CAPÍTULO SEGUNDO

CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

§ 18. CONJUNTOS EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

18.1. ENTORNOS DE LOS PUNTOS. LÍMITES DE LAS SUCESIONES DE PUNTOS

Antes de pasar al estudio de las funciones de varias variables, estudiemos algunas de las propiedades de los conjuntos sobre los cuales serán definidas estas funciones. Supongamos que en el plano analizado por nosotros, o en el espacio, está siempre definido cierto sistema rectangular de coordenadas cartesianas. En la mayoría de los casos, vamos a designar los puntos por las letras $a, b, \ldots, x, y, z, \ldots$ [*)], y sus coordenadas serán designadas por esas mismas letras con índices, es decir, para el plano escribiremos $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, y para el espacio $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$. La distancia entre dos puntos x e y será designada por $\rho(x, y)$. Como es sabido, la fórmula para la distancia entre los puntos x e y en el caso del plano tiene la forma

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

y para el espacio

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

En lo adelante tendremos que estudiar no sólo funciones de dos o tres variables sino también funciones de una gran cantidad de variables, por eso es útil introducir el concepto de espacio n-dimensional para cualquier $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Definición 1. *Se llama punto x de un espacio n-dimensional el conjunto ordenado de n números reales $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x$.*

El número x_i se llama coordenada i del punto x; $i = 1, 2, \ldots, n$.

La distancia entre dos puntos $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$ se define por la fórmula

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}. \tag{18.1}$$

El conjunto de todos los puntos de un espacio n-dimensional, para los cuales ha sido definida la distancia por la fórmula (18.1) *se llama espacio euclídeo*

---

*) En algunas ocasiones los puntos se designan por letras mayúsculas, por ejemplo M, N, P, y sus coordenadas por las letras x, y, z.

n-dimensional (o, de una forma más completa, un espacio euclídeo aritmético n-dimensional) y se designa por R^n o por R^n_x.

Para mayor brevedad, en lugar de $x = (x_1, \ldots, x_n)$ escribiremos a veces $x = (x_i)$.

En el caso de $n = 1$, el espacio R^n coincide con la recta, en el caso de $n = 2$, con el plano, y en el caso de $n = 3$, con el espacio estudiado en la geometría elemental y en la geometría analítica. Para el caso de un $n > 3$ arbitrario, no se debe buscar en nuestra definición sentido físico o geométrico alguno. Nuestro objetivo es solamente la construcción de cierto aparato matemático, cómodo para el estudio de las funciones de varias variables; las definiciones y la terminología las tomaremos de la geometría elemental, ya que esto nos permite incluir la recta, el plano y el espacio tridimensional en un esquema más general.

La distancia entre dos puntos en un espacio euclídeo n-dimensional R^n tiene las propiedades siguientes:

1°) $\rho(x, y) \geqslant 0$, además, $\rho(x, y) = 0$, si y sólo si $x = y$;

2°) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ para cualesquiera dos puntos x e y de R^n;

3°) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ para cualesquiera tres puntos x, y y z de R^n.

Las propiedades 1° y 2° se deducen directamente de la fórmula (18.1), la tercera, usualmente llamada *"desigualdad triangular"* y bien conocida para un espacio tridimensional corriente, en el caso general (para un n arbitrario) exige demostración.

Demostremos previamente un lema.

Lema 1 (de Cauchy — Schwarz *). *Para cualesquiera números reales a_k y b_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, se cumple la desigualdad*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \tag{18.2}$$

Corolario.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \tag{18.3}$$

DEMOSTRACIÓN. Si todos los $a_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces la desigualdad es evidente, ambos miembros de la desigualdad se convierten en cero. Si $a_1^2 + \ldots + a_n^2 > 0$ analicemos la función cuadrática

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_i t + b_i)^2 = t^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2t \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2. \tag{18.4}$$

Es evidente que

$$F(t) \geqslant 0. \tag{18.5}$$

---

*) H. Schwarz (1843 — 1921), matemático alemán.

De la condición (18.5) se deduce que el trinomio de segundo grado (18.4), tiene o bien raíces reales coincidentes, o bien raíces esencialmente complejas, y por eso su discriminante es no positivo:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 0.$$

Trasladando el segundo sumando en el segundo miembro, y hallando la raíz cuadrada, obtenemos (18.2). □

Para la demostración de la desigualdad (18.3), estimemos la suma $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2$, utilizando la desigualdad (18.2):

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} =$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2.$$

Hallando en ambos miembros la raíz cuadrada, obtenemos (18.3). □

Retornemos ahora a la propiedad 3 de la distancia entre puntos en el espacio R^n.

Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ y $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Hagamos $a_i = x_i - y_i$, $b_i = y_i - z_i$, y por tanto, $a_i + b_i = x_i - z_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces, la desigualdad (18.3) se transcribe de la siguiente forma:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2},$$

o, por (18.1), $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$. □

En lo adelante en este párrafo consideraremos que el espacio R^n está fijado (es decir, consideraremos fijado el número n).

Definición 2. *Se llama i-ésima coordenada del eje* ($i = 1, 2, \ldots, n$) *del espacio euclídeo n-dimensional* R^n, *el conjunto de puntos* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *de este espacio, tales que* $x_1 = x_2 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = x_n = 0$. *El punto* $O = (0, 0, \ldots, 0)$ *es llamado origen de coordenadas.*

Es evidente, que en el caso de $n = 2$ y $n = 3$ nuestra definición nos da los ejes de coordenadas usuales.

OBSERVACIÓN. Sean dados en el plano dos sistemas rectangulares de coordenadas, el punto M en uno de los sistemas tiene las coordenadas (x, y), y en el otro (ξ, η), es decir, $M = (x, y) = (\xi, \eta)$. Poniendo en correspondencia al par ordenado de números (x, y) el par ordenado (ξ, η), obtenemos una correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) y el conjunto de todos los pares ordenados (ξ, η). En este caso, si

$$M' = (x', y') = (\xi', \eta'), \quad M'' = (x'', y'') = (\xi'', \eta''),$$

entonces

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} = \sqrt{(\xi'' - \xi')^2 + (\eta'' - \eta')^2}.$$

Este ejemplo hace natural la siguiente definición.

Supongamos que a cada punto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ está puesto en correspondencia un complejo ordenado de n números reales $\xi(x) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, de tal forma que para cualesquiera dos puntos $x' = (x_1, \ldots, x_n)$ y $x'' = (x_1'', \ldots, x_n'')$ y para sus complejos correspondientes $\xi(x') = (\xi_1', \ldots, \xi_n')$ y $\xi(x'') = (\xi_1'', \ldots, \xi_n'')$ se cumple la igualdad

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i'' - x_i')^2 = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i'' - \xi_i')^2,$$

entonces los números, que forman parte del conjunto $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ también se llaman *coordenadas del punto* x ("en otro sistema de coordenadas"). Definiendo así las coordenadas, la distancia entre dos puntos dados no cambia cuando varía el sistema de coordenadas, es decir, cuando se sustituye un sistema de coordenadas por otro. En lo adelante, si no se dice lo contrario, el sistema de coordenadas se considera fijo.

Si el punto x está dado por las coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$, entonces a veces, para mayor claridad, el espacio R_x^n, designará a $R_{x_1}^n, \ldots, x_n$.

Definición 3. *Sea* $x \in R^n$ y $\varepsilon > 0$. *El conjunto de todos los puntos y del espacio* R^n, *tales que* $\rho(x, y) < \varepsilon$, *se llama bola n-dimensional con centro en el punto x y radio ε o un* ε-entorno (*a veces esférico o más correctamente, un entorno de bola*) *del punto x en el espacio* R^n *y se designa por* $U(x; \varepsilon)$; *de esta forma*

$$U(x; \varepsilon) = \{y : y \in R^n, \rho(x, y) < \varepsilon\}. \tag{18.6}$$

En la notación con coordenadas esta definición tendrá la forma siguiente:

$$U(x; \varepsilon) = \{y = (y_1, \ldots, y_n) : \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 < \varepsilon^2\},$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n), \varepsilon > 0.$$

En el caso de una recta, es decir, para $n = 1$ (fig. 86) $x = x_1, y = y_1$, y por esto

$$U(x, \varepsilon) = \{y : |y - x| < \varepsilon\}.$$

De esta forma, $U(x; \varepsilon)$ es un intervalo de longitud 2ε con centro en el punto x, es decir, con el entorno del punto x en el sentido analizado anteriormente (véase el p. 3.2).

En el caso del plano, es decir, para $n = 2$ (fig. 87) $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ y

$$U(x; \varepsilon) = \{y = (y_1, y_2) : (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2 < \varepsilon^2\}, \varepsilon > 0,$$

FIG. 86

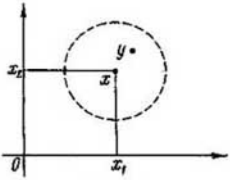


FIG. 87

es decir, $U(x; \varepsilon)$ es un círculo de radio ε con centro en el punto $x = (x_1, x_2)$, y en el caso del espacio, es decir para $n = 3$ el entorno del punto $x = (x_1, x_2, x_3)$

$$U(x, \varepsilon) = \{y = (y_1, y_2, y_3) : (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 < \varepsilon^2\}, \quad \varepsilon > 0$$

es una bola de radio ε con centro en el punto (x_1, x_2, x_3).

De esta forma, el concepto de entorno está generalizado para el caso del espacio euclídeo n-dimensional R^n. Sin embargo, conjuntamente con la generalización señalada, resulta de utilidad otra generalización de este concepto, precisamente el concepto del así llamado entorno rectangular.

Definición 4. *Sea* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, $\delta_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *El conjunto*

$$P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n) = \{y = (y_1, \ldots, y_n) : x_i - \delta_i < \\ < y_i < x_i + \delta_i, i = 1, 2, 3, \ldots, n\} \tag{18.7}$$

se llama paralelepípedo n-dimensional y el punto x es su centro.

Definición 5. *Si* $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_n = \delta$, *entonces* $P(x, \delta, \delta, \ldots, \delta)$ *se llama cubo n-dimensional con centro en el punto x y se designa por* $P(x; \delta)$.

Si $n = 1$, entonces el conjunto $P(x; \delta)$ es el intervalo con centro en el punto x de longitud 2δ; si $n = 2$, entonces el conjunto $P(x; \delta_1, \delta_2)$ es un rectángulo con lados, paralelos a los ejes de coordenadas (sus longitudes son iguales respectivamente a $2\delta_1$ y $2\delta_2$); para $n = 3$, el conjunto $P(x; \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ representa un paralelepípedo rectangular con aristas paralelas a los ejes de coordenadas (sus longitudes son respectivamente iguales a $2\delta_1$, $2\delta_2$ y $2\delta_3$).

Por paralelepípedo n-dimensional, cubo n-dimensional respectivamente, entenderemos también el conjunto, definido por las condiciones señaladas anteriormente al menos en un sistema de coordenadas (y no obligatoriamente en el dado, como esto fue hecho anteriormente). En lo adelante, paralelepípedo n-dimensional y cubo n-dimensional se entenderán sólo en el sentido restringido, es decir, en el sentido de la definición dada anteriormente para un sistema de coordenadas fijo.

Definición 6. *Cualquier paralelepípedo n-dimensional* $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ *se denomina entorno rectangular del punto x.*

Si el entorno rectangular del punto x es un cubo n-dimensional, entonces también se denomina *entorno cúbico* de este punto.

Lema 2. *Cualquiera que sea el* ε-entorno $U(x; \varepsilon)$ *del punto* $x \in R^n$, *existe su entorno rectangular* $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ *tal que*

$$P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n) \subset U(x; \varepsilon), \tag{18.8}$$

y vicerersa, cualquiera que sea el entorno rectangular $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ del punto $x \in R^n$, existe su ε-entorno $U(x; \varepsilon)$ tal que

$$U(x; \varepsilon) \subset P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n). \tag{18.9}$$

Estas afirmaciones son geométricamente evidentes, para $n = 1$, 2 y 3. Efectivamente, para $n = 1$ los conceptos de entornos esféricos y rectangulares coinciden. Para $n = 2$ el lema significa que en todo rectángulo se puede inscribir un círculo con centro en el centro del rectángulo, y en todo círculo se puede inscribir un rectángulo con centro en el centro del círculo. Por último, para $n = 3$ el lema significa que en cada paralelepípedo rectangular se puede incluir una bola con centro en el centro de este paralelepípedo y en toda bola se puede inscribir un paralelepípedo rectangular con centro en el centro de la bola analizada. No es difícil enunciar y demostrar estas afirmaciones en su forma analítica, utilizando la notación de las coordenadas. Este método, como se mostrará en seguida se generaliza fácilmente para el caso de un espacio n-dimensional arbitrario.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Para cualesquiera puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $a = (a_1, \ldots, a_n)$ del espacio R^n, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ se cumplen las desigualdades

$$|x_i - a_i| \leqslant \rho(x, a) \leqslant |x_1 - a_1| + \ldots + |x_n - a_n|. \tag{18.10}$$

La desigualdad izquierda se obtiene, si en la expresión $\rho(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}$ todos los sumandos en la raíz, excepto el i-ésimo, son sustituidos por cero, como resultado el valor de $\rho(x, a)$ puede sólo disminuir.

La desigualdad derecha (18.10) se deduce de la desigualdad

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2} \leqslant |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|, \tag{18.11}$$

que se cumple para cualesquiera números reales α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, y comprobable directamente, elevando al cuadrado. Suponiendo en (18.11) $\alpha_i = x_i - a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, obtenemos la desigualdad, que se encuentra en la parte derecha de (18.10).

Sea dado el entorno de bola $U(a; \varepsilon)$ del punto a. Analicemos el entorno rectangular $P(a; \varepsilon/n)$, es decir, el cubo n-dimensional con centro en el punto a y arista de longitud $2\varepsilon/n$ (el caso de $n = 2$ se muestra en la fig. 88). Si $x \in P(a; \varepsilon/n)$ y, por tanto, por la definición (18.7) se cumplen las desigualdades $|x_i - a_i| < \dfrac{\varepsilon}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces de (18.10) se deriva la validez de la desigualdad

$$\rho(x, \mathrm{a}) \leqslant |x_1 - a_1| + \ldots + |x_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{n} + \ldots + \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Esto significa que $x \in U(a; \varepsilon)$. Ya que por x se sobreentendía un punto arbitrario del cubo $P(a; \varepsilon/n)$, entonces $P(a; \varepsilon/n) \subset U(a; \varepsilon)$; de esta forma, se demuestra (18.8).

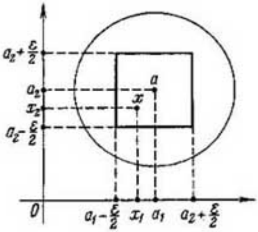


FIG. 88

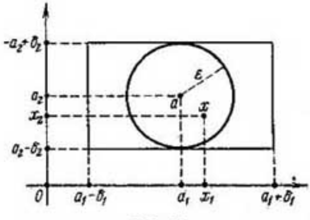


FIG. 89

Sea ahora dado un entorno rectangular $P(a; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ del punto a. Hagamos $\varepsilon = \min\limits_{i=1,2,\ldots,n} \delta_i$ y analicemos el entorno de bola $U(a; \varepsilon)$ de este punto (véase fig. 89). Si $x \in U(a; \varepsilon)$, entonces para cualquier $i = 1, 2, \ldots, n$ en virtud de (18.10), obtenemos las desigualdades

$$|x_i - a_i| \leqslant \rho(x, a) < \varepsilon \leqslant \delta_i,$$

es decir, según la definición (18.7), $x \in P(a; \delta_1, \ldots, \delta_n)$. Ya que x es un punto arbitrario de la bola $U(a; \varepsilon)$, entonces $U(a; \varepsilon) \subset P(a; \delta_1, \ldots, \delta_n)$. □

En el ejemplo de la demostración de este lema se ve bien, cómo, utilizando para mayor claridad un dibujo plano, se puede realizar la demostración en un espacio n-dimensional. El ejemplo contenido en el ejercicio que se propone a continuación nos previene de la utilización apresurada de las analogías, no sustentadas por demostraciones matemáticas.

Ejercicio 1. Demuéstrese que para $n = 1, 2, 3, 4$ el cubo n-dimensional con aristas, cuyas longitudes son iguales a la unidad, se encuentra en la bola de radio unitario y con centro en el centro del cubo, y que para $n \geqslant 5$ la afirmación análoga no se cumple.

Definición 7. *Supongamos que a cada número natural m se le ha puesto en correspondencia cierto punto $x^{(m)} \in R^n$ (no obligatoriamente distintos puntos para distintos m). Entonces, el conjunto $\{x^{(m)}: m = 1, 2, \ldots\}$, compuesto por los puntos del especio R^n con distintos números se denomina sucesión de puntos de este espacio y se designa por*

$$x^{(m)}, m = 1, 2, \ldots, \text{ó } \{x^{(m)}\}.$$

La sucesión $\{y^{(k)}\}$ se llama subsucesión de la sucesión $\{x^{(m)}\}$ y se designa por

$$x^{(m_k)}, k = 1, 2, \ldots, \text{ó } \{x^{(m_k)}\},$$

si para todo k existe un m_k tal que $y^{(k)} = x^{(m_k)}$, además si $k' < k''$, entonces $m_{k'} < m_{k''}$.

Definición 8. *El punto $x \in R^n$ se denomina límite de la sucesión $\{x^{(m)}\}$ y se escribe*

$$x = \lim_{m\to\infty} x^{(m)}, \quad \text{si} \quad \lim_{m\to\infty} \rho(x^{(m)}, x) = 0.$$

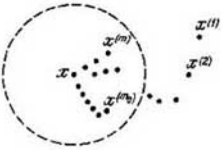


FIG. 90

Si $x = \lim_{m \to \infty} x^{(m)}$, *entonces se dice que la sucesión* $\{x^{(m)}\}$ *converge hacia el punto* x. *La sucesión que converge hacia cierto punto se denomina convergente.*

Utilizando el concepto de entorno, es fácil establecer que $x = \lim_{m \to \infty} x^{(m)}$ si, y sólo si, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe m_ε tal que para todos los $m \geqslant m_\varepsilon$ se cumple la inclusión $x^{(m)} \in U(x; \varepsilon)$. Por el lema 2, obtenemos también $x = \lim_{m \to \infty} x^{(m)}$ si, y sólo si, para cualquier entorno rectangular $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ existe un número m_0 (dependiente de este entorno) tal que para todos los $m \geqslant m_0$

$$x^{(m)} \in P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n). \tag{18.12}$$

Durante la definición del límite, naturalmente podemos limitarnos sólo a los entornos cúbicos.

En el caso de $n = 1$ la definición 8 se convierte en la definición habitual del límite de una sucesión numérica.

Para $n = 2$ la convergencia de la sucesión $\{x^{(m)}\}$ de puntos del plano R^2 hacia el punto $x \in R^2$ significa, que cualquiera que sea el círculo con centro en el punto x, a partir de cierto número, dependiente del radio de este círculo, todos los términos de la sucesión dada se encuentran en este círculo (fig. 90). En el caso de $n = 3$ la convergencia de la sucesión de puntos $\{x^{(m)}\}$ del espacio, hacia el punto $x \in R^3$, significa, que cualquiera que sea la bola tridimensional habitual, con centro en el punto x, a partir de cierto número, dependiente del radio de la bola, todos los términos de la sucesión se encuentran en esta bola.

Al igual que en el caso de las sucesiones numéricas, se puede decir que $\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x$, $x^{(m)} \in R^n$, $m = 1, 2, \ldots$, si cualquier ε-entorno del punto x contiene casi todos los puntos de la sucesión dada, es decir, todos, excepto, puede ser, de un número finito de éstos.

El concepto de límite de una sucesión $\{x^{(m)}\}$ de puntos del espacio R^n puede ser reducido al concepto de límite de las sucesiones numéricas, precisamente las sucesiones de las coordenadas de puntos $x^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$.

Teorema 1. *Para que la sucesión* $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}) \in R^n$, $m = 1, 2, \ldots$, *converja hacia el punto* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, *es necesario y suficiente que*

$$\lim_{m \to \infty} x_i^{(m)} = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{18.13}$$

DEMOSTRACIÓN. Demostremos la necesidad de la condición (18.13). Sea $\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x$. Fijemos $\varepsilon > 0$ arbitrario; entonces, por (18.12) existe m_ε tal que para todos los $m \geqslant m_\varepsilon$ se cumple la inclusión

$$x^{(m)} \in P(x; \varepsilon),$$

es decir, para cualquier $i = 1, 2, \ldots, n$ y para $m \geqslant m_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$|x_i^{(m)} - x_i| < \varepsilon,$$

y esto significa, que

$$\lim_{m \to \infty} x_i^{(m)} = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Demostremos la suficiencia de la condición (18.13). Sea $\lim\limits_{m \to \infty} x_i^{(m)} = x_i, i = 1, 2, \ldots, n$, y $P(x; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ un entorno rectangular dado del punto x. Entonces, para cada $\varepsilon_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ existe un número $m_i = m_i(\varepsilon_i)$, tal que para todos $m \geqslant m_i$ se cumple la desigualdad

$$|x_i^{(m)} - x_i| < \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{18.14}$$

Designemos por m_0 el mayor de los números $m_1, \ldots, m_n$:

$$m_0 = \text{máx}\,\{m_1, \ldots, m_n\};$$

entonces para $m \geqslant m_0$ y todos los $i = 1, 2, \ldots, n$ se cumplirán simultáneamente las condiciones (18.14) y por lo tanto (véase (18.7)), para $m \geqslant m_0$ tendremos la inclusión

$$x^{(m)} \in P(x; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n),$$

lo que significa, por (18.12), que

$$\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x. \ \square$$

Del teorema 1 y de las propiedades de los límites de las sucesiones numéricas, se deduce que si una sucesión de puntos tiene límite, entonces éste es único y que toda subsucesión de una sucesión convergente, converge al mismo límite que toda la sucesión.

Ejercicio 2. Enúnciese y demuéstrese la condición necesaria y suficiente de la convergencia de la sucesión de puntos del espacio R^n, análoga al criterio de Cauchy para las sucesiones numéricas.

Definición 9. *El conjunto $E \subset R^n$ se denomina acotado, si existe un cubo n-dimensional $P(O; a)$ con centro en el origen de los ejes de coordenadas O, tal que $E \subset P(O; a)$.*

De forma análoga al lema 2 se demuestra que cualquiera que sea la bola $U(x; \varepsilon)$, existe un cubo $P(x; \delta)$ tal que $P(x; \delta) \supset U(x; \varepsilon)$, y viceversa, cualquiera que sea el cubo $P(x; \delta)$, existe una bola $U(x; \varepsilon)$ tal que $U(x; \varepsilon) \supset P(x; \delta)$. De aquí se deduce que se puede dar una definición de conjunto acotado equivalente a la anterior.

Definición 9′. *El conjunto $E \subset R^n$ se llama acotado si existe una bola n-dimensional $U(O; \varepsilon)$ tal que $E \subset U(O; \varepsilon)$.*

Definición 10. *La sucesión de puntos $x^{(m)} \in R^n$, $m = 1, 2, \ldots$, se llama acotada, si el conjunto de sus valores, es decir, $\{x^{(m)}: m = 1, 2, \ldots\}$, está acotado en el espacio R^n.*

Si la sucesión $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$, es convergente, entonces está acotada, ya que cada una de las sucesiones coordenadas $x_i^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$, i es fijo ($i = 1, 2, \ldots, n$) en este caso, también converge y por lo tanto está acotada.

Teorema 2. *De cualquier sucesión acotada de puntos del espacio R^n se puede extraer una subsucesión convergente.*

Este teorema, al igual que en el caso unidimensional, comúnmente se denomina *teorema de Bolzano — Weierstrass.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dada una sucesión acotada de puntos $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \ldots$ $\ldots, x_n^{(m)})$, $m = 1, 2, \ldots$, del espacio R^n. Es evidente que cada una de las n sucesiones $\{x_i^{(m)}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, también está acotada. Por esto, según el teorema de Bolzano — Weirstrass (véase el p. 3.6), la sucesión $\{x_1^{(m)}\}$ contiene una subsucesión convergente; sea ésta la sucesión $x_1^{(m_{k_1})}$, $k_1 = 1, 2, \ldots$. La sucesión $\{x_2^{(m_{k_1})}\}$ como subsucesión de la sucesión $\{x_2^{(m)}\}$ también es acotada y por lo tanto, contiene una subsucesión convergente. Sea ésta la sucesión $x_2^{(m_{k_2})}$, $k_2 = 1, 2, \ldots$. La sucesión $\{x_1^{(m_{k_2})}\}$ como subsucesión de la sucesión convergente $\{x_1^{(m_{k_1})}\}$ evidentemente también será convergente. Continuando este razonamiento, al cabo de n pasos obtendremos n sucesiones convergentes $\{x_i^{(m_{k_n})}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, cada una de las cuales es la subsucesión correspondiente de la sucesión $\{x_i^{(m)}\}$. Entonces, por el teorema 1, la sucesión $\{x^{(m_{k_n})}\}$ de puntos del espacio R^n también será convergente. □

De forma análoga al caso unidimensional, el límite de una subsucesión de una sucesión de puntos del espacio n-dimensional se llama límite parcial. El teorema 2 muestra que el conjunto de los límites parciales de una sucesión de puntos de R^n acotada, siempre es no vacío.

A veces resulta cómodo analizar una sucesión de puntos que tiende al infinito.

Definición 11. *La sucesión de puntos $x^{(m)} \in R^n$, $m = 1, 2, \ldots$, se llama tendiente al infinito, si la distancia desde sus términos al origen de coordenadas $O = (0, 0, \ldots, 0)$ tiende al infinito, es decir, si*

$$\lim_{m \to \infty} \rho(x^{(m)}, O) = +\infty. \tag{18.15}$$

En este caso se escribe

$$\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty.$$

Ya que para cualquier punto $a \in R^n$ en virtud de la desigualdad triangular

$$\rho(x^{(m)}, O) \leqslant \rho(x^{(m)}, a) + \rho(a, O)$$

se cumple la desigualdad

$$\rho(x^{(m)}, a) \geqslant \rho(x^{(m)}, O) - \rho(a, O)$$

entonces, cuando se cumple la condición (18.15) tenemos: $\lim\limits_{m \to \infty} \rho(x^m, a) = +\infty$, es decir, si $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$, entonces la distancia desde los puntos de la sucesión $\{x^{(m)}\}$ hasta cualquier punto dado $a \in R^n$ tiende al infinito.

Señalemos que si $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$, entonces para los puntos $x^{(m)}$ existe al menos una coordenada que también tiende al infinito cuando $m \to \infty$. Efectivamente si

$\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$, entonces, por ejemplo, para cada $p = 1, 2, \ldots$ existe un número m_p, tal que para todo $m \geqslant m_p$, se cumple la desigualdad

$$\rho(x^{(m)}, O) = \sqrt{x_1^{(m)2} + \ldots + x_n^{(m)2}} > p,$$

de donde, por (18.11) se deduce que

$$|x_1^{(m)}| + \ldots + |x_n^{(m)}| > p. \tag{18.16}$$

Por esto, para un p dado se encuentra una i-ésima coordenada, $i = 1, 2, \ldots, n$, tal que para ella tendremos

$$|x_i^{(m)}| \geqslant \frac{p}{n}.$$

En caso contrario, es decir, si para todos los $i = 1, 2, \ldots, n$ tuviera lugar la desigualdad

$$|x_i^{(m)}| < \frac{p}{n},$$

entonces, no se cumpliría la desigualdad (18.16). El número de las coordenadas es finito, y por esto, uno de ellos, designémoslo por i_0, para $p = 1, 2, \ldots$ se repetirá infinitas veces, es decir, se encuentra una subsucesión p_k de números naturales, tal que para todos los $m \geqslant p_k$, $k = 1, 2, \ldots$, tendremos: $|x_{i_0}^{(m)}| \geqslant p_k/n$. Ya que $\lim\limits_{k \to \infty} (p_k/n) = +\infty$, entonces para el i_0 señalado obtenemos

$$\lim_{m \to \infty} x_{i_0}^{(m)} = \infty.$$

Ejercicio 3. La sucesión $x^{(m)} \in R^n$ se llame no acotada si el conjunto de sus valores es no acotado. Demuéstrese que cualquier sucesión no acotada de puntos del espacio n-dimensional contiene una subsucesión que tiende al infinito.

18.2. DISTINTOS TIPOS DE CONJUNTOS

En el presente punto se analizan cuestiones, auxiliares para el estudio ulterior del análisis matemático y relacionadas con la geometría del espacio n-dimensional.

Definición 12. *Sea X cierto conjunto de puntos del espacio euclídeo R^n. El punto $x \in X$ se denomina punto interior de este conjunto* (con respecto al espacio R^n), *si existe un ε-entorno de este punto, contenido en el conjunto X, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que $U(x; \varepsilon) \subset X$.*

Ejercicio 4. Si la intersección $A \cap B$, $A \subset R^n$, $B \subset R^n$ contiene al menos un punto interior del conjunto A como del conjunto B, entonces el conjunto de los puntos interiores de la intersección $A \cap B$ es no vacío.

Definición 13. *El conjunto cada punto del cual es un punto interior* (con respecto al espacio analizado R^n), *se denomina conjunto abierto.*

Se debe tener en cuenta que un mismo punto de un mismo conjunto puede ser punto interior de este conjunto respecto a un espacio, que contenga este conjunto y

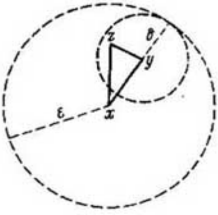


FIG. 91

no ser punto interior del conjunto analizado respecto a otro espacio que también contenga este conjunto. Analicemos, por ejemplo, el espacio R^2_{xy}, es decir, el plano con un cierto sistema de coordenadas cartesianas dado, las que vamos a designar por x e y. El eje de las x de este plano, como todo eje numérico, es un espacio euclídeo R^1_x. Cada punto de cualquier intervalo (a, b) de este eje, es decir, el conjunto de puntos

$$\{(x, y): a < x < b, y = 0\}$$

del plano R^2_{xy}, es un punto interior de este intervalo con respecto al espacio señalado R^1_x (eje de los x) y no es punto interior de este intervalo con respecto a todo el plano R^2_{xy}. De esta forma, el intervalo (a, b) es un conjunto del espacio R^1_x y no es conjunto abierto del espacio R^2_{xy}.

Una clase importante de conjuntos abiertos se establece por el siguiente lema.

Lema 3. *Cualquier ε-entorno $U(x; \varepsilon)$ de cualquier punto $x \in R^n$ es un conjunto abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dado un entorno $U(x; \varepsilon)$ y sea $y \in U(x; \varepsilon)$. Hagamos

$$\delta = \varepsilon - \rho(y, x) \tag{18.17}$$

y mostremos que $U(y; \delta) \subset U(x; \varepsilon)$ (fig. 91).

Si $z \in U(y; \delta)$ y por lo tanto $\rho(z; y) < \delta$, entonces, aplicando la desigualdad triangular y (18.17), obtenemos

$$\rho(z, x) \leqslant \rho(z, y) + \rho(y, x) < \delta + \rho(y, x) = \varepsilon,$$

es decir, $z \in U(x; \varepsilon)$. Ya que z es un punto arbitrario del conjunto $U(y; \delta)$, esto significa que $U(y; \delta) \subset U(x; \varepsilon)$. □

Los conjuntos abiertos del espacio R^n serán designados en su mayoría por la letra G.

Ejercicio 5. Demuéstrese que el conjunto de los puntos interiores de cualquier conjunto es un conjunto abierto.

Lema 4. *La intersección de un número finito, al igual que la unión de cualquier colección de conjuntos abiertos, es un conjunto abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $G_1, G_2, \ldots, G_k$ conjuntos abiertos del espacio R^n. Si su intersección $\bigcap_{j=1}^{k} G_j$ es un conjunto vacío, entonces, es abierto ya que su conjunto de puntos interiores es vacío y por lo tanto coincide con la propia intersección. Si la intersección señalada no es vacía y $x \in \bigcap_{j=1}^{k} G_j$, entonces, ya que los conjuntos G_j son abiertos, para cada $j = 1, 2, \ldots, k$ existe $\varepsilon_j > 0$ tal que $U(x; \varepsilon_j) \subset G_j$. Suponiendo $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$, obtenemos que para cada j es válida la inclusión $U(x, \varepsilon) \subset G_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Por lo tanto, $U(x; \varepsilon) \subset \bigcap_{j=1}^{k} G_j$, es decir, el punto x es un punto interior de la intersección $\bigcap_{j=1}^{k} G_j$. Ya que x es un punto arbitrario de esta intersección, éste es un conjunto abierto.

Sea dado ahora un sistema arbitrario de conjuntos abiertos $\{G_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, donde $\mathfrak{A}$ es un cierto conjunto de índices y $G = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} G_\alpha$. Demostremos que G es un conjunto abierto. Efectivamente, cualquiera que sea el punto $x \in G$, existe un índice $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, tal que $x \in G_{\alpha_0}$. Ya que G_{α_0} es un conjunto abierto, entonces se encuentra un $\varepsilon > 0$, tal que $U(x; \varepsilon) \subset G_{\alpha_0}$. Pero entonces, $U(x; \varepsilon) \subset \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} G_\alpha = G$, es decir, x es un punto interior del conjunto G y por lo tanto este conjunto es abierto. □

Resulta muy cómoda la siguiente definición.

Definición 14. *Cualquier conjunto abierto que contenga un punto se denomina su entorno.*

El entorno del punto x será designado habitualmente por $U = U(x)$, tal vez con uno u otro índice, a veces, como en el caso unidimensional, por otras letras, por ejemplo, V, W.

OBSERVACIÓN. En cualquier entorno $U(x)$ del punto x, evidentemente se contiene tanto un entorno de bola como un entorno rectangular de este punto. Más aún, entendiendo entorno de un punto en el sentido de la definición 14 se conserva también el análogo de la propiedad (18, 12), es decir, el punto x es límite de la sucesión $\{x^{(m)}\}$ si y sólo si para cada uno de sus entornos $U(x)$ existe un número m_0, tal que para todos los $m \geqslant m_0$ se cumple la inclusión $x^{(m)} \in U(x)$.

Definición 15. *El punto $x \in R^n$ se denomina punto de adherencia del conjunto $E \subset R^n$, si cualquier entorno de este punto contiene al menos un punto del conjunto X.*

Es evidente que cada punto del conjunto X es adherente de este conjunto, ya que cualquier entorno del punto $x \in X$ contiene el propio punto x. Al mismo tiempo pueden existir, naturalmente, puntos adherentes del conjunto dado, que no pertenezcan a éste (por ejemplo, los extremos del intervalo en la recta son sus puntos adherentes).

Ejercicio 6. Demuéstrese que para que el punto $x \in R^n$ sea un punto adherente del conjunto $X \subset R^n$, es necesario y suficiente que exista la sucesión de puntos $x^{(m)} \in X$, $m = 1, 2, \ldots$, tal que $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = x$.

Definición 16. *Si para el punto $x \in X$ existe un entorno que no contenga otros puntos del conjunto X, excepto el propio punto x, entonces este punto se denomina punto aislado del conjunto X.*

Definición 17. *El punto $x \in R^n$ se denomina punto de acumulación del conjunto X, si cualquier entorno del punto x contiene al menos un punto del conjunto X diferente de x.*

Es evidente que un punto de acumulación es un punto adherente.

Ya nos encontramos con los conceptos de puntos de adherencia, de acumulación y aislados en el caso unidimensional (véanse el p. 5.4 y el p. 5.5). Recordemos algunos de sus propiedades.

Para cualquier punto adherente x_0 del conjunto X o bién existe un entorno, que contiene sólo un punto de X (en este caso este punto es el propio punto x_0), o bien este entorno no existe, es decir, en cada entorno del punto x_0 se tienen al menos dos puntos del conjunto X (por lo tanto, al menos uno de estos puntos es diferente de x_0). Por esto, cualquier punto adherente del conjunto X es o bien un punto aislado o bien un punto de acumulación de este conjunto (en el último caso, este punto puede pertenecer o no al propio conjunto).

Si $x^{(0)}$ es un punto de acumulación del conjunto $X \subset R^n$, entonces existe una sucesión de puntos $x^{(m)} \in X$ tales que $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = x^{(0)}$, $x^{(m')} \neq x^{(m)} \neq x^{(0)}$, $m \in N$, $m' \in N$, $m \neq m'$, es decir, la sucesión $\{x^{(m)}\}$ está compuesta por diferentes puntos del conjunto X, distintos del punto $x^{(0)}$, y converge a este punto. En realidad, por cuanto $x^{(0)}$ es un punto de acumulación del conjunto X, entonces, para el entorno $U(x^{(0)}, 1)$ existe un punto, denotémoslo por $x^{(1)}$, tal que $x^{(1)} \in U(x^{(0)}, 1) \cap X$ y $x^{(1)} \neq x^{(0)}$. Sea $\delta_1 = \min\{1/2, \rho(x^{(0)}, x^{(1)})\}$. Para el entorno $U(x^0, \delta_1)$ se encuentra un punto, denotémoslo por $x^{(2)}$, tal que $x^2 \in U(x^{(0)}, \delta_1) \cap X$, $x^{(2)} \neq x^{(0)}$ y $x^{(2)} \neq x^{(1)}$. Continuando este proceso, obtendremos la sucesión buscada.

De lo demostrado se deduce que cualquier entorno de un punto de acumulación de un conjunto contiene una cantidad infinita de puntos de este conjunto (por ejemplo, son puntos de la sucesión construida anteriormente).

Ejemplos. Sean $n = 1$, $X = (0, 1)$ un intervalo. Cada punto del segmento $[0, 1]$ es un punto adherente y un punto de acumulación del conjunto X, al mismo tiempo que los puntos 0 y 1 no pertenecen al propio conjunto X. Si $X = [0, 1]$ es un segmento, entonces el conjunto de puntos adherentes del conjunto X coincide con el propio conjunto. Por último, si el conjunto X está compuesto por el intervalo $(0, 1)$ y por el punto 2, es decir, $X = (0, 1) \cup \{2\}$, entonces, el punto 2 es un punto aislado de este conjunto, y el conjunto de puntos adherentes de éste será $[0, 1] \cup \{2\}$.

Definición 18. *La colección de todos los puntos adherentes del conjunto $X \subset R^n$ se denomina clausura del conjunto X y se designa por $\bar{X}$*

Como ya se ha señalado, cada punto del conjunto X es un punto adherente de éste, por esto

$$X \subset \bar{X} \qquad (18.18)$$

Definición 19. *El conjunto X se llama cerrado si $\bar{X} = X$, es decir, si contiene todos sus puntos adherentes.*

Por ejemplo, para $n = 1$ el intervalo $(0, 1)$ no es un conjunto cerrado, y el segmento $[0, 1]$ es un conjunto cerrado.

Todo el espacio y el conjunto vacío son al mismo tiempo conjuntos cerrados y abiertos en R^n (verifíquese). Se puede mostrar que en el espacio R^n no existen otros cerrados y abiertos al mismo tiempo.

Ya que cualquier punto adherente de un conjunto es o bien un punto de acumulación de éste, o bien un punto aislado, y un punto aislado, como se deduce de su definición, pertenece al conjunto, entonces, la exigencia de pertenencia de cada punto adherente al conjunto es equivalente a exigir la pertenencia a este conjunto de cada uno de sus puntos de acumulación. Dicho de otra forma, *un conjunto es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos de acumulación.*

Ejercicio 7. Sea $X \subset R^k \subset R^n$. Demuéstrese que $x \in R^n$ es un punto adherente del conjunto X en el espacio R^n si y sólo si pertenece al espacio R^k y es en él un punto adherente del conjunto X.

De aquí se deduce que el conjunto X es un conjunto cerrado del espacio R^k si y sólo si es un conjunto cerrado del espacio R^n. De esta forma, la propiedad de un conjunto de ser cerrado en un cierto espacio R^n es una propiedad "interna" de éste, es decir, una propiedad que no depende de la elección del espacio R^n, en el cual se encuentra el conjunto analizado. Como se ha señalado anteriormente, la propiedad de un conjunto de ser abierto no es una propiedad "interna" en el sentido señalado, un mismo conjunto puede ser abierto en un espacio R^n y no ser abierto en otro.

Señalemos la siguiente propiedad evidente de los conjuntos abiertos.

Si A es un conjunto cerrado, y $\{x^{(m)}\}$ es una sucesión convergente, todos los términos de la cual pertenecen al conjunto A: $x^{(m)} \in A$, $m = 1, 2, \ldots$, entonces, su límite también pertenece al conjunto A.

En efecto, si $x^{(0)} = \lim_{m \to \infty} x^{(m)}$, entonces de la definición de límite de una sucesión de puntos se deduce que en cualquier entorno del punto $x^{(0)}$ se tienen puntos de la sucesión dada (y más aún, allí se encuentran casi todos los puntos de la sucesión, es decir, todos a excepción de un número finito de ellos), que son, según nuestra suposición, puntos del conjunto A. De esta forma, el punto $x^{(0)}$ es un punto adherente del conjunto A y ya que A es cerrado, entonces $x^{(0)} \in A$.

Lema 5. *Un punto adherente de la clausura de un conjunto es también punto adherente del propio conjunto.*

Corolario. *La clausura de cualquier conjunto es un conjunto cerrado.*

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Sean $X \subset R^n$, $\bar{X}$ la clausura del conjunto X y x un punto adherente del conjunto $\bar{X}$, es decir, $x \in \bar{\bar{X}}$. Demostremos que $x \in \bar{X}$.

De la condición $x \in \bar{\bar{X}}$ se deduce que a cualquier entorno $U = U(x)$ del punto x pertenece, al menos, un punto y del conjunto $\bar{X}$: $y \in U \cap \bar{X}$. Ya que U, como cualquier entorno, es un conjunto abierto, entonces es también un entorno que contiene el punto y. Pero $y \in \bar{X}$, por lo tanto, en cualquier entorno del punto y, en particular, en U, se tiene un punto z del conjunto X: $z \in U \cap X$.

De esta forma, en cualquier entorno U del punto $x \in \bar{\bar{X}}$ se tiene un punto de X. Esto significa que x es un punto adherente del conjunto X: $x \in \bar{X}$. □

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. En el lema 5 se demostró que

$$\bar{\bar{X}} \subset \bar{X},$$

y ya que por (18.18), $\bar{X} \subset \bar{\bar{X}}$, entonces

$$\bar{\bar{X}} = \bar{X}. \tag{18.19}$$

Ejemplos 1. Toda bola n-dimensional

$$\bar{Q}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \colon \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 < r^2\} \tag{18.20}$$

es un conjunto abierto (véase el lema 1), por esto, con frecuencia se llama también *bola n-dimensional abierta*. El conjunto

$$\bar{Q}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \colon \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 \leqslant r^2\} \tag{18.21}$$

es cerrado, ya que las desigualdades no estrictas se conservan durante el paso al límite. El es la clausura de la bola abierta Q^n y se llama *bola n-dimensional cerrada*. En el caso cuando $n = 2$: Q^2 es un círculo abierto, $\bar{Q}^2$ es círculo cerrado; en el caso cuando $n = 1$: Q^1 es un intervalo, $\bar{Q}^1$ es un segmento.

2. La bola cerrada $\bar{Q}^n$ se obtiene de la bola abierta Q^n al añadirle el conjunto

$$\{x = (x_1, \ldots, x_n) \colon \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = r^2\},$$

que se llama *esfera* $(n - 1)$*-dimensional de radio* r *con centro en el punto* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ y que se designa por S^{n-1}. En el caso cuando $n = 2$: S^1 es una circunferencia, en el caso cuando $n = 1$: S^0 es un par de puntos.

La esfera

$$S^{n-1} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \colon \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = r^2\} \tag{18.22}$$

también es un ejemplo de conjunto cerrado (¿por que?).

Señalemos también, que la bola n-dimensional de radio 1 con centro en el origen de coordenadas, habitualmente se denomina *bola n-dimensional unitaria* (abierta o cerrada), y la esfera $(n - 1)$-dimensional de radio 1 con centro en el origen de coordenadas, esfera $(n - 1)$-dimensional unitaria.

Definición 20. *Para cualquier conjunto* $X \subset R^n$, *el conjunto* $R^n \setminus X$ *se llama su complemento en el espacio* R^n (véase el p. 1.1).

Lema 6. *Para que un conjunto sea abierto, es necesario y suficiente que su complemento sea cerrado.*

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sea G un conjunto abierto. Entonces, ningún punto $x \in G$ es punto adherente de su complemento $F = R^n \setminus G$, ya que el conjunto G, siendo avierto, es un entorno del punto x y no contiene puntos del conjunto F. Por lo tanto, todos los puntos adherentes del conjunto F se encuentran en F, lo que significa que el conjunto F es cerrado.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Sea F un conjunto cerrado y sea $x \in G = R^n \setminus F$. Ya que F es cerrado, el punto x no es su punto adherente, por esto, existe un entorno de él $U(x)$, que no se interseca con el conjunto F y por lo tanto tal que $U(x) \subset G$. De esta forma, cualquier punto del conjunto G es interno, es decir, G es abierto. □

Corolario 1. *Un conjunto es cerrado si y sólo si su complemento es abierto.*

Esto se deduce inmediatamente del lema 6, ya que si el conjunto B es el complemento del conjunto A en R^n, es decir, $B = R^n \setminus A$, entonces también viceversa, el conjunto A es el complemento de B en R^n: $A = R^n \setminus B$.

Corolario 2. *La intersección de cualquier colección y la unión de un número finito de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

En efecto, sea F_α conjuntos cerrados, entonces, por el lema 6, los conjuntos $G_\alpha = R^n \setminus F_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, son abiertos. Por la fórmula (1.1) tenemos:

$$\bigcap_\alpha F_\alpha = \bigcap_\alpha (R^n \setminus G_\alpha) = R^n \setminus \bigcup_\alpha G_\alpha .$$

El conjunto $\bigcup\limits_\alpha G_\alpha$, por el lema 4, es abierto, como unión de conjuntos abiertos. Por lo tanto, su complemento $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha = R^n \setminus \bigcup\limits_\alpha G_\alpha$, por el lema 6 es cerrado.

De forma análoga, con ayuda de la fórmula (1.2), se demuestra que es cerrada la unión de un número finito de conjuntos cerrados. □

Ejercicio 8. Demuéstrese que si G es un conjunto abierto y F es cerrado, $G \subset R^n$, $F \subset R^n$, entonces $G \setminus F$ es un conjunto abierto.

Lema 7. *Sean A y B conjuntos cerrados disjuntos de R^n y el conjunto A acotado; entonces, existe un número $d > 0$, tal que para dos puntos cualesquiera $x \in A$ e $y \in B$ se cumple la desigualdad $\rho(x, y) \geqslant d$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que tal número d no existe. Entonces, para cualquier $m = 1, 2, \ldots$ existe un par de puntos $x^{(m)} \in A$ e $y^{(m)} \in B$ tales que $\rho(x^{(m)}, y^{(m)}) < \frac{1}{m}$. Por cuanto A es un conjunto acotado, entonces de la sucesión $\{x^{(m)}\}$ se puede extraer una subsucesión convergente $\{x^{(m_k)}\}$. Sea $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(m_k)} = x^{(0)}$. Ya que el conjunto A es cerrado, tenemos $x^{(0)} \in A$. De la desigualdad

$$\rho(x^{(0)}, y^{(m_k)}) \leqslant \rho(x^{(0)}, x^{(m_k)}) + \rho(x^{(m_k)}, y^{(m_k)}) < \rho(x^{(0)}, x^{(m_k)}) + \frac{1}{m}$$

se deduce que $\lim\limits_{k \to \infty} \rho(x^{(0)}, y^{(m_k)}) = 0$. Por esto, el punto $x^{(0)}$ es un punto adherente del conjunto B y ya que es cerrado, $x^{(0)} \in B$. De esta forma, $x^{(0)} \in A$ y $x^{(0)} \in B$, y esto contradice la condición de que A y B son disjuntos. □

Definición 21. *Para dos conjuntos X_1 y X_2 la magnitud*

$$\rho(X_1, X_2) = \inf_{\substack{x \in X_1 \\ y \in X_2}} \rho(x, y)$$

se llama distancia entre X_1 y X_2.

En particular, si X_1 está compuesto por un punto x, entonces $\rho(X_1, X_2) = \rho(x, X_2)$ se denomina la distancia desde el punto x hasta el conjunto X_2.

Utilizando este término, el lema 7 puede ser enunciado de la siguiente forma.

Si dos conjuntos cerrados son disjuntos y al menos uno de ellos es acotado, entonces la distancia entre ellos es positiva.

Ejercicio 9. Cítese un ejemplo de dos conjuntos cerrados disjuntos, para los cuales la distancia entre ellos es igual a cero.

Lema 8. *Si A es un conjunto cerrado, $A \subset R^n$, $x \in R^n$ y $\rho(x, A) = d$, entonces existe un punto $y \in A$ tal que $\rho(x, y) = d$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\rho(x, A) = \inf\limits_{y \in A} \rho(x, y) = d$, entonces para cualquier $m = 1, 2, \ldots$ se encuentra un punto $y^{(m)} \in A$, tal que $\rho(x, y^{(m)}) < d + \dfrac{1}{m}$. Es evidente, que para cada m es válida la inclusión $y^{(m)} \in U(x, d + 1)$, y por esto, la sucesión $\{y^{(m)}\}$ está acotada y, por consiguiente, de ella se puede extraer una subsucesión convergente $\{y^{(m_k)}\}$. Sea $\lim\limits_{k \to \infty} y^{(m_k)} = y^{(0)}$. Ya que el conjunto A es cerrado, tenemos $y^{(0)} \in A$; más aún,

$$\rho(x, y^{(0)}) \leqslant \rho(x, y^{(m_k)}) + \rho(y^{(m_k)}, y^{(0)}) < d + \frac{1}{m_k} + \rho(y^{(m_k)}, y^{(0)}).$$

Pasando al límite aquí, cuando $k \to \infty$, obtenemos $\rho(x, y^{(0)}) \leqslant d$. Por otra parte $\rho(x, y^{(0)}) \geqslant \rho(x, A) = d$, por lo tanto $\rho(x, y^{(0)}) = d$. □

Definición 22. *El punto $x \in R^n$ se llama punto frontera del conjunto $x \subset R^n$, si en cualquiera de sus entornos existen puntos que pertenecen al conjunto X y puntos que no pertenecen a ésta. El conjunto de todos los puntos frontera del conjunto X se llama su frontera y se designa por ∂X.*

Es evidente, que $\partial X \subset \overline{X}$. Cada uno de los puntos adherentes del conjunto X o bien es un punto frontera de éste o bien es un punto interno de éste, otras posibilidades no hay, por esto $\overline{X} = X \cup \partial X$.

Si G es un conjunto abierto, entonces, en la unión $\overline{G} = G \cup \partial G$ G y ∂G no se intersecan.

En efecto, ya que G es un conjunto abierto, todo punto de éste es interno y de esta forma no pertenece a su frontera.

Ejemplos. Sea $n = 2$, $Q^2 = \{(x_1, x_2): x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ un círculo abierto. Si $X = Q^2$, entonces cualquier punto de la circunferencia $S^1 = \{(x_1, x_2): x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ es un punto frontera del conjunto X y no hay otros puntos frontera, es decir, $S^1 = \partial X$. En este caso, la frontera del conjunto X no pertenece a él.

Sea $X = \overline{Q}^2$ un círculo cerrado, y en este caso, la circunferencia S^1 es también forntera para X, además, ahora $\partial X \subset X$.

Por último, si $X = S^1$ es una circunferencia, entonces cada punto del conjunto X es su punto frontera y no tiene otros puntos frontera, es decir, $X = \partial X$.

En general, la esfera $(n - 1)$-dimensional (18.22) es frontera tanto de la bola abierta n-dimensional (18.20), como de la cerrada (18.21), así como también coincide con su propia frontera (¿por que?).

Ejercicios. 10. Demuéstrese que para que el conjunto $A \subset R^n$ sea cerrado es necesario y suficiente que $\partial A \subset A$.

11. Demuéstrese que $\overline{\partial X} = \partial X$.

En el futuro nos hará falta el concepto de curva en el espacio n-dimensional. Para este objetivo vamos a generalizar la definición dada anteriormente, de curva en el espacio tridimensional, sin tocar la cuestión de la transformación de los parámetros.

Definición 23. *El conjunto de puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ del espacio R^n, cuyas coordenadas están dadas como funciones continuas $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, definidas sobre cierto segmento $[a, b]$, se llama curva continua en el espacio R^n. El argumento t se llama parámetro de la curva. El punto $x(a) = (x_1(a), \ldots, x_n(a)$ se llama origen y el punto $x(b) = (x_1(b), \ldots, x_n(b))$ se llama extremo de la curva dada.*

Todo lo dicho en los p. 16.1 y 16.2 sobre una curva en el espacio tridimensional puede ser trasladado de una forma natural para el caso general n-dimensional, pero no vamos a detenernos en esto. Es importante para el futuro el concepto de recta en el espacio n-dimensional.

Definición 24. *Sean $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in R^n$* y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ algunos números dados $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0$. *El conjunto de los puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$* del espacio R^n, *cuyas coordenadas son representables en la forma*

$$x_i = x_i^{(0)} + \alpha_i t, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad -\infty < t < +\infty,$$

se llama recta en el espacio R^n, que pasa por el punto $x^{(0)}$.

La parte de la recta, que corresponde a la variación del parámetro t en cierto segmento $[a, b]$, se llama *segmento rectilíneo* (recto), y su parte que corresponde a la variación del parámetro en el intervalo infinito $t \geqslant a$, se llama *rayo*. Es evidente, que en el caso cuando $n = 3$, se obtiene una recta, correspondientemente un segmento o un rayo, en el espacio tridimensional habitual, y $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ es el vector director de esta recta. Si son dados dos puntos distintos $(x'_1, \ldots, x'_n)$ y $(x''_1, \ldots, x''_n)$, entonces la ecuación de la recta que pasa por estos puntos tiene la forma

$$x_i = x'_i + (x''_i - x'_i)t; \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Definición 25. *El conjunto $X \subset R^n$, dos puntos cualesquiera del cual pueden ser unidos por una curva continua que pertenezca completamente a este conjunto se llama linealmente conexo* *).

Dicho de otra forma, el conjunto X se llama linealmente conexo si cualesquiera que sean los puntos $x^{(1)} \in X$ y $x^{(2)} \in X$, existe una curva continua $x(t) = \{x_i(t); \alpha \leqslant t \leqslant b\}$ tal que su origen es el punto $x^{(1)}$, es decir $x(a) = x^{(1)}$, y su extremo el punto $x^{(2)}$, es decir, $x(b) = x^{(2)}$, y todos los puntos de esta curva pertenecen al conjunto X, es decir, $x(t) \in X$ para todos los $t \in [a, b]$.

*) Además del concepto de conexión lineal en matemática existe el concepto de conexión del conjunto, el cual no se analiza en nuestro curso.

FIG. 92

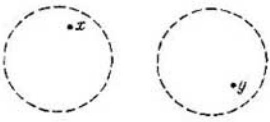


FIG. 93

Ejemplos de conjuntos linealmente conexos son el punto, el segmento y ejemplo de conjunto linealmente no conexo: un par de puntos diferentes.

Lema 9. *Si un conjunto linealmente conexo se interseca con un cierto conjunto y con su complemento en R^n, entonces también se interseca con la frontera de este conjunto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea A un conjunto linealmente conexo, $A \subset R^n$, B un cierto conjunto, $B \subset R^n$, y sean las intersecciones $A \cap B$ y $A \cap (R^n \setminus B)$ no vacías. Sean $x^{(1)} \in A \cap B$ y $x^2 \in A \cap (R^n \setminus B)$. Ya que A es un conjunto linealmente conexo, entonces existe una curva continua $x(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ tal que $x(a) = x^{(1)}$, $x(b) = x^{(2)}$ y $x(t) \in A$ para todos los $t \in [a; b]$. Designemos por τ la cota superior de aquellos $t \in [a, b]$, para los cuales $x(t) \in B$. Es evidente que $a \leqslant \tau \leqslant b$. En cualquier entorno del punto $x(\tau)$ se contienen tanto puntos que pertenecen a B como puntos que no pertenecen a B (¿por que?). Por lo tanto, $x(\tau) \in \partial B$. Ya que $x(\tau) \in A$, la intersección $\partial B \cap A$ no es vacía. □

Definición 26. *Un conjunto abierto linealmente conexo se llama región.* *)

Ejemplos. En el caso de $n = 1$ cualquier intervalo es una región, y el conjunto compuesto por dos o más intervalos disjuntos (fig. 92) aunque representa un conjunto abierto no es una región.

En el caso cuando $n = 2$ todo círculo abierto es una región, y el conjunto compuesto por dos o más círculos abiertos disjuntos (fig 93), aunque también es abierto no es una región ya que dos puntos x e y, que pertenecen a distintos círculos, no pueden ser unidos con una curva continua que pertenezca completamente al interior del conjunto analizado.

Toda bola abierta n-dimensional es una región.

Definición 27. *La región, dos puntos cualesquiera de la cual pueden ser unidos por un segmento que pertenezca completamente a ella se llama región convexa.*

Toda bola abierta n-dimensional es una región convexa.

Definición 28. *El conjunto, que pertenece al espacio R^n y que es la clausura de cierta región, se llama región cerrada.*

La bola cerrada n-dimensional es una región cerrada.

Ejercicios. 12. Demuéstrese que la bola n-dimensional y un paralelepípedo n-dimensional son conjuntos convexos.

13. Constrúyase un ejemplo de región no convexa.

---

*) No se debe mezclar el concepto de dominio de definición de una función y el concepto de región en el sentido de esta definición.

Problema 15 (teorema de Jordan [*]). Demuéstrese que cualquier contorno sencillo (véase el p. 16.1) en el plano divide el plano en dos regiones (acotada y no acotada): esto significa, en primer lugar, que es frontera de cada una de estas regiones, en segundo lugar, que ningunos dos puntos pertenecientes a cada una de las regiones señaladas puedan ser unidos por una curva que no interseque el contorno dado.

18.3. COMPACTOS

En este punto serán analizadas ciertas propiedades de los conjuntos, que se llaman compactos y que juegan un papel importante en el análisis.

Definición 29. *El conjunto $A \subset R^n$ se llama compacto si de cualquier sucesión de puntos de conjunto se puede extraer una subsucesión convergente cuyo límite pertenece al conjunto A.*

Una propiedad importante, que caracteriza a los compactos en R^n, es establece por el siguiente teorema.

Teorema 3. *Para que el conjunto $X \subset R^n$ sea compacto, es necesario y suficiente que éste sea acotado y cerrado.*

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sea $A \subset R^n$ y A compacto. Si el conjunto A fuese no acotado, entonces, para cualquier número natural m se encontraría un punto $x^{(m)} \in A$, tal que $\rho(O, x^{(m)}) > m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Aquí, como siempre, $O = (0, 0, \ldots, 0)$. Es evidente, que $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$. Por esto, cualquier subsucesión de la sucesión $x^{(m)}$ también tiene como límite, y por lo tanto, de $x^{(m)}$ no se puede elegir una subsucesión convergente, lo que contradice el hecho de que A es compacto. De esta forma A es un conjunto acotado.

Si el conjunto A no fuese cerrado, entonces existiría un punto adherente x que no pertenecería a él, $x \notin A$. Para este punto se encontraría una sucesión $x^{(m)} \subset A$, $m = 1, 2, \ldots$, tal que $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = x$. Por esto, cualquier subsucesión de esta sucesión también tendría como límite un punto $x \notin A$, es decir, el conjunto A otra vez no sería compacto. Por lo tanto, A es un conjunto cerrado.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Sea X un conjunto cerrado acotado y $\{x^{(m)}\}$ una subsucesión cualquiera de puntos de este espacio: $x^{(m)} \in X$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Ya que el conjunto X es acotado, esta sucesión también es acotada. Por lo tanto, según el teorema 2 del p. 18.1, de ella se puede extraer una subsucesión convergente $\{x^{(m_k)}\}$. Designemos su límite por x: $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(m_k)} = x$. Es evidente que x es un punto adherente del conjunto X, o sea, $x^{(m_k)} \in X$, y ya que X es un conjunto cerrado, entonces, $x \in X$, es decir, X efectivamente es compacto. ☐

El teorema demostrado permite establecer fácilmente la compacticidad de muchos conjuntos que se encuentran con frecuencia, por ejemplo, los segmentos, las bolas cerradas y los paralelepípedos, las esferas en los espacios R^n de cualquier dimensión, todos los conjuntos enumerados al ser acotados y cerrados son compactos. Con la misma facilidad, con ayuda del teorema 3 se establece también la no compacticidad de muchos conjuntos. Por ejemplo, los intervalos finitos, al no ser cerrados, y los infinitos al no ser conjuntos acotados, no son compactos.

---

[*] C. Jordan (1838—1892), matemático francés.

Señalemos que también según el teorema 3, el lema 7 del p. 18.2 puede ser enunciado de la forma siguiente: *si dos conjuntos cerrados no se intersecan y si al menos uno de ellos es compacto, entonces la distancia entre ellos es mayor que cero.*

Antes de pasar a otras propiedades características de los compactos, introduciremos una serie de definiciones y demostraremos una afirmación complementaria.

La sucesión de cubos n-dimensionales $\{Q_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, se llama *sucesión de cubos encajados* si

$$Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots \supset Q_k \supset Q_{k+1} \supset \ldots$$

Lema 10. *Para la sucesión de cubos cerrados y encajados $\{Q_k\}$, cuyas longitudes de las aristas tienden a cero, cuando $k \to \infty$, existe un punto, y sólo uno, que pertenece a todos los cubos de la sucesión analizada.*

DEMOSTRACIÓN. Sean los cubos

$$Q_k = \{x = (x_i) : a_i^{(k)} \leqslant x_i \leqslant a_i^{(k)} + d^{(k)};\ i = 1, 2, \ldots, n\} \tag{18.23}$$

con aristas de longitud $d^{(k)}$, que forman una sucesión de cubos encajados *) y sea $\lim\limits_{k \to \infty} d^{(k)} = 0$. Entonces, los segmentos $[a_i^k, a_i^k + d_i^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, forman un sistema de segmentos encajados, cuyas longitudes $d_i^{(k)}$ tienden a cero cuando $k \to \infty$. Por esto, existen y además son únicos, los números ξ_i tales que para un i ($i = 1, 2, \ldots, n$) dado y para cualquier $k = 1, 2, \ldots$, tiene lugar la inclusión $\xi_i \in [a_i^k, a_i^k + d^{(k)}]$. De aquí se deduce que el punto $\xi = [\xi_1, \ldots, \xi_n]$ pertenece a todos los cubos de la sucesión analizada $\xi \in Q_k$, $k = 1, 2, \ldots$ y este punto es único.

Definición 30. Sea $X \subset R^n$. El sistema

$$\Omega = \{X_\alpha\}, \alpha \in \mathfrak{A} \tag{18.24}$$

de conjuntos $X_\alpha \subset R^n$ ($\mathfrak{A} = \{\alpha\}$ es un conjunto de índices α) se llama *recubrimiento del conjunto X*, si

$$X \subset \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} X.$$

De esta forma, el sistema (18.24) se llama recubrimiento del conjunto X, si cada uno de los puntos de este conjunto pertenece al menos a uno de los conjuntos X_α del sistema Ω.

El recubrimiento (18.24) del conjunto X, compuesto por un número finito de conjuntos X_α, se llama *recubrimiento finito de este conjunto*.

En el caso, cuando todos los conjuntos del sistema Ω son abiertos, el recubrimiento Ω se llama *recubrimiento abierto del conjunto X*.

Teorema 4. *Para que el conjunto $X \subset R^n$ sea compacto, es necesario y suficiente que de cualquiera de sus recubrimientos abiertos se pueda extraer un recubrimiento finito.*

---

*) Recordemos que acordamos (véase el p. 18.1) entender siempre por cubo sólo los cubos que estuvieran dados por desigualdades de la forma (18.23) para un sistema de coordenadas dado.

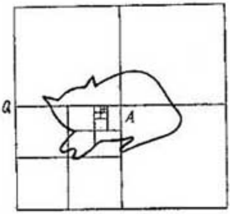


FIG. 94

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sea A compacto y sea el sistema

$$\Omega = \{G_\alpha\}, \quad \alpha \in \mathfrak{A} \tag{18.25}$$

un recubrimiento abierto de A. Supongamos que de este recubrimiento no se puede extraer un recubrimiento finito del compacto A. Según el teorema 3 del hecho de que el conjunto A es compacto se deduce que es acotado. Por esto, existe un cubo cerrado Q, que contiene el conjunto A.

Sea

$$Q = \{x = (x_i): a_i \leqslant x_i \leqslant a_i + d, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Dividamos el cubo Q en 2^n cubos cerrados iguales Q_j, definidos por el juego de las n desigualdades de la forma

$$a_i + \frac{d}{2} \leqslant x_i \leqslant a_i + d \qquad \text{o} \qquad a_i \leqslant x_i \leqslant a_i + \frac{d}{2}$$

(en la fig. 94 se muestra el caso cuando $n = 2$), entonces

$$Q = \bigcup_{j=1}^{2^n} Q_j. \tag{18.26}$$

El sistema (18.25) forma un recubrimiento abierto de cada uno de los conjuntos $A \cap Q_j$ ($j = 1, 2, \ldots, 2^n$). Entre estos conjuntos existe un conjunto no vacío — designémoslo por $A \cap Q_{j_1}$ — tal que del recubrimiento (18.25) no se puede extraer un recubrimiento finito de este conjunto, en el caso contrario, del sistema (18.25) se podría, en virtud de la igualdad (18.26), extraer también un recubrimiento finito de todo el conjunto A, lo que estaría en contradicción con la suposición hecha.

Dividamos otra vez el cubo Q_{j_1} en 2^n cubos cerrados iguales $Q_{j_1 j}$ ($j = 1, 2, \ldots, 2^n$). Designemos por $Q_{j_1 j_2}$ aquel de los cubos $Q_{j_1 j}$, cuya intersección con el compacto A no pueda ser recubierta con un número finito de conjuntos del sistema Ω, etc. Como resultado, obtenemos una sucesión de cubos cerrados encajados

$$Q_{j_1} \supset Q_{j_1 j_2} \supset \ldots \supset Q_{j_1 j_2 \ldots j_k} \supset \ldots, \tag{18.27}$$

las longitudes de los cuales son respectivamente iguales a $d/2, d/4, \ldots, d/2^k, \ldots$, y por lo tanto, tienden a cero, cuando $k \to \infty$.

Cada uno de los cubos $Q_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ de la sucesión (18.27) tiene la propiedad de que del sistema (18.25) no se puede extraer un recubrimiento finito del conjunto no vacío

$$A \cap Q_{j_1 j_2 \ldots j_k},$$

j_ν toma uno de los valores $1, 2, 3, \ldots, 2^n$;
$\nu = 1, 2, \ldots, k$; $k = 1, 2, \ldots$. Por el lema 10 existe, y además es único, un punto, que pertenece a todos los cubos del sistema (18.27). Ya que las aristas de los cubos de este sistema tienden a cero y cada uno de los cubos tiene una intersección no vacía con el conjunto A, entonces en cualquier entorno del punto ξ se tienen puntos del conjunto A. Efectivamente, señalemos que la diagonal del cubo $Q_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ es igual a $d\sqrt{n}/2^k$. Más adelante, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ elegimos k_0 tal que

$$d\sqrt{n}/2^{k_0} < \varepsilon. \tag{18.28}$$

Esto es posible, ya que $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{d\sqrt{n}}{2^k} = 0$. Ahora, observando que cualquier punto $x \in Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}}$ se encuentra del punto $\xi \in Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}}$ a una distancia, que no sobrepasa a la diagonal del cubo $Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}}$ tendremos

$$\rho(x, \xi) \leqslant \frac{d\sqrt{n}}{2^{k_0}} < \varepsilon.$$

Esto significa que x se encuentra en un ε-entorno del punto ξ. Por lo tanto, todo el cubo $Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}}$, incluso sus puntos pertenecientes al conjunto A, está contenido en el ε-entorno del punto ξ analizado. De esta forma, ξ es un punto adherente del conjunto A. Por el teorema 3, el conjunto A, siendo compacto, es cerrado y por esto $\xi \in A$.

La sucesión auxiliar de cubos construida (18.27) permite demostrar fácilmente la imposibilidad de que se cumpla la suposición hecha de que del recubrimiento (18.25) del compacto A no se puede extraer un recubrimiento finito de este compacto. En efecto, ya que el sistema (18.25) es un recubrimiento del conjunto A, entonces existe un índice $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, tal que $\xi \in G_{\alpha_0}$. El conjunto G_{α_0} es abierto, por lo tanto, se encuentra un número $\varepsilon > 0$ tal que el ε-entorno $U(\xi, \varepsilon)$ del punto ξ estará completamente contenido en G_{α_0}:

$$U(\xi, \varepsilon) \subset G_{\alpha_0}. \tag{18.29}$$

Observemos ahora, que para cualquier $\varepsilon > 0$, en particular, para ε, que satisfaga la condición (18.29), se encuentra, como se ha mostrado con anterioridad, un número k_0 tal que se cumplirá la inclusión

$$Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}} \subset U(\xi, \varepsilon). \tag{18.30}$$

De (18.29) y (18.30) tenemos

$$A \cap Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}} \subset Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}} \subset U(\xi, \varepsilon) \subset G_{\alpha_0}$$

y, por lo tanto, del sistema (18.25) se puede extraer un recubrimiento finito del conjunto $A \cap Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}}$, y precisamente un recubrimiento compuesto solamente por el conjunto G_{α_0}. Esto contradice el supuesto, en correspondencia con el cuál fueron elegidos los cubos $Q_{j_1 j_2 \ldots j_k}$. De esta forma, al suponer que del sistema (18.25) no se extrae un recubrimiento finito del compacto hemos llegado a una contradicción. De esta forma, está demostrada la necesidad de esta condición.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Sea $X \subset R^n$ y supongamos que de cualquier recubrimiento abierto del conjunto X se puede extraer un recubrimiento finito. Supongamos que X no es compacto. Esto, por la definición 29, significa que existe una sucesión $\{x^{(m)}\} \subset X$, $m = 1, 2, \ldots$, de la cual no se puede extraer una subsucesión que converja hacia cierto punto de X. Por lo tanto, cualquiera que sea el punto $x \in X$, no es un límite parcial de la sucesión $\{x^{(m)}\}$. Por esto, para cada punto $x \in X$ se encuentra un entorno — designémoslo por G_x — que contiene solamente un número finito de elementos de la sucesión $\{x^{(m)}\}$; en caso contrario, de la sucesión $\{x^{(m)}\}$ se hubiera podido extraer una subsucesión convergente hacia x (si todos los elementos de la sucesión $\{x^{(m)}\}$, que se encuentran en G_x, son tales que $x^{(m)} \neq x$, entonces del hecho de que estos elementos son sólo un número finito, evidentemente se deduce que se puede escoger incluso tal entorno del punto x que no contendrá elementos algunos de la sucesión $\{x^{(m)}\}$.

