a_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(a_k) - f(a_{k-1}) = f'(\xi_k)(a_k - a_{k-1}) = 0 \quad a_{k-1} < \xi_k < a_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(x_2) - f(a_n) = f'(\xi_{n+1})(x_2 - a_n) = 0, \quad a_n < \xi_{n+1} < x_2, \end{gathered} \tag{11.11}$$

ya que $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = \dots = f'(\xi_{n+1}) = 0$. Sumando las igualdades (11.11), obtenemos

$$f(x_2) - f(x_1) = 0,$$

es decir,

$$f(x_2) = f(x_1).$$

Por cuanto x_1 y x_2 eran puntos arbitrarios del segmento Δ analizado, esto significa que la función f es constante sobre Δ. ☐

El corolario 1 tiene una interpretación mecánica evidente: si la función $y = f(x)$ es la ley del movimiento de un punto material por una recta, x es el tiempo, y es la distancia (con signo) desde el punto de referencia sobre la recta, entonces la condición $f'(x) = 0$ para todos los $x \in (a, b)$, significa que la velocidad del punto analizado durante el intervalo de tiempo (a, b) siempre es igual a cero, es decir, el punto no se mueve, pero entonces, durante este tiempo la posición del punto, y por tanto el camino recorrido por éste, no varían. Esto significa que la funcion $f(x)$ es constante sobre el intervalo (a, b).

Corolario 2. *Si las funciones f y g son continuas sobre un intervalo y en todos sus puntos, excepto un conjunto finito de éstos, tienen derivadas iguales*

$$f'(x) = g'(x),$$

entonces estas funciones se diferencian sobre el segmento analizado sólo en una constante:

$$f(x) = g(x) + c, \tag{11.12}$$

c es una constante.

En efecto, la función $F = f - g$ satisface las condiciones del corolario 1, es decir, F es continua sobre el intervalo dado y $F' = 0$ en todos sus puntos, excepto, puede ser, un conjunto finito de éstos. Por esto $F = C$, es decir, tiene lugar la igualdad (11.12). □

Corolario 3. *Sea la función* φ

1) *continua sobre el intervalo* (a, b);

2) *diferenciable en todos los puntos del intervalo* (a, b), *a excepción, puede ser, de cierto punto* $x_0 \in (a, b)$;

3) *existe* $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi'(x)$; *entonces existe también la derivada* $\varphi'(x_0)$, *además*

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \varphi'(x).$$

En efecto, sea $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi'(x) = A$. Si $a < x < b$ y $x \neq x_0$ entonces por el teorema de Lagrange $\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi)(x - x_0)$ donde $\xi \in (x_0, x)$ si $x > x_0$, $\xi \in (x, x_0)$, si $x < x_0$, de donde

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'(\xi).$$

Para mayor exactitud, consideremos que $x > x_0$. El punto $\xi = \xi(x)$ es una función de x y además, en general, una función multiforme. Elijamos arbitrariamente para cada $x \in (a, b)$ un valor cualquiera de ξ, entonces obtenemos una función unívoca $\xi(x)$ (como se dice, una rama unívoca de la función multiforme). Ya que $x_0 < \xi(x) < x$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} \xi(x) = x_0.$$

Aplicando la regla del cambio de variables para los límites de las funciones (véase el p. 4.8), obtenemos, que existe el límite

$$\lim_{x \to x_0} \varphi'(\xi) = A$$

y por tanto, existe también el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = A.$$

Esto significa que la derivada $\varphi'(x_0)$ existe y es igual a A. □

Ejercicio 3. Sea la función f continua sobre el intervalo (a, b) y diferenciable en todos los puntos de este intervalo, excepto, puede ser, cierto punto $x_0 \in (a, b)$. Supongamos que existen $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f'(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f'(x)$, además, no son iguales entre sí. Demuéstrese que con estas suposiciones la derivada $f'(x)$ no existe.

En los teoremas de Rolle y Lagrange (así también como en el teorema de Cauchy, que expondremos a continuación) se habla de la existencia de cierto punto ξ, $a < \xi < b$, que puede ser llamado "punto medio", para el que se cumple una u otra de las igualdades. Con esto se explica el nombre de "teoremas sobre los valores medios" para este grupo de teoremas. Demostremos la última de las afirmaciones de este tipo que es necesaria para nosotros.

Teorema 4 (de Cauchy). *Sean las funciones f y g*

1) *continuas sobre el segmento $[a, b]$;*

2) *tienen derivadas en cada punto del intervalo (a, b);*

3) $g' \neq 0$ *en todos los puntos del intervalo (A, b).*

Entonces existe un punto ξ, $a < \xi < b$, tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} . \tag{11.13}$$

Señalemos que de las hipótesis del teorema se deduce que la fórmula (11.11) tiene sentido, es decir, $g(a) \neq g(b)$. En efecto, si $g(a) = g(b)$, entonces la función g satisfaría las condiciones del teorema de Rolle y, por lo tanto, se encontraría un punto ξ tal que $g'(\xi) = 0$, $a < \xi < b$, lo que estaría en contradicción con la condición 3.

DEMOSTRACIÓN. Analicemos la función auxiliar

$$F(x) = f(x) - \lambda g(x), \tag{11.14}$$

donde el número λ lo hemos elegido de forma tal que $F(a) = F(b)$, es decir, que $f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b)$. Para esto, es necesario tomar

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} . \tag{11.15}$$

La función F satisface todas las condiciones del teorema de Rolle, por tanto, existe un punto ξ, $a < \xi < b$, tal que $F'(\xi) = 0$. Pero de (11.14) $F'(x) = f'(x) - \lambda g'(x)$, y por esto

$$f'(\xi) = \lambda g'(\xi) = 0$$

de donde se deduce que

$$\lambda = \frac{f'(\xi)}{f'(\xi)} . \tag{11.16}$$

Comparando (11.15) y (11.16), obtenemos la fórmula (11.13), usualmente llamada *fórmula de los incrementos finitos de Cauchy.* ☐

Señalemos que la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange es un caso particular de la fórmula de los incrementos finitos de Cauchy, en el cual $g(x) = x$. Hemos dado demostraciones independientes de estas fórmulas, en primer lugar por el important papel que desempeña la fórmula de Lagrange, en segundo lugar, para tener la posibilidad, utilizando una misma idea (la construcción de una función auxiliar, que satisfage las condiciones del teorema de Rolle), de aplicarla dos veces en las demostraciones, además, al inicio para mayor claridad, en un caso más sencillo.

La fórmula de Cauchy (11.13), al igual que la fórmula de Lagrange (11.3), es válida no sólo si $a < b$, sino también para $a > b$.

Ejercicio 4. Sea $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Apliquémosle a esta función sobre el segmento $[0, x]$ la fórmula de Lagrange:

$$x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = (2\xi \operatorname{sen}\frac{1}{\xi} - \cos\frac{1}{\xi})x,$$

donde $0 < \xi < x$. Reduzcamos ambos miembros de la igualdad en x cuando $x \neq 0$:

$$x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 2\xi \operatorname{sen}\frac{1}{\xi} - \cos\frac{1}{\xi}.$$

Pasando aquí al límite cuando $x \to 0$ (durante esto, evidentemente, $\xi \to 0$) obtenemos

$$\lim_{\xi \to 0} \cos\frac{1}{\xi} = 0,$$

ya que los otros dos sumandos, evidentemente, tienden hacia cero. Al mismo tiempo, el límite de la función $\cos\frac{1}{\xi}$, cuando el argumento tiende hacia cero, no existe. ¿Dónde está el error?

Problema 7 (de Darboux *)). Demúestrese que si una función es diferenciable sobre un segmento, entonces su derivada, al tomar dos valores cualesquiers, toma también cualquier valor intermedio.

§ 12. RESOLUCIÓN DE LAS INDETERMINACIONES POR LA REGLA DE L'HOSPITAL

En muchos casos la búsqueda del límite de una función, dada analíticamente, cuando el argumento tiende hacia cierto punto (hacia un número o hacia uno de los infinitos ∞, $+\infty$ ó $-\infty$), ejecutada sustituyendo formalmente el valor correspondiente en vez del argumento en la fórmula, que representa la función analizada, lleva a las expresiones de la forma

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0 \text{ ó } 1^\infty.$$

Estas se llaman *indeterminaciones*, ya que por ellas no se puede juzgar si existe o no el límite señalado, sin hablar ya sobre la determinación de su valor, si éste existe. En este caso, el cálculo del límite se llama también "*resolución de las indeterminaciones*".

Junto con el método fundamental del cálculo de los límites de las funciones -el método de selección de su parte principal- existen otros métodos de búsqueda de los límites. Algunos de estos, que tienen la denominación general de ***regla de L'Hospital*** **), los expondremos en este párrafo.

12.1. INDETERMINACIONES DE LA FORMA 0/0

Teorema 1. *Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas sobre el segmento $[a, b]$ tales que:*

1) $f(a) = g(a) = 0$;

2) *existen las derivadas (por la derecha) $f'(a)$ y $g'(a)$, además $g'(a) \neq 0$.*

Entonces existe el límite

---

*) G. Darboux (1872 — 1917), matemático francés.

**) L'Hospital G. (1661 — 1704), matemático francés.

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Apliquemos el método de selección de la parte principal. Por la condición 2 tenemos (véase el p. 9.2).

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a),$$
$$g(x) = g(a) + g'(a)(x - a) + o(x - a).$$

De aquí, por la condición 1, obtendremos que

$$f(x) = f'(a)(x - a) + o(x - a), \quad g(x) = g'(a)(x - a) + o(x - a),$$

y por esto

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(a) + \dfrac{o(x-a)}{(x-a)}}{g'(a) + \dfrac{o(x-a)}{(x-a)}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \ \square$$

En el teorema 1 se ha supuesto la existencia de las derivadas en el punto a. Demostremos ahora un teorema próximo por su contenido al anterior, en el cual, sin embargo, no se supondrá la existencia de las derivadas $f'(a)$ y $g'(a)$.

Teorema 2. *Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$:*

1) *diferenciables en el intervalo (a, b);*
2) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(X) = 0$;
3) $g'(x) \neq 0$ *para todos los $x \in (a, b)$;*
4) *existe el límite* $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *finito o infinito, igual a $+\infty$ ó $-\infty$.*

Entonces existe el límite

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por las condiciones del teorema, las funciones f y g, no están definidas en el punto a; definámoslas haciendo $f(a) = g(a) = 0$. Ahora f y g son continuas en el punto a y satisfacen las condiciones del teorema de Cauchy sobre el valor medio (véase el p. 11.2) sobre cualquier segmento $[a, x]$, donde $a < x < b$. Por esto, para cada x, $a < x < b$, existe un $\xi = \xi(x) \in (a, x)$, tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \tag{12.1}$$

además $\lim\limits_{x \to a+0} \xi(x) = a$.

Por esto, si existe $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'x)} = k$, entonces de la regla del cambio de variable para los límites de funciones, se deduce que también existe el $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = k$.

Ahora de (12.1) obtenemos
$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=k. \ \square$$

Los teoremas 1 y 2 siguen siendo válidos con las transformaciones naturales, tanto en el caso del límite lateral izquierdo, como en el caso bilateral.

Teorema 3. *Sean las funciones f y g:*

1) *diferenciables cuando $x > c$;*

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$;

3) $g'(x) \neq 0$ *para todos los $x > c$;*

4) *existe el límite* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *finito o infinito, igual a $+\infty$ ó $-\infty$.*

Entonces existe también el límite
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sin perder generalidad podemos considerar que $c > 0$ (si $c < 0$, en calidad de nuevo valor de c tomaremos, por ejemplo, $c = 1$).

Ejecutemos el cambio de variable $x=\dfrac{1}{t}$. Las funciones $\varphi(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ y $\psi(t)=g\left(\dfrac{1}{t}\right)$ están definidas sobre el intervalo $(0, 1/c)$; si $x\to+\infty$, entonces $t\to+0$ y viceversa. Sobre el intervalo $(0, 1/c)$ existen las derivadas
$$\varphi'(t)=-f'\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2} \quad \text{y} \quad \psi'(t)=-g'\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2},$$
donde con virgulilla están indicadas las derivadas de las funciones f y g respecto al argumento inicial.

De lo dicho y de las condiciones del teorema se deduce que las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ satisfacen sobre el intervalo $(0, 1/c)$ las condiciones 1, 2 y 3 del teorema 2. Mostremos además, que de la existencia del límite $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, el cual designaremos por k, se deduce la existencia de límite $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$ y su igualdad a k, es decir, que se cumple también la condición 4 del teorema 2. En efecto, utilizando las expresiones obtenidas para las derivadas $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$, hallamos
$$\lim_{t\to+0}\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}=\lim_{t\to+0}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k.$$

Ahora, del teorema 2, aplicado a las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$, se deduce que $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\varphi(t)}{\psi(t)}=k$. Pero
$$\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}=\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\frac{f(x)}{g(x)},$$

donde $x = \frac{1}{t}$, por esto

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to +0} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = k. \square$$

Este teorema sigue siendo válido si se hace la transformación correspondiente, para $x \to -\infty$.

12.2. INDETERMINACIONES DE LA FORMA ∞/∞

Teorema 4. *Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$:*

1) *diferenciables sobre el intervalo (a, b);*
2) $\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to a+0} g(x) = \infty$;
3) $g'(x) \neq 0$ *sobre (a, b);*
4) *existe el límite finito o infinito, igual a $+\infty$ ó $-\infty$*

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} . \tag{12.2}$$

Entonces existe también el límite

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos al principio que el límite (12.2) es finito; designémoslo por k:

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

Mostremos que también

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Para ésto, elijamos los puntos x_0 y x tales que $a < x < x_0 < b$. Entonces, sobre el segmento $[x, x_0]$ las funciones f y g van a satisfacer las condiciones del teorema de Cauchy. Por esto, según este teorema existe un punto $\xi \in (x, x_0)$, tal que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} .$$

(Es evidente que el punto ξ depende de la elección de los puntos x y x_0, es decir, $\xi = \xi(x, x_0)$). Hallemos de esta fórmula la relación $f(x)/g(x)$. Transcribiéndola en la forma

$$\frac{f(x)}{g(x)} \frac{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} ,$$

obtenemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \frac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}}. \tag{12.3}$$

Como quiera que se escoja para un x_0 dado el punto tal que se cumpla la desigualdad $a < \xi = \xi(x, x_0) < x_0$, por la condición 4) del teorema tendremos

$$\lim_{x_0 \to a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = k,$$

y para un x_0 dado, por la condición 2) del teorema obtenemos

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}} = 1.$$

Sin embargo, en la parte derecha de la fórmula (12.3) no se puede utilizar sencillamente el teorema sobre el límite del producto de funciones, ya que los límites de los factores que allí aparecen se toman en diferentes condiciones: en un caso, el punto x_0 tiende hacia el punto a, y en el otro el punto x_0 es fijo, y hacia el punto a tiende el punto x. No obstante, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, siempre se puede escoger x_0 tal que la relación $f'(\xi)/g'(\xi)$ sea tan cercana al número k para todos los $\xi \in (a, x_0)$, y después escoger $\delta > 0$, tal que la relación $\dfrac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}}$ sea tan cercana a 1 para todos los $x \in (a, a + \delta)$, que como resultado para todos los x señalados se cumplirá la desigualdad

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - k\right| < \varepsilon.$$

Hablando con propiedad, el teorema está demostrado para el caso de un límite finito (12.2) y en este lugar podemos poner el signo. □

Para completar la exposición haremos algunas aclaraciones sobre las distintas etapas de la demostración, las que además, pueden ser fácilmente realizadas independientemente por aquellos que hayan asimilado suficientemente bien el material explicado con anterioridad.

Ante todo, se ha realizado la división por $f(x)$ y por $g(x)$. Para fundamentar esto, es necesario demostrar que para los valores correspondientes son válidas las desigualdades $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$. Naturalmente, estas desigualdades no tienen lugar, en general, para una elección cualquiera de los puntos $x \in (a, b)$, pero son válidas para todos los x suficientemente cercanos al punto a. En efecto, por la condición 2) del teorema existe un $\delta_1 > 0$ tal que para todos los $x \in (a, a + \delta_1)$ se cumplen las desigualdades $|f(x)| > 0$, $|g(x)| > 0$. Por esto, si escogemos x_0 tal que $a < x_0 < a + \delta_1$, entonces x también satisfará esta desigualdad, es decir, $a < x < a + \delta_1$, y por lo tanto, la división por $f(x)$ y por $g(x)$ será a ciencia cierta posible.

Después se realizó la división por $1 - f(x_0)/f(x)$. Esto también es posible para todos los x suficientemente cercanos al punto a. En efecto, por la condición $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$ existe en δ_2 tal que para todos los x, que satisfacen las condiciones $a < x < a + \delta_2$, es válida la desigualdad $|f(x)| > |f(x_0)|$, y por esto, la desigualdad $1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)} \neq 0$. Durante esto, escogemos δ_2 tal que $\delta_2 < \delta_1$, esto siempre es posible.

De esta forma, la fórmula (12.3) es válida para todos los x y x_0 tales que $a < x < x_0 < a + \delta_2$.

Más adelante, para un $\varepsilon > 0$ dado por la existencia del límite finito

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k,$$

se encuentra un $\delta_3 > 0$, tal que para todos los $x \in (a, a + \delta_3)$ se cumple la desigualdad

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - k\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{12.4}$$

en este caso, escogemos $\delta_3$además de forma tal que $\delta_3 < \delta_1$, la elección de x_0 la sometemos a la condición $a < x_0 < a + \delta_3$.

Hagamos ahora,

$$\alpha_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - k, \quad x < \xi < x_0 \tag{12.5}$$

El punto ξ y por esto la función α_1 dependen de los puntos x_0 y x, sin embargo, durante la elección que hemos hecho, es decir, cuando

$$a < x < x_0 < a + \delta_3,$$

tendremos $a < \xi < a + \delta_3$, y por lo tanto, en virtud de la desigualdad (12.4) se cumplirá la desigualdad

$$|\alpha_1| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12.6}$$

Hagamos luego

$$\alpha_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}} - 1. \tag{12.7}$$

Es evidente que por la condición 2) del teorema tenemos

$$\lim_{x \to a+0} \alpha_2(x) = 0. \tag{12.8}$$

De (12.3), (12.5) y (12.7) se deduce que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (k + \alpha_1)(1 + \alpha_2(x)) = k + \alpha_1 + (k + \alpha_1)\alpha_2(x). \tag{12.9}$$

Escojamos ahora δ_ε, $0 < \delta_\varepsilon < \delta_3$, tal que para $a < x < a + \delta_\varepsilon$ se cumpla la desigualdad

$$(|k| + |\alpha_1|)|\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{12.10}$$

para lo cual según (12.6) es suficiente que se cumpla la desigualdad

$$|\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2(|k| + \varepsilon)}.$$

Esto es posible en virtud de (12.8).

De las desigualdades (12.6) y (12.10) se deduce que para todos los x, que satisfacen la condición $a < x < a + \delta_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$|\alpha_1 + (k + \alpha_1)\alpha_2(x)| \leqslant |\alpha_1| + (|k| + |\alpha_1|)|\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

y por esto, de (12.9) se deduce que $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - k\right| < \varepsilon$ cuando $a < x < a + \delta_\varepsilon$. Esto significa la existencia del límite

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Así se aclaran, en el "lenguaje de las desigualdades", las afirmaciones hechas anteriormente sobre la elección de los valores de x_0 y x suficientemente cercanos al punto a, que aseguran la cercanía necesaria de la relación $f(x)/g(x)$ al número k.

Analicemos ahora el caso del límite infinito.

Sea $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$. Entonces, en cierto entorno del punto a tenemos $f'(x) \neq 0$ (¿ por que?) y $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{g'(x)}{f'(x)} = 0$. Por esto, por lo demostrado anteriormente, $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$, de donde se deduce que $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Pero es necesario demostrar una afirmación más fuerte, o sea, que el límite es igual a $+\infty$. Mostremos esto. Ya que, por la suposición, $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to +\infty$ cuando $x \to a + 0$, entonces existe un $\eta_1 > 0$, tal que para todos los x que satisfacen la condición $a < x < a + \eta_1$, tendremos

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > 0.$$

Más adelante, fijemos x_0, $a < x_0 < a + \eta_1$, ya que tendremos que utilizar otra vez la fórmula (12.3).

15*

Por último, escojamos η_2, $0 < \eta_2 < x_0 - a$, tal que para todos los $x \in (a, a + \eta_2)$ tenga lugar la desigualdad $|f(x)| > |f(x_0)|$, $|g(x)| > |g(x_0)|$, a consecuencia de lo cual

$$1 - \frac{f(x_0)}{f(x)} > 0, \quad 1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} > 0. \tag{12.11}$$

Entonces, para todos los x, que satisfacen la condición $a < x < a + \eta_2$, se cumplen las desigualdades (12.11), la desigualdad

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} > 0 \quad \text{donde} \quad x < \xi = \xi(x) < x_0,$$

y es válida la fórmula (12.3). De ella se deduce que para todos los x señalados

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0.$$

De la afirmación demostrada anteriormente $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ se deduce ahora que $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

De forma análoga se analiza el caso

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty. \ \square$$

El teorema 4 junto con su demostración sigue vigente cuando se hacen las transformaciones naturales, y cuando $x \to a - 0$, $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$, así como en el caso de los límites bilaterales.

Se puede mostrar, que cuando se cumplen las condiciones 1, 2 y 3 que forman parte de cualquiera de los teoremas 2, 3 ó 4, no puede existir el límite $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ sin la existencia de uno de los dos "límites infinitos de signo determinado" $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$ o $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$.

Problema 8. Demostrar que si se cumplen las condiciones 1, 2 y 3 del teorema 4 y $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, entonces o bien $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$, o bien $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$.

Ejemplos. 1. Hallemos $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$. Observando que

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0,$$

obtenemos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

Esto significa que cuando $x \to +\infty$ la función $\ln x$ crece más lentamente que cualquier exponente positivo de la variable x.

A veces la regla de L'Hospital se debe aplicar varias veces.

2. Hallemos $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{a^x}$; donde n es un número natural y $a > 1$. Tenemos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^n)'}{(a^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{\alpha^x \ln a} = \dots$$

$$\dots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{a^x \ln^n a} = 0. \tag{12.12}$$

De esta forma, cuando $x \to +\infty$ cualquier grado de x^n crece más lentamente, que la función exponencial a^x, $a > 1$.

3. Se debe tener en cuenta que la realización de cálculos según el modelo (12.12) está justificada sólo en el caso cuando como resultado se obtiene un límite finito o infinito. Así, por ejemplo, sería erróneo escribir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x - \operatorname{sen} x)'}{(x + \operatorname{sen} x)},$$

ya que el limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x - \operatorname{sen} x)'}{(x + \operatorname{sen} x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

no existe.

En realidad, tomando la sucesión $x'_n = 2\pi n \to +\infty$ y $x''_n = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \to +\infty$ cuando $n \to \infty$, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \cos x'_n}{1 + \cos x'_n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \cos x''_n}{1 + \cos x''_n} = 1.$$

Al mismo tiempo, la indeterminación dada de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ puede ser resuelta de forma elemental

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1.$$

<u>Ejercicio 1.</u> Sean $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \operatorname{sen} x$. Hállese $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y demuéstrese que en este caso la regla de L'Hospital no es aplicable.

4. Puede ocurrir que la utilización de la regla de L'Hospital no simplifique el problema de determinación del límite de la función. Por ejemplo, aplicando la regla de L'Hospital para el cálculo del límite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ obtendremos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x'}{(\sqrt{1+x^2})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x},$$

es decir, se obtuvo el límite de la fracción inversa a la dada, es decir, el problema permaneció invariable. Conjuntamente con esto, el límite dado se halla fácilmente por el método elemental:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1.$$

5. Las indeterminaciones 0^0, ∞^0 ó 1^∞ se pueden resolver, tomando previamente el logaritmo de las funciones correspondientes. Por ejemplo, para hallar $\lim\limits_{x\to+0}x^x$, es conveniente hallar el límite

$$\lim_{x\to+0}x\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to+0}x=0.$$

Por esto, en virtud de la continuidad de la función exponencial

$$\lim_{x\to+0}x^x=\lim_{x\to+0}e^{x\ln x}=1.$$

Las indeterminaciones de las formas $0\cdot\infty$ y $\infty-\infty$ se deben reducir a las formas $0/0$ ó ∞/∞. En este caso, como siempre, durante la aplicación de la regla de L'Hospital, en el cálculo se recomienda simplificar las expresiones obtenidas. Aclaremos esto en un ejemplo.

6. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2x\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}^2x-x^2\cos^2x}{x^2\operatorname{sen}^2x}$. Señalemos que

$$\frac{\operatorname{sen}^2x-x^2\cos^2x}{x^2\operatorname{sen}^2x}=\frac{\operatorname{sen}x+x\cos x}{\operatorname{sen}x}\,\frac{\operatorname{sen}x-x\cos x}{x^2\operatorname{sen}x}.$$

El límite del primer factor de la parte derecha se halla directamente:

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x+x\cos x}{\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{\operatorname{sen}x}\cos x\right)=2,$$

y el límite del segundo, aplicando la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x-x\cos x}{x^2\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to0}\frac{x\operatorname{sen}x}{2x\operatorname{sen}x+x^2\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2+\frac{x}{\operatorname{sen}x}\cos x}=\frac{1}{3}.$$

De esta forma, $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2x\right)=\frac{2}{3}$.

Ejercicios. Hállense los límites:

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-x^a}{x-a}$, $a>0$. 4. $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to+0}x^\varepsilon\ln x$, $\varepsilon>0$. 5. $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)$.

§ 13. FÓRMULA DE TAYLOR

13.1. DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DE TAYLOR

Si la función $y = f(x)$ tiene en el punto x_0 derivada, entonces el incremento de esta función puede representarse en la forma

$$\Delta y = A\,\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

donde $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - y_0$, $y_0 = f(x_0)$ y $A = f'(x_0)$, es decir, $f(x) = y_0 + A(x - x_0) + o(x - x_0)$. Dicho de otra forma, existe la función lineal

$$P_1(x) = y_0 + A(x - x_0) \tag{13.1}$$

tal que

$$f(x) = P_1(x) + o(x - x_0), \quad x \to x_0,$$

además

$$P_1(x_0) = y_0 = f(x_0), \quad P_1'(x_0) = A = f'(x_0).$$

Planteemos un problema más general. Supongamos que la función f tiene en el punto $x_0 n$ derivadas. Es necesario aclarar si existe un polinomio $P_n(x)$ de grado no mayor que n, tal que

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0, \tag{13.2}$$

y

$$f(x_0) = P_n(x_0), f'(x_0) = P'_n(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0). \tag{13.3}$$

Buscaremos este polinomio, por analogía con la fórmula (13.1), en la forma

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \ldots + A_n(x - x_0)^n.$$

Observando que $P_n(x_0) = A_0$, de la primera condición (13.3), es decir, de $f(x_0) = P_n(x_0)$, tenemos $A_0 = f(x_0)$. Luego,

$$P'_n(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + \ldots + nA_n(x - x_0)^{n-1},$$

de donde $P'_n(x_0) = A_1$, y ya que $P'_n(x_0) = f'(x_0)$, entonces $A_1 = f'(x_0)$. Después encontramos la segunda derivada del polinomio $P_n(x)$:

$$P_n''(x) = 2 \cdot 1 \cdot A_2 + \ldots + n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2}.$$

De aquí y de la condición $f''(x_0) = P_n''(x_0)$ obtenemos $A_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2!}$ y en general

$$A_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Por la propia construcción, para el polinomio

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se cumplen todas las relaciones (13.3). Comprobemos si satisface la condición (13.2).