En virtud de la elección del entorno G_x, cada punto x del conjunto X pertenece al correspondiente entorno: $x \in G_x$. Por esto, el conjunto $\Omega = \{G_x\}$, $x \in X$, de todos estos entornos forma un recubrimiento abierto del conjunto X. Según la condición del teorema, de éste se puede extraer un recubrimiento finito. Sea éste

$$\Omega_0 = \{G_{x_1}, G_{x_2}, \ldots, G_{x_k}\}.$$

Cada elemento de este recubrimiento contiene sólo un número finito de términos de la sucesión $\{x^{(m)}\}$. Por lo tanto, todos los elementos del recubrimiento Ω_0 también contienen sólo un número finito de términos de la sucesión $\{x^{(m)}\}$. Esto sin embargo, es imposible, ya que al recubrir todo el conjunto X, los elementos del recubrimiento finito Ω_0 deben contener todos los términos de la sucesión $\{x^{(m)}\}$, cuyo número es infinito. La contradicción obtenida demuestra la suficiencia de las condiciones del teorema. $\square$

OBSERVACIÓN. La necesidad de las condiciones del teorema, es decir, la afirmación que de cualquier recubrimiento abierto del compacto se puede extraer un recubrimiento finito, se llama habitualmente **lema de Heine — Borel** *).

Subrayemos que en el teorema 4 es esencial el hecho de que se analizan recubrimientos compuestos precisamente por conjuntos abiertos. Así, por ejemplo, del recubrimiento del segmento $[0, 1]$ (el que, como ya se ha señalado, siendo un conjunto cerrado y acotado, es compacto) por los segmentos $[1/(n+1), 1/n]$, $n = 1, 2, \ldots$, y por el segmento $[-1, 0]$ no se puede extraer un recubrimiento finito. Esto se explica por el hecho de que aquí el recubrimiento está compuesto no por conjuntos abiertos, sino por conjuntos cerrados.

*) E. Borel (1871 — 1956), matemático francés.

Ejercicio 14. Demuéstrese que para cualquier recubrimiento abierto finito $\Omega = \{G_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ del compacto $A \subset R^n$ existe un número $l > 0$, tal que cualquiera que sea el conjunto $X \subset A$, para el cual $\sup\limits_{x, y \in E} \rho(x, y) \leqslant l$, existe un elemento G_{k_0} del recubrimiento Ω, tal que $X \subset G_{k_0}$.

Para concluir este punto demostremos otra afirmación auxiliar. Previamente introduzcamos el siguiente símbolo: para cualquier conjunto $X \subset R^n$ designemos por X_η, donde $\eta > 0$, el conjunto de todos los puntos cuya distancia hasta X no es superior al número η, es decir, hagamos

$$X_\eta \overset{\text{def}}{=} \{x: \rho(x, X) \leqslant \eta\}.$$

Lema 11. *Si A es compacto, $A \subset R^n$, entonces para cualquier $\eta > 0$ el conjunto A también es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Según el teorema 3, el conjunto A, siendo compacto, es acotado y cerrado. La acotación del conjunto A significa que existe un $a > 0$ tal que A está contenido en la bola $U(O, a)$.

Mostremos que $A_\eta \in U(O, a + \eta)$. Si $x \in A_\eta$, entonces por el lema 8 se encuentra un punto $y \in A$, tal que $\rho(x, y) = \rho(x, A) \leqslant \eta$. De la condición $A \subset U(O, a)$ se deduce que $\rho(O, y) < a$, por esto

$$\rho(O, x) \leqslant \rho(O, y) + \rho(y, x) < a + \eta.$$

De esta forma, $x \in U(O, a + \eta)$. El punto x es un punto arbitrario del conjunto A_η. Por lo tanto, $A_\eta \subset U(O, a + \eta)$ y por esto el conjunto A_η es acotado.

Mostremos ahora, que A_η es un conjunto cerrado. Si x es un punto adherente del conjunto $A_\eta: x \in \bar{A}_\eta$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un punto $y \in A_\eta$ tal que $\rho(x, y) < \varepsilon$. De la definición del conjunto A_η y del lema 8 se deduce que existe un punto $z_0 \in A$ tal que $\rho(y, z_0) = \rho(y, A) \leqslant \eta$; por esto

$$\rho(x, A) = \inf_{z \in A} \rho(x, z) \leqslant \rho(x, z_0) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z_0) < \varepsilon + \eta.$$

Esta desigualdad es válida para cualquier $\varepsilon > 0$. Haciendo tender ε hacia cero, obtenemos $\rho(x, A) \leqslant \eta$, es decir, $x \in A_\eta$ lo que demuestra que el conjunto A_η es cerrado.

Así, el conjunto A_η es acotado y cerrado, y por lo tanto, en virtud del propio teorema 3 es compacto. □

18.4. ESPACIOS VECTORIALES DE VARIAS DIMENSIONES

En el p. 15.1 se señaló, que para un sistema de coordenadas dado en un espacio tridimensional, la definición de un vector es equivalente a la definición de sus tres coordenadas. Durante la adición de vectores y su multiplicación por un número, se efectúan las mismas operaciones con sus coordenadas. En el caso n-dimensional, el vector puede ser definido con ayuda de sus coordenadas.

Definición 31. *El sistema ordenado de n números reales*

$$(x_1, \ldots, x_n); \quad x_i \in R; \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

se llama vector real n-dimensional x, *y los números* $x_1, \ldots, x_n$ *se llaman sus coordenadas. El número n se llama dimensión del vector.*

Se llama suma $x + y$ *de los vectores* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *e* $y = (y_1, \ldots, y_n)$ *el vector* $(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$, *es decir,*

$$x + y \overset{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

y se llama producto del vector x *por el número* $\lambda \in R$ *el vector*

$$\lambda x \overset{\text{def}}{=} x\lambda \overset{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

El conjunto de todos los vectores n-dimensionales, en el que se han introducido las operaciones de adición de vectores y multiplicacion de un vector por un número real, se llama *espacio vectorial real n-dimensional, o, de una forma más completa, espacio vectorial aritmético n-dimensional sobre el campo de los números reales.*

El vector $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ se llama *vector nulo o cero del espacio vectorial n-dimensional.*

Por definición, el vector $-x \overset{\text{def}}{=} (-1)x$ se llama vector opuesto al vector x.

Ejercicio 15. Demuéstrese que si x, y, z son vectores cualesquiera, y los números $\lambda, \mu \in R$ son arbitrarios, entonces 1) $x + y = y + x$; 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$; 3) $x + \mathbf{0} = x$; 4) $1 \cdot x = x$; 5) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$; 6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$; 7) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

De esta forma, el espacio aritmético n-dimensional (véase la definición 1 en el p. 18.1) se convierte en el espacio vectorial aritmético n-dimensional, si en él se introducen la adición de sus elementos y la multiplicación de sus elementos por un número según la definición 31.

En el caso tridimensional, la relación entre los puntos del espacio y los vectores en él, se puede establecer (como siempre, considerando dado un sistema de coordenadas), poniendo en correspondencia a cada punto $M = (x_1, x_2, x_3)$ de este espacio su radio vector, es decir, el vector $\overline{OM} = (x_1, x_2, x_3)$. Esta correspondencia es una correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio tridimensional y los vectores en este espacio.

A veces, el espacio aritmético n-dimensional, introducido en la definición 1 del p. 18.1, a diferencia del espacio vectorial n-dimensional, es llamado *espacio puntual*.

Así, tanto el espacio puntual n-dimensional, como el espacio vectorial n-dimensional están compuestos por los mismos elementos, por los conjuntos ordenados de n números reales. Por esto, tanto uno como otro espacio, será designado por el mismo símbolo R^n. Ellos se diferencian en que en el espacio aritmético n-dimensional se introduce el concepto de distancia entre sus elementos (véase la definición 1 en el p. 18.1), y en el espacio vectorial n-dimensional se definen las operaciones de adición de vectores y multiplicación de vectores por un número real (véase la definición 31 de este punto).

Si por e_k se designa un vector n-dimensional, todas las coordenadas del cual son iguales a cero, excepto la coordenada k, que es igual a la unidad, k es un número natural fijo, $(k \in \{1, 2, \ldots, n\})$, entonces para cualquier vector n-dimensional $x = (x_1, \ldots, x_n)$, es válida la igualdad

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \tag{18.31}$$

cuyo miembro segundo se llama descomposición del vector x según los vectores e_1, $\dots, e_n$. Los coeficientes $x_1, \dots, x_n$ de esta descomposición son únicos, es decir, están unívocamente definidos por el propio vector x, y, por lo tanto, en virtud de la igualdad (18.31) coinciden con sus coordenadas $x_1, \dots, x_n$.

Los vectores e_k, $k = 1, 2, \dots, n$ se llaman vectores *coordenados* o *vectores básicos, y su conjunto* $\{e_1, \dots, e_n\}$, se llama *base estándar* del espacio R^n (la definición general de base será dada en el p. 57.2).

El subconjunto L del espacio vectorial R^n se llama *subespacio* del espacio R^n, si para vectores cualesquiera $x \in L$, $y \in L$ y números cualesquiera $\lambda \in R$, $\mu \in R$ tiene lugar la inclusión

$$\lambda x + \mu y \in L.$$

Definición 32. *Se llama producto escalar de los vectores* $x = (x_1, \dots, x_n)$ *e* $y = (y_1, \dots, y_n)$, $n > 3$, *el número designado por* (x, y) *y definido por la fórmula*

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n. \tag{18.32}$$

De la matemática elemental, es conocido que la fórmula (18.32) es válida también para la definición habitual del producto escalar de vectores, es decir, para $n \leqslant 3$.

Cualquier espacio n-dimensional, en el que se haya introducido el producto escalar se llama *euclídeo*.

El número $\sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ se llama *longitud del vector* x y se designa por $|x|$:

$$|x| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}. \tag{18.33}$$

Es evidente que para cualquier vector $x \in R^n$ y para cualquier número $\lambda \in R$ tiene lugar la igualdad

$$|\lambda x| = |\lambda| |x| \tag{18.34}$$

y de la desigualdad (18.3) (vèase el p. 18.1) se deduce, que para cualesquiera $x \in R^n$, $y \in R^n$ se cumple la desigualdad

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|, \tag{18.35}$$

llamada *desigualdad triangular*.

De (18.35) se deduce que

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y|. \tag{18.36}$$

En efecto, $|x| = |x - y + y| \leqslant |x - y| + |y|$, por esto

$$|x| - |y| \leqslant |x - y|.$$

Ya que x e y son equitativos, tenemos también

$$|y| - |x| \leqslant |y - x| = |x - y|.$$

De las dos últimas desigualdades se deduce (18.36). □

Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, entonces $x - y = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$ y por esto

$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} = \rho(x, y), \quad (18.37)$$

donde x e y son puntos del espacio puntual n-dimensional con las mismas coordenadas que los vectores x e y. De esta forma, en el espacio vectorial n-dimensional con producto escalar está definida la distancia $|x - y|$ entre sus elementos y ésta coincide con la distancia $\rho(x, y)$ definida en el p. 18.1. Por esto, todos los conceptos introducidos en los p. 18.1 — 18.3 para los espacios puntuales tienen sentido también para los espacios vectoriales con producto escalar.

En calidad de ejemplo de la utilización de los símbolos vectoriales señalemos que la bola cerrada $Q^n(x_0, r)$ de radio r con centro en el punto x_0 en las designaciones vectoriales se define por la igualdad

$$Q^n(x_0, r) = \{x: |x - x_0| \leqslant r\},$$

y la esfera $(n - 1)$-dimensional $S^{n-1}(x_0, r)$, que la acota, se define por la igualdad

$$S^{n-1}(x_0, r) = \{x: |x - x_0| = r\}.$$

El producto escalar tiene las siguientes propiedades, demostrables directamente.

1°. **Conmutatividad.** Para cualesquiera $x \in R^n$, $y \in R^n$: $(x, y) = (y, x)$.

2°. **Distributividad.** Para cualesquiera $x \in R^n$, $y \in R^n$: $z \in R^n$: $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

3°. **Homogeneidad.** Para cualquier $x \in R^n$ y para cualquier número $\lambda \in R$: $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.

4°. **Regularidad.** Para cualquier $x \in R^n$: $(x, x) \geqslant 0$, además,

$$(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

La distributividad y la homogeneidad del producto escalar componen conjuntamente la propiedad llamada *linealidad del producto escalar*.

Si $e_1, \ldots, e_n$ son vectores coordenados en R^n, entonces por (18.32)

$$(e_i, e_j) \begin{cases} 1 & \text{para} \quad i = j, \\ 0 & \text{para} \quad i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Por esto para cualquier vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en virtud de las propiedades del producto escalar obtenemos:

$$(x, e_i) = (x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n, e_i) = x_1(e_1, e_i) + \ldots + x_n(e_n, e_i) = \\ = x_i(e_i, e_i) = x_i, \quad (18.38)$$

es decir, la coordenada i del vector x es igual al producto escalar (x, e_i).

Utilizando la designación del producto escalar y de la longitud de un vector, la desigualdad de Cauchy — Shwarz (véase (18.2) en el p. 18.1) para los vectores $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ puede ser escrita en la forma

$$|(x, y)| \leqslant |x||y|. \quad (18.39)$$

Señalemos que la desigualdad (18.3) en términos de longitud de los vectores significa que la longitud de la suma de vectores no sobrepasa la suma de sus longitudes:

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Se llama ángulo φ entre los vectores $x \in R^n$ e $y \in R^n$, $n > 3$, el ángulo φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, definido por la igualdad

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x||y|}. \tag{18.40}$$

En virtud de la desigualdad de Cauchy — Shwarz (18.39) esta definición es correcta, o sea, según (18.39) para φ, definido por la fórmula (18.40), tiene lugar la desigualdad $\cos |\varphi| \leqslant 1$.

Aquí, otra vez, como en el caso de la definición de producto escalar, por la definición inicial se toma la afirmación análoga a la afirmación demostrada en el espacio R^n, $n \leqslant 3$. Gracias a esto, las fórmulas (18.32) y (18.40) son válidas en todos los espacios R^n, $n = 1, 2, \ldots$.

Los vectores, cuyos productos escalares son iguales a cero, se llaman *ortogonales*.

El vector de longitud unitaria de forma breve se llama *vector unitario*.

Si a y b son vectores unitarios, entonces para el coseno del ángulo entre ellos, de la fórmula (18.40) obtenemos

$$\cos \varphi = (a, b), \quad |a| = |b| = 1. \tag{18.41}$$

Si $a = (a_1, \ldots, a_n)$ es un vector unitario, entonces designando por α_i el ángulo entre los vectores a y e_i según (18.38) y (18.41) tenemos:

$$a_i = (a, e_i) = \cos \alpha_i, \quad \text{es decir,} \quad a = (\cos \alpha_1, \ldots, \cos \alpha_n).$$

Los cosenos $\cos \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$, se llaman *cosenos directores del vector* a.

Ya que $|a| = 1$, entonces por (18.33)

$$\cos^2 \alpha_1 + \ldots + \cos^2 \alpha_n = 1. \tag{18.42}$$

Si a no es un vector unitario y $a \neq 0$, entonces, evidentemente, el vector $a/|a|$ ya es unitario, y sus cosenos directores se llaman también cosenos directores del vector a.

La ecuación de la recta en el espacio R^n (vease la definición 24 en el p. 18.2) en la notación vectorial tiene la forma

$$\begin{gathered} x = x^{(0)} + ta, \ -\infty < t < +\infty, \\ x = (x_1, \ldots, x_n), \\ x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}), \ a = (a_1, \ldots, a_n) \end{gathered} \tag{18.43}$$

(al sumar las coordenadas de los vectores también se suman los propios vectores, y al multiplicar sus coordenadas por un número se multiplican ellos mismos por el mismo número). La recta (18.43) se llama *recta que pasa por* el punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ del espacio puntual en el sentido del vector a.

Si a es un vector unitario: $|a| = 1$ y, por lo tanto, $a = (\cos \alpha_1, \ldots, \cos \alpha_n)$ ($\cos \alpha_i$ son cosenos directores del vector a; $i = 1, 2, \ldots, n$), entonces la recta (18.43) expresada según las coordenadas tiene la forma

$$x_i = x_i^{(0)} + t\cos\alpha_i;\quad i = 1, 2, \ldots, n;\quad -\infty < t \quad +\infty. \tag{18.44}$$

Sean dados dos puntos $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ y $x'' = (x''_1, \ldots, x''_n)$ del espacio puntual; designemos por $\boldsymbol{x}'$ y $\boldsymbol{x}''$ los vectores con estas mismas coordenadas. Entonces, la ecuación de la recta, que pasa por los puntos x' y x'' (véase el p. 18.2) en la forma vectorial será

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + (\boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{x}')t,\quad -\infty < t < +\infty. \tag{18.45}$$

Por analogia con el § 15 se puede analizar la función vectorial n-dimensional

$$\boldsymbol{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)),\quad t \in E \subset \boldsymbol{R}$$

($\boldsymbol{R}$, como siempre, es el conjunto de todos los números reales). Completamente análogo a como fue hecho en el § 15, para cualquier n natural se definen los conceptos de límite, continuidad y derivada de una función vectorial, $\boldsymbol{r}(t) \in \boldsymbol{R}^n$. Al igual que en el caso de $n \leqslant 3$ durante la diferenciación de una función vectorial, se diferencian sus coordenadas: $\boldsymbol{r}'(t) = (x'_1(t), \ldots x'_n(t))$, y la afirmación $\lim\limits_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = 0$ es equivalente a $\lim\limits_{t\to t_0} |\boldsymbol{r}(t)| = 0$.

§ 19. LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

19.1. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

En este párrafo se analizan las funciones definidas sobre los conjuntos del espacio aritmético n-dimensional euclídeo $\boldsymbol{R}^n$ y cuyos valores son números reales. De esta forma, todas las funciones serán funciones de puntos del espacio. Esto significa que si se tiene cualquier función $f(x_1, \ldots, x_n)$ y en el espacio $\boldsymbol{R}^n$ está dado un sistema de coordenadas $x_1, \ldots, x_n$, entonces en otro sistema de coordenadas $\xi_1, \ldots, \xi_n$, relacionado con el inicial por la transformación

$$x_i = x_i(\xi_1, \ldots, \xi_n),\quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

por *la misma función se entiende no la función* $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, sino la función

$$f[x_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, x_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)].$$

Las funciones analizadas serán designadas o bien por una letra, por ejemplo f, o bien más detalladamente, señalando el argumento, por $f(x)$ o por $f(x_1, \ldots, x_n)$. Para $n > 1$ éstas se llaman *funciones de varias variables*. En el caso cuando $n = 2$ en lugar de $f(x_1, x_2)$ escribiremos también $f(x, y)$, en el caso cuando $n = 3$ en lugar de $f(x_1, x_2, x_3)$ escribiremos también $f(x, y, z)$.

A cada función $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ le corresponde su gráfica en el espacio n-dimensional de puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$. Definamos este concepto para el caso aquí analizado.

Definición 1. *Sea la función* $y = f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, *definida sobre el conjunto* X *del espacio euclídeo* R^n, *y sea* R_{xy}^{n+1} *un espacio euclídeo* $(n + 1)$*-dimensional de puntos* $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y)$. *El conjunto de puntos*

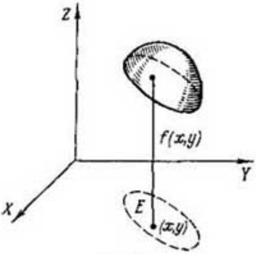


FIG. 95

del espacio R_{xy}^{n+1} del tipo $(x, f(x)) = (x_1, \ldots, x_n, f(x))$, donde $x \in X$, se llama gráfica de la función f.

La gráfica de la función de varias variables, al igual que la gráfica de la función de una variable, es cómodo utilizarla para la interpretación geométrica de los conceptos introducidos y de las afirmaciones que se demuestran. Naturalmente, la representación de la gráfica en un dibujo, cuando el número de variables independientes es mayor que uno, es más difícil que en el caso unidimensional. En la fig. 95 se representa la forma de la gráfica de una función de dos variables $y = f(x_1, x_2)$.

El enunciado dado aquí de la definición de gráfica de una función de n variables es un caso particular de la definición general de gráfica de una función enunciada en el p. 1.2*.

Sea otra vez la función f definida sobre el conjunto $X \subset R^n$. El conjunto de los puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ del espacio R^n, que satisfacen la ecuación

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c,$$

donde c es una constante, se llama *conjunto de nivel* de la función f, correspondiente al valor dado de c.

En el caso cuando $n = 2$ el conjunto de nivel se llama también *línea de nivel*; en el caso cuando $n = 3$, *superficie de nivel*, y cuando $n > 3$, *hipersuperficie de nivel*.

19.2. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN Y SU CONTINUIDAD

Enunciemos la definición de límite de una función de varias variables.

Definición 2. *Sea $f: X \to R$, $E \subset X \subset R^n$, $x^{(0)} \in R^n$, $x^{(0)}$ es un punto de adherencia del conjunto E.*

El número a se llama límite de la función f por el conjunto E en el punto $x^{(0)}$ o lo que es lo mismo, cuando $x \to x^0$ si para cualquier sucesión de puntos

$$x^{(m)} \in E, \quad \lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x^{(0)},$$

la sucesión numérica $\{f(x^{(m)})\}$ converge al número a:

$$\lim_{m \to \infty} f(x^{(m)}) = a.$$

En este caso, se escribe

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = a. \tag{19.1}$$

Por analogía con el caso unidimensional (véase el p. 5.4 y el p. 5.7) se puede dar otra definición de límite de una función en un punto dado, equivalente a la enunciada, en la cual no se utiliza el concepto de límite de una sucesión.

Definición 3. *Sea $f: X \to R$, $E \subset X \subset R^n$, $x^{(0)} \in R^n$, $x^{(0)}$ es un punto de adherencia del conjunto E.*

El número a se llama límite de la función por el conjunto E en el punto $x^{(0)}$ (o cuando $x \to x^{(0)}$) si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier punto $x \in U(x^{(0)}, \delta)$ se cumple la desigualdad

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

De forma completamente análoga al caso de una función de una variable (véase el p. 5.7) se demuestra la equivalencia de las definiciones 2 y 3.

En el caso de $E = X$, es decir, cuando el límite se toma por todo el conjunto de definición de la función, el límite (19.1) se llama simplemente límite de la función f en el punto x_0 y se denota por

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x). \tag{19.2}$$

Al igual que para las funciones de una variable, en el caso de definición de la función de varias variables con una fórmula, por $\lim_{x \to x^{(0)}} f(x)$ se entiende el límite de esta función en el punto $x^{(0)}$ por todo el conjunto de los valores $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, para los cuales la fórmula indicada tiene sentido y para los cuales en el proceso de realización de todos los cálculos necesarios según esta fórmula para obtener los valores de la función f se obtienen sólo números reales.

Junto con la notación (19.2), para el límite de la función f en el punto $x^{(0)}$ se utiliza la notación

$$\lim_{\rho(x, x^{(0)}) \to 0} f(x), \quad \lim_{|x - x^{(0)}| \to 0} f(x). \tag{19.3}$$

En esencia, el concepto de límite de una función por un conjunto, no es más general que simplemente el concepto de límite de una función, ya que en las definiciones 2 y 3 se habla del concepto de límite de una función aplicado a la restricción de la función sobre el conjunto E.

La existencia del límite de una función f de varias variables $f: X \to R$, $X \subset R^n$ en el punto $x^{(0)} \in R^n$, y si éste existe, entonces su valor se determina completamente por los valores de la función sobre la intersección $U(x^{(0)}) \cap X$ de un entorno arbitrario $U(x^{(0)})$ del punto $x^{(0)}$ con el conjunto de definición X de la función f, es decir, no dependen de la elección del entorno indicado. El enunciado exacto de esta afirmación consiste en lo siguiente.

Si la función $f: X \to R$, $X \subset R^n$, tiene límite $\lim_{x \to x^{(0)}} f(x)$, entonces, para cualquier entorno $U(x^{(0)})$ del punto $x^{(0)}$ tiene el mismo límite por el conjunto $U(x^{(0)}) \cap X$:

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in U(x^{(0)}) \cap X}} f(x). \qquad (19.4)$$

Si la función $f: X \to R$, $X \subset R^n$ tiene límite $\lim\limits_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in U(x^{(0)}) \cap X}} f(x)$ al menos para un entorno $U(x^{(0)})$ del punto $x^{(0)}$, entonces tiene límite en este punto por el conjunto X (además, en virtud de la primera afirmación se cumple la igualdad (19.4)). Todo esto es totalmente fácil de comprobar y por esto, puede ser realizado por el lector.

La propiedad de una función que no depende de la elección de un entorno suficientemente pequeño que contenga el punto dado, se llama *propiedad local de la función* en este punto. Evidentemente la existencia del límite de la función $f: X \to R$ en el punto $x^{(0)}$ que es un punto de adherencia del conjunto X, y su valor (si, naturalmente, éste existe) son propiedades locales de la función en el punto señalado.

Ejercicios. 1. Demuéstrese la equivalencia de las definiciones 2 y 3 de límite de una función de varias variables en un punto dado.

2. Por analogía con el caso de una función de una variable enúnciese y demuéstrese el criterio de Cauchy de la existencia del límite de una función de varias variables.

A menudo es necesario analizar los límites de las funciones $f: X \to R$, $X \subset R^n$ en los puntos $x^{(0)} \subset X$ por el conjunto $X \setminus \{x^{(0)}\}$. En este caso es cómodo servirse del concepto del así llamado entorno reducido en el espacio n-dimensional. Definamos este concepto por analogía con el caso unidimensional.

Definición 4. *Se llama entorno reducido $\overset{\circ}{U}(x^{(0)})$ del punto $x^{(0)} \in R^n$ cualquier conjunto que se obtiene eliminando el punto $x^{(0)}$ de cierto entorno $U(x^{(0)})$ de este punto:*

$$\overset{\circ}{U}(x^{(0)}) \overset{\text{def}}{=} U(x^{(0)}) \setminus \{x^{(0)}\}.$$

Es fácil ver que el análisis del límite de una función f en un punto $x^{(0)}$ por el conjunto $X \setminus \{x^{(0)}\}$ es equivalente al análisis de su límite en este punto por el conjunto $\overset{\circ}{U}(x^{(0)}) \cap X$, donde $\overset{\circ}{U}(x^{(0)})$ es un entorno reducido arbitrario del punto $x^{(0)}$ (equivalente en el sendio de la existencia y magnitud del límite).

Si en la definición 2 ó 3 en calidad de conjunto $E \subset X$ se toma la intersección del conjunto X con cierta recta l o cualquier curva γ, que pasa por el punto $x^{(0)}$, entonces el límite $\lim\limits_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in l \cap X}} f(x)$, respectivamente $\lim\limits_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in \gamma \cap X}} f(x)$, se llama límite de la función f en el punto $x^{(0)}$ por la recta l, respectivamente, por la curva γ.

Como en el caso unidimensional, si para la función $f: X \to R$, $X \subset R^n$, existe $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$, es decir, el límite indicado existe por todo el conjunto de definición X de la función f, entonces existe el límite $\lim\limits_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in E}} f(x)$ de esta función por cualquier subconjunto E del conjunto X, para el cual $x^{(0)}$ es un punto de adherencia: $x^{(0)} \in \overline{E}$, $E \subset X$, y son iguales:

$$\lim_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in E}} f(x) = \lim_{x \to x^{(0)}} f(x).$$

Por ejemplo, si existe un entorno reducido $\overset{\circ}{U}(x^{(0)})$ tal que $\overset{\circ}{U}(x^{(0)}) \subset X$ y existe $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$, entonces existe el límite $\lim\limits_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in l \cap X}} f(x)$ por cualquier recta l que pase por el punto $x^{(0)}$, además

$$\lim_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in l \cap X}} f(x) = \lim_{x \to x^{(0)}} f(x).$$

Ejemplo. Sea $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Esta fórmula define una función en todos los puntos del plano, excepto el origen de coordenadas (0, 0). Investiguemos los límites de esta función por distintos sentidos en el punto (0, 0). La ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas (0, 0) en el sentido del vector (α, β), tiene la forma $x = \alpha t, y = \beta t, \alpha^2 + \beta^2 > 0$. Tenemos: $f(\alpha t, \beta t) = \dfrac{\alpha^2 \beta t}{\alpha^4 t^2 + \beta} \to 0$ cuando $t \to 0$, es decir, el límite en cualquier dirección existe y es igual a cero. Si $y = x^2$, entonces $f(x, x^2) = \dfrac{1}{2}$, y por lo tanto, el límite a lo largo de la parábola $y = x^2$ también existe, pero es igual a 1/2.

De esta forma, para la función analizada existe el mismo límite por cualquier dirección, y el límite por la parábola señalada, aunque existe, es diferente del valor general de los límites por las direcciones, así que sencillamente el límite en el punto (0, 0) no existe.

Ejercicio 3. Investíguese el límite por las direcciones en el punto (0, 0) de la función $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

De forma análoga al caso de las funciones de una variable, para los límites de las funciones de varias variables por un conjunto tienen lugar los correspondientes teoremas sobre el límite de la suma, el producto y el cociente, ya que por la definición dada anteriormente, el límite de una función de n variables por un conjunto, también se reduce al concepto de límite de una sucesión (véase el p. 4.7).

Junto con los límites señalados, para las funciones de varias variables se pueden también analizar límites de otros tipos, relacionados con el paso sucesivo al límite, por ejemplo, según las distintas coordenadas, es decir, los límites del tipo

$$\lim_{x_{i_1} \to x_{i_1}^{(0)}} \lim_{x_{i_2} \to x_{i_2}^{(0)}} \dots \lim_{x_{i_n} \to x_{i_n}^{(0)}} f(x_1, \dots, x_n) \tag{19.5}$$

donde $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ es cierta permutación de los números $1, 2, \dots, n$, $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, y la función f está definida, por ejemplo, en cierto entorno reducido o en un entorno común del punto $x^{(0)}$. Aquí se habla de un paso sucesivo al límite, cada vez en una función de una variable. Así $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x_1, \dots, x_n)$ significa que para la función $f: X \to \boldsymbol{R}$ están fijados todos los valores de las coordenadas $x_j, j \neq i$, de su argumento $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ y por lo mismo el límite indicado significa el límite de la función f por el conjunto $\{x = (x_1, \dots, x_n): x_j$ están fijos, $j \neq i\} \cap X$.

Los límites del tipo (19.5) se llaman *límites reiterados*. Estos representan lo específico de las funciones de varias variables.

Analicemos la función definida sobre todo el plano

$$f(x, y) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{y} + y \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ó } y = 0. \end{cases}$$

Investiguemos sus distintos límites en el punto (0, 0).

Es evidente que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. En lo que respecta a los límites reiterados

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\left(x \operatorname{sen}\frac{1}{y} + y \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{y} + y \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right),$$

éstos no existen, ya que no existen los límites

$$\lim_{x\to 0} y \operatorname{sen}\frac{1}{x}\ (y \neq 0) \quad \text{y} \quad \lim_{y\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{y}\ (x \neq 0)$$

y

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{y} = 0, \quad y \neq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{y\to 0} y \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0, \quad x \neq 0.$$

Para la función $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, definida por esta fórmula sobre todo el plano, excepto el origen de coordenadas, ambos límites reiterados existen en el punto (0, 0), y $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y) = \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y) = 0$. Sin embargo, el límite de la función f en el punto (0, 0) no existe, ya que, como es fácil ver, el límite a lo largo de los ejes coordenados es igual a cero y a lo largo de la recta $y = x$ es igual a 1/2.

De esta forma, sólo de la existencia del límite de una función en un punto dado, no se deduce la existencia de los límites reiterados en este punto y viceversa, de la existencia de los límites reiterados no se deduce la existencia del límite en el punto correspondiente. Sin embargo, puede ser establecida una cierta relación entre estos conceptos.

Teorema 1. *Sea la función $f(x, y)$ definida sobre el conjunto E, que contiene todos los puntos de cierto entorno rectangular $P((x_0, y_0); \delta_1, \delta_2)$ del punto (x_0, y_0) excepto, puede ser, los puntos de las rectas $x = x_0$ e $y = y_0$. Si existe el límite de la función f en el punto (x_0, y_0) por el conjunto E y para cualquier $y \in (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$, $y \neq y_0$, existe el límite* *)

$$\lim_{x\to x_0} f(x, y) = g(y), \tag{19.6}$$

entonces el límite reiterado $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$ existe y

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0),\\ (x,y)\in E}} f(x, y). \tag{19.7}$$

*) Como siempre, por límites, si no se dice otra cosa, se entenderán límites finitos.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0),\\ (x,y)\in E}} f(x,y) = A$ y sea dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Existe un entorno rectangular $P = P((x_0,y_0);\eta_1,\eta_2)$, $0 < \eta_1 < \delta_1$, $0 < \eta_2 < \delta_2$, tal que $0 < |x - x_0| < \eta_1$, $0 < |y - y_0| < \eta_2$, entonces

$$|f(x,y) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{19.8}$$

En virtud de la existencia del límite (19.6), para cualquier número y, tal que $0 < |y - y_0| < \eta_2$, de (19.8) se deduce que

$$|g(y) - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

(para esto es suficiente pasar al límite cuando $x \to x^{(0)}$ en la igualdad (19.8)), y esto significa que $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = A$. □

Ejemplo. Analicemos la función $f(x,y) = x \operatorname{sen}\dfrac{1}{y}$, $y \neq 0$. Esta función está definida en todo el plano, excepto los puntos del eje de las x. Designemos su dominio por X. Evidentemente existen los límites

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0),\\ x\in X}} f(x,y) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} f(x,y) = 0, \quad y \neq 0;$$

por esto, según el teorema demostrado, existe también el límite reiterado $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$. Esto, naturalmente, se ve claramente. Observemos, que en este caso no existe otro límite reiterado $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$.

Al igual que en el caso de las funciones de una variable, para las funciones

$$f\colon X \to R, \quad X \subset R^n,$$

de varias variables se puede definir el límite $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, es decir, el límite cuando el punto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ se aleja ilimitadamente del origen de coordenadas, dicho de otra forma, cuando $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \to +\infty$ y también el límite reiterado por las variables $x_i \to \infty$ y $x_j \to \infty$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Señalemos que también en este caso tiene lugar una afirmación análoga al teorema 1.

Todas estas definiciones tienen sentido, naturalmente, sólo en el caso cuando el conjunto X no está acotado. El infinito ∞ también en el caso del espacio R^n se llama, para simplificar, punto, más exacto, punto infinitamente alejado.

Señalemos que se llama ε-entorno $U(\infty, \varepsilon)$ del infinito ∞ en el espacio R^n el exterior de la esfera n-dimensional cerrada con centro en el origen de coordenadas y radio igual a ε, es decir,

$$U(\infty,\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \{x\colon |x| > \varepsilon\}$$

y se llama simplemente entorno $U(\infty)$ en R^n el complemento en R^n de cualquier compacto perteneciente a este espacio.

Se puede, naturalmente, analizar también el espacio obtenido del espacio R^n completándolo con su punto infinitamente alejado ∞, es decir, el espacio $R^n \cup \{\infty\}$, como se hizo para $n = 1$. En este espacio, naturalmente, por entorno del punto infinitamente alejado ∞ se entiende su entorno en el espacio R^n, completado con el propio punto ∞.

Por analogía con el caso unidimensional, para las funciones de varias variables se introducen los conceptos de diferentes límites infinitos (con signo y sin signo). No haremos todo esto, proponiéndole al lector hacerlo a medida de sus necesidades.

OBSERVACIÓN. Si el conjunto $X \subset R^2$, sobre el cual está definida la función f: $X \to R$, está compuesto solamente por los puntos x, cuyas coordenadas son números naturales: $x = (m, n)$, $m \in N$, $n \in N$, entonces la función f se llama *sucesión doble* y su valor $y = f(m, n)$ se designa por y_{mn}, y la propia sucesión se designa por $\{y_{mn}\}$.

Para las sucesiones dobles $\{y_{mn}\}$ se puede analizar el límite $\lim\limits_{(m,n)\to\infty} y_{mn}$ y los límites reiterados

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} y_{mn}, \quad \lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty} y_{mn}.$$

Nos encontraremos de nuevo con las sucesiones dobles en el p. 38.1.

Ejemplo. Sea $y_{mn} = \cos^m 2\pi n!x$, $m \in N$, $n \in N$, $x \in R$; entonces

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\cos^m 2\pi n!x = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es un número racional,} \\ 0, & \text{si } x \text{ es un número irracional.} \end{cases}$$

Efectivamente, si $x = p/q, p \in Z, q \in Z, q > 0$, entonces cuando $n \in N, n \geqslant q$, tiene lugar la igualdad $\cos 2\pi n!x = 1$, y por lo tanto, $\lim\limits_{m\to+\infty}\cos^m 2\pi n!x = 1$, $n \geqslant q$, y por esto $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{m\to+\infty}\cos^m 2\pi n!x = 1$. Si el número x es irracional, entonces para cualquier n natural se cumple la desigualdad $|\cos 2\pi n!x| < 1$, de la cual se deriva que $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{m\to+\infty}\cos^m 2\pi n!x = 0$. □

Como resultado hemos obtenido la forma analítica de la función de Dirichlet

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\cos^m 2\pi n!x, \quad x \in R.$$

19.3. FUNCIONES CONTINUAS

Como en el caso de las funciones de una variable (véase el p. 5.5), si el punto $x^{(0)}$ pertenece al dominio X de la función f, entonces para la existencia del límite finito $\lim\limits_{x\to x^{(0)}} f(x)$ es necesario y suficiente que

$$\lim_{x\to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)}). \tag{19.9}$$

Definición 5. *Si para la función f: $X \to R$, $X \subset R^n$, en el punto $x^{(0)} \in X$ se cumple la condición* (19.9), *entonces la función f se llama continua en este punto.*

De forma natural, se introduce la generalización formal del concepto de continuidad de una función f: $X \to R$, $X \subset R^n$, en el punto $x^{(0)}$ y precisamente el concepto de su continuidad en este punto por el subconjunto $E \subset X$, si $x^{(0)} \in E$.

Definición 6. *Si f: $X \to R$, $E \subset X \subset R^n$ y para la función f en el punto $x^{(0)} \in E$ se cumple la condición*

$$\lim_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in E}} f(x) = f(x^{(0)}), \tag{19.10}$$

entonces la función f se llama continua en el punto $x^{(0)}$ por el conjunto E.

Como en el caso unidimensional (véase el lema 3 en el p. 5.5) si el punto $x^{(0)} \in X$ es un punto aislado del conjunto X, entonces la función $f \colon X \to R$ siempre es continua en él.

Si en la igualdad (19.10) se traslada $f(x^{(0)})$ al primer miembro y se pone $\Delta y = (f(x) - f(x^{(0)})$, entonces la condición (19.10) se escribe en la forma

$$\lim_{\substack{\rho(x,\, x^{(0)}) \to 0, \\ x \in E}} \Delta y = 0.$$

El número Δy se llama incremento de la función en el punto $x^{(0)}$, que corresponde a la variación del argumento del punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ hasta el punto $x = (x_1, \dots, x_n)$. Ya que $\rho(x, x^{(0)}) = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}$ donde $\Delta x_i = x_i - x_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces la continuidad de f en el punto $x^{(0)}$ por el conjunto E significa que su incremento Δy en este punto tiende a cero, cuando el incremento Δx_i de todos sus argumentos simultáneamente tienden a cero, (es decir, cuando $\rho(x, x^{(0)}) \to 0$).

Naturalmente, se puede enunciar el concepto de continuidad de una función también en el lenguaje de las sucesiones.

La función $f(x)$, definida sobre el conjunto X, es continua por este conjunto en el punto $x^{(0)} \in X$ si y sólo si para cualquier sucesión de los puntos $x^{(k)} \in X$, $k = 1, 2, \dots$,

$$\lim_{x \to \infty} f(x^{(k)}) = f(x^{(0)}). \tag{19.11}$$

Esto se deduce directamente de la equivalencia de las definiciones 2 y 3 del límite de una función $f \colon X \to R$, $X \subset R^n$, en el punto $x^{(0)} \in X$.

19.4. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

Para los límites de las funciones de varias variables son válidas las propiedades análogas a las propiedades de las funciones de una variable enunciadas y demostradas en el p. 5.10. Por cuanto en el caso de las funciones de varias variables, los enunciados de las afirmaciones y sus demostraciones permanecen, en esencia, siendo las mismas, sólo que por el conjunto de definición (dominio) X de la función analizada es necesario entender un subconjunto del espacio n-dimensional R^n; por un punto x, un punto de este espacio; por entorno, un entorno en este espacio, etc., entonces incluso no enunciaremos estas propiedades, esto nos llevaría casi a una transcripción al pie de la letra; es necesario, ciertamente, señalar que en el caso de $n > 1$, el argumento de una función de n variables puede tender sólo al infinito ∞, es decir, al infinito sin signo, su tendencia a $+\infty$ ó $-\infty$ ya no tiene sentido, ya que el conjunto de los puntos del espacio R^n para $n > 1$ ya no es ordenado. Todas las propiedades indicadas de los límites de las funciones de varias variables se utilizarán en el futuro sin comentarios complementarios.

Para las funciones $f(x_1, \dots, x_n)$, $n > 1$, conjuntamente con su continuidad en el sentido anteriormente definido, a la cual llaman *continuidad por el conjunto de variables* $x_1, \dots, x_n$, se puede analizar la continuidad por las variables x_i sueltas.

La función $f(x_1, \dots, x_n)$, definida, por ejemplo, en cierto entorno del punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ se dice *continua en el punto* $x^{(0)}$ *por la variable* x_i si la función

$$\varphi(x_i) \overset{\text{def}}{=} f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

de una variable x_i es continua en el punto $x_i^{(0)}$. Es evidente que la función φ es una restricción de la función f sobre la intersección de la recta $x_j = x_j^{(0)}$, $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$, con el conjunto de definición de la función f, o sea, la continuidad de la función por una variable significa la continuidad de su restricción por el conjunto correspondiente.

Señalemos que de la continuidad de una función por todas sus variables sueltas no se deduce su continuidad por su colección. Por ejemplo, la función

$$f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2), & \text{si} \quad x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

es continua por cada una de las variables x e y por separado en cada uno de los puntos del plano, pero no es continua por su conjunto en el punto $(0, 0)$, ya que en este punto incluso no tiene límite (compruébese).

19.5. LÍMITE Y CONTINUIDAD DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Analicemos más detalladamente la composición de funciones de varias variables, ya que en este caso se manifiesta cierta particularidad del análisis multidimensional, que no tiene análogo para las funciones de una variable, aquí se puede tomar la composición de funciones de diferentes números de variables.

Sea dado, sobre un conjunto $X \subset R^n$, un sistema de m funciones $f_1: X \to R, \dots, f_m: X \to R$, y sea dado, sobre un conjunto $Y \subset R^m$, la función $g(y) = g(y_1, \dots, y_m)$, $y \in Y$.

Si para cualquier punto $x \in X$ se cumple la inclusión $(f_1(x), \dots, f_m(x)) \in Y$, entonces tiene sentido hablar sobre la función compuesta $g(f_1, \dots, f_m): X \to R$, es decir, la función, que pone en correspondencia a cada punto $x \in X$ el número $g(f_1(x), \dots, f_m(x))$. La función $g(f_1, \dots, f_m)$ se llama también composición de las funciones $f_1, \dots, f_m$ y g.

Analizaremos los límites

$$y_k^{(0)} = \lim_{x \to x^{(0)}} f_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, m, \tag{19.12}$$

donde $x^{(0)}$ es o bien un punto de R^n y entonces es un punto adherente del conjunto X, o bien $x^{(0)} = \infty$ y entonces X es un conjunto no acotado. Para hacer más sencillo el enunciado del teorema nos limitaremos al caso, cuando todos los límites (19.12) son finitos.

Teorema 2. *Supongamos tiene sentido la función compuesta* $g(f_1, \dots, f_m)$. *Si existen los límites finitos* (19.12),

$$y^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} (y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}) \tag{19.13}$$

y existe el límite finito o infinito $\lim\limits_{y \to y^{(0)}} g(y)$ *entonces existe también el límite* $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} g(f_1(x), \dots, f_m(x))$ *de la función compuesta* $g(f_1, \dots, f_m)$, *además*

$$\lim_{x \to x^{(0)}} g(f_1(x), \dots, f_m(x)) = \lim_{y \to y^{(0)}} g(y). \tag{19.14}$$

Corolario. *Si tiene sentido la función compuesta* $g(f_1, \dots, f_m)$, *las funciones* $f_1, \dots, f_m$ *son continuas por el conjunto* X *en el punto* $x^{(0)} \in X \subset R^n$, *y la función* g *es continua por el conjunto* Y *en el punto* $y^{(0)} = (f_1(x^{(0)}), \dots, f_m(x^{(0)})) \in Y \subset \subset R^m$, *entonces la función compuesta* $g(f_1, \dots f_m)$, *es continua por el conjunto* X *en el punto* $x^{(0)}$.

De esta forma, dicho brevemente, se puede decir, que una función continua de funciones continuas es una función continua.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Sean $z_0 = \lim\limits_{y \to y^{(0)}} g(y)$ y $U(z_0)$ un entorno, dado arbitrariamente, del punto z_0. Entonces, según la definición de límite de la función g en el punto $y^{(0)}$, existe un entorno $U(y^{(0)})$ del punto $y^{(0)}$, tal que si

$$y \in U(y^{(0)}) \cap Y, \tag{19.15}$$

entonces

$$g(y) \in U(z_0). \tag{19.16}$$

Señalemos ahora que existe $\eta > 0$, para el cual el entorno cúbico

$$P(y^{(0)}, \eta) = \{y = (y_1, \dots, y_m) : |y_k - y_k^{(0)}| < \eta,\ k = 1, 2, \dots, m\}$$

está contenido en el entorno $U(y^{(0)})$:

$$P(y^{(0)}, \eta) \subset U(y^{(0)})$$

y por lo tanto,

$$P(y^{(0)}, \eta) \cap Y \subset U(y^{(0)}) \cap Y. \tag{19.17}$$

De acuerdo con esta inclusión, de (19.15) — (19.16) se deduce que si

$$y \in P(y^{(0)}, \eta) \cap Y \tag{19.18}$$

entonces

$$g(y) \in U(z^{(0)}). \tag{19.19}$$

Más adelante, por la existencia de los límites finitos (19.12), para cada $k = = 1, 2, \dots, m$ existe un entorno $U_k(x^{(0)})$ del punto x^0 tal que para

$$x \in U_k(x^{(0)}) \cap X \tag{19.20}$$

se cumple la inclusión

$$f_k(x) \in U(y_k^{(0)}, \eta). \tag{19.21}$$

Hagamos

$$U(x^{(0)}) = \bigcap_{k=1}^{m} U_k(x^{(0)}). \tag{19.22}$$

Por cuanto $U_k(x^{(0)})$ es un conjunto abierto, entonces el conjunto $U(x^{(0)})$ como intersección de un número finito de conjuntos abiertos, también es abierto (véase el lema 4 en el p. 18.2). Además, cada entorno $U_k(x^{(0)})$ contiene el punto $x^{(0)}$, por lo que su intersección también lo contiene. Por consiguiente, el conjunto $U(x^{(0)})$, siendo abierto y conteniendo el punto $x^{(0)}$, es su entorno.

Si $x \in U(x^{(0)}) \cap X$, entonces, según (19.22) simultáneamente para todos los $k = 1, 2, \dots, m$ se cumplen las inclusiones (19.20) y por lo tanto, la inclusión (19.21), lo que por (19.13) significa que

$$(f_1(x), \dots, f_m(x)) \in P(y^{(0)}, \eta). \tag{19.23}$$

Pero por cuanto la función compuesta $g(f_1, \dots, f_m)$ está definida sobre el conjunto X, entonces para todos los $x \in X$ es válida la inclusión

$$(f_1(x), \dots, f_m(x)) \in Y.$$

Así pues, finalmente, si

$$x \in U(x^{(0)}) \cap X, \tag{19.24}$$

entonces

$$(f_1(x), \dots, f_m(x)) \in P(y^{(0)}, \eta) \cap Y \tag{19.25}$$

y por consiguiente, por (19.18) — (19.19),

$$g(f_1(x), \dots, f_m(x)) \in U(z_0),$$

y esto significa que la función compuesta $g(f_1, \dots, f_m)$ tiene límite en el punto $x^{(0)}$ igual a z_0:

$$\lim_{x \to x^{(0)}} g(f_1(x), \dots, f_m(x)) = z_0 = \lim_{y \to y^{(0)}} g(y). \ \square$$

El corolario se deriva directamente del teorema en virtud de la definición (19.9) de continuidad de una función. En efecto, por cuanto $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f_k(x) = f_k(x^{(0)}) = y_k^{(0)}$, $k = 1, 2, \dots, m$, y $\lim\limits_{y \to y^{(0)}} g(y) = g(y^{(0)})$, entonces, según el teorema

$$\lim_{x \to x^{(0)}} g(f_1(x), \dots, f_m(x)) = \lim_{y \to y^{(0)}} g(y) =$$
$$= g(y^{(0)}) = g(y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}) = g(f_1(x^{(0)}), \dots, f_m(x^{(0)})),$$

es decir, la función compuesta $g(f_1, \dots, f_m)$ efectivamente es continua en el punto $x^{(0)}$.

OBSERVACIÓN. Como en el caso unidimensional, si en el conjunto de definición de la función g se encuentra un entorno $U(y^{(0)})$ del punto $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$, donde $y_k^{(0)}$, $k = 1, 2, \dots, m$, se definen por las igualdades (19.12), entonces existe un entorno $U(x^{(0)})$ del punto $x^{(0)}$ tal que para las restricciones de las funciones $f_1, \dots, f_m$ sobre la intersección $X \cap U(x^{(0)})$ — denotémoslas, respectivamente, $f_{1\,0}, \dots, f_{m\,0}$ — está definida la composición $g(f_{1\,0}, \dots, f_{m\,0})$.

Esto se deduce de la existencia de los límites (9.12). Para convencerse de esto es suficiente en la demostración del teorema, en calidad de entorno $U(y^{(0)})$, tomar un entorno, que se contenga en el conjunto de definición de la función g, entonces el entorno $U(x^{(0)})$ allí construido (véase (19.22)) será el buscado.

Con ayuda del teorema 2 se puede establecer fácilmente la continuidad de la mayor parte de las funciones, que se encuentran en la práctica, precisamente de las así llamadas funciones elementales de varias variables.

Definición 8. *Las funciones, que se obtienen de las variables $x_1, \ldots, x_n$ con ayuda de un número finito de composiciones de funciones elementales de una sola variable, de operaciones de adición, multiplicación y división, se llaman funciones elementales de las variables $x_1, \ldots, x_n$.*

Por ejemplo, la función $f(x, y) = xe^{y \operatorname{sen} \frac{xy}{x+y}}$ es una función elemental de dos variables x e y. Efectivamente,

$$f(x, y) = xw, \quad w = e^v, \quad v = yz, \quad z = \operatorname{sen} t, \quad t = \alpha/\beta,$$
$$\alpha = xy, \quad \beta = x + y.$$

Del teorema 2 y de la conservación de la continuidad en los puntos correspondientes durante las operaciones aritméticas sobre las funciones continuas (véase el p. 19.3) se deduce que *cualquier función elemental de cualquier número de variables es continua en cada punto de su dominio.*

19.6. TEOREMAS ACERCA DE LAS FUNCIONES CONTINUAS SOBRE LOS CONJUNTOS

La función f se llama *continua sobre el conjunto X*, si ella es continua por este conjunto en cada uno de sus puntos. A veces en este caso se dice también que la función *f es continua en el conjunto X.*

Demostremos una serie de teoremas acerca de las funciones continuas sobre los conjuntos. Estos teoremas se demuestran de una forma análoga a los teoremas correspondientes para funciones de una sola variable. Los analizaremos partiendo de supuestos suficientemente generales, esto permitirá aclarar más profundamente, con qué están relacionadas las propiedades de las funciones continuas analizadas. Comencemos con una generalización del teorema de Weierstrass (véase el p. 6.1) para el caso de varias dimensiones. La definición de una serie de conceptos, que se analizarán a continuación, como por ejemplo, acotación de una función, cotas superior e inferior de una función, véase en el p. 5.1.

Teorema 3. *Toda función, continua sobre un compacto, está acotada en él y alcanza su cota superior e inferior* *).

DEMOSTRACIÓN. Sea la función f continua sobre el compacto $A \subset R^n$ y sea $M = \sup\limits_A f$. Escojamos por analogía con el caso unidimensional (véase la demostración del teorema 1 en el p. 6.1) una sucesión de números a_m, tales que $\lim\limits_{m \to \infty} a_m = M$ y $a_m < M$, $m = 1, 2, \ldots$.

*) Dicho de otra forma, una función continua sobre un compacto toma en él su valor máximo y su valor mínimo.

Para cada $m = 1, 2, \ldots$ existe un punto $x^m \in A$, tal que $f(x^{(m)}) > a_m$. Ya que el conjunto A es un compacto, entonces de la sucesión $\{x^{(m)}\}$ se puede extraer una subsucesión convergente $\{x^{(m_k)}\}$, cuyo límite $x^{(0)}$ se encuentra en A: $\lim\limits_{k \to \infty} (x^{(m_k)}) = x^{(0)} \in A$.

Para cualquier $k = 1, 2 \ldots$ es válida la desigualdad $a_{m_k} < f(x^{(m_k)}) \leqslant M$. Pasando al límite en ésta, cuando $k \to \infty$, obtenemos $\lim\limits_{k \to \infty} f(x^{(m_k)}) = M$. En virtud de la continuidad de la función f en el punto $x^{(0)}$ por el conjunto A tenemos $\lim\limits_{k \to \infty} f(x^{(m_k)}) = f(x^{(0)})$, y, por lo tanto, $M = f(x^{(0)})$.

De esta forma, la cota superior de la función f es finita, y por esto la función f está acotada superiormente; además, esta cota superior se alcanza en el punto $x^{(0)} \in A$. Análogamente se demuestra que la función f está acotada inferiormente y que su cota inferior se alcanza en cierto punto del conjunto A. $\square$

Pasemos ahora a analizar la generalización del teorema de Cauchy sobre los valores intermedios (véase el p. 6.2) para el caso de las funciones de varias variables.

Teorema 4. *Sea la función f definida y continua en la región $G \subset R^n$, entonces, al tomar dos valores cualesquiera en G, la función f toma en G también cualquier valor, que se encuentra entre ellos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea la función f continua en la región $G \subset R^n$, sean $x^{(1)} \in G$, $x^{(2)} \in G$, $f(x^{(1)}) = a$, $f(x^{(2)}) = b$ y por ejemplo, $a < b$. Sea más adelante c cualquier número tal que $a < c < b$. Según la definición de región (véase las definiciones 25 y 26 en el p. 18.2), existe una curva $x(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, tal que $x(\alpha) = x^{(1)}$, $x(\beta) = x^{(2)}$ y $x(t) \in G$ para todos los $t \in [\alpha, \beta]$.

Si $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, entonces, según la definición de curva, las funciones $x_i(t)$ son continuas sobre el segmento $[\alpha, \beta]$. De acuerdo con el teorema 2 sobre la superposición de las funciones continuas de varias variables, la función $f(x(t)) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ también es continua sobre el segmento $[\alpha, \beta]$. Ya que $f(x(\alpha)) = a$, $f(x(\beta)) = b$ y $a < c < b$, entonces por el teorema de Cauchy (véase el p. 6.2), existe un punto $t_0 \in (\alpha, \beta)$ tal que $f(x(t_0)) = c$. Suponiende $x^{(0)} = x(t_0)$, tenemos $x^{(0)} \in G$ y $f(x^{(0)}) = c$. $\square$

Corolario. *La función f definida y continua en la región cerrada $\overline{G}$, al tomar dos valores cualesquiera, toma también en G cualquier valor intermedio.*

DEMOSTRACIÓN. Sean G una región, la función f definida y continua sobre su clausura $\overline{G}$, $x^{(1)} \in \overline{G}$, $x^{(2)} \in \overline{G}$, $f(x^{(1)}) = a$, $f(x^{(2)}) = b$ y sea para mayor exactitud $a < c < b$. Demostremos que existe un punto $\zeta \in G$, tal que $f(\zeta) = c$.

Tomemos el número $\varepsilon > 0$ definido por la igualdad

$$\varepsilon = \min\{c - a, b - c\}.$$

En virtud de la continuidad de la función f en el punto $x^{(1)}$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que si $x \in U(x^{(1)}; \delta) \cap \overline{G}$, entonces $|f(x) - f(x^{(1)})| < \varepsilon$ y, por lo tanto, $|f(x) - a| < c - a$ y, en particular, $f(x) < c$. El punto $x^{(1)} \in \overline{G}$, es decir, el punto $x^{(1)}$ es un punto adherente del conjunto G, por esto en el entorno $U(x^{(1)}; \delta)$ a ciencia cierta existe un punto perteneciente a G; designémoslo por $y^{(1)}$. De esta forma, $y^{(1)} \in U(x^{(1)}; \delta) \cap G$, y por esto $f(y^{(1)}) < c$. Por un método análogo se demuestra la existencia del punto $y^{(2)} \in G$, tal que $f(y^{(2)}) > c$. De la existencia en la región G de los puntos $y^{(1)}$ e $y^{(2)}$ con las propiedades señaladas, según el teorema 4, se deriva la existencia en G del punto ζ tal que $f(\zeta) = c$. □

Señalemos que ni en la demostración del propio teorema 4, ni en la demostración de su corolario se ha utilizado el hecho de que el conjunto G es abierto. Se ha utilizado solamente el hecho de que cualesquiera dos puntos de este conjunto pueden ser unidos por una curva perteneciente a él, es decir, que el conjunto es linealmente conexo.

Ejercicio 4. Supongamos que la función f es continua y toma valores de signos distintos en un conjunto abierto. Demuéstrese que el conjunto de puntos en los cuales $f \neq 0$ es un conjunto abierto, pero no es una región.

Problema 16. Constrúyase un ejemplo de región G, en cuya clausura $\overline{G}$ no existen dos puntos tales que no puedan ser unidos por una curva continua en $\overline{G}$.

19.7. CONTINUIDAD UNIFORME DE LAS FUNCIONES. MÓDULO DE CONTINUIDAD

Junto con el concepto de continuidad de una función en un punto, en el análisis matemático juega un papel importante el así llamado concepto de continuidad uniforme de una función sobre un conjunto.

Definición 9. *La función $f(x)$, definida sobre el conjunto $X \subset R^n$, se llama uniformemente continua sobre X, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que para cualesquiera dos puntos $x \in X$, $x' \in X$, que satisfacen la condición*

$$\rho(x, x') < \delta, \tag{19.26}$$

se cumple la desigualdad

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{19.27}$$

Señalemos que si la función f es uniformemente continua sobre el conjunto X, entonces ella es sencillamente continua sobre X, es decir, es continua en cada punto $x^{(0)} \in X$. Para convencerse de esto, es suficiente, por ejemplo, en (19.26) y (19.27) poner $x' = x^{(0)}$.

Si la función f es continua en cada punto $x \in X$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe solamente un $\delta = \delta(\varepsilon; x)$ tal que, para todos los $x' \in X$, que satisfacen la condición $\rho(x, x') < \delta$ se cumple la desigualdad $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. En este caso, la elección de δ depende no solo de ε, sino, en general, del punto x.

Subrayemos que cuando la función f es uniformemente continua sobre el conjunto X, la elección del δ correspondiente depende sólo del ε y no depende de la elección de los puntos analizados del conjunto X.

Lo dicho se ve claramente cuando se escriben las definiciones señaladas con ayuda de los símbolos lógicos. La condición de continuidad de la función f sobre el conjunto X tiene la forma

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in X)(\exists \delta > 0)(\forall x' \in X), (\rho(x', x) < \delta) : |f(x') - f(x)| < \varepsilon,$$

y la condición de su continuidad uniforme sobre X, la forma

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X,\ \forall x' \in X,\ \rho(x', x) < \delta) : |f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

Ejemplos. 1. La función $f(x) = x$ es uniformemente continua sobre todo el eje numérico, o sea, si es dado $\varepsilon > 0$, es suficiente tomar $\delta = \varepsilon$, en este caso si $|x - x'| < \delta$, entonces en virtud de la igualdad $f(x) = x$, $f(x') = x'$ obtenemos $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

2. La función $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, no será uniformemente continua sobre su dominio, es decir, sobre el eje numérico, del cual se ha eliminado el punto $x = 0$. En efecto, si tomamos, por ejemplo, $\varepsilon = 1$, entonces para cualquier $\delta > 0$ tan pequeño como se quiera se encuentran los puntos x y x', por ejemplo, los puntos de la forma

$$x = 1\Big/\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \quad \text{y} \quad x' = 1\Big/\left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi n\right)$$

(n es un número natural suficientemente grande) tales que $|x - x'| < \delta$ y junto con esto $|f(x) - f(x')| > 1$.

En calidad de criterio suficiente para la continuidad uniforme de las funciones de una variable sobre un intervalo señalemos el siguiente.

Lema 2. *Si la función $f(x)$ está definida y tiene derivada acotada en un intervalo (a, b), entonces es uniformemente continua sobre este intervalo.*

En efecto, si $|f'(x)| \leqslant c$ (c es una constante) sobre (a, b), entonces con ayuda de la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange (véase el p. 11.2) obtenemos $|f(x') - f(x)| = |f'(\xi)(x' - x)| \leqslant c|x' - x|$,

$$a < x < b, \quad a < x' < b, \quad a < \xi < b. \tag{19.28}$$

Por esto, para $\varepsilon > 0$ es suficiente tomar $\delta = \varepsilon/c$; en este caso si $|x' - x| < \delta$, $a < x < b$, $a < x' < b$, entonces según (19.28) es válida la desigualdad $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ lo que significa la continuidad uniforme de la función f sobre (a, b). □

Un resultado análogo tiene lugar para cualquier intervalo, finito o infinito. Una generalización de este criterio para el caso de muchas dimensiones será dado en el p. 39.2.

Una significación fundamental tiene el siguiente teorema.

Teorema 5 (de Cantor). *Una función, continua sobre un compacto, es uniformemente continua.*

Corolario. *Una función, continua sobre un segmento, es uniformemente continua.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Utilicemos el método de reducción al absurdo. Supongamos que existe la función f definida y continua sobre cierto compacto $X \subset R^n$, pero que no es uniformemente continua sobre éste. Entonces, existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$ se encuentran los puntos $x'_\delta \in X$ y $x''_\delta \in X$ (el índice "δ" de los puntos significa que éstos dependen de la elección de δ), para los cuales $\rho(x'_\delta, x''_\delta) < \delta$ y junto con esto $|f(x''_\delta) - f(x'_\delta)| \geqslant \varepsilon_0$. Tomemos una sucesión cualquiera de números, δ_m, tal que $\lim\limits_{m\to 0}\delta_m = 0$, por ejemplo, $\delta_m = 1/m$, $m = 1, 2, \ldots$. Sea $x'^{(m)} = x'_{\delta_m}$, $x''^{(m)} = x''_{\delta_m}$ y, por lo tanto,

$$\rho(x'^{(m)}, x''^{(m)}) < \frac{1}{m}, \quad |f(x''^{(m)}) - f(x'^{(m)})| \geqslant \varepsilon_0. \tag{19.29}$$

El conjunto X es un compacto, por esto de la sucesión $\{x'^{(m)}\}$ se puede extraer una subsucesión convergente $\{x'^{(m_k)}\}$, el límite ξ de la cual pertenece al compacto X, $\lim\limits_{k\to\infty} x'^{(m_k)} = \xi \in X$. El punto ξ es un punto adherente del conjunto cerrado X, y por esto $\xi \in X$.

Analicemos ahora la subsucesión $\{x''^{(m_k)}\}$ de la sucesión $\{x''^{(m)}\}$, correspondiente a la subsucesión $\{x'^{(m_k)}\}$. Demostremos que $\lim\limits_{k\to\infty} x''^{(m_k)} = \xi$. En efecto

$$\rho(x''^{(m_k)}, \xi) \leqslant \rho(x''^{(m_k)}, x'^{(m_k)}) + \rho(x'^{(m_k)}, \xi) < \frac{1}{m_k} + \rho(x'^{(m_k)}, \xi),$$

y ya que $\rho(x'^{(m_k)}, \xi) \to 0$ y $\dfrac{1}{m_k} \to 0$ cuando $k \to \infty$, entonces también $\rho(x''^{(m_k)}, \xi) \to 0$ cuando $k \to \infty$, y esto significa que $x''^{(m_k)} \to \xi$ cuando $k \to \infty$.

En virtud de la continuidad de la función f en el punto $\xi \in X$ tenemos $f(x'^{(m_k)}) \to f(\xi)$ y $f(x''^{(m_k)}) \to f(\xi)$ cuando $k \to \infty$, y, por lo tanto

$$f(x''^{(m_k)}) - f(x'^{(m_k)}) \to 0 \quad \text{cuando} \quad k \to \infty. \tag{19.30}$$

Pero, por el método de construcción de las sucesiones $\{x'^{(m)}\}$ y $\{x''^{(m)}\}$ (véase (19.29))

$$|f(x''^{(m_k)}) - f(x'^{(m_k)})| \geqslant \varepsilon_0 \tag{19.31}$$

para todos los $k = 1, 2, \dots$.

Es evidente, que las condiciones (19.30) y (19.31) se contradicen mutuamente. Esto demuestra el teorema 5. □

La validez del corolario se deriva del hecho de que el segmento es un compacto.

Señalemos que si se rechaza la exigencia de que el conjunto, sobre el cual la función analizada es continua, sea un compacto, ésta puede no ser uniformemente continua. Por ejemplo, la función $f(x) = 1/x$ está definida y es continua sobre el intervalo $(0, 1)$, el cual aunque es un conjunto acotado, no es cerrado; esta función no será uniformemente continua sobre el intervalo $(0, 1)$. La función $y = x^2$ está definida y es continua sobre todo el eje real, que aunque es un conjunto cerrado, no es acotado. Esta función tampoco es uniformemente continua sobre el eje real. La demostración de que las funciones $y = 1/x$ e $y = x^2$ no son uniformemente continuas sobre los conjuntos señalados será dada más adelante en este mismo punto.

Con frecuencia resulta más cómodo otro enfoque del concepto de continuidad uniforme, precisamente con ayuda del así llamado m ó d u l o d e c o n t i n u i d a d de funciones.

Definición 10. *Sea la función f definida sobre el conjunto $X \subset R^n$. Se llama su módulo de continuidad $\omega(\delta; f; X)$ la función*

$$\omega(\delta, f, X) = \sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} [f(x'') - f(x')], \quad x' \in X, \quad x'' \in X. \tag{19.32}$$

A veces para mayor brevedad, en lugar de $\omega(\delta; f; x)$ se escribe sencillamente $\omega(\delta; f)$ o incluso $\omega(\delta)$.

No es difícil convencerse de que

$$\sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} [f(x') - f(x'')] = \sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} |f(x'') - f(x')|, \quad x' \in X, \quad x'' \in X,$$

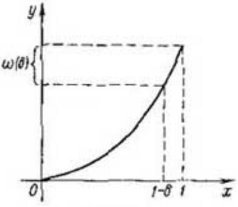


FIG. 96

es decir, en el segundo miembro de la igualdad (19.32) bajo el signo de la cota superior se puede escribir o no el signo de valor absoluto, con lo cual la magnitud de la cota superior señalada no varía.

Es evidente también que $\omega(\delta) \geqslant 0$.

Más adelante, si $0 < \delta_1 < \delta_2$, entonces

$$\{y : y = f(x'') - f(x'),\ \rho(x', x'') \leqslant \delta_1\} \subset$$
$$\subset \{y : y = f(x'') - f(x'),\ \rho(x', x'') \leqslant \delta_2\},$$

de donde

$$\sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta_1} [f(x'') - f(x')] \leqslant \sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta_2} [f(x'') - f(x')]$$

(ya que cuando se amplía el conjunto númerico, su cota superior puede solamente crecer), es decir, $\omega(\delta_1) \leqslant \omega(\delta_2)$, dicho de otra forma, *el módulo de continuidad es una función creciente.*

Problema 17. Sea G una región en R^n. Demuéstrese que si $\lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{\omega(\delta; f; G)}{\delta} = 0$, entonces f es una función constante.

Ejemplos. 1. Hallemos $\omega(\delta)$ para la función $y = x^2$, $-\infty < x < +\infty$.