Sea
$$r_n(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - P_n(x).$$

De la condición (13.3) se deduce que
$$r_n(x_0) = r'_n(x_0) = \ldots = r_n^{(n)}(x_0) = 0. \tag{13.4}$$

Por esto, aplicando n veces la regla de L'Hospital para descubrir la indeterminación $\dfrac{r_n(x)}{(x - x_0)^n}$ cuando $x \to x_0$, y precisamente al principio $n - 1$ veces el teorema 2 del § 12 y después el teorema 1 del mismo párrafo, obtenemos:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x_0)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{r'_n(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{r^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = \frac{r^{(n)}(x_0)}{n!} = 0,$$
es decir, en efecto $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$, $x \to x_0$.

Así queda demostrado el importante teorema siguiente.

Teorema 1. *Supongamos que la función $f(x)$ definida sobre el intervalo (a, b) tiene en el punto $x_0 \in (a, b)$ derivadas hasta el orden n inclusive. Entonces, cuando $x \to x_0$*
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \tag{13.5}$$
ó
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Este teorema sigue siendo válido, junto con su demostración, también para la función f, definida sobre el segmento $[a, b]$, cuando $x_0 \in [a, b]$, si para $x_0 = a$ y $x_0 = b$ por derivadas se entienden las derivadas unilaterales correspondientes.

La fórmula (13.5) se llama *fórmula de Taylor* *) *de n-ésimo orden con el término residual en la forma de Peano.*

El polinomio
$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{n!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{13.6}$$
se llama *polinomio de Taylor* de grado n, y la función
$$r_n(x) = f(x) - Pn(x) \tag{13.7}$$
término residual de orden n de la fórmula de Taylor. Como se muestra, el término residual $r_n(x)$ es un infinitésimo, cuando $x \to x_0$, de orden más alto que todos los términos del polinomio de Taylor (13.6).

Mostremos otra forma de notación de la fórmula (13.5). Suponiendo
$$x - x_0 = \Delta x, \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

---

*) Taylor (1685 — 1731), matemático inglés.

obtenemos
$$\Delta y = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \Delta x^k + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0. \tag{13.5'}$$

Si en la fórmula (13.5) $x_0 = 0$, entonces se obtiene una forma parcial de la fórmula de Taylor, llamada usualmente *fórmula de Maclaurin* *):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), \quad x \to 0. \tag{13.8}$$

El teorema demostrado permite sustituir cualquier función que satisfaga las condiciones de este teorema, en el entorno de cierto punto, por un polinomio salvo infinitésimos de orden más alto que los términos del polinomio. Este polinomio es el polinomio de Taylor. La magnitud del error está dada en este caso por el término residual.

La fórmula de Taylor con término residual en la forma de Peano da un método uniforme de selección de la parte principal de la función en un entorno de un punto dado. En esta circunstancia están fundamentadas las múltiples y distintas aplicaciones de la fórmula (13.5), en diferentes cuestiones del análisis.

Señalemos un corolario útil del teorema 1.

Corolario. *Sea la función $f(x)$ definida sobre el intervalo (a, b) y supongamos que tiene en el punto x derivadas hasta de orden $n + 1$ inclusive. Entonces cuando $x \to x_0$*
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + O(x - x_0)^{n+1}. \tag{13.9}$$

En efecto, según el teorema 1 cuando $x \to x_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^{n+1}), \tag{13.10}$$

y ya que
$$\frac{f^{n+1}(x_0)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} + o((x - x_0)^{n+1}) = O((x - x_0)^{n+1}) \quad \text{para} \quad x \to x_0,$$

entonces, de la fórmula (13.10) se deduce directamente la fórmula (13.9). □

Ejercicio 1. Demuéstrese que si la función $f(x)$, en cierto entorno del punto x_0 tiene derivada de orden n, entonces, cualesquiera que sean el punto x de este entorno y la función $\psi(t)$, que es continua sobre el segmento con extremos en los puntos x_0 y x y tiene derivada no nula en el interior de este segmento, se halla un punto ξ, que se encuentra entre x_0 y x, tal que para el término residual $r_{n-1}(x)$ de la fórmula de Taylor de la función $f(x)$ tiene lugar la fórmula
$$r_{n-1}(x) = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(\xi)} \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!} (x - \xi)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

*) C. Maclaurin (1698 — 1746), matemático escocés.

Obténganse de aquí las formas siguientes de notación del término residual:

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!\,p}(x-x_0)^p(x-\xi)^{n-p}, \quad p > 0 \quad \text{(forma de Schlömilch-Roche *)}),$$

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n \quad \text{(forma de Lagrange)},$$

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}[x_0 + \theta(x-x_0)]}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}(x-x_0)^n,$$

$$0 < \theta < 1 \quad \text{(forma de Cauchy)}.$$

Indicación. Analícese la función auxiliar

$$\varphi(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

y aplíquese a las funciónes φ y ψ el teorema de Cauchy sobre el valor medio. Para deducir el término residual en la forma Schlömilch — Roche hágase $\psi(t) = (x-t)^p$.

13.2. EL POLINOMIO DE TAYLOR COMO EL POLINOMIO DE MEJOR APROXIMACIÓN DE UNA FUNCIÓN EN UN ENTORNO DEL PUNTO DADO

Señalemos previamente que, evidentemente, todo polinomio

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{13.11}$$

puede ser representado, para cualquier x_0, en la forma

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(x-x_0)^k. \tag{13.12}$$

En realidad, es suficiente en (13.11) poner $x = x_0 + h$ y desarrollar la parte derecha según las potencias de h; entonces

$$P_n(x) = A_0 + A_1 h + \ldots + A_n h^n, \text{ donde } h = x - x_0,$$

es decir, obtuvimos la fórmula (13.12).

Supongamos ahora que para la función f, que tiene en el punto x_0 derivada de orden n, existe el polinomio $P_n(x)$ de grado no mayor que n, tal que para cierto $m \geqslant n$ se cumple la igualdad

$$f(x) - P_n(x) = o((x-x_0)^m), \quad x \to x_0, \tag{13.13}$$

*) O. Schlömilch (1823 — 1901), matemático alemán. E. Roche (1820 — 1883), astrónomo y matemático francés.

y por lo tanto, ya que para $m \geqslant n$ tiene lugar la relación

$$o((x - x_0)^m = o\ ((x - x_0)^n), \quad x \to x_0$$

(recordemos, que semejantes fórmulas se leen sólo de izquierda a derecha) y la igualdad

$$f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0. \tag{13.14}$$

Por lo dicho anteriormente, el polinomio $P_n(x)$ se puede representar en la forma (13.12), y entonces sus coeficientes $A_0, A_1, \ldots, A_n$, se hallan, como fue demostrado en el p. 13.1, por la fórmula

$$A_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Esto significa que el polinimio $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor (de grado no mayor que n), de la función f.

De esta forma, ningún polinomio de grado menor o igual a n, diferente del polinomio de Taylor, puede aproximar a la función dada con una exactitud $o((x - x_0)^n)$, cuando $x \to x_0$, y por lo tanto, con una exactitud mayor $o((x - x_0)^m)$, $m > n, x \to x_0$. Dicho de otra forma, el polinomio de Taylor es el único polinomio, que posee la propiedad (13.14), todos los polinomios restantes del mismo grado "aproximan peor" a la función f cuando $x \to x_0$. Precisamente en este sentido se dice que el polinomio de Taylor es el polinomio de mejor aproximación de la función dada en un entorno del punto x_0 cuando $x \to x_0$.

La unicidad de la representación de la función en la forma (13.13) puede ser utilizada a veces para su desarrollo según la fórmula de Taylor. Precisamente, si es posible obtener de alguna forma indirecta la representación (13.13), entonces, por el teorema 2 se puede afirmar que ésta es el desarrollo según la fórmula de Taylor (13.5), es decir, que los coeficientes del polinomio hallado se expresan por la fórmula (13.14).

Así, por ejemplo, la relación (13.12) representa el desarrollo del polinomio (13.11) según la fórmula de Taylor, además en este caso $r_n(x) \equiv 0$, por esto, por la unicidad del polinomio que satisface la condición (13.14), los coeficientes del polinomio (13.12) tienen la forma

$$A_k = \frac{P_n^k(x_0)}{k!}.$$

De esta forma

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

En particular, durante el desarrollo del polinomio de grado n según la fórmula de Taylor el resto de orden n es idénticamente igual a cero.

Supongamos que se exige desarrollar según la fórmula de Taylor la función $f(x) = 1/(1 - x)$ en un entorno del punto $x_0 = 0$. Observando que $1/(1 - x)$ no es otra cosa que la suma de la progresión geométrica infinita

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \quad |x| < 1,$$

y suponiendo $r_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots = \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$, $|x| < 1$, obtenemos

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + r_n(x),$$

donde $r_n(x) = O(x^{n+1})$ y, por tanto, $r_n(x) = o(x^n)$ cuando $x \to 0$. De esta forma, la representación

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n), \quad x \to 0,$$

es el desarrollo de la función $1/(1-x)$, según la fórmula de Taylor en un entorno de cero.

13.3. EJEMPLOS DE DESARROLLO SEGÚN LA FÓRMULA DE TAYLOR

1. $f(x) = \operatorname{sen} x$. La función $\operatorname{sen} x$ tiene derivadas de todos los órdenes. Hallemos para ella la fórmula de Taylor cuando $x_0 = 0$, es decir, la fórmula de Maclaurin (13.8). Fue demostrado (véase el p. 10.1), que $(\operatorname{sen} x)^{(m)} = \operatorname{sen}\left(x + m\dfrac{\pi}{2}\right)$, por esto

$$f^{(m)}(0) = \operatorname{sen}\frac{m\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad m = 2k, \\ & \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \\ (-1)^k & \text{para} \quad m = 2k + 1, \end{cases} \tag{13.15}$$

y por la fórmula (13.5),

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

cuando $x \to 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, o más breve,

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \text{cuando} \quad x \to 0.$$

Hemos escrito aquí el término residual en la forma $o(x^{2n+2})$, y no en la forma $o(x^{2n+1})$ ya que el término del polinomio de Taylor, siguiente al último sumando escrito, en virtud de (13.15) es igual a cero.

2. $f(x) = \cos x$. Como es conocido (véase el p. 10.1), $f^{(m)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{m\pi}{2}\right)$, y por esto,

$$f^{(m)}(0) = \cos\frac{m\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad m = 2k + 1, \\ & \qquad\qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \\ (-1)^k & \text{para} \quad m = 2k, \end{cases}$$

y
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

cuando $x \to 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, o, más breve,

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{cuando} \quad x \to 0.$$
$$n = 0, 1, 2, \dots$$

3. $f(x) = e^x$. Ya que $(e^x)^{(n)} = e^x$, entonces $f^{(n)}(0) = 1$, $n = 0, 1, \dots$, por lo tanto,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \tag{13.16}$$

cuando $x \to 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, o más breve,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{cuando} \quad x \to 0.$$

De aquí, sustituyendo x por $-x$, obtenemos

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{cuando} \quad x \to 0, n = 0, 1, 2, \dots \tag{13.17}$$

4. $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Sumando y restando (13.16) y (13.17), tendremos

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{cuando} \quad x \to 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Por la unicidad de la representación de la función en la forma señalada (véase el p. 13.2) las relaciones obtenidas son las fórmulas de Taylor para las funciones $\operatorname{sh} x$ y $\operatorname{ch} x$.

5. $f(x) = (1 + x)^\alpha$, α es cierto número dado. Ya que $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha - n}$, entonces

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)$$

y, por lo tanto,

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!} x^3 + \dots$$
$$\dots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

cuando $x \to 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ó, más breve,

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - k + 1)}{k!} x^k + o(x^n)$$

cuando $x \to 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

6. $f(x) = \ln(1 + x)$. Es fácil ver que

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x} = (1 + x)^{-1}, \quad f''(x) = -(1 + x)^{-2}$$

y en general $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k - 1)!(1 + x)^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Por esto $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k - 1)!$, $k = 1, 2, \ldots$, y ya que $f(0) = 0$, entonces

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

cuando $x \to 0$, $n = 1, 2, \ldots$, o, más breve,

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n) \quad \text{cuando} \quad x \to 0, \quad x = 1, 2, \ldots .$$

OBSERVACIÓN 1. Por el corolario del teorema 1, las fórmulas obtenidas se pueden escribir, utilizando el símbolo O (O grande), de la forma siguiente:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k + 1)!} + O(x^{2n+3}),$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2n+2}),$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1}),$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k + 1)!} + O(x^{2n+3}),$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2n+1}), n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - k + 1)}{k!} x^k + O(x^{n+1}),$$

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1}),$$

$n = 1, 2, \ldots$, cuando $x \to x_0$.

Tal notacion de la fórmula de Taylor en algunas cuestiones resulta más cómoda que su notación con el símbolo o (o pequeña).

OBSERVACIÓN 2. De los desarrollos de las funciones elementales, obtenidos por la fórmula de Taylor en el entorno de cero, es posible con ayuda de un cambio de variable lineal, obtener su desarrollo en un entorno de cualquier punto perteneciente a su dominio.

Por ejemplo, desarrollemos por este método, según la fórmula de Taylor con término residual en la forma de Peano, la función $f(x) = \sqrt[5]{x}$ en un entorno del punto $x_0 = 1$. Haciendo $x = 1 + t$ y aplicando la fórmula (13.19), obtenemos

$$\sqrt[5]{x} = (1+t)^{1/5} =$$

$$= 1 + \frac{1}{5}t + \frac{1}{2!}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)t^2 + \frac{1}{3!}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1}-2\right)t^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{5}-n+1\right)t^n + o(t^n) =$$

$$= 1 + \frac{1}{5}(x-1) - \frac{1\cdot 4}{2\cdot 5^2}(x-1)^2 + \frac{1\cdot 4\cdot 9}{3!5^3}(x-1)^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^n 1\cdot 4\cdot 9\ldots(5n-6)}{n!5^n}(x-1)^n + o((x-1)^n),$$

cuando $x \to 1$ (o, lo que es lo mismo, cuando $t \to 0$). Este es el desarrollo buscado.

OBSERVACIÓN 3. Combinando los desarrollos de las funciones, señalados anteriormente, se puede seleccionar la parte principal (véase el p. 8.4) de las diferentes funciones elementales en los entornos de tales puntos que cuando el argumento tiende hacia ellos la función tiende a cero o al infinito, estos casos se encuentran con mayor frecuencia.

En calidad de ejemplo seleccionemos la parte principal de la función ctg x cuando $x \to 0$ hasta el orden $O(x^3)$.

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1 - \dfrac{x^2}{2} + O(x^4)}{\left[x - \dfrac{x^3}{6} + O(x^5)\right]} =$$

$$= \frac{1}{x}\left[1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right]\left[1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4)\right]^{-1} =$$

$$= \frac{1}{x}\left[1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right]\left[1 + \frac{x^2}{6} - O(x^4) + O((-\frac{x^2}{6} + O(x^4))^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{x}\left[1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right] = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x + O(x^3), \quad x \to 0.$$

Aquí fueron utilizados los desarrollos por la fórmula de Taylor del coseno, del seno y del binomio $(1+u)^\alpha$ cuando $\alpha = -1$ y $u = -\dfrac{x^2}{6} + O(x^4)$, $x \to 0$.

13.4. CÁLCULO DE LÍMITES CON AYUDA DE LA FÓRMULA DE TAYLOR (MÉTODO DE SELECCIÓN DE LA PARTE PRINCIPAL)

La fórmula de Taylor da una regla muy sencilla y muy general para seleccionar la parte principal de una función. Como resultado, este método de cálculo de los límites de las funciones con ayuda de la selección de la parte principal adquiere un carácter algorítmico acabado.

Analicemos primeramente el caso de las indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$. Supongamos se exige hallar el límite $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, donde $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$. En este caso, se recomienda desarrollar según la fórmula de Taylor las funciones f y g en un entorno del punto x_0 (si, naturalmente, esto es posible), limitándose en este desarrollo sólo a los primeros términos diferentes de cero, es decir, tomar el desarrollo en la forma

$$f(x) = a(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),\quad a \neq 0,$$
$$g(x) = b(x - x_0)^m + o((x - x_0)^m),\quad b \neq 0,$$

entonces

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{a(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)}{b(x - x_0)^m + o((x - x_0)^m)} =$$
$$= \frac{a}{b}\lim_{x\to x_0}(x - x_0)^{n-m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n > m, \\ \dfrac{a}{b} & \text{si } n = m, \\ \infty & \text{si } n < m. \end{cases}$$

Con frecuencia resulta cómodo para el desarrollo de las funciones f y g según la fórmula de Taylor utilizar el grupo de desarrollos de las funciones elementales, obtenido en el p. 13.13. Para esto se debe, en el caso de $x_0 \neq 0$ ejecutar previamente el cambio de variables $t = x - x_0$; entonces $x \to x_0$ corresponderá a $t \to 0$. El caso de $x \to \infty$ con el cambio de variable $x = \frac{1}{t}$ se reduce al caso $t \to 0$.

Si se tiene la indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, es decir, se exige hallar $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, donde $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, entonces es fácil reducirla al caso analizado $\frac{0}{0}$ mediante la transformación $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$.

De forma semejante al cálculo de los límites, con ayuda de la regla de L'Hospital, aplicando el método de selección de la parte principal para resolver las indeterminaciones de la forma $0 \cdot \infty$ y $\infty - \infty$ se les debe transformar a las indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$. Por último, para resolver las indeterminaciones de la forma

0°, ∞° y 1^∞ por el método señalado, es necesario tomar, previamente, el logaritmo de las funciones analizadas.

Analicemos en ejemplos, cómo se aplica la fórmula de Taylor para el cálculo de los límites de las funciones. Supongamos que se exige hallar

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}.$$

Observando que (véase el p. 13.3)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} - o(x^3), \quad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3/6 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/3}{x^3/6} = 2.$$

Analicemos la indeterminación de la forma $\infty - \infty$:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x - x^2}{x^2 \operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]^2 - x^2}{x^2[x + o(x)]^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^4/3 + o(x^4)}{x^2[x^2 + o(x^2)]} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^4/3 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^4/3}{x^4} = -\frac{1}{3}.$$

En calidad de último ejemplo calculemos el límite $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x}$, es decir, resolvamos la indeterminación de la forma 1^∞. Según la regla general, hallamos el límite del logaritmo de la expresión, que se encuentra bajo el signo del límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \frac{x + o(x^2)}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + o(x))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{O(x)}{x} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1.$$

Ejercicios. Hállense los límites:

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{e^x - 1 - x - x^2/2}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x + x^2) + \ln(1 - x - x^2)}{x \operatorname{sen} x}$.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^{1/x} - e}{x}$.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(\operatorname{sen} x) - \cos x}{x^4}$.

6. $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{sen} x}$.

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4\sqrt[4]{1 - x^2} - 4e^{x^3} + \ln(1 + x^2)}{\operatorname{arctg} x - \operatorname{sen} x}$.

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x}) + 2x^3}{x^5}$.

§ 14. INVESTIGACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE LAS FUNCIONES

14.1. CRITERIO DE MONOTONÍA DE LAS FUNCIONES

Teorema 1. *Para que una función f diferenciable sobre el intervalo (a, b) crezca (decrezca) sobre este intervalo, es necesario y suficiente que su derivada en todos los puntos de éste sea no negativa, $f'(x) \geqslant 0$ (no positiva, respectivamente, $f'(x) \leqslant 0$).*

Si en todos los puntos de (a, b) la derivada es positiva: $f'(x) < 0$ (respectivamente negativa: $f'(x) < 0$), entonces la función f crece estrictamente (decrece estrictamente) sobre el intervalo analizado.

NECESIDAD. Si la función f crece (decrece) sobre (a, b), entonces para cualquier punto $x_0 \in (a, b)$ cuando $\Delta x > 0$ tenemos $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geqslant 0 (\Delta y \leqslant \leqslant 0)$. Por esto $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0$ $\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant 0\right)$; pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$, obtenemos $f'(x_0) \geqslant 0 (f'(x_0) \leqslant 0)$.

SUFICIENCIA. Sea $a < x_1 < x_2 < b$. Entonces, según la fórmula de Lagrange (véase el p. 11.2) $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, donde $x_1 < \xi < x_2$. Ya que $x_2 - x_1 > > 0$, entonces cuando $f'(x) \geqslant 0$ sobre (a, b) (de donde se deduce que en particular, $f'(\xi) \geqslant 0$) tendremos $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, es decir, la función f crece. Análogamente, cuando $f'(x) \leqslant 0$ sobre (a, b) tenemos $f'(\xi) \leqslant 0$, y por lo tanto, $f(x_2) \leqslant f(x_1)$, es decir, la función f decrece.

Si $f'(x) > 0$ sobre (a, b), entonces $f'(\xi) > 0$ y por esto, $f(x_2) > f(x_1)$, es decir, la función f crece estrictamente. Sea ahora $f'(x) < 0$ sobre (a, b); entonces $f'(\xi) < 0$, por lo tanto, $f(x_2) < f(x_1)$, es decir, la función f decrece estrictamente. □

Señalemos que las condiciones $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ no son necesarias para el crecimiento estricto, respectivamente decrecimiento estricto de la función diferenciable sobre un intervalo, lo que muestran los ejemplos de las funciones $f_1(x) = x^3$ y $f_2(x) = -x^3$. La primera de ellas crece estrictamente, y la segunda decrece estrictamente sobre todo el eje numérico, pero para $x = 0$ sus derivadas se hacen nulas.

El teorema sigue siendo válido para las funciones continuas, que no tengan derivadas en un número finito de puntos. La afirmación de la segunda parte del teorema sigue siendo válida, si además, en un número finito de puntos la derivada se anula.

Por ejemplo,

si la función es continua sobre cierto intervalo y tiene en todos los puntos derivada positiva (negativa), excepto, puede ser, en un número finito de puntos, en los cuales la derivada se hace nula o no existe, entonces la función crece estrictamente (respectivamente, decrece estrictamente) sobre el intervalo analizado.

Esto se deduce directamente del teorema 1: es suficiente aplicarlo sucesivamente a todos los intervalos, en los que se divide el intervalo dado por el conjunto finito de puntos señalados.

Ejemplo. Investiguemos la función

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{cuando} \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{cuando} \quad x = 0. \end{cases}$$

La función f es diferenciable (y, por lo tanto, continua) sobre el segmento $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Una revisión especial la requiere sólo la existencia de la derivada en el punto $x = 0$. Aplicando, por ejemplo, dos veces la regla de L'Hospital, obtenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t - t}{t^2} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cos t - 1}{2t} = -\frac{1}{2} \lim_{t \to 0} \operatorname{sen} t = 0.$$

Esto también significa que existe $f'(0) = 0$.

Para todos los $x \neq 0$ tenemos

$$f'(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x) < 0,$$

o sea, $x < \operatorname{tg} x$, si $0 < x < \pi/2$ (véase la demostración del lema 1 en el p. 8.1). Por tanto, la función f decrece estrictamente sobre el segmento $[0, \pi/2]$, y por esto $f(0) > f(x) > f(1)$, es decir,

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 \quad \text{cuando} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{14.1}$$

14.2. DETERMINACIÓN DE LOS VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE LA FUNCIÓN

Definición 1. *Sea la función f definida en cierto entorno del punto x_0. Entonces x_0 se llama punto de máximo (punto de mínimo, respectivamente) de la función f, si existe un $\delta > 0$ tal que para todos los Δx que satisfacen la condición $|\Delta x| < \delta$, se cumple la desigualdad $f(x_0 + \Delta x) \leqslant f(x_0)$ (respectivamente $f(x_0 + \Delta x) \geqslant \geqslant f(x_0)$).*

Si existe un $\delta > 0$, tal que para todos los $\Delta x \neq 0$, tales que $|\Delta x| < \delta$, se cumple la desigualdad $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ (respectivamente $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$), entonces x_0 se llama punto de máximo estricto (respectivamente, mínimo estricto).

Los puntos de máximo y mínimo (estrictos) se llaman puntos de extremo (estricto).

Para los puntos x_0 de extremo estricto de la función f, y sólo para ellos, el incremento $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ no cambia de signo cuando el argumento pasa por x_0, es decir, cuando cambia el signo de Δx. Precisamente $\Delta f < 0$ para todos los puntos de máximo estricto y $\Delta f > 0$ en el caso de mínimo estricto independientemente del signo del suficientemente pequeño $\Delta x \neq 0$.

Teorema 2 (condiciones necesarias del extremo). *Supongamos que x_0 es un punto de extremo de la función f, definida en cierto entorno del punto x_0. Entonces o bien la derivada $f'(x_0)$ no existe, o bien $f'(x_0) = 0$.*

En efecto, si x_0 es un punto de extremo para la función f, entonces se encuentra un entorno $U(x_0, \delta)$, tal que el valor de la función f en el punto x_0 será el mayor o el menor en este entorno. Por esto, si en el punto x_0 existe la derivada, entonces ella, por el teorema de Fermat (véase el p. 11.1), es igual a cero.

Señalemos que la condición $f'(x) = 0$ no es, para las funciones diferenciables cuando $x = x_0$, una condición suficiente para la presencia de extremo, como esto muestra el ejemplo de la función $f(x) = x^3$, la que para $x = 0$ tiene derivada igual a cero, pero para la cual $x = 0$ no es un punto de extremo.

Ejercicio 1 (condiciones suficientes de extremo). Sea la función f definida sobre el intervalo (a, b) y continua en el punto $x_0 \in (a, b)$. Demuéstrese que si f crece (estrictamente) sobre el intervalo (a, x_0) y decrece (estrictamente) sobre (x_0, b), entonces x_0 es un punto de máximo (estricto); si la función f decrece (estrictamente) sobre (a, x_0) y crece (estrictamente) sobre (x_0, b), entonces x_0 es un punto de mínimo (estricto).

Teorema 3 (condiciones suficientes de extremo estricto). *Sea la función f diferenciable en cierto entorno del punto x_0, excepto, puede ser, en el propio punto $x_0 \in (a, b)$, en el cual ella es, sin embargo, continua. Si la derivada $f'(x)$ cambia de signo cuando pasa por x_0 (esto significa, que existe un número $\delta > 0$ tal que los valores de la derivada f' tienen un mismo signo en todo $(x_0 - \delta, x_0)$ y signo contrario para todos los $x \in (x_0, x_0 + \delta)$), entonces x_0 es un punto de extremo estricto.*

En este caso, si para $x_0 - \delta < x < x_0$ se cumple la desigualdad $f'(x) > 0$ y para $x_0 + \delta > x > x_0$ la desigualdad $f'(x) < 0$, entonces x_0 es un punto de máximo estricto; si para $x_0 - \delta < x < x_0$ se cumple la desigualdad $f'(x) < 0$ y para $x_0 + \delta > x > x_0$ la desigualdad $f'(x) > 0$, entonces x_0 es un punto de mínimo estricto (fig. 54).

DEMOSTRACIÓN. Analicemos el caso $f'(x) > 0$ para $x < x_0$ y $f'(x) < 0$ para $x > x_0$ donde x pertenece al entorno del punto x_0, señalado en las condiciones del teorema. Por el teorema de Lagrange (véase el p. 11.2)

$$\delta f = f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0),$$

DONDE ξ se encuentra en el intervalo con extremos x_0 y x.

Si $x < x_0$, entonces $x - x_0 < 0$ y $f'(\xi > 0$, ya que $x < \xi < x_0$. Si $x > x_0$, entonces $x - x_0 < 0$ y $f'\xi) > 0$, ya que en este caso $x_0 < \xi < x$. De esta forma,

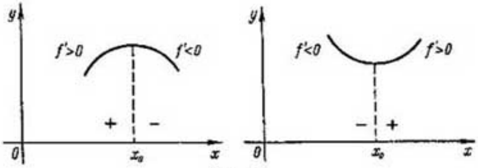


FIG. 54

siempre $\Delta f < 0$, es decir, el punto x_0 es un punto de máximo estricto. Análogamente se analiza el segundo caso. □

Del p. 14.1 se deduce que si la función tiene en todos los puntos de cierto entorno reducido de un punto dado x_0 derivada de un mismo signo, y en el propio punto x_0 la derivada o bien es igual a cero o bien no existe, sin embargo, la función es continua, es decir, si la derivada de una función continua "no cambia de signo" cuando pasa por el punto x_0, entonces este punto a ciencia cierta *no es un punto de extremo* de la función analizada (más aún, la función en el entorno señalado crece o decrece estrictamente, en dependencia de que la derivada en los puntos $x \neq x_0$ sea positiva o negativa).

Uniendo esta afirmación con el teorema 3, demostrado anteriormente, obtenemos el resultado siguiente.

Si la función $f(x)$, definida en cierto entorno del punto x_0, continua cuando $x = x_0$, tiene en todos los puntos del entorno analizado, excepto, puede ser, del punto x_0, derivada, y esta derivada por cada lado de x_0 conserva signo constante (por lo tanto, se puede hablar sobre la conservación o del cambio del signo de la derivada cuando pasa por x_0), entonces, para que la función alcance su extremo cuando $x = x_0$, es necesario y suficiente que la derivada cambie de signo cuando pasa por el punto x_0.

Se debe, sin embargo, prestar atención al hecho de que el caso aquí analizado, es decir, el caso cuando se puede hablar en el sentido señalado sobre el cambio de signo de la derivada cuando pasa por el punto x_0, no agotan las situaciones posibles (incluso para las funciones diferenciables en todos los puntos): puede suceder, que en entornos unilaterales, tan pequeños como se quiera, del punto x_0 la derivada de la función cambie de signo. En este caso, hay que utilizar otros métodos investigando las funciones para el extremo cuando $x = x_0$.

Por esto, en la clase de todas las funciones diferenciables, el teorema 3 da sólo *las condiciones suficientes* de extremo estricto.

Problema 9. Constrúyase un ejemplo de función, que sea diferenciable sobre un intervalo, alcanza en cierto punto x_0 un extremo estricto, y su derivada en cualquier entorno del punto x_0 (tanto por la izquierda, como por la derecha de ella) toma valores positivos y negativos (de esta forma, demuéstrese, que la condición de cambio de signo de la derivada en el punto dado es suficiente para la presencia de un extremo estricto, pero al mismo tiempo no es necesaria).

Introduzcamos otro concepto que utilizaremos en el futuro.

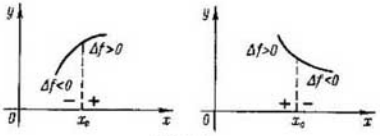


FIG. 55

Definición 2. *Sea la función f definida en cierto entorno del punto x_0. Llamaremos a x_0 punto de crecimiento (decrecimiento) del la función f, si existe un $\delta > 0$, tal que cuando $x_0 - \delta < x < x_0$ se cumple la desigualdad $f(x) < f(x_0)$ (respectivamente $f(x) > f(x_0)$, y cuando $x_0 < x < x_0 + \delta$ la desigualdad $f(x) > f(x_0)$ (respectivamente $f(x) < f(x_0)$).*

De esta forma, los puntos de crecimiento y decrecimiento de la función f se caracterizan por que durante el paso por ellos el incremento Δf cambia de signo, más preciso, de "−" a "+" en el punto de crecimiento y de "+" a "−" en el punto de decrecimiento (fig. 55).

No se debe pensar que si la función está definida sobre el intervalo, entonces cualquier punto de este intervalo es o bien un punto de extremo de la función, o bien un punto de crecimiento, o bien un punto de decrecimiento: pueden existir puntos, que no pertenezcan a ninguno de los tipos señalados. Por ejemplo, el punto $x = 0$ para la función

$$y = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{cuando} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{cuando} \quad x = 0 \end{cases} \tag{14.2}$$

no es ni punto de extremo, ni punto de crecimiento, ni punto de decrecimiento.

La derivada de la función (14.2) es igual (véase el ejemplo 8 en el p. 9.7)

$$y' = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & \text{cuando} \quad x \neq 0, & (14.3') \\ 0 & \text{cuando} \quad x = 0. & (14.3'') \end{cases}$$

De esta forma, la función (14.2) es diferenciable sobre todo el eje numérico. Cuando $x = 0$ su derivada tiene discontinuidad de segundo género, ya que

$$\lim_{x \to 0} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0 \tag{14.4}$$

y el segundo sumando en el segundo miembro de la igualdad (14.3′), es decir, $-\cos \dfrac{1}{x}$ no tiene límite cuando $x \to 0$. Además de esto, este sumando, variando en cualquier entorno unilateral del punto $x = 0$ desde -1 hasta $+1$, cambia de signo infinitas veces. De aquí, a base de las fórmulas (14.3′) y (14.3″) y (14.4) se deduce que la derivada de la función (14.2) en cualquier entorno unilateral del cero, tan pe-

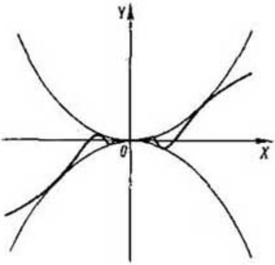


FIG. 56

queño como se quiera, también cambia de signo. El carácter general del comportamiento de la función (14.2) está representado en la fig. 56.

Enunciemos ahora las condiciones suficientes para la presencia de extremos estrictos, así como también de los puntos de crecimiento y decrecimiento fundamentadas en la utilización de las derivadas de órdenes superiores.

Teorema 4. *Supongamos que en el punto x_0 para la función f existen las derivadas hasta de orden $n \geqslant 1$ inclusive, además*

$$f^{(i)}(x_0) = 0 \quad para \quad i = 1, \ldots, \quad n-1, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0. \tag{14.5}$$

Entonces, si $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$, es decir, n es un número par, entonces la función f tiene en el punto x_0 un extremo estricto, más preciso, un maximo cuando $f^{(2k)}(x_0) < 0$ y un mínimo cuando $f^{(2k)}(x_0) > 0$. Si $n = 2k + 1$, $k = 0, 1, \ldots$, es decir, n es un número impar, entonces la función f no tiene en el punto x_0 extremos; en este caso, x_0 es un punto de crecimiento cuando $f^{(2k+1)}(x_0) > 0$ y de decrecimiento cuando $f^{(2k+1)}(x_0) < 0$.

Hagámosle a la demostración del teorema una pequeña observación.

Si $\beta(x) = o(\alpha(x))$ cuando $x \to x_0$, entonces existe un $\delta > 0$, tal que cuando $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, es válida la desigualdad

$$|\beta(x)| \leqslant \frac{1}{2} |\alpha(x)|. \tag{14.6}$$

En realidad,

$$\beta(x) = \varepsilon(x)\alpha(x), \tag{14.7}$$

donde $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ y, por lo tanto, existe un δ tal que cuando $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, se cumple la desigualdad

$$|\varepsilon(x)| < \frac{1}{2}. \tag{14.8}$$

De (14.7) y (14.8) se deduce (14.6).

DEMOSTRACIÓN. Ante todo observemos que ya que f tiene en el punto x_0 derivada de orden $n \geqslant 1$, entonces (según la definición de derivada) la derivada de orden $n - 1$ de la función analizada, está definida en cierto entorno del punto x_0. Por esto, la propia función f también está definida, en todo caso, en el mismo entorno del punto x_0.

Escribamos la fórmula de Taylor de orden n para la función f en un entorno del punto x_0. En virtud de (13.5') y la condición (14.5) tendremos

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + \alpha(x), \tag{14.9}$$

donde $\Delta x^n \overset{\text{def}}{=} (\Delta x)^n$,

$$\alpha(x) = o(\Delta x^n), \quad \Delta x \to 0,$$

y, por lo tanto (véase el p. 8.2),

$$\alpha(x) = o\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n\right), \quad \Delta x \to 0.$$

Por esto, por la observación hecha, existe un $\delta > 0$, tal que cuando $|\Delta x| < \delta$, $\Delta x \neq 0$,

$$|\alpha(x)| < \frac{1}{2}\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n\right|.$$

De aquí se deduce que cuando $|\Delta x| < \delta$, $\Delta x \neq 0$, el signo del segundo miembro de la igualdad (14.9), y por lo tanto, el signo de Δf coincide con el signo del primer sumando del segundo miembro.

Si $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$, entonces en (14.9) Δx se eleva a una potencia par, por esto el signo de Δf no depende del signo de $\Delta x \neq 0$, y por lo tanto, x_0 es un punto de extremo estricto, además un punto de máximo estricto cuando $f^{(2k)}(x_0) < 0$ (en este caso $\Delta f < 0$) y mínimo estricto cuando $f^{(2k)}(x_0) > 0$ (en este caso $\Delta f > 0$).

Si $n = 2k + 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, entonces Δx se eleva a una potencia impar, por esto, el signo de Δf cambia junto con la variación del signo de Δx, y, por lo tanto, x_0 no es un punto de extremo. Si Δx cambia de signo de "$-$" a "$+$", entonces caundo $f^{(2k+1)}(x_0) > 0$ el incremento Δf cambia el signo de "$-$" a "$+$", y, por lo tanto, x_0 es un punto de crecimiento de la función f, y cuando $f^{(2k+1)}(x_0) < 0$ el incremento Δf cambia de signo de "$+$" a "$-$", y, por lo tanto, x_0 es un punto de decrecimiento de la función f. □

Del teorema demostrado se derivan, en particular, cuando $n = 1$ y $n = 2$ dos corolarios.

1. *Si $f'(x) > 0$, entonces x_0 es un punto de crecimiento de la función; si $f'(x) < 0$, entonces x_0 es un punto de decrecimiento de la función.*

2. *Si $f'(x_0) = 0$, y $f''(x_0) \neq 0$, entonces cuando $f''(x_0) < 0$, x_0 es un punto de mínimo estricto, y cuando $f''(x_0) < 0$, es un punto de máximo estricto de la función* (fig. 57).

El corolario 1 sigue siendo válido para las derivadas infinitas: si $f'(x_0) = +\infty$ (respectivamente $f'(x_0) = -\infty$), entonces x_0 es un punto de crecimiento (respecti-

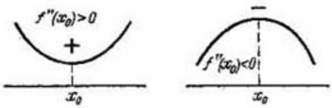


FIG. 57

vamente de decrecimiento) de la función. En realidad, si por ejemplo, $f'(x_0) = +\infty$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, y, en particular, para $\varepsilon = 1$ existe un $\delta > 0$, tal que para todos los Δx, que satisfacen la condición $|\Delta x| < \delta$, tiene lugar la desigualdad $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 1$. Por esto cuando $0 < \Delta x < \delta$ tenemos $\Delta y > \Delta x > 0$ y cuando $-\delta < \Delta x < 0$, análogamente $\Delta y < \Delta x < 0$, es decir, x_0 es un punto de crecimiento. De forma semejante se analiza el caso $f'(x_0) = -\infty$.

Señalemos que del primer corolario otra vez se deriva el teorema de Fermat (véase el teorema 1 del p. 11.1). En efecto, si la función $f(x)$ está definida en cierto entorno del punto x_0 y tiene en este punto un extremo, entonces la derivada en x_0 no puede ser ni positiva, ni negativa, ya que en caso contrario la función o bien crecería, o bien decrecería en este punto. Por lo tanto, la derivada en x_0, o no existe, o si existe, necesariamente es nula.

Observemos también que del teorema 4 se deduce directamente el criterio siguiente de presencia de puntos extremos.

Supongamos que para la función f en el punto x_0 existen las derivadas hasta de orden $n \geqslant 1$, inclusive, además

$$f^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad n - 1, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Entonces, para que cuando $x = x_0$ la función alcance un extremo, es necesario y suficiente que n sea un número par.

Todas las reglas obtenidas son válidas sólo en el caso cuando la función f está definida en cierto entorno del punto x_0. Sin embargo, sobre los extremos de la función se puede hablar no sólo en este caso: sea f una función definida sobre cierto conjunto númerico E; llamaremos a $x_0 \in E$ *punto de máximo* (*mínimo*) *), si existe un $\delta > 0$, tal que si $x \in E$ y $|x - x_0| < \delta$, entonces $f(x) \leqslant f(x_0)$ (respectivamente $f(x) \geqslant f(x_0)$). De una forma semejante se definen en este caso los conceptos de máximo estricto y de mínimo estricto, se debe solamente cambiar los signos de las desigualdades no estrictas por los de las desigualdades estrictas y exigir además que $x \neq x_0$.

Por ejemplo, si la función f está definida sobre el intervalo semiabierto $[a, b)$, entonces el punto a en el sentido señalado puede ser extremal. Señalemos, sin embargo, que la derivada (por la derecha) en este punto, en general, no está obligada a convertirse en cero. Así, la función $y = x$, analizada sobre el segmento $[0, 1]$, tiene mínimo estricto cuando $x = 0$ y maximo estricto cuando $x = 1$, sin embargo, en estos puntos, como sobre todo el segmento $[0, 1]$, $y' = 1$.

---

*) Sería correcto agregar local, pero no vamos a complicar la terminología.

La aclaración de la circunstancia de si la función tiene o no extremos en los extremos del intervalo, perteneciente a su dominio (a estos extremos los llamaremos extremales), exige una investigación especial.

Ejercicio 2. Sea la función f definida sobre el segmento $[a, b]$ y tiene derivadas cuando $x = a$ y $x = b$. Demuéstrese que si $f'_+(a) > 0$ (respectivamente $f'_-(b) < 0$, entonces el punto $x = a$ (respectivamente $x = b$) es un punto de mínimo estricto, y si $f'_+(a) < 0$ (respectivamente $f'(b) > 0$), entonces $x = a$ (respectivamente $x = b$) es un punto de máximo estricto.

Los teoremas establecidos por nosotros descansan en la base de un método, que permite resolver uniformemente infinidad de problemas matemáticos, físicos y técnicos, en los cuales se buscan los valores extremos de alguna magnitud.

Supongamos, por ejemplo, que se exige determinar el valor máximo de la función f sobre el segmento $[a, b]$. Puede suceder, que esto sea posible realizar de una forma suficientemente sencilla por algún método, partiendo de un tipo concreto de función. Si no se ve cómo se puede hacer esto, entonces se deben hallar todos sus puntos críticos, que se encuentren sobre $[a, b]$ (el punto, en el cual la función está definida, y su derivada o bien es nula, o bien no existe, usualmente se llama *punto crítico* de esta función). Después, de estos valores de x es necesario, partiendo de lo dicho, separar aquellos en los cuales es posible un máximo (se puede a ciencia cierta desechar los puntos que satisfacen las condiciones suficientes para la presencia de un mínimo). Después de esto, es suficiente comparar entre sí, por la magnitud, los valores de la función en los puntos obtenidos y los números $f(a)$ y $f(b)$; el mayor de estos números será el valor máximo de la función sobre el segmento $[a, b]$. Este problema puede resolverse en principio, a ciencia cierta, si el conjunto de los puntos críticos es finito.

Si la función está definida sobre el intervalo semiabierto (finito o infinito), por ejemplo, sobre el intervalo semiabierto de la forma $[a, b)$, el problema sobre la determinación de su valor máximo sobre este intervalo semiabierto exige investigaciones auxiliares, hallando el conjunto de los puntos señalados anteriormente, es necesario estudiar el comportamiento de la función cuando $x \to b - 0$. De forma análoga se resuelven los problemas de determinación de los valores mínimos de la función.

Sin embargo, no se debe pensar, que el método expuesto permite hallar los puntos de extremo de la función dada con el grado de exactitud necesario. Esto no es así, ya que si utilizamos este método, es necesario ante todo, saber resolver la ecuación $f'(x) = 0$ con el grado de exactitud dado, lo que resulta otro problema matemático. Como éste se resuelve con ayuda del cálculo diferencial, en aquellos casos cuando la solución exacta de la ecuación no se da en una forma explícita, se mostrará más adelante (véase el tomo 2, § 60).

Ejemplo. Dos puntos se mueven con velocidades constantes v_1 y v_2 por dos rectas, que forman un ángulo recto, en el sentido del vértice de este ángulo, del cual al inicio del movimiento el primer punto se encontraba a una distancia a y el segundo a una distancia b. ¿En qué momento después del inicio del movimiento la distancia entre los puntos será mínima?

Sea $\rho = \rho(t)$ la distancia entre los puntos en el momento t después del inicio del movimiento, que consideraremos comenzado cuando $t = 0$. Entonces

$$\rho^2(t) = (a - v_1 t)^2 + (b - v_2 t)^2.$$

La función $\rho(t)$, evidentemente, alcanza el mínimo para el mismo valor t, para el cual alcanza el mínimo la función $y = \rho^2(t)$.

Físicamente es evidente que la distancia $\rho(t)$ debe alcanzar un mínimo (los cuerpos comienzan a acercarse) y a ciencia cierta no hay máximo, ya que $\rho(t) \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$. En virtud de la condición necesaria de extremo esto puede ser sólo en un punto en el cual $y' = 0$ y ya que $y' = -2v_1(a - v_1 t) - 2v_2(b - v_2 t)$ entonces de la condición $y' = 0$ obtenemos una solución única

$$t_0 = \frac{av_1 + bv_2}{v_1^2 + v_2^2},$$

que da respuesta a la pregunta planteada.

14.3. CONVEXIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

Sea la función f definida sobre el intervalo (a, b) y sea $a < x_1 < x_2 < b$. Tracemos una recta por los puntos $A(x_1, f(x_1))$ y $B(x_2, f(x_2))$, que están sobre la gráfica de la función f. Su ecuación será

$$y = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Denotemos el segundo miembro de esta ecuación por $l(x)$, entonces abreviadamente se escribe de la forma

$$y = l(x).$$

Es evidente que $l(x_1) = f(x_1)$, $l(x_2) = f(x_2)$.

Definición 3. *La función f se llama convexa hacia las y positivas (convexa hacia las y negativas) sobre el intervalo (a, b) si cualesquiera que sean los puntos x_1 y x_2, $a < x_1 < x_2 < b$, para cualquier punto x_0 del intervalo (x_1, x_2), se cumple la desigualdad*

$$l(x_0) \leqslant f(x_0) \tag{14.10}$$

(respectivamente

$$l(x_0) \geqslant f(x_0)). \tag{14.11}$$

Geométricamente esto significa que cualquier punto de la cuerda AB (es decir, del segmento de la recta $y = l(x)$ con extremos en los puntos A y B) está no por encima (no por abajo) del punto de la gráfica de la función f correspondiente al mismo valor del argumento (fig. 58).

Definición 4. *Si en lugar de* (14.10) *y* (14.11) *se cumplen las desigualdades estrictas $l(x_0) < f(x_0)$ y respectivamente $l(x_0) > f(x_0)$ para cualesquiera x_0, x_1 y x_2 tales que $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$, entonces la función f se llama estrictamente convexa hacia las y positivas (estrictamente convexa hacia las y negativas) sobre el intervalo* (a, b).

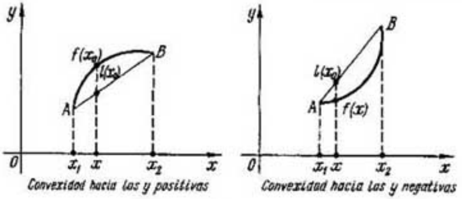


FIG. 58

En este caso cualquier punto de la cuerda AB, excluyendo sus extremos se encuentra por abajo (por encima) del punto correspondiente de la gráfica de la función.

Definición 5. *Cualquier intervalo, sobre el cual la función es (estrictamente) convexa hacia las y positivas, respectivamente hacia las y negativas, se llama intervalo de convexidad (estricta) hacia las y positivas, respectivamente hacia las y negativas, de esta función.*

Teorema 5 (condición suficiente de la convexidad estricta). *Sea la función f dos veces diferenciable sobre el intervalo (a, b). Entonces, si $f'' < 0$ sobre (a, b), la función f es estrictamente convexa hacia las y positivas y si $f'' > 0$ sobre (a, b), entonces la función f es estrictamente convexa hacia las y negativas sobre este intervalo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $a < x_1 < x < x_2 < b$. Entonces

$$l(x) - f(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} - f(x)\,\frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{[f(x_2) - f(x)](x - x_1) - [f(x) - f(x_1)](x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Aplicando el teorema de Lagrange (véase el p. 11.2) obtenemos

$$l(x) - f(x) = \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{[f'(\eta) - f'(\xi)](x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1},$$

donde $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$.

Apliquemos de nuevo el teorema de Lagrange:

$$l(x) - f(x) = \frac{f''(\zeta)(x_2 - x)(x - x_1)(\eta - \xi)}{x_2 - x_1}, \quad \xi < \zeta < \eta.$$

De aquí se ve que si $f'' < 0$ sobre (a, b), por consiguiente, en particular, $f''(\zeta) < 0$, entonces $l(x) < f(x)$, es decir, la función f es convexa estrictamente

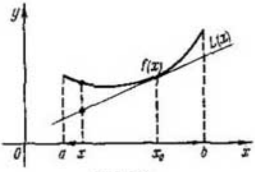


FIG. 59

hacia las y positivas; si $f'' > 0$ sobre (a, b), entonces $l(x) > f(x)$, es decir, la función f es convexa hacia las y negativas. □

La condición del signo constante de la segunda derivada, siendo suficiente para la convexidad estricta (hacia las y positivas o negativas) no es al mismo tiempo necesaria. Así, la función $y = x^4$ es estrictamente convexa hacia las y negativas sobre toda la recta numérica, no obstante, su segunda derivada $y'' = 12x^2$ se anula para $x = 0$.

Señalemos que si la función f es (estrictamente) convexa hacia las y positivas en el intervalo (a, b), entonces la función f es (estrictamente) convexa hacia las y negativas sobre este intervalo y viceversa, y por cuanto $\frac{d^2}{dx^2}[-f(x)] = -\frac{d^2f(x)}{dx^2}$, entonces, por ejemplo, la condición suficiente de convexidad estricta hacia las y positivas dada en el teorema 5 se deduce de la condición suficiente de convexidad estricta de la función hacia las y negativas contenida en este mismo teorema.

Ejercicios. 3. Demuéstrese que para la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{cuando } x \neq 0, \\ 0 & \text{cuando } x = 0 \end{cases}$$

el punto $x = 0$ no pertenece a ningún intervalo de convexidad hacia las y positivas o negativas y no es extremo de ninguno de estos intervalos.

4. Demuéstrese que la función $y = x^4$ es convexa estrictamente hacia las y negativas sobre todo el eje numérico.

Vemos que la convexidad hacia las y positivas o negativas de una función f depende del signo de la segunda derivada. Resulta que la ubicación de la gráfica de una función dos veces diferenciable con respecto a la tangente, también, en determinado sentido, está relacionada con el signo de la segunda derivada.

Teorema 6. *Supongamos que la función f, en todo el intervalo (a, b), tiene segunda derivada positiva (negativa): $f''(x) > 0$ (respectivamente, $f''(x) < 0$), $x \in (a, b)$* *). *Entonces cualquiera que sea el punto $x_0 \in (a, b)$, todos los puntos*

---

*) De aquí se deduce que la función f es estrictamente convexa hacia las y negativas (positivas) sobre (a, b).

$(x, f(x))$, $x \in (a, b)$, de la gráfica de la función f están por arriba (respectivamente por abajo) de la tangente trazada a ella en el punto $(x_0, f(x_0))$ (naturalmente, el propio punto, que se encuentra sobre la tangente indicada, es una excepción [*]) (fig. 59).

En efecto, la ecuación de la tangente a la gráfica de la función f en el punto $(x_0, f(x_0))$ será

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Denotemos el segundo miembro de esta ecuación por $L(x)$. Entonces, aplicando el teorema de Lagrange a la diferencia $f(x) - f(x_0)$ obtendremos

$$f(x) - L(x) = [f(x) - f(x_0)] - f'(x_0)(x - x_0) =$$
$$= f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = [f'(\xi) - f'(x_0)](x - x_0),$$

donde $a < x_0 < b$, $a < x < b$ y el punto ξ está entre x y x_0.

Aplicando otra vez el teorema de Lagrange, pero ya al incremento de la derivada, obtendremos

$$f(x) - L(x) = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0)$$

donde el punto η está entre ξ y x_0.

Cuando $x \neq x_0$ tenemos $(\xi - x_0)(x - x_0) > 0$ ya que el punto ξ siempre está entre x y x_0 y, por consiguiente, siempre está por el mismo lado de x_0 que el punto x.

Por consecuencia, el signo de la diferencia $f(x) - L(x)$ coincide, cuando $x \neq x_0$, con el signo de $f''(\eta)$. Por esto, si sobre el intervalo (a, b) la segunda derivada es positiva (por consiguiente es positiva en el punto η), entonces para todas las $x \in (a, b)$ menos para el punto $x = x_0$ se cumple la desigualdad $f(x) - L(x) < 0$; si sobre el intervalo (a, b) la segunda derivada es negativa: entonces para los puntos indicados es válida la desigualdad $f(x) - L(x) < 0$. □

Aclaremos este teorema partiendo de consideraciones algo diferentes. Si la función f en todos los puntos sobre cierto intervalo tiene segunda derivada, entonces en el entorno de cualquier punto x_0 de este intervalo se puede seleccionar la parte principal de la función f en forma de polinomio de Taylor de segundo orden

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2, \quad x \to x_0$$

y por consiguiente la gráfica de la función f'' "en el entorno del punto x_0 se comporta casi como una parábola"

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2,$$

la cual, cuando su coeficiente de x^2, es decir $\dfrac{f''(x_0)}{2}$ es positivo, es convexa hacia las

---

[*] Si la función f además está definida y tiene derivada unilateral en el extremo a ó b del intervalo, entonces la propiedad indicada, como se ve en la demostración que se dará más adelante, se cumple también para la tangente en el punto $(a, f(a))$ (respectivamente, en el punto $(b, f(b))$).

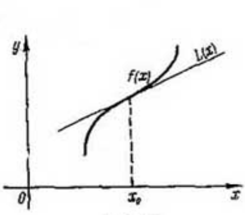


FIG. 60

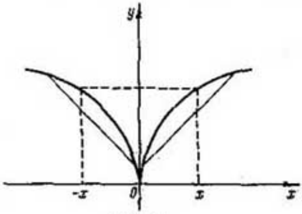


FIG. 61

y negativas y está por arriba de cualquier tangente, en particular, por arriba de la tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ (esta recta es también la tangente a la gráfica de la función f), y cuando el coeficiente indicado es negativo, es convexa hacia las y positivas y está por abajo de cualquiera de sus tangentes.

De nuevo vemos qué conveniente es, en el estudio de una función en el entorno de un punto dado, separar con ayuda de la fórmula de Taylor la parte principal de la función en este punto. En el futuro, al resolver diversos problemas del análisis, de nuevo, repetidas veces tendremos la oportunidad de convencernos de las grandes posibilidades y de lo fructífero del método de la separación de la parte principal.

Definición 6. *Supongamos que la función f es diferenciable para $x = x_0$ y supongamos que $y = L(x)$ es la ecuación de la tangente a la gráfica de la función f en el punto $(x_0, f(x_0))$. Si la diferencia $f(x) - L(x)$ cambia de signo al pasar por el punto x_0, entonces x_0 se llama punto de inflexión de la función.*

Más detallada y exactamente, esto significa que existe un δ-entorno $U(x_0, \delta)$ del punto x_0 tal que sobre cada uno de los intervalos $(x_0 - \delta, x_0)$ y $(x_0, x_0 + \delta)$ la diferencia $f(x) - L(x)$ conserva el signo constante contrario a su signo sobre el otro intervalo.

Geométricamente esto significa que la gráfica de la función f pasa en el punto $(x_0, f(x_0))$ de un lado (de la recta inclinada) de la tangente en este punto al otro lado (véase la fig. 60).

Si x_0 es un punto de inflexión de la función, entonces el punto $(x_0, f(x_0))$ se llama *punto de inflexión de la gráfica de la función f*.