Para cualquier $\delta > 0$ y un x_0 arbitrario dado, tenemos:

$$\omega(\delta; x^2) = \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} (x''^2 - x'^2) \geqslant x_0^2 - (x_0 - \delta)^2 = 2x_0\delta - \delta^2. \tag{19.33}$$

Esta desigualdad se cumple para todos los x_0 y ya que para cualquier δ dado tenemos $\lim\limits_{x_0 \to +\infty} (2x_0\delta - \delta^2) = +\infty$, entonces de (19.33) obtenemos

$$\omega(\delta; x^2) = +\infty, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Hallemos ahora el módulo de continuidad de la función $y = x^2$ sobre el segmento $[0; 1]$. Intuitivamente está claro que ya que el módulo de continuidad $\omega(\delta)$ describe según la definición el mayor incremento de la función sobre un segmento de longitud δ, entonces, para obtener el módulo de continuidad de la función en el caso dado se debe tomar el segmento $[1 - \delta, \delta]$, sobre el cual la función $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, crece más rápidamente: el módulo de continuidad coincide con el incremento de la función sobre este segmento (fig. 96):

$$\omega(\delta) = f(1) - f(1 - \delta) = 1 - (1 - \delta)^2 = 2\delta - \delta^2.$$

Analíticamente esto se comprueba de la forma siguiente. Sea $0 \leqslant x'' - \delta \leqslant \leqslant x' \leqslant x'' \leqslant 1$, entonces, en virtud de la desigualdad

$$x''^2 - x'^2 \leqslant x''^2 - (x'' - \delta)^2 = 2x''\delta - \delta^2 \leqslant 2\delta - \delta^2,$$

obtenemos

$$\omega(\delta, x^2) = \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} (x''^2 - x'^2) \leqslant 2\delta - \delta^2, \tag{19.34}$$

pero si se toma $x' = 1 - \delta$, $x'' = 1$, entonces

$$\omega(\delta; x^2) = \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} (x''^2 - x'^2) \geqslant 1 - (1 - \delta)^2 = 2\delta - \delta^2. \tag{19.35}$$

De las estimaciones (19.34) y (19.35) se deduce, que sobre el segmento $[0; 1]$ tenemos $\omega(\delta; x^2) = 2\delta - \delta^2$.

2. Analicemos la función $y = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$. Por una parte,

$$\omega\left(\delta; \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) = \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} \left|\operatorname{sen}\frac{1}{x''} - \operatorname{sen}\frac{1}{x'}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} \left(\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x''}\right| + \left|\operatorname{sen}\frac{1}{x''}\right|\right) \leqslant \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} 2 = 2.$$

Por otra parte, eligiendo $x_n'' = 1/\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $x_n' = 1/\left|\dfrac{3}{2}\pi + 2\pi n\right|$ y fijando n tal que $|x_n'| \leqslant \delta/2$, $|x_n''| \leqslant \delta/2$ y por esto $|x_n'' - x_n'| \leqslant |x_n'| + |x_n''| \leqslant \delta$ tendremos

$$\omega\left(\delta, \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) \geqslant \operatorname{sen}\frac{1}{x_n''} - \operatorname{sen}\frac{1}{x_n'} = 1 + 1 = 2.$$

De las estimaciones obtenidas se deduce que $\omega\left(\delta; \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right) = 2$.

3. Analicemos la función $y = \dfrac{1}{x}$ sobre el intervalo $(0; 1)$.

Para cualquier δ, $0 < \delta < 1$, tenemos

$$\omega\left(\delta; \frac{1}{x}\right) = \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} \left(\frac{1}{x''} - \frac{1}{x'}\right) = \sup_{x' \leqslant x'' \leqslant x' + \delta} \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0 + \delta} \overset{*)}{=} \frac{\delta}{x_0(x_0 + \delta)} \to +\infty \quad \text{cuando} \quad x_0 \to +0.$$

De esta forma, $\omega(\delta; 1/x) = +\infty$.

En los términos del módulo de continuidad, la continuidad uniforme puede ser expresada de la forma siguiente.

---

*) Aquí x_0 es tal que $0 < x_0 < 1 - \delta$.

Teorema 6. *Para que la función f definida sobre el conjunto X sea uniformemente continua sobre este conjunto, es necesario y suficiente, que*

$$\lim_{\delta \to +0} \omega(\delta; f; X) = 0. \tag{19.36}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea la función f uniformemente continua sobre el conjunto X, es decir se cumplen las condiciones (19.26) y (19.27); entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta_\varepsilon > 0$, tal que si $x' \in X$, $x'' \in X$, $\rho(x', x'') < \delta_\varepsilon$, entonces $|f(x'') - f(x')| \leq \varepsilon/2$. De aquí se deduce que para cualquier $\delta < \delta_\varepsilon$ se cumpla la desigualdad

$$\sup_{\rho(x', x'') \leq \delta} |f(x'') - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

es decir, si $0 < \delta < \delta_\varepsilon$, entonces $\omega(\delta) < \varepsilon$. Esto significa que $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$. La necesidad de la condición (19.36) queda demostrada.

Demostremos la suficiencia de la condición (19.36). El cumplimiento de la condición (19.36) significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_\varepsilon > 0$, tal que si $0 < \delta < \delta_\varepsilon$, entonces $\omega(\delta, f, X) < \varepsilon$. Elijamos cualquiera de los δ señalados. Entonces cuando $\rho(x', x'') < \delta$, $x' \in X$, $x'' \in X$, tendremos (véase (19.32)): $|f(x'') - f(x')| \leq \omega(\delta, f, X) < \varepsilon$, es decir, la función f es uniformemente continua sobre X. □

Hemos visto anteriormente que sobre el segmento $[0, 1]$ $\omega(\delta; x^2) = 2\delta - \delta^2$, por esto, $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega(\delta; x^2) = 0$, y por lo tanto, la función x^2 es uniformemente continua sobre este segmento, como debe ser según el teorema 5. El módulo de continuidad de esta misma función x^2, pero analizado sobre todo el eje real, al igual que los módulos de continuidad $\omega\left(\delta, \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$, y $\omega\left(\delta, \dfrac{1}{x}\right)$, $0 < x < 1$ no tienden hacia 0, cuando $\delta \to +0$ y por esto todas estas funciones no son uniformemente continuas sobre los conjuntos correspondientes.

Ejercicios. 5. Demuéstrese el teorema de Cantor sobre la continuidad uniforme de una función, continua sobre un compacto con ayuda del lema de Heine — Borel (véase el teorema 4 en el p. 18.3 y la observación después de él).

6. La función $f(x)$ continua sobre el segmento $[a, b]$ se llama *lineal a trozos*, si existe una partición del segmento $[a, b]$ en un número finito de segmentos $[x_{i-1}, x_i]$,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

tal que la función $f(x)$ es lineal sobre cada uno de los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Demuéstrese que cualquier función $F(x)$ continua sobre el segmento $[a, b]$ puede ser aproximada con cualquier exactitud por una función lineal a trozos, es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una función $f(x)$ lineal a trozos, tal que para todos los $x \in [a, b]$ se cumple la desigualdad $|F(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Introduzcamos ahora una serie de conceptos, que serán útiles en el futuro.

Definición 11. *Sea $X \subset R^n$. El número (finito o infinito) $d = \sup\limits_{\substack{x' \in X,\\ x'' \in X}} \rho(x', x'')$ se llama diámetro del conjunto X y se designa por $d(X)$.*

Ejercicio 7. Sea Q^n una bola n-dimensional con centro en cierto punto $x^{(0)}$ y de radio r: $Q^n = O(x^{(0)}, r)$, entonces $d(Q^n) = 2r$. Demuéstrese que el conjunto X es acotado si y sólo si $d(X) < +\infty$.

Definición 12. *Sea la función f definida sobre el conjunto X; entonces el valor del módulo de continuidad $\omega(\delta, f, X)$ cuando δ es igual al diámetro del conjunto E, es decir, $\omega(d(X), f, X)$ se llama oscilación de la función f sobre el conjunto X y se designa por $\omega(f; X)$ o sencillamente por $\omega(f)$.*

Es evidente, que por (19.16)

$$\omega(f; X) = \sup_{\substack{x' \in X, \\ x'' \in X}} [f(x'') - f(x')].$$

Recordemos que si en el segundo miembro de esta igualdad tomamos la cota superior de los valores absolutos de las diferencias que aparecen allí, obtenemos el mismo valor.

OBSERVACIÓN. De lo dicho en este párrafo y el anterior, particularmente, es evidente, que todas las particularidades referentes a las cuestiones relacionadas con las funciones de varias variables, pueden ser vistas con bastante claridad en los casos bidimensionales y tridimensionales. Gracias a la elección afortunada de las definiciones y notaciones, las demostraciones de los teoremas se trasladan automáticamente del caso de $n = 2$ al caso n-dimensional arbitrario, llevando a veces sólo a una complicación técnica de la notación. El caso cuando $n = 2$ tiene la ventaja de su evidencia geométrica y de una notación más sencilla, cuando en ella participan las coordenadas de los puntos. Por eso, para mayor claridad y sencillez en la exposición, como regla, analizaremos detalladamente sólo el caso cuando $n = 2$ ó $n = 3$, y en el caso de un n arbitrario sólo enunciaremos los resultados correspondientes o incluso sólo señalaremos la posibilidad de su generalización para el caso de un n arbitrario. Si durante el análisis de alguna cuestión cuando $n > 3$ surgen algunas dificultades específicas, entonces esta custión se analizará detalladamente en el caso general.

§ 20. DERIVADAS PARCIALES. DIFERENCIABILIDAD DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

20.1. DERIVADAS PARCIALES Y DIFERENCIALES PARCIALES

Analicemos primeramente el caso de las funciones de tres variables.

Definición 1. *Supongamos que en cierto entorno del punto $(x_0 y_0, z_0)$ está dada la función $u = u(x, y, z)$. Si fijamos las variables y y z: $y = y_0$, $z = z_0$, obtenemos una función de una variable x: $u = u(x, y_0, z_0)$. La derivada habitual (véase el p. 9.1) de esta función en el punto $x = x_0$ se llama derivada parcial de la función $u(x, y, z)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) por x y se designa por $\dfrac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}$.*

De esta forma,

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \stackrel{\text{def}}{=} \left.\frac{\partial u(x, y_0, z_0)}{\partial x}\right|_{x = x_0}$$

Señalemos que la designación de la derivada parcial según la variable x por $\dfrac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}$ es tradicional. Hubiera sido más correcto escribir $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$, ya que $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ es un símbolo único, que designa una nueva función, cuyo valor se analiza en el punto (x_0, y_0, z_0).

Si recordamos la definición de derivada $\dfrac{du}{dx}$ (véase el p. 9.1), entonces, por esta definición, se puede escribir

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - u(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x},$$

o, si introducimos la notación $u(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - u(x_0, y_0, z_0) = \Delta_x u$ ($\Delta_x u$ es el incremento de la función por la variable x),

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}.$$

De forma análoga se introducen las derivadas parciales por y y z:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} = \frac{du(x_0, y, z_0)}{dy}\bigg|_{y = y_0},$$

ó

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} = \frac{du(x_0, y_0, z)}{dz}\bigg|_{z = z_0}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta^y u}{\Delta y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta^z u}{\Delta z},$$

donde $\Delta_y u$ y $\Delta_z u$ son los incrementos de la función por las variables y, z respectivamente.

Por analogía con las funciones de una variable, las funciones lineales $\dfrac{\partial u}{\partial x}dx$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}dy$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}dz$ de las variables dx, dy, dz llamadas *diferenciales de las variables independientes*, se llaman *diferenciales parciales* de la función $u(x, y, z)$ según las variables x, y, z recpectivamente y se designan por

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x}dx, \quad d_y u = \frac{\partial u}{\partial y}dy, \quad d_z u = \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Definiciones análogas tienen lugar para cualquier número de variables.

Si la función $y = f(x_1, \dots, x_n)$ está definida en cierto entorno del punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, entonces por definición

$$\frac{\partial f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\partial x_i} \overset{\text{def}}{=} \frac{df(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{dx_i}\bigg|_{x_i = x_i^{(0)}} \tag{20.1}$$

o, lo que es lo mismo, omitiendo el símbolo del argumento, $\frac{\partial y}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} y}{\Delta x_i}$,
donde $\Delta_{x_i} y = f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)},$
$x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Para designar la derivada parcial $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ se utilizan también símbolos y_{x_i} ó f_{x_i}.

La diferencial parcial $d_{x_i} y$ se define por la fórmula

$$\partial_{x_i} y \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i, \quad -\infty < dx_i < +\infty, \tag{20.2}$$

y de esta forma es una función lineal de la variable dx_i, llamada *diferencial de la variable independiente* x_i. Aquí, siempre $i = 1, 2, \dots, n$. En el caso cuando $n = 1$, la derivada parcial coincide con la derivada ordinaria, y la diferencial parcial con la diferencial ordinaria.

Subrayemos que $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ es un símbolo único, es decir, que en él el numerador y el denominador no tienen sentido independiente. Por otra parte, la derivada parcial $\frac{\partial y}{\partial x_i}$, naturalmente, puede ser escrita también en la forma de cociente de dos diferenciales: $\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial_{x_i} y}{dx_i}$.

De la definición de las derivadas parciales, como derivadas ordinarias con la condición de que se han fijado todas las variables excepto una, por la cual se toma la derivada, se deduce que al calcular las derivadas parciales se pueden utilizar las reglas del cálculo de las derivadas ordinarias. Supongamos, por ejemplo, que se exige hallar la derivada $\partial z / \partial y$ de la función $z = xye^{x/y}$. Para esto, fijando en esta fórmula x, obtenemos una función de una variable y; calculando su derivada, tendremos:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{x/y} + xye^{x/y} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x(y-x)e^{x/y}}{y}.$$

Para concluir este punto señalemos que de la continuidad de la función de n variables en un punto dado, no se deriva la existencia de sus derivadas parciales en este punto. El ejemplo correspondiente para el caso cuando $n = 1$ fue presentado anteriormente (véase el p. 9.2). Es importante señalar, que cuando $n \geqslant 2$ incluso de la existencia todas las derivadas parciales en cierto punto, no se deduce la continuidad de la función en este punto *). Esto es natural por cuanto la condición de continuidad de la función de varias variables en un punto impone determinadas limitaciones sobre su comportamiento cuando se acerca a este punto por todas las direcciones, mientras que la existencia de las derivadas parciales en el punto significa que la función satisface determinadas condiciones acercándose al punto señalado sólo en la dirección de los ejes coordenados.

*) Recordemos que para $n = 1$, es decir, para la función de una variable, de la existencia de la derivada en un punto se deriva también que la función es continua en este punto (véase el p. 9.2).

Para convencerse evidentemente de esto, analicemos la función $f(x, y)$ igual a cero si $xy = 0$, y a 1, si $xy \neq 0$. Es evidente que $f(x, 0) \equiv f(0, y) \equiv 0$, y, por lo tanto,

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0.$$

Sin embargo, esta función es discontinua en el punto $(0, 0)$, ya que, por ejemplo, su límite a lo largo de la recta $y = x$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ es igual a 1, y $f(0, 0) = 0$.

Más aún, existen funciones, que tienen derivadas parciales en todos los puntos y a pesar de esto, son discontinuas. Ejemplo de tales funciones es la función

$$f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2) & \text{cuando} \quad x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{cuando} \quad x = y = 0. \end{cases} \tag{20.3}$$

Esta función tiene derivadas parciales en todo el plano y es discontinua en el punto $(0, 0)$ (¿por qué?).

20.2. DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES EN UN PUNTO

Analicemos primeramente el caso de las funciones de dos variables. Sea la función $z = f(x, y)$ definida en cierto δ-entorno $U = U(M_0; \delta)$ del punto $M_0 = (x_0, y_0)$ y sea (fig. 97)

$$M = (x, y) \in U(M_0; \delta), \quad \Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0$$

y, por lo tanto,

$$\rho = \rho(M, M_0) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta.$$

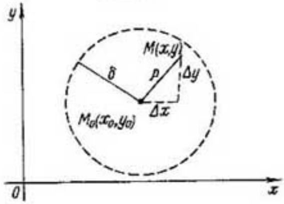
Sea, finalmente, $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

Habitualmente Δz se llama *incremento total de la función*; este nombre se explica por el hecho de que aquí, en general, todas las variables independientes reciben incrementos distintos de cero.

Definición 2. *La función $z = f(x, y)$ se llama diferenciable en el punto (x_0, y_0), si existen dos números A y B tales que*

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y), \tag{20.4}$$

FIG. 97



donde, cuando $\rho \neq 0$:

$$\alpha(\Delta x; \Delta y) = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho, \quad \lim_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0. \text{*)} \tag{20.5}$$

De (20.4) se deduce que $\alpha(0, 0) = 0$.

Junto con esto señalemos que el valor de la función $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ en el punto $(0, 0)$ no está definido por la fórmula (20.5).

Definición 3. *En el caso de la diferenciabilidad de la función f en el punto (x_0, y_0) la función lineal $A\Delta x + B\Delta y$, de las variables Δx y Δy se llama diferencial total o sencillamente diferencial de la función f en el punto (x_0, y_0) y se designa por dz.*

De esta forma $dz = A\Delta x + b\Delta y$.

En lugar de Δx y Δy se utilizan también las notaciones equivalentes dx y dy, es decir, se escribe $dz = A\,dx + B\,dy$. De (20.5) se deduce que

$$\lim_{M \to M_0} \frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = 0. \tag{20.6}$$

La función $\alpha(\Delta x, \Delta y)$, que tiene la propiedad (20.6), la designaremos, por analogía con las funciones de una variable, por $o(\rho)$ cuando $\rho \to 0$ **). Utilizando esta notación, la definición de diferenciabilidad se puede escribir en la forma

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad \rho \to 0. \tag{20.7}$$

Lema 1. *La condición* (20.5) *es equivalente a la condición*

$$\alpha(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \quad \rho \neq 0 \tag{20.8}$$

donde $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que se cumple la condición (20.5), es decir, $\alpha = \varepsilon\rho$, $\rho \neq 0$, donde $\varepsilon \to 0$ cuando $\rho \to 0$; entonces

$$\alpha = \varepsilon\rho = \varepsilon\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} =$$

$$= \varepsilon \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \Delta x + \varepsilon \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \Delta y = \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$, $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$. Señalando que

---

*) Recordemos que por lo acordado, la notación $\lim\limits_{\rho \to 0} f$ es equivalente a la notación $\lim\limits_{M \to M_0} f$, donde $\rho = \rho(M, M_0)$.

**) En general para las funciones α y β de varias variables $\alpha = o(\beta)$ cuando $x \to x^{(0)}$, $x \in E \subset R^n$, $x^{(0)} \in R^n$, si $\alpha(x) = \varepsilon(x)\beta(x)$, donde $\lim\limits_{\substack{x \to x^{(0)},\\ x \in X}} \varepsilon(x) = 0$. En este caso diremos que la función α es infinitesimal en comparación con la función β cuando $x \to x^{(0)}$, $x \in X$.

$\left| \dfrac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \leqslant 1, \left| \dfrac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \leqslant 1,$ tenemos $|\varepsilon_1| \leqslant |\varepsilon|, |\varepsilon_2| \leqslant |\varepsilon|$ de donde $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0$, es decir, se obtiene una representación de la función α en la forma (20.8).

Supongamos que al revés se cumple la condición (20.8), es decir, $\alpha = \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$, $\rho \neq 0$ donde $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\rho \to 0$; entonces

$$\alpha = \left(\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \varepsilon_1 + \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \varepsilon_2 \right) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \varepsilon \rho$$

donde $\varepsilon = \dfrac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \varepsilon_1 + \dfrac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \varepsilon_2$ y, por lo tanto, $|\varepsilon| \leqslant |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$; por esto $\varepsilon \to 0$ cuando $\rho \to 0$. De esta forma, se obtiene la representación de la función α en la forma (20.5). □

Teorema 1. *Si la función $z = f(x, y)$ es diferenciable en el punto (x_0, y_0), entonces ella es continua en este punto.*

En efecto, ya que $|\Delta x| \leqslant \rho$ y $|\Delta y| \leqslant \rho$, entonces de las fórmulas (20.4) y (20.5) se deduce que $\Delta z \to 0$ cuando $\rho \to 0$, lo que implica la continuidad de la función f en el punto (x_0, y_0). □

Teorema 2. *Si la función $z = f(x, y)$ es diferenciable en el punto (x_0, y_0) y $dz = A dx + B dy$ es su diferencial en este punto, entonces en el punto (x_0, y_0) existen todas las derivadas parciales de la función f y*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = B. \tag{20.9}$$

De esta forma,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{20.10}$$

DEMOSTRACIÓN. Por la definición de diferenciabilidad (véase (20.4) y (20.8)),

$$\Delta z = A \Delta x + B \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \quad \rho \neq 0,$$

donde

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0. \tag{20.11}$$

Suponiendo $\Delta y = 0$, obtenemos $\Delta z = \Delta_x z = A \Delta x + \varepsilon_1 \Delta x$, donde $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1 = 0$ (esto se deduce de (20.11), y ya que, suponiendo $\Delta y = 0$, obtenemos $\rho = |\Delta x|$). De aquí,

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \varepsilon_1, \tag{20.12}$$

donde para $\Delta x \to 0$ el segundo miembro tiende hacia el límite igual a A, por esto, también el primer miembro para $\Delta x \to 0$ tiene el mismo límite, y esto significa (véase (20.1)) que en el punto (x_0, y_0) existe la derivada parcial $\dfrac{\partial z}{\partial x} = A$. Análogamente, suponiendo en (20.4) $\Delta x = 0$ y pasando al límite, cuando $\Delta y \to 0$ obtenemos $\dfrac{\partial z}{\partial y} = B$. □

Corolario. *Si la función $f(x, y)$ es diferenciable en el punto (x_0, y_0), entonces esta diferencial es única.*

La unicidad de la diferencial se deriva directamente de la fórmula (20.9), ya que las derivadas parciales en el punto dado se determinan unívocamente.

Recordando las definiciones de las diferenciales parciales (véase (20.2)), la fórmula (20.10) se puede escrbir en la forma

$$dz = d_x z + d_y z,$$

es decir, la diferencial total de la función (cuando existe) es la suma de sus diferenciales parciales.

Señalemos que la afirmación, inversa al teorema 2, no tiene lugar: existen funciones que tienen todas sus derivadas parciales en todos los puntos del plano, pero no son diferenciables en cierto punto. Como ejemplo puede servir la función (20.3), citada en el punto anterior: en el punto (0, 0) esta función es discontinua, de donde, por el teorema 1 se deriva que en el punto (0, 0) no es diferenciable.

De lo dicho se deduce que no siempre la expresión $d_x z + d_y z$, cuando tiene sentido, es la diferencial total de la función. La relación entre la diferenciabilidad de la función en un punto y la existencia en este punto de las derivadas parciales es más complicada que la relación entre la diferenciabilidad y la existencia de la derivada para la función de una variable.

Enunciemos las condiciones de suficiencia en términos de las propiedades de las derivadas parciales para la diferenciabilidad de las funciones.

Teorema 3. *Supongamos que la función $z = f(x, y)$ en cierto entorno del punto (x_0, y_0) tiene las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ las que son continuas en el punto (x_0, y_0); entonces la función $z = f(x, y)$ es diferenciable en este punto.*

Corolario. *Si la función $z = f(x, y)$ tiene, en cierto entorno del punto (x_0, y_0),* las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ *y además estas derivadas parciales son continuas en el punto (x_0, y_0), entonces la función $z = f(x, y)$ también es continua en este punto.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Designemos por $U(\delta)$ el δ-entorno del punto (x_0, y_0), en el cual está definida la función f, al igual que sus derivadas parciales f_x y f_y. Elijamos Δx y Δy tales que $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U(\delta)$. Notando que

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)],$$

apliquemos a las expresiones que se encuentran entre los corchetes y que son incrementos de las funciones por una variable, la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange (véase el p. 11.2). Esto es posible, ya que la función $f(x, y_0 + \Delta y)$, analizada como función de una variable x, tiene sobre el segmento con extremos en los puntos x_0 y $x_0 + \Delta x$ derivada (que es la derivada parcial según x de la función f), por esto es continua sobre el segmento indicado. De esta forma, la función $f(x, y_0 + \Delta y)$ satisface todas las condiciones, bajo las cuales fue demostrada la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange. Análogamente se comprueba la posibilidad de aplicación de la fórmula de Lagrange a la función $f(x_0, y)$, analizada como función de una variable y, sobre el segmento con extremos en los puntos y_0 e $y_0 + \Delta y$. Entonces

$$\Delta z = f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x + f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y,$$
$$0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1, \quad (20.13)$$

además, θ_1 y θ_2 dependen, naturalmente, de la elección del punto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, es decir, de Δx y Δy.

Si

$$f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0, y_0) = \varepsilon_1,$$
$$f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) - f_y(x_0, y_0) = \varepsilon_2, \quad (20.14)$$

entonces, por la continuidad de las derivadas parciales f_x y f_y en el punto (x_0, y_0) tenemos

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0. \quad (20.15)$$

Obteniendo de (20.14) las expresiones para $f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)$ y $f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)$ y sustituyéndolas en (20.13), obtenemos:

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \quad (20.16)$$

lo que en virtud del cumplimiento de la condición (20.15), significa que la función f es diferenciable en el punto (x_0, y_0) (véanse (20.4) y (20.8)). □

El corolario del teorema se deduce del hecho de que una función diferenciable en cierto punto es también continua en éste (véase el teorema 1).

El teorema 3 tiene una significación importante, relacionada con el hecho de que el concepto de diferenciabilidad de una función desempeña un papel de primer orden en una serie de secciones de la teoría de funciones de varias variables. Sin embargo, la comprobación directa de la diferenciabilidad de una función (por ejemplo, para aclarar las posibilidades de aplicación de unos u otros teoremas) con frecuencia es muy difícil, mientras que la comprobación de la continuidad de las derivadas parciales, para el cálculo de las cuales se tiene un aparato analítico muy cómodo, resulta más fácil.

Definición 4. *La función, que tiene en cierto punto (o sobre cierto conjunto, respectivamente) derivadas parciales continuas, se llama continuamente diferenciable en este punto (sobre este conjunto, respectivamente).*

Comparemos la definición de diferenciabilidad de una función (definición 2) y la definición de diferenciabilidad continua (definición 4). La diferenciabilidad de una función en un punto, implica la existencia en este punto de la diferencial, es decir, la validez para este punto de la fórmula (20.4). Lo que la función sea continuamente diferenciable en un punto, significa que sus derivadas parciales en este punto son continuas. De esta forma, la diferenciabilidad de una función está relacionada con el concepto de diferencial, y la diferenciabilidad continua está relacionada con el concepto de derivadas parciales. Conjuntamente con esto, de la diferenciabilidad continua en un punto (sobre un conjunto abierto) se deduce la diferenciabilidad en este punto (sobre este conjunto respectivamente); en esto reside la afirmación del teorema 3.

En el futuro necesitaremos de algunas propiedades auxiliares de las funciones ε_1 y ε_2 de la fórmula (20.16).

Definición 5. *Sean A y B dos conjuntos planos, $A \subset R^2_{xy}$, $B \subset R^2_{uv}$ y sea la función $f = f(x, y, u, v)$ definida para $(x, y) \in A$, $(u, v) \in B$.*

La función f se llama uniformemente tendiente hacia cero sobre el conjunto A de las variables x, y cuando $(u, v) \to (u_0, v_0)$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todos los (u, v) que satisfacen la condición $\sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2} < \delta$, $(u, v) \neq (u_0, v_0)$ y todos los $(x, y) \in A$ se cumple la condición $|f(x, y, u, v)| < \varepsilon$.

La definición general de tendencia uniforme de la función hacia un límite, será dada en el p. 39.4.

Teorema 4. *Sea la función $z = f(x, y)$ continuamente diferenciable sobre el conjunto abierto $G \subset R^2$. Entonces*

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y, \tag{20.17}$$

donde las funciones $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x, y, \Delta x, \Delta y)$ y $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(x, y, \Delta x, \Delta y)$ tienden uniformemente hacia cero cuando $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$ sobre cualquier compacto $A \subset G$.

DEMOSTRACIÓN. Sea A un compacto, perteneciente a G. Entonces los conjuntos cerrados A y $R^2 \setminus G$ no se intersecan y ya que A es acotado (véase el p. 18.3, teorema 3), entonces $d = \rho(A, R^2 \setminus G) > 0$ (véase el lema 7 del p. 18.2).

El conjunto $A_{d/2} = \{(x, y) : \rho(x, y), A) \leqslant d/2)\}$ está contenido en el conjunto G y es compacto (véase el lema 11 del p. 18.3).

Sea ahora $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < d/2$; entonces cuando $(x_0, y_0) \in A$ obtendremos (véase (20.13)):

$$(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \Delta y) \in A_{d/2}, \quad (x_0, y_0 + \theta_2\Delta y) \in A_{d/2},$$

y, por lo tanto, según las fórmulas (20.14), tenemos las desigualdades

$$|\varepsilon_1| \leqslant \omega(\rho; f_x; A_{d/2}), \quad |\varepsilon_2| \leqslant \omega(\rho; f_y; A_{d/2}),$$

donde, en sus segundos miembros, están los módulos de continuidad de las funciones f_x y f_y, respectivamente. De la continuidad de las derivadas parciales f_x y f_y sobre el compacto $A_{d/2}$ se deduce que

$$\lim_{\rho \to 0} \omega(\rho; f_x; A_{d/2}) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\rho \to 0} \omega(\rho; f_y; A_{d/2}) = 0.$$

Por esto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para todos los $\rho < \delta$ se cumplen las desigualdades

$$\omega(\rho; f_x; A_{d/2}) < \varepsilon, \quad \omega(\rho; f_y; A_{d/2}) < \varepsilon.$$

Por lo tanto, para todos los $\rho < \delta$ y todos los $(x_0, y_0) \in A$ son válidas las desigualdades

$$|\varepsilon_1| < \varepsilon, \quad |\varepsilon_2| < \varepsilon.$$

Esto implica que las funciones ε_1 y ε_2 tienden uniformemente hacia cero cuando $\rho \to 0$ sobre el compacto A. □

OBSERVACIÓN. En las suposiciones del teorema 2, el incremento Δz de la función, también es representable en la forma

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon\rho, \tag{20.18}$$

donde $\varepsilon = \varepsilon(x, y, \Delta x, \Delta y)$ tiende hacia cero uniformemente sobre cada uno de los compactos $A \subset G$, cuando $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$. Para la demostración, es suficiente en la fórmula (20.18) poner $\varepsilon = \varepsilon_1 \dfrac{\Delta x}{\rho} + \varepsilon_2 \dfrac{\Delta y}{\rho}$ (compárese con la demostración del lema al inicio de este punto).

Todas las definiciones y afirmaciones de este punto se extienden al caso de la función $y = f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, de cualquier número n de variables, definida en cierto entorno del punto $x^{(0)}$. Por ejemplo, la condición de diferenciabilidad en un punto dado $x^{(0)}$, en el caso general tendrá la forma siguiente:

$$\Delta y = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + o(\rho), \quad \rho \to 0, \tag{20.19}$$

donde

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}, \quad \Delta y = f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}),$$

$$\Delta x_i = x_i - x_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

además, en este caso $A_i = \dfrac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

De esta forma, si la función f es diferenciable, entonces

$$f(x) = f(x^{(0)}) + A_1(x_1 - x_1^{(0)}) + \dots + A_n(x_n - x_n^{(0)}) + o(\rho), \quad \rho \to 0, \tag{20.20}$$

es decir, la función f en el entorno del punto dado, salvo un infinitésimo de un orden más alto que $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^{(0)})^2}$ es igual a una función lineal *). Dicho de otra forma, la diferenciabilidad de una función en un punto dado significa que la función f es "casi lineal" en un entorno de este punto; el sentido exacto de la expresión "casi lineal" está contenido en la fórmula (20.20).

En el caso cuando tiene lugar (20.19), la función lineal $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x_1 + \dots$ $\dots + \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n} \Delta x_n$ de las variables $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ (aquí, en lugar de $x^{(0)}$ está escrito x) se llama *diferencial de la función*, o más claro, diferencial total de la función en un punto dado x y se designa por $df(x)$:

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \Delta x_n. \tag{20.21}$$

La diferencial, como toda función lineal de n variables, está definida sobre todo el espacio n-dimensional R^n. De esta forma, *la fórmula* (20.21) *tiene sentido para*

*) Las funciones de la forma $y = c_0 + c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$, donde c_i son constantes, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, se llaman *funciones lineales* de n variables o lo que es lo mismo *funciones lineales del punto* $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$.

todos los valores Δx_i, $i = 1, 2, \dots, n$; al mismo tiempo que *la fórmula* (20.19) *tiene sentido sólo para aquellos que no salen fuera del dominio de la función* f.

Las variables Δx_i se llaman también *diferenciales de las variables* x_i y se designan por dx_i, $i = 1, 2, \dots, n$. Con esta notación la diferencial de la función f se escribe en la forma

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx_n.$$

Es evidente que $\Delta f(x) = df(x) + o(\rho)$ cuando $\rho \to 0$.

Si se analiza la diferencial cuando varía el punto $x = x(x_1, \dots, x_n)$ entonces ésta será una función de $2n$ variables: $x_1, \dots, x_n, \dots, dx_n$.

Los teoremas 1 — 4 del presente párrafo, de forma evidente, se generalizan para las funciones de n variables, por esto no daremos sus enunciados.

20.3. DIFERENCIACIÓN DE LA FUNCIÓN COMPUESTA

Teorema 5. *Sean las funciones* $x(t)$ *e* $y(t)$ *de una variable* t, *diferenciables en el punto* t_0 *(lo que, como sabemos, es equivalente a la existencia de sus derivadas en el punto* t_0, véase el p. 9.2) *y sean* $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$. *Si la función* $z = f(x, y)$ *es diferenciable en el punto* (x_0, y_0) *entonces la función compuesta* $z = f(x(t), y(t))$ *definida en cierto entorno del punto* t_0, *tiene en* t_0 *derivada y esta derivada se expresa por la fórmula*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}, \tag{20.22}$$

o más detalladamente,

$$\frac{df(x(t_0), y(t_0))}{dt} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\frac{dx(t_0)}{dt} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\frac{dy(t_0)}{dt}.$$

DEMOSTRACIÓN. La función $f(x, y)$, por la definición de diferenciabilidad de una función, está definida en cierto entorno del punto (x_0, y_0). De la diferenciabilidad de las funciones $x(t)$ e $y(t)$ se deduce su continuidad en el punto t_0. Por esto, según la observación al teorema 2 en el p. 19.4, en cierto entorno del punto t_0 está definida la función compuesta $f(x(t), y(t))$.

La diferenciabilidad de la función $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) significa que su incremento total $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ es representable en la forma

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \tag{20.23}$$

donde la función $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ es tal que $\lim\limits_{\rho \to 0}\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$. Aquí, como es habitual, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Definamos la función $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ en el punto $(0, 0)$, poniendo $\varepsilon(0, 0) = 0$ (compárese con la demostración del teorema 4 en el p. 9.7). Así la función definida $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ es continua en el punto $(0, 0)$.

Sea ahora Δt el incremento de la variable t y $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$, $\Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)$. Dividamos ambos miembros de la igualdad (20.23) por Δt:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} \pm \varepsilon\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}. \tag{20.24}$$

Cuando $\Delta t \to 0$ en virtud de la continuidad de las funciones $x(t)$ e $y(t)$ en el punto t_0 obtenemos $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, por lo tanto, también $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \rho = 0$. De aquí, según el teorema sobre la composición de funciones continuas (véase el p. 19.3), $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$. Señalemos, por último, que existe el límite finito

$$\lim_{\Delta t \to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}.$$

De todo esto se deduce que, cuando $\Delta t \to 0$ la parte derecha de la fórmula (20.24) tiende hacia el límite finito $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$ $(t = t_0)$, por esto, también la parte izquierda de esta fórmula, es decir, $\dfrac{\Delta z}{\Delta t}$, tiende hacia el mismo límite, y esto significa que en el punto t_0 existe la derivada $\dfrac{dz}{dt}$ y se expresa por la fórmula (20.22). □

Señalemos que aunque en la fórmula definitiva de la derivada de una función compuesta (20.22) entran sólo las derivadas parciales $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ de la función $z = f(x, y)$, durante la demostración se ha usado esencialmente una propiedad más fuerte de esta función que la existencia de sus derivadas parciales, como es su diferenciabilidad.

Ejercicio 1. Muéstrese que cuando se rechaza la exigencia de diferenciabilidad de la función $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) y cuando se supone solamente la existencia en este punto de las derivadas parciales $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ y la existencia de las derivadas $\dfrac{dx}{dt}$ y $\dfrac{dy}{dt}$ en el punto t_0, la fórmula (20.22), en general, no es válida, y, más aún, la función compuesta $f[x(t), y(t)]$ (se supone que tiene sentido), en general, no tiene derivada en el punto t_0.

Corolario. *Sean las funciones $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ definidas en cierto entorno del punto (u_0, v_0), y la función $z = f(x, y)$ definida en cierto entorno del punto (x_0, y_0), donde $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$.*

Si la función $f(x, y)$ es diferenciable en el punto (x_0, y_0) y si en el punto (u_0, v_0) existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial y}{\partial u}$ entonces en este punto (u_0, v_0) existe también la derivada parcial $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ de la función compuesta $z = f[x(u, v), y(u, v)]$, además

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}. \tag{20.25}$$

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $v = v_0$ y analicemos la función compuesta $z = f[x(u, v_0), y(u, v_0)]$ de una variable u. Según el teorema 5, esta función está definida en cierto entorno del punto u_0 y tiene en este punto derivada. De esta forma, la derivada $\frac{\partial z}{\partial u}$ en el punto (u_0, v_0) existe y de la fórmula (20.22) se deduce la fórmula (20.25). □

De forma análoga, si en el punto (u_0, v_0) existen las derivadas parciales $\frac{\partial x}{\partial v}$ y $\frac{\partial y}{\partial v}$, entonces para la función compuesta $z = f(x(u, v), y(u, v))$ existe en el punto (u_0, v_0) la derivada parcial por v y para ella es válida la fórmula

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Analicemos el caso general n-dimensional. *Supongamos en el entorno del punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ dada la función $y = y(x_1, \dots, x_n)$ y sobre cierto conjunto $E_t \subset R^k$ las funciones $x_i = x_i(t_1, \dots, t_K)$, $i = 1, 2, \dots, n$, tales que $x_i(t_1^{(0)}, \dots \dots, t_k^{(0)}) = x_i^{(0)}$. Si la función $y = y(x) = y(x_1, \dots, x_n)$ es diferenciable en el punto $x^{(0)}$ y si en punto $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, \dots, t_k^{(0)})$ existen las derivadas parciales $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$, $j = 1, 2, \dots, k$, $i = 1, 2, \dots, n$,* entonces la función compuesta $y(x(t))$ *tiene en el punto $t^{(0)}$ derivadas parciales $\frac{\partial y}{\partial t_j}$, $j = 1, 2, \dots, k$, además*

$$\frac{\partial y}{\partial t_j} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_i}, \quad j = 1, 2, \dots, k. \tag{20.26}$$

Señalemos, que si en las suposiciones hechas las derivadas parciales $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ y $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$, $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$ son continuas respectivamente en los puntos $x^{(0)}$ y $t^{(0)}$, entonces en virtud de la fórmula (20.26) las derivadas parciales de la función compuesta $y = y(x(t))$ también serán continuas en el punto $t^{(0)}$, por lo tanto, serán diferenciables en este punto (véase el teorema 3 en el p. 20.2). En el próximo punto será demostrada la diferenciabilidad de la composición de funciones con hipótesis más débiles.

20.4. INVARIANCIA DE LA FORMA DE LA PRIMERA DIFERENCIAL CON RESPECTO A LA ELECCIÓN DE LAS VARIABLES. REGLA DE CÁLCULO DE LAS DIFERENCIALES

Teorema 6. *Sea la función $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, definida en cierto entorno del punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, y las funciones $x_i = x_i(t)$, $t = (t_1, \dots, t_k)$, $i = 1, 2, \dots, n$, definidas en cierto entorno del punto $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, \dots, t_k^{(0)})$ y sea $x_i^{(0)} = x_i(t^{(0)})$, $i = 1, 2, \dots, n$.*

En este caso, si la función $f(x)$ es diferenciable en el punto $x^{(0)}$ y las funciones $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, son diferenciables en el punto $t^{(0)}$, entonces la función compuesta $f(x(t)) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ está definida en cierto entorno del punto $t^{(0)}$ y es diferenciable en este punto. Además la diferencial df de la función $f(x(t))$ en el punto $t^{(0)}$ puede ser escrita en las dos formas siguientes:

$$df = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f(x(t^{(0)}))}{\partial t_j} dt_j, \tag{20.27}$$

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i, \text{ donde } dx_i = dx_i(t) \Big|_{t = t^{(0)}} \tag{20.28}$$

DEMOSTRACIÓN. Ya que las funciones $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, están definidas en cierto entorno del punto $t^{(0)}$ y ya que de la diferenciabilidad de las funciones se deduce su continuidad, entonces la función compuesta $f(x(t))$ está definida en cierto entorno del punto $t^{(0)}$ (véase la observación al teorema 2 en el p. 19.4). Fijemos dos números cualesquiera $\delta > 0$ y $\eta > 0$ de tal forma que la función $f(x)$ estuviese definida sobre un η-entorno del punto $x^{(0)}$, las funciones $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, en un δ-entorno del punto $t^{(0)}$, y que $(x_i(t), \dots, x_n(t)) \in U(x^{(0)}; \eta)$ cuando $t \in U(t^{(0)}; \delta)$. Entonces, sobre el entorno $U(t^{(0)}; \delta)$ está definida la función compuesta $f(x(t))$. La posibilidad de elegir tales números δ y η (evidentemente δ depende de la elección de η) fue mostrada en el p. 19.4. La función $f(x)$ es diferenciable en el punto $x^{(0)}$; por esto, cuando $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} < \eta$ tenemos

$$\Delta f = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \Delta x_i + \varepsilon r, \tag{20.29}$$

donde $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ es tal que $\lim_{r \to 0} \varepsilon = 0$. Pongamos $\varepsilon(0, \dots, 0) = 0$. Definida complementariamente de esta forma la función ε es continua en el punto $(0, \dots, 0)$.

Por la diferenciabilidad de las funciones $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, en el punto $t^{(0)}$ cuando $\rho = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \Delta t_j^2} < \delta$ obtenemos:

$$\Delta x_i = x_i(t_1^{(0)} + \Delta t_1, \dots, t_k^{(0)} + \Delta t_k) - x_i(t_1^{(0)}, \dots, t_k^{(0)}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \Delta t_i + \varepsilon_i \rho, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{20.30}$$

donde $\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Sustituyendo los valores de Δx_i de (20.30) en (20.29), obtenemos

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \Delta t_j + \beta, \tag{20.31}$$

donde

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \varepsilon_i \rho + \varepsilon r. \tag{20.32}$$

Cambiando el orden de la adición en (20.31), tendremos

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \right) \Delta t_j + \beta. \tag{20.33}$$

Ahora, para demostrar que la función compuesta $f(x(t))$ es diferenciable en el punto $t^{(0)}$, es necesario demostrar que $\beta = o(\rho)$ cuando $\rho \to 0$. Por la continuidad de las funciones $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ en el punto $t^{(0)}$ tenemos $\lim\limits_{\rho \to 0} \Delta x_i = 0$, y por lo tanto, $\lim\limits_{\rho \to 0} r = 0$. De aquí, en virtud del teorema sobre la composición de funciones continuas (véase el p. 19.2)

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon = 0. \tag{20.34}$$

De (20.32) tenemos:

$$\frac{\beta}{\rho} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \varepsilon_i + \varepsilon \frac{r}{\rho}. \tag{20.35}$$

Demostremos que la relación r/ρ es acotada. Utilizando la fórmula (20.30), obtenemos

$$\frac{r}{\rho} = \frac{1}{\rho} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} \leq \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i|^{*)} \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \left| \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \right| \frac{|\Delta t_j|}{\rho} + \varepsilon_i.$$

Y como $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_i = 0$, entonces en cierto entorno del punto $t^{(0)}$ las funciones ε_i son acotadas, y ya que $|\Delta t_j| / \rho \leq 1$, entonces, la función r/ρ es acotada en cierto entorno del punto $t^{(0)}$. Por esto, de (20.34) y (20.35) se deduce que $\lim\limits_{\rho \to 0} (\beta/\rho) = 0$, es

---

*) Nos servimos de la desigualdad $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2} \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|$, que es una consecuencia evidente de la desigualdad $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i| \right)^2$ (véase (18.11)).

decir, que $\beta = o(\rho)$ cuando $\rho \to 0$. La diferenciabilidad de la función compuesta $f(x(t))$ en el punto $t^{(0)}$ queda demostrada.

De la fórmula (20.31) tenemos

$$df(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t} \Delta\partial t_j.$$

De aquí, observando que $\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \Delta t_j = dx_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, precisamente obtenemos la fórmula (20.28). La fórmula (20.27) es la forma habitual para la diferencial (véase (20.21)). □

Formalmente ambas notaciones (20.27) y (20.28) de la diferencial de la función, son iguales: en ambas fórmulas, la diferencial es igual a la suma de los productos de las derivadas parciales por las diferenciales correspondientes, sin embargo, en el caso de la fórmula (20.27) dt_j son las diferenciales de las variables independientes, y en el caso de la fórmula (20.28) dx_i son las diferenciales de la función. Esta propiedad se llama *invariancia de la forma de la primera diferencial* con respecto a la elección de las variables.

OBSERVACIÓN 1. De la fórmula (20.33) se deduce que

$$df(x^{(0)}) = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \right) dt_j.$$

Pero los coeficientes de la diferencial de la función en las diferenciales de las variables independientes se determinan unívocamente y son iguales a las derivadas parciales correspondientes, por esto, comparando esta fórmula con la fórmula (20.27), obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j},$$

es decir, otra vez la fórmula (20.26). Cierto es que esta vez ha sido deducida teniendo en cuenta limitaciones más fuertes que las anteriores; esta vez se ha supuesto la diferenciabilidad de las funciones $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, mientras que en el p. 20.3 se ha supuesto sólo la existencia para estas funciones de sus correspondientes derivadas parciales.

OBSERVACION 2. Si las funciones $f(x_1, \ldots, x_n)$ y $x_i = x_i(t)$, $t = (t_1, \ldots, t_k) \in R^k$, $i = 1, 2, \cdots, n$, tienen derivadas parciales continuas en el punto $(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}) \in R^n$ y en el punto $t^{(0)} \in R^k$, respectivamente, donde $x_i^{(0)} = x_i(t^{(0)})$, entonces según el teorema 3 del p. 20.2 (véanse también las observaciones al final del p. 20.2 sobre el caso general), son diferenciables en los puntos señalados y por esto satisfacen las condiciones del teorema 6. Por consiguiente, para ellas se cumplen las hipótesis de este teorema y la fórmula, que se deduce de éste, para el cálculo de las derivadas parciales de la función compuesta (véase la observación anterior).

La invariancia de la fórmula de la primera diferencial se utiliza ampliamente durante el cálculo práctico de las diferenciales y de las derivadas parciales. Si u y v son funciones de cierto número de variables, entonces con ayuda de las fórmulas (20.28), se obtienen fácilmente las siguientes:

1. $d(u + v) = du + dv$.
2. $d(uv) = v\,du + u\,dv$. (20.36)
3. $d(u/v) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$.

Demostremos, por ejemplo, la fórmula 3. Sea $z = u/v$, donde $u = u(x_1, \dots, x_n), v = v(x_1, \dots, x_n)$. Notando que $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{1}{v}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial v} = -\dfrac{u}{v^2}$, según la fórmula (20.28) tenemos

$$dz = \frac{1}{v}\,du - \frac{u}{v^2}\,dv = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}. \ \square$$

Durante el cálculo de las diferenciales concretas de funciones de varias variables se pueden utilizar ampliamente las fórmulas obtenidas anteriormente por nosotros (véase el § 9), para las diferenciales de las funciones elementales. Señalemos para esto lo siguiente: sea la función $y = y(x_1, \dots, x_n)$ representada en la forma $y = F(u)$, donde $u = u(x_1, \dots, x_n)$. Entonces, teniendo en cuenta las suposiciones correspondientes, por la fórmula (20.28),

$$dy = F'(u)du, \quad u = u(x_1, \dots, x_n).$$

Por ejemplo, si $y = \operatorname{sen} u$, entonces $dy = \cos u\,du$; si $y = \ln u$, entonces $dy = \dfrac{du}{u}$; si $y = \operatorname{arctg} u$, entonces $dy = \dfrac{du}{1 + u^2}$, etc. (subrayamos que aquí en todos los casos $u = u(x_1, \dots, x_n)$).

En calidad de ejemplo hallemos la diferencial de la función $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

El cálculo se realiza en el orden siguiente:

$$dz = d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + y^2/x^2}\,d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}\ \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$$

Si se exige calcular las derivadas parciales de las funciones de varias variables, en particular, si es necesario calcular todas las derivadas, entonces es conveniente calcular la diferencial de esta función, y en este caso las derivadas parciales buscadas serán los coeficientes de las diferenciales correspondientes.

Así, en el ejemplo analizado $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, tomando los coeficientes de dx y dy de la expresión hallada por nosotros para la diferencial, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

OBSERVACIÓN 3. *Cualquier función $y = f(x_1, \dots, x_n)$ de n variables puede ser analizada también, en cierto sentido, como una función de cualquier número de va-*

riables $n + m > n$, $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_{n+m}$. Precisamente, para cualquier función $f(x_1, \dots, x_n)$, dada sobre el conjunto $E \subset R^n$, definamos la función $f^*(x_1, \dots, x_n, \dots, x_{n+m})$ sobre el conjunto de puntos $(x_1, \dots, x_n, \dots, x_{n+m})$ tales que $(x_1, \dots, x_n) \in E$, $-\infty < x_j < +\infty$, $j = n+1, \dots, n+m$, de la forma siguiente:

$$f^*(x_1, \dots, x_n, \dots, x_{n+m}) = f(x_1, \dots, x_n). \tag{20.37}$$

De esta forma, el estudio de la función de n variables, como una función de $n + m$ variables, de hecho significa la prolongación, según la fórmula (20.37), de la función f desde el conjunto de su definición $E \subset R^n$ sobre el conjunto

$$E^* = \{x_1, \dots, x_{n+m}) : (x_1, \dots, x_n) \in E, \quad -\infty < x_j < +\infty,$$
$$j = n+1, \dots, n+m\},$$

que se encuentra ya en el espacio R^{n+m}. Para la función f^*, obtenida, después de esta prolongación, tenemos

$$\frac{\partial f^*(x_1, \dots, x_{n+m})}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial f^*(x_1, \dots, x_{n+m})}{\partial x_j} = 0, \quad j = n+1, \dots, n+m,$$

por esto

$$df^*(x_1, \dots, x_{n+m}) = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial f^*(x_1, \dots, x_{n+m})}{\partial x_i} dx_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} dx_i = df(x_1, \dots, x_n).$$

Por ejemplo, cuando decimos que la función de una variable $z = f(x)$, definida sobre un intervalo (a, b), la analizamos como una función de dos variables $f(x) = F(x, y)$, $x \in (a, b)$, $-\infty < y < +\infty$, esto significa que la función $F(x, y)$ es constante, igual a $f(x)$ sobre cualquier recta que pase por el punto x del intervalo (a, b) del eje Ox paralelamente al eje Oy. En este caso

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = f'(x), \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0, \quad dF(x, y) = df(x),$$
$$a < x < b, -\infty < y < +\infty.$$

Será útil para el futuro señalar el hecho contrario, en un determinado sentido. Sea $E \subset R^n$. Si la función $f^*(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ definida sobre el conjunto

$$E^* = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) : (x_1, \dots, x_n) \in E, \quad a < x_{n+1} < b\}$$

y

$$\frac{\partial f^*(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} = 0 \text{ sobre } E^*, \tag{20.38}$$

entonces, existe la función $f(x_1, \dots, x_n)$ de n variables, definida sobre el conjunto E y tal que $f^*(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_n)$ para todos los $(x_1, \dots, x_n) \in E$, $x_{n+1} \in (a, b)$. En este caso, se dice que la función f^* de hecho *no depende de* *la variable* x_{n+1}. En efecto, de la condición (20.38) se deduce que la función f^* es constante como la función x_{n+1} (véase el corolario 1 del teorema 3 del p. 11.2) para el punto dado $(x_1, \ldots, x_n)$, es decir, fijando, cualquier $c \in (a, b)$ para cualquier punto $(x_1, \ldots, x_n) \in E$ y $x_{n+1} \in (a, b)$, tenemos $f^*(x_1, \ldots, x_{n+1}) = f^*(x_1, \ldots, x_n, c)$. La función buscada f, evidentemente, se define por la igualdad $f(x_1, \ldots \ldots, x_n) = f^*(x_1, \ldots, x_n, c)$, además no depende de la elección de $c \in (a, b)$.

De lo dicho anteriormente, en particular, se deduce que las fórmulas (20.36) para las diferenciales siguen siendo válidas también en el caso cuando las funciones u y v dependan de un número distinto de variables, ya que siempre, en virtud del método señalado, este caso puede reducirse al caso analizado anteriormente para las funciones de una variable.

20.5. SENTIDO GEOMÉTRICO DE LAS DERIVADAS PARCIALES Y DE LA DIFERENCIAL TOTAL

Para una mejor evidencia geométrica y para no introducir nuevos conceptos, en este punto nos limitaremos al análisis de las funciones de dos variables.

Analicemos la función $z = f(x, y)$, definida sobre el conjunto abierto y plano G, es decir, sobre el conjunto G que se encuentra sobre el plano R^2. Sea $(x_0, y_0) \in \in G$ y supongamos que en el punto (x_0, y_0) existe la derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial x}$. Su sentido geométrico se obtiene inmediatamente de la definición de la derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial x}$, como una derivada ordinaria de la función $f(x, y)$ por x para un y dado y del sentido geométrico de la derivada ordinaria (véase el p. 9.3). En efecto, tomemos el círculo cerrado Q de radio r con centro en el punto (x_0, y_0) y que se encuentra en G *). Sea una curva dada por la representación

$$z = f(x, y_0), \quad y = y_0, \quad x_0 - r \leqslant x \leqslant x_0 + r,$$

es decir, la curva que se obtiene seccionando la gráfica de la función $z = f(x, y)$, $(x, y) \in Q$ con el plano $y = y_0$ (fig. 98). Como es conocido, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \left. = \frac{df(x, y_0)}{dx} \right|_{x = x_0} = \operatorname{tg} \alpha$, donde α es el ángulo formado por la tangente a la gráfica de la función $f(x, y_0)$ en el punto $(x_0, f(x_0, y_0))$ con el eje Ox, es decir, el ángulo formado por la tangente a la curva γ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ con el eje Ox.

De esta forma,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha,$$

en esto consiste el sentido geométrico de la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$.

---

*) Tal círculo Q siempre existe. En efecto, según la definición de conjunto abierto, existe un δ-entorno U del punto (x_0, y_0), tal que $U \subset G$. Entonces el círculo cerrado Q de radio $\delta/2$ con centro en el punto (x_0, y_0), estará, a ciencia cierta, en G.

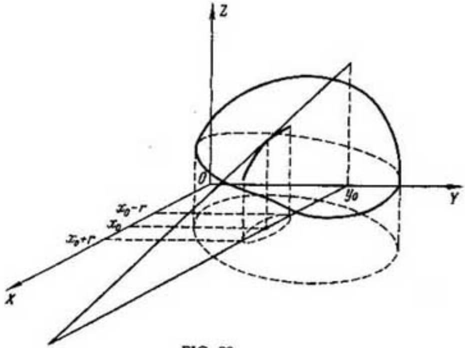


FIG. 98

De forma análoga se establece también el sentido geométrico de la derivada parcial $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ como tangente del ángulo de inclinación, formado por la tangente en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a la curva obtenida seccionando la gráfica de la función $z = f(x, y)$, $(x, y) \in Q$ por el plano $x = x_0$ con el eje Oy.

En lo que respecta al sentido geométrico de la diferencial, entonces de las fórmulas (20.20) y (20.9) para nuestro caso, es decir, cuando $n = 2$, obtenemos

$$f(x, y) = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho), \quad \rho \to 0, \tag{20.39}$$
$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad z_0 = f(x_0, y_0).$$

La ecuación

$$z = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0) \tag{20.40}$$

es la ecuación del plano que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y que no es paralelo al eje Oz. Como sabemos, los coeficientes A y B se definen unívocamente por la relación (20.39), además

$$A = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \tag{20.41}$$

y, por lo tanto, el plano (20.40) se define unívocamente por la relación (20.39). Este plano se llama *plano tangente* a la gráfica de la función $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0).

De esta forma, llegamos a la definición siguiente.

Definición 6. *Se llama plano tangente a la gráfica de la función $f(x, y)$ en el punto dado el plano tal que la diferencia entre su coordenada z y el valor de la función $f(x, y)$ es una magnitud infinitesimal en comparación con ρ cuando $\rho \to 0$.*

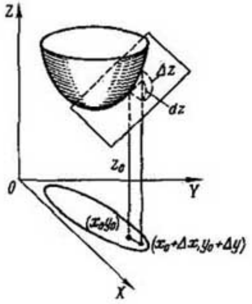


FIG. 99

En virtud de (20.41) la ecuación de este plano tangente tiene la forma

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0). \qquad (20.42)$$

En adelante (véase el t. 2, el p. 50.4) presentaremos otro enfoque del concepto de plano tangente.

Suponiendo $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, el segundo miembro de la ecuación (20.42) lo escribemos en la forma

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y.$$

Esta es la forma usual de escritura de la diferencial dz de la función $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) y por esto la ecuación (20.42) puede ser escrita en la forma:

$$z - z_0 = dz.$$

De esta forma, geométricamente *la diferencial total de la función en el punto* (x_0, y_0) *es igual al incremento de la coordenada* z del plano tangente a la gráfica de la función (fig. 99).

Más detalladamente, la diferencial

$$dz = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y, \quad \Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0,$$

coincide con el incremento en el punto $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ de la coordenada z del plano tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

20.6. GRADIENTE DE LA FUNCIÓN

Supongamos que la función $F(x, y)$ es diferenciable en el punto (x_0, y_0) y la curva γ es tal que las funciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, que son su forma paramétrica, satisfacen la ecuación

$$F(x, y) = 0,$$

es decir, por medio de ella está dada de forma implícita la curva γ. Sean $t_0 \in [a, b]$, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, y las funciones $x(t)$, $y(t)$ diferenciables cuando $t = t_0$.

Diferenciando para $t = t_0$ la identidad $F(x(t), y(t)) = 0$, $a \leqslant t \leqslant b$, obtendremos

$$x_t' \frac{\partial F}{\partial x} + y_t' \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad t = t_0,$$

es decir, los vectores $(x'(t_0), y'(t_0))$ y $\left(\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right)$ son ortogonales.

El vector $a = (x_t', y_t')$, en el caso cuando es distinto de cero, como es conocido, un vector tangente a la curva γ en el punto $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$. El vector $\left(\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right)$ se llama *gradiente de la función F* en el punto (x_0, y_0) y se denota por grad $F(x_0, y_0)$. De lo dicho se deduce que el gradiente de la función F es ortogonal a la tangente de la curva dada implícitamente por la ecuación $F(x, y) = 0$. La recta, perpendicular a la tangente a la curva plana y que descansa en un mismo plano con ésta, se llama (véase el p. 17.3) *normal* a la curva dada.

De esta forma, el gradiente de la función F es colineal con la normal a la curva, dada por la ecuación $F(x, y) = 0$, en el punto correspondiente.

En el caso de la función diferenciable $f(x_1, \ldots, x_n)$, se llama su gradiente el vector $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

20.7. DERIVADA RESPECTO A UNA DIRECCIÓN

Las derivadas parciales de la función son derivadas "por la dirección de los ejes coordenados". Es natural plantear la cuestión sobre la definición y el cálculo de la derivada respecto a cualquier dirección dada. Ante todo, definamos este concepto. Realicemos el análisis de esta cuestión en el ejemplo de las funciones de tres variables.

Sea la función f definida en el δ-entorno $U(M_0; \delta)$ del punto $M_0 \in R^3$ y sea $M_1 \in U(M_0; \delta)$. Tracemos una recta a través de los puntos M_0 y M_1. Por dirección positiva sobre esta recta tomaremos la dirección del vector $l = \overrightarrow{M_0M_1}$, es decir, la dirección desde el punto M_0 hacia el punto M_1. Para cualquier punto M de esta recta, designemos por M_0M la longitud orientada del segmento con origen en el punto M_0 y extremo en el punto M, es decir, la longitud de este segmento con signo positivo, si el vector $\overrightarrow{M_0M}$ tiene la misma dirección que el vector l, y con signo negativo en el caso contrario.

Definición 7. *El límite* $\lim\limits_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M}$, *si existe, se llama derivada de la función f en el punto M_0 respecto a la dirección del vector l y se denota por* $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$.

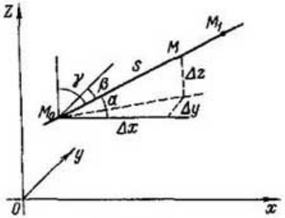


FIG. 100

Sea ahora dado, en el espacio R^3, un sistema de coordenadas x, y, z. Sean $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $M = (x, y, z)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = z - z_0$ y $s = M_0M$. Hallemos la relación entre las coordenadas del punto M y la longitud oriendada s del segmento M_0M. Sean α, β y γ los ángulos formados por el vector $\overrightarrow{M_0M_1}$ con los ejes Ox, Oy, y Oz respectivamente, entonces (fig. 100)

$$x - x_0 = s\cos\alpha, \quad y - y_0 = s\cos\beta, \quad z - z_0 = s\cos\gamma.$$

A lo largo de la recta M_0M, la función f es función de una variable s, más exactamente

$$f(x, y, z) = f(x_0 + s\cos\alpha, \quad y_0 + s\cos\beta, \quad z_0 + s\cos\gamma).$$

La derivada de esta función según s (si naturalmente existe) es la derivada *de la función f en el punto M_0 respecto a la dirección del vector $\overrightarrow{M_0M_1}$*.

Señalemos que los cosenos directores $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ del vector $\overrightarrow{M_0M_1}$ a través de las coordenadas de los puntos $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ se definen de la siguiente forma:

$$\cos\alpha = \frac{x_1 - x_0}{\rho}, \quad \cos\beta = \frac{y_1 - y_0}{\rho}, \quad \cos\gamma = \frac{z_1 - z_0}{\rho}, \tag{20.43}$$
$$\rho = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

La derivada respecto a la dirección se calcula según la regla de diferenciación de la función compuesta. Sea la función $f(x, y, z)$ diferenciable en el punto (x_0, y_0, z_0) y sea

$$x = x_0 + s\cos\alpha, \quad y = y_0 + s\cos\beta, \quad z = z_0 + s\cos\gamma. \tag{20.44}$$

De acuerdo con la definición de derivada respecto a la dirección y la fórmula de la derivada de la función compuesta tenemos:

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial t} = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M} =$$
$$= \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + s\cos\alpha, y_0 + s\cos\beta, z_0 + s\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{s} =$$
$$= \left.\frac{df}{ds}\right|_{s=0} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\frac{dz}{ds},$$

pero de (20.44) se deduce que

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma, \tag{20.45}$$

por esto definitivamente

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial s} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cos\gamma. \tag{20.46}$$

Esta es la fórmula buscada.

De esta forma, queda demostrado el teorema siguiente.

Teorema 7. *Sea la función f diferenciable en el punto (x_0, y_0, z_0). Entonces, en este punto la función f tiene derivada respecto a cualquier dirección y esta derivada se halla por la fórmula* (20.46).

Es curioso señalar, que de la fórmula obtenida (20.46) para la derivada respecto a una dirección no se ve inmediatamente que esta derivada no depende de la elección del sistema de coordenadas. Esta independencia se deduce directamente de la definición de derivada respecto a una dirección, de donde a su vez se deriva, que la parte derecha de la fórmula (20.46) no depende de la elección del sistema de coordenadas rectangular cartesiano y se determina sólo por los puntos M_0 y M_1, o lo que es lo mismo, por el punto M_0 y el vector $\overrightarrow{M_0M_1}$.

El vector con coordenadas $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial z}$ se llama, como sabemos, *gradiente* de la función $f(M)$ en el punto M_0 y se designa por grad f. (Ya nos hemos encontrado con el concepto de gradiente de las funciones cuando analizamos las curvas dadas implícitamente: véase el p. 20.6.)

De esta forma, si $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$ son versores coordenados, entonces

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{20.47}$$

Con frecuencia resulta cómoda la utilización del vector simbólico de Hamilton *)

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

llamado *nabla*. Es la notación de una determinada operación que se debe realizar sobre una u otra función.

Para la función f, según la definición, suponemos

$$\nabla f = \boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Formalmente esta igualdad se puede analizar como el "producto" del vector ∇ por el número f. Así, el grad f y ∇f son las notaciones de una misma expresión.

*) W. Hamilton (1805 — 1865), matemático irlandés.

Sea ahora el vector l unitario, y, por lo tanto, $l = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Con ayuda del gradiente, la fórmula para la derivada de la función f respecto a la dirección l se escribe de la forma siguiente:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \cos\alpha\,\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\beta\,\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\gamma\,\frac{\partial f}{\partial z} = l\,\mathrm{grad}\,f, \qquad (20.48)$$

donde en el segundo miembro se halla el producto escalar de los vectores l, y $\mathrm{grad}\,f$. De aquí, por cuanto l es un vector unitario,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = |\mathrm{grad}\,f|\,\cos\varphi,$$

donde φ es el ángulo formado por el vector l y el $\mathrm{grad}\,f$. De esta fórmula se ve que si en el punto dado

$$|\mathrm{grad}\,f|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \neq 0,$$

entonces la derivada de la función diferenciable respecto a la dirección, alcanza su valor máximo en una única dirección, y precisamente en aquella para la cual $\cos\varphi = 1$, es decir, en la dirección del gradiente. De esto se deduce que para la función dada del punto $f(M)$, el gradiente en cada punto se determina unívocamente por la propia función, y no depende de la elección del sistema de coordenadas, como hubiera podido parecer de la fórmula (20.47).

En realidad, ante todo, si el gradiente es igual a cero en un sistema de coordenadas cartesianas, entonces es igual a cero también en cada sistema de coordenadas semejante. En efecto, la igualdad a cero del gradiente en un punto, por la fórmula (20.48), es equivalente a la igualdad a cero en este punto de las derivadas respecto a todas las direcciones, lo último no depende de la elección del sistema de coordenadas cartesianas, por cuanto de esta elección no depende la derivada respecto a la dirección. Si el gradiente no es igual a cero, entonces su independencia de la elección del sistema de coordenadas cartesianas se deduce directamente de su sentido geométrico demostrado anteriormente: la dirección del gradiente muestra la dirección del crecimiento más rápido de la función (es única), y su magnitud es igual a la derivada en este dirección.

Tomemos ahora cualquier curva continuamente diferenciable, sin puntos particulares, que pase por punto (x_0, y_0, z_0), y al que el vector $\overrightarrow{M_0M_1}$ sea su vector tangente. Designemos por s la longitud variable del arco de esta curva, medida desde el punto M_0 en una dirección tal que el vector $\overrightarrow{M_0M_1}$ de la dirección positiva sobre la tangente. Si $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ es una representación de esta curva, entonces, como sabemos (véase el p. 16.5), $\dfrac{dx}{ds} = \cos\alpha$, $\dfrac{dy}{ds} = \cos\beta$, $\dfrac{dz}{ds} = \cos\gamma$, es decir, también se cumple (20.45). Por esto, si se toma la derivada en el punto (x_0, y_0, z_0) de la función diferenciable $f(x, y, z)$ respecto a la curva dada, es decir, cuando $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, dicho de otra forma, se toma la derivada de la función $f(x(s), y(s), z(s))$ respecto a s, entonces para esta derivada será válida la fórmula (20.46). Esto significa que la derivada en cierto punto de la función a lo largo de la curva, que pasa por el punto señalado coincide con la derivada respecto a la dirección de la tangente a esta curva en este mismo punto.

Todo lo dicho se extiende a funciones de cualquier número n de variables ($n \geqslant 2$). Enunciemos sólo la definición de la derivada respecto a una dirección.

Sea la función $f(x)$ definida en un entorno del punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, y sea $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ un punto de este entorno, $x^{(1)} \neq x^{(0)}$.

Tracemos una recta por los puntos $x^{(0)}$ y $x^{(1)}$. Su ecuación tiene la forma (véase (18.44) y (18.45))

$$x_i = x_i^{(0)} + s\cos\alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad -\infty < s < +\infty,$$

donde $\cos\alpha_i$ son los cosenos directores

$$l = (x_1^{(1)} - x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(1)} - x_n^{(0)}).$$

Analicemos la función dada f sólo en los puntos de esta recta, es decir, analicemos la función

$$f(x_1^{(0)} + s\cos\alpha_1, \dots, x_n^{(0)} + s\cos\alpha_n).$$

La derivada $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ *de la función* $f(x_1, \dots, x_n)$ *en el punto* $x^{(0)}$ *en la dirección del punto* $x^{(1)}$, *o lo que es lo mismo, en la dirección* $(\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_n)$, *se define como la derivada* $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ *de la función compuesta* $f(x_1^{(0)} + s\cos\alpha_1, \dots, x_n^{(0)} + s\cos\alpha_n)$.

En el caso, cuando la función f es diferenciable en el punto $x^{(0)}$, entonces, por la fórmula para la derivada de la función compuesta, tenemos en este punto

$$\frac{\partial f}{\partial l} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cos\alpha_n.$$

Recordando la definición de gradiente de la función de n variables (véase el p. 20.6), con ayuda del producto escalar de vectores n-dimensionales (véase (18.32)), la fórmula de la derivada de la función f respecto a la dirección del vector l para cualquier espacio n-dimensional R^n, se puede escribir en la forma (20.48), es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\operatorname{grad} f, l_0),$$

donde $l_0 = (\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_n)$.

Para concluir señalemos que del hecho de que la función en cierto punto tiene derivadas respecto a todas las direcciones, no se deduce que la función en este punto es diferenciable. Por ejemplo, la función

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ y \neq x^2, \ \text{ ó } \ x = y = 0, \\ 1, & \text{si } \ y = x^2, \quad x^2 + y^2 > 0, \end{cases}$$

tiene en el punto (0, 0) respecto a cualquier dirección derivada igual a cero. Sin embargo, en el punto (0, 0) la función f es discontinua y de ningún modo diferenciable (fig. 101).