Ejemplos. 1. $f(x) = x^3$, $f''(x) = 6x$. Evidentemente en este caso $f''(x) < 0$ para $x < 0$ y $f''(x) > 0$ para $x > 0$. Por esto, sobre el intervalo infinito $(-\infty, 0)$, la función $f(x) = x^3$ es convexa estrictamente hacia las y positivas; sobre el intervalo $(0, +\infty)$ es convexa estrictamente hacia las y negativas y el punto $x = 0$ es al mismo tiempo extremo de intervalos de convexidad hacia las y positivas y negativas. Este punto es también un punto de inflexión por cuanto la ecuación de la tangente en él será $y = 0$ y para $x < 0$ tiene lugar la desigualdad $f(x) < 0$ y para $x > 0$ al contrario $f(x) > 0$.

2. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; la gráfica de esta función (fig. 61) se llama *parábola semicúbica*. Aquí $f''(x) = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$, por lo que para todos los $x \neq 0$ es válida la desigual-

dad $f''(x) < 0$. Por consiguiente, los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$ son intervalos de convexidad estricta hacia las y positivas. Conjuntamente con esto, para cualquier $x \neq 0$

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} = f(x) > 0 = f(0),$$

por lo que el punto $x = 0$ no pertenece a ningún intervalo de convexidad hacia las y positivas (esta función no tiene intervalo de convexidad hacia las y negativas).

La gráfica de la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ en el punto $(0, 0)$ tiene tangente vertical y sus ramas para las cuales $x > 0$ y $x < 0$ están por lados diferentes de ella. No obstante, $x = 0$ no es un punto de inflexión, por cuanto en virtud de la verticalidad de la tangente en este punto su ecuación no se puede escribir en la forma $y = L(x)$ y, por consiguiente, $x = 0$ no satisface las condiciones de la definición 6.

Dicho en sentido figurado, la gráfica de la parábola semicúbica no hace inflexión al pasar por la tangente en el punto $(0, 0)$, sino que "regresa hacia atrás", por lo que los puntos de este tipo se llaman *puntos de retroceso*.

Teorema 7 (condición necesaria de la existencia de un punto de inflexión). *Supongamos que la función f tiene para $x = x_0$ segunda derivada continua. Entonces, si el punto x_0 es un punto de inflexión de la función f, $f''(x_0) = 0$.*

En efecto, si tuviera lugar la desigualdad $f''(x_0) > 0$ (respectivamente, $f''(x_0) < 0$), entonces, por la continuidad de la segunda derivada para $x = x_0$, se encontraría un entorno $U(x_0)$ de este punto en el cual se cumpliría la condición $f''(x) > 0$ (respectivamente, $f''(x) < 0$) y, por consiguiente, por el teorema 6, para todos los $x \in U(x)$, $x \neq x_0$, la gráfica de la función f estaría por arriba (por abajo) de la tangente trazada a ella en el punto x_0, lo cual contradiría que x_0 es un punto de inflexión. $\square$

OBSERVACIÓN. De forma semejante a como todos los puntos de extremo de una función pertenecen al conjunto de los puntos en los cuales la derivada o bien es igual a cero o bien no existe, así mismo todos los puntos de inflexión de una función (dos veces continuamente diferenciable, menos podría ser para un número finito de valores de la variable independiente) entran en el conjunto de los puntos en los cuales la segunda derivada o bien es igual a cero, o bien no existe.

Teorema 8 (primera condición suficiente de la existencia de un punto de inflexión). *Si una función f diferenciable en el punto x_0 es dos veces diferenciable en algún entorno reducido $\mathring{U}(x_0, \delta)$ de este punto y la segunda derivada f'' de la función f cambia de signo al pasar el argumento por x_0 (es decir, o bien $f''(x) < 0$ cuando $x_0 - \delta < x < x_0$ y $f''(x) > 0$ cuando $x_0 < x < x_0 + \delta$, o bien $f''(x) > 0$ cuando $x_0 - \delta < x < x_0$ y $f''(x) < 0$ cuando $x_0 < x < x_0 + \delta$), entonces x_0 es un punto de inflexión de la función f.*

En realidad, representemos, como se hizo anteriormente, la ecuación de la tangente $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ en la forma $y = L(x)$. En la demostración del teorema 6 fue mostrado que

$$f(x) - L(x) = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0),$$

donde los puntos x y ξ están por un mismo lado de x_0, por lo que cuando $x \neq x_0$ tenemos $(\xi - x_0)(x - x_0) > 0$ y, por consiguiente,

$$\operatorname{sign}[f(x) - L(x)] = \operatorname{sign} f''(\eta).$$

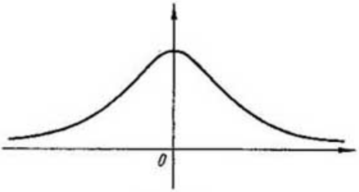


FIG. 62

El punto η está entre ξ y x_0, es decir, por el mismo lado de x_0 que el punto x. De aquí se deriva que si f'' cambia de signo al pasar el punto x_0, entonces la diferencia $f(x) - L(x)$ cambia de signo y, por consiguiente, es un punto de inflexión. □

Teorema 9 (segunda condición suficiente para la presencia de un punto de inflexión). *Sea $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$, entonces x_0 es un punto de inflexión.*

DEMOSTRACIÓN. Por la fórmula de Taylor, en virtud de la condición $f''(x_0) = 0$ tenemos

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3),$$

y por cuanto $L(x) \equiv f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, entonces

$$f(x) - L(x) = \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3).$$

De aquí se deduce (véase la observación sobre los infinitésimos ante la demostración del teorema 4 de este párrafo), que el signo de la diferencia $f(x) - L(x)$ cambia cuando cambia el signo de $x - x_0$. Esto significa que x_0 es un punto de inflexión. □

Ejemplo. Analicemos la función $f(x) = e^{-x^2}$ y hallemos sus puntos de inflexión. Tenemos

$$f'(x) = -2xe^{-x^2},$$

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} = 4\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

De aquí se ve que la segunda derivada de la función f se anula en los puntos $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ y al pasar por ellos cambia su signo. Por consiguiente, por el teorema 8, estos puntos son puntos de inflexión de la función f (fig. 62).

Problema 10. Demuéstrese que si la función f es continua sobre el intervalo (a, b) y si para cualesquiera puntos x_1 y x_2, $a < x_1 < x_2 < b$, se cumple la desigualdad

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leqslant f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

entonces (a, b) es un intervalo de convexidad hacia las y positivas para la función f.

17—6179

Problema 11. Demuéstrese la afirmación que sigue a continuación. Para que una función diferenciable sea convexa hacia las y positivas (negativas) sobre cierto intervalo, es necesario y suficiente que su derivada decrezca (crezca) sobre él. Para que una función diferenciable sea estrictamente convexa hacia las y positivas (negativas) sobre cierto intervalo es suficiente que su derivada decrezca (crezca) estrictamente sobre él.

14.4. ASÍNTOTAS

Definición 7. *Supongamos que la función $f(x)$ está definida para todos los $x > a$ (respectivamente, para todos los $x < a$). Si existen los números k y l tales que $f(x) - kx - l = o(1)$ cuando $x \to +\infty$ (respectivamente, cuando $x \to -\infty$), entonces la recta*

$$y = kx + l \tag{14.12}$$

se llama asíntota de la gráfica de la función $f(x)$ cuando $x \to +\infty$ (respectivamente, cuando $x \to -\infty$).

La existencia de una asíntota de la gráfica de una función significa que cuando $x \to +\infty$ (ó $x \to -\infty$) la función se comporta "casi como una función lineal", es decir, se diferencia de una función lineal en un infinitésimo.

Hallemos, por ejemplo, la asíntota de la gráfica de la función $y = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$. Dividiendo el numerador por el denominador según la regla de la división de polinomios obtendremos $y = x - 4 + \dfrac{2}{x + 1}$. Ya que $\dfrac{2}{x + 1} = o(1)$ cuando $x \to \pm\infty$, entonces la recta $y = x - 4$ es la asíntota de la gráfica de la función dada tanto cuando $x \to +\infty$ como cuando $x \to -\infty$.

Analicemos el sentido geométrico de la asíntota. Sea $M = (x, f(x))$ un punto de la gráfica de la función f, M_0 es la proyección de este punto sobre el eje Ox, AB es la asíntota (14.12); θ, el ángulo entre la asíntota y el sentido positivo del eje Ox, $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$; MP, la perpendicular bajada desde el punto M sobre la asíntota AB; Q, el punto de intersección de la recta MM_0 con la asíntota AB (fig. 63). Entonces

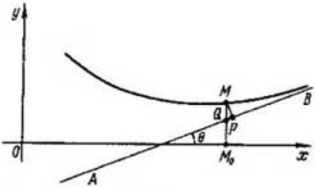


FIG. 63

$MM_0 = f(x)$, $QM_0 = kx + l$, $MQ = MM_0 - QM_0 = f(x) - (kx + l)$, $MP = MQ \cos\theta$. De esta forma, MP se diferencia de MQ sólo en el factor $\cos\theta$ diferente de cero, por lo que las condiciones $MQ \to 0$ y $MP \to 0$ cuando $x \to +\infty$ (respectivamente, cuando $x \to -\infty$) son equivalentes, es decir, si $\lim\limits_{x\to+\infty} MQ = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} MP = 0$ y viceversa.

De aquí se deduce que la asíntota puede ser definida como la recta, la distancia hasta la cual desde la gráfica de la función, es decir, el segmento MP, tiede a cero cuando el punto $M = (x, f(x))$ "tiende al infinito permaneciendo en la gráfica" (cundo $x \to +\infty$ ó $x \to -\infty$, respectivamente).

Indiquemos ahora el método general de la búsquede de la asíntota (14.12), es decir, el método de definición de los coeficintes k y l en la ecuación (14.12). Analizaremos para mayor exactitud sólo el caso $x \to +\infty$ (cuando $x \to -\infty$ el razonamiento se lleva a cabo análogamente). Supongamos que la gráfica de la función f tiene una asíntota (14.12) cuando $x \to +\infty$. Entonces por definición

$$f(x) = kx + l + o(1). \tag{14.13}$$

Dividamos ambas partes de la igualdad (14.10) por x y pasemos al límite cuando $x \to +\infty$. Entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k. \tag{14.14}$$

Utilizando el valor k hallado, obtendremos de (14.13) para la determinación de l la fórmula

$$l = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx). \tag{14.15}$$

La afirmación inversa también es válida: si existen los números k y l tales que se cumple la condición (14.15), entonces la recta $y = kx + l$ es asíntota de la gráfica de la función $f(x)$. En realidad, de (14.15) tenemos

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (kx + l)] = 0,$$

es decir, la recta $y = kx + l$ efectivamente satisface la definición de asíntota, dicho de otro modo, cumple la condición (14.13).

De esta forma, las fórmulas (14.14) y (14.15) reducen el problema de la búsqueda de las asíntotas (14.12) al cálculo de límites de un tipo determinado. Más aún, mostramos que si existe la representación de la función f en la forma (14.13), entonces k y l se expresan por las fórmulas (14.14) y (14.15). Por consiguiente, si existe la representación (14.13), entonces es única.

Hallemos por esta regla la asíntota de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$ hallada por nosotros anteriormente por otro método:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x - 2}{x(x - 1)} = 1,$$

$$l = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x - 2}{x + 1} = -4,$$

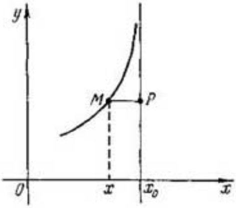


FIG. 64

es decir, como era de esperar, obtuvimos la misma ecuación de la asíntota $y = x - 4$ tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$.

La ecuación de cualquier recta no paralela al eje Oy puede ser escrita en la forma (14.12). Es natural extender la definición de asíntota a las rectas paralelas al eje Oy.

Definición 8. *Supongamos que la función f está definida en cierto entorno del punto x_0 (puede ser unilateral) y supongamos que se cumpla al menos una de las siguientes condiciones*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty. \tag{14.16}$$

Entonces la recta $x = x_0$ (fig. 64) *se llama asíntota vertical de la gráfica de la función f (a diferencia de la asíntota del tipo* (14.12) *la cual se llama inclinada).*

En el caso de asíntota vertical, como en el caso de inclinada, la distancia $MP = x - x_0$ entre el punto M y la recta $x = x_0$ tiende a cero si el punto $M(x, f(x))$ tiende al infinito por la gráfica, es decir, cuando $x \to x_0 - 0$ ó $x \to x_0 + 0$.

Para hallar las asíntotas verticales de la gráfica de una función f es necesario hallar los valores x para los cuales se cumple una o ambas condiciones (14.16). Por ejemplo, la función $y = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$ tiene una asíntota vertical $x = -1$. En general, si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional (($P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios), $Q(x_0) = 0$, $P(x_0) \neq 0$, entonces la recta $x = x_0$ es una asíntota de la gráfica de la función $f(x)$.

14.5. CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICAS DE FUNCIONES

El estudio de una función dada y la construcción de su gráfica con ayuda del aparato analítico desarrollado es racional llevarlo a cabo en el siguiente orden.

1. Determinar el dominio de existencia de la función, la región de continuidad y los puntos de discontinuidad.

2. Hallar las asíntotas.

3. Trazar aproximadamente, a grandes rasgos, la gráfica de la función.

4. Calcular la primera y si es necesario la segunda derivada (con frecuencia sin derivadas de orden superior se llega a la solución).

5. Hallar los puntos en los cuales la primera derivada y la segunda no existen o son iguales a cero.

6. Componer la tabla de variación del signo de la primera y segunda derivadas. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, convexidad hacia las y positivas o negativas de la función, hallar los puntos de extremo (entre ellos los terminales) y los puntos de inflexión.

7. Finalmente trazar la gráfica.

Además, a medida que sea mayor la exactitud que querramos alcanzar en la gráfica, en general, es necesario hallar más puntos sobre ella. Generalmente es conveniente hallar (puede ser con una exactitud determinada) los puntos de intersección de la gráfica con los ejes de coordenadas y los puntos correspondientes a los extremos de la función; otros puntos se hallan a medida de las necesidades.

En el caso en que las expresiones de la segunda derivada sean muy voluminosas, a veces se hace necesario reducirse al análisis de las propiedades de la gráfica que se pueden estudiar sólo con ayuda de la primera derivada.

Ejemplo 1. Construyamos la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$.

Esta función está definida y es continua para todos los $x \neq -1$. Como ya sabemos (véase el p. 14.4) tiene asíntotas $y = x - 4$ y $x = -1$, y además $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = -\infty$. Fue señalado también que $f(x) = = x - 4 + \dfrac{2}{x + 1}$ por lo que $f(x) > x - 4$ cuando $x > -1$ (la gráfica de la función se encuentra por arriba de la asíntota) y $f(x) < x - 4$ cuando $x < -1$ (la gráfica se encuentra por abajo de la asíntota).

La gráfica de la función $f(x)$ interseca el eje Ox en los puntos en los cuales $x^2 - 3x - 2 = 0$, es decir, cuando $x_1, x_2 = (3 \pm \sqrt{17})/2$ ó aproximadamente en los puntos $x_1 = 3{,}5$, $x_2 = 0{,}5$. La gráfica interseca el eje Oy en el punto $y = -2$. Esto permite trazar la gráfica de la función $f(x)$ en la forma indicada en la fig. 65.

El estudio posterior tiene el fin de hallar los extremos, los puntos de inflexión y los intervalos de convexidad hacia las y negativas o positivas de la gráfica de la función. Para esto hallemos y' e y'':

$$y' = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2}, \quad y'' = \frac{4}{(x + 1)^3}.$$

De aquí se ve que $y' = 0$ cuando $x = -1 - \sqrt{2} \approx -2{,}4$ y $x = -1 + \sqrt{2} \approx 0{,}4$. En el punto $x = -1$ las derivadas y' e y'' no existen.

Compongamos la tabla de variación del signo de la primera y segunda derivadas en dependencia de la variación del argumento, incluyendo en ella los puntos críticos:

x		$-1 - \sqrt{2}$		-1		$-1 + \sqrt{2}$	
y'	+	0	−	No existe	−	0	+
y''	−	−	−	No existe	+	+	+

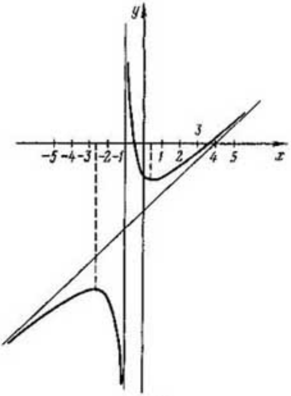


FIG. 65

De esta tabla se ve que la función $f(x)$ tiene en el punto $x = -1 + \sqrt{2}$ un mínimo estricto y en el punto $x = -1 - \sqrt{2}$ un máximo estricto; cuando $x < -1$ la función es convexa estrictamente hacia las y positivas y cuando $x > -1$ es convexa estrictamente hacia las y negativas. No hay puntos de inflexión, ya que cuando $x = -1$ la función es discontinua.

Hemos hallado el carácter general del comportamiento de la función. Para construir la gráfica más exactamente es necesario hallar una serie de puntos de la gráfica como se señaló anteriormente.

En el futuro, para mayor brevedad, a las tablas semejantes a la tabla dada más arriba las llamaremos *tablas del comportamiento de las funciones* y a veces señalaremos en ellas inmediatamente los puntos de extremo, los puntos de inflexión y los intervalos de convexidad.

Ejemplo 2. Construyamos la gráfica de la función $f(x) = (x + 1)^3\sqrt[3]{x^2}$.

El dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales y además es continua en cada punto, por lo que no tiene asíntotas verticales. Ya que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty,$$

se deduce que no hay también asíntotas inclinadas.

Para la construcción de la gráfica a grandes rasgos observemos que:

1) $f(x)$ se anula en los puntos $x = -1$ y $x = 0$;

2) $f > 0$ cuando $x > -1$, $x \neq 0$;

3) $f < 0$ cuando $x < -1$;

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

El aspecto aproximado de la gráfica de la función que se puede trazar sobre la base de estas observaciones se representa en la fig. 66.

Realicemos ahora una investigación más detallada de la función con ayuda de las derivadas. Hallemos y' e y'':

$$y' = \frac{(x+1)^2(11x+2)}{3\sqrt[3]{x}}, \quad y'' = \frac{2(x+1)(44x^2+16x-1)}{9x\sqrt[3]{x}}.$$

De aquí se ve que $y' = 0$ cuando $x = -1$ y $x = -2/11$; $y'' = 0$ cuando $x = -1$ y también cuando $44x^2 + 16x - 1 = 0$, es decir, aproximadamente cuando $x_1 = -9/22$ y $x_2 = 1/22$. Cuando $x = 0$ las derivadas y' e y'' no existen.

Compongamos la tabla del comportamiento de la función.

Intervalos de convexidad y puntos de inflexión	Intervalos de monotonía y puntos del extremo	y''	y'	x
Convexidad hacia las y positivas		$-$	$+$	$(-\infty, -1)$
Puntos de inflexión		0	0	-1
Convexidad hacia las y negativas	Crecimiento	$+$	$+$	$(-1, x_1)$
Punto de inflexión		0	$+$	x_1
		$-$	$+$	$\left(x_1, -\frac{2}{11}\right)$
Convexidad hacia las y positivas	Máximo	$-$	0	$-\frac{2}{11}$
	Decrecimiento	$-$	$-$	$\left(-\frac{2}{11}, 0\right)$
	Mínimo	No existe	No existe	0
Convexidad hacia las y positivas		$-$	$+$	$(0, x_0)$
Punto de inflexión	Crecimiento	0	$+$	x_2
Convexidad hacia las y negativas		$+$	$+$	$(x_2, +\infty)$

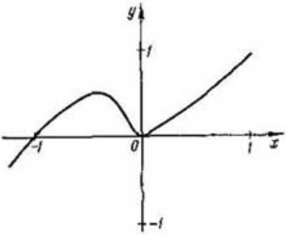


FIG. 66

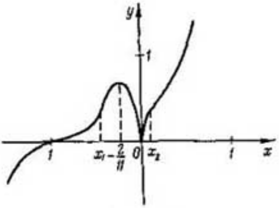


FIG. 67

Ahora se puede trazar la gráfica de la función $y = (x + 1)^3\sqrt[3]{x^2}$ más exactamente. Su aspecto está representado en la fig. 67. Como se ve, la investigación con ayuda de las derivadas permitió precisar sustancialmente el aspecto de la gráfica (compárense las figs. 66 y 67).

El aparato desarrollado permite construir las gráficas de las funciones dadas paramétrica y localmente: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Aquí no se supone que el par de funciones $x = x(t)$ $y = y(t)$ determina unívocamente una función del tipo $y = y(x)$ ó $x = x(y)$. Por gráfica de una función dada paramétricamente se sobreentiende la unión de las gráficas de todas las funciones del tipo $y = f(x)$ y $x = g(y)$ dadas por las fórmulas $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Hagamos algunas observaciones preliminares. Para hallar las asíntotas paralelas al eje Oy es necesario hallar tales valores t_0 *) para los cuales existe el límite finito $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} x(t) = a$ ó $\lim\limits_{t \to t_0 - 0} x(t) = a$ y $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} y(t)$, respectivamente $\lim\limits_{t_0 - 0} y(t)$ es igual a $+\infty$ ó $-\infty$.

Si tales valores t_0 existen, entonces

$$x = a \tag{14.17}$$

será la ecuación de la asíntota buscada.

De forma análoga, la búsqueda de las asíntotas paralelas al eje Ox se reduce a la determinación de tales valores t_0 para los cuales existen el límite finito $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} y(t) = b$ ó $\lim\limits_{t \to t_0 - 0} y(t) = b$, y $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} x(t)$, respectivamente $\lim\limits_{t \to t_0 - 0} x(t)$, es igual a $+\infty$ ó $-\infty$. Si resulta que tales valores t_0 existen, entonces

$$y = b \tag{14.18}$$

es la ecuación de la asíntota buscada.

Por último, para la búsqueda de las asíntotas no paralelas ni al eje Ox, ni al eje Oy, es necesario hallar tales valores t_0 para los cuales los límites $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} x(t)$ y

*) Aquí y en el futuro t_0 es un número o uno de los infinitos $+\infty$ ó $-\infty$.

$\lim\limits_{t \to t_0+0} y(t)$ (ó $\lim\limits_{t \to t_0-0} x(t)$ y $\lim\limits_{t \to t_0-0} y(t)$) son iguales a $+\infty$ ó $-\infty$, y existe el límite finito $\lim\limits_{t \to t_0+0} \dfrac{y(t)}{x(t)} k \neq 0$ (respectivamente, $\lim\limits_{t \to t_0-0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = k$). Si para este valor, además existe el límite finito $\lim\limits_{t \to t_0+0} [y(t) - kx(t)] = l$ (respectivamente, $\lim\limits_{t \to t_0-0} [y(t) - kx(t)] = l$), entonces la recta

$$y = kx + l \tag{14.19}$$

es asíntota de la gráfica de la función analizada.

Aquí siempre t_0 puede ser tanto finito como infinito.

Ejercicio 5. Dedúzcanse las ecuaciones de las asíntotas (14.17), (14.18) y (14.19), partiendo de que se llama asíntota la recta tal que la distancia desde el punto $(x(t), y(t))$ de la gráfica de la función, dada paramétricamente: $x = x(t)$, $y = y(t)$, hasta ella tiende a cero cuando el punto tiende al infinito, permaneciendo sobre la gráfica de la función, es decir, cuando $\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \to \infty$, cuando $t \to t_0 + 0$ ó $t \to t_0 - 0$.

En el trazado preliminar de la gráfica de una función dada paramétricamente, a menudo es útil construir inicialmente por separado las gráficas de las funciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$.

Para la determinación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función dada paramétricamente, para hallar sus extremos, los puntos de inflexión y también los intervalos de convexidad hacia las y positivas o negativas, es necesario utilizar las expresiones de las derivadas y'_{xx} e y''_{xx} por las derivadas x'_t, y''_{tt}, y'_t, x''_{tt}. Es necesario tener en cuenta que las ecuaciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, en general, no definen unívocamente una función del tipo $y = y(x)$, así que en el estudio de la gráfica de la función es necesario siempre seguir con atención que "rama" de la gráfica se analiza. A veces es más útil analizar, por el contrario, a la x como función de la y.

Ejemplo 3. Construyamos la gráfica de la función

$$x = \frac{t^2 + 1}{4(1 - t)}, \quad y = \frac{t}{1 + t}. \tag{14.20}$$

La representación paramétrica tiene sentido para todos los t menos $t = \pm 1$. Las asíntotas paralelas al eje Ox se obtienen para $t = 1$ y $t = \pm\infty$, sus ecuaciones son respectivamente $y = 1/2$ e $y = 1$. La asíntota paralela al eje Oy se obtiene para $t = -1$; su ecuación es $x = 1/4$. En el caso dado no hay asíntotas inclinadas.

Para la construcción de la gráfica a grandes rasgos es útil formar la tabla de variación de los signos de las variables x e y en dependencia de la variación de t; en ella pueden ser incluidos algunos valores característicos de x e y. Así en el caso dado es útil la tabla siguiente.

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x	$+\infty$	$+$	$1/4$	$+$	$1/4$	$+$	∞	$-$	$-\infty$
y	1	$+$	∞	$-$	0	$+$	$1/2$	$+$	1

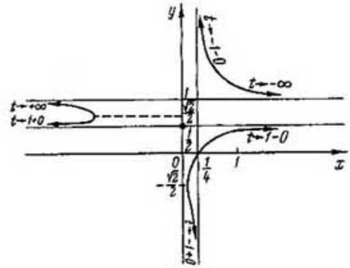


FIG. 68

Ahora construyamos la gráfica (fig. 68). Para mayor claridad, en la gráfica está señalado, cómo las ramas de la gráfica corresponden a la variación del parámetro.

Más adelante,

$$x'_t = \frac{1 + 2t - t^2}{4(1 - t)^3}, \quad y'_t = \frac{1}{(1 + t)^2},$$

por esto

$$x'_y = \frac{(1 + t)^2(1 + 2t - t^2)}{4(1 - t)^2}. \tag{14.21}$$

En el caso dado es mejor analizar x como función de y, y no al contrario, ya que de la gráfica dibujada se ve que es natural esperar que x se define unívocamente como función de y, $y \neq 1/2$ e $y \neq 1$.

De (14.21) se ve que $x'_y = 0$ cuando $t = -1$ y cuando $1 + 2t - t^2 = 0$, es decir, cuando $t = 1 + \sqrt{2}$ y $t = 1 - \sqrt{2}$. Al valor $t = -1$ no le corresponde ningún punto de la gráfica y para $t = 1 + \sqrt{2}$ y $t = 1 - \sqrt{2}$, tenemos respectivamente

$$y = \frac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{1 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Compongamos ahora la tabla de variación del signo de la derivada x'_y, esta tabla permite hallar los puntos de extremo.

t	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
y	1		∞		$-\sqrt{2}/2$		$1/2$		$\sqrt{2}/2$		1
x'/y		$-$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
Extremos					Mínimo				Máximo		

De la tabla se ve que en el punto $y = \sqrt{2}/2$ la función $x = x(y)$ tiene máximo, en el punto $y = -\sqrt{2}/2$ mínimo y es estrictamente monótona sobre los intervalos

$$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), \quad (1, +\infty).$$

Es necesario prestar atención a que tomando y como variable independiente y x como la dependiente, es decir, tomando el eje Oy como el primer eje de coordenadas y el eje Ox como el segundo, obtuvimos un sistema de coordenadas orientado en sentido contrario al sistema de coordenadas analizado por nosotros todo el tiempo, en el cual el primer eje es Ox y el segundo Oy. Al lector le será útil convencerse de que los criterios demostrados por nosotros más arriba, por ejemplo, para la existencia de los extremos y los puntos de inflexión, geométricamente no están relacionados con una u otra orientación de los ejes de coordenadas.