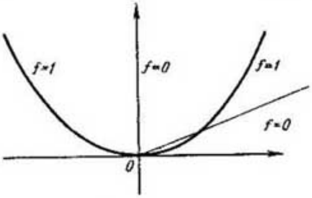


FIG. 101

20.8. EJEMPLO DE LA INVESTIGACIÓN DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Con ayuda de las derivadas parciales se puede estudiar el comportamiento de las funciones de varias variables, de forma semejante a como se investigó el comportamiento de las funciones de una variable con ayuda de su derivada. El problema de la búsqueda de los valores máximos y mínimos, lo estudiaremos más tarde, en los § 40 y § 43, aquí nos limitaremos sólo a un ejemplo del estudio de una función de dos variables, que nos permitirá obtener una desigualdad útil para el futuro.

Mostremos, que para cualesquiera $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $p > 1$, y el número q, definido por la igualdad

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{20.49}$$

es válida la desigualdad

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{20.50}$$

Ante todo, señalemos que la ecuación (20.49), que relaciona a los números p y q, es equivalente a la relación

$$(p - 1)(q - 1) = 1, \tag{20.51}$$

la que es equivalente a la condición

$$q = \frac{p}{p - 1}. \tag{20.52}$$

Esto se establece comparándolos directamente.

Para la demostración de la desigualdad (20.50), analicemos la función

$$F(x, y) = xy - \frac{x^p}{p} - \frac{y^q}{q}, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0. \tag{20.53}$$

Calculemos sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = y - x^{p-1}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x - y^{q-1}. \tag{20.54}$$

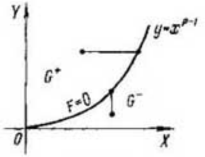


FIG. 102

De (20.51) se deduce que cuando $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, las ecuaciones

$$y - x^{p-1} = 0 \tag{20.55}$$

y

$$x - y^{q-1} = 0 \tag{20.56}$$

son equivalentes. De esta forma, los puntos (x, y), que satisfacen tanto la condición $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0$, como lo condición $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0$ descansan sobre la curva (20.55), o, lo que es lo mismo, sobre la curva (20.56).

En virtud de (20.49) y (20.52), a lo largo de la curva (20.55) tenemos:

$$F(x, x^{p-1}) = x^p - \frac{x^p}{p} - \frac{x^{(p-1)q}}{q} =$$

$$= x^p - \frac{x^p}{p} - \frac{x^p}{q} = x^p\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = 0. \tag{20.57}$$

Designemos ahora por G^+ el conjunto de todos los puntos, situados por encima de la curva (20.55) y sobre la propia curva:

$$G^+ \overset{\text{def}}{=} \{(x, y) : y \geqslant x^{p-1},\ x \geqslant 0\},$$

y por G^-, el conjunto de todos los puntos del primer cuadrante (incluyendo el eje de las x), situados por debajo de esta curva y sobre ella misma:

$$G^- \overset{\text{def}}{=} \{(x, y); 0 \leqslant y \leqslant x^{p-1},\ x \geqslant 0\}.$$

Por las fórmulas (20.54) para $(x, y) \in G^+$, $y \neq x^{p-1}$ tenemos $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) > 0$, y para $(x, y) \in G^-$, $y \neq x^{p-1}$, respectivamente $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$ (aquí se ha utilizado la equivalencia de las ecuaciones (20.55) y (20.56)). Por esto, a lo largo de cualquier segmento, situado en el conjunto G^+ y paralelo al eje de las x (fig. 102), la función $F(x, y)$ crece estrictamente. Por lo tanto, si $(x, y) \in G^+$, $y \neq x^{p-1}$, entonces (véase (20.57))

$$F(x, y) < F(x, x^{p-1}) = 0.$$

De forma análoga, sobre cualquier segmento, situado en el conjunto G^- y paralelo al eje de las y, la función $F(x, y)$ también crece estrictamente. Por esto, si

$(x, y) \in G^-$ e $y \neq x^{p-1}$, entonces otra vez

$$F(x, y) < F(x, x^{p-1}) = 0.$$

De esta forma, si $y \neq x^{p-1}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, entonces, siempre $F(x, y) < 0$.

Así pues, recordando la forma de la función F (véase (20.53)), tenemos: si $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, entonces

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{cuando} \quad b \neq a^{p-1},$$

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{cuando} \quad b = a^{p-1}.$$

Así la desigualdad (20.50) queda demostrada.

§ 21. DERIVADAS PARCIALES Y DIFERENCIALES DE ÓRDENES SUPERIORES

21.1. DERIVADAS PARCIALES DE ÓRDENES SUPERIORES

Sea dada la función $f(x, y)$. Entonces cada una de sus derivadas parciales (si naturalmente existen) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, las que se llaman también *derivadas parciales de primer orden*, otra vez es una función de las variables independientes x, y por lo tanto puede tener también derivadas parciales. La derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ se denota por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \text{o } f_{xx}, \quad \text{y } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \text{por} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \text{ o } f_{xy}.$$

De esta forma,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

y, análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

Las derivadas f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} y f_{yy} se llaman *derivadas parciales de segundo orden*. Analizando las derivadas parciales de éstas, obtendremos todas posibles derivadas parciales de tercer orden:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \quad \text{etc.}$$

De forma análoga se definen las derivadas parciales de un orden arbitrario para las funciones de cualquier número de variables.

Definición 1. *La derivada parcial (respecto a cualquiera de las variables independientes) de la derivada parcial de orden $m - 1, m = 1, 2, \cdots,$* *) *se llama derivada parcial de orden m.*

La derivada parcial, obtenida por la diferenciación respecto a distintos variables, se llama derivada parcial mixta (cruzada). La derivada parcial, obtenida diferenciando sólo con respecto a una variable, se llama derivada parcial pura.

El número de las distintas derivadas parciales cuando aumenta m, naturalmente, crece; sin embargo, resulta que para determinadas suposiciones muchas de ellas coinciden, precisamente, las derivadas parciales mixtas respecto a las mismas variables, no dependen del orden de diferenciación.

Más exactamente tiene lugar el teorema siguiente.

Teorema 1. *Sea la función $f(x, y)$, al igual que sus derivadas parciales f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx}, definida en un entorno del punto (x_0, y_0), además f_{xy} y f_{yx} son continuas en este punto; entonces*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0). \tag{21.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea la función $f(x, y)$ definida, junto con sus derivadas f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx}, en el δ-entorno del punto (x_0, y_0) y sean Δx y Δy fijados, tales que $\Delta x^2 + \Delta y^2 < \delta^2$. Designaremos, al igual que antes (véase el p. 20.1), por el símbolo Δ_x, respectivamente Δ_y, al incremento de la función f respecto al argumento x, respectivamente y, en el punto (x_0, y_0) **). Introduzcamos la notación

$$\Delta_{xy}f = \Delta_x(\Delta_y f), \quad \Delta_{yx}f = \Delta_y(\Delta_x f)$$

y demostremos que

$$\Delta_{xy}f = \Delta_{yx}f. \tag{21.2}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\Delta_{xy}f &= \Delta_x(\Delta_y f) = \Delta_x[f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = \\ &= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)] - [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)];\end{aligned} \tag{21.3}$$

análogamente,

$$\begin{aligned}\Delta_{yx}f = \Delta_y(\Delta_x f) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] - \\ - [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)].\end{aligned} \tag{21.4}$$

Comparando (21.3) y (21.4), nos convencemos de la validez de la relación (21.2).

Hagamos ahora

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0);$$

entonces (21.3) se puede transcribir en la forma

$$\Delta_{xy}f = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0).$$

---

*) Para comodidad de la notación, la propia función se considera *derivada parcial de orden cero.*

**) Para la función dada $F(x, y)$ sus incrementos Δ_x y Δ_y, en el punto dado (x_0, y_0) se determinan por las fórmulas $\Delta_x F(x_0, y_0) = F(x_0 + \Delta x, y_0) - F(x_0, y_0)$, $\Delta_y F(x_0, y_0) = F(x_0, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0)$.

Debido a que en el entorno analizado del punto (x_0, y_0) existe la derivada parcial f_x, la función $\varphi(x)$ es diferenciable sobre el segmento con extremos en los puntos x_0 y $x_0 + \Delta x$. Del teorema de Lagrange sobre los incrementos finitos, se deduce que

$$\Delta_{xy}f = \varphi'(x_0 + \theta_1\Delta x)\Delta x, \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

Pero $\varphi'(x) = f_x(x, y_0 + \Delta y) - f_x(x, y_0)$, y por esto

$$\Delta_{xy}f = [f_x(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0)]\Delta x.$$

Aplicando otra vez el mismo teorema de los incrementos finitos, pero ahora respecto a la variable y, tendremos

$$\Delta_{xy}f = f_{xy}(x + \theta_1\Delta x, \quad y_0 + \theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y,$$
$$0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1. \tag{21.5}$$

De un modo completamente análogo, suponiendo $\psi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y)$, tenemos

$$\Delta_{yx}f = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0) = \psi'(y_0 + \theta_3\Delta y)\Delta y =$$
$$= [f_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_3\Delta y) - f_y(x_0, y_0 + \theta_3\Delta y)]\Delta y =$$
$$= f_{yx}(x_0 + \theta_4\Delta x, y_0 + \theta_3\Delta y)\Delta x\Delta y, \quad 0 < \theta_3 < 1, \quad 0 < \theta_4 < 1. \tag{21.6}$$

Por (21.2), los primeros miembros de las igualdades (21.5) y (21.6), son iguales entre sí, por lo tanto, son iguales también los segundos; igualándolos y simplificándolos por $\Delta x\Delta y$, cuando $\Delta x \neq 0$ y $\Delta y \neq 0$, obtendremos

$$f_{xy}(x_0 + \theta_1\Delta x, \quad y_0 + \theta_2\Delta y) = f_{yx}(x_0 + \theta_4\Delta x, y_0 + \theta_3\Delta y),$$
$$0 < \theta_i < 1, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{21.7}$$

Por la continuidad de las derivadas parciales f_{xy} y f_{yx} en el punto (x_0, y_0), pasando en (21.7) al límite cuando $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, obtenemos (21.1). □

OBSERVACIÓN 1. Del teorema demostrado, por inducción, es fácil deducir, que si para una función de n variables, las derivadas parciales mixtas de orden m son continuas en un punto, entonces no depende del orden de diferenciación.

Esto se deduce del hecho de que dos sucesiones cualesquiera de diferenciación, que se diferencian sólo en el orden de diferenciación (es decir, tales que respecto a cada argumento fijo contienen el mismo número total de diferenciaciones), se puede convertir una en otra con un número finito de pasos, en cada uno de los cuales se cambia el orden de diferenciación respecto a dos variables, y las restantes permanecen fijas. De esta forma, en cada paso, de hecho, se analiza el cambio del orden de diferenciación de la función que tiene sólo dos variables, es decir, en este caso nos encontramos en las condiciones del teorema demostrado anteriormente. Así, el caso general se reduce al caso de las funciones de dos variables.

Aclaremos esto en un ejemplo. Demostremos, por ejemplo, que

$$f_{xyz} = f_{zyx}.$$

Por lo dicho anteriormente, tenemos la sucesión

$$f_{xyz} = (f_x)_{yz} = (f_x)_{zy} = (f_{xz})_y = (f_{zx})_y = (f_z)_{xy} = (f_z)_{yx} = f_{zyx}.$$

OBSERVACIÓN 2. Para concluir este punto señalemos, que, a primera vista, el teorema demostrado puede parecer que no tiene mucho contenido: para juzgar, si tiene lugar la igualdad $f_{xy} = f_{yx}$, es necesario, según este teorema, comprobar la continuidad de las funciones f_{xy} y f_{yx}, y para esto parecería necesario conocerlas, pero si ya las conocemos, entonces sin ningún teorema podemos aclarar si son iguales o no. No obstante, el teorema 1 tiene sentido. El problema es que sobre la continuidad de una función se puede juzgar algunas veces a base de ciertos teoremas generales, sin tener que recurrir al cálculo concreto y a la investigación de la propia función. Así, sabemos que todas las funciones elementales de varias variables son continuas en sus dominios (véase el p. 19.4). Por otra parte, las derivadas parciales de las funciones elementales, también son elementales, por esto, si por ejemplo, la derivada de cierta función elemental está definida sobre un entorno de cualquier punto, entonces esta derivada también es continua en cada punto del entorno señalado.

Problema 18. Demuéstrese que si la función $f(x, y)$ está definida junto con sus derivadas parciales f_x, f_y y f_{xy} en un entorno del punto (x_0, y_0), además la derivada parcial f_{xy} es continua en el punto (x_0, y_0), entonces en este punto existe la derivada parcial f_{yx}, y

$$f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0).$$

La función que tiene en un punto (o, respectivamente, sobre un conjunto abierto) derivadas parciales continuas de todos los órdenes hasta un cierto orden m inclusive, se llama *m veces continuamente diferenciable* en este punto (sobre este conjunto).

Señalemos que para que la función tenga en el punto (sobre un conjunto abierto) derivadas parciales continuas de todos los órdenes hasta un cierto orden m inclusive, es suficiente que tenga en este punto (sobre este conjunto) derivadas parciales continuas de orden m. En efecto, de la continuidad de todas las derivadas parciales de orden m en el punto (sobre un conjunto abierto), según el corolario del teorema 3 en el p. 20.2, se deriva la continuidad de todas las derivadas parciales de orden $m - 1$, en el punto analizado (sobre el conjunto analizado). De la continuidad de las derivadas parciales de orden $m - 1$, se deriva (en el caso $m > 1$) la continuidad de las derivadas parciales de orden $m - 2$, etc.

21.2. DIFERENCIALES DE ÓRDENES SUPERIORES

La función de $2n$ variables $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, o, lo que es lo mismo, de los pares ordenados de puntos del espacio n-dimensional $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ del tipo

$$A(x, y) = A(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) = \sum_{i, k = 1}^{n} a_{ik} x_i y_k,$$

donde a_{ik} son números dados ($i, k = 1, 2, \dots, n$), se llama *forma bilineal* de x e y. Este nombre se explica por el hecho de que si uno de los puntos x o y es fijo, entonces la función será lineal respecto a las coordenadas de los puntos restantes.

La función $A(x, x)$ se llama *forma cuadrática*, correspondiente a la forma bilineal dada $A(x, y)$:

$$A(x, x) = A(x_1, \dots, x_n; x_1, \dots, x_n) = \sum_{i, k = 1}^{n} a_{ik}x_ix_k.$$

En el caso cuando $a_{ik} = a_{ki}$, $i, k = 1, 2, \dots, n$, la forma bilineal $A(x, y)$ y la forma cuadrática $A(x, x)$ correspondiente a ella se llaman *simétricas*.

Por ejemplo, el producto escalar de dos vectores $x = (x_1, x_2 \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ del espacio euclídeo n-dimensional R^n

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

es una forma bilineal simétrica de los puntos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, y al cuadrado de la longitud del vector $|x|$ le corresponde su forma cuadrática:

$$|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

En el futuro, para comodidad de la exposición, denotaremos las diferenciales no sólo por el símbolo d, sino también por el símbolo δ, por ejemplo, escribiremos no sólo

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \quad \text{sino también} \quad \delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\delta y,$$

además, a la diferencial de cualquier función la llamaremos también su primera diferencial.

Supongamos que la función $z = z(x, y)$ tiene continuas las primeras y segundas derivadas parciales sobre cierto conjunto abierto y plano G (tales funciones, por la definición del punto anterior, se llaman dos veces continuamente diferenciables sobre el conjunto G). De la continuidad sobre el conjunto G de las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, se deduce, como sabemos (véase el teorema 3 en el p. 20.2), la diferenciabilidad de la propia función $z(x, y)$ en cada punto de este conjunto. De esta forma, para todos los puntos $(x, y) \in G$ está definida la diferencial

$$dz = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}dy.$$

Por cuanto, según las suposiciones hechas, las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ tienen sobre un conjunto abierto derivadas parciales continuas

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

entonces, por el teorema 3 del p. 20.2 $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ también son diferenciables sobre el conjunto G. Por esto, la diferencial dz, analizada como función sólo de las variables x e y, a su vez, es diferenciable sobre el conjunto G de la función. Calculemos la diferencial de la primera diferencial dz, considerando a dx y dy fijas, y el punto (x, y) perteneciente a la región G: $(x, y) \in G$, en este caso, la nueva diferenciación la denotaremos por el símbolo δ:

$$\delta(dz) = \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right) = \left(\delta\,\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(\delta\,\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\,\delta y\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,\delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,\delta y\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx\delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,(dx\delta y + \delta x dy) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy\delta y.$$

Llamemos la atención al hecho de que la continuidad de las segundas derivadas ha sido utilizada no sólo para que los cálculos tuvieron sentido $\left(\text{es decir, para que en todos los puntos analizados existieran las diferenciales } \delta\,\frac{\partial z}{\partial x} \text{ y } \delta\,\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, sino también para que en el proceso de cálculo no se presentara atención al orden de la diferenciación. En efecto, fue demostrado (véase el p. 21.1), que en el caso de continuidad de las derivadas parciales mixtas $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, éstas coinciden, por esto para su designación puede ser utilizado un mismo símbolo, lo que ha sido hecho en los cálculos señalados.

Como resultado se ha obtenido la forma bilineal simétrica de las variables dx, dy, δx, δy. Suponiendo $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, obtendremos su correspondiente forma cuadrática, la que se llama *segunda diferencial* de la función $z = z(x, y)$ en el punto dado $(x, y) \in G$ y se designa por d^2z.

De esta forma, hemos llegado a la siguiente definición.

Definición 2. *Se llama segunda diferencial d^2z de la función $z = f(x, y)$ en el punto dado la forma cuadrática de las diferenciales dx y dy de las variables independientes, correspondiente a la forma bilineal de la diferencial de la primera diferencial, es decir,*

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2. \tag{21.8}$$

En la práctica, durante el cálculo concreto de las diferenciales con frecuencia se simultanean ambos pasos, o sea, el cálculo de la diferencial de la diferencial $\delta(dz)$ y la igualación de las diferenciales de los argumentos en las sucesivas diferenciaciones: $\delta x = dx$, $\delta y = dy$. Por ejemplo, sea $z = x^3\cos^2 y$ y se pide hallar d^2z. Sucesivamente tendremos:

$$dz = 3x^2\cos^2 y dx - x^3\,\mathrm{sen}\,2y dy,$$

$$d^2z = 6x\cos^2 y\,dx^2 - 3x^2\,\mathrm{sen}\,2y\,dx\,dy - 3x^2\,\mathrm{sen}\,2y\,dx\,dy - 2x^3\cos 2y\,dy^2 =$$

$$= 6x\cos^2 y\,dx^2 - 6x^2\,\mathrm{sen}\,2y\,dx\,dy - 2x^3\cos^2 2y\,dy^2.$$

De forma análoga, durante la continuidad de las derivadas parciales de tercer orden, se puede calcular también la diferencial de la segunda diferencial $\delta(d^2z)$, después de lo cual, suponiendo $\delta x = dx$ y $\delta y = dy$, obtendremos por definición la tercera diferencial. Por inducción se define también la diferencial de orden $(m + 1)$ $d^{m+1}z$, $m = 1, 2, \cdots$ De forma más precisa, en la suposición de que son continuas todas las derivadas parciales hasta del orden $m + 1$ inclusive, de la función dada sobre un cierto conjunto, para obtener su diferencial $d^{m+1}z$, es necesario tomar la diferencial de la diferencial $d^m z$ de orden m: $\delta(d^m z)$ y hacer $\delta x = dx$, $\delta y = dy$. En este caso, para las diferenciales de orden $m = 1, 2, \cdots$ será válida la fórmula

$$d^m z = \sum_{k=0}^{m} C_n^k \frac{\partial^m z}{\partial x^{m-k} \partial y^k} dx^{m-k} dy^k, \tag{21.9}$$

con frecuencia se escribe simbólicamente en la forma siguiente que es más cómoda para ser recordada:

$$d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^{(m)} f(x, y). \tag{21.10}$$

Demostremos la fórmula (21.9) por inducción. Para $m = 1$, evidentemente es cierta. Supongamos que sea válida para cierto m, mostremos su validez para $m + 1$. Tenemos

$$\delta(d^m z) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \left(\frac{\partial^{m+1} z}{\partial x^{m-k+1} \partial y^k} \delta x dx^{m-k} dy^k + \frac{\partial^{m+1} z}{\partial x^{m-k} \partial y^{k+1}} dx^{m-k} \delta y dy^k\right).$$

Hagamos $\delta x = dx$ y $\delta y = dy$; entonces

$$d^{m+1}z = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m-k+1} \partial y^k} dx^{m-k+1} dy^k + \sum_{p=0}^{m} C_m^p \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m-p} \partial y^{p+1}} dx^{m-p} dy^{p+1}.$$

Sustituyamos en la segunda suma el índice de la adición p por $k - 1$ y observemos que $C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k$; obtendremos finalmente:

$$d^{m+1}z = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m-k+1} \partial y^k} dx^{m-k+1} dy^k + \sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1} \frac{\partial^{m+1} z}{\partial x^{m-k+1} \partial y^k} dx^{m-k+1} dy^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1-k} \partial y^k} dx^{m+1-k} dy^k. \square$$

OBSERVACIÓN. Se debe tener en cuenta que si se tiene una función compuesta $z = f(x, y)$, donde $x = x(u, v)$, $y = (u, v)$, entonces la segunda diferencial de la función f, expresada por las diferenciales de las variables x e y, ya no tendrá, en general, la forma (21.8) y tendrá, como regla, una forma más compleja. De esta forma, en el caso de la diferencial de orden superior (es decir, de orden mayor o igual a dos) no tiene lugar la invariancia de la forma de la diferencial respecto a la elección de las variables. Para convencerse de esto, calculemos en el caso analizado la segunda diferencial de la función $z = f(x, y)$, donde $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Por la invariancia de la forma de la primera diferencial tenemos

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Más adelante, calculemos la diferencial $\delta(dz)$, considerando que $\delta u = du$, $\delta v = dv$. Utilizando la invariancia de la forma de la primera diferencial respecto a la elección de las variables durante los cálculos de $\delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ y $\delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$:

$$\delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \delta y,$$
$$\delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \delta y,$$

y notando, que la diferencial $\delta(dx)$, es la diferencial de la función, y por lo tanto, en general, no es nula, obtendremos

$$dz^2 = \delta(dz) \Big|_{\substack{\delta u = du \\ \delta v = dv}} = \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) \Big|_{\substack{\delta u = du \\ \delta v = dv}} =$$
$$= \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial z}{\partial x} \delta(dx) + \frac{\partial z}{\partial y} \delta(dy) \Big|_{\substack{\delta v = du \\ \delta w = dv}} =$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2y.$$

En la práctica también en este caso ambas operaciones — cálculo de las diferenciales e igualación de las diferenciales $\delta u = du$, $\delta v = dv$ — se realizan simultáneamente, es decir, la notación $\delta(dz)\Big|_{\substack{\delta x = dx \\ \delta y = dy}}$, se considera equivalente a la notación $d(dz)$.

Todo lo dicho, en particular, la definición de las diferenciales de órdenes superiores, de una forma natural se extiende a las funciones de un gran número de variables. Señalemos que la diferencial de orden m de las funciones de n variables $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ tiene la forma

$$d^m y = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^{(m)} y(x_1, \ldots, x_n). \tag{21.11}$$

Esta fórmula se demuestra de forma análoga a la fórmula (21.10).

Ejercicios. 1. Hállense las derivadas parciales de primer orden de la función $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$.

2. Hállese la diferencial total de la función $u = z^{xy}$.

3. Hállense todas las derivadas parciales de segundo orden de la función.

$$u = x \operatorname{sen}(x + y) + y \cos(x + y).$$

4. Hállese $d^2 z$, si $z = \frac{1}{y} \ln(x^2 + y^2)$.

5. Hállense las derivadas de los dos primeros órdenes de la función $w = f(u, v)$, donde $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.

CAPÍTULO TERCERO

CÁLCULO INTEGRAL DE LAS FUNCIONES DE UNA VARIABLE

§ 22. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

22.1. PRIMITIVA E INTEGRAL INDEFINIDA

En este párrafo se analiza el problema de hallar una función para la cual la función dada es su derivada.

Definición 1. *Sea la función f definida sobre un intervalo Δ, finito o infinito, del eje numérico R, es decir, sobre un intervalo, intervalo semiabierto o segmento* [*)].

La función F definida sobre este intervalo se llama función primitiva (*o sencillamente primitiva*), *de la función f sobre Δ, si*

1) *la función F es continua sobre el intervalo Δ,*

2) *en cualquier punto del intervalo Δ, excepto un conjunto finito $E_f = E_{f,F} \subset \Delta$, la función F tiene derivada, igual al valor de la función f en este punto:*

$$F'(x) = f(x), \ X \in \Delta \setminus E_f. \tag{22.1}$$

A veces en lugar de "primitiva de la función dada" se dice "primitiva para la función dada".

En los puntos del conjunto E_f la función F, siendo obligatoriamente continua puede tener o no derivada, y además, si la derivada existe, entonces $F'(x) \neq f(x)$, $x \in F_f$.

El conjunto E_f puede ser, en particular, un conjunto vacío.

Ejemplo. Para la función $f(x) = \operatorname{sign} x$ (véase el p. 5.2) la función $F(x) = |x|$, $-\infty < x < +\infty$, es primitiva. Aquí el conjunto E_f está compuesto por un punto, el cero: $E_{\operatorname{sign} x} = \{0\}$. Para cualquier punto $x \neq 0$ tiene lugar $|x|' = \operatorname{sign} x$. Señalemos que la función $F(x) = |x|$ es también primitiva de la función

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{cuando} \quad x \geqslant 0, \\ -1 & \text{cuando} \quad x < 0, \end{cases}$$

que se diferencia de la función $f(x) = \operatorname{sign} x$ por su valor en el cero.

En este ejemplo se ve que una misma función F puede ser primitiva para diferentes funciones f, no obstante, en virtud de la condición (22.1) estas funciones f

---

*) Si el intervalo analizado es un segmento, entonces por supuesto, puede ser solamente finito.

pueden diferenciarse una de otra sólo en los valores sobre un conjunto finito de puntos (que depende de las funciones escogidas).

Es evidente que si la función F es un primitiva de la función f sobre cierto intervalo Δ, es decir, F es continua sobre Δ y en todos sus puntos menos cierto conjunto finito se cumple la condición $F'(x) = f(x)$, entonces para cualquier constante C, la función $F(x) + C$ también es continua sobre el intervalo Δ y en todos sus puntos menos el conjunto finito indicado se cumple la condición

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x),$$

es decir, la función $F(x) + C$ también es primitiva de la función f sobre el intervalo Δ.

Por otro lado, si las funciones F y Φ son primitivas para la función f sobre el intervalo Δ, es decir, F y Φ son continuas sobre el intervalo Δ y en todos sus puntos excepto los conjuntos finitos $E_{f,\,F}$ y respectivamente $E_{f,\,\Phi}$ se cumplen las condiciones

$$F'(x) = f(x) \quad \text{y} \quad \Phi'(x) = f(x),$$

entonces para todos los puntos del intervalo Δ excepto el conjunto $E_{f,\,F} \cup E_{f,\,\Phi}$, se cumplirá la condución

$$F'(x) = f(x) = \Phi'(x)$$

y además, el conjunto $E_{f,\,F} \cup E_{f,\,\Phi}$ donde esta condición se altera, es finito como la unión de dos conjuntos finitos.

De aquí, en virtud del corolario 2 del teorema 3 del p. 11.2 se deriva que las funciones F y Φ se diferencian sobre el intervalo Δ sólo en cierta constante C:

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad x \in \Delta. \tag{22.2}$$

Así pues, si la función F es cualquier primitiva de la función f sobre el intervalo Δ, entonces cualquier función Φ del tipo (22.2) también es primitiva de la función f y cualquier primitiva de la función f es representable en la forma $F(x) + C$.

Definición 2. *El conjunto de todas las primitivas de la función f definidas sobre cierto intervalo Δ se llama integral indefinida de la función f sobre este intervalo y se denota por*

$$\int f(x)\,dx. \tag{22.3}$$

El símbolo $\int$ *se llama símbolo de la integral*, $f(x)$ *función subintegral* (*integrando*).

Si F es cualquier primitiva de la función f sobre Δ, entonces se escribe

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{22.4}$$

aunque sería más correcto escribir

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C\}. \tag{22.5}$$

Como se acepta usualmente, utilizaremos la escritura (22.4). Así pues, un mismo símbolo $\int f(x)\,dx$ denotará tanto todo el conjunto de primitivas de la función f como cualquier elemento de este conjunto, es decir, cualquier primitiva de la función f.

Es necesario, no obstante, tener en cuenta que *cualquier igualdad en ambos miembros de la cual aparecen integrales indefinidas, es una igualdad entre conjuntos.*

Bajo el signo de la integral se escribe para mayor comodidad no la propia función f sino su producto por la diferencial dx. Esto se hace ante todo para indicar respecto a qué variable se busca la primitiva. Por ejemplo,

$$\int x^2 z dx = \frac{x^2 z}{3} + C, \quad \int x^2 z dz = \frac{x^2 z^2}{2} + C;$$

aquí en ambos casos la función subintegral es igual a $x^2 z$, pero sus integrales indefinidas en los casos analizados resultan diferentes: en el primer caso se analiza como una función de la variable x y en el segundo como una función de z.

Otras comodidades que se derivan de la utilización de la notación $\int f(x)dx$, serán indicadas en el futuro (véase al cambio de variable en la integral, en el p. 22.3).

Si F es una primitiva de la función f sobre el intervalo Δ, entonces por la definición 2 en la fórmula (22.3) bajo el signo de la integral aparece la diferencial de la función F en los puntos $x \in \Delta \setminus E_f$:

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

Consideraremos a base de la definición que esta diferencial bajo el signo de la integral se puede escribir en cualquiera de las formas indicadas, es decir, según este acuerdo

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x). \tag{22.6}$$

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA.

Supondremos que todas las funciones analizadas están definidas sobre un mismo intervalo finito o infinito Δ.

1°. *Sea la función F continua sobre el intervalo y diferenciable en sus puntos interiores; entonces*

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

o, lo es lo que mismo, véase (22.6)):

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

La validez de esta igualdad se deriva de la definición de integral indefinida como conjunto de todas las funciones continuas sobre el intervalo dado Δ cuya diferencial (en los puntos $x \in \Delta \setminus E_f$) aparece bajo el signo de la integral (véase (22.6)), y de la forma general (22.2) de todas las primitivas de la función dada.

2°. *Supongamos que la función f tiene primitiva sobre el intervalo Δ; entonces para cualquier punto interior del intervalo Δ tiene lugar la igualdad*

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

En la fórmula dada por integral $\int f(x)dx$ se entiende cualquier primitiva F de la función f. La validez de esta fórmula es evidente en virtud de la definición de primitiva.

3°. *Si las funciones f_1 y f_2 tienen primitivas sobre Δ, entonces, la función $f_1 + f_2$ también tiene primitiva sobre Δ, y además*

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx \tag{22.7}$$

Esta igualdad expresa la coincidencia de dos conjuntos de funciones y significa que la suma de primitivas cualesquiera para las funciones f_1 y f_2 es una primitiva para la función $f_1 + f_2$ y que viceversa, cualquier primitiva para la función $f_1 + f_2$ es la suma de ciertas primitivas para las funciones f_1 y f_2.

La propiedad de la integral expresada por la fórmula (22.7) se llama *aditividad de la integral con respecto a las funciones.*

Sea $\int f_1(x)\,dx = F_1(x) + C_1$, $\int f_2(x)\,dx = F_2(x) + C_2$ y, por consiguiente, las funciones F_1 y F_2 son continuas sobre el intervalo Δ y en sus puntos $x \in \Delta \setminus E_{f_1}$ se cumple la condición $F_1'(x) = f_1(x)$ y en los puntos $x \in \Delta \setminus E_{f_2}$ la condición $F_2'(x) = f_2(x)$, donde E_{f_1} y E_{f_2} son ciertos conjuntos finitos.

Hagamos $F = F_1 + F_2$. Entonces la función F es continua sobre el intervalo Δ como suma de las funciones F_1 y F_2 continuas sobre este intervalo y para cualquier punto $x \in \Delta \setminus (E_{f_1} \cup F_{f_2})$ tiene lugar la igualdad

$$F'(x) = [F_1(x) + F_2(x)]' = F_1'(x) + F_2'(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

y además, el conjunto $E_{f_1} \cup E_{f_2}$ para los puntos del cual esta igualdad no se cumple, es finito, como unión de dos conjuntos finitos E_{f_1} y E_{f_2}.

Esto significa, que F es la primitiva para la función $f_1 + f_2$ sobre Δ, por esto

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = F(x) + C = F_1(x) + F_2(x) + C.$$

De esta forma, la parte izquierda de la fórmula (22.6) está compuesta por las funciones del tipo $F_1(x) + F_2(x) + C$ la parte derecha, por las funciones del tipo $F_1(x) + C_1 + F_2(x) + C_2$. Por la arbitrariedad de las constantes C, C_1 y C_2, estos conjuntos coinciden. □

4°. *Si la función f tiene primitiva sobre el intervalo Δ y k es un número, entonces la función kf también tiene sobre Δ primitiva, además cuando $k \neq 0$ es válida la igualdad*

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx. \tag{22.8}$$

En efecto, sea $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, es decir, F es continua sobre el intervalo Δ y en todos sus puntos, excepto un conjunto finito E_f, se cumple la condición

$$F'(x) = f(x), \quad x \in \Delta \setminus E_f.$$

Entonces, la función kf también es continua sobre este intervalo y en todos los puntos $x \in \Delta \setminus E_f$ tiene lugar la igualdad $[kF(x)]' = kF'(x) = kf(x)$. Esto significa que la función kF es primitiva para kf, y por esto $\int kf(x)\,dx = kF(x) + C_1$.

De esta forma, la parte izquierda de la fórmula (22.8) es un conjunto de funciones del tipo $kF(x) + C_1$ y la derecha está compuesta por funciones del tipo $k[F(x) + C] = kF(x) + kC$. Por la arbitrariedad de las constantes C y C_1, a condición $k \neq 0$ ambos conjuntos coinciden. □

Corolario (linealidad de la integral). *Si las funciones f_1 y f_2 tienen primitivas sobre el intervalo Δ y $\lambda_1 \in R$ y $\lambda_2 \in R$ son números tales que $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$ entonces* *la función* $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ *también tiene primitiva sobre* Δ *y además*

$$\int [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x)dx.$$

Esto se deduce directamente de las propiedades 3° y 4°.

La cuestión sobre la existencia de la primitiva se estudiará algo más tarde (véase el p. 29.2) y ahora analicemos los métodos más simples del cálculo de las primitivas para las funciones elementales.

Ejercicio 1. Demuéstrese que para la función sign x no existe una función F tal que para todos los $x \in R$ se cumpla la igualdad $f'(x) = \operatorname{sign} x$.

22.2. INTEGRALES DE TABLA

La operación de hallar la integral indefinida de una función dada llamada *integración* es la operación inversa a la diferenciación, es decir, a la operación de hallar por una función dada su derivada (véanse las propiedades 1 y 2 de la integral indefinida en el p. 22.1). Por esto, cualquier fórmula que expresa la derivada de una u otra función, es decir, del tipo $F'(x) = f(x)$ puede ser invertida (escrita en forma de fórmula integral):

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Utilizando esta idea escribiremos la tabla de valores de una serie de integrales indefinidas, que se obtiene directamente de la tabla correspondiente de las derivadas de las funciones elementales (véase el § 9)

1. $\displaystyle\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha} + 1}{x + 1} + C \quad x > 0, \quad \alpha \neq -1.$

Si el número α es tal, que la potencia x^{α} tiene también sentido para todos los $x \leqslant 0$, entonces la fórmula 1 es válida sobre cualquier intervalo. Por ejemplo, la fórmula

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

es válida sobre todo el eje numérico.

No obstante, para la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2}$ ya no es posible escribir tal fórmula única, válida para todo su dominio, es decir, para todo el eje numérico, de cual se excluye el cero. En este caso tenemos:

$$\int \frac{dx}{x^2} = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} + C_1 & \text{para} \quad x > 0, \\ -\dfrac{1}{x} + C_2 & \text{para} \quad x < 0. \end{cases}$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ sobre cualquier intervalo sobre el cual $x \neq 0$.

3. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a_x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$ En particular, $\int e^x dx = e^x + C.$

4. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$

5. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

9. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

10. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

11. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C.$

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C,\ |x| < |a|.$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$, y además, cuando bajo la raiz aparece $x^2 - a^2$ se supone que $|x| > |a|$.

Claro, se sobreentiende que si el denominador de la función subintegral se anula en cierto punto, entonces las fórmulas escritas serán válidas sólo para aquellos intervalos en los cuales no se anula el denominador indicado (véanse las fórmulas 2, 6, 7, 11, 13, 15). Esta observación se refiere también a las situaciones análogas que nos encontraremos en el futuro y que no serán comentadas especialmente cada vez.

Lo que las derivadas de las funciones que aparecen en las partes derechas de estas fórmulas son las expresiones subintegrales correspondientes se comprueba directamente diferenciando (véanse los ejemplos en el § 9).

Con ayuda de las integrales 1–15 llamadas usualmente *integrales de tabla* y las propiedades de la integral indefinida demostradas anteriormente, se pueden expresar las integrales de funciones elementales más complejas también con funciones elementales.

Por ejemplo

$$\int \left(5 \cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2 + 1}\right) dx =$$

$$= 5 \int \cos x\,dx + 2 \int dx - 3 \int x^2 dx + \int \frac{dx}{x} - 4 \int \frac{dx}{x^2 + 1} =$$

$$= 5 \operatorname{sen} x + 2x - x^3 + \ln |x| - 4 \operatorname{arctg} x + C.$$

Señalemos que para cualquier polimonio de grado n existe la primitiva y es un polimonio de grado $n + 1$, más exacto,

$$\int (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)dx =$$
$$= a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} + \dots + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1} + C. \quad (22.9)$$

Esto se deduce de las propiedades 3 y 4 de la integral indefinida (vèase el p. 22.1) y de la fórmula 1 de este punto.

Si la primitiva de cierta función f es una función elemental, entonces se dice que la integral $\int f(x)dx$ se expresa con funciones elementales o que esta integral se calcula.

22.3. INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN (CAMBIO DE VARIABLE)

En este punto y en el siguiente se analizarán dos propiedades de la integral indefinida que a menudo resultan útiles en el cálculo de las primitivas de las funciones elementales.

Teorema 1. *Sean las funciones $f(x)$ y $\varphi(t)$ definidas respectivamente sobre los intervalos Δ_x y Δ_t, $\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x$, la función f tiene sobre Δ_x la primitiva $F(x)$ y, por consiguiente,*

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (22.10)$$

E_f — es un conjunto finito tal que $E_f \subset \Delta_x$ y para todos los $x \in \Delta_x \setminus E_f$ se cumple la igualdad

$$F'(x) = f(x).$$

Si la función φ es continua sobre el intervalo Δ_t, es diferenciable en todos sus puntos a excepción de cierto conjunto finito y la preimagen total $\varphi^{-1}(E_f)$ del conjunto E_f también es un conjunto finito, entonces la función $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$ tiene la primitiva $F[\varphi(t)]$ sobre el intervalo Δ_t y por esto

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + C. \quad (22.11)$$

DEMOSTRACIÓN. Las funciones $f(x)$ y $F(x)$ están definidas sobre el intervalo Δ_x y por la condición del teorema es válida la inclusión $\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x$, por lo que tienen sentido las funciones compuestas $f[\varphi(t)]$ y $F[\varphi(t)]$. Según las condiciones del teorema, la función φ es continua sobre el intervalo Δ_t y existe un conjunto finito — denotémoslo por E_φ — tal que la función φ es diferenciable en todos los puntos $t \in \Delta_t \setminus E_\varphi$. Por consiguiente, la función $F[\varphi(t)]$ es continua sobre Δ_t como la composición de funciones continuas y por la regla de diferenciación de las funciones compuestas, para todos los puntos $t \in \Delta_t \setminus [E_\varphi \cup \varphi^{-1}(E_f)]$ tiene lugar la igualdad

$$\frac{d}{dt}F[\varphi(t)] = \left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=\varphi(t)} \frac{d\varphi(t)}{dt} = f[\varphi(t)]\varphi'(t),$$

y además, el conjunto $E_\varphi \cup \varphi^{-1}(E_f)$, donde la igualdad indicada no tiene lugar, es un conjunto finito como la unión de dos conjuntos finitos E_φ y $\varphi^{-1}(E_f)$. Esto significa que la función $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ tiene en calidad de una de sus primitivas la función $F[\varphi(t)]$. De aquí se deduce inmediatamente la fórmula (22.11). □

La fórmula (22.9) a menudo se aplica en la práctica para el cálculo de integrales. Para mayor comodidad de su utilización démosle una forma algo diferente. Observando que

$$\int f(x)dx\,|_{x=\varphi(t)} = [F(x)+C]_{x=\varphi(t)} = F[\varphi(t)] + C,$$

transcribamos la fórmula (22.9) en la forma

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int f(x)dx\,|_{x=\varphi(t)}. \tag{22.12}$$

De aquí se ve que se puede inicialmente calcular la integral $\int f(x)dx$ y luego en lugar de x poner la función $\varphi(t)$. Esta fórmula usualmente se llama *fórmula de integración por sustitución*. Su parte izquierda se puede escribir de otra forma según la igualdad

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int f[\varphi(t)]d\varphi(t).$$

Señalemos además, que resulta conveniente utilizar la fórmula (22.12) en el orden inverso, es decir, de derecha a izquierda. Precisamente, a veces resulta cómodo el cálculo de la integral

$$\int f(x)\,dx$$

con ayuda del cambio de variable correspondiente $x = \varphi(t)$ reducirlo al cálculo de la integral

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$$

(si esta integral en algún sentido es "más simple" que la inicial), es decir, utilizar la fórmula (22.12) en la forma

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\,|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \tag{22.13}$$

Esta fórmula se deduce directamente de (22.12) si en ambas partes hacemos el cambio de variable $t = \varphi^{-1}(x)$, donde φ^{-1} como siempre denota la función inversa a la función φ. Para que la función φ^{-1} exista, en complemento a las condiciones del teorema 1 es suficiente, por ejemplo, exigir que sobre el intervalo analizado la función φ sea estrictamente monótona. En este caso, como es conocido (véase el p. 6.3) existirá la función inversa unívoca φ^{-1}.

La fórmula (22.13) usualmente se llama *fórmula de integración por cambio de variable*.

Ejemplos. 1. Para el cálculo de la integral $\int \cos ax\,dx$ es natural hacer la sustitución $u = ax$, entonces

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\int \cos u\,du = \frac{1}{a}\operatorname{sen} u + C = \frac{\operatorname{sen} ax}{a} + C, \quad a \neq 0.$$

2. Para el cálculo de integral $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2}$ es cómodo aplicar la sustitución $u = x^2 + a^2$:

$$\int \frac{x\,dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln(u) + C = \frac{1}{2}\ln(x^2 + a^2) + C.$$

3. Al calcular las integrales del tipo $\int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)}$, $\varphi(x) \neq 0$, es útil la sustitución $u = \varphi(x)$:

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C.$$

Por ejemplo,

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \cdot \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

4. Las integrales del tipo $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, $a \neq 0$, en el caso cuando la expresión subradical es no negativa sobre cierto intervalo *), fácilmente se reducen, con ayuda de un cambio de variable a integrales de tabla.

En efecto, observando que $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$, hagamos el cambio de variable $t = \sqrt{|a|}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ y pongamos $d = c - \frac{b^2}{4a}$. Entonces $dx = \frac{dt}{\sqrt{|a|}}$ y en virtud de la fórmula (22.11) obtendremos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\int \frac{dt}{\sqrt{\pm t^2 + d}}$$

(frente a t^2 aparece el signo "+" si $a > 0$ y el signo "−" si $a < 0$). La integral que aparece a la derecha, es de tabla (véanse las fórmulas 14 y 15 en el p. 22.2). Hallándola por las fórmulas correspondientes y regresando de la variable t a la x obtendremos la integral buscada.

Con un método semejante se calculan las integrales del tipo

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \quad a \neq 0$$

(véase esto en el p. 24.1).

---

*) En el caso contrario, es decir, cuando la expresión subradical es negativa para todos los $x \in \boldsymbol{R}$, se obtendrá la integral de una función de valores complejos. Tales integrales aquí no se analizan.

5. La integral $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$ se puede calcular con ayuda de la sustitución $x + a \operatorname{sen} t$ (véase también el ejemplo 2 en el p. 22.4). Tenemos $dx = a \cos t\,dt$ y por esto

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = a^2 \int \cos^2 t\,dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt =$$
$$= \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t\,dt = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4}\operatorname{sen} 2t + C.$$

Sustituyendo en la expresión obtenida $t = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$ y observando que

$$\operatorname{sen} 2\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} = 2\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\right)\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\right) = 2\frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{2}{a^2}x\sqrt{a^2 - x^2}$$

finalmente tendremos

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Observemos que para la comprobación del resultado obtenido en el cálculo de una integral indefinida, es suficiente diferenciarla, después de lo cual se debe obtener la expresión subintegral de la integral que se calcula.

Otros ejemplos de integración con ayuda del cambio de variable se analizarán en los § 25, 26.

22.4. INTEGRACÍON POR PARTES

Teorema 2. *Si cada una de las funciones* $u(x)$ y $v(x)$ *es continua sobre un intervalo dado, diferenciable en todos sus puntos excepto un conjunto finito de ellos y sobre este intervalo existe la integral* $\int v du$, *entonces sobre este mismo intervalo existe también la integral* $\int u dv$ *y además*

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{22.14}$$

DEMOSTRACIÓN. Sean las funciones $u(x)$ y $v(x)$ continuas sobre el intervalo Δ, la función $u(x)$ no es diferenciable sobre el conjunto finito E_u, la función $v(x)$ no es diferenciable sobre el conjunto finito E_v y $E = E_u \cup E_v$. Es evidente que E también es un conjunto finito y que para todos los puntos $x \in \Delta \setminus E$, por la regla de diferenciación del producto tendremos

$$d(uv) = v du + u dv$$

y por lo tanto

$$u dv = d(uv) - v du.$$

La integral de cada sumando de la parte derecha existe, ya que por la propiedad 1° del p. 22.1

$$\int d(uv) = uv + C$$

y la integral $\int v du$ existe por la condición del teorema. Por esto, según la propiedad 3° del p. 22.1 existe también la integral $\int u dv$ y además

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du. \tag{22.15}$$

Sustituyendo en la parte derecha de (22.15) $uv + C$ en lugar de $\int d(uv)$ y llevando la constante arbitraria C a la integral $\int v du$ obtendremos la fórmula (22.14). □

Con ayuda de la fórmula (22.14) se calculan muchas integrales. En su uso práctico está dada la parte izquierda de (22.14), es decir, la función u y la diferencial dv y por esto v se determina no unívocamente. Usualmente en calidad de v se escoge la función escrita con la fórmula más simple.

Ejemplos. 1. Supongamos que se exige calcular la integral $\int xe^x dx$. Considerando

$$u = x, \quad dv = e^x dx, \quad \text{de donde} \quad du = dx, v = e^x,$$

tenemos

$$\int xe^x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Observemos que tomando $u = e^x$ y $dv = xdx$, de donde $u = e^x$ y $v = x^2/2$ tendremos

$$\int xe^x dx = \frac{1}{2} x^2 e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx,$$

es decir, la integración por partes nos llevará a una integral más compleja que la inicial. De aquí se ve que al calcular las integrales con ayuda de la fórmula (22.14) no cada forma de elección de las funciones u y v nos lleva a una integral más simple que la inicial.

2. Calculemos la integral $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ integrando por partes (anteriormente, véase el p. 22.3, ejemplo 5, fue calculada con ayuda de un cambio de variable).

Considerando $u = \sqrt{a^2 - x^2}$, $dv = dx$ y, por consiguiente, $du = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$, $v = x$, obtendremos

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \tag{22.16}$$

Sumemos y restemos a^2 en el numerador de la función subintegral de la integral que aparece en la parte derecha de la igualdad; entonces realizando la división por $\sqrt{a^2 - x^2}$ tendremos

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

$$= a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \arcsen \frac{x}{a} - I.$$

Sustituyendo esta expresión en (2.16) obtendremos:

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} - I. \tag{22.17}$$

Como ya se señaló anteriormente, cualquier igualdad de tal tipo es una igualdad entre dos conjuntos de funciones; los elementos de cada uno de estos conjuntos se diferencian uno de otro en una constante. Por esto, la expresión general para un elemento del conjunto I, según (22.17) tiene la forma

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsen\frac{x}{a} + C.$$

3. A veces para el cálculo de una integral, es necesario aplicar la regla de integración por partes varias veces, por ejemplo,

$$\int \arcsen^2 x\,dx = x\arcsen^2 x - 2\int \arcsen x\,\frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= x\arcsen^2 x = 2\int \arcsen x\,d\sqrt{1 - x^2} =$$

$$= x\arcsen^2 x = 2\arcsen x\sqrt{1 - x^2} - 2x + C.$$

4. Si $P_n(x)$ es un polinomio de grado n, entonces para el cálculo de la integral $\int P_n(x)e^{\alpha x}dx$ es necesario aplicar la fórmula de integración por partes n veces. Efectuando esto obtendremos

$$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx = e^{\alpha x}\left(\frac{P_n(x)}{\alpha} - \frac{P_n'(x)}{\alpha^2} + \ldots + (-1)^n\,\frac{P_n^{(n)}(x)}{\alpha^{n+1}}\right) + C.$$

Otros ejemplos de la aplicación de la integración por partes serán analizados en el § 26.

§ 23. ALGUNOS CONOCIMIENTOS SOBRE NÚMEROS COMPLEJOS Y POLINOMIOS

23.1. NÚMEROS COMPLEJOS

Como es conocido del álgebra, se llaman *números complejos* las expresiones del tipo

$$z = x + iy$$

donde $i^2 = -1$ y x e y son números reales cualesquiera. El conjunto de todos los números complejos se denota por C. El número x se llama parte real e y, parte imaginaria del número complejo $z = x + iy$. Esto se escribe de la siguiente forma: $x = \operatorname{Re} x$, $y = \operatorname{Im} z$ *).

Un número complejo z que no sea real, es decir, para el cual $\operatorname{Im} z \neq 0$, lo llamaremos *número esencialmente complejo*. El número $\sqrt{x^2 + y^2}$ se llama módulo del número complejo $z = x + iy$ y se denota por $|z|$, es decir, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

A cada número complejo $z = x + iy$ le corresponde un par ordenado de núme-

*) De los vocablos latinos *realis*, real, e *imaginarius*, imaginario.

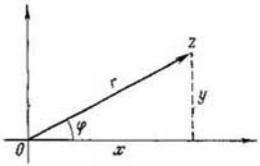


FIG. 103

ros reales (x, y) y viceversa, a cada par ordenado de números reales (x, y) le corresponde el número complejo $z = x + iy$. Por esta relación biunívoca (y también en virtud de otras circunstancias sobre las cuales se hablará posteriormente) el número complejo $z = x + iy$ es cómodo interpretarlo geométricamente o bien como el punto (x, y) o bien como el radio vector sobre el plano con coordenadas x e y (en cierto sistema rectangular de coordenadas cartesianas dado).

El plano coordenado, cuyo punto (x, y) (para $x, y \in \boldsymbol{R}$ cualesquiera) está identificado con el número $x + yi$ se llama *plano complejo*. En él el eje Ox se llama real y Oy, eje imaginario.

El ángulo φ que forma el radio vector z, $z \neq 0$, con la dirección positiva del eje Ox se llama *argumento* del número complejo z y se denota por $\operatorname{Arg} z$. Los valores φ del argumento del número complejo z tales que $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ usualmente se denotan por $\arg z$. Evidentemente, $\operatorname{Arg} z$ se define por el número complejo $z \neq 0$ salvo un múltiplo entero de 2π, mientras que $\arg z$ ya se determina por el número $z \neq 0$ unívocamente. Es evidente también que

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + k\pi,$$

donde $k = 0$ para los cuadrantes primero y cuarto, $k = 1$ para el segundo y $k =$ $= -1$ para el tercero. Si $x = 0$, entonces para $y \neq 0$ se considera que $\arg z \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} y$ y para $x = y = 0$ $\arg z$ no está definido.

Sea $|z| = r$, $\operatorname{Arg} z = \varphi$, entonces (fig. 103) $x = r\cos\varphi$, $y = r\operatorname{sen}\varphi$ y por esto

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi).$$

El segundo miembro de esta igualdad se llama *forma trigonométrica del número complejo z*.

Los números complejos $x_1 + y_1 i$ y $x_2 + y_2 i$ se consideran iguales si y sólo si $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$. Según la definición, se considera también $x + 0i = x$, $0 + yi = yi$, $0 + 0i = 0$.

La suma de dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ se define por la fórmula

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \tag{23.1}$$

Dicho de otro modo, las partes real e imaginaria de la suma $z_1 + z_2$ son iguales a las sumas de las partes reales e imaginarias correspondientes de z_1 y z_2.

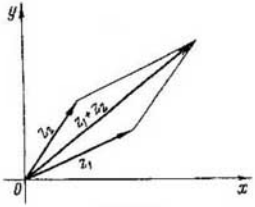


FIG. 104

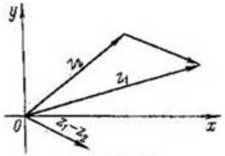


FIG. 105

La *diferencia* de números complejos se define como la operación inversa a la suma, es decir, la diferencia $z = z_1 - z_2$ es número z, tal que $z_2 + z = z_1$. Por consiguiente, si $z = x + iy$, entonces $x_2 + x + i(y_2 + y) = x_1 + iy_1$. De aquí, $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$, es decir, las partes real e imaginaria de la diferencia $z_1 - z_2$ son iguales a las diferencias de las partes reales e imaginarias de los números z_1 y z_2, respectivamente.

Por cuanto geométricamente las partes real e imaginaria de un número complejo son sus coordenadas y en la suma (resta) de las coordenadas de los vectores los propios vectores también se suman (restan), entonces la fórmula (23.1) significa que geométricamente los números complejos se suman y restan como los vectores (figs. 104 y 105).

El *producto* de dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$, y $z_2 = x_2 + iy_2$ se define por la fórmula

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \quad (23.2)$$

Hallemos las fórmulas de la multiplicación de números complejos en la forma trigonométrica. Si

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i \operatorname{sen}\varphi_2),$$

entonces

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2) &+ \\ + i(\cos\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2 + \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\varphi_2)] &= \\ = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) &+ i \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

y de esta forma

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,\ \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \ ^{*)}. \quad (23.3)$$

Por el método de inducción matemática es fácil mostrar que

$$|z_1 z_2 \dots z_n| + |z_1| \cdot |z_2| \dots |z_n|,$$
$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2 \dots z_n) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + \dots + \operatorname{Arg} z_n.$$

---

*) Esta igualdad, como en general todas las igualdades que contienen Arg, es necesario entenderla como la igualdad de los conjuntos correspondientes.

De aquí, considerando $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$, para la potencia z^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, de un número complejo z tenemos

$$|z^n| = |z|^n, \quad \operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z = 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \text{*)},$$

en particular, para $|z| = 1$, es decir, cuando $z = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$,

$$(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^n = \cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi. \tag{23.4}$$

Esta relación se llama fórmula de Moivre **).

La división $\frac{z_1}{z_2}$ de un número complejo z_1 por un número complejo $z_2 \neq 0$ se define como la operación inversa a la multiplicación, es decir, el número $z = \frac{z_1}{z_2}$ se llama *cociente de la división* de z_1 por z_2 si $z_1 = z_2 z$. Por esto

$$|z_1| = |z_2|\,|z| \quad \text{y} \quad \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + \operatorname{Arg} z,$$

de donde

$$|z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} + \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2. \tag{23.5}$$

Con las fórmulas (23.5) el número complejo $z = \frac{z_1}{z_2}$ para los z_1 y $z_2 \neq 0$ dados evidentemente está definido unívocamente. Una serie de propiedades de los números complejos como, por ejemplo, la conmutatividad y asociatividad de la adición y la multiplicación, la distributividad de la multiplicación con respecto a la adición y otras propiedades se deducen directamente de las fórmulas, con ayuda de las cuales están definidas estas operaciones para los números complejos y de las propiedades correspondientes de los números reales. Por esto no nos detendremos detalladamente en ellas.

La raíz de n-ésimo orden $w = \sqrt[n]{z}$ del número complejo z se define como el número w, cuya n-ésima potencia es igual a la expresión subradical:

$$w^n = z.$$

Si

$$z = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) \quad \text{y} \quad w = \rho(\cos\psi + i \operatorname{sen}\psi)$$

entonces

$$\rho^n(\cos n\psi + i \operatorname{sen} n\psi) = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi);$$

de donde

$$\rho = \sqrt[n]{r}.$$

Aquí la raíz se entiende en el sentido aritmético como un número real no negativo, ya que según la definición, del módulo de un número complejo $\rho \geqslant 0$.

A continuación

$$n\psi = \varphi + 2k\pi \quad (k \text{ es entero}), \quad \text{ó} \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

---

*) Observemos que $\operatorname{Arg} z^n \neq n \operatorname{Arg} z$, $n = 2, 3, \ldots$

**) A. Moivre (1667—1754), matemático francés.

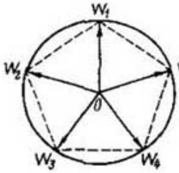


FIG. 106

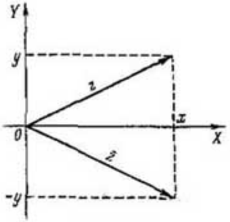


FIG. 107

En esencia se obtienen diferentes valores del argumento para los valores $k = 0, 1, \dots, n-1$: diferentes en el sentido de que si denotamos estos valores del argumento por ψ_k y hacemos $w_k = \rho(\cos\psi_k + i \operatorname{sen}\psi_k)$, entonces cuando $\rho \neq 0$ se obtendrán diferentes números complejos. Para todos los k restantes los valores de ψ se diferenciarán de los números ψ_k indicados, en un múltiplo de 2π, es decir, estos valores del argumento nos llevarán a uno de los números complejos w_k, $k = 0, 1, \dots, n-1$. De esta forma, la raíz $\sqrt[n]{z}$ tiene para $z \neq 0$ exactamente n valores $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$.

En el plano complejo, los números w_k, $k = 0, 1, \dots, n-1$, se encuentran en los vértices del polígono regular de n lados inscrito en el círculo de radio ρ con centro en el origen de coordenadas. Esto se deduce de que el argumento del número w_k se diferencia del argumento del número w_{k-1} para todos los $k = 1, 2, \dots, n-1$ en un mismo número $2\pi/n$. En la fig. 106 está representado el caso de $n = 5$.

A cada número complejo $z = x + iy$ le corresponde el número $x - iy$ que se llama *conjugado* a z y se denota por $\bar{z}$; $\bar{z} = x - iy$. Geométricamente el número $\bar{z}$ se representa con el vector simétrico a z con respecto al eje Ox (fig. 107).

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS CONJUGADOS

1° $|\bar{z}| = |z|$, $\arg\bar{z} = -\arg z$.

2°. $z\bar{z} = |z|^2$.

3°. $\bar{\bar{z}} = z$.

4°. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

5°. $\overline{z_1 - z_2} + \bar{z}_1 - \bar{z}_2$.

6°. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

7°. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$.

La propiedad 1 es evidente (véase la fig. 107).

A continuación, por la regla de la multiplicación de números complejos

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2. \square$$

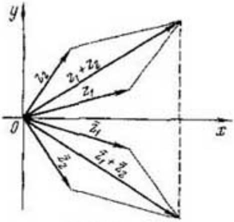


FIG. 108

La propiedad 3 también es evidente: si $z = x + iy$, entonces $\bar z = x - iy$ y $\bar{\bar z} = \overline{x - iy} = x + iy = z$. □

De la validez de la propiedad 4 es posible convencerse geométricamente tomando un paralelogramo simétrico, con respecto al eje Ox, al paralelogramo construido con los vectores z_1 y z_2 como lados (fig. 108), es decir, el paralelogramo extendido sobre los vectores $\bar z_1$ y $\bar z_2$. Las diagonales de estos paralelogramos también serán simétricas una a otra con respecto al eje Ox y por consiguiente serán iguales a $z_1 + z_2$ y $\overline{z_1 + z_2}$, respectivamente. Por otro lado, la última diagonal, como la suma de los vectores $\bar z_1$ y $\bar z_2$ es igual también a $\bar z_1 + \bar z_2$. □

La propiedad 5° se demuestra análogamente.

Las propiedades 6° y 7° se deducen de que los módulos y los argumentos de las expresiones que aparecen en las diferentes partes de las igualdades correspondientes coinciden. En efecto, utilizando la propiedad 1 obtendremos

$$|\overline{z_1 z_2}| = |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = |\bar z_1| \cdot |\bar z_2| = |\bar z_1 \cdot \bar z|,$$

$$\operatorname{Arg} \overline{z_1 z_2} = -\operatorname{Arg} z_1 z_2 = -(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) =$$
$$= -\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg} \bar z_1 + \operatorname{Arg} \bar z_2 + \operatorname{Arg} \bar z_1 \bar z_2. \ \square$$

De forma análoga se demuestra la propiedad 7°.

Para números complejos z_1 y z_2 cualesquiera es válida la *desigualdad triangular*

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \text{ y su consecuencia } ||z_1| - |z|| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

La primera de estas desigualdades geométricamente significa que la longitud de un lado de un triángulo no sobrepasa la suma de las longitudes de sus otros dos lados (véase la fig. 104) y la segunda, que la diferencia de las longitudes de dos lados de un triángulo no sobrepasa la longitud del tercer lado (véase la fig. 105).

23.2. *) TEORÍA FORMAL DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

El lector reflexivo prestó atención a que el enunciado dado en p. 23.1 "la expresión del tipo $z = x + iy$ se llama número complejo" no es una definición exacta de los números complejos.

El conjunto de los números complejos C se puede definir como el conjunto de los pares ordenados (x, y) de números reales, $x \in R$, $y \in R$, en el cual están introducidas las operaciones de suma y multiplicación por la siguiente definición:

$$(x, y) + (x', y') \overset{\text{def}}{=} (x + x', y + y'),$$

$$(x, y)(x', y') \overset{\text{def}}{=} (xx' - yy', xy' + x'y),$$

$$(x, y) \in C, \quad (x', y') \in C.$$

No es difícil comprobar que como resultado de esta definición, el conjunto de los pares indicados se convierte en un campo, es decir, satisface las condiciones I, II, III del p. 2.1. El campo obtenido de esta forma y también cada campo isomorfo a él se llama *campo de los números complejos*.

Los pares $(x, 0)$ se denotan simplemente por x (su conjunto es isomorfo al campo de los números reales) y el par $(0, 1)$ se denota por i: $i \overset{\text{def}}{=} (0, 1)$.

Por la operación definida de multiplicación

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1, \quad \text{es decir,} \quad i^2 = -1.$$

Para cualquier número complejo (x, y) tiene lugar la identidad fácilmente comprobable

$$(x, y) = x + iy.$$

En efecto

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy,$$

y de nuevo llegamos a la escritura de los números complejos de la cual partimos en el p. 23.1.

23.3. ALGUNOS CONCEPTOS DEL ANÁLISIS EN LA REGIÓN DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Los conceptos de sucesión numérica y su límite se generalizan fácilmente al caso de los números complejos.

Una función definida sobre un conjunto de números naturales cuyos valores son números complejos se llama *sucesión de números complejos*. Como en el caso de los números reales al número complejo z correspondiente al número natural n se le adjunta el índice n: z_n, $n = 1, 2, \dots$.

Definición 1. *Sea dada una sucesión de números complejos $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \dots$. El número $\zeta = \xi + i\eta$ se llama su límite si para cualquier número real $\varepsilon > 0$ existe un número n_ε tal que para $n \geqslant n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad*

$$|z_n - \zeta| < \varepsilon.$$

En este caso se escribe $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \zeta$ y se dice que la sucesión $\{z_n\}$ converge al número ζ.

Así pues, por su forma, esta definición es exactamente la misma que la del límite de una sucesión de números reales.

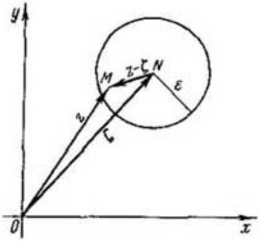


FIG. 109

Geométricamente, si denotamos por M_n el extremo del radio vector z_n, es decir, el punto con coordenadas (x_n, y_n) y por N el punto con coordenadas (ξ, η), entonces la igualdad $\lim_{n \to \infty} z_n = \zeta$ tendrá lugar si y sólo si $\lim_{n \to \infty} M_n = N$ en el sentido del p. 18.1. Esto se deduce directamente de que el conjunto de los extremos $M = (x, y)$ de los vectores $z = x + iy$ tales que $|z - \zeta| < \varepsilon$ forman un ε-entorno del punto $N = (\xi, \eta)$ (fig. 109).

De lo dicho se deduce (véase el p. 18.1) que la sucesión $z_n = x_n + iy_n$ converge al número $\zeta = \xi + i\eta$ si y sólo si

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \xi, \quad \lim_{n \to \infty} y_n = \eta.$$

La sucesión de números complejos que tiene el cero como su límite se llama *infinitesimal.*

A las sucesiones de números complejos, de forma natural, se extiende una serie de teoremas sobre los límites de las sucesiones de números reales, por ejemplo, el teorema sobre la unicidad del límite, sobre la acotación de una sucesión que tenga límite, el criterio de Cauchy, etc.

En el § 8 fueron introducidas las notaciones "o" y "O" para la comparación de funciones. En el futuro, se necesitarán esas mismas notaciones para las sucesiones.

Definición 2. *Diremos que la sucesión* $\{z_n\}$ *está acotada con respecto a la sucesión* $\{w_n\}$ *y escribiremos* $z_n = O(w_n)$ *) *si existe una constante* $c > 0$ *tal que* $|z_n| \leqslant c|w_n|$, $n = 1, 2, \ldots$.

Esta definición en el caso de $w_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, es equivalente a la siguiente: para las dos sucesiones dadas $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ existen una constante $c' > 0$ y un número n_0 tales que

$$|z_n| \leqslant c' |w_n|, \quad n = n_0, n_0 + 1, \ldots .$$

---

*) A veces a esto se agrega: cuando $n \to \infty$.

En efecto, suponiendo en este caso

$$c = \text{máx}\left\{ \left| \frac{z_1}{w_1} \right|, \left| \frac{z_2}{w_2} \right|, \ldots, \left| \frac{z_{n_0-1}}{w_{n_0-1}} \right| c' \right\}$$

obtendremos

$$|z_n| \leqslant c|w_n|, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

es decir, la definición inicial.

Definición 3. *Si* $z_n = O(w_n)$ *y* $w_n = O(z_n)$, *entonces diremos que las sucesiones* $\{z_n\}$ *y* $\{w_n\}$ *son de un mismo orden y escribiremos* $z_n \asymp w_n$.

Definición 4. *Diremos que la sucesión* $\{z_n\}$ *es infinitesimal con respecto a la sucesión* $\{w_n\}$ *y escribiremos* $z_n = o(w_n)$ *si existe una sucesión infinitesimal* $\{\alpha_n\}$ *tal que* $z_n = \alpha_n w_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Definición 5. *Las sucesiones* $\{z_n\}$ *y* $\{w_n\}$ *se llaman equivalentes o iguales asintóticamente si existe una sucesión* $\{\varepsilon_n\}$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 1 \quad \text{y} \quad z_n = \varepsilon_n w_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

En este caso se escribe $z_n \sim w_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Ejercicios. 1. Demuéstrese que para que $z_n \sim w_n$ es necesario y suficiente que $z_n = w_n + o(w_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

2. Demuéstrese: si $z_n = cw_n + o(w_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces $z_n = O(w_n)$.

También se pueden analizar las funciones de argumento complejo. Por ejemplo, $f(z) = |z|$, $f(z) = z^2$. Ambas funciones están definidas sobre el conjunto de todos los números complejos, la primera de ellas toma sólo valores reales no negativos, la segunda toma también valores esencialmente complejos.

Geométricamente, si la función $f(z)$ está definida sobre cierto conjunto X del espacio euclídeo n-dimensional R^n y toma valores complejos, entonces define una aplicación del conjunto X en el plano. Por ejemplo, la función del conjunto $w = |z|$ aplica el plano en una semirrecta y la función $w = z^2$ todo el plano en todo el plano, como se dice, de una forma doble, en el caso dado, esto significa que en la aplicación $w = z^2$ cada punto de la imagen menos el cero tiene una preimagen compuesta por dos puntos.

Si el conjunto X sobre el cual se da cierta función está en el plano R^2, entonces se puede analizar siempre para un sistema de coordenadas fijo como un conjunto de números complejos y la función dada como una función de argumento complejo.

Para las funciones de valores complejos definidas sobre un conjunto X del espacio n-dimensional R^n se pueden introducir muchos de los conceptos introducidos anteriormente para las funciones de valores reales (límite, continuidad, derivadas parciales, diferenciabilidad, integral y otros). En los párrafos próximos nos veremos obligados a encontrarnos sólo con el concepto de acotación y continuidad de funciones de valores complejos.

La función de valores complejos $f(P)$, $P \in X$ se llama *acotada sobre el conjunto* X si sobre este conjunto está acotada la función $|f(P)|$.

De esta forma, el concepto de que la función f de valores complejos es acotada se reduce al concepto de que la función $|f|$ de valores reales es acotada.

Definición 6. *Sea f una función de valores complejos definida sobre el conjunto $X \subset R^n$ y sea $P_0 \in X$. La función f se llama continua en el punto P_0 si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta_{(\varepsilon)} > 0$ tal que para todos los puntos $P \in X$ que satisfacen la condición $\rho(P, P_0) < \delta$, se cumple la desigualdad*

$$|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon.$$

Vemos que por su forma esta definición coincide completamente con la definición de continuidad para las funciones de valores reales (compárese con el p. 19.3).

En el caso cuando X es un conjunto plano y por lo tanto sus puntos se pueden analizar como números complejos z, la definición de continuidad toma la forma: la función $f(z)$ es continua en el punto $z_0 \in X$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todos los $z \in X$ que satisfacen la condición $|z - z_0| < \delta$, se cumple la desigualdad

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Una función de valores complejos continua en cada punto de cierto conjunto se llama continua sobre este conjunto. Por la definición de continuidad de una función y la desigualdad

$$||f(P)| - |f(P_0)|| \leqslant |f(P) - f(P_0)|,$$

es evidente que si la función $f(P)$ definida sobre el conjunto $X \subset R^n$, es continua en algún punto P_0 de este conjunto: $P_0 \in X$, entonces la función de valores reales $|f(P)|$ es continua sobre este conjunto. Por esto, si la función de valores complejos f es continua sobre el compacto $X \subset R^n$, entonces, por lo dicho, la función $|f|$ también es continua y por consiguiente acotada sobre este compacto. Esto, según la definición dada anteriormente de la acotación de función significa que la propia función f está acotada. De esta forma, para las funciones continuas de valores complejos es válido el análogo de la primera afirmación del teorema de Weierstrass (véase el teorema 3 en el p. 19.4): una función continua sobre un compacto está acotada sobre él.

A las funciones de valores complejos también se trasladan los teoremas de que si dos funciones f y g definidas sobre cierto conjunto $X \subset R^n$ son continuas en el punto $P_0 \in X$, entonces las funciones $f + g$, fg y si $g(P_0) \neq 0$, entonces también f/g son continuas en este punto. De este teorema se deduce, por ejemplo, que cualquier polinomio $P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ con coeficientes complejos a_k, $k = 0, 1, \dots$ $\dots, n$, es continuo en cualquier punto $z_0 \in C$ (compárese con el p. 7.1).

23.4. DESCOMPOSICIÓN DE POLINOMIOS EN FACTORES

Sea

$$P_n(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \dots + A_1 z + A_0 \tag{23.6}$$

un polinomio con coeficientes complejos, en general, A_j, $j = 0, 1, \dots, n$. Si $A_n \neq 0$, entonces el número n se llama *grado del polinomio*.

Del álgebra es conocido que si el grado m del polinomio $Q_m(x)$ no sobrepasa el grado n del polinomio $P_n(x)$, entonces existen los polinomios $S_k(x)$ de grado k y $R_l(x)$ de grado l, tales que $n = m + k$, $0 \leqslant l < m$, y el polinomio $P_n(x)$ es representable en la forma

$$P_n(x) = S_k(x)Q_m(x) = R_l(x).$$

Además, tal representación es única.

La operación de hallar los polinomios $S_k(x)$ y $R_l(x)$ según los polinomios dados $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ se llama *división del polinomio* $P_n(x)$ entre $Q_m(x)$; el polinomio $P_n(x)$, *dividendo*; $Q_m(x)$, *divisor*; $S_k(x)$, *cociente* y $R_l(x)$, *residuo* de la división de $P_n(x)$ entre $Q_m(x)$.

Señalemos que de $m = 1$ se deduce que $l = 0$, es decir, en este caso el residuo de la división es una constante.

El número complejo z_0 tal que

$$P_n(z_0) = 0,$$

se llama *raíz* del polinomio dado (23.6).

Si el polinomio $P_n(z)$ de grado $n \geqslant 1$ se divide por $z - \zeta$, donde ζ es un número complejo cualquiera, entonces obtendremos

$$P_n(z) = (z - \zeta)Q_{n-1}(z) + r,$$

donde $Q_{n-1}(z)$ es un polinomio de grado $n - 1$, y el resto r es una constante. De aquí se deduce directamente que el número z_0 es una raíz del polinomio $P_n(z)$ si y sólo si el polinomio $P_n(z)$ es divisible sin resto por $z - z_0$ (teorema de Bézout *)).

Si el polinomio $P_n(z)$ es divisible por $(z - z_0)^k$ (k es un entero positivo) y no es divisible por $(z - z_0)^{k+1}$, entonces el número k se llama *multiplicidad de la raíz* z_0.

De esta forma, si el número complejo z_0 es una raíz de multiplicidad k del polinomio $P_n(z)$, entonces

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z)$$

donde $Q_{n-k}(z)$ es un polinomio de grado $n - k$, tal que $Q_{n-k}(z_0) \neq 0$.

El el curso de álgebra se demuestra que *cualquier polinomio* $P_n(z)$ *de grado* $n \geqslant 1$ *tiene al menos una raíz* z_1. Si su multiplicidad es igual a k_1, entonces, como se ha señalado, es válida la descomposición

$$P_n(z) = (z - z_1)^{k_1} Q_{n-k_1}(z), \quad Q_{n-k_1}(z_1) \neq 0,$$

donde el grado del polinomio $Q_{n-k_1}(z)$ es menor que n. El polinomio $Q_{n-k_1}(z)$, si su grado es mayor que 1, tiene también al menos una raíz z_2. Si la multiplicadad de esta raíz es igual a k_2, entonces

$$P_n(z) = (z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} Q_{n-k_1-k_2}(z),$$
$$Q_{n-k_1-k_2}(z_1) \neq 0, \quad Q_{n-k_1-k_2}(z_2) \neq 0.$$

*) E. Bézout (1730—1783), matemático francés.

Condinuando este proceso, después de un número finito m de pasos obtendremos un polinomio de grado cero $P_{n-k_1-\dots-k_m(z)} = A_n$, y por lo tanto, para el polinomio $P_n(z)$ es válida la siguiente descomposición en factores

$$P_n(z) = A_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2}\dots(z - z_m)^{k_m}, \tag{23.7}$$

donde $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, de donde se deduce que *cada polinomio de grado* $n \geqslant 1$ *tiene exactamente* n *raíces, si cada raíz se cuenta tantas veces como sea su multiplicidad.*

Para el polinomio (23.6) designemos por $\bar{P}_n(z)$ al polinomio cuyos coeficientes son los números complejos conjugados de los coeficientes del polinomio $P_n(z)$:

$$\bar{P}_n(z) = \bar{A}_n z^n + \bar{A}_{n-1}z^{n-1} + \dots + \bar{A}_1 z + \bar{A}_0.$$

El polinomio $\bar{P}_n(z)$ se llama polinomio *conjugado* del polinomio $P_n(z)$.

En virtud de las propiedades de los números complejos tenemos

$$\overline{P_n(z)} = \bar{P}_n(\bar{z})$$

En realidad,

$$\overline{P_n(z)} = \overline{A_n z^n + A_{n-1}z^{n-1} + \dots + A_n z + A_0} =$$
$$= \bar{A}_n\bar{z}^n + \bar{A}_{n-1}\bar{z}^{n-1} + \dots + \bar{A}_n\bar{z} + \bar{A}_0 = \bar{P}_n(\bar{z})$$

Es evidente también que $\bar{\bar{P}}(z) = P(z)$.

Mostremos que si el número z_0 es una raíz del polinomio $P_n(z)$ de multiplicidad k, entonces el número conjugado de él $\bar{z}_0$ es una raíz del polinomio conjugado $\bar{P}_n(z)$ y además de la misma multiplicidad.

En efecto, pasando en las fórmulas

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z), \quad Q_{n-k}(z_0) \neq 0,$$

a las expresiones conjugadas, obtendremos

$$\bar{P}_n(\bar{z}) = (\bar{z} - \bar{z}_0)^k \bar{Q}_{n-k}(\bar{z}), \quad \bar{Q}_{n-k}(\bar{z}_0) \neq 0.$$

Suponiendo para mayor claridad $\zeta = \bar{z}$ ($\bar{z}$ y también z son números complejos arbitrarios) transcribamos las fórmulas obtenidas en la forma

$$\bar{P}_n(\zeta) = (\zeta - \bar{z}_0)^k \bar{Q}_{n-k}(\zeta), \quad \bar{Q}_{n-k}(\bar{z}_0) \neq 0.$$

Esto significa que el número $\bar{z}_0$ es una raíz de multiplicidad k para el polinomio $\bar{P}_n(z)$.

Sean ahora todos los coeficientes del polinomio $P_n(z)$, números reales. En este caso el polinomio conjugado $\bar{P}_n(z)$, evidentemente coincide con el propio polinomio $P_n(z)$. Por esto, de lo demostrado se deduce que si el número complejo z_0 es una raíz de multiplicidad k del polinomio $P_n(z)$ con coeficientes reales, entonces también el número conjugado de él $\bar{z}_0$ es una raíz de multiplicidad k de este polinomio.

Señalemos a continuación que el producto $(z - z_0)(z - \bar{z}_0)$ es siempre un polinomio (respecto a z) con coeficientes reales. En efecto, sea $z_0 = a + bi$, donde a y b son reales. Entonces $\bar{z}_0 = a - bi$, y por esto

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = (z - a - bi)(z - a + bi) =$$
$$= (z - a)^2 + b^2 = z^2 - 2az + a_2 + b^2 = z^2 + pz + q, \qquad (23.8)$$

donde se ha hecho $p = -2a$ y $q = a^2 + b^2$, evidentemente p y q son reales. Señalemos que $\frac{p^2}{4} - q = -b^2$, por esto, cuando $b \neq 0$, es decir, cuando la raíz z_0 es un número esencialmente complejo se cumple la desigualdad

$$\frac{p^2}{4} - q < 0. \qquad (23.9)$$

Prestemos atención también a la validez de la afirmación inversa: si se cumple la desigualdad (23.9), entonces las raíces del trinomio $z^2 + pz + q$ (p y q son reales) son números esencialmente complejos.

De lo dicho se deduce que para cualquier polinomio de grado n con coeficientes reales es válida la descomposición en factores del tipo

$$P_n(x) = A_n(x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_r)^{\alpha_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \dots$$
$$\dots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}, \quad (23.10)$$

donde

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i + 2\sum_{i=1}^{s} \beta_i = n, \quad \frac{p_j^2}{4} - q_j < 0, \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

y todos los coeficientes $A_n, a_1 \dots, a_r; p_1, q_1, \dots, p_s, q_s$, son reales. En este caso $a_1, \dots, a_r$ son todas las raíces reales del polinomio $P_n(x)$, y a cada raíz esencialmente compleja z_0 y a su raíz conjugada $\bar{z}_0$ le corresponde un factor del tipo $x^2 + px + q = (x - z_0)(x - \bar{z}_0)$. En lugar de la letra z, que ha sido utilizada con anterioridad para designar el argumento del polinomio analizado, aquí se ha empleado la letra x, como es tradicional, para subrayar que el análisis se realiza en la región real.

La fórmula (23.10) se deduce directamente de las fórmulas (23.7) y (23.8): es necesario agrupar, en la descomposición (23.7), por parejas los factores con raíces conjugadas y escribir los productos del tipo $(z - z_0)(z - \bar{z}_0)$ en la forma (23.8).

Entonces, notando que la multiplicidad de las raíces conjugadas z_0 y $\bar{z}_0$ son iguales, obtendremos la fórmula (23.10).

La descomposición de un polinomio en factores del tipo (23.10) es única, ya que se determina unívocamente por las raíces de este polinomio y por sus multiplicidades.

23.5.* MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE POLINOMIOS

Sea dado un polinomio $P(x)$. Cualquier polinomio $R(x)$, por el cual se divide el polinomio $P(x)$, es decir,

$$P(x) = R(x)r(x), \qquad (12.11)$$

donde $r(x)$ también es un polinomio, se llama *divisor* del polinomio $P(x)$.

Hemos visto que el polinomio $P(x)$ se puede escribir en la forma

$$P(x) = A(x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_r)^{\alpha_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \dots$$
$$\dots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}, \quad (23.12)$$

donde $a_1, \dots, a_r$ son las raíces reales del polinomio, y los factores del tipo $x^2 + p_jx + q_j$ corresponden a las raíces esencialmente complejas de este polinomio,

$$\frac{p_j^2}{4} - q_j < 0, \quad j = 1, 2, \dots, s;$$

los coeficientes A, p_j y q_j ($j = 1, 2, \dots, s$) son reales. De aquí se deduce que cualquier divisor $R(x)$ del polinomio $P(x)$ puede ser escrito en la forma

$$R(x) = B(x - a_1)^{\lambda_1} \dots (x - a_r)^{\lambda_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1} \dots$$
$$\dots (x^2 + p_sx + q_s)^{\mu_s}, \quad (23.13)$$

donde $\lambda_i \leqslant \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, r$, $\mu_j \leqslant \beta_j$,

$$j = 1, 2, \dots, s. \quad (23.14)$$

En realidad, ningún otro factor que no sea del tipo

$$x - a \quad \text{y} \quad x^2 + px + q, \quad (23.15)$$

donde a, p y q son reales y $\frac{p^2}{4} - q < 0$, puede aparecer en la descomposición del polinomio $R(x)$, ya que por un lado, el polinomio $R(x)$, como cualquier polinomio puede ser descompuesto en factores del tipo (23.15), por otro lado, de la fórmula (23.11) se deduce que si en la descomposición de $R(x)$ en factores se tiene el factor del tipo $x - a$, respectivamente del tipo $x^2 + px + q$, entonces $x = a$, respectivamente las raíces del trinomio $x^2 + px + q$, son precisamente raíces del polinomio $P(x)$; por esto, los factores indicados aparecen en la descomposición (23.12). Las desigualdades (23.14) también son evidentes: de la misma fórmula (23.11) se deduce que la multiplicidad de una raíz del polinomio $R(x)$ no puede sobrepasar la multiplicidad de esa misma raíz del polinomio $P(x)$.

Sean ahora dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$. Cualquier polinomio que sea divisor tanto del polinomio $P(x)$ como del polinomio $Q(x)$ se llama su *divisor común*. El divisor común de dos polinomios que se divide por cualquier divisor común de estos polinomios, se llama su *máximo común divisor*.

Si los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ están escritos en el forma (23.12):

$$P(x) = A'(x - a_1')^{\alpha_1'} \dots (x - a'_{r'})^{\alpha'_{r'}}(x^2 + p_1' + q_1')^{\beta_1'} \dots$$
$$\dots (x^2 + p_{s'}'x + q'_{s'})^{\beta'_{s'}}, \quad (23.16)$$

$$Q(x) = A''(x - a_1'')^{\alpha_1''} \dots (x - a''_{r''})^{\alpha''_{r''}}(x^2 + p_1''x + q_1'')^{\beta_1''} \dots$$
$$\dots (x^2 + p''_{s''}x + q''_{s''})^{\beta''_{s''}}, \quad (23.17)$$

entonces cualquiera de sus divisores comunes $R(x)$ se puede escribir de la forma (23.13), donde los factores

$$x - a_k \quad (k = 1, 2, \dots, r), \quad x^2 + p_l x + q_l \quad (l = 1, 2, \dots, s) \tag{23.18}$$

aparecen tanto en la descomposición (23.16) como en la descomposición (23.17).

Supongamos que los índices de los coeficientes de los factores de (23.18) en las descomposiciones (23.16) y (23.17) son iguales a i_k', j_l' e i_k'', j_l'', respectivamente, entonces por las desigualdades (23.14) tenemos

$$\begin{aligned} &\lambda_k \leqslant \alpha'_{i_k'}, \quad \lambda_k \leqslant \alpha''_{i_k''}, \quad k = 1, 2, \dots, r, \\ &\mu_l \leqslant \beta'_{j_l'}, \quad \mu_l \leqslant \beta''_{j_l''}, \quad l = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \tag{23.19}$$

Para que el polinomio (23.13) sea el máximo común divisor de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es necesario y suficiente que los exponentes de las potencias λ_k, $k = 1, 2, \dots, r$ y μ_l, $l = 1, 2, \dots, s$ sean los máximos entre los posibles, es decir, que

$$\begin{aligned} &\lambda_k = \min\{\alpha'_{i_k'}, \ \alpha''_{i_k''}\}, \quad k = 1, 2, \dots, r, \\ &\mu_l = \min\{\beta'_{i_l'}, \ \beta''_{i_l''}\}, \quad l = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \tag{23.20}$$

En efecto, cuando se cumplen estas condiciones el polinomio $R(x)$ será un divisor común de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ y además se dividirá por cualquier polinomio del tipo (23.13) para el cual se cumplen las condiciones (23.19), es decir, $R(x)$ se dividirá por cualquier divisor común de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$. □

Del tipo hallado de un común divisor, en particular del máximo común divisor, se deduce en primer lugar, que al máximo común divisor de dos polinomios no es único, no obstante dos máximos comunes divisores de dos polinomios dados pueden diferenciarse uno de otro sólo en un factor constante (la constante B en la fórmula (23.13), se puede tomar arbitraria, no igual a cero); en segundo lugar, que el máximo común divisor de dos polinomios tiene un grado mayor que cualquiera de sus divisores comunes que no sea máximo común divisor.

En calidad de ejemplo útil para el futuro hallemos el máximo común divisor de un polinomio $P(x)$ y su derivada $P'(x)$.

Observemos previamente que si el número a es una raíz real de multiplicidad α del polinomio $P(x)$, es decir,

$$P(x) = (x - a)^\alpha P_1(x), \quad P_1(a) \neq 0, \tag{23.21}$$

entonces a es una raíz de multiplicidad $\alpha - 1$ del polinomio $P'(z)$.

En efecto, diferenciando (23.21) tenemos

$$P'(x) = \alpha(x - a)^{\alpha - 1} P_1(x) + (x - a)^\alpha P_1'(x) = (x - a)^{\alpha - 1} P_2(x),$$

donde

$$P_2(x) = \alpha P_1(x) + (x - a) P_1'(x)$$

y

$$P_2(a) = \alpha P_1(a) \neq 0.$$

De forma semejante, si

$$P(x) = (x^2 + px + q)^\beta P_3(x), \tag{23.22}$$

donde $\frac{p^2}{4} - q < 0$ y por lo tanto las raíces z_1 y z_2 ($z_2 = \bar{z}_1$) del trinomio $x^2 + px + q$ son esencialmente complejas, y si

$$P_3(z_1) \neq 0, \quad P_3(z_2) \neq 0, \quad \text{entonces } P'(x) = (x^2 + px + q)^{\beta - 1} P_4(x)$$

donde $P_4(z_1) \neq 0$, $P_4(z_2) \neq 0$, es decir, $P_4(z)$ no se divide por $x^2 + px + q$.

En efecto, diferenciando (23.22) obtendremos:

$$P'(x) = \beta(x^2 + px + q)^{\beta - 1}(2x + p)P_3(x) + \\ + (x^2 + px + q)^{\beta} P_3'(x) = (x^2 + px + q)^{\beta - 1} P_4(x),$$

donde $P_4(x) = \beta(2x + p)P_3(x) + (x^2 + px + q)P_3'(x)$ de donde se deduce que

$$P_4(z_1) = \beta(2z_1 + p)P_3(z_1) \neq 0, \quad P_4(z_2) = \beta(2z_2 + p)P_3(z_2) \neq 0,$$

ya que $z_1 \neq -p/2$ y $z_2 \neq -p/2$ al ser esencialmente complejas. □

De lo demostrado se deduce que si el polinomio $P(x)$ está escrito en la forma (23.12), entonces su derivada $P'(x)$ se puede representar en la forma

$$P'(x) = C(x - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (x - a_r)^{\alpha_r - 1}(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1 - 1} \dots \\ \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s - 1} P_5(x),$$

donde el polinomio $P_5(x)$ no se divide ni por $x - a_i$, $i = 1, 2, \dots, r$, ni por $x^2 + p_j x + q_j$, $j = 1, 2, \dots, s$, es decir, no tiene raíces comunes con el polinomio $P(x)$.

De las fórmulas (23.13) y (23.20) obtenemos que el máximo común divisor $R(x)$ del polonomio $P(x)$ y su derivada $P'(x)$ tiene la forma

$$R(x) = (x - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (x - a_r)^{\alpha_r - 1}(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1 - 1} \dots \\ \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s - 1}. \quad (23.23)$$

El método desarrollado anteriormente de la obtención del máximo común divisor de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, en principio resuelve completamente la cuestión sobre la existencia y el aspecto del máximo común divisor. No obstante, prácticamente su aplicación puede provocar dificultades sustanciales: para la utilización de este método es necesario conocer las descomposiciones en factores del tipo (23.16) y (23.17) de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ dados, las cuales no siempre se logran escribir de forma explícita.

No obstante, existe otro método de obtención del máximo común divisor de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ llamado comúnmente *algoritmo de Euclides* *). Describámoslo.

Sea para mayor exactitud el grado del polinomio $P(x)$ mayor o igual al grado del polinomio $Q(x)$. Dividiendo $P(x)$ por $Q(x)$, obtendremos en calidad de cociente cierto polinomio $Q_1(x)$ y de residuo $R_1(x)$, cuyo grado evidentemente es menor que el grado del polinomio $Q(x)$ (en el caso contrario hubiera sido posible continuar el proceso de dividir por $Q(x)$):

$$P(x) = Q(x)Q_1(x) + R_1(x).$$

*) Euclides (apr. 365 — apr. 300 a. n. e.), matemático de la Antigua Grecia.

De esta fórmula se deduce: 1) si los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ se dividen por cierto polinomio $r(x)$, entonces el polinomio $R_1(x)$ también se divide por este polinomio: 2) si los polinomios $Q(x)$ y $R_1(x)$ se dividen por cierto polinomio $r(x)$, entonces el polinomio $P(x)$ también se divide entre este polinomio $r(x)$. De aquí a su vez se deduce que los divisores comunes de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, en particular sus máximos comunes divisores coinciden con los divisores comunes, respectivamente con los máximos comunes divisores, de los polinomios $Q(x)$ y $R_1(x)$.

Dividamos a continuación el polinomio $Q(x)$ por el polinomio $R_1(x)$:

$$Q(x) = R_1(x)Q_2(x) + R_2(x),$$

continuando el proceso más adelante, tendremos

$$R_1(x) = R_2(x)Q_3(x) + R_3(x),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$R_{k-2}(x) = R_{k-1}(x)Q_k(x) + R_k(x).$$

Los grados de los polinomios $R_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$, decrecen, por esto existe un número (lo denotaremos por $m + 1$) tal que $R_{m+1}(x) = 0$ y por consiguiente

$$R_{m-1}(x) = R_m(x)Q_{m+1}(x).$$

Los pares de polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, $Q(x)$ y $R_1(x)$, $R_1(x)$ y $R_2(x)$ ... ... $R_{m-1}(x)$ y $R_m(x)$ tienen divisores comunes iguales y esto significa que tienen máximos comunes divisores iguales. Pero $R_{m-1}(x)$ se divide por $R_m(x)$, por lo que $R_m(x)$ es el máximo común divisor de $R_{m-1}(x)$ y $R_m(x)$, y quiere decir que también es el máximo común divisor de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$.

23.6. DESCOMPOSICIÓN DE LAS FRACCIONES RACIONALES PROPIAS EN FRACCIONES ELEMENTALES

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios con coeficientes reales.

La fracción racional $P(x)/Q(x)$ se llama propia si el grado del polinomio $P(x)$ es menor que el grado del polinomio $Q(x)$.

Si la fracción racional $P(x)/Q(x)$ no es propia, entonces realizando la división del numerador por el denominador según la regla de división de polinomios se puede representar en la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \tag{23.24}$$

donde $R(x)$, $P_1(x)$ y $Q_1(x)$ son ciertos polinomios y $P_1(x)/Q(x)$ es una fracción racional propia.

Lema 1. *Sea $P(x)/Q(x)$ una fracción racional propia. Si el número a es una raíz real de multiplicidad $\alpha \geqslant 1$ del polinomio $Q(x)$, es decir,*

$$Q(x) = (x - a)^\alpha Q_1(x) \quad \text{y} \quad Q_1(a) \neq 0,$$

entonces existen el número real A y el polinomio $P_1(x)$ con coeficientes reales tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q_1(x)},$$

donde la fracción $\dfrac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q_1(x)}$ *también es propia.*

DEMOSTRACIÓN. Cualquiera que sea el número real A, restando de la fracción

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)}$$

la expresión $\dfrac{A}{(x-a)^\alpha}$ y luego agregándola obtendremos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \left[\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)} - \frac{A}{(x-a)^\alpha}\right] =$$
$$= \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)}. \quad (23.25)$$

Por condición el grado del polinomio $P(x)$ es menor que el grado del polinomio $Q(x) = (x-a)^\alpha Q_1(x)$. Es evidente que el grado del polinomio $Q_1(x)$ también es menor que el grado del polinomio $Q(x)$ (ya que $\alpha \geqslant 1$) por lo que cualquiera que sea la elección del número A la fracción racional $\dfrac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)}$ es regular.

Escojamos ahora el número A de tal forma que el número a sea raíz del polinomio $P(x) - AQ_1(x)$ y por consiguiente, que este polinomio sea divisible por $x - a$. Dicho de otro modo definamos A a base de la condición.

$$P(a) - AQ_1(a) = 0;$$

por cuanto por condición $Q_1(a) \neq 0$, entonces $A = \dfrac{P(a)}{Q_1(a)}$. Para tal elección de A el segundo sumando de la parte derecha en la fórmula (23.25) se puede simplificar por $x - a$, como resultado obtendremos una fracción del tipo

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q_1(x)}.$$

Por cuanto ella se ha obtenido con la simplificación de una fracción racional propia con coeficientes reales por el factor $x - a$, donde a es real, entonces ella misma también es una fracción racional propia con coeficientes reales. □

OBSERVACIÓN 1. Si los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ tienen coeficientes complejos y $z = a$ es una raiz compleja de multiplicidad $\alpha \geqslant 1$ del polinomio $Q(z)$, entonces la descomposición (23.25) también tiene lugar, pero el número A en este caso es ya, en general, un número complejo. La validez de esto se deduce directamente de los razonamientos realizados en la demostración del lema 1.

Lema 2. *Sea* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *una fracción racional propia. Si el número complejo* $z_1 = a + bi$ *(*a *y* b *son reales,* $b \neq 0$*) es una raíz de multiplicidad* $\beta \geqslant 1$ *del polino-*

mio $Q(x)$, es decir,

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^\beta Q_1(x),$$

donde $Q_1(z_1) \neq 0$ y $x^2 + px + q = (x - z_1)(x - \bar{z}_1)$, entonces existen los números reales M, N y el polinomio $P_1(x)$ con coeficientes reales tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta - 1}Q_1(x)}$$

donde la fracción $\dfrac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta - 1}Q_1(x)}$ también es propia.

DEMOSTRACIÓN. Para cualesquiera M y N reales tenemos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^\beta Q_1(x)} =$$

$$= \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} + \left[\frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^\beta Q_1(x)} - \frac{\mathrm{Mx + N}}{(x^2 + px + q)^\beta}\right] =$$

$$= \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} + \frac{P(x) - (Mx + N)Q_1(x)}{(x^2 + px + q)^\beta Q_1(x)}, \quad (23.26)$$

y además el segundo sumando del segundo miembro de la igualdad (23.26) es, como no es difícil ver, una fracción propia.

Tratemos ahora de escoger M y N de forma tal que el numerador de esta fracción sea divisible entre $x^2 + px + q = (x - z_1)(x - \bar{z}_1)$. Para esto es suficiente elegir M y N de forma tal que z_1 sea raíz del polinomio $P(x) - (Mx + N)Q_1(x)$. En efecto, entonces, por lo dicho en el p. 23.3, el número $\bar{z}_1$, conjugado a z_1 también será raíz del polinomio indicado. De aquí se deduce que este polinomio, por la existencia de la descomposición del tipo (23.10) es divisible por $x^2 + px + q$. Así, sea

$$P(z_1) - (Mz_1 + N)Q_1(z_1) = 0. \quad (23.27)$$

Si esto tiene lugar, entonces $Mz_1 + N = \dfrac{P(z_1)}{Q_1(z_1)}$, donde por condición $Q_1(z_1) \neq 0$.

Sea $z_1 = a + bi$, $P(z_1)/Q(z_1) = A + Bi$, entonces

$$A + iB = Mz_1 + N = M(a + bi) + N.$$

De aquí, igualando las partes imaginarias y reales obtendremos las ecuaciones $Ma + N = A$ y $Mb = B$, por consiguiente

$$M = \frac{B}{b} \quad \text{y} \quad N = A - \frac{a}{b}B. \quad (23.28)$$

Para estos valores de M y N el polinomio

$$P(x) - (Mx + N)Q_1(x)$$

se dividará por el polinomio $x^2 + px + q$. Simplificando el segundo sumando de segundo miembro de la igualdad (23.26) por $x^2 + px + q$ obtendremos una fracción del tipo

$$\frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta - 1} Q_1(x)}.$$

Por cuanto ella se obtuvo con la simplificación de una fracción racional propia con coeficientes reales por un polinomio con coeficientes reales, entonces ella misma es también una fracción racional propia con coeficientes reales. □

Enunciemos ahora el teorema principal de este punto.

Teorema 1. *Sean $P(x)/Q(x)$ una fracción racional propia* *), *$P(x)$ y $Q(x)$, polinomios con coeficientes reales.*

Si $Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_r)^{\alpha_r}(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \dots$

$$\dots (x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s}, \quad (23.29)$$

donde a_i son raíces reales distintos dos a dos del polinomio $Q(x)$ de multiplicidad α_i, $i = 1, 2, \dots, r$, y $x^2 + p_j x + q_j = (x - z_j)(x - \bar{z}_j)$, donde z_j y $\bar{z}_j$ son raíces esencialmente complejas, distintos dos a dos para distintos j del polinomio $Q(x)$ de multiplicidad β_j, $j = 1, 2, \dots, s$; entonces existen los números reales A_i^{α}, $i = 1, 2, \dots, r$, $\alpha = 1, 2, \dots, \alpha_i$,

$$M_j^{(\beta)} \text{ y } N_j, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad \beta = 1, 2, \dots, \beta_j$$

tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x - a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x - a_1)^{\alpha_1 - 1}} + \dots + \frac{A_1^{\alpha_1}}{x - a_1} + \dots +$$

$$+ \frac{A_r^{(1)}}{(x - a_r)^{\alpha_r}} + \frac{A_r^{(2)}}{(x - a_r)^{\alpha_1 - 1}} + \dots + \frac{A_r^{(\alpha_r)}}{x - a_r} +$$

$$+ \frac{M_1^{(1)}x + N_1^{(1)}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1}} + \frac{M_1^{(2)}x + N_1^{(2)}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_s - 1}} + \dots + \frac{M_1^{(\beta_1)}x + N_1^{(\beta_1)}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \dots$$

$$\dots + \frac{M_s^{(1)}x + N_s^{(1)}}{(x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s}} + \frac{M_s^{(2)}x + N_s^{(2)}}{(x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s - 1}} + \dots + \frac{M_s^{\beta_s}x + N_s^{\beta_s}}{x^2 + p_s x + q_s}. \quad (23.30)$$

DEMOSTRACIÓN. De la descomposición (23.29) tenemos:

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} Q_1(x).$$

Aquí

$$Q_1(x) = (x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_r)^{\alpha_r}(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s}$$

---

*) Sin perder generalidad se puede considerar que el coeficiente del término de mayor grado del polinomio $Q(x)$ es igual a la unidad, ya que en el caso cuando él es igual a otro número (distinto de cero) se puede dividir el numerador y el denominador de la fracción $P(x)/Q(x)$ por este número, después de lo cual el polinomio obtenido en el denominador tiene el coeficiente del término de mayor grado igual a la unidad.

y por consiguiente $Q_1(a_1) \neq 0$, por lo que según el lema 1

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a)^{\alpha_1}} + \frac{P_1(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}Q_1(x)}.$$

Aplicando de forma semejante el mismo lema cuando $\alpha_1 > 1$ a la fracción racional $\dfrac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha_1-1}Q_1(x)}$ obtendremos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \frac{P_2(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-2}Q_2(x)}.$$

Continuando este proceso más adelante mientras que el exponente de la potencia del factor $x_1 - a$ se convierte en cero y procediendo luego de forma análoga respecto a los factores $x - a_i$, $i = 2, \dots, r$, tendremos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \dots + \frac{A_1^{(\alpha_1)}}{x-a_1} + $$
$$+ \dots + \frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{\alpha_r}} + \frac{A_r^{(2)}}{(x-a_r)^{\alpha_r-1}} + \dots + \frac{A_r^{(\alpha_r)}}{x-a_r} + \frac{P^*(x)}{Q^*(x)},$$

donde $\dfrac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ de nuevo es una fracción racional propia y además $P^*(x)$ y $Q^*(x)$ son polinomios con coeficientes reales y el polinomio $Q^*(x)$ no tiene raíces reales.

Aplicando sucesivamente el lema 2 a la fracción $P^*(x)/Q^*(x)$ y a las expresiones obtenidas en este proceso, como resultado obtendremos la fórmula (23.30). □

Las fracciones racionales del tipo

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha} \quad \text{y} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta},$$

donde a, p, q, A, M y N son números reales y $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$ (las raíces del trinomio $x^2 + px + q$ son esencialmente complejas) se llaman *fracciones racionales elementales.*

De esta forma el teorema demostrado afirma *que cualquier fracción racional propia puede ser descompuesta en la suma de fracciones racionales elementales.*

Cuando se cumple la descomposición del tipo (23.30) para una fracción concreta dada comúnmente resulta cómodo el así llamado método de los coeficientes indeterminados. Este consiste en lo siguiente. Para la fracción dada $P(x)/Q(x)$ se escribe la descomposición (23.30) en la cual los coeficientes $A_i^{(\alpha)}, M_j^{(\beta)}, N_j^{(\beta)}$ se consideran incógnitas ($i = 1, 2, \dots, r$, $\alpha = 1, 2, \dots, \alpha_i$, $j = 1, 2, \dots, s$, $\beta = 1, 2, \dots, \beta_j$). Después de esto ambos miembros de la igualdad se reducen a un denominador común y para los polinomios obtenidos en el numerador se igualan los coeficientes. Si el grado del polinomio $Q(x)$ es igual a n, entonces, en general, en el numerador del segundo miembro de la igualdad (23.30), después de reducirlo a un denominador común se obtiene un polinomio de grado $n - 1$ es decir, un polinomio con n coeficientes, el número de incógnitas $A_i^{(\alpha)}, M_j^{(\beta)}, N_j^{(\beta)}$ también es igual a n (véase (23.10)):

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i + 2 \sum_{j=1}^{s} \beta_j = n.$$

De esta forma obtenemos un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. La existencia de solución para ella se deriva del teorema demostrado.

Señalemos que después de reducir la expresión (23.30) a un denominador común y de su eliminación en el caso cuando $Q(x)$ tiene raíces reales, es conveniente sustituir en ambos miembros de la igualdad obtenida sucesivamente estas raíces; como resultado se obtienen ciertas relaciones entre los coeficientes buscados, útiles para su determinación final.

Ejemplos. 1. Descompongamos la fracción $x/((x^2 - 1)(x - 2))$ en fracciones elementales. Según (22.30) la descomposición buscada tiene la forma

$$\frac{x}{(x^2 - 1)(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 2}.$$

Reduciéndola al denominador común y eliminándolo, obtendremos

$$x = A(x + 1)(x - 2) + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)(x + 1). \tag{23.31}$$

Tenemos el caso cuando todas las raíces del denominador son reales. Suponiendo en la igualdad (23.31), de acuerdo con lo dicho anteriormente, sucesivamente $x = 1, x = -1, x = 2$, hallaremos

$$1 = -2A, \quad -1 = 6B, \quad 2 = 3C,$$

de donde

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{6}, \quad C = -\frac{2}{3}.$$

De esta forma la descomposición buscada será

$$\frac{x}{(x^2 - 1)(x - 2)} = -\frac{1}{2(x - 1)} - \frac{1}{6(x - 1)} + \frac{2}{3(x - 2)}. \tag{23.32}$$

2. Hallemos la descomposición en fracciones elementales para $\dfrac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2}$. La forma general de la descomposición en este caso es

$$\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Dx + E}{x^2 + 1}.$$

Reduciéndola al común denominador y eliminándolo tenemos

$$x^2 - 1 = A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x + (Dx + E)(x^2 + 1)x.$$

Igualemos los coeficientes para las potencias iguales de x:

$$-1 = A, \quad 0 = C + E, \quad 1 = 2A + B + D, \quad 0 = E, \quad 0 = A + D$$

de aquí hallamos

$$A = -1, \quad B = 2, \quad C = 0, \quad D = 1, \quad E = 0$$

y por esto la descomposición buscada tiene la forma

$$\frac{x^2 - 1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1}. \tag{23.33}$$

Es necesario observar que en los casos aislados la descomposición en fracciones elementales se puede obtener más fácil y simplemente, no recurriendo al método de los coeficientes indeterminados, sino actuando por cualquier otro camino Por ejemplo, para la descomposición de la fracción

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}$$

en la suma de fracciones elementales lo más fácil es dos veces añadir y restar en el numerador x^2 y realizar la división como se indica a continuación:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} =$$
$$= \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(x+x^2)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

La descomposición obtenida como resultado es la descomposición de la fracción dada en suma de fracciones elementales.

Ejercicio 3. Demuéstrese que la descomposición del tipo (23.30) de una fracción racional propia es única.

OBSERVACIÓN 2. Si los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ tienen coeficientes complejos, entonces aplicando a la fracción $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ sucesivamente la fórmula (23.25) (véase la observación 1) obtendremos que cualquier fracción racional propia $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ es representable en la región compleja en la forma de una suma finita de fracciones elementales sólo del tipo $\dfrac{A}{(z-a)^k}$, $A \in C$, k es un número entero no negativo que no sobrepasa la miltiplicidad α de la raíz a del polinomio $Q(z)$, es decir,

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{\alpha_j} \frac{A_j^k}{(z-a_j)^k}.$$

§ 24. INTEGRACIÓN DE FRACCIONES RACIONALES

24.1. INTEGRACIÓN DE FRACCIONES RACIONALES ELEMENTALES

En este párralo y en el próximo serán analizados los métodos de integración de ciertas clases de funciones elementales. En cada caso, sin aclararlo especialmente, vamos a suponer que se habla del cálculo de la integral sobre cierto segmento, en todos los puntos del cual está definida la función elemental subintegral (dicho de otra forma, sobre el cual la fórmula que define la función subintegral, tiene sentido, véase sobre esto en el p. 4.3).

En el párrafo anterior fue demostrado, que cualquier fracción racional es representable en forma de suma de un polinomio y fracciones racionales elementales (véanse (23.24) y (23.30)). La integral de un polinomio se calcula y además de manera muy simple (véase el p. 22.2). Analicemos la cuestión sobre la integración de las fracciones racionales elementales.

Primero analicemos el cálculo de las integrales de las fracciones de tipo

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Si $n = 1$, entonces (véase la fórmula 2 en el p. 22.2)

$$\int \frac{A}{x-a}\, dx = A \ln |x-a| + C, \tag{24.1}$$

y si $n \neq 1$, entonces (véase la fórmula 1 en el p. 22.2)

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\, dx = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C. \tag{24.2}$$

Analicemos ahora las integrales de las fracciones

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$$

donde $\frac{p^2}{4} - q < 0$, $n = 1, 2, \dots$ De nuevo comencemos por el caso de $n = 1$. Observando que

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right),$$

y suponiendo $t = x + \frac{p}{2}$, $a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$, obtendremos:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\, dx = \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2+a^2}\, dt = M \int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} +$$

$$+ \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2} \ln (t^2+a^2) + \frac{2N - Mp}{2a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2} \ln (x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{2a} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{2a} + C. \tag{24.3}$$

En el caso de $n > 1$, suponiendo, como anteriormente, $t = x + \frac{p^2}{2}$, $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$, de forma semejante, obtendremos

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx = M\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n} + \frac{2N-pM}{2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}. \qquad (24.4)$$

Analicemos en particular cada una de las integrales obtenidas en el segundo miembro de esta igualdad. Lo que respecta a la primera de ellas, se calcula inmediatamente:

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + C. \qquad (24.5)$$

La segunda integral del segundo miembro de la igualdad (24.4) se calcula un tanto más complicado. Sea

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Integremos la integral I_n por partes, poniendo

$$u = \frac{1}{(t^2+a^2)^n}, \quad dv = dt \quad \text{y por la tanto,} \quad du = -\frac{2nt\,dt}{(t^2+a^2)^{n+1}}, \quad v = t,$$

y después agregando y restando a^2 en el numerador de la función que se obtuvo bajo el signo de la integral y realizando la división como está señalado a continuación, obtendremos

$$\begin{aligned} I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} &= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\,dt = \\ &= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\,dt = \\ &= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\left[\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} - a^2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n+1}}\right], \end{aligned}$$

es decir, $I_n = \dfrac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$, de donde

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\,\frac{t}{(t^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n, \quad n = 1, 2, \ldots . \qquad (24.6)$$

La integral I_1 se calcula fácilmente (véase en el p. 22.2 la fórmula 12); la fórmula (24.6) permite calcular I_2; conociendo I_2, por la misma fórmula se puede hallar I_3; continuando este proceso se puede hallar la expresión para cualquier integral I_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

24.2. CASO GENERAL

De los resultados del p. 23.6 y del p. anterior 24.1 se deduce directamente el siguiente teorema.

Teorema 1. *La integral indefinida de cualquier fracción racional sobre cualquier intervalo, sobre el cual el denominador de la fracción no se anula, existe y se expresa* *a través de funciones elementales, y concretamente es la suma algebraica de las superposiciones de fracciones racionales, arcos tangentes y logaritmos naturales.*

El teorema 1 es una consecuencia directa de las fórmulas (23.24), (23.30), (22.6), (22.8), (24.1) — (24.6). Estas fórmulas dan un método concreto del cálculo de la integral de una función racional: primero, dividiendo el numerador por el denominador, se separa la "parte entera", es decir, la fracción racional dada se representa en forma de suma de un polinomio y una fracción racional propia (23.24), después la fracción racional propia obtenida se descompone en una suma de fracciones elementales (23.30), después de lo cual utilizando linealidad de la integral (22.6) se pueden calcular las integrales de cada sumando por separado, por las fórmulas (22.8) y (24.1) — (24.6).

Ejemplos. 1. Calculemos $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)(x-2)}$. Ya es conocido (véase (23.32)) que

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)},$$

por lo que

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x-2| + C.$$

2. Calculemos $\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}\,dx$. Por la regla general, separemos la parte entera, dividiendo el numerador entre el denominador obtendremos

$$\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2} = x + \frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}.$$

Para la fracción racional propia obtenida está hallada su descomposición en fracciones elementales (véase la fórmula (23.33)):

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1},$$

por lo que

$$\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}\,dx = \int x\,dx - \int\frac{dx}{x} + \int\frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} +$$

$$+ \int\frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \ln|x| - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Se debe tener en cuenta, que el método de cálculo señalado de la integral indefinida de una fracción racional es general; con su ayuda se puede calcular la integral indefinida de cualquier fracción racional, si se puede obtener una descomposición concreta del denominador en factores del tipo (23.10). No obstante, naturalmente en casos particulares aislados resulta más conveniente para una reducción esencial de los cálculos utilizar otros caminos.

Por ejemplo, para el cálculo de la integral

$$I = \int \frac{x^2 dx}{(1 - x^2)^3}$$

es más sencillo no descomponer la función subintegral en fracciones elementales, sino utilizar la regla de integración por partes. Haciendo

$$u = x, \quad dv = \frac{x dx}{(1 - x^2)^3} \text{ y por consiguiente } du = dx, \quad v = \frac{1}{4(1 - x^2)^2}$$

obtendremos

$$I = -\frac{1}{2} \int x \frac{d(1 - x^2)}{(1 - x^2)^3} = \frac{x}{4(1 - x^2)^2} - \frac{1}{4} \int \frac{1}{(1 - x^2)^2} dx.$$

Agregando y restando x^2 del numerador de la función subintegral obtenida, realizando la división, obtenemos dos integrales de las cuales la primera es de tabla y la segunda se calcula fácilmente integrando por partes:

$$I = \frac{x}{4(1 - x^2)^2} - \frac{1}{4} \int \frac{(1 - x^2) + x^2}{(1 - x^2)^2} dx =$$

$$= \frac{x}{4(1 - x^2)^2} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1 - x^2} - \frac{1}{4} \int \frac{x^2 dx}{(1 - x^2)^2} =$$

$$= \frac{x}{4(1 - x^2)^2} - \frac{1}{8} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + \frac{1}{8} \int x \frac{d(1 - x^2)}{(1 - x^2)^2} =$$

$$= \frac{x}{4(1 - x^2)^2} - \frac{1}{8} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| - \frac{x}{8(1 - x^2)} +$$

$$+ \frac{1}{8} \int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{x}{4(1 - x^2)^2} - \frac{1}{16} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| - \frac{x}{8(1 - x^2)} + C.$$

24.3*. MÉTODO DE OSTROGRADSKI

En el punto (24.1) fue demostrado que cualquier fracción racional propia puede ser presentada en forma de suma de fracciones elementales. Pero del p. 24.1 se deduce que las primitivas de las fracciones elementales $\frac{1}{x - a}$ y $\frac{Mx + N}{x^2 + px + q} \left(\frac{p^2}{4} - q < 0 \right)$ son funciones trascendentes de tipo

A arctg $(a_1x + a_2) + B \ln (b_1x + b_2) + C$ (véase (24.1) y (24.3)); la primitiva de la fracción elemental

$$A/(x - a)^\alpha, \quad \alpha = 2, 3, \ldots ,$$

es una fracción racional; la primitiva de la fracción elemental $(Mx + N)/(x^2 + px + q)^\beta$, $\beta = 2, 3, \ldots$, en virtud de las fórmulas (24.4), (24.5), (24.6) y la fórmula 12 del p. 22.2 puede ser, en general, representada en forma de suma de una fracción racional propia y una función trascendente del tipo A arctg $(a_1x + a_2) + C$, que es la primitiva de la fracción del tipo $\dfrac{B}{x^2 + px + q}$ $\left(\dfrac{p^2}{4} - q < 0\right)$. Por esto, cualquier primitiva de cualquier fracción racional es representable, en general, en forma de suma de una fracción racional (parte algebraica) y una función trascendente que es la primitiva de la suma de las fracciones del tipo

$$\frac{A}{x - a} \quad \text{y} \quad \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}, \quad \frac{p^2}{4} - q < 0.$$

De esta manera, si $P(x)/Q(x)$ es fracción racional propia y

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \ldots (x - a_r)^{\alpha_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \ldots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}$$

- es la descomposición de su denominador en la forma (23.10), entonces

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \left[\sum_{i=1}^{r} \frac{A_i}{x - a_i} + \sum_{j=1}^{s} \frac{M_jx + N_j}{x^2 + p_jx + q_j} \right] dx; \quad (24.7)$$

de aquí, realizando bajo el signo de la integral la adición de las fracciones, tenemos

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx, \qquad (24.8)$$

donde $Q_2(x) = (x - a_1) \ldots (x - a_r)(x^2 + p_1x + q_1) \ldots (x_2 + p_sx + q_s)$. De las fórmulas (24.2) y (24.6) se deduce que el polinomio $Q_1(x)$ tiene la forma

$$Q_1(x) = (x - a_1)^{\alpha_1 - 1} \ldots (x - a_r)^{\alpha_r - 1}(x^2 + \\ + p_1x + q_1)^{\beta_1 - 1} \ldots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s - 1},$$

es decir, el polinomio $Q_1(x)$ es el máximo común divisor del polinomio $Q(x)$ y su derivada $Q'(x)$ (vease (23.23)).

La fórmula (24.8) se llama fórmula *de Ostrogradski* *). El segundo sumando de la parte derecha de la fórmula (24.8) se llama parte trascendente de la integral $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$; esto es natural ya que de lo dicho anteriormente se deduce que cualquier primitiva de la fracción $P_2(x)/Q_2(x)$ salvo un sumando constante representa

*) M. V. Ostrogradski (1801 — 1861), matemático ruso.

una combinación lineal de logaritmos y arcos tangentes de funciones racionales y esto significa, como se puede mostrar, que será en general una función trascendente. El primer sumando denominado parte algebraica puede ser hallado de manera completamente algebraica, si son conocidos los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ (y por lo tanto $Q'(x)$, es decir, sin integrar ninguna función). En realidad el polinomio $Q_1(x)$, siendo el máximo común divisor de los polinomios $Q(x)$ y $Q'(x)$, siempre puede ser hallado con ayuda del algoritmo de Euclides (véase el p. 23.5*), así mismo para hallar el polinomio $Q_1(x)$ no se exige el conocimiento de las raíces del polinomio $Q(x)$; no obstante, si las raíces del polinomio $Q(x)$ son conocidas, y por lo tanto se conoce su descomposición del tipo (23.17), entonces el polinomio $Q_1(x)$ se escribe directamente por la fórmula (23.23). El polinomio $Q_2(x)$ se halla como cociente de la división de $Q(x)$ entre $Q_1(x)$.

Para la búsqueda de los polinomios $P_1(x)$ y $P_2(x)$ se puede aplicar el método de los coeficientes indeterminados. Aclarémoslo. Denotemos el grado del polinomio $Q_1(x)$ por n_1, el grado del polinomio $Q_2(x)$ por n_2, entonces de la igualdad

$$Q(x) = Q_1(x)Q_2(x) \tag{24.9}$$

obtendremos $n = n_1 + n_2$. Puesto que las fracciones $P_1(x)/Q_1(x)$ y $P_2(x)/Q_2(x)$ son propias, los grados de los polinomios $P_1(x)$ y $P_2(x)$ respectivamente no son superiores a $n_1 - 1$ y $n_2 - 1$ y por eso en estos polinomios la cantidad de coeficientes distintos de cero respectivamente no supera a n_1 y n_2; de esta manera, la cantidad de coeficientes desconocidos es igual a $n_1 + n_2 = n$. Diferenciando las primitivas que aparecen en ambas partes de la fórmula (24.8), tendremos (omitiendo, para mayor brevedad, la notación del argumento) la relación

$$\frac{P}{Q} = \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)' + \frac{P_2}{Q_2}.$$

Realizando la diferenciación, tendremos

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1'Q_1 - P_1Q_1'}{Q_1^2} + \frac{P_2}{Q_2}. \tag{24.10}$$

Observemos que

$$\frac{P_1'Q_1 - P_1Q_1'}{Q_1^2} = \frac{P_1'Q_2 - P_1R}{Q_1Q_2}, \tag{24.11}$$

donde $R = Q_1'Q_2/Q_1$ es un polinomio. En realidad si z es una raíz del polinomio Q_1 de multiplicidad λ, entonces como conocemos (vease el p. 23.4), z es una raíz de multiplicidad $\lambda - 1$ para la derivada Q_1' y la raíz de multiplicidad uno del polinomio Q_2, por eso en este caso z es también una raíz de multiplicidad λ para el polinomio $Q_1'Q_2$. De aquí por la fórmula (23.7) directamente se deduce que el polinomio $Q_1'Q_2$ se divide, sin residuo, entre el polinomio Q_1, es decir, que R es también un polinomio. Así, de (24.9), (24.10) y (24.11) tenemos

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1'Q_2 - P_1R}{Q} + \frac{P_2}{Q_2}.$$

de donde

$$P = P_1' Q_2 - P_1 R + P_2 Q_1. \tag{24.12}$$

El polinomio P tiene grado no superior a $n - 1$ (ya que la fracción P/Q es propia). Igualando los coeficientes de las potencias iguales k, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, de la variable x en ambos miembros de la igualdad (24.12), tendremos n ecuaciones lineales con n incógnitas. Anteriormente se demostró (véase (24.8)), que los polinomios P_1 y P_2 siempre (en particular, para algún polinomio dado Q y para cualquier polinomio P de grado que no supera a $n - 1$) existen; por eso el sistema obtenido de ecuaciones lineales tiene solución para cualquier segundo miembro *). De aquí se deduce que el determinante de este sistema no es igual a cero, y esto significa que del sistema estudiado se puede decir no sólo que tiene solución sino que la solución es única. Con esto no sólo hemos obtenido un método para la definición de los coeficientes desconocidos en la fórmula (24.8), sino que además queda demostrada la unicidad de esta suposición.

La fórmula (24.8) reduce, en general, el problema de la integración de cualquier fracción racional propia, al problema de integración de una fracción racional propia en la cual el denominador $Q(x)$ tiene sólo raíces reales. Con ayuda de esta fórmula, integrando una fracción racional propia, se puede hallar por el método señalado anteriormente la parte algebraica de la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, y después integrar una fracción racional más sencilla $P_2(x)/Q_2(x)$, si claro no resulta casualmente que $P_2(x)$ es un cero idéntico: en este caso el problema ya está resuelto.

El método aquí descrito de integración de fracciones racionales lleva el nombre de *método de Ostrogradski*.

Al utilizar el método de Ostrogradski para la integración de fracciones racionales con frecuencia resulta más conveniente escribir la fórmula de Ostrogradski (24.8) en la forma (24.7), ya que en este caso después de hallar los coeficientes desconocidos en la función subintegral, ella se puede integrar directamente.

Los coeficientes desconocidos en la fórmula (24.7) se hallan por el mismo método que fue descrito para la fórmula (24.8): se deben diferenciar ambos miembros de la igualdad (24.7) y reducir a un denominador común todas las fracciones racionales obtenidas en ambos miembros de la igualdad, igualar los coeficientes de los mismos grados de la variable x en los polinomios que se encuentran en los numeradores y resolver el sistema de ecuaciones lineales obtenido.

Ejemplo. Apliquemos el método de Ostrogradski para el cálculo de la integral $\int \frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1 - x)^3(1 + x^2)^2}\,dx$. Según la fórmula (24.8),

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1 - x)^3(1 + x^2)^2}\,dx = \frac{Kx^3 + Lx^2 + Mx + N}{(1 - x)^2(1 + x^2)} + \int \frac{kx^2 + lx + m}{(1 - x)(1 + x^2)}\,dx,$$

*) Como es usual se supone que todos los términos de las ecuaciones que contienen incógnitas y sólo ellos se trasladan al primer miembro de la igualdad.

por eso

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1-x)^3(1+x^2)^2} = \left[\frac{Kx^2 + Lx^2 + Mx + N}{(1-x)^2(1+x^2)}\right]' + \frac{kx^2 + lx + m}{(1-x)(1+x^2)}.$$

Diferenciando, obtendremos

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1-x)^3(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{(3Kx^2 + 2Lx + M)(1-x)(x^2+1) - (Kx^3 + Lx^2 + Mx + N) \times \times [-2(1+x^2) + (1-x)2x]}{(1-x)^3(1+x^2)^2} +$$

$$+ \frac{kx^2 + lx + m}{(1-x)(1+x^2)}.$$

De aquí tenemos:

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x = (3Kx^2 + 2Lx + M)(-x^3 + x^2 - x + 1) -$$
$$- (Kx^3 + Lx^2 + Mx + N)(-4x^2 + 2x - 2) + (kx^2 + lx +$$
$$+ m)(x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 1).$$

Igualando los coeficientes con iguales exponentes de x, obtendremos

$$M + 2N + m = 0,$$
$$-M + 2L + 2M - 2N - 2m + l = 1,$$
$$3K - 2L + M + 2L - 2M + 4N + k - 2l + 2m = -2,$$
$$-M + 2L - 3K + 2K - 2L + 4M - 2K + 2l - 2m = 2,$$
$$3K - 2L - 2K + 4L + 2k - 2l + m = 1,$$
$$-3K + 4K - 2k + l = 0,$$
$$k = 0,$$

ó

$$M + 2N + m = 0,$$
$$2L + M - 2N + l - 2m = 1,$$
$$3K - M + 4N + k - 2l + 2m = -2,$$
$$-K + 3M - 2k + 2l - 2m = 2,$$
$$K + 2L + 2k - 2l + m = 1,$$
$$K - 2k + l = 0,$$
$$k = 0.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, hallaremos

$$K = \frac{1}{2},\quad L = -\frac{1}{2},\quad M = \frac{3}{2},\quad N = -1,$$
$$k = 0,\quad l = -\frac{1}{2},\quad m = \frac{1}{2};$$

por eso

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1-x)^3(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{x^3 - x^2 + 3x - 2}{(1-x)^2(1+x^2)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{-x+1}{(1-x)(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{x^3 - x^2 + 3x - 2}{(1-x)^2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

§ 25. INTEGRACIÓN DE ALGUNAS IRRACIONALIDADES

25.1. OBSERVACIONES PREVIAS

Las funciones del tipo

$$R(u_1, \dots, u_n) = \frac{P(u_1, \dots, u_n)}{Q(u_1, \dots, u_n)}, \tag{25.1}$$

donde P y Q son polinomios de las variables $u_1, \dots, u_n$, es decir, funciones del tipo

$$\sum_{k_1 + \dots + k_n \leq k} a_{k_1, \dots, k_n} u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n}$$

se llaman *funciones racionales de* $u_1, \dots, u_n$.

Si en la fórmula (25.1) las variables $u_1, \dots, u_n$ a su vez son funciones de la variable x: $u_i = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces la función

$$R[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)]$$

se llama *función racional* de las funciones $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$.

Por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{x + \sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{\sqrt{x} - \sqrt{x^2+1}}$$

es una función racional de x y de los radicales $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2-1}$, y $\sqrt{x^2+1}$:

$$f(x) = R(x, \ \sqrt{x}, \ \sqrt[3]{x^2-1}, \ \sqrt{x^2+1});$$

aquí $R(u_1, u_2, u_3, u_4) = \dfrac{u_1 + u_3^2}{u_2 - u_4}$, $u_1 = x$, $u_2 = \sqrt{x}$, $u_3 = \sqrt[3]{x^2-1}$, $u_4 = \sqrt{x^2+1}$.

Si en la fórmula (25.1) las variables $u_1, \dots, u_n$ son funciones trigonométricas elementales, entonces la función compleja obtenida se llama función racional con relación a las funciones trigonométricas elementales. Un ejemplo de esta función es la siguiente:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x + \cos x} = R(\operatorname{sen} x, \cos x).$$

Pasemos ahora a las integrales de funciones de los tipos analizados y mostremos, que en una serie de casos, ellas se reducen a las integrales de funciones racionales.

25.2. INTEGRALES DEL TIPO $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right]dx$

Analicemos las integrales señaladas en el título del punto con la condición de que las constantes $r_1, \dots, r_s$ son racionales y $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (a, b, c, d son constantes). La última suposición es natural, ya que si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, entonces los coeficientes a, b serían proporcionales a los coeficientes c, d y por eso la relación $\frac{ax+b}{cx+d}$ no dependería de x. La función subintegral en este caso sería una fracción racional ordinaria de una variable, el problema sobre la integración de la cual fue analizado anteriormente.

Sea m el denominador común de los numeros $r_1, \dots, r_s$:

$$r_i = \frac{p_i}{m}, \quad p_i \text{ es entero}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Hagamos

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d} \tag{25.2}$$

de donde

$$x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} = \rho(t); \tag{25.3}$$

$\rho(t)$ es una función racional, por eso $\rho'(t)$ es también una función racional, y más adelante

$$dx = \rho'(t)dt, \tag{25.4}$$

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i} = t^{mr_i} = t^{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s. \tag{25.5}$$

Sustituyendo (25.3), (25.4) y (25.5) en la expresión subintegral analizada obtendremos

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right]dx =$$
$$= \int R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \dots, t^{p_s}\right)\rho'(t)dt = \int R^*(t)dt$$

donde $R^*(t) = R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \dots, t^{p_s}\right)\rho'(t)$, evidentemente es una función racional de la variable t. De esta forma el cálculo de la integral

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right]dx \tag{25.6}$$

se reduce a la integración de fracciones racionales.

Claro, para hallar la expresión de la integral inicial, es necesario, después del cálculo de la integral $\int R^*(t)dt$, haciendo el cambio inverso de la variable $t = ((ax + b)/(cx + d))^{1/m}$, regresar a la variable x inicial. En el futuro en situaciones análogas, no haremos cada vez la explicación de la necesidad del paso inverso a la variable inicial x.

Señalemos que en particular, al tipo de integrales analizado pertenecen las integrales del tipo

$$\int R[x, (ax + b)^{r_1}, \ldots , (ax + b)^{r_s}]dx, \text{ en particular } \int R(x, x^{r_1}, \ldots , x^{r_s})dx.$$

Ejemplo. Calculemos la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$. Suponiendo por la regla general, $x = t^6$, $dx = 6t^5dt$, obtendremos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 6 \int \frac{t^3}{t + 1}\, dt = 6\left[\int (t^2 - t + 1)dt - \int \frac{dt}{t + 1}\right] =$$

$$= 6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t + 1|\right] + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C.$$

Integrales de otros tipos a veces se reducen a las integrales del tipo (25.6) con ayuda de transformaciones elementales, por ejemplo,

$$\int \sqrt{(x - a)(x - b)}\, dx.$$

Mostremos el método de cálculo de integrales semejantes en el ejemplo de la integral

$$\int \sqrt{(x - 1)(x - 2)}\, dx. \tag{25.7}$$

Sacando en la función subintegral el factor $(x - 1)$ fuera del signo del radical, obtendremos una integral de tipo (25.6): precisamente cuando $x \geqslant 2$

$$\int \sqrt{(x - 1)(x - 2)}\, dx = \int (x - 1)\sqrt{\frac{x - 2}{x - 1}}\, dx$$

y cuando $x < 1$

$$\int \sqrt{(x - 1)(x - 2)}\, dx = \int (1 - x)\sqrt{\frac{x - 2}{k - 1}}\, dx.$$

Cuando $1 < x < 2$ la expresión subintegral es imaginaria pura.

Veamos, por ejemplo, el caso $x \geqslant 2$. Hagamos aquí (véase (25.2)) $t^2 = \frac{x - 2}{x - 1}$, entonces

$$x = \frac{2 - t^2}{1 - t^2}, \quad dx = \frac{2t\, dt}{(1 - t^2)^2},$$

por eso

$$\int \sqrt{(x-1)(x-2)}\,dx = \int \left(\frac{2-t^2}{1-t^2} - 1\right)\frac{2t^2\,dt}{(1-t^2)^2} = 2\int \frac{t^2\,dt}{(1-t^2)^3},$$

o sea, se obtuvo una integral de una fracción racional que fue calculada anteriormente (véase el p. 24.2).

25.3. INTEGRALES DEL TIPO $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$. SUSTITUCIONES DE EULER

Las integrales indicadas pueden ser reducidas con ayuda de un cambio de variable a las funciones racionales. Analicemos tres cambios de variable que llevan el nombre de *sustituciones de Euler* *). Así pues, sea dada la integral

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \quad a \neq 0. \tag{25.8}$$

Primer caso: $a > 0$.

Hagamos el cambio de x por t de la siguiente manera:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t \tag{25.9}$$

(los signos se pueden tomar en cualquier combinación). Elevemos ambas partes de la igualdad escrita al cuadrado:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}\,xt + t^2$$

de donde

$$x = \frac{t^2 - c}{b \pm 2t\sqrt{a}} = R_1(t),$$

$R_1(t)$ es una función racional de t y esto significa que $R_1'(t)$ es también una función racional.

Más adelante, $dx = R_1'(t)dt$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm R_1(t)\sqrt{a} \pm t = R_2(t)$, donde, evidentemente, $R_1(t)$ es una función racional. Finalmente

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx = \int R(R_1(t), R_2(t))R_1'(t)dt = \int R^*(t)dt$$

donde $R^*(t) = R(R_1(t), R_2(t))R_1'(t)$ es una fracción racional. $\square$

Segundo caso: las raíces del trinomio $ax^2 + bx + c$ son reales.

Sean x_1 y x_2 reales y son las raíces del trinomio $ax^2 + bx + c$. Si $x_1 = x_2$, entonces

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)^2} = |x - x_1|\sqrt{a}.$$

De aquí se deduce que en este caso o bien bajo la raíz está una magnitud negativa para todos los valores $x \neq x_1$, es decir, la raíz toma sólo expresiones imaginarias, este caso tiene lugar cuando $a < 0$ y no lo analizamos, o bien cuando $a \geqslant 0$ después de la transformación elemental señalada obtenemos que la varialbe x no apare-

*) L. Euler (1707 — 1783), matemático suizo.

ce bajo el signo de la raíz, es decir, bajo la integral está solamente una función racional de x, en general, diferente para cada uno de los segmentos $(-\infty, x_1)$ y $(x_1, +\infty)$.

Analicemos ahora el caso cuando $x_1 \neq x_2$. Observando que $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ y sacando $x - x_1$ fuera del signo de la raíz obtenemos que

$$R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) = R\left(x, |x - x_1| \sqrt{\frac{a(x - x_2)}{x - x_1}}\right) = R_3\left(x, \sqrt{\frac{a(x - x_2)}{x - x_1}}\right), \quad (25.10)$$

aquí $R_3(u, v)$ es una función racional de las variables u y v.

Como es conocido (véase el p. 25.1) la integral de la función (25.10) puede ser calculada con ayuda de la sustitución (véase (25.2)) $t^2 = \dfrac{a(x - x_2)}{(x - x_1)}$, que en nuestro caso da

$$\pm(x - x_1)t = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)},$$

o, tomando $t > 0$ cuando $x \geqslant x_1$ y $t < 0$ cuando $x \leqslant x_1$, $(x - x_1)t = \sqrt{ax^2 + bx + c}$. □

La integral (25.7) analizada en el punto anterior es un ejemplo del caso 2; esta integral fue reducida anteriormente a una fracción racional por el método que acabamos de examinar ahora en el caso general.

Los dos métodos de cálculo de la integral (25.8), estudiados por nosotros permiten siempre reducir esta integral a una integral de una fracción racional sobre cualquier intervalo, si sólo la raíz $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ sobre este segmento no toma valores imaginarios puros (es natural, estudiando el análisis en el campo real, excluir este caso). En realidad, supongamos que no tienen lugar ni el primero ni el segundo caso, es decir, $a < 0$ y las raíces x_1 y x_2 del trinomio $ax^2 + bx + c$ son esencialmente complejas: $x_1 = g + hi$, $x_2 = g - hi$, $h \neq 0$. Entonces

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = \sqrt{a(x - g - hi)(x - g + hi)} = \sqrt{a[(x - g)^2 + h^2]},$$

y ya que $a < 0$ y $h \neq 0$ entonces bajo la raíz para x cualesquiera aparece una expresión negativa.

Tercer caso: $c > 0$.

En este caso se puede utilizar la sustitución

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm xt$$

(la combinación de signos es arbitraria). Elevando al cuadrado obtendremos la igualdad

$$ax^2 + bx = \pm 2\sqrt{c}\,xt + x^2t^2$$

de donde

$$x = \frac{b \pm 2t\sqrt{c}}{t^2 - a} R_4(t), \quad dx = R_4'(t)dt,$$

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm R_4(t)t = R_5(t)$; donde $R_4(t)$, $R_4'(t)$ y $R_5(t)$ son funciones racionales de t. Por esto

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx = \int R(R_4(t), \quad R_5(t))R_4'(t)dt = \int \tilde{R}(t)dt,$$

donde $\tilde{R}(t) = R(R_4(t), R_5(t))R_4'(t)$ es una fracción racional. □

Las integrales del tipo $\int R(x, \sqrt{ax + b}, \sqrt{cx + d})\, dx$ se reducen mediante la sustitución

$$t^2 = ax + b \tag{25.11}$$

a las integrales analizadas del tipo (25.8).

En realidad, de (25.11) tenemos:

$$x = \frac{t^2 - b}{a}, \quad dx = \frac{2}{a}\, t\, dt, \quad \sqrt{cx + d} = \sqrt{\frac{c}{a}\, t^2 - \frac{cb}{a} + d} = \sqrt{At^2 + B},$$

donde $A = \dfrac{c}{a}$, $B = -\dfrac{cb}{a} + d$, por lo que

$$\int R(x, \quad \sqrt{ax + b}, \quad \sqrt{(cx + d})dx = \int R_6(t, \quad \sqrt{At^2 + B})dt,$$

donde $R_6(u, v)$ es una función racional de las variables u y v. En el segundo miembro de la última igualdad aparece una integral del tipo (25.8). □

El cálculo de integrales con ayuda de las sustituciones de Euler a menudo nos lleva a expresiones muy voluminosas, por lo que se deben utilizar en general sólo cuando la integral analizada no se logra calcular con otro método más breve. Por ejemplo, observando que $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + c - \dfrac{b^2}{4a}$, no es difícil convencerse de que la integral (25.8) en el caso, cuando la expresión subradical es positiva sobre cierto intervalo, con ayuda de una sustitución lineal puede ser reducida (compárese con el p. 22.3) a una de las tres integrales:

$$\int R(t, \quad \sqrt{1 - t^2})dt, \quad \int R(t, \quad \sqrt{t^2 - 1})dt, \quad \int R(t, \quad \sqrt{t^2 + 1})dt$$

(claro, aquí con el símbolo R se denota, en general, otra función racional distinta a la de la fórmula (25.8)). Para el cálculo de las integrales obtenidas, a menudo resulta muy cómodo utilizar las sustituciones trigonométricas

$$t = \operatorname{sen} u, \quad t = \cos u, \quad t = \operatorname{tg} u,$$

y también las sustituciones hiperbólicas

$$t = \operatorname{st} h, \quad t = \operatorname{ch} u, \quad t = \operatorname{th} u.$$

25.4. INTEGRALES DEL BINOMIO DIFERENCIAL

La expresión $x^m(a + bx^n)^p\, dx (a \neq 0, b \neq 0)$ se llama *binomio diferencial*. Vamos a analizar el caso cuando n, m, y p son racionales y a y b son números reales.

Hagamos

$$x = t^{1/n}, \tag{25.12}$$

entonces

$$dx = \frac{1}{n} t^{1/n - 1}\, dt \quad \text{y} \quad \int x^m (a + bx^n)^p\, dx = \frac{1}{n} \int (a + bt)^p\, t^{\frac{m+1}{n} - 1}\, dt.$$

De esta forma, la integral

$$\int x^m (a + bx^n)^p\, dx \tag{25.13}$$

se reduce mediante la sustitución (25.12) a la integral del tipo

$$\int (a + bt)^p\, t^q\, dt, \tag{25.14}$$

donde q y p son racionales. En el caso analizado

$$q = \frac{m+1}{n} - 1.$$

Primer caso: p es un número entero.

Sea $q = \frac{r}{s}$, donde r y s son números enteros; por los resultados del p. 25.2 en este caso la sustitución $z = t^{1/s}$ reduce la integral (25.14) a una integral de una fracción racional.

Segundo caso: q es un número entero.

Sea ahora $p = r/s$, r y s son números enteros. Por los resultados del punto 25.2 la integral (25.14) se reducen en este caso, con la sustitución $z = (a + bt)^{1/s}$, a la integral de una fracción racional.