Para el analisis de la convexidad y de los puntos de inflexión de la función $x(y)$ hallemos x''_{yy}:

$$x''_{yy} = (x'_y)'_t t'_y = \frac{(1+t)^3(3+3t-3t^2+t^3)}{2(1-t)^3}.$$

La derivada x''_{yy} es igual a cero cuando $t = -1$ y para aquellos t para los cuales

$$P(t) \equiv 3 + 3t - 3t^2 + t^3 = 0.$$

Observando que $P'(t) = 3(t-1)^2 \geqslant 0$ y además $P' = 0$ sólo en un punto, $t = 1$ vemos que $P(t)$ crece monótonamente sobre todo el eje real (¿por qué?). Por consiguiente existe un único t_0 tal que $P(t_0) = 0$. Además $P(0) = 3 > 0$ y $P(-1) = -4 < 0$ de donde $-1 < t_0 < 0$. Si $y_0 = \dfrac{t_0}{1+t_0}$, entonces evidentemente $-\infty < y_0 < 0$ (por supuesto se puede obtener una estimación más exacta para y_0 escogiendo t_1 y t_2 más cercanos y tales que $P(t_1) < 0$, $P(t_2) > 0$). Formemos ahora la tabla de variación de la derivada x''_{yy} y determinemos con su ayuda los intervalos de convexidad hacia las y positivas y negativas y también los puntos de inflexión:

t	$-\infty$	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, t_0)$	t_0	$(t_0, 1)$	1	$(1, +\infty)$	$+\infty$
y	1	$(1, +\infty)$	∞	$(-\infty, y_0)$	y_0	$(y_0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(1/2, 1)$	1
x''_y		$+$		$-$	0	$+$	No existe	$-$	
Intervalos de convexidad		Convexidad hacia las y negativas		Convexidad hacia las y positivas		Convexidad hacia las y negativas		Convexidad hacia las y positivas	
Puntos de inflexión y puntos de discontinuidad	Punto de discontinuidad				Punto de inflexión		Punto de discontinuidad		Punto de discontinuidad

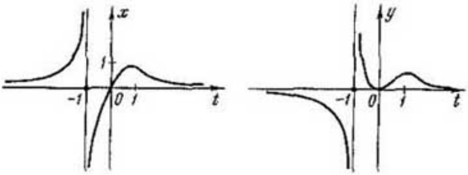


FIG. 69

La gráfica de la función (14.20) queda estudiada.

Ejemplo 4. Construyamos la gráfica de la función

$$x = \frac{t}{1+t^3}, \quad y = \frac{t^2}{1+t^3}. \tag{14.22}$$

En el caso dado no hay asíntotas paralelas a los ejes coordenados; ya que $x \to \infty$ e $y \to \infty$ cuando $t \to -1$, entonces es posible que exista una asíntota inclinada. Para hallarla calculemos los límites correspondientes:

$$\lim_{t \to -1} \frac{y}{x} = \lim_{t \to -1} t = -1, \quad \text{es decir,} \quad k = -1,$$

$$\lim_{t \to -1} (y - kx) = \lim_{t \to -1} \left(\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^3} \right) = \lim_{t \to -1} \frac{t}{t^2 - t + 1} = -\frac{1}{3}.$$

De aquí se deduce que la asíntota inclinada existe y que su ecuación será

$$y = -x - \frac{1}{3}.$$

Construyamos aproximadamente las gráficas de las funciones $x(t)$ e $y(t)$. Para esto hallaremos previamente las derivadas:

$$x'_t = \frac{1 - 2t^3}{(1+t^3)^2}, \quad y'_t = \frac{t(2 - t^2)}{(1+t^3)^2}. \tag{14.23}$$

La derivada x'_t se anula para $t = 1/\sqrt[3]{2}$ cambiando el signo de "+" a "−", por lo que éste es un punto de máximo; la derivada y'_t se anula para $t = 0$, cambiando el signo de "−" a "+" (quiere decir que éste es un punto de mínimo) y para $t = 1/\sqrt[3]{2}$ cambiando el signo de "+" a "−" (por consiguiente éste también es un punto de máximo). De estas observaciones se deduce que las gráficas de las funciones $x(t)$ e $y(t)$ tienen el aspecto representado en la fig. 69.

Por estas gráficas, conociendo la ecuación de la asíntota se puede hallar aproximadamente la gráfica de la función (14.22) que buscamos. La gráfica tiene el aspecto representado en la fig. 70.

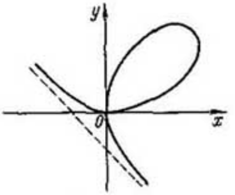


FIG. 70

El análisis de la derivada y'_x permite precisar las dimensiones del "lazo" formado por la gráfica. De (14.23) tenemos $y'_x = \frac{t(2 - t^3)}{1 - 2t^3}$. Ahora veamos que: 1) $y'_x = 0$ para $t = 0$ y $t = \sqrt[3]{2}$, es decir, la tangente a la gráfica es paralela al eje Ox en los puntos $(0; 0)$ y $(\sqrt[3]{2}/3; \sqrt[3]{4}/3)$; 2) $y'_x = \infty$ para $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ y $t = \infty$, es decir, la tangente es paralela al eje Oy en los puntos $(\sqrt[3]{4}/3, \sqrt[3]{2}/3)$ y $(0; 0)$. De esta forma al punto $(0; 0)$ (que como se dice es un punto múltiple de la gráfica) le corresponden dos valores del parámetro, $t = 0$ y $t = \infty$, si sólo definimos complementariamente las funciones (14.22) haciendo $x(\infty) = 0, y(\infty) = 0$. En este punto dos partes de la gráfica tienen respectivamente los ejes coordenados como sus tangentes.

La gráfica de la función (14.22) se llama *folio de Descartes* *). De la fórmula (14.22) no es difícil obtener su expresión implícita

$$x^3 + y^3 - xy = 0.$$

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las siguientes funciones:

6. $y = x^{1/x}$.
7. $y = \sqrt[3]{(x + 1)^2} - \sqrt{(x - 1)^2}$.
8. $y = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$.
9. $y = x^2 \ln x$.
10. $y = \frac{x^2\sqrt{x^2 - 1}}{2x^2 - 1}$.
11. $y = x^2 \left(1 - \frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$.
12. $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3$.
13. $x = t - e^{-t}, y = 2t - e^{-2t}$.
14. $x = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}, y = \frac{t}{t^4 + 1}$.
15. $y^3 - x^2y^2 - x^3 = 0$. Indicación: exprésense x e y por t considerando $y = tx$.

*) R. Descartes (1596 — 1650), filósofo, matemático, físico y fisiólogo francés.

§ 15. FUNCIÓN VECTORIAL

15.1. CONCEPTO DE LÍMITE Y CONTINUIDAD PARA UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Definición 1. *Si a cada valor $t \in E$, donde E es cierto conjunto de números, le corresponde un determinado vector $r = r(t)$ del espacio tridimensional, entonces diremos que sobre E está definida una función vectorial $r(t)$.*

En esta definición, en dependencia de los problemas analizados, por los valores de $r(t)$ se puede entender tanto vectores libres como vectores con extremos fijos en un mismo punto (los tal llamados *radio-vectores*).

Si en el espacio está dado un sistema de coordenadas rectangular, entonces, como es bien conocido, a cada vector le corresponden tres números reales ordenados, sus coordenadas, y viceversa, a cada tres números reales ordenados les corresponde un vector, para el cual estos números son sus coordenadas. Por esto, el dar una función vectorial es equivalente a dar tres funciones escalares (numéricas) $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ que son sus coordenadas:

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Si para todos los $t \in E$ tenemos $z(t) = 0$, entonces la función vectorial $r(t)$ se llama bidimensional. En este caso se escribe

$$r(t) = (x(t), y(t)).$$

La longitud de cualquier vector ρ se denota por $|\rho|$. Supondremos que son conocidas las principales propiedades algebraicas de los vectores, el concepto de producto escalar y vectorial y también las propiedades de estos productos. El producto escalar de los vectores a y b se denota por ab o (a, b) y el producto vectorial por $a \times b$ o $[a, b]$.

Introduzcamos los conceptos de límite, continuidad, derivada y diferencial para las funciones vectoriales.

Definición 2. *Supongamos que la función vectorial $r(t)$ está definida en cierto entorno reducido del punto t_0 y a es cierto vector. Llamaremos al vector a límite de la función $r(t)$ cuando $t \to t_0$ y escribiremos $a = \lim\limits_{t \to t_0} r(t)$* (o $r(t) \to a$ *cuando $t \to t_0$*) *si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todos los t que satisfacen la condición $|t - t_0| < \delta$, $t \neq t_0$, se cumple la desigualdad* (fig. 71) $|r(t) - a| < \varepsilon$.

Es evidente que (compárese con el lema del p. 4.9)

$$\lim_{t \to t_0} r(t) = a, \tag{15.1}$$

si y sólo si

$$\lim_{x \to t_0} |r(t) - a| = 0. \tag{15.2}$$

Si $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y $a = (a_1, a_2, a_3)$ entonces para que $a = \lim\limits_{t \to t_0} r(t)$ es necesario y suficiente que

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a_1, \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = a_2, \quad \lim_{t \to t_0} z(t) = a_3. \tag{15.3}$$

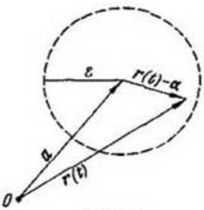


FIG. 71

En realidad

$$|r(t) - a| = \sqrt{[x(t) - a_1]^2 + [y(t) - a_2]^2 + [z(t) - a_3]^2}. \tag{15.4}$$

Por esto, $|r(t) - a| \geqslant |x(t) - a_1|$. De aquí se deduce que la condición $|r(t) - a| \to 0$ cuando $t \to t_0$ trae consigo la condición $|x(t) - a_1| \to 0$ cuando $t \to t_0$, es decir, $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = a_1$. Análogamente se demuestran las otras igualdades de (15.3). Inversamente, si se cumple (15.3), entonces de (15.4) inmediatamente obtenemos que $|r(t) - a| \to 0$ cuando $t \to t_0$, es decir, $a = \lim\limits_{t \to t_0} r(t)$.

Señalemos algunas propiedades de los límites de las funciones vectoriales.

1°. Si $\lim\limits_{t \to t_0} r(t) = a$, entonces $\lim\limits_{t \to t_0} |r(t)| = |a|$. Esto se deduce directamente de la desigualdad $\big||r| - |a|\big| \leqslant |r - a|$.

2°. $\lim\limits_{t \to t_0} [r_1(t) + r_2(t)] = \lim\limits_{t \to t_0} r_1(t) + \lim\limits_{t \to t_0} r_2(t)$.

3°. $\lim\limits_{t \to t_0} f(t)r(t) = \lim\limits_{t \to t_0} f(t) \lim\limits_{t \to t_0} r(t)$ ($f(t)$ es una función escalar).

4°. $\lim\limits_{t \to t_0} r_1(t)r_2(t) = \lim\limits_{t \to t_0} r_1(t) \lim\limits_{t \to t_0} r_2(t)$.

5°. $\lim\limits_{t \to t_0} r_1(t) \times r_2(t) = \lim\limits_{t \to t_0} r_1(t) \times \lim\limits_{t \to t_0} r_2(t)$.

En las propiedades 2° — 5° todas las funciones analizadas están definidas en cierto entorno del punto t_0 menos, podría ser, el propio punto t_0 y se supone que todos los límites que aparecen en los segundos miembros de las igualdades existen; entonces se afirma que también existen los límites que están en los primeros miembros y en este caso son válidas las igualdades escritas.

Todas estas propiedades se demuestran de forma análoga a como demostramos las afirmaciones semejantes que aparecieron anteriormente (véanse los p. 4.9 y 5.10). Demostremos, por ejemplo, la propiedad 5°. Previamente observemos que para cualesquiera vectores p y q

$$|p \times q| = |p||q| \operatorname{sen} \widehat{pq} \leqslant |p||q|. \tag{15.5}$$

Por esto, si $p = p(t)$ y $q = q(t)$ y además $\lim\limits_{t \to t_0} |p(t)| = 0$ y $|q(t)|$ es una función acotada, entonces de (15.5) tenemos (véase el p. 4.9)

$$\lim_{t \to t_0} |p \times q| = 0. \tag{15.6}$$

Sea ahora $\lim\limits_{t \to t_0} r_1(t) = a$, $\lim\limits_{t \to t_0} r_2(t) = b$. Hagamos $\alpha(t) = r_1(t) - a$, $\beta(t) = r_2(t) - b$, entonces según (15.2)

$$\lim_{t \to t_0} |\alpha(t)| = \lim_{t \to t_0} |\beta(t)| = 0 \tag{15.7}$$

y

$$r_1(t) \times r_2(t) = [a + \alpha(t)] \times [b + \beta(t)] =$$
$$= a \times b + a \times \beta(t) + \alpha(t) \times b + \alpha(t) \times \beta(t),$$

donde en virtud de (15.7) $\lim\limits_{t \to t_0} |a \times \beta(t)| = \lim\limits_{t \to t_0} |\alpha(t) \times b| = \lim\limits_{t \to t_0} |\alpha(t) \times \beta(t)| = 0$ y ya que

$$|a \times \beta(t) + \alpha(t) \times b + \alpha(t)| \times \beta(t) \leqslant$$
$$\leqslant |a \times \beta(t)| + |\alpha(t) \times b| + |\alpha(t) \times \beta(t)|,$$

entonces $\lim\limits_{t \to t_0} |\alpha \times \beta(t) + \alpha(t) \times b + \alpha(t) \times \beta(t) = 0$. Esto, según (15.2) significa que

$$\lim_{t \to t_0} r_1(t) \times r_2(t) = a \times b. \ \square$$

Señalemos que las propiedades 1° — 5° de los límites de las funciones vectoriales pueden ser obtenidas, naturalmente, con ayuda de las fórmulas (15.3) de las propiedades correspondientes de las funciones escalares si se pasa a la escritura en coordenadas de los vectores y sus productos escalares y vectoriales.

Pasemos a la definición de la continuidad de una función vectorial.

Definición 3. *Una función vectorial $r = r(t)$ definida en cierto entorno del punto t_0 se llama continua en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} r(t) = r(t_0)$.*

De la equivalencia de las condiciones (15.1) y (15.3) se deduce que para que la función vectorial $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ definida en cierto entorno del punto t_0 sea continua en este punto es necesario y suficiente que para $t = t_0$ sean continuas las funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

De las propiedades de los límites de las funciones vectoriales se deduce que la suma, los productos escalares y vectoriales de las funciones vectoriales y también el producto de funciones escalares por vectoriales serán continuos en algún punto si en este punto son continuos todos los sumandos y los factores, respectivamente.

15.2. DERIVADA Y DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Definición 4. *Supongamos que la función vectorial $r = r(t)$ está definida en cierto entorno del punto t_0. Si existe el límite*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)}{\Delta t}$$

entonces se llama derivada de la función vectorial dada en t_0 y se denota por $r'(t_0)$ ó $\dot{r}(t_0)$.

De esta forma, la derivada de una función vectorial en un punto es un vector.

Para que la función $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ definida en cierto entorno del punto t_0 tenga derivada en t_0 es necesario y suficiente que las funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ tengan derivadas para $t = t_0$ y además en este caso

$$r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)), \ |r'(t_0)| = \sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0) + z'^2(t_0)}.$$

Esto se deduce directamente de la equivalencia de los enfoques (15.1) y (15.3) de la definición de límite para la función vectorial:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)}{\Delta t} =$$

$$= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} \right)$$

Definición 5. *La función vectorial $r = r(t)$ definida en cierto entorno del punto t_0 se llama diferenciable para $t = t_0$ si su incremento $\Delta r = r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)$ en el punto t_0 es representable en la forma*

$$\Delta r = a\Delta t + \varepsilon(\Delta t)\Delta t \tag{15.8}$$

donde $\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t) = 0$. Además la función vectorial lineal *) *$a\Delta t$ se llama diferencial de la función $r(t)$ en el punto t_0 y se denota por $dr = a\Delta t$*

$$\Delta r = dr + \varepsilon(\Delta t)\Delta t. \tag{15.9}$$

Es evidente que si la función vectorial es diferenciable para $t = t_0$, entonces es continuo en este punto.

Como en el caso de las funciones escalares, de la diferenciabilidad de una función se deduce la existencia de la derivada $r'(t)$ y su igualdad al vector a. En realidad, de (15.8) tenemos

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} [a + \varepsilon(\Delta t)] = a.$$

Viceversa, si existe la derivada $r'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$, entonces suponiendo $\varepsilon(\Delta t) = \frac{\Delta r}{\Delta t} - r'(t_0)$, obtenemos $\Delta r = r'(t_0)\Delta t + \varepsilon(\Delta t)\Delta t$ donde $\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t) = 0$. Quiere decir que $r(t)$ es diferenciable en el punto t_0 y

$$dr = r'(t_0)\Delta t.$$

*) La función vectorial de argumento t se llama lineal si tiene la forma $at + b$, donde a y b son dos vectores cualesquiera dados.

Hagamos, por definición, $dt = \Delta t$ para la variable independiente t, entonces (eliminando la notación del argumento t_0)

$$dr = r'dt, \quad r' = \frac{dr}{dt}.$$

Sustituyendo la expresión obtenida para dr, en (15.9) obtenemos

$$\Delta r = r'\Delta t + \varepsilon(\Delta t)\Delta t,$$

ó

$$\Delta r = r'\Delta t + \alpha(\Delta t), \tag{15.10}$$

donde $\alpha(\Delta t) = \varepsilon(\Delta t)\Delta t = o(\Delta t)$ cuando $\Delta t \to 0$ *) y $\alpha(0) = 0$.

Sea ahora $t = t(\tau)$. Si esta función es diferenciable en el punto τ_0, $t_0 = t(\tau_0)$ y $\Delta\tau = \tau - \tau_0$, entonces de (15.10) (denotando para mayor claridad r' por r'_t) se deduce que

$$\frac{\Delta r}{\Delta\tau} = r'_t \frac{\Delta t}{\Delta\tau} + \frac{\alpha(\Delta t)}{\Delta\tau}.$$

Ya que $\Delta t \to 0$ cuando $\Delta\tau \to 0$, entonces como en el caso de una función numérica (véase el p. 9.7), poniendo $\varepsilon(0) = 0$, obtendremos

$$\lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\alpha(\Delta t)}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t)\frac{\Delta\tau}{\Delta\tau} = 0,$$

por lo que la derivada $r'_\tau = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta r}{\Delta\tau}$ existe y $r'_\tau = r'_t t'_\tau$. De aquí, como en el caso de las funciones escalares, se deduce la invariancia de la escritura de la diferencial de una función vectorial; tanto para la variable dependiente t como para la variable independiente τ tenemos

$$dr = r'_t dt, \quad dr = r'_t d\tau.$$

Demos las fórmulas de diferenciación de la función vectorial (el argumento, para simplificar las notaciones, se omite):

1. $(r_1 + r_2)' = r_1' + r'_2$.
2. $(fr) = f'r + fr'$.
3. $(r_1 r_2)' = r'_1 r_2 + r_1 r'_2$.
4. $(r_1 \times r_2) = r'_1 \times r_2 + r_1 \times r'_2$.

Aquí, todas las funciones analizadas están definidas en cierto entorno del punto t_0 y se supone que todas las derivadas que aparecen en el segundo miembro de cada igualdad existen para $t = t_0$; entonces, en el punto t_0 existen también las derivadas que aparecen en el primer miembro y además son válidas las igualdades escritas.

Todas estas fórmulas se demuestran análogamente a las fórmulas de diferenciación de las funciones escalares (véase el p. 9.5). Demostremos, por ejemplo, la fórmula 4.

---

*) Por analogía con el caso de las funciones escalares para la función vectorial $\alpha(t)$ se escribe $\alpha = o(\beta)$ cuando $t \to t_0$ si $\alpha(t) = \varepsilon(t)\beta(t)$, donde $\lim\limits_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0$.

Utilizando las propiedades 1° — 5° de los límites de las funciones vectoriales obtendremos

$$[r_1(t) \times r_2(t)]'_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r_1(t_0 + \Delta t) \times r_2(t_0 + \Delta t) - r_1(t_0) \times r_2(t_0)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{r_1(t_0 + \Delta t) - r_1(t_0)}{\Delta t} \times r_2(t_0 + \Delta t) + r_1(t_0) \times \frac{r_2(t_0 + \Delta t) - r_2(t_0)}{\Delta t} \right] =$$

$$= r_1'(t_0) \times r_2(t_0) \times r_2(t_0) \times r_2'(t_0).$$

Si la función vectorial $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ está definida en cierto entorno del punto t_0 y tiene n derivadas en este punto, entonces para ella es válida la fórmula de Taylor

$$\Delta r = r(t_0 + \Delta t) - r(t_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{d^k r(t_0)}{dt^k} \Delta t^k + o(\Delta t^n).$$

Esta fórmula se deduce directamente del desarrollo de las funciones coordenadas $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ por la fórmula de Taylor.

Vemos que muchos hechos establecidos en la teoría de las funciones escalares, se transfieren al pie de la letra a las funciones vectoriales. No obstante, sería un error pensar que esto siempre es así: por ejemplo, en determinado sentido, el análogo de la fórmula de los incrementos finitos no tiene lugar para las funciones vectoriales.

En efecto, analicemos la función vectorial bidimensional $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Por cuanto $r'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$, entonces $|r'(t)| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} = 1$ para cualquier $t \in [0, 2\pi]$. Por consiguiente no existe tal punto $\xi \in [0, 2\pi]$ para el cual sea válida la igualdad análoga a la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange para las funciones escalares

$$r(2\pi) - r(0) = 2\pi r'(\xi),$$

ya que en el primer miembro aparece un vector nulo, por cuanto $r(2\pi) = r(0)$ y en el segundo uno no nulo.

La afirmación siguiente es una variación de la fórmula de los incrementos finitos para las funciones vectoriales.

Teorema 1. *Supongamos que la función vectorial $r(t)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y diferenciable en su interior. Entonces existe un punto $\xi \in (a, b)$ tal que*

$$|r(b) - r(a)| \leqslant (b - a)|r'(\xi)|. \tag{15.11}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $r(a) = r(b)$, entonces la desigualdad (15.11) es válida para cualquier elección del punto $\xi \in (a, b)$ ya que su primer miembro se anula.

Sea $r(a) \neq r(b)$. Estimemos la longitud $|r(b) - r(a)|$ del vector $r(b) - r(a) \neq 0$. Si se da cualquier vector x, entonces denotando por e al vector unidad en el sentido del vector x, obtendremos $|x| = (x, e)$ ya que por la definición del producto escalar $(x, e) = |x||e| \cos \widehat{xe}$, $|e| = 1$, $\widehat{xe} = 0$, y por consiguiente $\cos \widehat{xe} = 1$. Por esto, si e es el vector unidad en el sentido del vector $r(b) - r(a) \neq 0$, entonces

$$|r(b) - r(a)| = (r(b) - r(a), e) = (r(b), e) - (r(a), e),$$

18*

es decir, se obtuvo la diferencia de los valores de una función numérica

$$f(t) = (r(t), e) \tag{15.12}$$

en los extremos del segmento $[a, b]$:

$$|r(b) - r(a)| = f(b) - f(a). \tag{15.13}$$

De (15.12) se deduce que la función $f(t)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y diferenciable en todos sus puntos interiores, ya que por la condición del teorema, la función $r(t)$ posee estas propiedades. Por esto, según la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange, existe un punto $\xi \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$. Pero en virtud de la regla de diferenciación del producto escalar tenemos

$$f'(t) = (r'(t), e)$$

como consecuencia de lo cual

$$f(b) - f(a) = (r'(\xi), e)(b - a), \quad a < \xi < b. \tag{15.14}$$

Para dos vectores cualesquiera x e y, de la definición de producto escalar se deduce la desigualdad

$$|(x, y)| = |x||y||\cos xy| \leqslant |x||y|;$$

en particular

$$|(r'(\xi), e)| \leqslant |r'(\xi)||e| = |r'(\xi)|.$$

Por consiguiente, de (15.4) obtenemos:

$$f(b) - f(a) \leqslant |r'(\xi)|(b - a), \quad a < \xi < b.$$

De esta desigualdad y de la fórmula (15.13) se deduce directamente la desigualdad (15.11). □

§ 16. LONGITUD DE CURVA

16.1. CONCEPTO DE CURVA

Analicemos las aplicaciones de los segmentos en el espacio tridimensional R^3. Sea $[a, b]$ cierto segmento y $r(t)$ su aplicación en R^3, es decir, la aplicación que pone en correspondencia a cada punto $t \in [a, b]$ un punto $r(t)$ del espacio R^3, más breve, $r: [a, b] \to R^3$.

Consideraremos que en el espacio R^3 está fijo un sistema de coordenadas. En este caso el dar un punto del espacio es equivalente a dar sus tres coordenadas. Denotemos las coordenadas del punto $r(t)$ por $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$:

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Entonces, el dar la aplicación $r(t)$ resulta ser equivalente a dar tres funciones numéricas $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ llamadas *funciones coordenadas de la aplicación* $r(t)$.

La aplicación $r(t)$ se llama *continua sobre el segmento* $[a, b]$ si sobre este segmento son continuas todas sus funciones coordenadas.

Para la aplicación $r(t)$ denotaremos por $\boldsymbol{r}(t)$ la función vectorial para la cual las coordenadas del vector $\boldsymbol{r}(t)$ coinciden con las coordenadas del punto $r(t)$, es decir, $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y llamaremos a la aplicación $r(t)$ y a la función vectorial $\boldsymbol{r}(t)$ correspondientes una a otra.

Es evidente que la aplicación $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ si y sólo si sobre este segmento es continua la función vectorial $\boldsymbol{r}(t)$ correspondiente. Efectivamente, sabemos que una función vectorial es continua sobre un segmento si y sólo si sobre él son continuas todas sus coordenadas (véase el p. 15.1), lo cual, por definición, es la condición de continuidad de la aplicación $r(t)$ sobre un segmento.

Ahora se puede enunciar la definición de curva.

El conjunto Γ del espacio dado como la imagen continua de cierto segmento *) se llama *curva continua* o simplemente curva.

La aplicación continua indicada — denotémosla de nuevo por $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ — del segmento $[a, b]$ sobre el conjunto $\Gamma \subset R^3$ se llama representación de la curva Γ y se escribe

$$\Gamma = \{r(t), a \leqslant t \leqslant b\}.$$

La variable t se llama *parámetro de la curva* Γ.

De esta forma una curva no es simplemente un conjunto del espacio, sino un conjunto analizado como resultado de cierta aplicación continua de un segmento. Dicho de otro modo, una curva es un conjunto del espacio más una aplicación continua del segmento sobre él.

Por esto, un mismo conjunto, obtenido como la imagen de segmentos aplicados continuamente se analiza como curvas diferentes.

Señalemos que la aplicación continua $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ que es una representación de la curva Γ no se considera biunívoca: en un mismo punto de la curva Γ se pueden aplicar dos o más puntos del segmento $[a, b]$.

Los puntos de la curva $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ en los cuales se aplica más de un punto del segmento $[a, b]$ se llaman *puntos múltiples de esta curva*.

Así, si el punto M de la curva continua Γ es un punto múltiple de la última, entonces para la representación dada $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, de esta curva Γ, existen al menos dos valores diferentes t_1 y t_2 del parámetro t, $a \leqslant t_1 \leqslant b$, $a \leqslant t_2 \leqslant b$ tales que $r(t_1) = r(t_2) = M$.

El punto $r(a)$ de la curva $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ se llama su origen y el punto $r(b)$, su extremo.

Definición 1. *La curva $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ se llama curva cerrada o lo que es lo mismo contorno cerrado si su origen coincide con su extremo: $r(a) = r(b)$.*

Una curva cerrada que no tiene puntos múltiples menos el punto $r(a) = r(b)$ y tal que $r(t) \neq r(a) = r(b)$ para $a < t < b$, se llama contorno cerrado simple.

Diremos que el punto $M = r(t)$ de la curva $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ tiende al punto $M_0 = r(t_0)$ de esta curva si $|MM_0| \to 0$ cuando $t \to t_0$.

---

*) Se llama *imagen continua de un segmento* la imagen de un segmento por una aplicación continua del último.

Si la curva Γ está en cierto plano, entonces esta curva se llama *plana*. Si el plano indicado se escoge por plano coordenado xOy, entonces la representación de la curva tiene el aspecto

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = 0$$

y la ecuación $z = 0$, si esto no nos puede llevar a confusiones, usualmente no se escribe.

La gráfica de una función $y = f(x)$ continua sobre cierto segmento $[a, b]$ es una curva plana en nuestro sentido con la representación.

$$x = x, \quad y = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b$$

(en este caso el parámetro $t = x$).

La aplicación $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, que define la curva Γ para un sistema de coordenadas x, y, z fijo en el espacio se puede definir también en la forma coordenada, es decir, dando las coordenadas del punto $r(t)$:

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

En este caso las tres funciones $x(t), y(t), z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ se llaman *representación coordenada de la curva* Γ *y se escribe*

$$\Gamma = \{x(t), y(t), z(t); a \leqslant t \leqslant b\}.$$

La aplicación $r(t)$ se puede dar mediante la función vectorial correspondiente a ella $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, donde, como siempre, $r(t)$ es el radio vector con extremo en el punto $r(t)$ *). En este caso la curva $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ se llama *hodógrafo* de la función vectorial $r(t)$ y la propia función vectorial $r(t)$ es *la representación vectorial de la curva* Γ y se escribe

$$\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}.$$

La circunferencia es un ejemplo de curva. Tomemos para mayor precisión la circunferencia de radio r con centro en el origen de coordenadas. Esta circunferencia se puede representar, por ejemplo, como la imagen continua del segmento $[0, 2\pi]$ con ayuda de las funciones

$$x = r \cos t, \quad y = r \operatorname{sen} t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \tag{16.1}$$

Es evidente que la circunferencia es un contorno cerrado simple. Un ejemplo de curva no cerrada es cualquier arco de circunferencia correspondiente, por ejemplo, a la variación del parámetro t sobre el segmento $[0, \alpha]$, donde $0 \leqslant \alpha < 2\pi$.

Señalemos que el conjunto de puntos de la curva

$$x = r \cos t, \quad y = r \operatorname{sen} t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi \tag{16.2}$$

coincide con el conjunto de puntos de la curva (16.1): en uno y otro caso es la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ sobre el plano x, y. No obstante, ha sido obtenida, como resultado de aplicaciones diferentes: para la transformación (16.1), es decir, para la variación del parámetro t desde 0 hasta 2π esta circunferencia se recorre una vez y en la transformación (16.2), es decir, para la variación del parámetro t desde 0 hasta 4π se recorre dos veces. Por esto (16.1) y (16.2) son curvas diferentes.

---

*) Si no se ha acordado algo diferente, entonces siempre se supone que el origen del radio vector se encuentra en el origen de coordenadas.

De forma análoga se definen las formas especiales de curvas continuas, diferenciables (continuamente), dos veces (continuamente) diferenciables, etc. Definamos, por ejemplo, las curvas continuamente diferenciables. La aplicación $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ del segmento $[a, b]$ en el espacio se llama *continuamente diferenciable* si todas las funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ son continuamente diferenciables sobre el segmento $[a, b]$.

La curva $\Gamma = \{r(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ se llama *continuamente diferenciable* si su representación $r(t)$ es continuamente diferenciable sobre el segmento $[a, b]$.

Análogamente se definen las curvas diferenciables, dos veces diferenciables, dos veces continuamente diferenciables, etc.

La definición de curva dada tiene en su base la representación física sobre la trayectoria (camino) de un punto material que se mueve en el espacio. Pero en tal trayectoria se pueden escoger parámetros diferentes, por ejemlo, el tiempo de movimiento t, la longitud del espacio recorrido s o cualquier otro. Por esto la condición que consiste en que dos curvas con diferentes representaciones siempre se consideran diferentes, no es siempre cómoda. Tal acuerdo es natural para las curvas (16.1) y (16.2). No obstante, las dos representaciones de las curvas

$$x = \cos t,\quad y = -\operatorname{sen} t,\quad -\pi \leqslant t \leqslant 0 \quad \text{e} \quad y = \sqrt{1 - x^2},\quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

sería natural considerarlas representación de una misma curva: la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$.

Estas consideraciones nos conducen a la idea de llevar a cabo cierta especificación del concepto de curva: la unión de ciertas curvas diferentes en el sentido de la definición dada anteriormente en una curva. Hagamos esto.

Diremos que las curvas $\Gamma_1 = \{r(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ y $\Gamma_2 = \{\rho(\tau),\ \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta\}$ son una misma curva si existe una función continua y estrictamente creciente $\tau = \varphi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(b) = \beta$ o una función continua estrictamente decreciente $\tau = \varphi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, $\varphi(a) = \beta$, $\varphi(b) = \alpha$, tal que para todos los $t \in [a, b]$ tiene lugar $r(t) = \rho(\varphi(t))$.

En el caso de las curvas (continuamente) diferenciables se supone que la función $\varphi\colon [a, b] \to [\alpha, \beta]$ es además (continuamente) diferenciable sobre $[a, b]$ y tiene derivada que no se anula. La última condición garantiza la diferenciabilidad (continua) de la función inversa φ^{-1}.

Semejantes transformaciones del parámetro, es decir, tales que llevan a la misma curva en el sentido de la definición dada, se llaman *transformaciones admisibles del parámetro* y todas las representaciones de una misma curva se llaman *equivalentes* entre sí.

Más detalladamente el paso a otras representaciones de una curva dada se analizará en el punto siguiente.

16.2*. CURVAS DADAS PARAMÉTRICAMENTE

Para la construcción de una teoría estricta de curvas que admiten diferentes representaciones introduzcamos previamente el concepto de aplicaciones equivalentes de segmentos en el espacio.

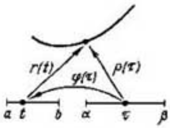


FIG. 72

Definición 2. *La aplicación continua $r(t)$ del segmento $[a, b]$ en el espacio se llama equivalente a la aplicación continua $\rho(\tau)$ del segmento $[\alpha, \beta]$ en el mismo espacio si existe una función continua estrictamente monótona $t = \varphi(\tau)$ (creciente o decreciente), tal que aplica el segmento $[\alpha, \beta]$ sobre el segmento $[a, b]$ y para cada $\tau \in [\alpha, \beta]$ es válida la igualdad* (fig. 72)

$$r(\varphi(\tau)) = \rho(\tau). \tag{16.3}$$

La función $\varphi(\tau)$ se llama aplicación realizadora de la equivalencia de las aplicaciones $r(t)$ y $\rho(\tau)$.

Si la aplicación continua $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, del segmento $[a, b]$ en el espacio es equivalente a la aplicación continua $\rho(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, del segmento $[\alpha, \beta]$ en el espacio, entonces se escribe $r(t) \sim \rho(\tau)$.

Es fácil convencerse de que cualquier aplicación continua de un segmento en el espacio es equivalente a sí misma: $r(t) \sim r(t)$ (aquí la aplicación realizadora de la equivalencia es la función $t = \tau$, $a = \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta = b$). Esta propiedad se llama propiedad *de reflexividad.* Fácilmente se comprueba también que si $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, y $\rho(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, son aplicaciones continuas de los segmentos $[a, b]$ y $[\alpha, \beta]$, respectivamente, en el espacio y si $r(t) \sim \rho(\tau)$, entonces $\rho(\tau) \sim r(t)$ es también la propiedad *de simetría.* Así mismo es fácil convencerse de que si $r_1(t_1)$, $a_1 \leqslant t_1 \leqslant b_1$, $r_2(t_2)$, $a_2 \leqslant t_2 \leqslant b_2$, y $r_3(t_3)$, $a_3 \leqslant t_3 \leqslant b_3$, son aplicaciones continuas de los segmentos $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ y $[a_3, b_3]$, respectivamente, en el espacio, entonces de $r_1(t_1) \sim r_2(t_2)$ y $r_2(t_2) \sim r_3(t_3)$ se deduce que $r_1(t_1) \sim r_3(t_3)$ es la propiedad *de transitividad.*

Si en algún conjunto de elementos está introducido un concepto de equivalencia que posee las tres propiedades indicadas (reflexividad, simetría y transitividad), entonces tal conjunto se descompone en clases disjuntas de elementos equivalentes (véase § 61). En nuestro caso se obtienen clases disjuntas de aplicaciones de segmentos, continuas y equivalentes entre sí.

Finalmente, observemos que si $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, y $\rho(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, son aplicaciones de segmentos en el espacio, continuas y equivalentes, entonces las imágenes de los segmentos $[a, b]$ y $[\alpha, \beta]$ en el espacio por las transformaciones $r(t)$ y $\rho(\tau)$ coinciden, respectivamente. Esto se deriva inmediatamente de la condición (16.3).

Pasemos ahora al concepto de curva.

Definición 3. *Cualquier conjunto Γ de aplicaciones $r(t)$ de segmentos $[a, b]$ en el espacio, continuas y equivalentes (véase la definición 2) se llama curva dada paramétricamente:*

$$\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Cada una de las aplicaciones indicadas se llama representación de esta curva.

La función vectorial $r(t)$ ($r(t)$ es un radio vector con su extremo en el punto $r(t)$) por analogía con el p. 16.1 se llama *representación vectorial de la curva* Γ *definida paramétricamente:*

$$\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Si $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces el conjunto de funciones $x(t), y(t), z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, se llama *representación coordenada de la curva* Γ *dada paramétricamente:*

$$\Gamma = \{x(t), y(t), z(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Es evidente que una curva dada paramétricamente se determina unívocamente por cada una de sus representaciones. Esto permite (lo cual es más cómodo), por ejemplo, en la escritura $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ entender el segundo miembro de la igualdad no como el conjunto de todas las representaciones de la curva Γ, sino como cierta representación $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, totalmente definida. En el futuro obraremos así no sólo en el caso indicado sino también en los casos de representaciones tanto vectoriales como coordenadas.

Ejemplo. Por nuestra definición, las curvas dadas paramétricamente

$$x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

y

$$x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t,\ 0 \leqslant t \leqslant 4\pi,$$

como ya se señaló en el p. 16.1, son curvas diferentes aunque coinciden como conjuntos de puntos del plano: estos conjuntos representan la misma circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. En el primer caso esta circunferencia "se recorre" una vez, en el segundo, dos veces.

Las representaciones

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},$$

y

$$x = \sqrt{\tau(2 - \tau)}, \quad y = \tau - 1, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 2,$$

definen la misma curva. Efectivamente, la función $\tau = 1 + \operatorname{sen} t$ es continua, crece monótonamente sobre el segmento $[-\pi/2, \pi/2]$ y transforma una representación en otra. El conjunto de todos los puntos de la curva forman en este caso la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1, x \geqslant 0$.

En la representación dada $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, para cierta curva continua y un valor fijo del parámetro t, por $r(t)$ se denota naturalmente el punto de la curva continua analizada, en el cual se transforma el punto $t \in [a, b]$ según la representación dada.

Definamos ahora qué se llama punto de una curva dada paramétricamente, es decir, de una curva definida como una clase de aplicaciones de segmentos, continuas y equivalentes.

Definición 4. *Sean* $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, *y* $\rho(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, *dos representaciones de la curva* Γ *dada paramétricamente,* φ, *la aplicación realizadora de su equivalencia (véase la definición 3) y sea* $t = \varphi(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, $a \leqslant t \leqslant b$ *(el valor* τ *y por tanto* *el valor t están fijos) y por consiguiente $r(t) = \rho(\tau)$. Denotemos este punto del espacio por P, es decir, $P = r(t) = \rho(\tau)$. Los pares (P, t) y (P, τ) se llaman equivalentes.*

La equivalencia de los pares (P, t) y (P, τ) la denotaremos con el símbolo $(P, t) \sim (P, \tau)$.

Es fácil comprobar que

1) $(P, t) \sim (P, t)$;

2) si $(P, t) \sim (P, \tau)$, entonces $(P, \tau) \sim (P, t)$;

3) si $(P, t_1) \sim (P, t_2)$ y $(P, t_2) \sim (P, t_3)$, entonces $(P, t_1) \sim (P, t_3)$.

Definición 5. *Para la curva Γ dada paramétricamente, el conjunto $\{(P, t)\}$ de todos los pares equivalentes (P está fijo) se llama punto de esta curva y el punto P del espacio, su portador.*

Cada punto $\{(P, t)\}$ de la curva $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ dada paramétricamente se determina unívocamente por cada par (P, t) y por cuanto en este par $P = r(t)$, entonces cada punto de la curva Γ se determina unívocamente por el valor del parámetro $t \in [a, b]$ en cada representación. Por esto, para mayor brevedad, los puntos de las curvas dadas paramétricamente los denotaremos no con el símbolo $\{(P, t)\}$ sino simplemente $r(t)$. Por lo dicho, esta notación tiene un sentido unívoco.

Definición 6. *El conjunto de los portadores de todos los puntos de una curva Γ dada paramétricamente se llama portador de esta curva.*

El punto P del portador de la curva Γ, la cual es portador de por lo menos dos puntos diferentes de la curva, se llama *punto múltiple* del portador de la curva Γ.

Como ya vimos en los ejemplos del p. 16.1 (véase (16.1) y (16.2)), curvas diferentes pueden tener un mismo portador. Observemos además que si $r(t) \neq r(a) = r(b)$, $a < t < b$, en una representación de la curva, entonces esta condición se cumple en cualquier otra representación. Por consiguiente el concepto de contorno cerrado (véase la definición 1 en el p. 16.1) no depende de la elección de la representación de la curva.

Pasemos ahora a la definición de curvas de otras clases. El concepto de equivalencia de aplicaciones de un segmento en el espacio se puede introducir no sólo para las aplicaciones continuas, sino para otras aplicaciones. Esto da la posibilidad de definir clases especiales de curvas dadas paramétricamente: curvas dadas paramétricamente n veces diferenciables y n veces continuamente diferenciables, n = 1, 2, ...

Definamos, por ejemplo, el concepto de equivalencia para las aplicaciones de segmentos continuamente diferenciables y la curva continuamente diferenciable dada paramétricamente.

Definición 7. *Dos aplicaciones de segmentos en el espacio continuamente diferenciables se llaman continuamente diferenciables y equivalentes si existe una función φ realizadora de su equivalencia en el sentido de la definición 2, la cual tanto ella misma como su inversa son continuamente diferenciables.*

Definición 8. *Cualquier conjunto Γ de aplicaciones continuamente diferenciables y continuamente diferenciables equivalentes de segmentos en el espacio se llama curva continuamente diferenciable dada paramétricamente.*

En general una curva dada paramétricamente de una clase se define como el conjunto de las aplicaciones de segmentos en el espacio (llamadas sus representaciones) equivalentes en algún sentido, y además la equivalencia satisface las condiciones de reflexividad, simetría y transitividad. Las aplicaciones de un segmento sobre otro que realizan esta equivalencia se llaman en este caso transformaciones admisibles del parámetro.

Cada curva dada paramétricamente de cierta clase se define unívocamente por cualquiera de sus representaciones y para ella, por el mismo esquema dado anteriormente se define el concepto de punto, portador del punto y portador de la curva. En el futuro, para simplificar, allí donde no puede llevarnos a confusiones, las curvas dadas paramétricamente y sus portadores (curvas continuas en el sentido del p. 16.1) se llamarán por un mismo término "curvas".

16.3. ORIENTACIÓN DE UNA CURVA. ARCO DE CURVA. SUMA DE CURVAS. REPRESENTACIÓN IMPLÍCITA DE CURVAS

El orden de los números (por magnitud) sobre el segmento $[a, b]$ con ayuda de una representación $r(t)$ de la curva dada $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$, naturalmente engendra el orden correspondiente de los puntos sobre la curva. El punto $r(t') \in \Gamma$ se considera anterior al punto $r(t'') \in \Gamma$ o lo que es lo mismo, el punto $r(t'')$ se considera posterior al punto $r(t')$ si $a \leqslant t' < t'' \leqslant b$. Si este mismo orden de los puntos se desea conservar en otras representaciones de la curva, entonces es necesario reducir la clase de transformaciones admisibles del parámetro, admitiendo sólo las transformaciones estrictamente crecientes del parámetro.

Definición 9. *La curva Γ definida por la clase de aplicaciones de segmentos en el espacio, continuas y equivalentes, para las cuales las transformaciones admisibles del parámetro son sólo funciones continuas estrictamente crecientes, se llama curva orientada.*

De esta forma, las funciones φ realizadoras de la equivalencia de dos representaciones de la curva orientada dada satisfacen las condiciones de la definición 2 y además son estrictamente crecientes.

En lugar de la expresión "está dada una curva orientada" a veces se dice "en la curva está dada una orientación" (es decir, un orden de los puntos).

Definición 10. *Sea $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ una curva orientada y sea $t = t(\tau)$ una función continua sobre el segmento $[\alpha, \beta]$, estrictamente decreciente y $t(\alpha) = b$, $t(\beta) = a$. La curva definida por la representación $r = r(t(\tau))$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, se llama curva orientada en sentido opuesto a la curva Γ y se denota por $-\Gamma$.*

De forma semejante se definen las curvas orientadas y orientadas en sentido opuesto de otras clases (diferenciables, continuamente diferenciables, etc.).

Si $t = t(\tau)$ es la aplicación del segmento $[\alpha, \beta]$ sobre el segmento $[a, b]$, indicada en la definición 10, $\tau_0 \in [\alpha, \beta]$ y $t_0 = t(\tau_0)$, entonces los puntos $r(t_0)$ y $r(t(\tau_0))$ de la curva Γ y la curva orientada en sentido opuesto $-\Gamma$, respectivamente, se llaman correspondientes uno a otro. Un punto de la curva Γ antecede a otro punto de esta curva si y sólo si el punto de la curva $-\Gamma$ correspondiente al primer punto es posterior al punto correspondiente al segundo. Con esto se justifica el término de "curva orientada en sentido opuesto".

Si $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, es una representaicón de la curva Γ, entonces $r(a + b - \tau)$, $a \leqslant \tau \leqslant b$ es una representaicón de la curva orientada en sentido opuesto $-\Gamma$ ya que la función $t = a + b - \tau$, $a \leqslant \tau \leqslant b$, decrece estrictamente y aplica el segmento $[a, b]$ sobre sí mismo.

Como conclusión enunciemos algunas definiciones más, útiles para el futuro.

Supongamos que está dada la curva $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$.

Definición 11. *Si* $[a', b'] \subset [a, b]$, *entonces la curva* $\Gamma' = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b'\}$ *se llama parte de la curva* Γ *(o su arco) y se escribe* $\Gamma' \subset \Gamma$.

Definición 12. *Si* $t_0 \in (a, b)$, $\Gamma_1 = \{r(t), a \leqslant t \leqslant t_0\}$, $\Gamma_2 = \{r(t), t_0 \leqslant t \leqslant b\}$, *entonces la curva* Γ *se llama suma de las curvas* Γ_1 *y* Γ_2 *y se escribe* $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Análogamente se define la suma de un número finito de curvas.

Definición 13. *La suma de un número finito de curvas continuamente diferenciables se llama curva continuamente diferenciable a trozos.*

Definición 14. *Sea* $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ *una curva plana situada sobre el plano* x, y. *Si existe una función* $F(x, y)$ *tal que las coordenadas de los puntos* (x, y) *de la curva* Γ *satisfacen la condición*

$$F(x, y) = 0, \tag{16.4}$$

entonces se dice que la ecuación (16.4) es la representación implícita de la curva Γ.

Es necesario, no obstante, tener en cuenta que en general el conjunto de todos los puntos que satisfacen una ecuación del tipo (16.4) no es una curva en el sentido definido anteriormente incluso para las funciones $F(x, y)$ suficientemente "buenas". Por ejemplo, el conjunto de los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0$ representa en sí la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y el punto $(0; 0)$. Se puede mostrar que este conjunto no es la imagen continua de un segmento.

En el caso del espacio se pueden dar las curvas de forma implícita, pero ya con ayuda de un sistema de dos ecuaciones:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

Más detalladamente nos ocuparemos de este problema en el p. 41.3.

Finalmente señalemos que una curva siempre es acotada, es decir, está en cierta esfera. Esto se deduce de que las funciones de la representación coordenada de la curva según el teorema de Bolzano — Weierstrass son acotadas en virtud de su continuidad. Junto con esto, ya en la matemática elemental se encuentran curvas no acotadas. A tales curvas pertenecen por ejemplo, la recta, la parábola, la hipérbola, el sinusoide, la gráfica de tg x, etc. Para abarcar tales "curvas" se puede definir la clase de las así llamadas *curvas abiertas* por el esquema desarrollado anteriormente en el cual como base se toma una aplicación continua de un intervalo y no de un segmento, como esto fue hecho antes. Las curvas abiertas, en particular, pueden ser no acotadas. El enunciado, detallado y exacto de todos estos conceptos se le deja hacer al lector a medida de sus necesidades.

16.4. TANGENTE A LA CURVA. SENTIDO GEOMÉTRICO DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Supongamos que está dada la curva $\Gamma = \{r(t), a \leqslant t \leqslant b\}$ que la función vectorial $r(t)$ es diferenciable en el punto $t_0 \in [a, b]$ y $r'(t_0) \neq 0$. Por cuanto en virtud

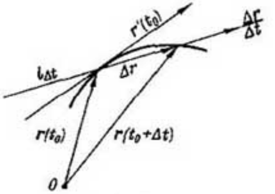


FIG. 73

de la definición de diferenciabilidad

$$\Delta r = r(t_0 + \Delta t) - r(t_0) = r'(t_0)\Delta t + o(\Delta t), \quad \Delta t \to 0,$$

entonces para todos los $\Delta t \neq 0$ suficientemente pequeños tiene lugar la desigualdad

$$r(t_0 + \Delta t) \neq r(t_0).$$

Efectivamente, en las suposiciones hechas $r'(t_0)\Delta t \neq 0$, por esto para todos los $\Delta t \neq 0$ suficientemente pequeños tendremos

$$r'(t_0)\Delta t + o(\Delta t) \neq 0.$$

La recta trazada por los puntos $r(t_0)$ y $r(t_0 + \Delta t)$ se llama *secante* para la curva Γ. Denotémosla por $l_{\Delta t}$ (fig. 73). Para todos los $\Delta t \neq 0$ suficientemente pequeños, en virtud de la condición $r(t_0) \neq r(t_0 + \Delta t)$ la secante $l_{\Delta t}$ está definida unívocamente. Por cuanto el vector $\Delta r = r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)$ es paralelo a esta secante, entonces el vector $\frac{\Delta r}{\Delta t}$, $\Delta t \neq 0$, que se diferencia del vector Δr sólo en el factor escalar $1/\Delta t$ también es paralelo a ella.

Por condición, en el punto t_0 existe la derivada, es decir, el límite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = r'(t_0). \tag{16.5}$$

Ya que todas las secantes pasan por un mismo punto $r(t_0)$ entonces la fórmula (16.5) geométricamente significa que las secantes $l_{\Delta t}$, cuando Δt tiende a cero, tienden a cierta posición límite, es decir, a una recta que pasa por este mismo punto $r(t_0)$ en el sentido del vector $r'(t_0)$. Esta recta, en virtud de la condición $r'(t_0) \neq 0$, está definida unívocamente. Ella se llama *tangente a la curva* Γ en el punto $r(t_0)$.

De esta forma, en virtud de la propia definición de tangente a la curva Γ en el punto $r(t_0)$, la derivada $r'(t_0)$ de la función vectorial $r(t)$ en el caso cuando $r'(t_0) \neq 0$, es un vector paralelo a la tangente en el punto $r(t_0)$. Si el origen del vector $r'(t_0)$ lo trasladamos a este punto, como se hace usualmente, entonces estará dirigido por la tangente.

En el caso analizado la diferencial $dr(t_0) = r'(t_0)dt$ también está orientada por la tangente a la curva, ya que se diferencia de la derivada sólo en el factor escalar dt. El vector $t = r'/|r'|$, $r' \neq 0$ es el vector unidad orientado por la tangente. El vector Δr para $\Delta t > 0$ está orientado desde el punto de la curva con el menor valor del parámetro al punto con mayor valor del parámetro, por lo que se puede decir que el vector Δr para $\Delta t > 0$ muestra el sentido en el cual el parámetro crece sobre la curva, es decir, como se dice, el sentido positivo sobre la curva. El vector $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ para $\Delta t > 0$ tiene el mismo sentido que el vector Δr. Por cuanto $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = r'(t)$, entonces es natural decir que el vector $r'(t)$ y por tanto el vector t, el cual se diferencia del vector $r'(t)$, podría ser en un factor numérico positivo $1/|r'(t)|$, también está orientado en el sentido de crecimiento del parámetro y que su orientación (sentido) corresponde a la orientación de la curva. El sentido del vector t (o lo que es lo mismo, del vector r') se llama *sentido positivo de la tangente*.

La ecuación de la tangente a la curva Γ en el punto $r(t_0)$ para la cual $r'(t_0) \neq 0$ en escritura vectorial tiene la forma

$$r = r(t_0) + r'(t_0)\tau, \quad -\infty < \tau < +\infty,$$

donde r es el radio vector corriente de la tangente. En escritura por coordenadas la ecuación de la tangente en este caso tiene la forma

$$\begin{aligned} x &= x(t_0) + x'(t_0)\tau, \\ y &= y(t_0) + y'(t_0)\tau, \\ z &= z(t_0) + z'(t_0)\tau, \\ -\infty &< \tau < +\infty. \end{aligned}$$

Eliminando la variable τ obtenemos

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

Definición 15. *Sea Γ una curva diferenciable y $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, su representación vectorial. El punto de la curva Γ en el cual $r' \neq 0$ se llama punto no singular y el punto en el cual $r' = 0$, singular.*

Si $r = (x(t), y(t), z(t))$, entonces de la igualdad $|r'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ (véase el p. 15.2) tenemos: *el punto $(x(t), y(t), z(t))$ de la curva Γ no es singular si y sólo si en él $x'^2 + y'^2 + z'^2 > 0$, es decir, al menos una de las derivadas x', y' y z' no se convierte en cero.*

De acuerdo con lo demostrado anteriormente *en cualquier punto no singular de la curva Γ existe la tangente.*

En la definición 15 sería formalmente más correcto hablar de un punto singular y no singular de la curva en una representación dada. Esto no fue hecho por cuanto el concepto de punto singular no depende de la elección de la representación de la curva. Esclarezcamos y demostremos esto.

Las transformaciones admisibles del parámetro para las curvas diferenciables son las funciones $t = t(\tau)$, que tanto ellas como sus inversas son funciones diferenciables estrictamente monótonas. Por esto, en virtud del teorema 3 del p. 9.6 sobre la derivada de la función inversa tenemos $t'_\tau \tau'_t = 1$. De aquí se deduce que para cada transformación admisible $t = t(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, del parámetro de una curva diferenciable, siempre $t'(\tau) \neq 0$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$. Por cuanto

$$x_\tau'^2 + y_\tau'^2 + z_\tau'^2 = (x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2)t_\tau'^2,$$

entonces un punto no singular en una representación de la curva diferenciable será al mismo tiempo no singular en cualquier otra representación.

Definición 16. *Una curva continuamente diferenciable sin puntos singulares se llama curva suave.*

Una curva representable como suma de un número finito de curvas suaves se llama suave a trozos.

Señalemos que si una curva plana tiene una representación explícita $y = y(x)$ ó $x = x(y)$, entonces para ella el vector $(x'(t), y'(t))$ es siempre no nulo: en el primer caso es $(1, y')$ y en el segundo $(x', 1)$.