Tercer caso: $p + q$ es un entero.

Sean $p = r/s$ y s enteros. Escribamos, para mayor claridad, la integral (25.14) en una forma algo diferente:

$$\int (a + bt)^p\, t^q\, dt = \int \left(\frac{a + bt}{t}\right)^p t^{p+q}\, dt.$$

De nuevo tenemos una integral del tipo analizado en el mismo punto 25.2. Esta vez a la integral de una fracción racional la reduce la sustitución

$$z = \left(\frac{a + bt}{t}\right)^{1/s}.$$

Así, en los tres casos, cuando uno de los números p, q o $p + q$ es entero, la integral (25.14), con ayuda de las sustituciones señaladas anteriormente, se reduce a la integral de una fracción racional.

Este resultado, aplicado a la integral (25.13), toma la siguiente forma: cuando uno de los números p, $\frac{m+1}{n}$ o $\frac{m+1}{n} + p$ es entero, la integral (25.13) puede ser reducida a la integral de una fracción racional. Además, en el caso cuando p es un entero, esta reducción la realiza la sustitución

$$z = x^{n/s},$$

donde el número s es el denominador de la fracción $\frac{m+1}{n}$, es decir, $\frac{m+1}{n} = \frac{r}{s}$, en el caso cuando $\frac{m+1}{n}$ es entero, la sustitución

$$z = (a + bx^n)^{1/s},$$

donde el número s es el denominador de la fracción p, es decir, $p = r/s$; y en el caso cuando $\frac{m+1}{n} + p$ es entero la sustitución

$$z = (ax^{-n} + b)^{1/s}$$

donde el número s es también el denominador de la fracción ρ.

P. L. Chebishev *) mostró que para los exponentes m, n y p, que no satisfacen las condiciones antes señaladas, la integral (25.13) no se expresa a través de funciones elementales.

Ejemplo. Analicemos la integral

$$I = \int \sqrt{x}\,\sqrt[4]{1 - \frac{1}{\sqrt{x^3}}}\,dx = \int x^{1/2}\left(1 - x^{-\frac{3}{2}}\right)^{1/4} dx.$$

Aqui $m = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{3}{2}$, $p = \frac{1}{4}$ y $\frac{(m+1)}{n} = -1$; tenemos el segundo caso.

Hagamos la sustitución indicada anteriormente:

$$z = (1 - x^{-3/2})^{1/4}, \tag{25.15}$$

de donde

$$x = (1 - z^4)^{-\frac{2}{3}}, \quad dx = \frac{8}{3}(1 - z^4)^{-\frac{5}{3}} z^3\,dz,$$

y por esto

$$I = \frac{8}{3}\int \frac{z^4}{(1-z^4)^2}\,dz = \frac{2}{3}\int z d\,\frac{1}{1-z^4} = \frac{2}{3}\left(\frac{z}{i - z^4} - \int \frac{dz}{1-z^4}\right) =$$

$$= \frac{2z}{3(1-z^4)} - \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{1+z^2}\right)dz =$$

$$= \frac{2z}{3(l-z^4)} - \frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| - \frac{1}{3}\operatorname{arctg} z + C,$$

donde z se expresa a través de x por la fórmula (25.15).

25.5. INTEGRALES DEL TIPO $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

Analicemos la integral

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \quad a \neq 0,$$

*) P. L. Chebishev (1821 — 1894), matemático ruso.

donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado $n \geqslant 1$. En principio esta integral se puede reducir siempre a la integral de una fracción racional con ayuda de una de las sustituciones de Euler (véase el p. 25.3). No obstante, en el caso concreto dado, generalmente, nos lleva al objetivo mucho más rápido otro método.

Mostremos precisamente que es válida la fórmula

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{25.16}$$

donde $P_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado no superior a $n-1$ y α es cierto número.

Así, sea dado el polinomio

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0. \tag{25.17}$$

Si existe el polinomio

$$P_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0 \tag{25.18}$$

que satisface la condición (25.16), entonces diferenciando esta igualdad obtendremos:

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = $$

$$= P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{P_{n-1}(x)(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\alpha}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

o

$$2P_n(x) = 2P'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + P_{n-1}(x)(2ax+b) + 2\alpha. \tag{25.19}$$

Aquí a la izquierda aparece un polinomio de grado n y a la derecha cada sumando es también un polinomio de grado no mayor que n.

Observando que

$$P'_{n-1}(x) = (n-1)b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + kb_kx^{k-1} + \ldots + b_1 \tag{25.20}$$

y sustituyendo (25.17), (25.18) y (25.20) en (25.19) tenemos las igualdades

$$\begin{aligned} &2(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0) = \\ &= 2(ax^2+bx+c)[(n-1)b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + kb_kx^{k-1} + \ldots + b_1] + \\ &\qquad + (2ax+b)(b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_kx^k + \ldots + b_0) + 2\alpha. \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de las potencias iguales de x obtendremos el siguiente sistema de $n+1$ ecuaciones lineales con $n+1$ incógnitas $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, \alpha$:

$$2a_0 = 2cb_1 + bb_0 + 2\alpha,$$

$$2a_1 = 2bb_1 + 4cb_2 + 2ab_0 + bb_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2a_k = 2(k-1)ab_{k-1} + 2kbb_k + 2(k+1)cb_{k+1} + 2ab_{k-1} + bb_k, \tag{25.21}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2a_{n-1} = 2(n-2)ab_{n-2} + 2(n-1)bb_{n-1} + 2ab_{n-2} + bb_{n-1},$$
$$2a_n = 2(n-1)ab_{n-1} + 2ab_{n-1}.$$

De la última ecuación se halla inmediatamente b_{n-1}:

$$b_{n-1} = \frac{a_n}{n\alpha}.$$

Sustituyendo esta expresión en la penúltima ecuación y observando que en esta ecuación el coeficiente de la incógnita b_{n-2} es igual a $2a(n-1) \neq 0$ hallaremos el valor de b_{n-2}. Sustituyendo a continuación los valores de b_{n-1} y b_{n-2} en la ecuación anterior hallaremos el valor b_{n-3}, etc. Sucesivamente obtendremos todos los valores de las incógnitas b_k $(k = 0, 1, \dots, n-1)$. Después de esto, de la primera ecuación se halla inmediatamente la incógnita α.

De esta forma, el sistema (25.21) tiene solución para cualesquiera valores a_0, $a_1, \dots, a_n$, por eso el determinante de este sistema es diferente de cero y la solución indicada es única.

En la práctica el polinomio $P_{n-1}(x)$ en la fórmula (26.16) se escribe con coeficientes indeterminados, los cuales se hallan resolviendo el sistema (25.21). Después de esto, el cálculo de la integral dada se reduce al cálculo de la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

la cual en el caso en que la expresión subradical es positiva en cierto intervalo se reduce fácilmente a una de tabla (véase el p. 22.3).

Las integrales del tipo

$$\int \frac{dx}{(x-\lambda)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

con la sustitución

$$t = \frac{1}{x - \lambda}$$

se reducen fácilmente a integrales del tipo (25.16) analizado.

§ 26. INTEGRACIÓN DE ALGUNAS FUNCIONES TRASCENDENTES

26.1. INTEGRALES DEL TIPO $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$

La sustitución

$$u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi$$

reduce la integral indicada en el título a la integral de una función racional. En realidad, tenemos

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \tag{26.1}$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} u, \quad dx = \frac{2\,du}{1 + u^2},$$

por lo que

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx = 2\int R\left(\frac{2u}{1 + u^2}, \frac{1 - u^2}{1 + u^2}\right)\frac{du}{1 + u^2}.$$

De esta forma se obtuvo la integral de una función racional.

Calculemos por el método indicado la integral $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x}$. Utilizando las fórmulas (26.1) obtendremos:

$$\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x} = 2\int \frac{du}{(1 + u)^2} = -\frac{2}{1 + u} + C = -\frac{2}{1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C.$$

Es necesario, no obstante, tener en cuenta que aunque por principio las integrales analizadas siempre se pueden reducir a la integral de una función racional con el método indicado, en su aplicación práctica a menudo nos lleva a cálculos muy voluminosos; mientras que otros métodos, en particular las sustituciones del tipo

$$u = \operatorname{sen} x, \quad u = \cos x, \quad u = \operatorname{tg} x \tag{26.2}$$

a veces permiten calcular la integral necesaria, sustancialmente más rápido.

Ejemplos. 1. Analicemos la integral $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. Representémosla en la forma $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x}$. Inmediatamente se ve, que en este caso es muy cómoda la sustitución $u = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)d\operatorname{tg} x = \int (1 + u^2)du = u + \frac{u^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

2. Representando la integral $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x \cos x}$ de la forma $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x \cos x} = \int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\operatorname{sen}^4 x \cos x}$ nos convencemos de lo conveniente que es la sustitución $u = \cos x$. En efecto,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x \cos x} = -\int \frac{d\cos x}{\operatorname{sen}^4 x \cos x} = -\int \frac{du}{(1 - u^2)^2 u} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{du^2}{(1-u^2)^2u^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{dv\ ^{*)}}{(1-v)^2v} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(1-v)+v}{(1-v)^2v}\,dv = -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{(1-v)v} - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{(1-v)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(1-v)+v}{(1-v)v}\,dv - \frac{1}{2}\frac{1}{1-v} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{1-v} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-v} = -\frac{1}{2}\ln|v| +$$

$$+ \frac{1}{2}\ln|1-v| - \frac{1}{2}\frac{1}{1-v} + C = \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} + C.$$

Claro está, las integrales analizadas en los ejemplos 1 y 2 pueden ser calculadas también con ayuda de la sustitución (26.1), por ejemplo,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x \cos x} = \frac{1}{4}\int \frac{(1+u^2)^3\,du}{u^3(1-u^2)};$$

no obstante, con este método hubiera sido necesario integrar una fracción racional más compleja que la del resultado de la aplicación de la sustitución $u = \cos x$.

3. A veces en el cálculo de integrales cuya expresión subintegral contiene sen x y cos x, suele ser útil recurrir a otros métodos artificiales utilizando las fórmulas trigonométricas conocidas, como, por ejemplo, la fórmula $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Mostremos en el ejemplo que acabamos de analizar el método de aplicación de esta fórmula:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x \cos x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x \cos x}\,dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} =$$

$$= \int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^3 x} = \int \frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} + \int \frac{d\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \int \frac{du}{u} + \int \frac{dv\ ^{*)}}{v^3} =$$

$$= \ln|u| - \frac{1}{2}\frac{1}{v^2} + C = \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} + C.$$

Como era de esperar, se obtuvo el mismo resultado que anteriormente obtuvimos.

26.2. INTEGRALES DEL TIPO $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$

Sean n y m números racionales. La integral $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$ con ayuda de las sustituciones $u = \operatorname{sen} x$ ó $u = \cos x$ se reduce a la integral de un binomio diferencial.

En efecto, suponiendo, por ejemplo, $u = \operatorname{sen} x$, obtendremos

$$\cos x = (1-u^2)^{1/2}, \quad du = \cos x\,dx, \quad dx = (1-u^2)^{-1/2}\,du$$

*) Aquí fue hecha la sustitución $v = u^2$.

y por eso

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \int u^m (1 - u^2)^{\frac{n-1}{2}} \, du.$$

De esta forma, la integral $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$ se expresa o no a través de funciones elementales en dependencia de si posee o no esta propiedad la integral obtenida del binomio diferencial.

En el caso cuando m y n son números enteros (no obligatoriamente positivos), la integral $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$ pertenece al tipo de integrales analizadas en el punto anterior, para su cálculo, en particular, es conveniente aplicar la sustitución (26.2).

Por ejemplo, si $m = 2k + 1$ (respectivamente $n = 2k + 1$) es un número impar, entonces se puede hacer la sustitución $u = \cos x$ (respectivamente $u = \operatorname{sen} x$):

$$\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x \, dx = - \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x d \cos x = \\ = - \int (1 - u^2)^k u^n \, du.$$

La integral analizada está reducida a la integral de una fracción racional.

Un resultado análogo se puede obtener también para la integral $\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x \, dx$ con ayuda de la sustitución $u = \operatorname{sen} x$.

Si $m = 2k + 1$, $n = 2l + 1$, entonces suele ser útil la sustitución $t = \cos 2x$:

$$\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^{2l+1} x \, dx = \int \operatorname{sen}^{2k} x \cos^{2l} x \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \\ = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} d \cos 2x\right) = \\ = - \frac{1}{2^{k+l+1}} \int (1 - t)^k (1 + t)^l \, dt,$$

es decir, de nuevo se obtuvo la integral de una fracción racional.

Si ambos exponentes m y n son positivos y pares (o uno de ellos es cero), entonces es conveniente aplicar las fórmulas

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

que evidentemente llevan la integral analizada a integrales del mismo tiempo, pero con exponentes menores, también no negativos. Por ejemplo,

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C.$$

26.3. INTEGRALES DEL TIPO $\int \operatorname{sen} \alpha x \cos \beta x \, dx$

Las integrales indicadas en el título del punto se calculan directamente si transformamos las funciones subintegral por las fórmulas

$$\operatorname{sen} \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\operatorname{sen} (\alpha + \beta)x + \operatorname{sen} (\alpha - \beta)x],$$

$$\operatorname{sen} \alpha x \operatorname{sen} \beta x = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta)x - \cos (\alpha + \beta)x],$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta)x + \cos (\alpha - \beta)x].$$

Por ejemplo,

$$\int \operatorname{sen} 2x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int (\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x)dx = -\frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos x = C.$$

26.4. INTEGRALES DE FUNCIONES TRASCENDENTES CALCULABLES INTEGRANDO POR PARTES

A las integrales indicadas en el título de este punto pertenecen, por ejemplo, las integrales

$\int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx$, $\int e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \, dx$, $\int x^n \cos \alpha x \, dx$,

$\int x^n \operatorname{sen} \alpha x \, dx$, $\int x^n e^{\alpha x} \, dx$, $\int x^n \operatorname{arcsen} x \, dx$,

$\int x^n \arccos x \, dx$, $\int x^n \operatorname{arctg} x \, dx$, $\int x^n \operatorname{arcctg} x \, dx$,

$\int x^n \ln x \, dx$ (n es un entero no negativo).

Todas estas integrales se calculan, en general, con ayuda de la integración reiterada por partes.

En efecto, tenemos:

$$I = \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx = \int e^{\alpha x} d \frac{\operatorname{sen} \beta x}{\beta} = \frac{e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \, dx =$$

$$= \frac{e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} d \left(-\frac{\cos \beta x}{\beta} \right) =$$

$$= \frac{e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x}{\beta} + \frac{\alpha e^{\alpha x} \cos \beta x}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}(\beta \operatorname{sen} \beta x + \alpha \cos \beta x)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} I,$$

de donde

$$I = \frac{e^{\alpha x}(\beta \operatorname{sen} \beta x + \alpha \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} + C. \tag{26.3}$$

De forma análoga también se calcula la integral $\int e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x\, dx$.

En las integrales $\int x^n \cos \alpha x\, dx$, $\int x^n \operatorname{sen} \alpha x\, dx$, $\int x^n e^{\alpha x}\, dx$, haciendo $u = x^n$ y respectivamente $dv = \cos \alpha x\, dx$, $dv = \operatorname{sen} \alpha x\, dx$, $dv = e^{\alpha x}\, dx$, después de la integración por partes de nuevo llegaremos a una integral de uno de los tipos señalados, pero ya con un exponente menor en uno. Aplicando este método n veces llegaremos a una integral del tipo analizado con $n = 0$, la cual evidentemente se calcula inmediatamente. Por ejemplo,

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = \int x^2\, d(-\cos x) = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx =$$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x d \operatorname{sen} x = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x -$$

$$- 2\int \operatorname{sen} x\, dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C.$$

Utilizando las integrales analizadas anteriormente se pueden calcular también integrales más complejas. Calculemos, por ejemplo, la integral

$$\int x^n e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx.$$

Integrando por partes y aplicando (26.3) tenemos:

$$\int x^n e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx = \int x^n d\left[\frac{e^{\alpha x}(\beta \operatorname{sen} \beta x + \alpha \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2}\right] =$$

$$= x^n e^{\alpha x} \frac{\beta \operatorname{sen} \beta x + \alpha \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{n\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \int x^{n-1} e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x\, dx -$$

$$- \frac{n\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \int x^{n-1} e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx.$$

Las integrales obtenidas en la parte derecha son del mismo tipo que la inicial, sólo que el exponente de x es menor en uno. Aplicando sucesivamente el método analizado llegaremos a integrales del tipo

$$\int e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x\, dx \quad \text{y} \quad \int e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx,$$

las cuales fueron analizadas anteriormente.

Finalmente, las integrales

$$\int x^n \operatorname{arcsen} x\, dx, \quad \int x^n \arccos dx, \quad \int x^n \operatorname{arctg} x\, dx,$$

$$\int x^n \operatorname{arcctg} x\, dx \quad \text{y} \quad \int x^n \ln x\, dx$$

con la integración por partes se reducen a la integral de una función algebraica, si en ellas hacemos $dv = x^n\, dx$ y como función u tomamos la función trascendente restante, es decir, una de las funciones: arcsen x, arccos x, arctg x, arcctg x, ln x. Por ejemplo,

$$\int x \ln x\, dx = \int \ln x d\frac{x^2}{2} = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{2} + C.$$

26.5. INTEGRALES DEL TIPO $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\, dx$

La sustitución

$$u = \operatorname{th}\frac{x}{2}$$

reduce la integral $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\, dx$ a la integral de una fracción racional.

En efecto, para la sustitución indicada tenemos

$$\operatorname{sh} x = \frac{2u}{1 - u^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1 + u^2}{1 - u^2}, \quad dx = \frac{2du}{1 - u^2},$$

por eso

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\, dx = 2\int R\left(\frac{2u}{1 - u^2}, \frac{1 + u^2}{1 - u^2}\right)\frac{du}{1 - u^2}.$$

En ejemplos concretos a veces resulta cómodo utilizar la sustitución del tipo $u = \operatorname{sh} x$, $u = \operatorname{ch} x$ ó $u = \operatorname{th} x$, que permiten calcular la integral de una forma sustancialmente más simple (compárese con el p. 26.1).

Las integrales del tipo

$$\int \operatorname{sh}^m x \operatorname{ch}^n x\, dx,$$

donde m y n son números racionales, con ayuda de la sustitución $v = \operatorname{sh} x$ $(u = \operatorname{ch} x)$ se reducen a la integral de un binomio diferencial (compárese con el p. 26.2).

26.6. OBSERVACIONES SOBRE LAS INTEGRALES NO EXPRESABLES A TRAVÉS DE FUNCIONES ELEMENTALES

Hemos analizado diferentes clases de funciones elementales y hemos hallado sus primitivas, que también son funciones elementales. Sin embargo, no toda función elemental tiene en calidad de primitiva una función también elemental. Con una situación semejante ya nos hemos encontrado en el análisis de la integral de un binomio diferencial: en este caso la función subintegral es elemental (irracional) y su integral, como se señaló, no siempre se calcula.

Se puede mostrar que las integrales

$$\int \frac{e^x}{x^n}\, dx, \quad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x^n}\, dx, \quad \int \frac{\cos x}{x^n}\, dx$$

(n es un número natural) tampoco se expresan a través de funciones elementales.

Existe una serie de integrales de funciones elementales que no se expresan a través de funciones elementales y que juegan un gran papel tanto en el propio análisis matemático como en sus diversas aplicaciones. A tales integrales pertenece, por ejemplo, la integral

$$\int e^{-x^2}\,dx,$$

y también las así llamadas *integrales elípticas*

$$\int R(x, \sqrt{P(x)})\,dx,$$

donde $P(x)$ es un polinomio de tercer o cuarto grado. En el caso general estas integrales no se expresan a través de funciones elementales. Muy a menudo aparecen las integrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad \text{y} \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad 0 < k < 1,$$

que con la sustitución $x = \operatorname{sen}\varphi$ se reducen a combinaciones lineales de las integrales

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} \quad \text{y} \quad \int \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi\,d\varphi};$$

llamadas respectivamente integrales elípticas *de primero y segundo género en la forma de Legendre**).

Ejercicios. Calcúlense las integrales:

1. $\int |x|\,dx$.
2. $\int (2x-5)^2\,dx$.
3. $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$.
4. $\int \left(2x^2 - 3x + \dfrac{1}{x}\right) dx$.
5. $\int \dfrac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.
6. $\int x^2\sqrt[5]{2x^3-1}\,dx$.
7. $\int \dfrac{dx}{\cos x}$.
8. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$.
9. $\int xe^{-x}\,dx$.
10. $\int \ln x\,dx$.
11. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.
12. $\int x^2\ln x\,dx$.
13. $\int \sqrt{x^2+3}\,dx$.
14. $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$.
15. $\int \dfrac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x-3)}$.
16. $\int \dfrac{x^4+1}{x^2(x-1)(x+1)^2}\,dx$.
17. $\int \dfrac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}\,dx$.
18. $\int \dfrac{dx}{(1-x)(1+x^3)}$.

*) A. Legendre (1752—1832), matemático francés.

19. $\displaystyle\int \frac{4x^2 - 8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx.$

20. $\displaystyle\int \frac{x^7\,dx}{x^{16}+1}.$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}.$

22. $\displaystyle\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,dx.$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}.$

24. $\displaystyle\int \frac{1 - \sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$

25. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}\,dx.$

26. $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)\,dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}.$

27. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+2x+4}}.$

28. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^8 x\,dx.$

29. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\,dx.$

30. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\,dx.$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x \operatorname{sen}^2 x}.$

32. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}.$

33. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x\,dx.$

34. $\displaystyle\int \arccos^2 x\,dx.$

35. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{arcsen}^2 x\,dx.$

36. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x - 2\operatorname{ch} x}.$

37. $\displaystyle\int x^3 \ln^3 x\,dx.$

38. $\displaystyle\int xe^x \operatorname{sen} x\,dx.$

39. $\displaystyle\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$

40. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x}.$

§ 27. INTEGRAL DEFINIDA

27.1. DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL SEGÚN RIEMANN

Recordemos (véase el p. 16.5) que se llama *partición* τ del segmento $[a, b]$ cualquier sistema finito de sus puntos x_i, $i = 0, 1, \dots, k$, tal que

$$a = x_0 < x_1 \dots < x_{k-1} < x_k = b.$$

Además se escribe $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$. Cada uno de los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$ se llama *segmento de la partición* τ, si longitud se denota por Δx_i, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

La magnitud

$$\delta_\tau = \max_{i=1,2,\dots,k} \Delta x_i$$

la llamaremos *finura de la partición* τ (en inglés, *mesh o finesse of a partition*).

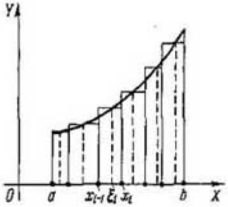


FIG. 110

La partición τ', del segmento $[a, b]$ se llama posterior a la partición τ (o continuadora de la partición τ) del mismo segmento, y también inscrita en la partición τ si cada punto de la partición τ' es también un punto de la partición τ, dicho de otro modo, que cada segmento de la partición τ' se contiene en cierto segmento de la partición τ (se dice además que τ' es un refino de la partición τ; en inglés *refinement of a partition*). En este caso se escribe $\tau' \dashv \tau_0$ lo que es lo mismo, $\tau \dashv \tau'$.

El conjunto de todas las particiones de un segmento dado posee las siguientes propiedades.

1°. Si $\tau_1 \dashv \tau_2$ y $\tau_2 \dashv \tau_3$, entonces $\tau_1 \dashv \tau_3$.

2°. Para cualesquiera τ_1 y τ_2 existe τ tal que $\tau \vdash \tau_1$ y $\tau \vdash \tau_2$.

En realidad, la primera propiedad se deduce simplemente sólo de que por la condición $\tau_3 \vdash \tau_2$, cada segmento de la partición τ_3 se contiene en cierto segmento de la partición τ_2, el cual a su vez por la condición $\tau_2 \vdash \tau_1$ se contiene en algún segmento de la partición τ_1, de esta forma cualquier segmento de la partición τ_3 está sobre un determinado segmento de la partición τ_1 y esto significa que $\tau_3 \vdash \tau_1$.

Para la demostración de la segunda propiedad de las particiones observemos sólo que si están dadas dos particiones τ_1 y τ_2, entonces la partición τ compuesta por todos los puntos que aparecen tanto en la partición τ_1 como en la partición τ_2, evidentemente continuará a τ_1 y a τ_2.

Supongamos ahora que sobre segmento $[a, b]$ está definida la función f y sea $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ alguna partición de este segmento

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

y δ_τ la finura de esta partición.

Fijemos de forma arbitraria los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$, y formemos la suma

$$\delta_\tau(f; \xi_1, \dots, \xi_k) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Las sumas del tipo $\sigma_\tau(f; \xi_1 \dots \xi_k)$ se llaman *sumas integrales de Riemann*[*)] de la función f (fig. 110). A veces para abreviar las denotaremos por $\sigma_\tau(f)$, $\sigma_\tau(\xi_1, \dots, \xi_k)$ o incluso simplemente por σ_τ.

[*)] B. Riemann (1826—1866), matemático alemán.

Geométricamente en el caso cuando la función f es no negativa (fig. 110) cada sumando de la suma integral de Riemann σ_τ es igual al área del rectángulo con base de longitud Δx_i y con altura $f(\xi_i)$. Toda la suma σ_τ es igual al área de la "figura escalonada" que se obtiene con la unión de todos los rectángulos indicados.

Definición 1. *La función f se llama integrable (según Riemann) sobre el segmento $[a, b]$ si existe un número A tal que para cualquier sucesión de particiones del segmento $[a, b]$*

$$\tau_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=0}^{i=k_n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

para la cual $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_{\tau_n} = 0$ y para cualquier elección de los puntos

$$\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}], \quad i = 1, 2, \dots, k_n, n = 1, 2, \dots,$$

existe e límite de la sucesión de sumas integrales $\sigma_{\tau_n}(f; \xi_1^{(n)}, \dots, \xi_{k_n}^{(n)})$ y es igual a A.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)}) \Delta x_i^{(n)} = A \tag{27.1}$$

donde

$$\Delta x_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}; \quad i = 1, 2, \dots, k_n; \quad n = 1, 2, \dots .$$

Cuando se cumplen estas condiciones el número A se llama integral definida (de Riemann) de la función f sobre el segmento $[a, b]$ y se denota por $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

La expresión $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ se lee "integral de la función $f(x)\,dx$ entre los límites a y b; x se llama *variable de integración*; f, *función subintegral*; a, *límite inferior de la integral*; b, *superior*; y el segmento $[a, b]$ se llama *intervalo de integración*.

De esta forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\tau_n}(f; \xi_1^{(n)}, \dots, \xi_{k_n}^{(n)}),$$

donde la sucesión τ_n es tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_{\tau_n} = 0$

Para abreviar la escritura, en este caso escribiremos simplemente

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta_\tau\to\infty} \sigma_\tau(f).$$

De forma semejante a como la definición de límite de una función se puede enunciar de dos formas equivalentes, con ayuda de los límites de las sucesiones y con ayuda "lenguaje $\varepsilon - \delta$", asi la definición de untegral se puede enunciar de otro modo.

Definición 2. *El número A se llama integral definida de la función f sobre el segmento $[a, b]$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que cualquiera que sea*

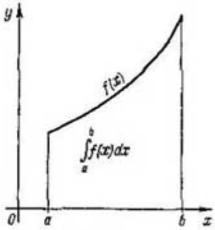


FIG. 111

la partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ *del segmento* $[a, b]$, *la finura de la cual es menor que* δ: $\delta_\tau < \delta$ *y cualesquiera que sean los puntos* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ *se cumple la desigualdad*

$$\left| \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i - A \right| < \varepsilon,$$

donde

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Ejercicio 1. Demuéstrese que las dos definiciones de integral definida dadas anteriormente son equivalentes.

De la definición 1 se deduce que para las funciones no negativas la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es el límite, cuando $\delta_\tau \to 0$, de la sucesión de las áreas de las correspondientes figuras escalonadas, por lo que naturalmente está relacionada con el concepto de área y precisamente es igual al área de la figura*) (llamada "trapecio curvilíneo") cuya frontera es la gráfica de la función f, el segmento $[a, b]$ del eje de las x y, podría ser, los segmentos de las rectas $x = a$, $x = b$, las ordenadas de los puntos de los cuales varían respectivamente desde cero hasta $f(a)$ y hasta $f(b)$ (fig. 111). Para demostrar esto es necesario ante todo precisar el propio concepto de área de las figuras analizadas. Todo esto se hará más adelante en el § 31.

Observemos que el concepto de límite de las sumas integrales de Riemann introducido aquí es un concepto nuevo no contenido ni en el concepto de límite de una sucesión ni en el concepto de límite de una función.

En el futuro será necesario untilizar un concepto análogo de límite no sólo para las sumas integrales de Riemann sino también para otros objetos. Por esto enunciemos la definición general del límite de este tipo.

---

*) El término "figura" conocido de la geometría elemental se utiliza aquí siempre en el sentido de "conjunto plano".

Definición 3. *Analicemos el conjunto* $\mathfrak{T} = \{\tau\}$ *de todas las particiones del segmento* $[a, b]$. *Supongamos que sobre este conjunto está definida una función numérica, en general, multiforme* $\Phi(\tau)$, $\tau \in \mathfrak{T}$. *Diremos que la función* $\Phi(\tau)$ *tiene límite igual a* A *cuando* $\delta_\tau \to 0$ *y escribiremos*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \Phi(\tau) = A$$

si para cualquier sucesión de particiones $\tau_n \in \mathfrak{T}$, $n = 1, 2, \dots$, *tal que* $\lim\limits_{n \to \infty} \delta_{\tau_n} = 0$ *y para cualquier elección de los valores* $\Phi(\tau_n)$, *la sucesión numérica* $\Phi(\tau_n)$ *converge al número* A, *es decir,*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \Phi(\tau_n) = A$$

Este concepto de límite está definido con ayuda del concepto de límite de una sucesión, por eso para él resultan válidas muchas propiedades análogas a las propiedades correspondientes del límite de una sucesión. Con los ejemplos correspondientes nos encontraremos en el futuro.

Como en el caso del límite de las sumas integrales de Riemann, el concepto de este límite se puede enunciar en el "lenguaje ($\varepsilon - \delta$")", lo que se le propone al lector.

Observemos como conclusión que la multiformidad de la función Φ sobre la cual se habla en la definición 3, en el caso de las sumas integrales de Riemann está relacionada con los diferentes métodos de elección de los puntos

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

27.2. ACOTACIÓN DE UNA FUNCIÓN INTEGRABLE

Establezcamos ante todo una condición necesaria que satisfacen las funciones integrales, su acotación.

Teorema 1. *Si una función es integrable sobre cierto segmento, entonces está acotada sobre este segmento.*

DEMOSTRACIÓN. Sea la función f no acotada sobre el segmento $[a, b]$ y sea dada cierta partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ de este segmento. En virtud de la no acotación de la función f sobre todo el segmento $[a, b]$, ella no está acotada al menos sobre un segmento de la partición τ. Sea la función f para mayor exactitud no acotada sobre el segmento $[x_0, x_1]$. Entonces, sobre este segmento existe una sucesión $\xi_1^{(n)} \in [x_0, x_1]$, $n = 1, 2, \dots$, tal que*)

$$\lim_{n \to \infty} f(\xi_1^{(n)}) = \infty \tag{27.2}$$

Fijemos ahora de cualquier forma los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 2, 3, \dots, k$. Entonces la suma

$$\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i), \Delta x_i$$

*) En efecto, en virtud de la no acotación de la función f sobre el segmento $[x_0, x_1]$, por ejemplo, para cualquier natural $n = 1, 2, \dots$ existe un punto $\xi_1^{(n)} \in [x_0, x_1]$ tal que $|f(\xi_1^{(n)})| > n$. Es evidente que la sucesión $\{\xi_1^{(n)}\}$ satisface la condición (27.2).

tendrá un valor enteramente determinado. Por esto, según (27.2)

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_\tau(f; \xi_1^{(n)}, \xi_2, \dots, \xi_k) = \lim_{n \to \infty} [f(\xi_1^{(n)})\Delta x_1 + \sum_{i=2}^{k} f(\xi_i)\, \Delta x_i] = \infty$$

y quiere decir que cualquiera que sea el número $M > 0$, siempre se puede escoger un número n_0 tal que si sobre el primer segmento $[x_0, x_1]$ tomamos el punto $\xi_1^{(n_0)}$, entonces

$$|\sigma_\tau(f; \xi_1^{(n_0)}, \xi_2, \dots, \xi_k| > M.$$

De aquí se deduce que las sumas σ_τ no pueden tender a ningún límite finito cuando $\sigma_\tau \to 0$.

En efecto, si existiera el límite finito $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = A$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ se encontraría $\delta_\varepsilon > 0$ tal que para todas las particiones $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ de finura $\delta_\tau < \delta_\varepsilon$, para cualquier elección de los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$ se cumpliría la desigualdad $|\sigma_\tau - A| < \varepsilon$ y, por consiguiente,

$$|\sigma_\tau| = |(\sigma_\tau - A) + A| \leqslant |\sigma_\tau - A| + |A| < \varepsilon + |A|.$$

En nuestro caso, es decir, en el caso de la no acotación de la función f, para cualquier partición τ (y entre ellas para tal que $\delta_\tau < \delta_\varepsilon$ si existiera el δ_ε indicado), para cualquier $\varepsilon > 0$ fijo se pueden escoger los puntos ξ_i de tal forma que se cumple la desigualdad

$$|\sigma_\tau| > |A| + \varepsilon.$$

La contradicción obtenida demuestra el teorema. □

La condición de acotación de la función f siendo necesaria para su integrabilidad no es al mismo tiempo suficiente. De ejemplo que demuestra esta afirmación puede servir la así llamada *función de Dirichlet* (véase el p. 5.2)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Analicémosla sobre el segmento $[0, 1]$. Evidentemente ella es acotada sobre él. Mostremos que no es integrable. Fijemos una partición arbitraria $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[0, 1]$. Si escojemos los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$ racionales, entonces obtendremos

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i = 1,$$

y si tomamos los ξ_i irracionales, entonces

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = 0.$$

Ya que esto es cierto para cualquier partición τ, entonces las sumas integrales σ_τ a ciencia cierta no tienden a ningún cuando $\delta_\tau \to 0$.

27.3. SUMAS SUPERIORES E INFERIORES DE DARBOUX. INTEGRALES SUPERIOR E INFERIOR DE DARBOUX

Sea la función $f(x)$ definida sobre el segmento $[a, b]$, $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ cierta partición y $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Pongamos (fig. 112)

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$S_\tau = S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i. \tag{27.3}$$

$$s_\tau = s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i. \tag{27.4}$$

Evidentemente $s_\tau < S_\tau$.

La suma S_τ se llama suma *superior de Darboux* y s_τ *inferior*.

Propiedades de las sumas de Darboux.

1°. *Si la función f es acotada, entonces para cualquier partición las sumas S_τ y s_τ están definidas.*

En realidad, en este caso M_i y m_i, $i = 1, 2, \dots, k$, son finitos y por esto las expresiones (27.3) y (27.4) tienen sentido.

2°. *Si $\tau' \succ \tau$, entonces $S_{\tau'} \leqslant S_\tau$ y $s_\tau \leqslant s_{\tau'}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ y $\tau' = \{x'_j\}_{j=0}^{j=k'}$ dos particiones del segmento $[a, b]$ tales que $\tau \prec \tau'$ y

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$m'_j = \inf_{x'_{j-1} \leqslant x \leqslant x'_j} f(x), \quad j = 1, 2, \dots, k',$$

Si $[x'_{j-1}, x'_j] \subset [x_{i-1}, x_i]$, entonces evidentemente

$$m_i \leqslant m'_j \tag{27.5}$$

(la cota inferior cuando desminuye el conjunto sólo puede aumentar).

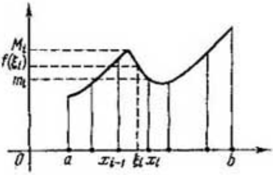


FIG. 112

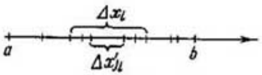


FIG. 113

En virtud de la condición $\tau \to \tau'$ cada segmento $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición τ es la unión de algunos segmentos de la partición τ'; denotaremos estos segmentos por $[x'_{(j-1)_i}, x'_{j_i}]$. De esta forma, si

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \text{y} \quad \Delta x'_{j_i} = x'_{j_i} - x'_{(j-1)_i},$$

entonces (fig. 113)

$$\Delta x_i = \sum_{j_i} \Delta x'_{j_i}.$$

Utilizando estas notaciones y la desigualdad (27.5) obtendremos:

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} m_i \sum_{j_i} \Delta x'_{j_i} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j_i} m_i \Delta x'_{j_i} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \sum_{j_i} m'_{j_i} \Delta x'_{j_i} = \sum_{j=1}^{k'} m'_j \Delta x'_j = s_{\tau'}.$$

Hemos demostrado que $s_\tau \leqslant s_{\tau'}$.

De forma análoga se demuestra que $S_\tau \geqslant S_{\tau'}$ cuando $\tau \to \tau'$. □

Corolario. *Para dos particiones cualesquiera τ_1 y τ_2 del segmento $[a, b]$ se cumple la desigualdad*

$$s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}, \tag{27.6}$$

es decir, cualquier suma inferior de Darboux es menor que cualquier suma superior.

En efecto, si están dadas dos particiones τ_1 y τ_2 del segmento $[a, b]$, entonces existe una partición τ de este segmento tal que $\tau \to \tau_1$ y $\tau \leftarrow \tau_2$ (véase el p. 27.1). Aplicando la propiedad 2° obtendremos

$$s_{\tau_1} \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant S_{\tau_2}. \ \square$$

Es evidente que las sumas de Riemann y Darboux están relacionadas por las desigualdades

$$s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau.$$

La siguiente propiedad es una especificación de esta afirmación.

3°. *Si $\sigma_\tau = \sigma(f; \xi_1, \ldots, \xi_k)$ es alguna suma integral de Riemann correspondiente a una partición τ dada, entonces*

$$s_\tau = \inf_{\xi_1, \ldots, \xi_k} \sigma_\tau, \quad S_\tau = \sup_{\xi_1, \ldots, \xi_k} \sigma_\tau.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ una partición del segmento $[a, b]$ y $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Si están dados ciertos conjuntos numéricos X_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, y las constantes $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces para el conjunto

$$X = \left\{x : x = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i, x_i \in X_i, i = 1, 2, \ldots, k\right\},$$

como es fácil ver son válidas las desigualdades (¿por qué?)

$$\sup X = \sum_{i=1}^{k} a_i \sup X_i, \inf X = \sum_{i=1}^{k} a_i \inf X_i.$$

Por esto tenemos:

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \inf_{x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i} f(\xi_i)\Delta x_i = \inf_{\substack{x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \\ i=1,2,\ldots,k}} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \inf_{\substack{x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \\ i=1,2,\ldots,k}} \sigma(f; \xi_1, \ldots, \xi_k).$$

Análogamente

$$S_\tau = \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \sup_{x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i} f(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \sup_{\substack{x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \\ i=1,2,\ldots,k}} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = \sup_{\substack{x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \\ i=1,2,\ldots,k}} \sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_k). \ \square$$

4°. $S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i$, *donde* $\omega_i(f)$ *es la oscilación de la función* f *sobre el segmento* $[x_{i-1}, x_i]$ (véase el p. 19.6), $i = 1, 2, \ldots, k$.

DEMOSTRACIÓN. Señalemos primero que si para dos cunjuntos numéricos X e Y dados, ponemos,

$$Z = \{z : z = x - y, x \in X, y \in Y\}$$

entonces $\sup Z = \sup X - \inf Y$ (¿por qué?)

Utilizando esto obtendremos

$$M_i - m_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1} \leq x_i \leq x_i} f(x) =$$

$$= \sup_{\substack{x_{i-1} \leq x' \leq x_i \\ x_{i-1} \leq x'' \leq x_i}} [f(x'')] = \omega_i(f), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

por lo que

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i. \ \square$$

Pongamos ahora

$$I_* = \sup_\tau s_\tau, \quad I^* = \inf_\tau S_\tau.$$

I_* se llama *integral inferior de Darboux* de la función f sobre el segmento $[a, b]$ e I^* su *integral superior.*

De las propiedades 1° y 2° de las sumas de Darboux se deduce que la función f es acotada ya que tanto su integral inferior de Darboux como la superior son finitas. En virtud del corolario de la propiedad 2° tendremos también.

$$I_* \leqslant I^*. \tag{27.7}$$

27.4. CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES DE INTEGRABILIDAD

Teorema 2. *Para que una función acotada sobre cierto segmento sea integrable sobre él es necesario y suficiente que*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0. \tag{27.8}$$

La condición (27.8) significa (véase la definición 3 en el p. 27.1) que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tal que para cualquier partición τ de finura $\delta_\tau < \delta$ se cumple la desigualdad

$$|S_\tau - s_\tau| < \varepsilon. \tag{27.9}$$

Por cuanto $s_\tau \leqslant S_\tau$, entonces (27.9) es equivalente a la desigualdad

$$S_\tau - s_\tau < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sea la función f acotada sobre el segmento $[a, b]$, integrable sobre él y sea $I = \int_a^b f(x)\,dx$; entonces $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = I$. Por esto para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta_{(\varepsilon)} > 0$ tal que si $\delta_\tau < \delta$, entonces

$$|\sigma_\tau - I| < \varepsilon \quad \text{ó} \quad I - \varepsilon < \sigma_\tau < I + \varepsilon.$$

De aquí que para $\delta_\tau < \delta$ según la propiedad 3° de las sumas de Darboux (véase el p. 27.3) obtenemos la desigualdad

$$I - \varepsilon \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant I + \varepsilon.$$

De esta forma, si $\delta_\tau < \delta$, entonces

$$0 \leqslant S_\tau - s_\tau \leqslant 2\varepsilon$$

y esto significa el cumplimiento de la condición (27.8).

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Supongamos que la función f es acotada y se cumple la condición (27.8). De la definición de integrales superior e inferior de Darboux y de la desigualdad (27.7) tenemos

$$s_\tau \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau \tag{27.10}$$

por lo que

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_\tau - s_\tau,$$

de donde por (27.8) se deduce que $I^* - I_* = 0$. Denotando el valor común de las integrales superior e inferior de Darboux por I, es decir, haciendo $I = I_* = I^*$ de (27.10) obtendremos

$$s_\tau \leqslant I \leqslant S_\tau.$$

y por esto

$$0 \leqslant I - s_\tau \leqslant S_\tau - s_\tau, \quad 0 \leqslant S_\tau - I \leqslant S_\tau - s_\tau.$$

De aquí, por (27.8) se deriva que

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (I - s_\tau) = \lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - I) = 0,$$

y esto significa que

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = I. \tag{27.11}$$

Pero según la propiedad 3° de las sumas integrales de Darboux (véase el p. 27.3)

$$s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau \tag{27.12}$$

De (27.11) y (27.12) se deduce (compárese con las afirmaciones análogas en los p. 3.3 y 4.7) que

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = I,$$

y esto significa la integrabilidad de la función f. □

Corolario 1. *Si la función f es integrable, entonces no sólo sus sumas integrales de Riemann, sino también sus sumas de Darboux tienden a su integral cuando la finura de la partición tiende a cero.*

En efecto, si la función f es integrable, entonces se cumple la condición (27.8) y de ella, como vimos, se deduce la afirmación del corolario, es decir, la igualdad (27.11). □

Corolario 2. *Para que una función f acotada sobre cierto segmento sea integrable sobre segmento es necesario y suficiente que*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i = 0$$

donde $\omega_i(f)$ es la oscilación de la función f sobre el segmento $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$.

Esto se deduce directamente de la propiedad 4° de las sumas de Darboux (véase el p. 27.3). □

Problema 19. Demuéstrese que para que una función sea integrable sobre un segmento es necesario y suficiente que sea acotada sobre él y que sus integrales superior e inferior de Darboux coincidan, además, el valor común de estas integrales es su integral.

27.5. INTEGRABILIDAD DE LAS FUNCIONES CONTINUAS Y MONÓTONAS

Teorema 3. *Una función definida y continua sobre cierto segmento es integrable sobre él.*

DEMOSTRACIÓN. Sea la función f continua sobre el segmento $[a, b]$; entonces como es conocido, es acotada (véase el teorema 1 en el p. 6.1) y uniformemente continua (véase el teorema 5 en el p. 19.7) sobre este segmento. Fijamos arbitrariamente

$\varepsilon > 0$. En virtud de la continuidad uniforme existe $\delta > 0$ tal que para puntos cualesquiera $\xi \in [a, b]$ y $\eta \in [a, b]$ que satisfacen la condición $|\eta - \xi| < \delta$, se cumple la desigualdad

$$|f(\eta) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{b - a}. \tag{27.13}$$

Tomemos cualquier partición $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ de finura $\delta_\tau < \delta$. Sea como siempre $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, m_i = \inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), M_i = \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), i = 1, 2, \dots, k$. Por cuanto una función continua sobre un segmento alcanza sus cotas superior e inferior sobre este segmento, entonces existen los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ y $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tales que

$$f(\xi_i) = m_i, \quad f(\eta_i) = M_i.$$

Los puntos ξ_i y η_i pertenecen a un mismo segmento de la partición τ, por lo que

$$|\eta_i - \xi_i| \leqslant \Delta x_i \leqslant \delta_\tau \leqslant \delta.$$

De aquí, en virtud de (27.13) se deriva la desigualdad

$$f(\eta_i) - f(\xi_i) = |f(\eta_i) - f(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{b - a}, i = 1, 2, \dots, k.$$

Por consiguiente para cualquier partición τ de finura $\delta_\tau < \delta$ se cumple la condición

$$0 \leqslant S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} [f(\eta_i) - f(\xi_i)]\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i = \varepsilon.$$

Esto significa que $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (S'_\tau - s_\tau) = 0$. Por esto, según el teorema 2, la función f es integrable sobre el segmento $[a, b]$. □

Teorema 4. *Una función definida y monótona sobre el segmento* $[a, b]$ *es integrable sobre este segmento.*

DEMOSTRACIÓN. Sea la función $f(x)$ monótona sobre el segmento $[a, b]$, por ejemplo, crece sobre él. Entonces

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b), \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

De esta forma, la función f es acotada sobre el segmento $[a, b]$. Más adelante, para cualquier partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ evidentemente tenemos

$$m_i = f(x_{i-1}), \quad M_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

por esto

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\Delta x_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})]\Delta x_i \leqslant \delta_\tau \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = [f(b) - f(a)]\delta_\tau,$$

ya que en la suma $\sum\limits_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})]$ se eliminan mutuamente todos los suman-

De la desigualdad obtenida se deduce que

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} [S_\tau(f) - s_\tau(f)] = 0.$$

Por esto, (véase el p. 27.4) la función f es integrable sobre el segmento $[a, b]$. □

Ejercicio 2. Demuéstrese que si una función es acotada y continua sobre cierto segmento, excepto, podría ser, un número finito de puntos, entonces es integrable sobre este segmento.

§ 28. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES INTEGRABLES

28.1. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Sistemáticamente utilizaremos las notaciones y terminología introducidas en el párrafo anterior sin hacer llamados especiales.

Ante todo observemos que por cuanto la integral de una función es un número que se le hace corresponder a una función dada por la definición enunciada anteriormente, entonces, claro está, este número no depende de la elección de la notación para el argumento de la función subintegral, es decir, de la notación de la *variable de integración*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\xi)\,d\xi.$$

Pasemos ahora al análisis de las propiedades principales de la integral definida.

1°. $\int_a^b dx = b - a.$

En efecto, aquí la función subintegral es igual a la unidad por lo que para cualquier suma integral de Riemann σ_τ tenemos

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i = b - a. \square$$

2°. *Si la función f es integrable sobre el segmento* $[a, \ b]$, *entonces es integrable sobre cualquier segmento* $[a^*, \ b^*]$ *contenido en* $[a, \ b]$.

DEMOSTRACIÓN. Ante todo, si la función f es acotada sobre el segmento $[a, \ b]$, entonces evidentemente es acotada sobre $[a^*, b^*]$. Más adelante, cualquiera que sea la partición $\tau^* = \{x^*_i\}_{i=0}^{i=k^*}$ del segmento $[a^*, \ b^*]$ de finura δ_{τ^*}, siempre se puede prolongar en la partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, \ b]$ de ese mismo diámetro $\delta_\tau = \delta_{\tau^*}$; para esto es suficiente agregar a los puntos x_i^*, $i = 1, 2, \ldots, k^*$ un número finito de puntos elegidos de la forma correspondiente, pertenecientes al segmento $[a, \ b]$, pero no pertenecientes al segmento $[a^*, \ b^*]$.

Haciendo

$$m_i^* = \inf_{x^*_{i-1} \leq x \leq x^*_i} f(x), \quad M_i^* = \sup_{x^*_{i-1} \leq x \leq x^*_i} f(x),$$

$$\Delta x_i^* = x_i^* - x_{i-1}^*, \quad i = 1, 2, \ldots, k^*$$

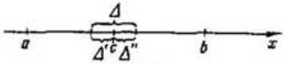


FIG. 114

y observando que cada sumando de la suma $\sum\limits_{i=1}^{k} (M_i^* - m_i^*)\Delta x_i^*$ es sumando de la suma $\sum\limits_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\Delta x_i$ y que todos los sumandos de ambas sumas son no negativos tenemos

$$0 \leqslant S_{\tau^*} - s_{\tau^*} = \sum_{i=1}^{k^*} (M_i^* - m_i^*)\Delta x_i^* \leqslant \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\Delta x_i = S_\tau - s_\tau. \quad (28.1)$$

Si la función f es integrable sobre el segmento $[a, b]$ entonces, como sabemos (véase el p. 27.4),

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0. \quad (28.2)$$

Por cuanto $\delta_\tau = \delta_{\tau^*}$, entonces de (28.2) y de la desigualdad (28.1) se deduce que

$$\lim_{\delta_{\tau^*} \to 0} (S_{\tau^*} - s_{\tau^*}) = 0, \quad (28.3)$$

es decir, (véase el p. 27.4) la función f es integrable sobre el segmento $[a^*, b^*]$. □

3°. (Aditividad de la integral).

Sea $a < c < b$. Si la función f es integrable sobre los segmentos $[a, c]$ y $[c, b]$, entonces es integrable sobre el segmento $[a, b]$ y además

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \quad (28.4)$$

DEMOSTRACIÓN. Si la función f es integrable sobre $[a, c]$ y $[c, b]$, entonces es acotada sobre cada uno de estos segmentos y quiere decir que sobre todo el segmento $[a, b]$, es decir, existe la constante $A > 0$ tal que

$$|f(x)| \leqslant A, \quad a \leqslant x \leqslant b. \quad (28.5)$$

Sea τ cierta partición del segmento $[a, b]$. Si el punto c no aparece en la posición τ, entonces denotemos por τ' la partición del segmento $[a, b]$ obtenida de τ agregando el punto c; evidentemente

$$\tau' \vdash \tau \quad (28.6)$$

Si el punto c aparece en la partición τ, entonces pondremos $\tau' = \tau$.

En el primer caso denotemos por Δ' y Δ'' las longitudes de los dos segmentos de la partición τ' contiguos al punto c por ambos lados. Evidentemente $\Delta = \Delta' + \Delta''$ es la longitud del segmento de la partición τ que contiene el punto c (fig. 114). Las sumas superiores de Darboux S_τ y $S_{\tau'}$ de la función f sobre el segmento $[a, b]$ se diferencian sólo en los sumandos correspondientes a los segmentos de las particiones τ y τ' que contienen el punto c.

Denotando por M', M'' y M la cota superior de la función $|f|$ sobre los segmentos analizados, las longitudes de los cuales están denotadas correspondientemente por Δ', Δ'' y Δ obtendremos (véase también (28.5))

$$0 \leqslant S_\tau - S_{\tau'} \leqslant M'\Delta' + M''\Delta'' + M\Delta \leqslant A(\Delta' + \Delta'' + \Delta) = 2A\Delta \leqslant 2A\delta_\tau.$$

En el segundo caso, es decir, cuando $\tau' = \tau$ simplemente

$$S_{\tau'} = S_\tau, s_{\tau'} = s_\tau,$$

Por esto en ambos casos

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - S_{\tau'}) = 0 \tag{28.7}$$

y análogamente

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (s_\tau - s_{\tau'}) = 0. \tag{28.8}$$

El conjunto de puntos de la partición τ' que pertenecen al segmento $[a, c]$ forma su partición que denotaremos τ' $[a, c]$; el conjunto de los puntos de la partición τ' que pertenecen al segmento $[c, b]$, forma una partición de este segmento que la denotaremos por $\tau'[c, b]$.

Evidentemente

$$S_{\tau'} = S_{\tau'[a,c]} + S_{\tau'[c,b]}, \quad s_{\tau'} = s_{\tau'[a,c]} + s_{\tau'[c,b]} \tag{28.9}$$

y por esto

$$S_{\tau'} - s_{\tau'} = (S_{\tau'[a,c]} - s_{\tau'[a,c]}) + (S_{\tau'[c,b]} - s_{\tau'[c,b]}) \tag{28.10}$$

y ya que la función f por suposición es integrable sobre $[a, c]$ y sobre $[c, b]$, entonces

$$\lim_{\delta_{\tau'[a,c]} \to 0} (S_{\tau'[a,c]} - s_{\tau'[a,c]}) = 0, \quad \lim_{\delta_{\tau'[c,b]} \to 0} (S_{\tau'[c,b]} - s_{\tau'[c,b]}) = 0.$$

Observando que $\delta_{\tau'[a,c]} \leqslant \delta_{\tau'}$, $\delta_{\tau'[c,b]} \leqslant \delta_{\tau'}$ hallamos por (28.10)

$$\lim_{\delta_{\tau'} \to 0} (S_{\tau'} - s_{\tau'}) = \lim_{\delta_{\tau'} \to 0} (S_{\tau'[a,c]} - s_{\tau'[a,c]}) + \lim_{\delta_{\tau'} \to 0} (S_{\tau'[c,b]} - s_{\tau'[c,b]}) = 0. \tag{28.11}$$

Vimos anteriormente que el cumplimiento de semejante condición para cualesquiera particiones τ lleva consigo la integrabilidad de la función. Aquí las particiones τ' analizadas tienen un aspecto especial: necesariamente contienen el punto c. Para pasar a una partición τ arbitraria representemos la diferencia $S_\tau - s_\tau$ de la forma

$$S_\tau - s_\tau = (S_\tau - S_{\tau'}) + (S_{\tau'} - s_{\tau'}) + (s_{\tau'} - s_\tau).$$

Ahora de (28.7), (28.8) y (28.11) tenemos

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0; \tag{28.12}$$

y como τ era una partición arbitraria del segmento $[a, b]$ entonces de la acotación de la función f sobre el segmento $[a, b]$ y el cumplimiento de la condición (28.12) se deduce su integrabilidad sobre este segmento.

De la integrabilidad de la función f sobre los segmentos $[a, c]$, $[c, b]$ y $[a, b]$ se deduce (véase el p. 27.4) que

$$\lim_{\delta_{\tau^*[a,c]} \to 0} S_{\tau^*[a,c]} = \int_a^c f(x)\, dx, \quad \lim_{\delta_{\tau[c,b]} \to 0} S_{\tau^*[c,b]} = \int_c^b f(x)\, dx, \quad \lim_{\delta_{\tau^*} \to 0} S_{\tau^*} = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Por esto pasando al límite cuando $\delta_{\tau^*} \to 0$ en la primera igualdad, de (28.9) obtenemos la fórmula (28.4). □

4°. *Si las funciones f y g son integrables sobre el segmento $[a, b]$, entonces su suma $f + g$ también es integrable sobre él y además*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx. \tag{28.13}$$

DEMOSTRACIÓN. En realidad, cualesquiera que sean la partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ y los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, tenemos

$$\sigma_\tau(x + g) = \sum_{i=1}^{k} [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\Delta x_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{k} g(\xi_i)\Delta x_i = \sigma_\tau(f) + \sigma_\tau(g). \tag{28.14}$$

Por cuanto en virtud de la integrabilidad de las funciones f y g existen los límites de las sumas integrales $\sigma_\tau(f)$ y $\sigma_\tau(g)$ cuando $\delta_\tau \to 0$, entonces de (28.14) se deduce que existe también el límite (¿por qué?) de la suma integral $\sigma_\tau(f + g)$ y además

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f + g) = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f) + \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(g), \tag{28.15}$$

lo que significa la integrabilidad de la función $f + g$ sobre el segmento $[a, b]$.

De nuevo por la definición de integral

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f + g) = \int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx,$$
$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f) = \int_a^b f(x)\, dx, \quad \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(g) = \int_a^b g(x)\, dx.$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula (28.15) obtendremos (28.13). □

5°. *Sean f una función integrable sobre el segmento $[a, b]$ y c una constante; entonces la función cf también es integrable sobre este segmento y*

$$\int_a^b cf(x)\, dx = c\int_a^b f(x)\, dx.$$

DEMOSTRACIÓN. Cualesquiera que sean la partición $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ y los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, tenemos

$$\sigma_\tau(cf) = \sum_{i=1}^{k} cf(\xi_i)\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = c\sigma_\tau(f),$$

de donde realizando los razonamientos por el mismo esquema que en la demostración de la propiedad anterior obtendremos

$$\int_a^b cf(x)\,dx = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(cf) = \lim_{\delta_\tau \to 0} c\sigma_\tau(f) = c\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f) = c\int_a^b f(x)\,dx. \ \square$$

De las dos últimas propiedades se deriva el corolario: *si cada una de las funciones* f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ *es integrable sobre el segmento* $[a, b]$ y λ_i *son constantes arbitrarias, entonces la función* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ *es integrable sobre* $[a, b]$ *y además*

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_a^b f_i(x)\,dx.$$

Esta propiedad de la integral definida se llama su *linealidad*.

6°. *Sean las funciones* $f(x)$ *y* $g(x)$ *integrables sobre el segmento* $[a, b]$. *Entonces su producto* $f(x)g(x)$ *también es integrable sobre él.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud de la integrabilidad de las funciones f y g sobre el segmento $[a, b]$, son acotadas sobre este segmento, es decir, existen las constantes $A > 0$ y $B > 0$ tales que

$$|f(x)| \leqslant A, \quad |g(x)| \leqslant B \tag{28.16}$$

para todos los $x \in [a, b]$. Por esto, el producto $f(x)g(x)$ también es acotado: para todos los puntos $x \in [a, b]$ se cumple la desigualdad

$$|f(x)g(x)| \leqslant AB.$$

Sea $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ cualquier partición del segmento $[a, b]$. Estimemos la expresión $f(x'')g(x'') - f(x')g(x')$, para esto agreguemos y restemos de ella $f(x')g(x'')$:

$$f(x'')g(x'') - f(x')g(x') = [f(x'') - f(x')]g(x'') + [g(x'') - g(x')]f(x'). \tag{28.17}$$

Para los puntos $x' \in [x_{i-1}, x_i]$ y $x'' \in [x_{i-1}, x_i]$, de (28.16) y (28.17) se deduce que

$$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \leqslant B\omega_i(f) + A\omega_i(g), \tag{28.18}$$

donde $\omega_i(f)$ y $\omega_i(g)$ son las oscilaciones de las funciones f y g sobre los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1, 2, \ldots, k$.

De la desigualdad (28.18) para la oscilación $\omega_i(fg)$ del producto fg sobre el segmento $[x_{i-1}, x_i]$ se deriva la estimación

$$\omega_i(fg) \leqslant B\omega_i(f) + A\omega_i(g), \tag{28.19}$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{k} \omega_i(fg)\Delta x_i \leqslant B\sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i + A\sum_{i=1}^{k} \omega_i(g)\Delta x_i. \tag{28.20}$$

En virtud de la integrabilidad de las funciones f y g (véase el corolario 2 del teorema 2 en el p. 27.4)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(g)\Delta x_i = 0.$$

Por esto de la estimación (28.20) se deduce la igualdad

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(fg)\Delta x_i = 0,$$

que lleva consigo la integrabilidad del producto fg sobre el segmento $[a, b]$. □

Con el método de inducción matemática es fácil demostrar que si cada una de las funciones $f_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, es integrable sobre el segmento $[a, b]$, entonces también su producto será integrable sobre $[a, b]$. En particular, junto con la función $f(x)$ es integrable también $[f(x)]^n$ para cualquier natural n.

7°. *Si la función* $f(x)$ *es integrable sobre el segmento* $[a, b]$ *y la cota inferior de la función* $f(x)$ *sobre* $[a, b]$ *es positiva, entonces* $1/f(x)$ también es integrable sobre $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN. Si en todos los puntos sobre $[a, b]$: $|f(x)| \geqslant m > 0$, entonces $\frac{1}{|f(x)|} \leqslant \frac{1}{m}$ para todos los $x \in [a, b]$; por esto, $\left|\frac{1}{f(x_2)} - \frac{1}{f(x_1)}\right| \leqslant$ $\leqslant \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{m^2}$ para cualesquiera $x_1, x_2 \in [a, b]$. De aquí se deduce que si $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ es una partición arbitraria del segmento $[a, b]$, entonces $\omega_i\left(\frac{1}{f}\right) \leqslant \frac{1}{m^2}\omega_i(f)$, por consiguiente

$$0 \leqslant \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i\left(\frac{1}{f}\right)\Delta x_i \leqslant \frac{1}{m^2} \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i = 0. \ \square$$

Corolario. *Si las funciones* f *y* g *son integrables sobre el segmento* $[a, b]$ *y la cota inferior de la función* $|g|$ *es positiva, entonces* f/g *también es integrable sobre* $[a, b]$.

Esto se deriva de las propiedades 6° y 7° y de que $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$. □

8°. *Si la función* f *es no negativa y es integrable sobre el segmento* $[a, b]$, *entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0. \tag{28.21}$$

DEMOSTRACIÓN. En realidad, cualesquiera que sean la partición $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ y los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$, para la función $f \geqslant 0$ tenemos

$$\sigma_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i \geqslant 0. \tag{28.22}$$

Si la función f es integrables sobre el segmento $[a, b]$, entonces pasando al límite en (28.22) cuando $\delta_\tau \to 0$ obtendremos la desigualdad (28.21). □

Corolario. *Si las funciones* f *y* g *son integrables sobre* $[a, b]$ *y para todos los* $x \in [a, b]$

$$f(x) \geqslant g(x), \tag{28.23}$$

entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.24}$$

Si las funciones f y g satisfacen la condición (28.23), entonces

$$f(x) - g(x) \geqslant 0, \quad x \in [a, b];$$

por eso observando que sobre la base del corolario de las propidades 4° y 5° la función $f - g$ es integrable, en virtud de la desigualdad (28.21) tenemos

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \geqslant 0.$$

Pero (véase el corolario indicado anteriormente)

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

y quiere decir que

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0. \ \square$$

El corolario demostrado afirma que ambos miembros de la desigualdad del tipo (28.23) se pueden integrar respecto a un mismo intervalo. (En relación con esto observemos que la diferenciación de ambos miembros de la desigualdad sin suposiciones especiales complementarias no es admisible).

9°. *Sea la función f integrable sobre el segmento $[a, b]$. Si es no negativa sobre él: $f(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$, y existe el punto $x_0 \in [a, b]$ en el cual la función f es continua y positiva: $f(x_0) > 0$, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Según el corolario de la propiedad 2 de los límites de las funciones en el p. 5.10, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}$ para todos los $x \in U(x_0, \delta) \cap [a, b]$. Sea $[\alpha, \beta] \subset U(x_0, \delta) \cap [a, b]$, $\alpha < \beta$; entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geqslant \frac{f(x_0)}{2}(\beta - \alpha) > 0. \ \square$$

Señalemos que si renunciamos a la condición de continuidad de la función f en el punto x_0, entonces puede ocurrir que para una función integrable no negativa sobre un segmento, positiva en cierto punto, la integral respecto a todo el segmento es igual a cero. Así, por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{cuando} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{cuando} \quad x = 0 \end{cases}$$

es integrable y no negativa, $f(0) > 0$, pero $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Esta igualdad se deduce fácilmente de la definición de integral.

10°. Fue introducido el concepto de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ de una función f respecto a un segmento $[a, b]$, donde por la notación habitual, $a < b$.

Para cualquier función f definida en el punto a pongamos por definición

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \tag{28.25}$$

y para una función f integrable sobre el segmento $[a, b]$,

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \quad a < b. \tag{28.26}$$

Estas definiciones en cierta medida son naturales. En el primer caso, cuando $a = b$ se debe considerar que todos los intervalos de la partición del segmento $[a, b]$ se convierten en puntos y sus longitudes Δx_i se anulan. Por esto, todas las sumas integrales $\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i$ en este caso también son iguales a cero y junto con ellas se anula la integral que aparece en el primer miembro de (28.25).

En el segundo caso se debe considerar que los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ están orientados en el sentido negativo del eje Ox (el concepto de segmento orientado le es conocido al lector de la geometría analítica) y por esto sus longitudes Δx_i son negativas. De aquí se deduce que todas las sumas integrales formadas para la integral $\int_b^a f(x)\,dx$ se diferencian sólo en el signo de las sumas integrales correspondientes de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ lo que hace natural la fórmula (28.26).

A estos razonamientos intuitivos se les puede dar una forma lógica estricta introduciendo las definiciones correspondientes, no obstante, es mucho más simple y breve introducir las igualdades (28.25) y (28.26) por definición.

11°. *Si la función f es integrable sobre el segmento $[a, b]$, entonces la función $|f|$ es integrable sobre él y*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx, \quad a < b. \tag{28.27}$$

En efecto, en primer lugar, de la acotación de f evidentemente se deduce la acotación de la función $|f|$ y en segundo lugar, para dos puntos cualesquiera $\xi \in [a, b]$ y $\eta \in [a, b]$ tiene lugar la desigualdad

$$||f(\xi)| - |f(\eta)|| \leqslant |f(\xi) - f(\eta)|,$$

de donde se deduce que cualquiera que sea la partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$, denotando por $\omega_i(f)$ y $\omega_i(|f|)$ respectivamente las oscilaciones de las funciones f y $|f|$ sobre el segmento $[x_{i-1}, x_i]$ obtendremos $\omega_i(|f|) \leqslant \omega_i(f)$; $i = 1, 2, \dots, k$, por eso

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{k} \omega_i(|f|)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i.$$

De aquí se deduce que si

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i = 0, \quad \text{entonces}$$

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(|f|)\Delta x_i = 0.$$

Esto significa (véase el p. 27.4) que de la integrabilidad de la función se deduce la integrabilidad de la función $|f|$.

Sea ahora $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$, entonces

$$|\sigma_\tau(f)| = \left| \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |f(\xi_i)|\Delta x_i = \sigma_\tau(|f|).$$

Pasando en esta desigualdad al límite cuando $\delta_\tau \to 0$ y observando que

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} |\sigma_\tau(f)| = |\lim_{\delta_\tau \to 0} \delta_\tau(f)| = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|,$$

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(|f|) = \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

obtendremos la desigualdad (28.27). $\square$

Si renunciamos a la restricción $a < b$, es decir, aceptamos los casos $a = b$ y $a > b$, entonces el análogo de la desigualdad (28.27) tiene el aspecto

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right|. \tag{28.28}$$

En efecto, sea $a < b$. Por cuanto (véase la propiedad 8°)

$$\left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right| = \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

entonces la desigualdad (28.28) coincide en este caso con la desigualdad (28.27). Si $a > b$, entonces utilizando la propiedad (28.26) y la desigualdad (28.27) obtendremos

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_b^a f(x)\,dx \right| \leqslant \int_b^a |f(x)|\,dx = \left| \int_b^a |f(x)|\,dx \right| = \left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right|.$$

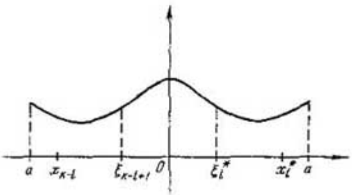


FIG. 115

Finalmente, para $a = b$ la desigualdad (28.28) es evidente.

Ejemplos. 1. Sea la función f par sobre el segmento $[-a, a]$ e integrable sobre el segmento $[0, a]$. Entonces es integrable sobre $[-a, a]$ y además

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx. \tag{28.29}$$

Demostremos que la función f es integrable sobre el segmento $[-a, 0]$ y que

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx, \tag{28.30}$$

de donde por la aditividad de la integral (propiedad 3°) se derivará inmediatamente la fórmula (28.29) ya que (eliminando la notación de la función subintegral):

$$\int_{-a}^{a} = \int_{-a}^{0} + \int_{0}^{a} = 2\int_{0}^{a}.$$

Esto se deduce de que si f es una función par, entonces la transformación de simetría del eje numérico con respecto al cero convierte sus sumas integrales sobre el segmento $[0, a]$ en sumas integrales iguales respecto al segmento $[-a, 0]$ y viceversa. En realidad, si $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ es una partición del segmento $[-a, 0]$, entonces $\tau^* = \{x_i^*\}_{i=0}^{i=k}$ donde $x_i^* = -x_{k-i}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$, es una partición del segmento $[0, a]$ y además las finuras de ambas particiones evidentemente coinciden: $\delta_\tau = \delta_{\tau^*}$. Si para cada punto $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ponemos $\xi_i^* = -\xi_{k-i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces en virtud de la paridad de la función f obtendremos $f(\xi_i^*) = f(\xi_{k-i+1})$ (fig. 115) y por consiguiente, a cualquier suma integral de Riemann $\sigma_\tau = \sum\limits_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i$ de la función f sobre el segmento $[-a, 0]$ le corresponderá una suma integral igual a ella $\sigma_{\tau^*} = \sum\limits_{i=1}^{k} f(\xi_i^*)\Delta x_i^* = \sigma_\tau$ de la misma función f, pero sobre el segmento $[0, a]$ (aquí

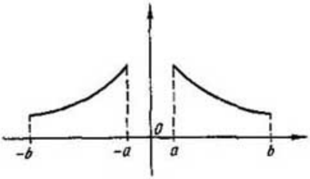


FIG. 116

como siempre $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta x_i^* = x_i^* - x_{i-1}^*$ y es fácil ver que $\Delta x_i = \Delta x_{k-i+1}^*$, $i = 1, 2, \ldots, k$). Por esto

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \lim_{\delta_{\tau^*} \to 0} \sigma_{\tau^*} = \int_0^a f(x)\, dx.$$

De esta forma, el límite que aparece en el primer miembro de esta igualdad existe y esto significa que la función f es integrable sobre el segmento $[-a, 0]$. Por cuanto el límite indicado es también igual a la integral $\int_{-a}^{0} f(x)\, dx$, entonces la igualdad (28.30) queda demostrada. □

El ejemplo analizado se puede generalizar algo. Si la función f es integrable sobre el segmento $[a, b]$ y

$$f^*(x) \overset{\text{def}}{=} f(-x), \quad -b \leqslant x \leqslant -a,$$

(fig. 116), entonces la función f^* es integrable sobre el segmento $[-b, -a]$ y

$$\int_{-b}^{-a} f^*(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{28.31}$$

Esta afirmación se demuestra análogamente al caso analizado anteriormente.

2. Analicemos ahora las funciones periódicas.

La función $f: X \to \boldsymbol{R}$, $X \subset \boldsymbol{R}$ se llama periódica sobre el conjunto X con periodo $T > 0$ si para cualquier $x \in X$ se cumple la inclusión $x + T \in X$ y la igualdad

$$f(x + T) = f(x).$$

Por ejemplo, para la función $\operatorname{sen} x$ el período es cualquier número múltiplo entero de 2π, es decir, un número del tipo $2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Para una función constante cualquier número positivo es su periodo.

Ejercicios. 1. Demuéstrese que para la función de Dirichlet (véase el p. 5.2) cualquier número racional positivo es periodo y cualquier irracional positivo no lo es.

2. Demuéstrese que la función $\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x$ tiene periodo mínimo y hállese.

3. Cítese un ejemplo de dos funciones que tienen periodo mínimo y la suma de las cuales no tiene periodo mínimo.

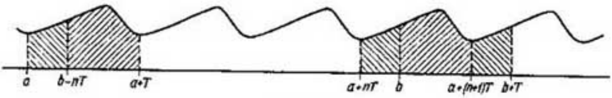


FIG. 117

4. Demuéstrese que cualquier función continua y periódica sobre todo el eje numérico R es acotada sobre R.

5. Demuéstrese que cualquier función continua y periódica sobre todo el eje numérico R es uniformemente continua sobre R. Véase también el problema 6 en el p. 6.2.

Si para $x \geqslant a$ la función f tiene período $T > 0$ y es integrable sobre el segmento $[a, a + T]$, entonces para cualquiera que sea $b \geqslant a$, es integrable sobre el segmento $[b, b + T]$ y tiene lugar la igualdad

$$\int_b^{b+T} f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,dx, \tag{28.32}$$

es decir, la integral de una función periódica respecto a un segmento igual por su longitud al período no depende de la ubicación de este segmento sobre el rayo $x \geqslant a$ (fig. 117).

Demostremos esto. Cualquiera que sea $b \geqslant a$ existe el número no negativo n tal que

$$a + nT \leqslant b < a + (n + 1)T$$

y, por consiguiente,

$$a + (n + 1)T \leqslant b + T < a + (n + 2)T,$$
$$a \leqslant b - nT < a + T$$

(ver la fig. 117).

Observemos que si para cierto $b \geqslant a$ la función f es integrable sobre el segmento $[b, b + c]$, $c > 0$, entonces para cualquier n entero no negativo la función f es integrable sobre el segmento $[b + nT, b + c + nT]$ y es válida la igualdad

$$\int_b^{b+c} f(x)\,dx = \int_{b+nT}^{b+c+nT} f(x)\,dx. \tag{28.33}$$

En efecto, por la periodicidad de la función f en la traslación del segmento $[b, b + c]$ al segmento $[b + nT, b + c + nT]$, es decir, en la trasformación del argumento $x' = x + nT$, en los puntos correspondientes unos a otros de estos segmentos la función f toma valores iguales. A base de esto se puede mostrar fácilmente por el mismo método que fue aplicado en el ejemplo anterior utilizando sólo en lugar de una simetría una traslación, que la función f es integrable sobre el segmento $[b + nT, b + c + nT]$ y que tiene lugar la igualdad (28.33).

Aplicando este resultado a los segmentos $[a, b - nT]$ y $[b - nT, a + T]$ y agregando en el primer caso a ambos extremos del segmento el número $(n + 1)T$ y en el segundo el número nT obtendremos, en primer lugar, que la función f es integrable sobre los segmentos $[a + (n + 1)T, b + T]$ y $[b, a + (n + 1)T]$ y en segundo lugar que

$$\int_{a}^{b-nT} f(x)\,dx = \int_{a+(n+1)T}^{b+T} f(x)\,dx, \quad \int_{b-nT}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{b}^{a+(n+1)T} f(x)\,dx. \tag{28.34}$$

Sumando estas igualdades, en virtud de la propiedad de aditividad de la integral (véase la propiedad 3°) obtendremos la fórmula (28.32). □

Señalemos que es válida en cierto sentido la afirmación inversa: si para algún $b \geqslant a$ la función f es integrable sobre el segmento $[b, b + T]$, entonces es integrable sobre el segmento $[a, a + T]$. Esto también se deduce de las fórmulas (28.34) sólo que en ellas esta vez están dadas las partes derechas.

28.2. PRIMER TEOREMA SOBRE EL VALOR MEDIO PARA LA INTEGRAL DEFINIDA

Teorema 1. *Supongamos que*

1) *las funciones f y g son integrables sobre el segmento* $[a, b]$;

2) $m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad x \in [a, b]$; (28.35)

3) *la función g no cambia de signo sobre el segmento* $[a, b]$, *es decir, o bien es no negativa o bien es no positiva sobre él;*

entonces existe el número μ tal que

$$m \leqslant \mu \leqslant M \tag{28.36}$$

y

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.37}$$

Corolario. *En la suposición complementaria de la continuidad de la función f sobre el segmento $[a, b]$ existe un punto ξ sobre el intervalo (a, b) tal que*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.38}$$

En particular para $g(x) = 1$ sobre $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b - a). \tag{28.39}$$

La última fórmula en el caso de una función f no negativa sobre el segmento $[a, b]$ tiene un sentido geométrico simple: el área del trapecio curvilíneo engendrado por la gráfica de la función f es igual al área del rectángulo con base de longitud $b - a$ y altura de longitud $f(\xi)$ (fig. 118).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Multiplicando la desigualdad (28.35) por $g(x)$ obtenemos para $g(x) \geqslant 0$

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$$

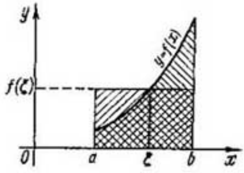


FIG. 118

y para $g(x) \leqslant 0$

$$mg(x) \geqslant f(x)g(x) \geqslant Mg(x).$$

Integrando estas desigualdades tendremos a base del corolario de la propiedad 8° (p. 28.1)

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx, \tag{28.40}$$

respectivamente,

$$m\int_a^b g(x)\,dx \geqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \geqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.41}$$

Si $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, entonces tanto en el primer caso, como en el segundo

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0.$$

De esta forma, si $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, entonces ambos miembros de la igualdad (28.37) para cualquier μ se anulan, es decir, cuando se cumple la condición $\int_a^b g(x)\,dx = 0$ la igualdad (28.37) es válida para cualquier elección del número μ, en particular para $m \leqslant \mu \leqslant M$.

Si $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, entonces para $g(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$, tenemos $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ y para $g(x) \leqslant 0$, $x \in [a, b]$, respectivamente, $\int_a^b g(x)\,dx < 0$. Dividiendo las desigualdades (28.40) y (28.41) entre la integral $\int_a^b g(x)\,dx$ obtendremos en ambos casos una misma desigualdad

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M. \tag{28.42}$$

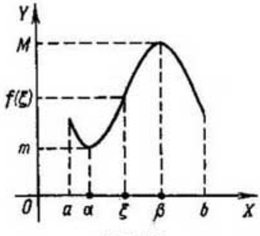


FIG. 119

Suponiendo

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}, \tag{28.43}$$

vemos que para tal elección de μ se cumple tanto la condición (28.36) (en virtud de (28.42)), como (28.37) (en virtud de (28.43)). □

DEMOSTRACIÓN DE COROLARIO. Si $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, entonces en virtud de la igualdad (28.37) obtenemos $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ y por lo tanto, la fórmula (28.38) es válida para cualquier elección del punto $\xi \in (a, b)$. En el futuro, para simplificar, consideraremos $g(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$ (el caso $g(x) \leqslant 0$, $x \in [a, b]$ se analiza análogamente o se reduce al anterior con la sistitución de la función $g(x)$ por la función $-g(x)$).

Sea ahora $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, entonces por la no negatividad de la función $g(x)$ se cumple la desigualdad

$$\int_a^b g(x)\,dx > 0. \tag{28.44}$$

En el futuro consideraremos que $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$. Esta suposición es permisible ya que para tal elección de m y M se cumple la condición (28.35). En la fórmula (28.37) según la condición (28.36) son posible tres casos: $m < \mu < M$, $\mu = M$ y $\mu = m$.

Si $m < \mu < M$, entonces por el teorema de que una función continua sobre un segmento alcanza sobre él sus valores máximo y mínimo (véase el teorema 1 en el p.

6.1) existen los puntos $\alpha \in [a, b]$ y $\beta \in [a, b]$ tales que $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$. Por esto, según el teorema sobre los valores medios de una función continua (véase el teorema 2 y el corolario 2 de él en el p. 6.2), sobre el intervalo con extremos α y β se encuentra un punto ξ tal que $f(\xi) = \mu$. Evidentemente $\xi \in (a, b)$ (fig. 119).

Si $\mu = M$ (el caso $\mu = m$ se analiza análogamente), entonces la igualdad (28.37) toma la forma

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = M\int_a^b g(x)\,dx,$$

de donde

$$\int_a^b [M - f(x)]\,g(x)\,dx = 0. \tag{28.45}$$

Mostremos que existe el punto $\xi \in (a, b)$ tal que $f(\xi) = M$. Previamente observemos que

$$\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +\infty} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\,dx. \tag{28.46}$$

En realidad, la función $g(x)$ es integrable sobre el segmento $[a, b]$ y por esto es acotada sobre él, es decir, existe una constante $A > 0$ tal que para todos los $x \in [a, b]$ se cumple la desigualdad $|g(x)| \leqslant A$. De aquí tenemos

$$\left|\int_a^b g(x)\,dx - \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\,dx\right| = \left|\int_a^{a+\varepsilon} g(x)\,dx + \int_{b-\varepsilon}^{b} g(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^{a+\varepsilon} |g(x)|\,dx + \int_{b-\varepsilon}^{b} |g(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant A\int_a^{a+\varepsilon} dx + A\int_{b-\varepsilon}^{b} dx = 2A\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < b - a.$$

De esta desigualdad se deduce inmediatamente (28.46).

En virtud de la desigualdad (28.44), de (28.46) se deriva la existencia de ε_0, $0 < \varepsilon_0 < b - a$, tal que

$$\int_{a+\varepsilon_0}^{b-\varepsilon_0} g(x)\,dx > 0.$$

Si no existiera el punto $\xi \in (a, b)$ en el cual $f(\xi) = M$, entonces la función continua $M - f(\xi)$ sería positiva sobre el intervalo (a, b) y, por consiguiente, sobre el segmento $[a + \varepsilon_0, b - \varepsilon_0]$. En particular, sería positiva en el mismo punto x_0 donde toma su valor mínimo:

$$M - f(x) \geqslant \min_{[a+\varepsilon_0, b-\varepsilon_0]} [M - f(x)] = M - f(x_0) > 0.$$

Por esto

$$\int_a^b [M - f(x)]g(x)\,dx \geqslant \int_{a+\varepsilon_0}^{b-\varepsilon_0} [M - f(x)]\,g(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant [M - f(x_0)] \int_{a+\varepsilon_0}^{b-\varepsilon_0} g(x)\,dx > 0,$$

y esto contradice la igualdad (28.45). □

El corolario del teorema 1 usualmente se llama ***teorema integral sobre el valor medio***. Este nombre se explica con que en él se afirma la existencia de cierto punto sobre el segmento, "el punto medio" que posee una propiedad determinada relacionada con la integral de la función.

Las fórmulas (28.31) y (28.32) permanecen siendo ciertas de forma evidente cuando $a \geqslant b$.

28.3. INTEGRABILIDAD DE LAS FUNCIONES CONTINUAS A TROZOS

Generalicemos ahora el teorema 3 del párrafo anterior sobre la integrabilidad de las funciones continuas sobre el caso de las así llamadas funciones continuas a trozos.

Definición 1. *La función f definida sobre el segmento $[a, b]$ se llama continua a trozos sobre él si existe la partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ de este segmento tal que la función f es continua sobre cada uno de los intervalos (x_{i-1}, x_i) y existen los límites finitos*

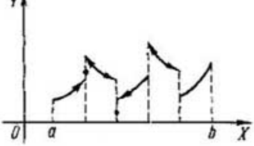
$$f(x_{i-1} + 0) = \lim_{x \to x_{i-1}+0} f(x) \quad \text{y}$$

$$f(x_i - 0) = \lim_{x \to x_i - 0} f(x), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Más breve, una función es continua a trozos sobre un segmento si sobre él tiene sólo un número finito de puntos de discontinuidad y además sólo de primer género (fig. 120).

Lema 1. *Sean las funciones f y φ definidas sobre el segmento $[a, b]$ y $f(x) = \varphi(x)$ sobre el intervalo (a, b). Entonces si la función f es integrable sobre $[a, b]$, la función φ también es integrable sobre $[a, b]$ y*

FIG. 120



$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dicho de otro modo, el cambio de los valores de la función sobre los extremos del segmento no influye ni sobre la integrabilidad de la función ni sobre el valor de la integral si la función es integrable. La afirmación análoga, por supuesto, es válida para la variación de los valores de la función en cualquier número finito de puntos.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. La función f es integrable y por consiguiente acotada: $|f(x)| \leqslant M$ para todas las $x \in [a, b]$. Sea $M_0 = \text{máx}\,\{M, \varphi(a), \varphi(b)\}$. Analicemos cualquier partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ y formemos las sumas integrales de Riemann $\sigma_\tau(f)$ y $\sigma_\tau(\varphi)$, eligiendo los mismos puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Sea como siempre $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Por cuanto

$$|f(\xi_1)\Delta x_1| \leqslant M_0\delta_\tau, \quad |f(\xi_k)\Delta x_k| \leqslant M_0\delta_\tau,$$
$$|\varphi(\xi_1)\Delta x_1| \leqslant M_0\delta_\tau \quad \text{y} \quad |\varphi(\xi_k)\Delta x_k| \leqslant M_0\delta_\tau,$$

entonces

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} f(\xi_1)\Delta x_1 = \lim_{\delta_\tau \to 0} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{\delta_\tau \to 0} \varphi(\xi_1)\Delta x_1 = \lim_{\delta_\tau \to 0} \varphi(\xi_k)\Delta x_k = 0.$$

Por esto

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(\varphi) = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \varphi(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=2}^{k-1} \varphi(\xi_i)\Delta x_i =$$
$$= \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=2}^{k-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Por consiguiente la integral $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ existe y es igual a $\int_a^b f(x)\,dx$. □

Ejercicio 1. Demuéstrese que la variación del valor de la función en un número finito de puntos no influye ni en la integrabilidad de la función ni en su valor si ella existe.

Teorema 2. *Una función f continua a trozos sobre el segmento $[a, b]$ es integrable sobre él.*

DEMOSTRACIÓN. Sean la función f *continua a trozos sobre el segmento* $[a, b]$ y $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ su partición indicada en la definición 1. Hagamos

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{cuando } x_{i-1} < x < x_i, \\ f(x_{i-1} + 0) & \text{cuando } x = x_{i-1}, \\ f(x_i - 0) & \text{cuando } x = x_i. \end{cases}$$

La función f_i es continua sobre el segmento $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1, 2, \dots, k$ y por consiguiente es integrable sobre él (véase el p. 27.5).

Sobre cada uno de los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ la función f diferencia tal vez de la función continua f_i sólo en los extemos de este segmento. Por consiguiente, según el lema, la función f es integrable sobre $[x_{i-1}, x_i]$ y

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\,dx, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Aplicando la propiedad 3° de las integrales, obtendremos que la función f es integrable sobre el segmento $[a, b]$ y que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{x_{i-1}}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\,dx. \ \square \tag{28.47}$$

OBSERVACIÓN. En el p. 44.5 será demostrada una condición suficiente de integrabilidad más general (véase el teorema 10 en el p. 44.5 y la observación 2 en el p. 44.7) de la cual en particular se deduce que cualquier función acotada sobre un segmento y continua sobre él en todos lor puntos excepto un número finito de puntos, es integrable. Así, la condición de la existencia de sólo un número finito de puntos de discontinuidad de *primer género* para una función f no es sustancial en el teorema 2: ellos pueden ser también de *segundo género* y la afirmación del teorema permanece válida.

Problema 20. Demuéstrese que para que una función acotada sobre un segmento sea integrable sobre él es necesario y suficiente que para cada $\varepsilon > 0$ exista un sistema de intervalos finito o numerable que contuviera todos los puntos de discontinuidad de la función dada y la suma de las longitudes de los cuales fuese menor que el ε dado.

28.4.* DESIGUALDADES INTEGRALES DE HÖLDER Y MINKOWSKI

Sean las funciones f y g definidas e integrables sobre el segmento $[a, b]$, $1 < p < +\infty$ y el número q se define por la igualdad

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{28.48}$$

(véanse (20.49), (20.51) y (20.52)). Entonces tenemos:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \left[\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{1/q} \tag{29.49}$$

(desigualdad de Hölder*);

$$\left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \tag{28.50}$$

(desigualdad de Minkowski**).

---

*) O. Hölder (1859—1937), matemático alemán.

**) G. Minkowski (1864—1906) nació en Rusia, trabajó en Suiza y Alemania.

Demostremos estas desigualdades. Introduzcamos para abreviar las notaciones

$$\|f\|_p \overset{\text{def}}{=} \left[\int_a^b |f(x)|^p dx\right]^{1/p}, \quad \|g\|_q \overset{\text{def}}{=} \left[\int_a^b |g(x)|^q dx\right]^{1/q}. \tag{28.51}$$

En la desigualdad (20.53)

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0,$$

pongamos

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad b = \frac{|g(x)|}{\|q\|_q}, \quad x \in [a, b].$$

Entonces para cualquier $x \in [a, b]$

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Integrando esta desigualdad respecto al segmento $[a, b]$ y utilizando (28.51) y (28.49) hallaremos

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q} \int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{p\|f\|_p^p} \int_a^b |f(x)|_p^p\, dx + \\ + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \int_a^b |g(x)|^q\, dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Por esto

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leqslant \|f\|_p\|g\|_q,$$

es decir, la desigualdad (28.50) queda demostrada.

Demostremos la desigualdad (28.50). Es fácil convencerse de la validez de la desigualdad

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx = \int_a^b |f(x) + g(x)|\, |f(x) + g(x)|^{p-1} dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f(x)|\,|f(x) + g(x)|^{p-1} dx + \int_a^b |g(x)|\,|f(x) + g(x)|^{p-1} dx.$$

Aplicando a cada una de las integrales obtenidas la desigualdad de Hölder y observando que $q(p - 1) = p$ (véase (28.42)) obtendremos:

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p dx\right]^{1/p} \left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^{q(p-1)} dx\right]^{1/q} +$$

$$+\left[\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\left[\int_a^b |f(x)+g(x)|^{q(p-1)}\,dx\right]^{1/q}=$$

$$=\left\{\left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}+\left[\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\right\}\left[\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right]^{1/q}. \quad (28.52)$$

Si el primer miembro de esta desigualdad es igual a cero, entonces la desigualdad (28.50) evidentemente es válida, si no es igual a cero, entonces simplificando ambos miembros de la desigualdad (28.52) por el factor $\left[\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right]^{1/q}$, en virtud de la relación (28.48) obtendremos la desigualdad de Minkowski. □

Señalemos un caso particular importante de la desigualdad de Hölder. Para $p = q = 2$ tenemos

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \sqrt{\int_a^b |f(x)|\,dx}\,\sqrt{\int_a^b |g(x)|\,dx} \quad (28.53)$$

(*desigualdad de Cauchy*).

§ 29. INTEGRAL DEFINIDA CON LÍMITE SUPERIOR VARIABLE

29.1. CONTINUIDAD DE LA INTEGRAL RESPECTO AL LÍMITE SUPERIOR

Sea la función $f(x)$ integrable sobre el segmento $[a, b]$. Entonces ella es integrable sobre cualquier segmento $[a, x]$, donde $a \leqslant x \leqslant b$, es decir, para cualquier $x \in [a, b]$ tiene sentido la integral $\int_a^x f(t)\,dt$.

Analicemos la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \quad (29.1)$$

Esta función F está definida sobre el segmento $[a, b]$ y se llama *integral con límite superior variable*. Establezcamos sus propiedades principales.

Teorema 1. *Si la función f es integrable sobre el segmento $[a, b]$, entonces la función (29.1) es continua sobre este segmento.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $x \in [a, b]$, $x + \Delta x \in [a, b]$. Entonces de la fórmula (29.1) se deduce que

$$F(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = F(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt,$$

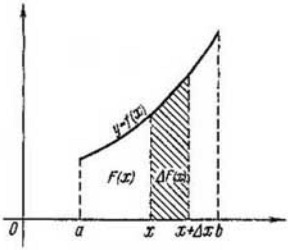


FIG. 121

por eso (fig. 121)

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt. \qquad (29.2)$$

Por cuanto la función f es integrable sobre el segmento $[a, b]$, es acotada sobre este segmento, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para todos los $x \in [a, b]$. Aplicando esta desigualdad para la estimación de la expresión $|\Delta F|$ obtendremos (véase el p. 28.1):

$$|\Delta F| = \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt \right| \leqslant \left| \int_x^{x+\Delta x} |f(t)|\, dt \right| \leqslant \left| \int_x^{x+\Delta x} M\, dt \right| \leqslant M|\Delta x|.$$

De aquí se deduce que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta F = 0$ para cualquier $x \in [a, b]$ y esto significa la continuidad de la función F en cada punto $x \in [a, b]$. □

29.2. DIFERENCIABILIDAD DE LA INTEGRAL RESPECTO AL LÍMITE SUPERIOR. EXISTENCIA DE LA PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN CONTINUA

Teorema 2. *Si la función f es integrable sobre el segmento $[a, b]$ y es continua en el punto $x_0 \in [a, b]$, entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ es diferenciable en el punto x_0 y*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

DEMOSTRACIÓN. Demostremos que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0),$$

donde $\Delta F = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0), x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Para esto estimemos el módulo de la diferencia $\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)$.

Observando que $\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt = 1$ y, por consiguiente, $f(x_0) = \frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dt$, tendremos

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dt}{\Delta x}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} [f(t) - f(x_0)]\,dt\right| \leqslant \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\,dt\right|. \quad (29.3)$$

Sea dado $\varepsilon > 0$. En virtud de la continuidad de la función f en el punto x_0 existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ y $x \in [a, b]$, entonces

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (29.4)$$

Escojamos Δx de forma tal que $|\Delta x| < \delta$. Entonces para los valores de t sobre el segmento respecto al cual se realiza la integración tendremos $|t - x_0| \leqslant |\Delta x| < \delta$ y, por consiguiente, de las desigualdades (29.3) y (29.4) obtendremos

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\Delta x|}\left|\int\limits_{x}^{x_0+\Delta x} dt\right| = \varepsilon,$$

y esto significa que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0)$.

En el caso cuando el punto x_0 coincide con uno de los extremos del segmento $[a, b]$, por $F'(x_0)$ se debe sobreentender la derivada unilateral correspondiente de la función $F(x)$. ☐

Ahora se puede resolver la cuestión sobre la existencia de la primitiva para una función continua arbitraria.

Teorema 3. *Si una función es integrable sobre un segmento y es continua en todos sus puntos excepto un conjunto finito de ellos, entonces sobre este segmento para ella existe una primitiva.*

Corolario. *Una función continua sobre un segmento tiene primitiva.*

DEMOSTRACIÓN. Si la función f es integrable sobre el segmento $[a, b]$ y es continua en todos los puntos de este segmento excepto un conjunto finito de ellos, entonces por los teoremas 1 y 2 su primitiva sobre el segmento $[a, b]$ es, por ejemplo, la función

$$F(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

En realidad, ante todo, según el teorema 1 la función F es continua sobre el segmento $[a, b]$. Más adelante, si por E denotamos el conjunto finito, $E \subset [a, b]$, en los puntos del cual la función f no es continua, entonces para los puntos x restantes, es decir, para los puntos de continuidad de la función f: $x \in [a, b] \setminus E$, por el teorema 2 tiene lugar la igualdad

$$F'(x) = f(x).$$

Esto significa (véase la definición 1 en el p. 22.1) que la función F es una primitiva para la función f sobre el segmento $[a, b]$. □

La validez del corolario se deriva de que si la función es continua sobre cierto segmento, entonces por el teorema 3 del p. 27.5 es integrable sobre él y, por consiguiente satisface las condiciones del teorema demostrado (el conjunto finito de los puntos en los cuales la función es discontinua, en el caso dado es vacío).

De esta forma la operación de integración con límite superior variable aplicada a una función continua nos lleva a una primitiva, es decir, es la operación inversa a la diferenciación

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{29.5}$$

Esta afirmación (llamada *fórmula de deferenciación de la integral definida respecto al límite superior*) es básica para el cálculo deferencial e integral. De ella se deduce, en particular, que cualquier primitiva de una función $f(x)$ continua sobre un segmento $[a, b]$ tiene la forma

$$\int_a^x f(t)\,dt + C, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

En efecto, según lo demostrado la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es una primitiva para la función $f(x)$ y cualquier otra primitiva puede diferenciarse de $f(x)$ sólo en una constante (véase el p. 22.1). De esta forma queda establecida la relación entre las integrales definida e indefinida en la forma

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dt + C.$$

Los teoremas demostrados muestran que la operación de integración con límite superior variable nos lleva al "mejoramiento" o "suavización" de las propiedades de la función: una función integrable pasa a ser continua y una continua, diferenciable.

Observemos que la operación de diferenciación en determinado sentido "empeora" las propiedades de la función: por ejemplo, la derivada de una función continua, si existe, puede ser ya una función discontinua.

De la fórmula de diferenciación respecto al límite superior de integración, es decir, de la fórmula (29.5) se puede obtener fácilmente la fórmula de diferenciación respecto al límite inferior de integración.

Sea la función f integrable sobre el segmento $[a, b]$. Entonces sobre este segmento está definida la función

$$G(x) = \int_x^b f(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b$$

y además de la identidad

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt$$

tenemos

$$G(x) = \int_a^b f(t)\,dt - F(x). \tag{29.6}$$

Si la función f es continua en el punto $x \in [a, b]$, entonces como fue demostrado anteriormente, la función F es diferenciable en este punto. De la fórmula (29.6) se deduce que en este caso la función $G(x)$ también es diferenciable en el punto x y

$$\frac{dG(x)}{dx} = -\frac{dF(x)}{dx}.$$

De esta forma

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt = -f(x).$$

OBSERVACIÓN. De las fórmulas de diferenciación de la integral de una función continua respecto al límite superior (inferior) de integración se deduce también que cualquier función continua sobre cierto intervalo (finito o infinito) tiene sobre él primitiva. En efecto, sea por ejemplo la función f continua sobre el intervalo (a, b). Escojamos un punto arbitrario $x_0 \in (a, b)$ y hagamos

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$

Entonces para todos los $x \in (a, b)$ es válida la igualdad $F'(x) = f(x)$, es decir, $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$ sobre el intervalo (a, b).

Ejercicio 1. Sean la función $f(x)$ continua y $\varphi(x)$, $\psi(x)$ diferenciables en todos los puntos de R. Demuéstrense las siguientes generalizaciones de la fórmula (29.5):

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt = f(\varphi(x))\varphi'(x); \quad \frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x).$$

29.3. FÓRMULA DE NEWTON — LEIBNIZ

Teorema 4 (teorema principal del cálculo integral). *Sea la función f continua sobre el segmento $[a, b]$. Si la función Φ es una primitiva arbitraria sobre este segmento, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{29.7}$$

Esta fórmula se llama *fórmula de Newton*[*)] *— Leibniz*.

DEMOSTRACIÓN. Hagamos $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Por la demostración del corolario de teorema 3 del p. 29.2 la función F es una primitiva para la función f sobre el segmento $[a, b]$. De esta forma F y Φ son dos primitivas de una misma función f sobre el segmento $[a, b]$, por eso

$$F(x) = \Phi(x) + C, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

donde C es cierta constante, es decir,

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) + C, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Para $x = a$ de aquí se deduce que $C = -\Phi(a)$ por consiguiente

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Haciendo aquí $x = b$ obtendremos la fórmula (29.7). □

Para abreviar la escritura a menudo se utiliza la notación

$$\Phi(x)\Big|_a^b \overset{\text{def}}{=} \Phi(b) - \Phi(a),$$

ó

$$[\Phi(x)]_a^b \overset{\text{def}}{=} \Phi(b) - \Phi(a).$$

Si en la demostración realizada del teorema 4 en lugar del corolario del teorema 3 utilizamos el propio teorema, entonces se obtendrá la demostración de una afirmación más general. Enunciémosla también en forma de teorema.

Teorema 4*. *Sea la función f integrable sobre el segmento $[a, b]$ y continua en todos sus puntos excepto un conjunto finito de ellos. Si la función Φ es cualquiera de sus primitivas sobre este segmento, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Esta fórmula también se llama fórmula de Newton — Leibniz. Señalemos que ella es válida también para $a > b$. En efecto, si en ella a y b cambien de puesto, entonces sus miembros primero y segundo cambiarán de signo.

OBSERVACIÓN 1. Se puede mostrar que la condición de integrabilidad de la función sobre el segmento a condición de ser continua en todos los puntos de este segmento, excepto un conjunto finito de ellos, es equivalente a la acotación de la fun-

[*)] I. Newton (1643—1727), físico, mecánico, astrónomo y matemático inglés.

ción sobre este segmento. Esto se deduce directamente de la acotación de una función integrable y de la integrabilidad de una función acotada con un conjunto finito de puntos de discontinuidad (véase la observación al final del p. 28.3).

OBSERVACIÓN 2. Es evidente que las funciones continuas a trozos (véase el p. 28.3) siendo integrables (véase el teorema 2 en el p. 28.3) satisfacen las condiciones del teorema 4*. Prestemos atención no obstante a la circunstancia de que el teorema 4* está demostrado para funciones de un tipo más general que las continuas a trozos: en él no se hace ninguna suposición sobre el carácter de los puntos de discontinuidad de las funciones analizadas, es decir, ellos pueden ser tanto de primer género como de segundo.

Ejemplos 1. Hallamos $\int\limits_0^1 x^2\,dx$. Es conocido que

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C,\ \text{por eso}\ \int\limits_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2. Hallemos $\int\limits_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$. Tenemos

$$\int\limits_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2.$$

Así pues, fue demostrado que si la función f es integrable sobre segmento y el conjunto de sus puntos de discontinuidad es finito, entonces sobre este segmento ella tiene primitiva F y además es válida la fórmula de Newton — Leibniz.

Mostremos ahora que la fórmula de Newton — Leibniz tiene lugar sólo en la suposición de la existencia de la primitiva para una función f integrable, es decir, que para la validez de la fórmula de Newton — Leibniz no es necesario exigir que el conjunto de puntos de discontinuidad de la función f sea finito (no obstante, recordemos que esta propiedad se utilizó sustancialmente en la demostración de la existencia de la primitiva).

Teorema 5. *Sea la función f integrable sobre el segmento $[a, b]$ y F su primitiva sobre este segmento. Entonces*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{29.8}$$

DEMOSTRACIÓN. Por la definición de primitiva, la función F es continua sobre el segmento $[a, b]$ y existe un conjunto finito de puntos $E_f \subset [a, b]$ tal que para todas las $x \in [a, b] \setminus E_f$ se cumple la igualdad $F'(x) = f(x)$. Denotemos por $a_1, a_2, \dots, a_m$ los puntos del conjunto finito E_f y analicemos cualquier partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ que contenga a todos los puntos $a_1, \dots, a_m$. Entonces sobre cada segmento $[x_{i-1}, x_i]$ la función F es continua y en su interior tiene derivada $F'(x) = f(x)$. Por esto, a la función F sobre el segmento indicado se le puede aplicar la fórmula de los incrementos finitos (teorema de Lagrange sobre el valor medio):

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{29.9}$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \dots, k$.

Sumando las igualdades obtenidas desde 1 hasta k y observando que

$$\sum_{i=1}^{k} F(x_i) - F(x_{i-1}) = F(x_k) - F(x_0) = F(b) - F(a),$$

obtendremos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{29.10}$$

En la parte derecha de esta igualdad aparece una suma integral de Riemann de la función f.

Sea ahora $\tau = \tau_n$, $n = 1, 2, \ldots$, una sucesión de particiones que contienen a los puntos $a_1, \ldots, a_m$, para la cual $\delta_{\tau_n} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Pasando al límite cuando $n \to \infty$ en (29.10) y observando que el primer miembro de esta igualdad es constante e igual a $F(b) - F(a)$ y el segundo, en virtud de la integrabilidad de f (véase el teorema 3 en el p. 28.3), tiende a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, obtendremos la fórmula (29.8). □

De la fórmula (29.8) se deduce que si dos funciones integrales f y f_1 sobre el segmento $[a, b]$ tienen una misma primitiva F, entonces sus integrales respecto a este segmento son iguales ya que son iguales al número $F(b) - F(a)$. Por otra parte, no es difícil demostrar esto directamente, ya que en este caso las funciones integrables f y f_1 pueden diferenciarse una de otra sólo en los valores en un número finito de puntos (véase el p. 22.1).

OBSERVACIÓN 3. La fórmula de Newton — Leibniz a veces se escribe en la forma

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{29.11}$$

Aquí se supone que la función F es continua sobre el segmento $[a, b]$ y en todos sus puntos, excepto un conjunto finito, tiene derivada F'. Así pues, la función subintegral en la fórmula (29.11) puede resultar definida no en todos los puntos del segmento $[a, b]$ y por esto exige una aclaración sobre qué se entiende en este caso por la integral $\int_a^b F'(x)\,dx$. En la fórmula (29.11) se supone complementariamente que existe un función f integrable sobre el segmento $[a, b]$ (y por lo tanto definida ya en cada uno de sus puntos) para la cual la función F es su primitiva y por consiguiente existe un conjunto finito E_f tal que para todos los puntos $x \in [a, b] \setminus E_f$ tiene lugar la igualdad $F'(x) = f(x)$. La integral $\int_a^b F'(x)\,dx$ por definición se toma igual a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, es decir,

$$\int_a^b F'x\,dx \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{29.12}$$

Esta definición es correcta ya que no depende de la elección de la función f indicada: para cualquier elección tendrá una misma primitiva F y, por consiguiente, en virtud del teorema 5, un mismo valor de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ igual a $F(b) - F(a)$.

Todo lo dicho hace natural la siguiente definición.

Definición 1. *La función F definida sobre el segmento $[a, b]$ se llama función con derivada integrable sobre este segmento si esixten el conjunto finito $E \subset [a, b]$ y la función f integrable sobre $[a, b]$ tales que para cualquier punto $x \in [a, b] \setminus E$ la función F tiene derivada y $F'(x) = f(x)$.*

Dicho de otro modo, la función F se llama función con derivada integrable sobre cierto segmento si sobre este segmento ella es una primitiva de una función integrable.

Ahora el teorema 5 se puede parafrasear de la siguiente forma.

Teorema 5. *Si la función F es continua sobre el segmento $[a, b]$ y tiene sobre él derivada integrable, entonces*

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ejercicio 2. Demuéstrese que si las funciones F_1 y F_2 integrables sobre el segmento $[a, b]$ tienen derivadas integrables sobre este segmento, entonces su producto F_1F_2 también tiene derivada integrable sobre $[a, b]$.

§ 30. FÓRMULA DEL CAMBIO DE VARIABLE EN LA INTEGRAL E INTEGRACIÓN POR PARTES

30.1. CAMBIO DE VARIABLE

Teorema 1. *Sean*

1) *la función $f(x)$ continua sobre el intervalo (a, b);*

2) *la función $\varphi(t)$ definida y continua junto con su derivada $\varphi'(t)$ sobre el intervalo (α, β) y además para todos los $t \in (\alpha, \beta)$ se cumple la desigualdad $a < \varphi(t) < b$. En este caso si $\alpha_0 \in (\alpha, \beta)$, $\beta_0 \in (\alpha, \beta)$, $a_0 = \varphi(\alpha_0)$, $b_0 = \varphi(\beta_0)$, entonces*

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)\,dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \tag{30.1}$$

Esta fórmula se llama fórmula *del cambio de variable* en la integral definida o fórmula de integración por *sustitución*.

DEMOSTRACIÓN. Ante todo observemos que según la condición, la función f, a ciencia cierta, está definida sobre el conjunto de valores de la función φ (fig. 122) por eso tiene sentido la función compuesta $f[\varphi(t)]$. Según las suposiciones hechas las funciones subintegrales en ambas partes de la fórmula (30.1) son continuas por eso ambas integrales en esta fórmula existen.

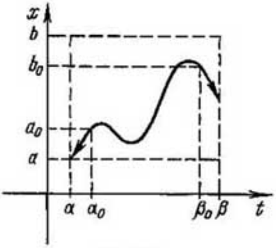


FIG. 122

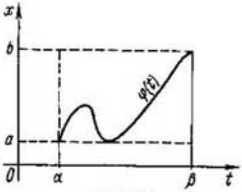


FIG. 123

Sea $\Phi(x)$ cualquier primitiva de la función $f(x)$ sobre el intervalo (a, b). Entonces para los puntos t del intervalo (α, β), tiene sentido la función compuesta $\Phi[\varphi(t)]$ que es una primitiva de la función $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. Por la fórmula de Newton — Leibniz (véase el p. 29.3),

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)\,dx = \Phi(b_0) - \Phi(a_0),$$

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = \Phi[\varphi(\beta_0)] - \Phi[\varphi(\alpha_0)] = \Phi(b_0) - \Phi(a_0).$$

De estas igualdades se deduce la fórmula (30.1) □

Como se ve de la demostración, la fórmula (30.1) es válida tanto para $\alpha_0 \leqslant \beta_0$ como para $\alpha_0 > \beta_0$.

Es interesante señalar que algunos valores de la función $\varphi(t)$ pueden no pertenecer al segmento $[a_0, b_0]$ respecto al cual se integra (véase la fig. 122) en la parte izquierda de la igualdad (30.1).

Si utilizamos la fórmula para las derivadas unilaterales de una función compuesta (véase la observación 2 en el p. 9.7), entonces la fórmula (30.1) se puede demostrar para el caso cuando la función f se da sobre el segmento $[a, b]$, la función $\varphi(t)$ sobre el segmento $[\alpha, \beta]$ y el conjunto de los valores de la función φ se contiene en el segmento $[a, b]$ y además $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ (fig. 123). En este caso la fórmula del cambio de variable puede ser aplicada a todo el segmento $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \tag{30.2}$$

Al utilizar el símbolo de la integral definida siempre escribimos bajo el signo de la integral la expresión $f(x)\,dx$ donde x es una variable independiente. Además, cuando se daba la definición de integral definida no se suponía que $f(x)\,dx$ es la diferencial de alguna función. Luego (véase el p. 29.2) fue mostrado que al menos para una función f continua la expresión $f(x)\,dx$ siempre es la diferencial de cierta función $F(x)$: $dF(x) = f(x)\,dx$. Por esto es natural considerar que en este caso las escrituras $\int_a^b dF(x)$ y $\int_a^b f(x)\,dx$ tiene el mismo valor, es decir,

$$\int_a^b dF(x) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

En general permitiremos bajo el signo de la integral definida cualquier escritura de una diferencial, es decir, por definición, para una función $g(x)$ diferenciable haremos:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

(si por supuesto la integral que aparece en el segundo miembro de la igualdad existe). Con ayuda de esta notación, por ejemplo, la fórmula (30.2) toma la forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,d\varphi(t).$$

De esta forma, al cambiar la variable $x = \varphi(t)$ en la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ se debe formalmente sustituir en todos los casos x por $\varphi(t)$ y de la forma correspondiente cambiar los límites de integración.

Prestemos atención a que al utilizar la fórmula (30.1) (respectivamente, la fórmula (30.2)) de forma semejante al caso de la integral indefinida, se puede aplicarla tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda. No obstante, a diferencia de la integral indefinida donde al final del cálculo debíamos regresar a la variable de integración inicial, aquí no es necesario hacer esto, ya que nuestro objetivo es hallar un número, que en virtud de las fórmulas demostradas es igual al valor de cada una de las integrales analizadas.

Ejemplos. 1. Calculemos la integral $\int_0^2 e^{x^2}x\,dx$. Aplicando la fórmula (30.1) de derecha a izquierda (aquí el papel de la variable t lo juega x), obtendremos

$$\int_0^2 e^{x^2}x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{x^2}\,dx^2 = \frac{1}{2}\int_0^4 e^y\,dy = \frac{1}{2}\,e^y\Big|_0^4 = \frac{e^4-1}{2}\,.$$

2. Supongamos que se exige calcular la integral $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$. Tratemos de simplificar la expresión subintegral haciendo $\sqrt{e^x-1} = t$. Dicho de otro modo, hagamos el cambio de variable $x = \ln(1+t^2)$; entonces $dx = \dfrac{2t\,dt}{1+t^2}$ y por cuanto para $0 \leqslant t \leqslant 1$ tenemos $0 \leqslant x \leqslant \ln 2$, entonces aplicando la fórmula (30.1) de izquierda a derecha obtendremos

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx = 2\int_0^1 \frac{t^2 dt}{1 + t^2} = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + t^2}\right) dt = 2[t - \operatorname{arctg} t]_0^1 = \frac{4 - \pi}{2}.$$

Ejercicio 1. Demuéstrese que si la función f es continua sobre $[a, b]$ y para todos los $t \in [0, b - a]: f(a + t) = f(b - t)$, entonces

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a + b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

La fórmula del cambio de variable en una integral definida con ayuda de la fórmula de Newton — Leibniz puede ser generalizada al caso cuando la función f, permaneciendo integrable, tendrá un número finito de puntos de discontinuidad.

30.2. INTEGRACIÓN POR PARTES

Teorema 2. *Si las funciones $u(x)$ y $v(x)$ son continuas sobre el segmento $[a, b]$ y tienen sobre él derivadas integrables, entonces*

$$\int_a^b u\, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \tag{30.3}$$

Esta fórmula se llama *fórmula de integración por partes* para la integral definida.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos:

$$\int_a^b (uv)'\, dx = \int_a^b (uv' + u'v)\, dx = \int_a^b u dv + \int_a^b v du. \tag{30.4}$$

Todas las integrales escritas existen ya que las funciones subintegrales son integrables. De acuerdo con la fórmula de Newton — Leibniz (29.11) tenemos

$$\int_a^b (uv)'\, dx = [uv]_a^b. \tag{30.5}$$

Comparando las fórmulas (30.4) y (30.5) obtendremos la igualdad

$$\int_a^b u du + \int_a^b v du = [uv]_a^b,$$

de donde se deduce la fórmula (30.3). □

El teorema 2 se generaliza fácilmente al caso de las así llamadas funciones continuamente diferenciables a trozos. Definamos estas funciones.

Supongamos que la función $f(x)$ está definida sobre el segmento $[a, b]$, existe una partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ tal que la función $f(x)$ es continua sobre cada uno de los intervalos (x_{i-1}, x_i) y existen los límites finitos $f(x_{i-1} + 0)$, $f(x_i - 0)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. (Por consiguiente, la función f es continua a trozos sobre el segmento $[a, b]$, véase la definición 1 en el p. 28.3). Introduzcamos como se hizo anteriormente (véase la demostración del teorema 2 en el p. 28.3) las funciones

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x_{i-1} < x < x_i, \\ f(x_{i-1} + 0) & \text{si } x = x_{i-1}, \\ f(x_i - 0) & \text{si } x = x_i. \end{cases}$$

Definición 1. *Si cada función $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, es (continuamente) diferenciable sobre el segmento $[x_{i-1}, x_i]$, entonces la función $f(x)$ se llama (continuamente) diferenciable a trozos sobre el segmento $[a, b]$.*

Teorema 2'. *Sean las funciones $u(x)$ y $v(x)$ continuas y continuamente diferenciables a trozos sobre el segmento $[a, b]$; entonces para ellas el válida la fórmula (30.3) de integración por partes.*

La demostración del teorema 2 permanece válida también en este caso. En realidad, el producto uv es continuo y su derivada $(uv)' = uv' + u'v$ es continua a trozos. Por esto, según el teorema 5 del p. 29.2 a la integral que aparece en la parte izquierda de (30.5) se le puede aplicar también la fórmula de Newton — Leibniz. □

Ejemplos. 1. Hallemos el valor de la integral $\int_1^2 \ln x\, dx$. Apliquemos la fórmula de integración por partes:

$$\int_1^2 \ln x\, dx = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2 \ln 2 - 1.$$

2. Mostremos que para cualquier $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \dfrac{\pi}{2} & \text{cuando } n \text{ es par}^{*)} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{cuando } n \text{ es impar} \end{cases} \tag{30.7}$$

Observemos ante todo que la igualdad de las integrales que aparecen en (30.7) se establece fácilmente con ayuda del cambio de variable $x = \pi/2 - t$. Más adelante integrando por partes obtendremos:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-1} x\, d(-\cos x) =$$

$$= -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x\, dx =$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x (1 - \operatorname{sen}^2 x)\, dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n,$$

*) Por $n!!$, $n \in N$, $n > 1$, se sobrentiende el producto de todos los números naturales que no sobrepasan n y que tienen la misma paridad que n.

de donde

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Observemos que $I_0 = \int\limits_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = 1$. Por esto para $n = 2k + 1$, es decir, para n impar, tendremos

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \ldots = \frac{2k(2k-2)\ldots 2}{(2k+1)(2k-1)\ldots 1} I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!},$$

y para $n = 2k$, es decir, para n par

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \ldots = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 1}{2k(2k-2)\ldots 2} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{\pi}{2},$$

$$k = 1, 2, \ldots . \square$$

De la fórmula (30.7) se obtiene fácilmente la así llamada *fórmula de Wallis**), que necesitaremos en el futuro

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2. \tag{30.8}$$

Demostrémosla. Integrando la desigualdad

$$\operatorname{sen}^{2n+1} x \leqslant \operatorname{sen}^{2n} x \leqslant \operatorname{sen}^{2n-1} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/2,$$

respecto al segmento $[0, \pi/2]$ tendremos

$$\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-1} x\, dx$$

(no es difícil mostrar que en realidad aquí tienen lugar desigualdades estrictas). En virtud de (30.7)

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

de donde

$$x_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{1}{2n} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \stackrel{\text{def}}{=} y_n. \tag{30.9}$$

Por cuanto según esta desigualdad

$$y_n - x_n = \frac{1}{2n}\,\frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \leqslant \frac{1}{2n}\,\frac{\pi}{2} \to 0$$

---

*) J. Wallis (1616—1703), matématico inglés.

cuando $n \to \infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (y_n - x_n) = 0$, es decir, las longitudes de los segmentos $[x_n, y_n] \ni \pi/2$ tienden a cero y, por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \pi/2, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \pi/2.$$

La primera de estas igualdades por la definición de x_n (véase (30.9)) significa la validez de la fórmula de Wallis. □

Ejercicios. Calcúlense las integrales definidas:

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. 4. $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

3. $\int\limits_0^2 |x-1|\,dx$. 5. $\int\limits_0^{\pi/2} x\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x} + \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right) dx$.

30.3*. SEGUNDO TEOREMA SOBRE EL VALOR MEDIO PARA LA INTEGRAL DEFINIDA

Lema 1. *Sea f continua y g una función creciente, no negativa, continuamente diferenciable sobre el segmento $[a, b]$. Entonces existe el punto $\xi \in [a, b]$ tal que*

$$\int\limits_a^b g(x)f(x)\,dx = g(b)\int\limits_\xi^b f(x)\,dx. \tag{30.10}$$

DEMOSTRACIÓN. Analicemos la función

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_x^b f(t)\,dt, a \leqslant x \leqslant b. \tag{30.11}$$

La función F siendo la integral de una función integrable f (incluso continua) con límite inferior variable, es continua sobre el segmento $[a, b]$ y por esto alcanza sobre él su valor máximo y mínimo. Si

$$m = \min_{[a,b]} F(x), \quad M = \max_{[a,b]} F(x), \tag{30.12}$$

entonces, evidentemente

$$m \leqslant F(x) \leqslant M, \quad x \in [a, b]. \tag{30.13}$$

Observando que $dF(x) = -f(x)\,dx$ e integrando por partes la integral que aparece en el primer miembro de la igualdad (30.10) obtendremos

$$\int\limits_a^b g(x)f(x)\,dx = -\int\limits_a^b g(x)dF(x) = g(x)F(x)\Big|_a^b + \int\limits_a^b F(x)g'(x)\,dx =$$

$$= g(a)F(a) + \int\limits_a^b F(x)g'(x)\,dx \tag{30.14}$$

ya que por (30.11) $F(b) = 0$.

Como consecuencia del crecimiento de la función g tenemos $g'(x) \geqslant 0$ para todos los $x \in [a, b]$. Aplicando esta desigualdad y las desigualdades (30.13) y observando que del hecho de que la función g es no negativa sobre $[a, b]$ se deduce en particular que $g(a) \geqslant 0$ obtendremos las estimaciones

$$g(a)F(a) + \int_a^b F(x)g'(x)\,dx \leqslant Mg(a) + M\int_a^b g'(x)\,dx =$$

$$= Mg(a) + M[g(b) - g(a)] = Mg(b),$$

$$g(a)F(a) + \int_a^b F(x)g'(x)\,dx \geqslant mg(a) + m[g(b) - g(a)] = mg(b).$$

De esta forma (véase (30.14)) tenemos

$$mg(b) \leqslant \int_a^b g(x)f(x)\,dx \leqslant Mg(b).$$

Si $g(b) = 0$, entonces del hecho de que la función g es no negativa y crece se deduce que $g(x) \equiv 0$ sobre $[a, b]$. En este caso la fórmula (30.10) es válida para cualquier elección de $\xi \in [a, b]$.

Si $g(b) > 0$, entonces

$$m \leqslant \frac{1}{g(b)}\int_a^b g(x)f(x)\,dx \leqslant M.$$

Por cuanto la función F continua sobre el segmento $[a, b]$ toma sobre este segmento cualquier valor entre su valor mínimo m y máximo M (véase (30.12)), entonces existe un punto $\xi \in [a, b]$ tal que

$$F(\xi) = \frac{1}{g(b)}\int_a^b g(x)f(x)\,dx.$$

Por la condición (30.11) ésta es la fórmula (30.10). □

Teorema 3 (Bonnet*)). *Sea f continua y g una función monótona, continuamente diferenciable sobre el segmento $[a, b]$. Entonces existe un punto $\xi \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b g(x)f(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx. \qquad (30.15)$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos inicialmente que la función g crece sobre el segmento $[a, b]$; entonces la función $h(x) \overset{\text{def}}{=} g(x) - g(a)$, $a \leqslant x \leqslant b$, será una función no negativa, creciente y continuamente diferenciable sobre el segmento $[a, b]$.

*) O. Bonnet (1819—1892), matemático francés.

Según el lema existe $\xi \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b h(x)f(x)\,dx = h(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Sustituyendo aquí por la expresión de $h(x)$ obtendremos

$$\int_a^b [g(x) - g(a)]f(x)\,dx = [g(b) - g(a)]\int_\xi^b f(x)\,dx,$$

de donde

$$\int_a^b g(x)f(x)\,dx = g(a)\int_a^b f(x)\,dx - g(a)\int_\xi^b f(x)\,dx +$$
$$+ g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx,$$

es decir, se obtuvo la fórmula (30.15).

Si la función g decrece sobre el segmento $[a, b]$, entonces para la demostración del teorema es suficiente aplicar la fórmula (30.15) a la función $-g$, que evidentemente crece. □

Señalemos que el teorema 2 es válido también en restricciones más débiles: es suficiente exigir de la función f su integrabilidad y de g, su monotonía.

30.4. INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

De forma análoga a como fueron definidas las integrales de una función numérica, se pueden definir las integrales de funciones vectoriales, cuyos valores pertenecen al espacio vectorial n-dimensional R^n (véase el p. 18.4).

Supongamos que $r(t) \in R^n$, $a \leqslant t \leqslant b$, es una función vectorial, $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ es una partición del segmento $[a, b]$, $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, δ_τ es la finura de la partición τ. Si para cualquier elección indicada de los puntos ξ_i existe el límite*)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{i_0} r(\xi_i)\Delta t_i,$$

que no depende de la elección de la sucesión de particiones, entonces se llama *integral de la función* $r(t)$ respecto al segmento $[a, b]$ y se denota por

$$\int_a^b r(t)\,dt.$$

*) El concepto de límite en este caso se define o bien con ayuda del límite de una sucesión vectorial o bien en el lenguaje ($\varepsilon - \delta$) de forma completamente análoga al caso de las funciones escalares analizado en el p. 27.1 y se propone al lector.

Para a y b constantes ella es un vector constante en R^n.

Sea $r(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Por cuanto en la adición de vectores se sumaron sus coordenadas, en la multiplicación de vectores por un número, sus coordenadas se multiplican por ese mismo número y el límite de una función vectorial es igual al vector cuyas coordenadas son los límites de las coordenadas correspondientes, entonces

$$\int_a^b r(t)\,dt = \left(\int_a^b x_1(t)\,dt, \dots, \int_a^b x_n(t)\,dt\right).$$

En virtud de esta igualdad, muchas propiedades de las integrales de las funciones numéricas se trasladan a las integrales de las funciones vectoriales. En particular, la función vectorial $F(t)$ definida sobre cierto intervalo E finito o infinito se llama *primitiva para la función* $r(t) \in R^n$ dada, definida sobre ese mismo intervalo si en todos sus puntos interiores t tiene lugar la igualdad $F'(t) = r(t)$ y sobre cada extremo del intervalo E que pertenece a E, la función F es continua.

Para las funciones vectoriales es válida la afirmación análoga al teorema principal del cálculo integral (véase el teorema 4 del p. 29.3):

si la función vectorial $r(t) \in R^n$ es integrable sobre el segmento $[a, b]$ y continua en sus puntos interiores (en particular, si es continua sobre todo el segmento $[a, b]$) entonces para ella existe la primitiva sobre este segmento y para cualquiera de sus primitivas $F(t)$ es válida la fórmula

$$\int_a^b r'(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

que se llama fórmula de Newton — Leibniz como en el caso de las funciones escalares.

La validez de esta afirmación se deduce de la validez de la fórmula de Newton — Leibniz para todas las coordenadas de la función $r(t)$.

OBSERVACIÓN. En el p. 15.2 fue demostrado el siguiente teorema: si la función vectorial $r(t)$) es continua sobre el segmento $[a, b]$ y diferenciable en su interior, entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$|r(b) - r(a)| \leqslant |r'(\xi)|\,(b - a).$$

La demostración de esta afirmación realizada en el p. 15.2 tuvo un carácter algo artificial, era necesario notar la necesidad de utilizar cierta función auxiliar. Con ayuda del concepto de integral (suponiendo la continuidad de la derivada de la función vectorial analizada) la demostración se puede realizar de forma maś natural.

Supongamos que la función vectorial $r(t) \in R^n$ tiene derivada continua sobre el segmento $[a, b]$. Entonces aplicando la fórmula de Newton — Leibniz obtenemos

$$|r(b) - r(a)| = \left|\int_a^b r'(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |r'(t)|\,dt.$$

En la parte derecha se obtuvo la integral de una función escalar continua. Por el teorema integral sobre la media (véase el corolario del teorema 1 en el p. 28.2) existe el punto $\xi \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b |r'(t)|\, dt = |r'(\xi)|(b - a);$$

por consiguiente

$$|r(b) - r(a)| \leqslant |r'(\xi)|(b - a), \xi \in (a, b). \square$$

§ 31. MEDIDA DE LOS CONJUNTOS ABIERTOS PLANOS

31.1. DEFINICIÓN DE MEDIDA (AREA) DE CONJUNTOS ABIERTOS

Analicemos el plano sobre el cual está fijo cierto sistema de coordenadas rectangular. Denotemos por T_0 una partición de este plano en cuadrados cerrados que se obtienen al trazar todas las rectas posibles $x = p$, $y = q$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. A tal partición la llamaremos *cuadrilaje del plano de rango* 0 y a los cuadrados indicados, *cuadrados de rango nulo*. Dividamos cada uno de los cuadrados de rango nulo en 100 cuadrados iguales por rectas paralelas a los ejes de coordenadas (dos rectas vecinas cualesquiera se encuentran a una distancia de 1/10 una de otra). Al conjunto de cuadrados obtenidos lo denotaremos por T_1. Continuando este proceso obtenemos los cuadrilajes T_m, $m = 1, 2, \dots$, del plano compuesto por cuadrados formados como resultado del trazo de todas las rectas posibles del tipo

$$x = \frac{p}{10^m}, \quad y = \frac{q}{10^m}, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

y por consiguiente con lados de longitud $1/10^m$. A los cuadrados que pertenecen al cuadrilaje T_m los llamaremos *cuadrados de rango m*, $m = 1, 2, \dots$

Sea G un conjunto abierto plano. Denotemos por $s_0 = s_0(G)$ el conjunto de puntos de todos los cuadrados de rango nulo que están, junto con su frontera, en el conjunto G y por $s_1 = s_1(G)$ el conjunto de los puntos de todos los cuadrados de primer rango que están en G junto con su frontera. En general por $s_m = s_m(G)$ denotaremos el conjunto de todos los cuadrados de rango m que están junto con su frontera en el conjunto G, $m = 0, 1, \dots$ Es evidente que (fig. 124)

$$s_0 \subset s_1 \subset \dots \subset s_m \subset \dots \subset G. \tag{31.1}$$

Los conjuntos $s_0, s_1, \dots, s_m, \dots$ son "polígonos" compuestos por un número finito o infinito de cuadrados del rango correspondiente. En el caso cuando s_m está compuesto por un número finito de cuadrados, denotaremos el área del polígono s_m por ar. s_m, si s_m está compuesto por un número infinito de cuadrados, hacemos ar. $s_m = +\infty$. Si algún s_m está compuesto por un número infinito de cuadrados, entonces todos los s_m posteriores, $m \geqslant m_0$ también están compuestos por un número infinito de cuadrados.

De las inclusiones (31.1) en virtud del acuerdo sobre el símbolo $+\infty$ (véase el p. 3.1) se deduce que siempre

$$\text{ar}.\, s_0 \leqslant \text{ar}.\, s_1 \leqslant \dots \leqslant \text{ar}.\, s_m \leqslant \dots . \tag{31.2}$$

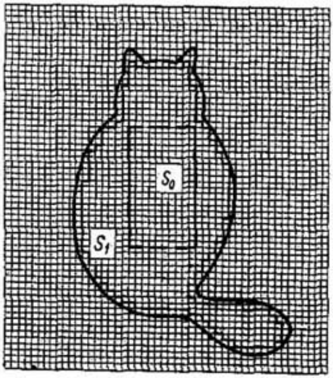


FIG. 124

Son posibles dos casos.

1. Todas las ar. s_m son finitas, entonces (31.2) es una sucesión creciente monótonamente y por esto tiene o bien un límite finito o bien tiende a $+\infty$. Este límite en este caso se llama *área, o medida, del conjunto abierto* G y se denota por mes G*).

2. Si existe un número m_0 tal que ar. $s_{m_0} = +\infty$, entonces ar. $s_m = +\infty$ también para todos los números $m \geqslant m_0$. En este caso haremos

$$\text{mes}\, G = +\infty.$$

Por la definición de límite de una sucesión de elementos de la recta numérica extendida $\overline{R}$ (véase el p. 4.2) la sucesión de elementos a_n, $n = 1, 2, \dots$, que pertenecen al conjunto ampliado de los números reales $\overline{R}$ tales que comenzando desde cierto número todos son iguales a $+\infty$, tiene $+\infty$ en calidad de su límite $\lim a_n = +\infty$.
Utilizando este concepto ambos casos anteriormente analizados se pueden unir en uno. Enunciemos la definición final.

Definición 1. *El límite* $\lim\limits_{m \to \infty} \text{ar.}\, s_m(G)$ *(finito o infinito) se llama área, o medida, del conjunto abierto* G *y se denota por* mes G:

$$\text{mes}\ G = \lim_{m \to \infty} \text{ar.}\, s_m(G). \tag{31.3}$$

Tal definición de medida de un conjunto abierto es natural, ya que la sucesión de conjuntos s_m, $m = 0, 1, \dots$, agota el conjunto abierto, es decir,

*) Del vocablo francés mésure, medida, talla.

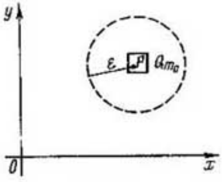


FIG. 125

$$\bigcup_{m=0}^{\infty} s_m = G,$$

dicho de otro modo, para cualquier punto $P \in G$ existe el polígono s_{m_0} tal que

$$P \in s_{m_0}.$$

En efecto, cualquiera que sea el punto $P \in G$, por ser el conjunto G abierto, existe la circunferencia esférica $U(P; \varepsilon) \subset G$, $\varepsilon > 0$. Observando ahora que el diámetro del cuadrado de rango m es igual a $\sqrt{2}/10^m$, escojamos m_0 de forma tal que

$$\frac{1}{10^{m_0}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}. \tag{31.4}$$

Para cualquier punto del plano existe al menos un cuadrado de cada rango que contiene este punto. Sea Q_{m_0} un cuadrado de rango m_0 que contiene el punto P. En virtud de la desigualdad (31.4) $Q_{m_0} \subset U(P; \varepsilon)$ lo que significa que $Q_{m_0} \subset G$ y, por consiguiente, $Q_{m_0} \subset s_{m_0}$, pero $P \in Q_{m_0}$, por lo que $P \in s_{m_0}$ (fig. 125). □

Si el conjunto abierto G es acotado, entonces siempre mes $G < +\infty$. En realidad, si G es acotado, entonces existe un cuadrado cerrado Q que contiene el conjunto $G (G \subset Q)$ y que es una unión de cuadrados de rango nulo, entonces $s_m(G) \subset Q$ para cualquier $m = 0, 1, \dots$ y quiere decir que ar. $s_m(G) \leqslant$ ar. Q.

De esta forma la sucesión (31.2) está acotada superiormente y por lo tanto el límite (31.2) es finito.

Problema 21. Demuéstrese que la medida de un conjunto abierto plano no depende de la elección del sistema rectangular sobre el plano sobre el cual está ubicado.

Del curso de matemática elemental es conocido que en el caso cuando el conjunto abierto S es un polígono, entonces su área, siendo por definición, el área del polígono cerrado $\overline{S}$, coincide con la medida definida por nosotros:

$$\text{ar.}\,\overline{S} = \text{ar.}\,S = \text{mes}\,S^{*)}.$$

*) Véase también el p. 44.2 (conjuntos cuadrables).

31.2. PROPIEDADES DE LA MEDIDA DE LOS CONJUNTOS ABIERTOS

Teorema 1 (monotonía de la medida). *Si G y Γ son conjuntos abiertos planos y*

$$G \subset \Gamma, \tag{31.5}$$

entonces

$$\operatorname{mes} G \leqslant \operatorname{mes} \Gamma. \tag{31.6}$$

DEMOSTRACIÓN. Denotemos, como anteriormente, por $s_m(G)$ y por $s_m(\Gamma)$ los conjuntos de cuadrados de rango m que se contienen junto con su frontera en los conjuntos G y Γ, $m = 1, 2, \dots$, respectivamente. Entonces de la condición (31.5) se deduce que

$$s_m(G) \subset s_m(\Gamma),$$

de donde

$$\text{ar.}\, s_m(G) \leqslant \text{ar.}\, s_m(\Gamma). \tag{31.7}$$

En el caso cuando ambos conjuntos $s_m(G)$ y $s_m(\Gamma)$ están compuestos por un número finito de cuadrados esto se deduce de que el área del polígono que abarca no es menor que el área del polígono abarcado y en el caso cuando menos uno de los conjuntos $s_m(G)$ y $s_m(\Gamma)$ contiene un número infinito de cuadrados, del acuerdo sobre la utilización del símbolo $+\infty$.

Pasando al límite en la desigualdad (31.7) cuando $m \to \infty$ por (31.3) obtendremos la desigualdad (31.6). □

Teorema 2. *Sean G y G_k, $k = 1, 2, \dots$, conjuntos planos abiertos* $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_k \subset \dots$ *y* $G = \bigcup\limits_{i=1}^{k} G_k$, entonces

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} G_k = \operatorname{mes} G. \tag{31.8}$$

Observemos que si para cierto k_0 tiene lugar $\operatorname{mes} G_k = +\infty$, entonces por el teorema 1, para todos los $k \geqslant k_0$ también $\operatorname{mes} G_k = +\infty$; en este caso la igualdad (31.8) significa que $\operatorname{mes} G = +\infty$.

Demostremos previamente un lema.

Lema 1. *Sean G_k, $k = 1, 2, \dots$, conjuntos abiertos planos,*

$$G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_k \subset G_{k+1} \subset \dots \tag{31.9}$$

y

$$G = \bigcup_{i=1}^{k} G_k. \tag{31.10}$$

Entonces si X es compacto y

$$X \subset G, \tag{31.11}$$

pues existe un número k_0 tal que

$$X \subset G_{k_0}. \tag{31.12}$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. De (31.10) y (31.11) se deduce que el sistema $\{G_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, forma un recubrimiento abierto del conjunto X. Por esto, según el teorema sobre los recubrimientos abiertos de un compacto (véase el teorema 4 en el p. 18.3) existe un recubrimiento finito $\{G_{k_1}, \ldots, G_{k_m}\}$ del conjunto X

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{m} G_{k_i}.$$

Denotemos por k_0 el mayor de los números $k_1, \ldots, k_m$. En virtud de la condición (31.9) tenemos la igualdad

$$\bigcup_{i=1}^{m} G_{k_i} = G_{k_0}.$$

Por consiguiente $X \subset G_{k_0}$.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2. Previamente observemos que de la condición $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_k \subset \ldots$ se deduce (véase el teorema 1) que

$$\operatorname{mes} G_1 \leqslant \operatorname{mes} G_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{mes} G_k \leqslant \ldots, \tag{31.13}$$

por eso la sucesión G_k, $k = 1, 2, \ldots$, siempre tiene límite finito o igual a $+\infty$.

Analicemos dos casos.

1. Supongamos que todos los conjuntos $s_m(G)$, $m = 0, 1, \ldots$, están compuestos por un número finito de cuadrados. En este caso cada uno de los conjuntos $s_m(g)$ es un conjunto acotado y cerrado y, por consiguiente, compacto. Por esto, según el lema 1, para cada número m existe el número k_m tal que

$$s_m(G) \subset G_{k_m}, \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{31.14}$$

Además, escojamos k_m de forma tal que $k_{m'} > k_m$ para $m' > m$. Esto siempre se puede hacer, por ejemplo, de la siguiente forma. Si están escogidos los números $k_1 < k_2 < \ldots < k_{m-1}$, y para el conjunto $s_m(G)$, por el lema 1, se ha hallado el conjunto G_n tal que

$$s_m(G) \subset G_n, \tag{31.15}$$

entonces denotaremos por k_m cualquier número natural tal que $k_m > k_{m-1}$ y $k_m \geqslant n$; entonces $G_n \subset G_{k_m}$ y quiere decir que $s_m(G) \subset G_{k_m}$. De esta forma la sucesión construida k_m, $m = 1, 2, \ldots$, es una subsucesión de la sucesión de los números naturales.

Denotemos ahora por $\mathring{s}_m(G)$ el conjunto de todos los puntos interiores del conjunto $s_m(G)$. Evidentemente $\mathring{s}_m(G)$ es un conjunto abierto y $\mathring{s}_m(G) \subset s_m(G) \subset G_{k_m}$ por eso en virtud del teorema 1

$$\operatorname{mes} \mathring{s}_m(G) \leqslant \operatorname{mes} G_{k_m}. \tag{31.16}$$

Por cuanto $G_k \subset G$, $k = 1, 2, \ldots$, entonces por el mismo teorema 1

$$\operatorname{mes} G_{k_m} \leqslant \operatorname{mes} G. \tag{31.17}$$

Uniendo las desigualdades (31.16) y (31.17) obtendremos:

$$\operatorname{mes} s_m(G) = \operatorname{mes} \mathring{s}_m(G) \leqslant \operatorname{mes} G_{k_m} \leqslant \operatorname{mes} G.$$

Pasando al límite cuando $m \to \infty$ en esta desigualdad, tendremos

$$\lim_{m \to \infty} \operatorname{mes} G_{k_m} = \operatorname{mes} G,$$

ya que por (31.3): $\lim\limits_{m \to \infty} \operatorname{mes} s_m(G) = \operatorname{mes} G$.

La sucesión $\{\operatorname{mes} G_k\}$ como se señaló anteriormente, tiene límite finito o infinito, por eso coincide con el límite de cualquiera de sus subsucesiones, por consiguiente

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} G_k = \operatorname{mes} G,$$

es decir, se cumple la igualdad (31.8).