De forma análoga se define la tangente como la posición límite de la secante y de la curva $\Gamma = \{r(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ en el punto $r(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$ en el caso cuando $r'(t_0) = 0$, pero existe cierto número natural $n > 1$ para el cual $r^{(n)}(t_0) \neq 0$.

Si todos los $r^{(k)}(t_0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, y $r^{(n)}(t_0) \neq 0$, entonces desarrollando Δr por la fórmula de Taylor obtendremos

$$\Delta r = r(t_0 + \Delta t) - r(t_0) = \frac{1}{n!} r^{(n)}(t_0)\Delta t^n + o(\Delta t^n), \quad \Delta t \to 0.$$

El vector $\dfrac{\Delta r}{\Delta t^n}$ está orientado paralelamente a la secante $l_{\Delta t}$ que pasa por los puntos $r(t_0)$ y $r(t_0 + \Delta t)$. De la igualdad escrita se deriva evidentemente que existe el límite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t^n} = \frac{1}{n!} r^{(n)}(t_0) \neq 0.$$

Por esto en este caso la posición límite de la secante $l_{\Delta t}$, es decir, la tangente en el punto $r(t_0)$ es la recta que pasa por el punto $r(t_0)$ paralelamente al vector $r^{(n)}(t_0)$.

16.5. LONGITUD DEL ARCO DE UNA CURVA

Antes de definir el concepto de longitud del arco de una curva introduzcamos el concepto de partición de un segmento, un concepto que repetidas veces se encontrará en el futuro.

Definición 17. *Para cualquier segmento $[a, b]$, al sistema de sus puntos t_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ tales que*

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = b,$$

lo llamaremos su partición y lo denotaremos por $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}$.

Supongamos que se da la curva $\Gamma = \{r(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ y sea $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}$ alguna partición del segmento $[a, b]$. Pongamos

$$\sigma_\tau \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} |r(t_i) - r(t_{i-1})|.$$

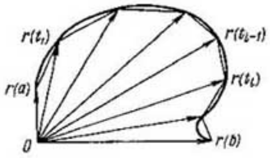


FIG. 74

Evidentemente (fig. 74) σ_τ es la longitud de la quebrada con vértices $r(a)$, $r(t_1)$, ..., $r(t_{n-1})$, $r(b)$, es decir, como se dice habitualmente, de la *quebrada inscrita en la curva* Γ.

Cualquier quebrada, en particular la inscrita en la curva $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$, se puede analizar como una curva en el sentido de la definición dada anteriormente si damos su representación. Sea λ una quebrada, es decir, el conjunto de puntos compuesto por un número finito de segmentos con vértices en los puntos $M_0, M_1, \ldots, M_n$ (estos segmentos se llaman eslabones de la quebrada). Tomemos algún segmento $[a, b]$ y cualquier partición de éste en n segmentos: $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}$. Para mayor simplicidad siempre consideraremos que la representaicón de la quebrada es una aplicación continau $\rho(t)$ que transforma linealmente cada segmento $[t_{i-1}, t_i]$ sobre el segmento $M_{i-1}M_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$; de tal forma, si denotamos por ρ_i el radio vector del punto M_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, entonces la representaicón vectorial de la quebrada tendrá la forma

$$\rho(t) = \frac{\rho_i - \rho_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1}) + \rho_{i-1}, \quad t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Si $M_{i-1} \neq M_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces la quebrada se llama *no degenerada*.

Definición 18. *La magnitud*

$$S_\Gamma = \sup_\tau \tau_\tau$$

donde la cota superior se toma por todas las particiones τ *posibles del segmento* $[a, b]$ *se llama longitud de la curva* Γ.

Si $S_\Gamma < +\infty$, *entonces la curva* Γ *se llama curva rectificable.*

Por esta definición la rectificabilidad de una curva y su longitud no dependen de la elección de la representación de la curva y siempre

$$0 \leqslant S_\Gamma \leqslant +\infty.$$

Ejercicio 1. Demuéstrese que una curva que sea una parte de una curva rectificable es también rectificable.

Lema 2. *Sea* $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_b$, *entonces*

$$S_\Gamma = S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}. \tag{16.6}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $a < c < b$ y

$$\Gamma = \{r(t), a \leqslant t \leqslant b\}, \quad \Gamma_a = \{r(t), a \leqslant t \leqslant c\},$$
$$\Gamma_b = \{r(t), c \leqslant t \leqslant b\}.$$

Sea τ una partición del segmento $[a, b]$ y τ^* una partición de este mismo segmento que coincide con τ si el punto c entra en la partición τ y que se obtiene de τ agregándole el punto c si este punto no entra en la partición τ. La partición τ^* es la unión de las dos particiones de los segmentos $[a, c]$ y $[c, b]$ que denotaremos respectivamente τ_a y τ_b, es decir, $\tau^* = \tau_a \cup \tau_b$. Evidentemente para las longitudes de las quebradas correspondientes a las particiones τ^*, τ_a y τ_b es válida la igualdad $\sigma_{\tau^*} = \sigma_{\tau_a} + \sigma_{\tau_b}$. Pero $\sup\limits_{\tau_a} \sigma_{\tau_a} = S_{\Gamma_a}$, $\sup\limits_{\tau_b} \sigma_{\tau_b} = S_{\Gamma_b}$ por consiguiente

$$\sigma_{\tau^*} \leqslant S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}.$$

En el paso de la partición τ a la partición τ^* puede ocurrir que sólo un eslabón $r(t_{i-1})r(t_i)$ se cambia por dos $r(t_{i-1})r(c)$ y $r(c)r(t_i)$ y por cuanto $|r(t_{i-1})r(t_i)| \leqslant$ $\leqslant |r(t_{i-1})r(c)| + |r(c)r(t_i)|$, entonces $\sigma_\tau \leqslant \sigma_{\tau^*}$ y por consiguiente

$$\sigma_\tau \leqslant S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}.$$

Pero $S_\Gamma = \sup\limits_\tau \sigma_\tau$ por lo que

$$S_\Gamma \leqslant S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}. \tag{16.7}$$

Demostremos ahora la desigualdad opuesta. Para particiones arbitrarias τ_a y τ_b de los segmentos $[a, c]$ y $[c, b]$, respectivamente, y la partición $\tau^* = \tau_a \cup \tau_b$ del segmento $[a, b]$ tenemos $\sigma_{\tau_a} + \sigma_{\tau_b} = \sigma_{\tau^*} \leqslant S_\Gamma$. De aquí, $\sigma_{\tau_a} \leqslant S_\Gamma - \sigma_{\tau_b}$, fijando la partición τ_b y pasando a la cota superior σ_{τ_a} para todos los τ_a posibles obtenemos la desigualdad $S_{\Gamma_a} \leqslant S_\Gamma - \sigma_{\tau_b}$ y luego

$$S_{\Gamma_a} + \sigma_{\tau_b} \leqslant S_\Gamma.$$

Tomando la cota superior del conjunto de números σ_{τ_b} que se obtiene en todas las posibles particiones τ_b tendremos:

$$S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b} \leqslant S_\Gamma. \square$$

Señalemos que en el lema 2 no se supone que las curvas analizadas son rectificables.

Problema 12. Constrúyase un ejemplo de curva no rectificable.

Teorema 1. *Si la curva* $\Gamma = \{r(t), a \leqslant t \leqslant b\}$ *es continuamente diferenciable, entonces es rectificable y su longitud* S_Γ *satisface la desigualdad*

$$|r(b) - r(a)| \leqslant S_\Gamma \leqslant M(b - a), \tag{16.9}$$

donde

$$M = \max_{[a, b]} |r'(t)|. \tag{16.10}$$

Señalemos que en virtud de la continuidad de la derivada $r'(t)$ su valor absoluto $|r'(t)|$ también es continuo y por esto alcanza su valor máximo M sobre el segmento $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos cualquier partición $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}$ del segmento $[a, b]$. Entonces aplicando la desigualdad (15.11) obtendremos

$$|r(b) - r(a)| = |\sum_{i=1}^{n} r(t_i) - r(t_{i-1})| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |r(t_i) - r(t_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |r'(\xi_i)|(t_i - t_{i-1}), \tag{16.11}$$

donde $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$, $t = 1, 2, \ldots, n$.

Por cuanto

$$\sum_{i=1}^{n} |r(t_i) - r(t_{i-1})| = \sigma_\tau$$

es la longitud de la quebrada inscrita en la curva Γ correspondiente a la partición τ y para todos los $i = 1, 2, \ldots, n$ en virtud de (16.10) tiene lugar la desigualdad $|r'(\xi_i)| \leqslant M$, entonces de la desigualdad (16.11) para cualquier partición τ tendremos

$$|r(b) - r(a)| \leqslant \sigma_\tau \leqslant M \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = M(b - a). \tag{16.12}$$

Pasando en esta desigualdad a la cota superior por τ obtendremos la afirmación del teorema. □

Teorema 2. *Sea la curva $\Gamma = \{r(t) = (x(t), y(t), z(t));\ a \leqslant t \leqslant b\}$ continuamente diferenciable. Entonces la longitud variable del arco s, calculada desde el origen $r(a)$ de la curva Γ o respectivamente desde su extremo $r(b)$, es una función continuamente diferenciable del parámetro t y creciente, respectivamente decreciente, y además*

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \left|\frac{dr}{dt}\right|, \tag{16.13}$$

respecitvamente

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = -\left|\frac{dr}{dt}\right|. \tag{16.14}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $s = s(t)$ la longitud del arco de la curva Γ desde el punto $r(a)$ hasta el punto $r(t)$. Supongamos que $t_0 \in [a, b]$, $t_0 + \Delta t \in [a, b]$ y $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t)$. Es evidente que la función $s \twoheadrightarrow s(t)$ crece sobre el segmento $[a, b]$, es decir, si $\Delta t > 0$, entonces $\Delta s \geqslant 0$; si $\Delta t < 0$, entonces $\Delta s \leqslant 0$. Por esto siempre $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} \geqslant 0$.

Aplicando la desigualdad (16.9) a la parte de la curva Γ correspondiente al segmento $[t_0, t_0 + \Delta t]$ para $\Delta t > 0$ (respectivamente al segmento $[t_0 + \Delta t, t_0]$ para $\Delta t < 0$) obtendremos

$$|r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)| \leqslant |\Delta s| \leqslant M|\Delta t|;$$

de donde
$$\left|\frac{r(t_0+\Delta t)-r(t_0)}{\Delta t}\right| \leqslant \frac{\Delta s}{\Delta t} \leqslant M, \tag{16.15}$$

donde M es el valor máximo del $|r'(t)|$ sobre el segmento $[t_0, t_0 + \Delta t]$ para $\Delta t > 0$ o sobre el segmento $[t_0 + \Delta t, t_0]$ para $\Delta t < 0$.

En virtud de la continuidad de la derivada $r'(t)$ su valor absoluto $|r'(t)|$ también es continuo y por esto su valor máximo existe, es decir, se alcanza en cierto punto $\xi = t_0 + \theta\Delta t$, $0 < \theta < 1$, del segmento indicado. Por esto la desigualdad (16.15) se puede escribir en la forma
$$\left|\frac{r(t_0+\Delta t)-r(t_0)}{\Delta t}\right| \leqslant \frac{\Delta s}{\Delta t} \leqslant |r'(t_0+\theta\Delta t)|, \quad 0<\theta<1.$$
Pasando aquí al límite cuando $\Delta t \to 0$ en el primer miembro de la desigualdad según la definición de derivada y en el segundo según la continuidad de la derivada $r'(t)$ en el punto $t = t_0$ obtenemos $|r'(t_0)|$. Por consiguiente el límite $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$ existe y también es igual a $|r'(t_0)|$, es decir, existe la derivada $s'(t_0)$ y $s'(t_0) = |r'(t_0)|$.

Si $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ y por esto
$$s'(t) = |r'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}.$$

Si ahora $\sigma = \sigma(t)$ es la longitud variable del arco calculada desde el extremo $r(b)$ de la curva Γ entonces, evidentemente $\sigma = S_\Gamma - s$ de donde diferenciando esta igualdad por t tendremos
$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{ds}{dt} = -\left|\frac{dr}{dt}\right|. \ \square$$

Corolario 1. *Si el parámetro de una curva continuamente diferenciable es la longitud variable del arco s, entonces*
$$\left|\frac{dr}{ds}\right| = 1. \tag{16.16}$$
Esto se deduce directamente de la fórmula $\left|\dfrac{dr}{dt}\right| = \dfrac{ds}{dt}$ cuando $t = s$.

OBSERVACIÓN. La fórmula (16.16) tiene un sentido geométrico simple. Esclarezcámoslo. Supongamos que el parámetro de la curva continuamente diferenciable Γ es la longitud variable de arco s: $\Gamma = \{r(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S_\Gamma\}$. La magnitud $|\Delta r| = |r(s + \Delta s) - r(s)|$ es igual a la longitud del segmento que une a los puntos $r(s)$ y $r(s + \Delta s)$. Este segmento se llama comúnmente cuerda que comprende el arco de la curva Γ con origen en el punto $r(s)$ y extremo en el punto $r(s + \Delta s)$. La longitud del arco indicado evidentemente es igual a $|\Delta s|$ (fig. 75). Por cuanto $\left|\dfrac{dr}{ds}\right| = \lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta r}{\Delta s}\right|$, entonces de la igualdad (16.16) se deduce que
$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta r|}{|\Delta s|} = 1.$$

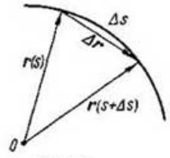


FIG. 75

Esto significa que el límite de la relación de la longitud del arco a la longitud de la cuerda que la abarca es igual a uno cuando el arco se reduce al punto. En esto consiste el sentido geométrico de la fórmula (16.16).

Corolario 2. *Para cualquier curva Γ continuamente diferenciable sin puntos singulares, es decir, para cualquier curva suave existe la representación $r = r(s)$ en la cual por el parámetro s está tomada la longitud variable del arco de la curva Γ.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la curva $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ continuamente diferenciable no tiene puntos singulares, es decir, $r'(t) \neq 0$ para todos los $t \in [a, b]$. En este caso la longitud variable del arco $s = s(t)$ es una función estrictamente creciente y continuamente diferenciable ya que $\dfrac{ds}{dt} = |r'| > 0$ en todos los puntos de $[a, b]$. Por esto existe la función inversa $t = t(s)$, $0 \leqslant s \leqslant S_\Gamma$ la cual también crece estrictamente y tiene derivada continua que no se anula sobre el segmento $[0, S_\Gamma]$, es decir, la función $t = t(s)$ es una transformación admisible del parámetro para las curvas continuamente diferenciables sin puntos singulares y la representación $r = r(t(s))$ es la representación buscada en la cual el papel de parámetro lo juega la longitud variable del arco. □

Esclarezcamos ahora el sentido geométrico de las coordenadas del vector $\dfrac{dr}{ds}$. Denotemos por α, β y γ los ángulos formados por el vector $\dfrac{dr}{ds}$ o lo que es lo mismo, por la tangente a la curva $\Gamma = \{r(s)\}$ con los ejes Ox, Oy, y Oz, respectivamente. Entonces de la igualdad $\left|\dfrac{dr}{ds}\right| = 1$, evidentemente, se deduce que las proyecciones del vector $\dfrac{dr}{ds}$ sobre los ejes coordenados son iguales a los cosenos directores del vector $\dfrac{dr}{ds}$: $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$, respectivamente, es decir,

$$\frac{dr}{ds} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \tag{16.17}$$

Conjuntamente con esto para la función vectorial $r(s) = (x(s), y(s), z(s))$ como para cualquier función vectorial (véase el p. 15.2) tenemos

$$\frac{dr}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right). \tag{16.18}$$

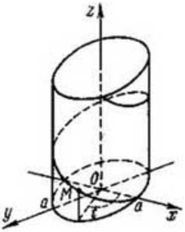


FIG. 76

Comparando (16.17) y (16.18) obtenemos

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos \beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos \gamma. \tag{16.19}$$

En calidad de ejemplo analicemos la curva llamada ***hélice***. Esta curva está dada por la representación

$$x = a \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad z = bt, \quad a^2 + b^2 \neq 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Es evidente que la hélice es una curva diferenciable infinitas veces y ya que

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2 = a^2 + b^2 \neq 0,$$

entonces no tiene puntos singulares (fig. 76). Por consiguiente la longitud variable de su arco se puede tomar como parámetro.
Hallemos la representación correspondiente. De acuerdo con la fórmula (16.13) tenemos

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

De aquí $\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ y ya que $t(0) = 0$, entonces $t = \dfrac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Por esto la representación buscada tiene la forma

$$x(s) = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y(s) = a \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$z(s) = \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad 0 \leqslant s \leqslant T\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ejercicio 2. Demuéstrese que para una curva rectificable sin puntos múltiples, la longitud variable del arco es una *función del parámetro continua y estrictamente monótona*.

16.6. CURVAS PLANAS

Sea $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ una curva plana continuamente diferenciable que está en el plano xOy,

$$r(t) = (x(t), y(t))$$

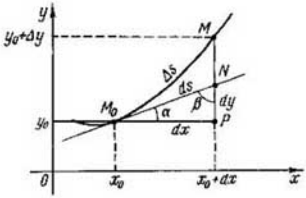


FIG. 77

y sea $s = s(t)$ la longitud variable del arco de la curva Γ. Para su derivada, de las fórmulas (16.13) y (16.14) obtenemos

$$\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, \tag{16.20}$$

aquí el signo "+" se toma si la longitud del arco $s(t)$ se calcula desde el punto de origen de la curva $r(a)$ y el signo "−" si se calçula desde el punto extremo $r(b)$. De la fórmula (16.20) para la diferencial del arco obtenemos la expresión

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \tag{16.21}$$

Sea $(x(t_0), y(t_0))$ un punto no singular, es decir, $x'^2(t_0) + y'^2(t_0) > 0$, por ejemplo, $x'(t_0) \neq 0$. Sea para mayor precisión $x'(t_0) > 0$, entonces en cierto entorno del punto t_0 también $x'(t) > 0$ y quiere decir que la función $x(t)$ crece estrictamente en este entorno, por lo que existe la función inversa $t = t(x)$ continuamente diferenciable. Sustituyéndola en la representación de la curva Γ hallamos

$$y = y(t(x)) = f(x),$$

es decir, en cierto entorno de un punto no singular una curva continuamente diferenciable es la gráfica de una función f continuamente diferenciable; más exactamente, existe un entorno del punto t_0 y una función f continuamente diferenciable definida sobre cierto intervalo que contiene el punto $x_0 = x(t_0)$ tales que la parte de la curva correspondiente a los valores del parámetro que pertenecen al entorno del punto t_0 indicado, es la gráfica de la función f.

En el caso cuando la curva Γ es la gráfica de una función $y = f(x)$ continuamente diferenciable, la fórmula (16.20) se convierte en la fórmula

$$\frac{ds}{dx} = \pm\sqrt{1 + y'^2} \text{ y por consiguiente } ds = \pm\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Vemos el sentido geométrico de la fórmula (16.21) en el caso cuando Γ es la gráfica de una función $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, continuamente diferenciable y la longitud del arco de la curva se calcula desde el punto de origen de la curva (fig. 77). Sea

$$x_0 \in [a, b],\ x_0 + dx \in [a, b],\ y_0 = f(x_0),$$
$$M_0 = (x_0, y_0),\ y_0 + \Delta y = f(x_0 + dx),\ M = (x_0 + dx, y_0 + \Delta y),$$

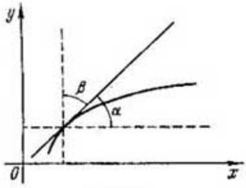


FIG. 78

M_0N es la tangente en el punto M_0, $PM = \Delta y$ es el incremento de la función en el punto $x_0 + dx$, $PN = dy$ es el incremento de la ordenada de la tangente en el punto $x_0 + dx$. El triángulo M_0NP es rectángulo; por cuanto $M_0P = dx$, $PN = dy$ entonces

$$M_0N^2 = M_0P^2 + PN^2 = dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

es decir, la longitud del segmento de tangente M_0N es igual a ds. Dicho de otro modo, el incremento de la longitud de la tangente $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ es igual a la parte principal ds del incremento de la longitud del arco Δs.

Si ahora sobre la curva Γ en calidad de parámetro es tomada la longitud variable del arco s: $\Gamma = \{r(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S_\Gamma\}$, entonces por (16.19)

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \frac{dy}{ds} = \cos\beta = \operatorname{sen}\alpha, \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \tag{16.22}$$

donde (fig. 78) α es el ángulo formado por la tangente con el eje Ox, y β con el eje Oy.

Señalemos que estas fórmulas pueden ser obtenidas con la aplicación al "triángulo curvo M_0MP (véase la fig. 77) de las fórmulas que expresan el seno y el coseno de los ángulos de un triángulo rectángulo común a través de sus catetos y su hipotenusa, considerando los lados del "triángulo" indicado M_0MP iguales a dx, dy, ds, respectivamente. Semejante situación tiene lugar para las fórmulas espaciales (16.19). Tal método de obtención de las fórmulas (16.19) y (16.22) naturalmente no está fundamentado y no tiene fuerza de demostración, no obstante facilita la memorización de estas fórmulas.

16.7. SENTIDO FÍSICO DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Supongamos que ahora la hodógrafa Γ de la función vectorial $r(t)$ continuamente diferenciable es la trayectoria de un punto material que se mueve y el parámetro t, el tiempo de movimiento. Denotemos la longitud variable del arco medida desde cierto punto inicial $r(t_0)$ por $s = s(t)$. Sea $t > t_0$; haciendo $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$ por (16.13) obtendremos

$$\left|\frac{dr}{\mathrm{dt}}\right| = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

es decir, la longitud del vector $\frac{dr}{dt}$ coincide con la magnitud de la velocidad en el punto analizado (véase el p. 9.4), y el propio vector $\frac{dr}{dt}$, como sabemos (véase el p. 16.2), está orientado por la tangente. El vector $\frac{dr}{dt}$ se llama en este caso *velocidad del movimiento* en el punto dado y se denota por v:

$$v = \frac{dr}{dt}.$$

§ 17. CURVATURA DE UNA CURVA

17.1. DOS LEMAS. COMPONENTES RADIAL Y TRANSVERSAL DE LA VELOCIDAD

Demostremos dos lemas sobre las derivadas de una función vectorial muy útiles para el futuro.

Lema 1. *Supongamos que la función vectorial $r(t)$ tiene derivada en el punto t_0. Si la longitud del vector $r(t)$ en un entorno del punto t_0 es constante, entonces el vector $r'(t_0)$ es ortogonal al vector $r(t_0)$, es decir,*

$$r'(t_0)r(t) = 0. \tag{17.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Según la condición existe un entorno del punto t_0 en el cual la longitud del vector $r(t)$ es constante: $|r(t)| = c$, donde c es una constante. Por esto, para todos los puntos del entorno indicado tenemos $|r(t)|^2 = c^2$ y por consiguiente $r^2(t) = c^2$. Diferenciando ambos miembros de la igualdad en el punto t_0 obtendremos (véase el p. 15.2) $2r(t_0)r'(t_0) = 0$ de donde se deduce (17.1). □

La interpretación física de este lema consiste en que un punto material que se mueve de forma tal que todo el tiempo se encuentra sobre la superficie de una esfera, tiene una velocidad orientada por la tangente a esta esfera y por consiguiente perpendicular al radio vector.

Supongamos que la función $r(t)$ está definida en cierto entorno $U(t_0)$ del punto t_0 y supongamos que en este entorno $r(t) \neq 0$ (si la función vectorial $r(t)$ es continua en el punto t_0, entonces la desigualdad a cero del radio vector $r(t)$ en un entorno del punto t_0 suficientemente pequeño siempre se puede obtener moviendo el origen de coordenadas). Sea $t = t_0 + \Delta t \in U(t_0)$ y sea $\varphi = \varphi(t)$ el ángulo (representado en radianes) entre los vectores $r(t_0)$ y $r(t)$, $|\varphi| \leqslant \pi$ y además consideraremos que $\varphi(t) \geqslant 0$ para $\Delta t \geqslant 0$ y $\varphi \leqslant 0$ para $\Delta t < 0$. En el punto t_0 para el incremento $\Delta\varphi$ de la función φ tenemos

$$\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \varphi(t),$$

ya que $\varphi(t_0) = 0$; por lo que siempre $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \geqslant 0$.

Definición 1. *La derivada $\frac{d\varphi(t_0)}{dt}$ se llama velocidad de rotación de la función vectorial $r(t)$ en el punto t_0 y se denota por $\omega = \omega(t_0; r(t))$:*

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{17.2}$$

Observemos que si se escoge el sentido opuesto de medición de los ángulos, es decir, definimos el ángulo entre los vectores $r(t_0)$ y $r(t)$ como el ángulo $\psi = -\varphi$, entonces, evidentemente,

$$\frac{d\psi}{dt} \leqslant 0 \quad \text{y} \quad \omega(t_0; r) = \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\psi}{dt} = \left|\frac{d\psi}{dt}\right|.$$

De esta forma, tanto en una como en la otra medición de los ángulos φ entre los vectores $r(t_0)$ y $r(t)$ siempre

$$\omega(t_0; r) = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|.$$

Lema 2. *Supongamos que la función vectorial $r(t)$ está definida en cierto entorno del punto t_0 y $r(t_0) \neq 0$. Si en el punto t_0 existe la derivada $r'(t_0)$, entonces en este punto existe también la velocidad de rotación $\omega = \omega(t_0; r(t))$ y además*

$$\omega = \frac{1}{r^2(t_0)}\,|r(t_0) \times r'(t_0)|. \tag{17.3}$$

Corolario. *Si como complemento a las condiciones del lema, la longitud del vector $r(t)$ es constante: $|r(t)| = r$, r es una constante, entonces*

$$\omega = |r'(t)|/r. \tag{17.4}$$

DEMOSTRACIÓN. En virtud de la existencia de la derivada $r'(t_0)$ la función $r(t)$ es continua en el punto t_0. De aquí y de la condición $r(t_0) \neq 0$ se deduce que para todos los Δt suficientemente pequeños se cumple la desigualdad $r(t_0 + \Delta t) \neq 0$ y por consiguiente está definido el ángulo $\Delta\varphi$ entre los vectores $r(t_0)$ y $r(t_0 + \Delta t)$. De la continuidad de la función vectorial $r(t)$ en el punto t_0 se deduce también *) la continuidad en el punto t_0 de la función $\varphi(t)$, es decir,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta\varphi = 0$$

(como siempre $\Delta t = t - t_0$, $\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \varphi(t)$, ya que $\varphi(t_0) = 0$).

Para el cálculo de la derivada (17.2) sustituyamos el infinitésimo $\Delta\varphi$ por el infinitésimo equivalente a él cuando $\Delta t \to 0$, sen $\Delta\varphi$ (véase el lema en el p. 8.2) el cual se puede hallar de la fórmula

$$|r(t_0) \times r(t_0 + \Delta t)| = |r_0(t_0)|\,|r(t_0 + \Delta t)|\,|\text{sen}\,\Delta\varphi|.$$

Por el teorema 2 del p. 8.3 sobre la sustitución de los infinitésimos por sus equivalentes en el cálculo de los límites tenemos:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\text{sen}\,\Delta\varphi}{\Delta t}\right| =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|r(t_0) \times r(t_0 + \Delta t)|}{|r(t_0)|\,|r(t_0 + \Delta t)|\,|\Delta t|} = \frac{1}{r^2(t_0)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|r(t_0) \times r(t_0 + \Delta t)|}{|\Delta t|}. \tag{17.5}$$

---

*) Esto se deduce, por ejemplo, de la igualdad $\cos\varphi = \dfrac{r(t_0)r(t)}{|r(t_0)|\,|r(t)|}$.

Aquí de nuevo fue utilizada la continuidad de la función vectorial $r(t)$ en el punto t_0: $\lim\limits_{\Delta t \to \infty} r(t_0 + \Delta t) = r(t_0)$.

Más adelante, por cuanto la función $r(t)$ es diferenciable en el punto t_0, entonces

$$r(t_0 + \Delta t) = r(t_0) + r'(t_0)\Delta t + \varepsilon(\Delta t)\Delta t,$$

donde $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t) = 0$. Sustituyendo esta expresión para $r(t_0 + \Delta t)$ en (17.5) y observando que $|r(t_0) \times r(t_0)| = 0$ y $\lim\limits_{\Delta t \to 0} |r(t_0) \times \varepsilon(\Delta t)| = 0$ obtendremos:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{|r(t_0) \times r'(t_0)|}{r^2(t_0)}. \ \square$$

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Si $|r(t)| = r$ es constante, entonces según el lema 1, $r(t_0)r'(t_0) = 0$, es decir, $|r(t_0)||r'(t_0)| \cos \widehat{rr'} = 0$. Por cuanto $|r(t_0)| \neq 0$, entonces o bien $|r'(t_0)| = 0$ o bien el ángulo $\widehat{rr'}$ entre los vectores $r(t_0)$ y $r'(t_0)$ es igual a $\pm\pi/2$ y por consiguiente $|\operatorname{sen} \widehat{rr'}| = 1$. En ambos casos

$$|r(t_0) \times r'(t_0| = |r(t_0)||r'(t_0)||\operatorname{sen} \widehat{rr'}| = r|r'(t_0)|.$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula (17.3) obtendremos (17.4). $\square$

Los lemas 1 y 2 continúan siendo válidos en el caso cuando en ellos por entornos se entienden entornos unilaterales.

Para el esclarecimiento del sentido básico de las fórmulas (17.3) y (17.4) interpretaremos de nuevo la curva descrita por el extremo del radio vector $r(t)$ como la trayectoria del movimiento de un punto material y el parámetro t como el tiempo. Supongamos que la longitud del vector $r(t)$ es constante: $|r(t)| = r$, es decir, el punto se mueve por una esfera de radio r. Analicemos el movimiento del punto en cada momento como la rotación alrededor del tal llamado eje instantáneo, es decir, del eje que pasa por el origen de coordenadas perpendicularmente al plano del movimiento $\left(\text{así se llama el plano que pasa por el radio vector } r(t) \text{ paralelamente a la velocidad } v = \dfrac{dr(t)}{dt}\right)$. Entonces el vector $\omega = (r \times r')/r^2$ denota físicamente el vector de la velocidad angular y las fórmulas (17.3) y (17.4) expresan la relación entre la velocidad angular ω y la velocidad lineal v. En particular la fórmula (17.4) en esta rotación toma la forma

$$|\omega| = |v|/r.$$

OBSERVACIÓN. Utilizando el lema 1 se puede obtener fácilmente el desarrollo de la derivada de una función vectorial en dos componentes perpendiculares: en el sentido del vector $r(t)$ (*la componente radial*) y en el sentido perpendicular (*la componente transversal*).

Supongamos que la función vectorial $r(t)$ está definida en cierto entorno del punto t_0, $r(t) \neq 0$ y existe la derivada $r'(t_0)$. Hagamos $r_0(t) = \dfrac{r(t)}{|r(t)|}$; evidentemente $|r_0(t)| = 1$. En el punto t_0 existe la derivada

$$\frac{d|r|}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{r^2} = \frac{rr'}{|r|} = r_0r'.$$

por consiguiente, en el punto t_0 existe la derivada $\frac{dr_0}{dt}$ la cual por el lema 1 es ortogonal al vector $r_0(t_0)$ y por esto al vector $r(t_0)$.

Diferenciando la igualdad $r(t) = |r(t)|r_0(t)$ en el punto t_0 obtendremos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d|r|}{dt} r_0 + |r| \frac{dr_0}{dt} = (r_0 r')r_0 + |r| \frac{dr_0}{dt}. \tag{17.6}$$

Este es el desarrollo buscado.

En el caso cuando la hodógrafa de la función vectorial $r(t)$ es la trayectoria del movimiento de un punto material, entonces la fórmula (17.6) da el desarrollo de su velocidad en la componente del movimiento de traslación (la componente radial) y en la componente del movimiento de rotación (la componente transversal).

17.2. DEFINICIÓN DE CURVATURA DE UNA CURVA Y SU CÁLCULO

Sea $\Gamma = \{r(s); 0 \leqslant s \leqslant S\}$ una curva continuamente diferenciable y por consiguiente rectificable, s la longitud variable del arco $0 \leqslant s_0 \leqslant S$, $\Delta s = s - s_0$, y $\alpha = \alpha(s)$, el ángulo entre las tangentes a la curva Γ en los puntos $r(s_0)$ y $r(s_0 + \Delta s)$ y además consideraremos que $\alpha(s) \geqslant 0$ para $\Delta s \geqslant 0$ y $\alpha(s) \leqslant 0$ para $\Delta s < 0$. Evidentemente $\Delta\alpha = \alpha(s) - \alpha(s_0) = \alpha(s)$ ya que $\alpha(s_0) = 0$.

Sea ahora $t(s) = \frac{dr(s)}{ds}$. Como fue mostrado $t(s)$ es un vector unitario (véase (16.16)) paralelo a la tangente a la curva en el punto correspondiente (véase el p. 16.4) por lo que el ángulo $\Delta\alpha$ es el ángulo entre los vectores $t(s_0)$ y $t(s_0 + \Delta s)$.

Definición 2. *La velocidad angular de rotación del vector unitario $t = \frac{dr}{ds}$ en un punto dado de la curva se llama curvatura $k(s_0)$ de la curva en este punto, $k(s_0) = = \omega(s_0; t) = \frac{d\alpha(s_0)}{ds}$.*

Eliminando para mayor brevedad el valor del argumento obtenemos

$$k = \frac{d\alpha}{ds}. \tag{17.7}$$

Por cuanto $|t| = 1$ entonces en virtud del corolario del lema 2 del p. 17.1 tenemos

$$k = \left|\frac{dt}{ds}\right| \tag{17.8}$$

(si, por supuesto, la derivada $\frac{dt}{ds}$ existe).

Definición 3. *La magnitud inversa a la curvatura se llama radio de la curvatura en el punto dado y se denota por R, es decir, $R = 1/k$.*

Sea Γ una circunferencia de radio R. En este caso el ángulo $\Delta\alpha$ entre las tangentes es igual al ángulo formado por los radios de los puntos de tangencia (fig. 79) y

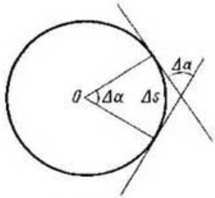


FIG. 79

para la longitud del arco Δs entre estos puntos se tiene la fórmula $\Delta s = R\Delta\alpha$. Por esto $\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \frac{1}{R}$. Según la definición de curvatura para la circunferencia tenemos

$$k = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \frac{1}{R}.$$

De esta forma, en el caso de una circunferencia, su curvatura k es constante (no depende del punto) y es igual a la magnitud inversa al radio; el radio de la curvatura de una circunferencia es igual a su radio. De aquí partió el término "radio de la curvatura".

Las condiciones suficientes de la existencia de la curvatura en un punto dado y el método de su cálculo se dan mediante el siguiente teorema.

Teorema 1. *Sea* $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ *una curva dos veces diferenciable sin puntos singulares. Entonces en cada punto existe la curvatura y*

$$k = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3}. \tag{17.9}$$

Aquí y en el futuro con la virgulilla se denotan las derivadas por un parámetro arbitrario t. Las derivadas por la longitud del arco s las denotaremos con el símbolo $\frac{d}{ds}$.

DEMOSTRACIÓN. En las suposiciones del teorema la longitud variable del arco $s = s(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, $0 \leqslant s \leqslant S$ de la curva Γ puede ser tomada en esta curva como parámetro (véase el corolario 2 del teorema 2 en el punto 16.5). Además el vector unitario tangencial $t = \frac{dr}{ds}$ es una función vectorial continuamente diferenciable y por esto para él, para cada valor $s_0 \in [0, S]$ está definida la velocidad de rotación $\omega(s_0; t)$, es decir, en cada punto de la curva Γ está definida la curvatura

$$k(s_0) = \omega(s_0; t) = \frac{d\alpha}{ds}, \tag{17.10}$$

donde $\alpha = \alpha(s)$ es el ángulo entre los vectores $\frac{dr(s_0)}{ds}$ y $\frac{dr(s)}{ds}$, escogido como se indicó al principio de este punto. En particular, esto significa que para todos los $s \in [0, S]$ se cumple la desigualdad $\frac{d\alpha(s)}{ds} \geqslant 0$.

De la fórmula
$$\frac{dr(s)}{ds} = r'(t)\frac{dt}{ds} = \frac{r'(t)}{s'}$$

se deduce que los vectores $\dfrac{dr(s)}{ds}$ y $r'(t)$ para $s = s(t)$ siempre son colineales y por cuanto la función $s'(t)$ no cambia de signo, entonces los valores indicados o bien siempre tienen un sentido (si $s'(t) > 0$) o bien siempre tienen sentido opuesto (si $s'(t) < 0$).

Además en el primer caso, a los incrementos Δt suficientemente pequeños les corresponden los incrementos Δs del mismo signo, y en el segundo, de signo opuesto. Por lo dicho, si $s_0 = s(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$ y si $\beta = \beta(t)$ es el ángulo entre los vectores $r'(t_0)$ y $r'(t)$, entonces o bien para todos los $t \in [a, b]$ será $\beta = \alpha$ o bien para todos los $t \in [a, b]$ será $\beta = -\alpha$, por lo que (véase el p. 17.1)
$$\omega(t_0, r') = \left|\frac{d\alpha}{dt}\right| \tag{17.11}$$

Ahora utilizando las fórmulas (17.10), (17.11) y el lema 2 obtendremos
$$k(s_0) = \frac{d\alpha}{ds} = \left|\frac{d\alpha}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \omega(t_0; r')\frac{1}{|s'|} = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3}$$

(utilizamos también la fórmula (16.3)). $\square$

De la fórmula (17.9) es fácil pasar a la expresión de la curvatura en la escritura por coordenada. En realidad, observando que $r' = (x', y', z')$, $r'' = (x'', y'', z'')$ y que
$$r' \times r'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

(donde i, j, k son los vectores unitarios en los sentidos de los ejes Ox, Oy, Oz respectivamente) obtenemos
$$|r' \times r''| = \sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2}, \tag{17.12}$$

por otro lado
$$|r'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}. \tag{17.13}$$

Sustituyendo (17.12) y (17.13) en (17.9) hallamos la expresión buscada.

17.3. NORMAL PRINCIPAL. PLANO OSCULADOR

Analicemos la curva Γ dos veces diferenciable sin puntos signulares. Para tal curva existe la representación $r = r(s)$ dos veces diferenciable, donde s es la longitud variable del arco, $0 \leqslant s \leqslant S$.

Denotemos por n el vector unitario en el sentido del vector $\dfrac{dt}{ds}$ donde $t = \dfrac{dr}{ds}$ es el vector unitario tangente a la curva analizada. De la fórmula (17.8) se deduce que

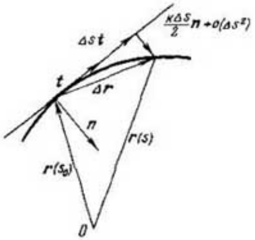


FIG. 80

el vector n está definido sólo para aquellos puntos en los cuales la curvatura $k \neq 0$ y que en estos puntos

$$\frac{dt}{ds} = kn. \tag{17.14}$$

El vector t es unitario, por lo que el vector n es perpendicular (véase el p. 17.1) al vector t. La fórmula (17.14) se llama *fórmula de Frenet* *).

El vector $\frac{d^2r}{ds^2}$ y por tanto el vector $n = \frac{1}{k}\frac{d^2r}{ds^2}$ no dependen de la elección de la orientación de la curva. Efectivamente si σ es la longitud variable del arco de la curva, calculada en el sentido contrario a s y por consiguiente si $\sigma = S - s$, entonces observando que $\frac{d\sigma}{ds} = -1$, obtendremos

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d^2r}{d\sigma^2}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \frac{d^2r}{d\sigma^2}.$$

Definición 4. *Cualquier recta que pasa por un punto de la curva y es perpendicular a la tangente en este punto se llama normal a la curva en el punto dado. La normal a la curva, paralela al vector* n, *se llama normal principal.*

El vector de la normal principal n salvo infinitésimos de orden superior que Δs^2 indica el sentido en el cual la curva en un entorno del punto dado se inclina de su tangente (fig. 80). Efectivamente, escogiendo sobre la curva en calidad de parámetro a la longitud variable del arco s, según la fórmula de Taylor para una función vectorial (véase el p. 15.2), tendremos

$$\Delta r = r(s_0 + \Delta s) - r(s_0) = \frac{dr(s_0)}{ds}\Delta s + \frac{1}{2}\frac{d^2r(s_0)}{ds^2}\Delta s^2 + o(\Delta s^2),$$

u observando que (véase 17.14)

---

*) J. F. Frenet (1801—1880), matemático francés.

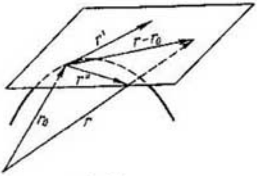


FIG. 81

$$\frac{dr}{ds} = t, \quad \frac{d^2r}{ds^2} = \frac{dt}{ds} = kn, \tag{17.15}$$

obtendremos

$$\Delta r = \Delta s t + \frac{1}{2} k \Delta s^2 n + o(\Delta s^2);$$

por cuanto $\frac{1}{2} k \Delta s^2 > 0$, entonces esta fórmula demuestra la validez de nuestra afirmación.

Definición 5. *El plano que pasa por la tangente y la normal principal en un punto dado de una curva se llama plano osculador.*

Por esta definición el plano osculador está definido para los puntos en los cuales $k \neq 0$. Hallemos la ecuación de este plano para una curva dada por la representación $r = r(t)$ con un parámetro arbitrario t. Como antes, las derivadas por el parámetro t se denotarán con una virgulilla y las derivadas por la longitud del arco s, por el símbolo $\frac{d}{ds}$. Diferenciando $r = r(t)$ como una función compuesta $r = r(s)$, $s = s(t)$ obtenemos (véase (17.15))

$$r' = \frac{dr}{ds} s' = s't, \quad r'' = s'^2 \frac{dt}{ds} + s''t = s'^2 kn + s''t. \tag{17.16}$$

De aquí se deduce que los vectores r' y r'' también son paralelos al plano osculador. En virtud de la condición $k \neq 0$ se cumple la desigualdad $r' \times r'' \neq 0$ (véase (17.9)) y por lo tanto r' y r'' no son colineales. Denotemos ahora por r_0, r'_0 y r''_0 a los vectores r, r' y r'' en algún punto fijo de la curva Γ dada y por r denotaremos al vector variable del plano osculador, entonces el producto mixto de los vectores $r - r_0$, r'_0 y r''_0 debe ser igual a cero ya que todos son paralelos al plano osculador (fig. 81):

$$(r - r_0, r'_0, r''_0) = 0.$$

Esta es la ecuación del plano indicado en la forma vectorial. En la forma coordenada se escribe de la siguiente manera.

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{vmatrix} = 0,$$

donde $r'_0 = (x'_0, y'_0, z'_0)$, $r'' = (x''_0, y''_0, z''_0)$.

En el caso cuando en el punto dado $k = 0$, entonces cualquier plano que pase por la tangente en este punto se llama *osculador*.

17.4. CENTRO DE CURVATURA Y EVOLUTA DE LA CURVA

Definición 6. *El punto del espacio que está sobre la normal principal a la curva en un punto dado y que se encuentra a una distancia R de este punto en la dirección del vector n se llama centro de la curvatura de la curva en el punto indicado.*

De esta forma, si ρ es el radio vector del centro de curvatura y r, como es común, es el radio vector del punto dado de la curva, entonces

$$\rho = r + Rn$$

o lo que es lo mismo (véase (17.15))

$$\rho = r + \frac{1}{k^2}\frac{d^2r}{ds^2}. \tag{17.17}$$

Hallemos la expresión de ρ por las derivadas de la función vectorial respecto a un parámetro t arbitrario. Según la regla de diferenciación de una función compuesta

$$\frac{dr}{ds} = r'\frac{dt}{ds} = \frac{r'}{s'},$$

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{r'}{s'}\right) = \left(\frac{r'}{s'}\right)'\frac{1}{s'} = \frac{r''s' - r's''}{s'^3}. \tag{17.18}$$

Estas fórmulas, en virtud de las fórmulas (17.15), evidentemente son la transformación de las fórmulas (17.16).

Sustituyendo (17.18) en (17.17) obtendremos

$$\rho = r + \frac{1}{k^2}\frac{s'r'' - s''r''}{s'^3}, \tag{17.19}$$

donde (considerando para mayor simplicidad que cuanto t crece la longitud del arco $s(t)$ también crece) $s' = |r'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, de donde

$$s'' = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Las fórmulas (17.17) y (17.19) se pueden analizar como representaciones de cierta curva, los puntos de la cual son los centros de curvatura de la curva dada. Esta curva se llama *evoluta* de la curva dada.

17.5. FÓRMULAS PARA LA CURVATURA Y LA EVOLUTA DE UNA CURVA PLANA

Todo lo dicho en el punto anterior, en particular es válido para las curvas planas. Observemos sólo que si la curva $\Gamma = \{r(t)\}$ está en cierto plano, entonces todas las derivadas de la función vectorial $r(t)$ también están en este plano. En realidad en él está el incremento de la función vectorial $\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$ y por lo tanto

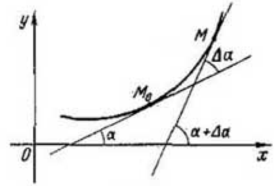


FIG. 82

la relación $\dfrac{\Delta r}{\Delta t}$. De aquí fácilmente se deduce que el límite de estas relaciones $r' = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta r}{\Delta t}$ está en el plano indicado, aplicando el mismo razonamiento a r' demostraremos que r'' está en ese mismo plano, etc.

De lo dicho se deduce que si la curva está en algún plano, entonces el vector tangente r y si su curvatura $k \neq 0$, entonces también el vector n de la normal principal, están en ese mismo plano. Por esto, este plano es el plano osculador para la curva analizada.

Señalemos también que si en el caso de la curva $\Gamma = \{r(s)\}$ que está en el plano xOy a diferencia de 17.2 mediante $\alpha(s)$ denotamos el ángulo formado por la tangente en el punto $r(s)$ con el eje Ox (fig. 82) entonces $\Delta\alpha = \alpha(s_0 + \Delta s) - \alpha(s_0)$ será el ángulo entre las tangentes en los puntos $r(s_0)$ y $r(s_0 + \Delta s)$. Si el ángulo α crece junto con s, es decir, si $\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s} \geqslant 0$ para $\Delta s > 0$, entonces $k = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \dfrac{d\alpha}{ds}$, si α decrece con el crecimiento de s, entonces

$$k = -\lim_{\Delta s \to \infty} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = -\frac{d\alpha}{ds}.$$

Escribamos algunas de las fórmulas obtenidas en el punto anterior, considerando que la curva $\Gamma = [r(t);\ a \leqslant t \leqslant b]$ está en el plano xOy: $r(t) = (x(t), y(t))$. De las fórmulas (17.9), (17.12) y (17.13) tenemos

$$k = \frac{1}{R} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \tag{17.20}$$

Denotando por (ξ, η) el centro de curvatura de la curva Γ, de las fórmulas (17.17) obtendremos las fórmulas que expresan las coordenadas ξ y η mediante las derivadas por s:

$$\xi = x + R^2 \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \eta = y + R^2 \frac{d^2y}{ds^2},$$

y de las fórmulas (17.19) y (17.20) se deducen las fórmulas que expresan las coordenadas del centro de curvatura mediante las derivadas por un parámetro t arbitrario:

$$\xi = x + \frac{(x'^2 + y'^2)^3}{(x'y'' - x''y')^2} \frac{x''\sqrt{x'^2 + y'^2} - x'\dfrac{x'x'' + y'y''}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} =$$

$$= x - y'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}; \tag{17.21}$$

análogamente

$$\eta = y + x'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}. \tag{17.22}$$

Ejercicio 1. Sea Γ una curva plana dos veces diferenciable sin puntos singulares, sea α el ángulo de inclinación de su tangente con el eje Ox y sea $k^* = \dfrac{d\alpha}{ds}$ (por consiguiente $|k^*| = k$) y $R^* = \dfrac{1}{k^*}$. Muéstrese que $\xi = x - R^*\operatorname{sen}\alpha$, $\eta = y + R^*\cos\alpha$ y también que $\xi = x - \dfrac{dy}{d\alpha}$, $\eta = y + \dfrac{dx}{d\alpha}$.

En el caso cuando la curva es la gráfica de la función $y = f(x)$ las fórmulas (17.20), (17.21) y (17.22) toman la forma

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \tag{17.23}$$

$$\xi = x - \frac{1 + y'^2}{y''}y', \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \tag{17.24}$$

Ejemplos 1. Hallemos la curvatura y la evoluta de la parábola $y = ax^2, a > 0$. Observando que $y' = 2ax$, $y'' = 2a$ por la fórmula (17.23) tenemos $k = \dfrac{2a}{(1 + 4a^2x^2)^{3/2}}$. Para hallar la ecuación de la evoluta nos serviremos de las fórmulas (17.24):

$$\xi = x - \frac{1 + 4a^2x^2}{2a}2ax = -4a^2x^3,$$

$$\eta = ax^2 + \frac{1 + 4a^2x^2}{2a} = \frac{6a^2x^2 + 1}{2a}.$$

Se obtuvo la representación paramétrica de la evoluta de la parábola con el parámetro x. Se puede obtener su representación explícita eliminando este parámetro x. Para esto, de la primera igualdad hallamos $x^3 = -\xi/4a^2$ y de la segunda $x^2 = (2a\eta - 1)/6a^2$. Al elevar la primera igualdad obtenida al cuadrado y la segunda al cubo e igualar los segundos miembros tendremos

$\left(\dfrac{\xi}{4a^2}\right)^2 = \left(\dfrac{2a\eta - 1}{6a^2}\right)^3$, de donde $\xi = \pm\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}\left(\eta - \dfrac{1}{2a}\right)^{3/2}$.

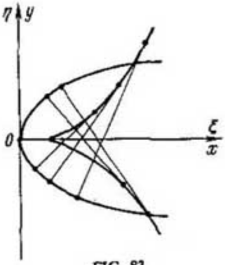


FIG. 83

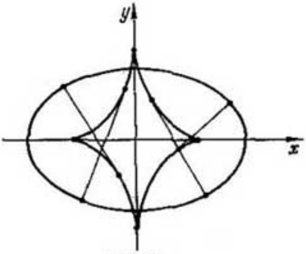


FIG. 84

Esta curva representada en la fig. 83 es, como ya sabemos (véase el ejercicio 2 en el p. 14.3), una parábola *semicúbica*.

2. Hallemos el radio de la curvatura y la evoluta de la elipse $x = a\cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, $a \geqslant b > 0$.

Observando que $x' = -a \operatorname{sen} t$, $y' = b\cos t$, $x'' = -a\cos t$, $y'' = -b \operatorname{sen} t$, por la fórmula (17.20) obtendremos

$$R = \frac{1}{k} = \frac{(a^2 \operatorname{sen}^2 \; + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab \operatorname{sen}^2 t + ab\cos^2 t} = \frac{(a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab}.$$

Por esto, de las fórmulas (17.21) y (17.22) se deduce que

$$\xi = a\cos t - b\cos t\,\frac{a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t,$$
$$\eta = b \operatorname{sen} t - a \operatorname{sen} t\,\frac{a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} = \frac{b^2 - a^2}{b}\operatorname{sen}^3 t.$$

Esta es la representación paramétrica de la evoluta buscada. El parámetro t se puede eliminar elevando las igualdades obtenidas al exponente 2/3 y sumándolas:

$$(a\xi)^{2/3} + (b\eta)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}.$$

Esta curva se llama *astroide* (fig. 84).

A veces para la representación de la curva es cómodo utilizar las así llamadas coordenadas polares (ρ, φ), $\rho \geqslant 0$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, donde ρ es la longitud del radio vector del punto M dado y φ, el ángulo formado por este radio vector con el eje Ox. De esta forma, a cada punto del plano, menos el origen de coordenadas, unívocamente le corresponde un par ordenado (ρ, φ); y además para el origen de coordenadas tenemos $\rho = 0$ y el ángulo φ no está definido (fig. 85).

Si $M = (x, y)$ donde, como es común, x e y son las coordenadas cartesianas del punto M, entonces

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen}\varphi. \tag{17.25}$$

La relación inversa se expresa por las fórmulas

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + k\pi,$$

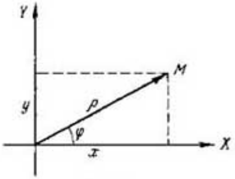


FIG. 85

donde $k = 0$, si $x \geqslant 0$, $k = 1$, si $x < 0$, $y > 0$ y $k = -1$ si $y < 0$; además, como es común, para $x = 0$, $y \neq 0$ se considera $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} y$.

A veces al ángulo φ no se le pone la limitación $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ y se denota por φ cualquier ángulo para el cual $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$. En este caso la correspondencia entre los pares ordenados (ρ, φ), $\rho \neq 0$, y los puntos del plano diferentes del origen de coordenadas, evidentemente ya no es biunívoca.

Si se da la función continua

$$\rho = \rho(\varphi), \quad a \leqslant \varphi \leqslant \beta \tag{17.26}$$

entonces sustituyéndola en (17.25) obtenemos

$$x = \rho(\varphi) \cos \varphi, \quad y = \rho(\varphi) \operatorname{sen} \varphi, \tag{17.27}$$

es decir, la representación paramétrica de cierta curva Γ. En este sentido se puede decir que la ecuación (17.26) define la curva Γ en coordenadas polares. Para el cálculo de la curvatura, el radio de curvatura y la evoluta de la curva Γ dada con la ecuación (17.26) es necesario pasar a su representación paramétrica (17.27) y servirnos de las fórmulas deducidas anteriormente.

Ejercicios 2. Supongamos que está dada la curva $\rho = \rho(\varphi)$ en coordenadas polares, sea α el ángulo de inclinación de su tangente con el eje Ox y ω el ángulo que forma esta tangente con la continuación del radio vector del punto de tangencia. Demuéstrese que $\alpha = \omega + \varphi$ y $\operatorname{tg} \omega = \rho/\rho'$.

3. Hállese la evoluta de la curva $\rho = a(1 + \cos \varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ llamada *cardioide*.

Indicación. Es útil servirse de los resultados de los ejercicios 1 y 2.

Problema 13. Sea Γ la curva dos veces diferenciable y sin puntos singulares $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant \ \leqslant b\}$ y supongamos que $t_0 \in [a, b]$, $t_0 + \Delta t_1 \in [a, b]$, $t_0 + \Delta t_2 \in [a, b]$. Tracemos por los puntos $r(t_0)$, $r(t_0 + \Delta t_1)$ y $r(t_0 + \Delta t_2)$ un plano; demuéstrese que si en el punto $r(t_0)$ la curvatura $k \neq 0$ entonces para $\Delta t_1 \to 0$ y $\Delta t_2 \to 0$ este plano tiende (defínese este concepto) al plano osculador en el punto $r(t_0)$.

Problema 14. Utilizando las hipótesis del porblema anterior tracemos por esos mismos tres puntos $r(t_0)$, $r(t_0 + \Delta t_1)$ y $r(t_0 + \Delta t_2)$ una circunferencia. Demuéstrese que esta circunferencia cuando $\Delta t_1 \to 0$ y $\Delta t_2 \to 0$ tiende a la circunferencia (defínese este concepto) que está en el plano osculador con centro en el centro de curvatura de la curva y radio igual al radio de curvatura en el punto $r(t_0)$.

Esta circunferencia límite se llama *circunferencia osculadora* en el punto dado de la curva.