2. Supongamos que existe el conjunto $s_m(G)$ que contiene número infinito de cuadrados, entonces ar. $s_m(G) = +\infty$, por eso mes $G = +\infty$. Mostremos que en este caso

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} G_k = +\infty. \tag{31.18}$$

Sea dado $\varepsilon > 0$ y supongamos que $s_m(G)$ está compuesto por un conjunto infinito de cuadrados. El área de cada cuadrado de rango m es igual a $\dfrac{1}{10^{2m}}$. Fijemos el número natural n de forma tal que

$$n/10^{2m} > \varepsilon, \tag{31.19}$$

y escojamos de $s_m(G)$ n cuadrados cualesquiera. Denotemos el conjunto de sus puntos por D. El conjunto D es un polígono (es la unión de un número finito de cuadrados) y, por consiguiente, es un conjunto acotado y cerrado, es decir, un compacto, además

$$\text{ar.}\, D = \frac{n}{10^{2m}}. \tag{31.20}$$

Por el lema existe un número k tal que

$$D \subset G_k. \tag{31.21}$$

Denotemos pos $\mathring{D}$ el conjunto de los puntos interiores del polígono D. De acuerdo con el teorema 1 y las fórmulas (31.19), (31.20) obtendremos

$$\operatorname{mes} G_k \geqslant \text{ar.}\, \mathring{D} = \text{ar.}\, D > \varepsilon.$$

En virtud de (31.13), para todos los $k' \geqslant k$

$$\operatorname{mes} G_k > \varepsilon.$$

Esto significa el cumplimiento de la condición (31.18). □

Como ejemplo de región plana no acotada que tiene medida infinita sirve la franja

$$G = \{(x, y) : 0 < y < 1\}.$$

Ella contiene en sí un conjunto infinito, por ejemplo, de cuadrados de primer rango y por lo tanto

$$\operatorname{mes} G = +\infty.$$

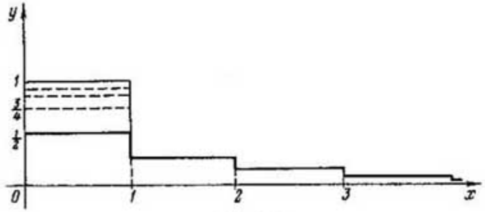


FIG. 126

Para construir un ejemplo de región no acotada con área finita obremos de la siguiente forma. Sea Q un cuadrado unitario:

$$Q = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\},$$

Hagamos

$$G_1 = \{(x, y) : 0 < x < 1, \quad 0 < y < \frac{1}{2}\},$$

$$G_2 = G_1 \cup \{(x, y) : 1 \leqslant x < 2, \quad 0 < y < \frac{1}{4}\},$$

en general

$$G_{k+1} = G_k \cup \{x, y) : k \leqslant x < k+1, \quad 0 < y < \frac{1}{2^{k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Cada conjunto G_k es abierto (¿por qué?).

Gráficamente la formación de los conjuntos G_k podemos representarla de la siguiente forma: G_1 es la mitad del cuadrado Q; para obtener G_2 se toma la mitad de la mitad restante de Q y se une de la forma correspondiente a G_1, se obtiene G_2; más adelante la mitad de la parte restante del cuadrado Q se une ya a G_3 (fig. 126), etc.

Evidentemente tenemos una cadena de inclusiones

$$G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_k \subset \dots$$

y

$$\text{ar.}\, G_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^k}.$$

Hagamos $G_2 = \bigcup\limits_{k=1} G_k$.

El conjunto G es abierto y no acotado. Hallemos, aplicando el teorema 2, su área:

$$\text{mes}\, G = \lim_{k \to \infty} \text{mes}\, G_k = \lim_{k \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = 1.$$

La medida (volumen) de los conjuntos abiertos en el espacio tridimensional y en general n-dimensional ($n = 1, 2, 3, 4, \ldots$) se define con ayuda de una construcción análoga, sólo se debe, naturalmente, partir no de una partición del plano en cuadrados, sino de una partición del espacio en los cubos n-dimensionales correspondientes. Al caso n-dimensional también se trasladan los teoremas demostrados en este párrafo. Aún regresaremos al estudio de la medida en los capítulos futuros, véase el p. 44.1. En ese punto se desarrollarán más completamente las propiedades de la medida (por ejemplo, su comportamiento en la unión de conjuntos, la tal llamada aditividad de la medida), lo que se puede leer inmediatamente después del presente párrafo.

Ejercicios. 1. Demuéstrese que el área de un rectángulo es igual al producto de sus lados.

2. Sea G un cilindro recto circular, cuya base es el círculo K y cuya altura tiene una longitud h. Demuéstrese que mes $G = h$ mes K donde mes G es la medida de G en el espacio y mes K es la medida de K sobre el plano.

§ 32. ALGUNAS APLICACIONES GEOMÉTRICAS Y FÍSICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

32.1. CÁLCULO DE LAS ÁREAS

En este punto se deducirán las fórmulas para el cálculo de las áreas de algunas regiones planas. Además nos serviremos de las propiedades del área de las figuras planas más simples (polígonos, sectores) conocidas de la matemática elemental, por ejemplo, de que en la unión de tales figuras que no tengan puntos interiores comunes, sus áreas se suman. Además, esta afirmación será demostrada estrictamente en el p. 44.1.

Teorema 1. *Sea f una función definida, no negativa y continua sobre el segmento $[a, b]$. Entonces el área S del conjunto*

$$G = \{(x, y) : a < x < b, 0 < y < f(x)\}$$

se expresa por la fórmula

$$S = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{32.1}$$

El conjunto G es un conjunto abierto y acotado. En efecto, su acotación se deduce de que la función f siendo continua sobre el segmento $[a, b]$ es acotada sobre él.

Mostremos que el conjunto G es abierto. Sea $(x_0, y_0) \in G$, entonces $0 < y_0 < f(x_0)$. Tomemos cualquier número $\eta > 0$ tal que $0 < y_0 - \eta < y_0 < y_0 + \eta < f(x_0)$. En virtud de la continuidad de la función f en el punto x_0, existe $\delta > 0$ tal que para todas las $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ se cumple la desigualdad $f(x) > y_0 + \eta$. Claro está que el entorno rectangular $P((x_0, y_0); \delta, \eta)$ pertenece al conjunto G, es decir, el punto (x_0, y_0) es su punto interior.

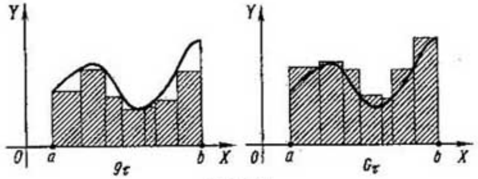


FIG. 127

La frontera del conjunto G se contiene en la unión de la gráfica de la función f, del segmento $[a, b]$ del eje Ox y de los segmentos $[0, f(a)]$ y $[0, f(b)]$ de las rectas $x = a$ $x = b$, respectivamente. Usualmente este conjunto se llama *trapecio curvilíneo* (véase la fig. 111) engendrado por la gráfica de la función f.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ cierta partición del segmento $[a, b]$. Denotemos por G_τ y g_τ los polígonos cerrados compuestos por todos polígonos del tipo

$$G_{\tau,i} = \{(x, y) : x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, \quad 0 \leqslant y \leqslant M_i, \quad i = 1, 2, \dots, k\},$$
$$g_{\tau,i} = \{(x, y) : x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, \quad 0 \leqslant y \leqslant m_i, \quad i = 1, 2, \dots, k\},$$

donde $m_i = \inf\limits_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x)$.

De esta forma (fig. 127)

$$G_\tau = \bigcup_{i=1}^{k} G_{\tau,i}, g_\tau = \bigcup_{i=1}^{k} g_{\tau,i}. \tag{32.2}$$

Si denotamos por $\tilde{G}_\tau$ y $\tilde{g}_\tau$ el conjunto de los puntos interiores de los polígonos G_τ y g_τ, entonces

$$\tilde{g}_\tau \subset G \subset \tilde{G}_\tau. \tag{32.3}$$

Si S_τ y s_τ son las sumas superior e inferior de Darboux respectivamente de la función f sobre el segmento $[a, b]$, correspodientes a su partición τ, entonces es evidente que ar. $\tilde{g}_\tau = s_\tau$, ar. $\tilde{G}_\tau = S_\tau$. Por esto, de (32.3), por la monotonía de la medida, se deduce que

$$s_\tau \leqslant \operatorname{mes} G \leqslant S_\tau. \tag{32.4}$$

Por cuanto

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{32.5}$$

entonces

$$\operatorname{mes} G = \int_a^b f(x)\,dx. \ \square$$

Como es conocido (véase el p. 27.4)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \int_a^b f(x)\,dx$$

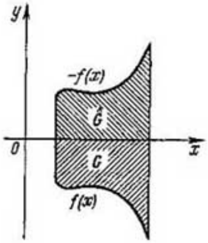


FIG. 128

por eso en virtud de la fórmula (32.1)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \operatorname{mes} G.$$

De esta forma, las sumas integrales de Riemann y las sumas de Darboux geométricamente son iguales al valor aproximado del área del trapecio cuvilíneo analizado y además, se alcanza cualquier exactitud con la elección de una finura suficiente de la partición τ y el límite de las sumas integrales es igual al valor verdadero del área indicada.

Sea ahora f una función continua y no positiva sobre el segmento $[a, b]$. Hagamos en este caso

$$G = \{(x, y) : a < x < b, f(x) < y < 0\}.$$

Sea $\hat{G}$ el conjunto simétrico al conjunto G respecto al eje Ox*) (fig. 128), entonces

$$\operatorname{mes} \hat{G} = \operatorname{mes} G. \tag{32.6}$$

En el caso analizado la función $-f$ es no negativa sobre el segmento $[a, b]$ por lo que

$$\operatorname{mes} \hat{G} = \int_a^b [-f(x)]\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx. \tag{32.7}$$

Comparando (32.6) y (32.7) obtendremos

$$\operatorname{mes} G = -\int_a^b f(x)\, dx,$$

es decir, aquí la integral $\int_a^b f(x)\, dx$ es igual al valor del área del trapecio curvilíneo G salvo el signo.

---

*) Esto significa que $\hat{G} = \{(x, y) : (x, -y) \in G\}$.

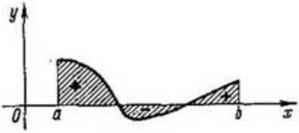


FIG. 129

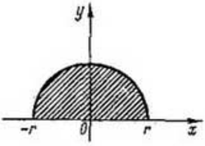


FIG. 130

Si la función f cambia de signo sobre el segmento $[a, b]$ en un número finito de puntos, entonces la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ es igual a la suma algebraica de las áreas de los trapecios curvilíneos correspondientes, acotados por partes de la gráfica de la función f, segmentos del eje Ox y podría ser por segmentos paralelos al eje Oy (fig. 129).

Como se ve, uno de los problemas que de forma natural nos lleva al concepto de integral definida es el problema del cálculo de las áreas. El aparato desarrollado del cálculo integral da un método general y único para el cálculo de las áreas de diversas figuras planas.

Ejemplos. 1. Hallemos el área S del círculo de radio r. Coloquemos el origen de coordenadas en el centro del círculo indicado. Entonces la ecuación de la semicircunferencia que está en el semiplano superior, tiene la forma $y = \sqrt{r - x^2}$ (fig. 130). Por esto el área del semicírculo de radio r se calcula, de acuerdo con el teorema 1, según la fórmula (32.1)

$$S = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = r^2\int_0^{\pi} sen^2\, t\, dt = r^2\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2}\,dt = \frac{\pi r^2}{2}$$

(en el cálculo de la integral se hizo el cambio de variable $x = r\cos t$), de donde el área del círculo buscada es igual a πr^2.

De forma semejante se halla también el área S_φ del sector del círculo (de radio r) correspondiente al ángulo central φ. Considerando para simplificar que $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ tenemos (fig. 131).:

$$S_\varphi = \int_0^{r\cos\varphi} x\,\mathrm{tg}\,\varphi\,dx + \int_{r\cos\varphi}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{x^2\,\mathrm{tg}\,\varphi}{2}\bigg|_0^{r\cos\varphi} + r^2\int_0^{\varphi} \frac{1 - \cos 2t}{2}\,dt =$$
$$= \frac{r^2 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{2} + \frac{r^2\varphi}{2} - \frac{r^2\operatorname{sen} 2\varphi}{4} = \frac{r^2\varphi}{2}.$$

2. Hallemos el área S acotada por el eje Ox y un arco de la senusoide (fig. 132)

$$S = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\bigg|_0^{\pi} = 2.$$

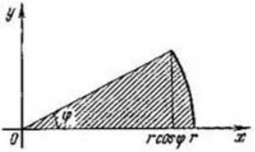


FIG. 131

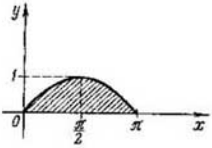


FIG. 132

Aquí, como se hará siempre en el futuro, hablando de una región acotada por cierta curva que es un contorno simple cerrado (véase el p. 16.1) tendremos en cuenta la región acotada cuya frontera es el contorno dado. Cualquier región no acotada cuya frontera es un contorno semejante se llamará exterior (para el contorno dado). En el caso analizado el contorno externo es el "exterior" de la región rayada en la fig. 132. La región exterior siempre tiene área infinita. En efecto, cualquier curva es acotada (véase el p. 16.3), por eso en la región exterior de cualquier contorno simple se contiene, por ejemplo, un cuadrado con lado todo lo grande que se desea. De aquí se deduce inmediatamente que el área de la región exterior es infinita.

3. Hallemos el área S acotada por la hipérbola $y = 1/x$, el eje Ox, el segmento de recta $x = 1$ y el segmento de la recta que pasa por el punto del eje Ox con abscisa igual a x y paralela al eje de las ordenadas (fig. 133):

$$S = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln\Big|_1^x = \ln x.$$

4. Calculemos el área acotada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Por cuanto la semielipse que se encuentra por encima del eje de las abscisas se describe por la ecuación $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, entonces para la cuarta del área S buscada tenemos (véase el ejemplo 5 en el p. 22.3 o el ejemplo 1 en el p. 22.4):

$$\frac{1}{4} S = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a}{b}\left[\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\right]_0^a = \frac{ab\pi}{4},$$

de donde $S = \pi ab$.

5. La desigualdad (20.50) demostrada en el p. 20.8 tiene un simple sentido geométrico. Analicemos la curva $y = x^{p-1}$ o lo que es lo mismo $x = y^{q-1}$, donde $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (véanse (20.55) y (20.56)). Escojamos arbitrariamente $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$ y calculemos las áreas S_1 y S_2 (fig. 134):

$$S_1 = \int_0^a x^{p-1}\, dx = \frac{a^p}{p}, \quad S_2 = \int_0^b y^{q-1}\, dy = \frac{b^q}{q}.$$

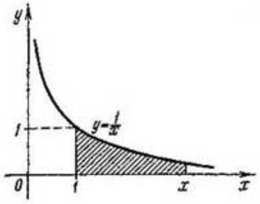


FIG. 133

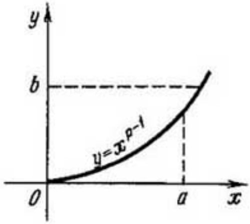


FIG. 134

Geométricamente está claro que el área del rectángulo con lados a y b no sobrepasa la suma $S_1 + S_2$, es decir, $ab \leqslant S_1 + S_2$ o más detalladamente.

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 1$$

y ésta es la desigualdad (20.50). Además, es evidente que $ab = S_1 + = S_2$ si y sólo si $b = a^{p-1}$.

Hallemos ahora la fórmula para el área de un sector de curva dada con una ecuación que relaciona sus cooredenadas polares: $\rho = \rho(\varphi)$, donde $\rho = \rho(\varphi)$ es una función no negativa, continua sobre el segmento $[\alpha, \beta]$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 2\pi$. Sea G un conjunto abierto cuya frontera está compuesta por la curva $\widehat{AB}$, descirta en coordenadas polares por la ecuación $\rho = \rho(\varphi)$, y, podría ser, por los segmentos OA y OB de los rayos $\varphi = \alpha$ y $\varphi = \beta$ (fig. 135), $G = \{(\rho, \varphi): \alpha < \varphi < \beta, 0 < \rho < \rho(\varphi)\}$.

Sea $\tau = \{\varphi_i\}_{i=0}^{i=k}$ cierta partición del segmento $[\alpha, \beta]$. Hagamos

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}, \quad m_i = \inf_{\varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i} \rho(\varphi), \quad M_i = \sup_{\varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i} \rho(\varphi),$$

$$g_{i,\tau} = \{(\rho, \varphi): \varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant m_i\},$$
$$G_{i,\tau} = \{(\rho, \varphi): \varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant M_i\}.$$

Inscribamos en el conjunto G y circunscribámoslo las figuras escalonadas g_τ y G_τ compuestas por los sectores circulares $g_{i\tau}$ y $G_{i\tau}$, $i = 1, 2, \ldots, k$:

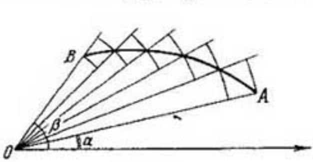


FIG. 135

$$g_\tau = \bigcup_{i=1}^{k} g_{i,\tau}, \quad G_\tau = \bigcup_{i=1}^{k} G_{i,\tau}.$$

Denotemos por $\mathring{g}_\tau$ y $\mathring{G}_\tau$ los conjuntos de todos los puntos interiores de los conjuntos g_τ y G_τ. Es evidente que $\mathring{g}_\tau$ y $\mathring{G}_\tau$ son conjuntos abiertos y $\mathring{g}_\tau \subset G \subset \mathring{G}_\tau$ por eso según la propiedad de monotonia del área

$$\text{ar.}\, \mathring{g}_\tau \leqslant \text{mes}\, G \leqslant \text{ar.}\, \mathring{G}_\tau.$$

Pero ar. $\mathring{g}_\tau$ = ar. g_τ, ar. $\mathring{G}_\tau$ = ar. G_τ, por consiguiente

$$\text{ar.}\, g_\tau \leqslant \text{mes}\, G \leqslant \text{ar.}\, G_\tau. \tag{32.8}$$

Las áreas de los sectores circulares $g_{i,\tau}$ y $G_{i,\tau}$ son iguales respectivamente a $\frac{1}{2} m_i^2 \Delta\varphi_i$ y $\frac{1}{2} M_i^2 \Delta\varphi_i$. De la matemática elemental es conocido que en la unión de figuras planas sus áreas se suman (véase sobre esto también en el p. 44.1), quiere decir que

$$\text{ar.}\, g_\tau = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} m_i^2 \Delta\varphi_i, \quad \text{ar.}\, G_\tau = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} M_i^2 \Delta\varphi_i.$$

De estas igualdades se ve que ar. g_i y ar. G_τ son respectivamente las sumas inferior y superior de Darboux para la función $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ sobre el segmento $[\alpha, \beta]$: s_τ = ar. g_τ, S_τ = ar. G_τ por consiguiente

$$s_\tau \leqslant \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) d\varphi \leqslant S_\tau.$$

Restando esta desigualdad de la desigualdad (32.8) transcrita en la forma $S_\tau \geqslant \text{mes}\, G \geqslant s_\tau$ obtendremos

$$s_\tau - S_\tau \leqslant \text{mes}\, G - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) d\varphi \leqslant S_\tau - s_\tau.$$

De aquí pasando al límite cuando $\delta_\tau \to 0$ tenemos

$$\text{mes}\, G = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) d\varphi. \ \square \tag{32.9}$$

En calidad de ejemplo hallemos el área S de la figura acotada por la cardioide $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (véase el p. 17.5) que está representada en la fig. 136. Por la fórmula (32.9) obtendremos

$$S = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi + $$
$$+ a^2 \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi + \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

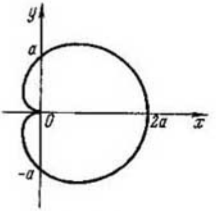


FIG. 136

32.2. VOLUMEN DE UN CUERPO DE REVOLUCIÓN

Al final del p. 31.2 se señaló que el concepto de volumen en el espacio se reduce al concepto análogo de área sobre el plano. Deduzcamos la fórmula para el cálculo de los volúmenes de los cuerpos de revolución.

Teorema 2. *Sean la función $f(x) \geqslant 0$ continua sobre el segmento $[a, b]$ y Q el cuerpo obtenido con la rotación del trapecio curvilíneo G engendrado por la gráfica de la función f. Enonces para su volumen* mes Q *es válida la fórmula*

$$\operatorname{mes} Q = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx. \tag{32.10}$$

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por q_τ y Q_τ los cuerpos formados por la rotación alrededor del eje Ox de las figuras escalonadas g_τ y G_τ (véase la demostración del teorema 1). De la inclusión (32.3) se deduce que $q_\tau \subset Q \subset Q_\tau$ y por esto

$$\operatorname{mes} q_\tau \leqslant \operatorname{mes} Q \leqslant \operatorname{mes} Q_\tau. \tag{32.11}$$

Los volúmenes v_τ y V_τ de los conjuntos q_τ y Q_τ son iguales a las sumas de los volúmenes de los cilindros formados por la rotación de los rectángulos $g_{\tau,i}$ y $G_{\tau,i}$ (fig. 137):

$$v_\tau = \operatorname{mes} q_\tau = \sum_{i=1}^{k} \pi m_i^2 \Delta x_i,$$

$$V_\tau = \operatorname{mes} Q_\tau = \sum_{i=1}^{k} \pi M_i^2 \Delta x_i.$$

De estas igualdades se ve que v_τ y V_τ son las sumas inferior y superior de Darboux de la función $\pi f^2(x)$ y ya que la función f^2 es continua y por consiguiente integrable, entonces

$$v_\tau \leqslant \pi \int_a^b f^2(x)\, dx \leqslant V_\tau. \tag{32.12}$$

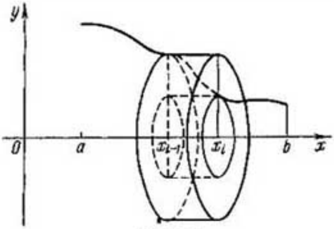


FIG. 137

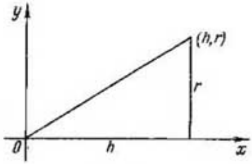


FIG. 138

y
$$\lim_{\delta_\tau \to 0} [V_\tau - v_\tau] = 0. \tag{32.13}$$

De las desigualdades (32.11) y (32.12) se deduce que

$$v_\tau - V_\tau \leqslant \pi \int_a^b f^2(x)\,dx - \operatorname{mes} Q \leqslant V_\tau - v_\tau,$$

de donde por (32.13) se deriva la fórmula (32.10). □

Ejemplo. 1. Hallemos el volumen V de una bola de radio r. Analizando esta bola como un cuerpo formado por la rotación de la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leqslant x \leqslant r$ alrededor del eje Ox (véase la fig. 96), por la fórmula (32.10) obtendremos:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \pi r^2 x \Big|_{-r}^{r} - \frac{\pi x^3}{3}\Big|_{-r}^{r} = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

2. Hallemos el volumen V del cono circular recto con altura igual a h y radio de la base r. Analizando el cono indicado como un cuerpo obtenido con la rotación del triángulo con vértices en los puntos $(0, 0)$, $(h, 0)$ y (h, r), alrededor del eje Ox (fig. 138), es decir, con la rotación del "trapecio curvilíneo" engendrado por la gráfica de la función $y = \frac{r}{h}x$, $0 \leqslant x \leqslant h$, obtendremos por la fórmula (32.10)

$$V = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{\pi r^2 x^3}{3h^2}\Big|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

3. Hallemos el volumen V del cuerpo obtenido con la rotación alrededor del eje Ox del trapecio curvilíneo engendrado por la gráfica de la función $y = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $-b \leqslant x \leqslant b$, llamada *catenaria* (fig. 139). Según la fórmula (32.10) tenemos

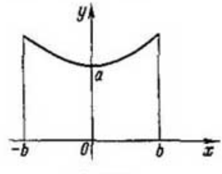


FIG. 139

$$V = \pi a^2 \int_{-b}^{b} \mathrm{ch}^2 \frac{x}{a}\, dx = \frac{\pi a^2}{2} \int_{-b}^{b} \left(1 + \mathrm{ch}\, \frac{2x}{a}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{\pi a^2 x}{2} + \frac{\pi a^3}{4}\, \mathrm{sh}\, \frac{2x}{a}\right]_{-b}^{b} = \pi a^2 b + \frac{\pi a^3}{2}\, \mathrm{sh}\, \frac{2b}{a}.$$

De los ejemplos analizados en este párrafo ya se ve claramente la fuerza y generalidad de los métodos del cálculo integral: con un método único se obtienen rápida y simplemente las fórmulas para las áreas y volúmenes tanto conocidas anteriormente del curso de matemática elemental como otras completamente nuevas. En los puntos siguientes analizaremos una serie de problemas más, que se resuelven también fácilmente aplicando los métodos del cálculo integral.

32.3. CÁLCULO DE LA LONGITUD DE CURVA

Hemos analizado una serie de problemas que llevan al concepto de integral definida. Todos ellos tienen en común que en ellos el hallar el valor de alguna magnitud nos llevaba a la definición del límite de cierta suma integral cuando la finura de la partición tendía a cero, es decir, a una integral definida.

Existe, no obstante, otro grupo de problemas que nos llevan al concepto de integral definida. En ellos es conocida la velocidad de variación de una magnitud respecto a otra y se exige hallar la primera magnitud, más exactamente, se da la derivada de una función y se exige hallar la propia función, es decir, a partir de una función dada hallar una de sus primitivas. Este problema también se resuelve con ayuda de la integral definida ya que tal primitiva es, por ejemplo, la integral definida con límite superior variable. En calidad de ejemplo de semejante problema analicemos el cálculo de la longitud del arco de una curva.

Sea dada la curva Γ paramétricamente por la representación vectorial

$$r = r(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

donde la función $r(t)$ es continuamente diferenciable sobre el segmento $[a, b]$. Entonces, como sabemos, la curva Γ es rectificable y la variable longitud del arco $s(t)$ calculada desde el punto origen (su radio vector es $r(a)$) de la curva Γ es también una función continuamente diferenciable del parámetro t sobre el segmento $[a, b]$, además (véase el p. 16.3)

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{dr}{dt}\right|.$$

Por esto, según la fórmula de Newton — Leibniz, observando que $s(a) = 0$ para la longitud $S = s(b)$ de la curva Γ obtendremos

$$S = s(b) - s(a) = \int_a^b \frac{ds}{dt}\, dt,$$

de donde

$$S = \int_a^b \left|\frac{dr}{dt}\right| dt.$$

Si $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces

$$S = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt. \qquad (32.14)$$

En el caso cuando la curva Γ es la gráfica de la función continuamente diferenciable $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, la fórmula (32.14) toma la forma

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \qquad (32.15)$$

Ejemplos. 1. Hallemos la longitud S del arco de la parábola $y = ax^2$, $0 \leqslant x \leqslant b$. Observando que $y' = 2ax$, por la fórmula (32.15) tenemos

$$S = \int_0^b \sqrt{1 + 4a^2x^2}\, dx. \qquad (32.16)$$

La integral indefinida $I = \int \sqrt{1 + 4a^2x^2}\, dx$ calculémosla de la siguiente forma: integrémosla inicialmente por partes, luego sumemos y restemos la unidad al numerador de la función obtenida bajo el signo de la integral; efectuemos la división e integremos (sustituyendo $y = 2ax$) la fracción obtenida:

$$I = \int \sqrt{1 + 4a^2x^2}\, dx = x\sqrt{1 + 4a^2x^2} - \int \frac{4a^2x^2}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}}\, dx =$$

$$= x\sqrt{1 + 4a^2x^2} - \int \sqrt{1 + 4a^2x^2}\, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1 + 4a^2x^2} - I + \frac{1}{2a} \ln |2ax + \sqrt{1 + 4a^2b^2}|.$$

Esta igualdad analizada como una ecuación respecto a la integral I da la posibilidad de hallar su valor:

$$I = \frac{1}{2} x\sqrt{1 + 4a^2x^2} + \frac{1}{4a} \ln |2ax + \sqrt{1 + 4a^2x^2}| + C.$$

Ahora es fácil obtener la mangitud de la integral (32.16):

$$S = \frac{1}{2} b\sqrt{1 + 4a^2b^2} + \frac{1}{4a} \ln |2ab + \sqrt{1 + 4a^2b^2}|$$

2. Hallemos la longitud de la astroide $x = a\cos^3 t$ $y = a\,\mathrm{sen}^3\, t$ (véase la fig. 84). La astroide es simétrica respecto al origen de coordenadas. A la parte de ésta que está en el primer cuadrante le corresponde la variación del parámetro t desde 0 hasta $\pi/2$. Calculemos la longitud S de esta parte (igual, evidentemente, a una cuarta de la longitud de toda la astroide). Observando que

$$x' = -3a\cos^2 t\,\mathrm{sen}\, t, \quad y' = 3a\,\mathrm{sen}^2 t\cos t,$$

según la fórmula (32.14) (en la cual se debe hacer $z' = 0$) obtendremos:

$$S = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t\,\mathrm{sen}^2 t + 9a^2\,\mathrm{sen}^4 t\cos^2 t}\, dt = \frac{3a}{2} \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\, 2t\, dt = \frac{3a}{2}.$$

De esta forma, la longitud de toda la astroide es igual a $6a$.

3. Hállese la longitud S del arco de la elipse $x = a$ sen $t, y = b\cos t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $0 < b \leqslant a$ desde el extremo superior del semieje menor hasta el punto correspondiente al valor del parámetro $t \in [0, 2\pi]$. Hagamos $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ (ε es la excentricidad de la elipse) entonces

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\,\mathrm{sen}^2 t} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2\,\mathrm{sen}^2 t}$$

por eso

$$S = a \int_0^t \sqrt{1 - \varepsilon^2\,\mathrm{sen}^2 t}\, dt, \quad 0 \leqslant \varepsilon < 1. \tag{32.17}$$

Obtuvimos una integral elíptica de segundo orden la cual como es conocido (véase el p. 26.6) no se expresa a través de funciones elementales, es decir, la fórmula (32.17) en el caso dado es la respuesta final. Los valores aproximados de las longitudes de los arcos de la elipse se pueden obtener o bien directamente calculando aproximadamente la integral (32.17) o bien sirviéndonos de las tablas existentes de los valores de las integrales elípticas.

Ejercicios. 1. Demuéstrese que si una curva plana está dada en coordenadas polares por una representación continuamente diferenciable $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, entonces para su longitud S es válida la fórmula

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi. \tag{32.18}$$

2. Hállese la longitud del arco de la *espiral logarítmica* $r = ae^{b\varphi}$ desde el punto (φ_0, r_0) hasta el punto (φ, r).

La fórmula integral para la longitud de una curva permite expresar su longitud no sólo como la cota superior de las longitudes de todas las posibles quebradas inscritas, sino como su límite a condición de que las finuras de las particiones correspondientes tienden a cero. Para demostrar esto necesitamos un lema.

Lema. *Sean* $\gamma = \{r = r(s), 0 \leqslant s \leqslant S\}$ *una curva continuamente diferenciable en* R^3, *s su variable longitud del arco y* $\Delta r = r(s + \Delta s) - r(s)$. *Entonces la relación* $\left|\frac{\Delta r}{\Delta s}\right|$ *tiende a la unidad, cuando* $\Delta s \to 0$, *uniformemente sobre el segmento* $[0, S]$. *Esto significa que para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para cualquier punto* $s \in [0, S]$ *y para cualquier incremento* $\Delta s (s + \Delta s \in [0, s])$ *que satisface la condición* $|\Delta s| < \delta$ *se cumple la desigualdad*

$$\left|\left|\frac{\Delta r}{\Delta s}\right| - 1\right| < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos lo contrario, es decir, que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$ existe el punto $s_\delta \in [0, S]$ y el incremento Δs_δ, $|\Delta s_\delta| < \delta$, tales que para $\Delta r_\delta = r(s_\delta + \Delta s_\delta) - r(s_\delta)$ se cumple la desigualdad

$$\left|\left|\frac{\Delta r_\delta}{\Delta s_\delta}\right| - 1\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

Tomaremos la sucesión $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, y además los puntos correspondientes s_δ y los incrementos Δs_δ los denotaremos por s_n y Δs_n. Entonces para todos los números naturales n se cumplirán las desigualdades

$$\left|\left|\frac{\Delta r_n}{\Delta s_n}\right| - 1\right| \geqslant \varepsilon_0, \quad |\Delta s_n| < \frac{1}{n},$$

donde $\Delta r_n = r(s_n + \Delta s_n) - r(s_n)$.

Extraigamos de la sucesión $\{s_n\}$ la subsucesión convergente $\{s_{n_k}\}$, entonces $s_0 \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{k \to \infty} s_{n_k} \in [0, S]$. Por la continuidad de la derivada $r'(s)$ en el punto s_0, existe $\delta_0 > 0$ tal que para $|s - s_0| < \delta_0$ es válida la desigualdad

$$|r'(s) - r'(s_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

o lo que es lo mismo

$$r'(s) = r'(s_0) + \alpha(s), \quad |\alpha(s)| < \frac{\varepsilon_0}{2} \quad \text{cuando} \quad |s - s_0| < \delta, \quad s \in [0, S].$$

Escojamos ahora un natural k_0 de forma tal que tengan lugar las desigualdades

$$|s_{n_{k_0}} - s_0| < \frac{\delta_0}{2}, \quad \frac{1}{n_{k_0}} < \frac{\delta_0}{2};$$

entonces observando que de acuerdo con la elección de los incrementos Δs_n se cumple la desigualdad $|\Delta s_{n_{k_0}}| < \frac{1}{n_{k_0}}$, tenemos $|\Delta s_{n_{k_0}}| < \frac{\delta_0}{2}$. Por consiguiente, para todos los s sobre el segmento con extremos en los puntos $s_{n_{k_0}}$ y $s_{n_{k_0}} + \Delta s_{n_{k_0}}$ tendremos

$$|s - s_0| \leqslant |s - s_{n_{k_0}}| + |s_{n_{k_0}} - s_0| < |\Delta s_{n_{k_0}}| + \frac{\delta_0}{2} < \delta_0.$$

Por esto, observando que $|r'(s_0)| = 1$ y que

$$\Delta r_{n_{k_0}} = r(s_{n_{k_0}} + \Delta s_{n_{k_0}}) - r(s_{n_{k_0}}) = \int_{s_{nk_0}}^{s_{nk_0} + \Delta s_{nk_0}} r'(s)\, ds =$$

$$\int_{s_{nk_0}}^{s_{nk_0} + \Delta s_{nk_0}} [r'(s_0) + \alpha(s)]\, ds = r'(s_0)\Delta s_{n_{k_0}} + \int_{s_{nk_0}}^{s_{nk_0} + \Delta s_{nk_0}} \alpha(s)\, ds,$$

obtendremos

$$\left|\left|\frac{\Delta r_{n_{k_0}}}{\Delta s_{n_{k_0}}}\right| - 1\right| = \left|\left|r'(s_0) + \frac{1}{\Delta s_{n_{k_0}}} \int_{s_{nk_0}}^{s_{nk_0} + \Delta s_{nk_0}} \alpha(s)\, ds\right| - \left|r'(s_0)\right|\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{|\Delta s_{n_{k_0}}|} \int_{s_{nk_0}}^{s_{nk_0} + \Delta s_{nk_0}} |\alpha(s)|\, ds\right| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_0.$$

Esto contradice la suposición hecha. □

Teorema 3. *Sea* $n\gamma = \{r = r(s), 0 \leqslant s \leqslant S\}$ *una curva continuamente diferenciable en* R^3, s, *su variable longitud del arco*, $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i=k}$ *una partición del segmento* $[0, S]$, $\lambda_\tau = \sum_{i=1}^{k} |r(s_i) - r(s_{i-1})|$, *entonces*

$$S = \lim_{\delta_\tau \to 0} \lambda_\tau.$$

Aquí λ_τ es evidentemente la longitud de la quebrada con vértices en los puntos $r(s_i)$, $i = 0, 1, 2, \cdots, k$ inscrita en la curva γ.

DEMOSTRACION. Hagamos $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$, $\Delta r_i = r(s_i) - r(s_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Observando que $s = \sum_{i=1}^{k} \Delta s_i$ y $\lambda_\tau = \sum_{i=1}^{k} |\Delta r_i|$ obtendremos

$|S - \lambda_\tau| =$

$$= \left| \sum_{i=1}^{k} \Delta s_i - \sum_{i=1}^{k} |\Delta r_i| \right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \left|1 - \left|\frac{\Delta r_i}{\Delta s_i}\right|\right| \Delta s_i.$$

Según el lema, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si sólo $|\Delta s_i| < \delta$ entonces tiene lugar la desigualdad

$$\left| \left| \frac{\Delta r_i}{\Delta s_i} \right| - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{S}.$$

Por esto para cualquier partición τ de finura $\delta_\tau < \delta$ se cumple la desigualdad

$$|S - \lambda_\tau| < \frac{\varepsilon}{S} \sum_{i=1}^{k} \Delta s_i = \varepsilon.$$

Esto significa que $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \lambda_\tau = S$. □

32.4. AREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

El concepto de superficie y de su área será estudiado especialmente en el § 50. Aquí nos limitaremos al caso especial de las superficies formadas por la rotación de curvas alrededor de algunos ejes. Como siempre supondremos que en el espacio R^3 está fijado un sistema rectangular de coordenadas cartesianas.

Sean $\gamma = \{r = r(t), a \leqslant t \leqslant b\}$ una curva en el semiplano $y > 0$ del plano de las variables x, y; $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=k}$, una partición del segmento $[a, b]$. Inscribamos en la curva γ la quebrada con vértices en los puntos $r(t_i) = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ (fig. 140). Cuando el eslabón $\Delta r_i = r(t_i) - r(t_{i-1})$ de esta quebrada gira alrededor del eje Ox se obtiene la superficie de un cono truncado (en particular, tal vez de un cilindro) con área

$$l_i = \pi(y_{i-1} + y_i)|\Delta r_i|$$

y cuando gira toda la quebrada, una superficie con área

$$L_\tau = \sum_{i=1}^{k} l_i = \pi \sum_{i=1}^{k} (y_{i-1} + y_i)|\Delta r_i|.$$

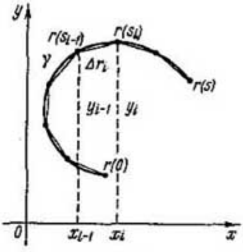


FIG. 140

Definición 1. *Si existe el límite* $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} L_\tau$, *entonces se llama área L de la superficie formada por la rotación de curva* γ *alrededor del eje Ox.*

De esta forma

$$L \overset{\text{def}}{=} \lim_{\delta_\tau \to 0} L_\tau. \tag{32.19}$$

Teorema 4. *Sea* $\gamma = \{r = r(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ *una curva continuamente diferenciable sin puntos singulares, que está en el semiplano* $y > 0$ *del plano de las variables x, y. Entonces para el área L de la superficie obtenida con la rotación de la curva* γ *alrededor del eje de las x, es válida la fórmula*

$$L = 2\pi \int_a^b y\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt = 2\pi \int_0^S y(s)\, ds, \tag{32.20}$$

donde s es la variable longitud del arco de la curva γ, $0 \leqslant s \leqslant S$.

DEMOSTRACIÓN. Como es conocido, en las suposiciones hechas en el teorema (véase el p. 16.5), la función $s = s(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, es una transformación admisible del parámetro y por consiguiente la longitud del arco s puede ser tomada por parámetro:

$$\gamma = \{r = r(s) = (x(s), y(s)),\ 0 \leqslant s \leqslant S\}.$$

Sea $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i=k}$ una partición del segmento $[0, S]$,

$$\Delta r_i = r(s_i) - r(s_{i-1}),\quad \Delta s_i = s_i - s_{i-1},\quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Comparemos la suma

$$L_\tau = \pi \sum_{i=1}^{k} (y_{i-1} + y_i)|\Delta r_i|,\quad y_i \overset{\text{def}}{=} y_i(s),\quad i = 0, 1, \dots, k, \tag{32.21}$$

con la suma integral (de la función $2\pi y(s)$)

$$\sigma_\tau = 2\pi \sum_{i=1}^{k} y_i\, \Delta s_i. \tag{32.22}$$

Para esto observemos que la función $y(s)$ siendo continua sobre el segmento $[0, S]$ es acotada sobre él, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que para todos los $s \in [0, S]$ se cumple la desigualdad $|y(s)| \leqslant M$. Denotando por $\omega(\delta, y)$ el módulo de continuidad de la función $y(s)$ y por λ_τ la longitud de la quebrada con vértice en los puntos $r(s_i)$ y observando que $|\Delta r_i| \leqslant \Delta s$, $i = 1, 2, \dots, k$, obtendremos

$$\begin{aligned}
|\sigma_\tau - L_\tau| &= \left|\pi \sum_{i=1}^{k} 2y_i\Delta s_i - \pi \sum_{i=1}^{k} [2y_i + (y_{i-1} - y_i)]|\Delta r_i|\right| \leqslant \\
&\leqslant 2\pi \sum_{i=1}^{k} |y_i|(\Delta s_i - |\Delta r_i|) + \pi \sum_{i=1}^{k} |y_i - y_{i-1}||\Delta r_i| \leqslant \\
&\leqslant 2\pi M\left(\sum_{i=1}^{k} \Delta s_i - \sum_{i=1}^{k} |\Delta r_i|\right) + \pi\omega(\delta_\tau; y)\sum_{i=1}^{k} |\Delta r_i| = \\
&= 2\pi M(S - \lambda_\tau) + \pi\omega(\delta_\tau; y)\lambda_\tau.
\end{aligned}$$

Aquí $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (S - \lambda_\tau) = 0$ (véase el teorema 3), $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \omega(\delta_\tau, y) = 0$ (véase el teorema 5 en el p. 19.6) y $0 \leqslant \lambda_\tau \leqslant S$. Por esto $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (\sigma_\tau - L_\tau) = 0$ y ya que $\lim \sigma_\tau = 2\pi \int\limits_0^S y(s)\,ds$, entonces $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} L_\tau = 2\pi \int\limits_0^S y(s)\,ds$ también. Haciendo el cambio de variable $s = s(t)$ en la última integral y recordando que $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$ obtendremos

$$L = 2\pi \int\limits_a^b y\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt. \ \square$$

Si curva γ está dada por la ecuación explícita $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, entonces la fórmula para el área de la superficie formada con la rotación de la gráfica de la función f alrededor del eje Ox tiene la forma

$$L = 2\pi \int\limits_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx. \tag{32.23}$$

Recordando que (véase el p. 16.4) $\sqrt{1 + y'^2}\,dx = ds$, la fórmula (32.23) se puede transcribir en la forma

$$L = 2\pi \int\limits_0^S y\,ds.$$

La deducción presentada de la fórmula (32.20) tiene cierto defecto ya que durante esta deducción ya se utilizó el concepto de área de superficie y su aditividad, claro, sólo en el caso más simple, o sea, para las superficies del cono truncado y sus uniones. Se puede introducir el concepto general de área de una superficie sin utilizar el concepto de área de una superficie para cualesquiera superficies elementales y obtener sus propiedades necesarias. Estas cuestiones serán analizadas en el futuro en el p. 50.5.

Ejemplos. 1. Hallemos el área S de la esfera de radio r. La esfera indicada puede ser obtenida por la rotación de la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leqslant x \leqslant r$ alrededor del eje Ox. No obstante esta representación explícita de la semicircunferencia no es continuamente diferenciable: la derivada $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ se hace infinita cuando $x = \pm r$. Es mucho más cómodo tomar la representación paramétrica de la semicircunferencia

$$x = r\cos t, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

Entonces $x' = -r\,\mathrm{sen}\,t$, $y' = r\cos t$, por eso el área S de la superficie de la esfera de radio r se calcula fácilmente de acuerdo con la fórmula (32.20):

$$S = \int\limits_0^\pi y\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = 2\pi r^2 \int\limits_0^\pi \mathrm{sen}\,t\,dt = 4\pi r^2.$$

2. Hallemos el área S de la superficie formada por la rotación alrededor del eje Ox del arco de la catenaria (véase la fig. 119) $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $-b \leqslant x \leqslant b$ (esta superficie se llama *catenoide*). Por la fórmula (32.23) tenemos:

$$S = 2 \quad a \int_{-b}^{b} \operatorname{ch} \frac{x}{a} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}}\, dx =$$

$$= 2\pi a \int_{-b}^{b} \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}\, dx = \pi a \int_{-b}^{b} \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2x}{a}\right) dx \ \pi a \left(2b + a \operatorname{sh} \frac{2b}{a}\right).$$

32.5. TRABAJO DE UNA FUERZA

Supongamos que el punto material M se mueve por la curva continuamente diferenciable $\Gamma = \{r = r(s)\}$, donde s es la variable longitud de arco, $0 \leqslant s \leqslant S$. Supongamos que sobre el punto material que se encuentra en la posición $r(s)$ actúa la fuerza $F(s)$ orientada por la tangente a la trayectoria, en el sentido del movimiento.

Tomemos cualquier partición $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[0, S]$. A ella le corresponde la partición de la trayectoria en las partes

$$\Gamma_i = \{r(s), s_{i-1} \leqslant s \leqslant s_i\}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Escojamos arbitrariamente un punto $\xi_i \leqslant [s_{i-1}, s_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$ (fig. 141). La magnitud $F(\xi_i)\Delta s_i$, $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, se llama *trabajo elemental* de la fuerza F en el tramo Γ_i y se toma como el valor aproximado del trabajo que realiza la fuerza F actuando sobre un punto material, cuando el último recorre la curva Γ_i. La suma de todos los trabajos elementales $\sum_{i=1}^{k} F(\xi_i)\Delta s_i$ es la suma integral de Riemann de la función $F(s)$.

Definición 2. *El límite al cual tiende la suma* $\sum_{i=1}^{k} F(\xi_i)\Delta s_i$ *de todos los trabajos elementales cuando la finura* δ_τ *de la partición* τ *tiende a cero se llama trabajo de la fuerza* F *a lo largo de la curva* Γ.

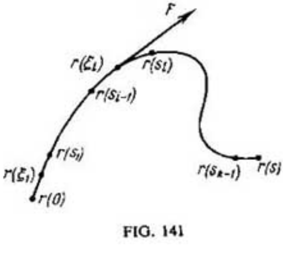


FIG. 141

De esta forma, si denotamos este trabajo con la letra W, entonces en virtud de la definición dada

$$W = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} F(\xi_i)\Delta s_i$$

y por consiguiente

$$W = \int_0^S F(s)\,ds. \tag{32.24}$$

Si la posición del punto sobre la trayectoria de su movimiento se describe con ayuda de cualquier otro parámetro t (por ejemplo, el tiempo) y si la magnitud del camino recorrido $s = s(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, es una función continuamente diferenciable, entonces de la fórmula (32.24) obtendremos:

$$W = \int_a^b F[s(t)]s'(t)\,dt.$$

32.6. CÁLCULO DE LOS MOMENTOS ESTÁTICOS Y DE LAS COORDENADAS DEL CENTRO DE GRAVEDAD DE UNA CURVA

Sea M un punto material de masa m con coordenadas x e y. Los productos my y mx se llaman sus *momentos estáticos* respecto a los ejes Ox y Oy respectivamente.

Sea $\Gamma = \{r(s),\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$ una curva rectificable donde s es la variable longitud de arco. Consideraremos que la curva Γ tiene masa y que la masa de su arco es directamente proporcional a la longitud del arco: si Δm es la masa del arco de longitud Δs, entonces $\Delta m = \rho\Delta s$, donde ρ es cierta constante llamada *densidad lineal de la curva* Γ. Tales curvas en la mecánica se llaman *homogéneas*. Por cuanto $\rho = \dfrac{\Delta m}{\Delta s}$, entonces la densidad es igual a la masa de la longitud del arco de curva que le corresponde a la unidad de longitud de arco. Para simplificar consideraremos que $\rho = 1$, es decir, que la masa de la parte de la curva de longitud Δs es también igual a Δs, en particular la masa de toda la curva numéricamente, es igual a S.

Sea ahora $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i=k}$ cualquier partición del segmento $[0, S]$, $\Delta s = s_i - s_{i-1}$, $= 1, 2, \ldots, k$. A la partición τ le corresponde la partición de la curva Γ en las partes $\Gamma_i = \{r(s),\ s_{i-1} \leqslant s \leqslant s_i\}$. Escojamos un punto cualquiera $\xi_i \in [s_{i-1}, s_i]$ y hagamos $x_i = x(\xi_i)$, $y_i = y(\xi_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Las magnitudes $y_i\Delta s_i$ para cualquier elección de los puntos indicados ξ_i se llaman *momentos estáticos elementales* de la parte Γ_i de la curva Γ respecto al eje Ox. Evidentemente el momento estático elemental de Γ_i numéricamente es igual al momento estático del punto material con masa Δs con coordenada y_i, es decir, como si cambiáramos la curva continua dada Γ por puntos materiales.

Definición 3. *El límite al cual tiende la suma*

$$\sum_{i=1}^{k} y_i\Delta s_i \tag{32.25}$$

de todos los momentos estáticos elementales, cuando la finura de la partición τ tiende a cero, se llama momento estático M_x de la curva Γ respecto al eje Ox.

Este límite siempre existe ya que por la definición de curva, la función $r = r(s)$ y por lo tanto sus funciones coordenadas $x = x(s)$, $y = y(s)$ son continuas sobre el segmento $[0, S]$, la suma (32.25) es una suma integral de Riemann de la función $y(s)$ y por eso, cuando $\delta \to 0$, tiende a la integral $\int_0^S y(s)\, ds$. De esta forma

$$M_x = \int_0^S y\, ds. \tag{32.26}$$

De forma análoga se define y se calcula el momento estático M_y de la curva Γ respecto al eje Ox:

$$M_y = \int_0^S x\, ds. \tag{32.27}$$

Definición 4. *El punto del plano $P = (x_0, y_0)$ que posee la propiedad de que si en él colocamos un punto material de masa igual a la masa de la curva (en el caso analizado, de masa S), entonces este punto tiene un momento estático respecto a cualquier eje coordenado numéricamente igual al momento estático de la curva respecto al mismo eje, se llama centro de gravedad de la curva dada.*

De esta forma

$$Sx_0 = M_y, \quad Sy_0 = M_x,$$

de donde en virtud de las fórmulas (32.26) y (32.27), para las coordenadas del centro de gravedad obtendremos las fórmulas

$$x_0 = \frac{1}{S}\int_0^S x\, ds, \quad y_0 = \frac{1}{S}\int_0^S y\, ds. \tag{32.28}$$

Comparando las fórmulas para la ordenada del centro de gravedad de la curva $y_0 S = \int_0^S y\, ds$ y para el área L de la superficie obtenida de la rotación de esta curva alrededor de un eje $L = 2\pi\int_0^S y\, ds$, obtendremos una relación interesante $L = 2\pi y_0 S$ (aquí por curva se entiende una curva continuamente diferenciable sin puntos singulares) que forma el contenido del así llamado *primer teorema de Goulden*[*)].

Teorema 5 (de Goulden). *El área de la superficie obtenida de la rotación de una curva alrededor de un eje que no la interseque es igual a la longitud de esta curva multiplicada por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de gravedad de esta curva.*

En el caso cuando es conocida la posición del centro de gravedad de la curva el teorema de Goulden permite sencillamente hallar el área de la superficie correspondiente de revolución. Por ejemplo, el área de la superficie obtenida por la rotación

[*)] P. Goulden (1577 — 1643), matemático suizo.

de la circunferencia $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, $0 < r < a$, alrededor del eje Oy (esta superficie se llama *toro*) fácilmente se calcula por el método indicado: $L = 2\pi a \cdot 2\pi r = 4\pi^2 ar$, ya que el centro de gravedad de la circunferencia coincide con su centro.

En calidad de ejemplo de cálculo del centro de gravedad de una curva según la fórmula (32.28) hallemos el centro de gravedad de la catenaria $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $-b \leqslant x \leqslant b$. En virtud de la simetría de esta línea con respecto al eje Oy tenemos $M_y = 0$. En realidad, tomando como punto de referencia de los arcos un punto de la catenaria que está en el eje Oy y denotando la longitud de toda la catenaria por $2S$, obtendremos

$$M_y = \int_{-S}^{S} x(s)\, ds = 0,$$

ya que $x(s)$ es una función impar. De la igualdad $M_y = 0$ en virtud de la fórmula (32.28) se deduce que $x_0 = 0$.

Por el teorema de Goulden $L_x = 2\pi y_0 \cdot 2S$, donde $2S$ es la longitud de la curva, en el caso dado de la catenaria analizada, y L_x es el área de la superficie de revolución formada por la rotación de esta línea alrededor del eje Ox. El área L_x fue calculada en el p. 32.4:

$$L_x = \pi a \left(2b + a \operatorname{sh} \frac{2b}{a}\right)$$

y la longitud $2S$ de la catenaria fácilmente se calcula por la fórmula (32.15):

$$2S = \int_{-b}^{b} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_{-b}^{b} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}}\, dx =$$

$$= \int_{-b}^{b} \operatorname{ch} \frac{x}{a}\, dx = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \Big|_{-b}^{b} = 2\, a \operatorname{sh} \frac{b}{a};$$

por la fórmula (32.28) obtendremos

$$y_0 = \left(2b + a \operatorname{sh} \frac{2b}{a}\right) / 4 \operatorname{sh} \frac{b}{a}.$$

Ejercicios. 3. Hállese el área de la región finita, acotada por la parábola $y^2 = 2x + 1$ y la recta $y = x - 1$.

4. Hállese el área de la región acotada por la cicloide

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

y por la recta $y = 0$.

5. Hállese el área de la región acotada por la curva $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (esta curva se llama lemniscata).

6. Hállese el volumen del cuerpo de revolución formado por la rotación de un arco del sinusoide $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, alrededor del eje Ox.

7. Hállese la longitud de la curva $y = \ln \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant a < \frac{\pi}{2}$.

8. Hállese la longitud del arco de la *espiral de Arquímedes* $\rho = a\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

9. Hállese el área de la superficie formada por la rotación de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ alrededor del eje Ox.

10. Hállese las coordenadas del centro de gravedad del arco del círculo

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi,\quad |\varphi| \leqslant \alpha \leqslant \pi.$$

11. Demuéstrese la unicidad del centro de gravedad para una curva continuamente diferenciable, dicho de otro modo, demuéstrese que el punto del plano definido por las fórmulas (32.28), no depende de la elección de las coordenadas cartesianas sobre el plano

§ 33. INTEGRALES IMPROPIAS

33.1. DEFINICIÓN DE INTEGRALES IMPROPIAS

Una función no acotada sobre un segmento no es integrable sobre él según Riemann (teorema 1, del p. 27.2). Si la función está definida sobre un intervalo infinito, entonces no se puede hablar de su integrabilidad según Riemann sencillamente por que la definición de la integral se refiere sólo a las funciones dadas sobre un segmento. En el presente párrafo el concepto de integral se generaliza tanto al caso de funciones definidas sobre intervalos no acotados, así como para el caso de funciones definidas sobre intervalos acotados, pero no acotados en ellos. Esto se hace con ayuda de un paso límite complementario al límite con cuya ayuda se introduce la integral de Riemann.

Definición 1. *Sea la función f definida sobre un intervalo semiabierto finito o infinito $[a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, e integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[a, \eta]$, $a \leqslant \eta < b$. Si existe $\lim\limits_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\,dx$, entonces la función f se llama integrable en el sentido impropio sobre el intervalo $[a, b)$ y el límite señalado se llama su integral impropia y se denota por $\int_a^b f(x)\,dx$.*

De esta manera (fig. 142)

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\,dx. \tag{33.1}$$

Si el límite (33.1) existe (y por consiguiente es finito) entonces también se dice que la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge*, en el caso contrario que *diverge*. A

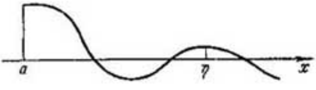


FIG. 142

diferencia de la integral impropia la integral ordinaria de Riemann se llama a veces *integral propia.*

La existencia de la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ es equivalente a la existencia de la integral impropia $\int_c^b f(x)\,dx$ para cualquier $c \in (a, b)$. En realidad la integral $\int_a^\eta f(x)\,dx$ se diferencia de la integral $\int_c^\eta f(x)\,dx$ (cuando $c < \eta < b$) en una magnitud finita $\int_a^c f(x)\,dx$ que no depende de η:

$$\int_a^\eta f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\eta f(x)\,dx.$$

Por esto cuando $\eta \to b$ ambas integrales $\int_a^\eta$ y $\int_c^\eta$ tienen o no límite simultáneamente, además en el caso de su existencia

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{33.2}$$

De la definición (33.1) de la integral impropia y de (33.2) se deduce que si la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ converge entonces

$$\lim_{c \to b} \int_c^b f(x)\,dx = 0. \tag{33.3}$$

Señalemos que no se puede tomar el cumplimiento de esta condición en calidad de definición de la integral convergente $\int_a^b f(x)\,dx$ ya que la integral $\int_c^b f(x)\,dx$ también es impropia, y se puede hablar de su tendencia a cero cuando $c \to b$ sólo al tener ya la definición de integral impropia convergente.

Si la función f es no negativa y continua sobre el intervalo $[a, b)$, entonces la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ es igual al área del conjunto abierto no acotado:

$$G = \{(x, y) : a < x < b; 0 < y < f(x)\},$$

es decir

$$\int_a^b f(x)\,dx = \operatorname{mes} G. \tag{33.4}$$

En realidad (en la fig. 143 está representado el caso de un b finito) tomemos una sucesión cualquiera $\eta_k \in [a, b)$, $k = 1, 2, \dots$, de forma tal que $\lim\limits_{k \to \infty} \eta_k = b$ y hagamos

$$G_k = \{(x, y) : a < x < \eta_k, 0 < y < f(x)\}.$$

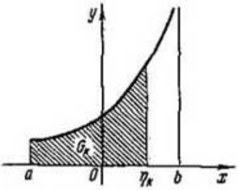


FIG. 143

Entonces por el teorema 1 del p. 32.1

$$\text{mes}\, G_k = \int_a^{\eta_k} f(x)\,dx. \tag{33.5}$$

Por cuanto G_k son conjuntos abiertos, $k = 1, 2, \ldots$, y

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_k \subset \ldots \text{ y } \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G,$$

entonces en virtud del teorema 2 del p. 31.2

$$\lim_{k\to\infty} \text{mes}\, G_k = \text{mes}\, G.$$

Por la misma definición de integral impropia

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^{\eta_k} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Por esto pasando al límite en la igualdad (33.5) cuando $k \to \infty$ obtendremos (33.4).

Señalemos que la definición (33.1) de la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ en el caso del intervalo finito $[a, b)$ tiene sentido sólo en el caso cuando la función f no es acotada en cualquier entorno del punto $x = b$, es decir, sobre cualquier intervalo $(b - \varepsilon, b)$ $(0 < \varepsilon < b - a)$. Esto está relacionado con el hecho de que -no es difícil mostrar- toda función integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[a, \eta]$, $a \leqslant \eta < b < +\infty$, y acotada sobre el intervalo semiabierto $[a, b)$ será integrable según Riemann también sobre el segmento $[a, b]$ al definirla complementariamente en el punto $x = b$. En este caso la integral de Riemann de la función definida de esta manera es igual al límite (33.1) y por lo tanto no depende de la elección del valor complementario de la función cuando $x = b$. En este sentido la integral de Riemann es un caso particular de la integral impropia. Por esto toda la exposición siguiente tiene sentido sólo cuando la función está definida sobre intervalo infinito o

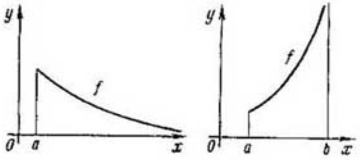


FIG. 144

finito con la particularidad de que en el último caso es no acotada (fig. 144). Lo dicho se comprende en el sentido de que para las funciones subintegrales acotadas, definidas en intervalos acotados, los teoremas demostrados a continuación o bien son triviales o bien han sido demostrados anteriormente.

Ejercicios. 1. Sea la función f acotada sobre el intervalo semiabierto $[a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$, e integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[a, \eta]$, $a \leqslant \eta < b$. Demuéstrese que en este caso el límite $\lim\limits_{\eta \to b} \int\limits_a^\eta f(x)\,dx$ siempre existe, además si la función f se define complementariamente de modo arbitrario cuando $x = b$, entonces este límite será igual a la integral de Riemann respecto al segmento $[a, b]$ de la función definida complementariamente.

2. Cítese un ejemplo de una función f no negativa cuando $x \geqslant 1$ y no acotada en cualquier entorno de $+\infty$ para la cual converge la integral impropia $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Si la función f está definida sobre el intervalo semiabierto del tipo $(a, b]$, $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, y es integrable según Riemann sobre todos los segmentos $[\xi, b]$, $a < \xi \leqslant b$, entonces la integral impropia $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ se define por la fórmula

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\xi \to a} \int\limits_\xi^b f(x)\,dx. \tag{33.6}$$

Si la función f está definida sobre el intervalo (a, b) $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, y para una elección del punto $c \in (a, b)$ existen las integrales impropias $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ (en el sentido de (33.6)) y $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ (en el sentido de (33.1)) entonces por definición se supone

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \tag{33.7}$$

Además la existencia y el valor de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ no dependen de la elección del punto $c \in (a, b)$. En realidad en el caso analizado la función f evidentemente es integrable según Riemann sobre todo segmento $[\xi, \eta]$, $a < \xi < \eta < b$, y la definición (33.7) en virtud de las definiciones (33.1) y (33.6) es equivalente a la siguiente:

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\xi \to a \\ \eta \to b}} \int_\xi^\eta f(x)\,dx, \qquad a < \xi < \eta < b.$$

Aquí la parte derecha es el límite de la función de dos variables ξ y η, además las variables ξ y η tienden respectivamente a a y a b independientemente una de otra.

Supongamos ahora que existe un número finito de puntos x_i, $i = 0, 1, \dots, k$, $-\infty \leqslant a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b \leqslant +\infty$ (por x_0 se puede suponer también $-\infty$ y por x_k, $+\infty$) tales que todas las integrales impropias

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

existen. Entonces la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ se define por la fórmula

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx. \tag{33.8}$$

De esta definición y de la definición (33.7) se deduce que la integral impropia en el caso general se reduce a integrales del tipo (33.1) y (33.6). Por esto en lo adelante nos limitaremos sólo al estudio de integrales impropias de los dos tipos señalados.

Ejercicios. 3. Demuéstrese que la existencia y el valor de la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ en la definición (33.8) no depende de la elección de los puntos x_i, $i = 0, 1, 2, \cdots, k$, que satisfacen las condiciones formuladas anteriormente.

4. Demuéstrese que si la integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge y existe $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, entonces este límite es igual a cero:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Ejemplo 1. Mostremos que la integral impropia de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ respecto al intervalo semiabierto $(0, 1]$ diverge. En realidad

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\xi \to +0} \int_\xi^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\xi \to +0} \ln x \Big|_\xi^1 = -\lim_{\xi \to +0} \ln \xi = +\infty.$$

Como siempre los cálculos realizados se escriben brevemente:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_0^1 = +\infty.$$

2. Aclaremos para cuáles $\alpha \neq 1$ converge y para cuáles diverge la integral de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ respecto al intervalo $(0, 1]$. Tenemos

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_0^1 = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{para} \quad \alpha < 1, \\ +\infty & \text{para} \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

Señalemos que cuando $\alpha \leqslant 0$ la integral analizada es propia. Uniendo los resultados obtenidos en los ejemplos 1 y 2 obtendremos.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \text{converge} & \text{cuando} \quad \alpha < 1, \\ \text{diverge} & \text{cuando} \quad \alpha \geqslant 1. \end{cases} \tag{33.9}$$

3. Analicemos ahora la función $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ sobre un intervalo infinito $[1, +\infty)$. Si $\alpha = 1$, entonces

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{+\infty} = +\infty.$$

Si además $\alpha \neq 1$ entonces

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^{+\infty} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{cuando} \quad \alpha > 1, \\ +\infty & \text{cuando} \quad \alpha < 1. \end{cases}$$

De esta manera

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \text{converge} & \text{cuando} \quad \alpha > 1, \\ \text{diverge} & \text{cuando} \quad \alpha \leqslant 1. \end{cases} \tag{33.10}$$

4. Si la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ converge y

$$f^*(x) \overset{\text{def}}{=} f(-x), \quad -b \leqslant x \leqslant -a,$$

entonces la integral $\int_{-b}^{-a} f^*(x)\,dx$ también converge y

$$\int_{-b}^{-a} f^*(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

En efecto, supongamos, por ejemplo, que la función f es integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[a, \eta]$, $a \leqslant \eta < b$, y por consiguiente

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\,dx$$

(el caso general de la integral impropia en virtud de la definición (33.8) se reduce a integrales semejantes, más exacto a integrales del tipo (33.1) y (33.6)). Por las fórmulas (28.31) (véase el p. 28.1) tiene lugar la igualdad

$$\int_a^\eta f(x)\,dx = \int_{-\eta}^{-a} f^*(x)\,dx.$$

Por lo que

$$\lim_{-\eta \to -b} \int_{-\eta}^{-a} f^*(x)\,dx = \lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

pero el límite del primer miembro de la igualdad es precisamente la integral $\int_{-b}^{-a} f^*(x)\,dx$, de esta manera

$$\int_{-b}^{-a} f^*(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

En particular, si la función f es *par* sobre el segmento $[-a, a]$ y la integral $\int_0^a f(x)\,dx$ converge, entonces converge también la integral $\int_{-a}^0 f(x)\,dx$, además

$$\int_{-a}^0 f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx,$$

y por consiguiente

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

5. Sea la función f definida cuando $x \geqslant a$, periódica con período $T > 0$ y la integral $\int_a^{a+T} f(x)\,dx$ converge, entonces para cualquier $b \geqslant a$ la integral $\int_b^{b+T} f(x)\,dx$ también converge y

$$\int_b^{b+T} f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,dx.$$

Es válida también la afirmación inversa en cierto sentido: si para algún $b \geqslant a$ la integral $\int_b^{b+T} f(x)\,dx$ converge, converge también la integral $\int_a^{a+T} f(x)\,dx$ y por consiguiente es válida la fórmula escrita anteriormente.

Para la demostración es suficiente observar que las fórmulas (28.34) (véase el p. 28.1) son válidas también en el caso cuando las integrales que figuran en ellas son impropias. Esto se demuestra mediante un paso límite de la igualdad de las integrales propias correspondientes (su igualdad se deduce de la fórmula (28.33)), el límite de las cuales son las integrales impropias analizadas.

Hemos introducido un nuevo concepto, el concepto de integral impropia. Ante todo es natural aclarar qué propiedades tiene esta integral. ¿Se conservan o no para ella las propiedades de la integral común? ¿Surgen para la integral impropia (si surgen entonces cuáles) nuevos problemas y cuestiones específicas sólo para ella? Obtendremos las respuestas a estas preguntas en los puntos siguientes de este párrafo.

33.2. FÓRMULAS DE CÁLCULO INTEGRAL PARA LAS INTEGRALES IMPROPIAS

En éste y en los puntos siguientes al analizar las propiedades de las integrales impropias vamos a detenernos más detalladamente sólo en las integrales de funciones definidas sobre intervalos finitos o infinitos del tipo $[a, b)$ e integrables según Riemann sobre todos los segmentos $[a, \eta]$, $a \leqslant \eta < b$. Otras suposiciones cualesquiera serán especialmente comentadas.

En virtud de las propiedades del límite y la definición de integral impropia, como del límite de la integral ordinario de Riemann, a las integrales impropias se extienden muchas propiedades de la integral definida. Analicemos algunas de ellas.

1°. **(Fórmula de Newton — Leibniz para las integrales impropias).** *Si la función f es continua sobre el intervalo semiabierto $[a, b)$ y F es una primitiva sobre él, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} F(b-0) - F(a) & si \quad b \text{ es finito}, \\ F(+\infty) - F(a) & si \quad b = +\infty. \end{cases} \tag{33.11}$$

Aquí $F(b-0) = \lim\limits_{x \to b-0} F(x)$ en el caso cuando b es finito y $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ y por primitiva F de la función f sobre el intervalo $[a, b)$ se entiende la función F continua sobre él, diferenciable en todos sus puntos interiores y tal que $F'(x) = f(x)$, $a < x < b$.

La igualdad (33.11) se entiende en el sentido de que o bien ambos miembros tienen sentido simultáneamente y entonces son iguales, o bien ellas no tienen sentido simultáneamente, es decir, los límites que aparecen en ellas no existen. En realidad según la fórmula de Newton — Leibniz para las funciones integrables según Riemann (véase el p. 29.3) para cualquier $\eta \in [a, b)$ tenemos

$$\int_a^\eta f(x)\,dx = F(\eta) - F(a).$$

Pasando en esta igualdad al límite cuando $\eta \to b$, $a \leqslant \eta < b$ obtenemos la fórmula (33.11).

Subrayamos que esta fórmula está demostrada en la suposición de que la función f es integrable en el sentido común sobre cada intervalo del tipo $[a, \eta)$,

$a \leqslant \eta < b$. Para las integrales del tipo (33.8) en el caso cuando en la parte derecha se tiene más de un sumando, la fórmula análoga no siempre es cierta. Dicho figuradamente, si en cierto punto interior del intervalo dado la función se convierte en infinito, entonces sobre todo este intervalo no se puede, en general, aplicar la fórmula de Newton — Leibniz. Por ejemplo, si a la integral $\int\limits_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}$ le aplicamos formalmente la fórmula de Newton — Leibniz, entonces ella será igual al número $-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2$. No obstante, como ya sabemos, la integral en cuestión no existe. De esta forma, en este ejemplo la aplicación de la fórmula de Newton — Leibniz sobre todo el intervalo de integración es imposible de hecho.

La fórmula análoga (33.11) es válida, claro, para las integrales impropias del tipo (33.6). Si además la integral impropia se define por la igualdad (33.8), entonces la fórmula de Newton — Leibniz se debe aplicar (si es posible) para cada sumando de la parte derecha por separado.

2°. **(Linealidad de la integral impropia).** *Si las integrales impropias* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *convergen, entonces para números cualesquiera* λ, μ *converge también la integral impropia* $\int\limits_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx$, *además*

$$\int\limits_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda\int\limits_a^b f(x)\,dx + \mu\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

En realidad,

$$\int\limits_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lim_{\eta \to b} \int\limits_a^\eta [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx =$$

$$= \lim_{\eta \to b} [\lambda\int\limits_a^\eta f(x)\,dx + \mu\int\limits_a^\eta g(x)\,dx] =$$

$$= \lambda \lim_{\eta \to b} \int\limits_a^\eta f(x)\,dx + \mu \lim_{\eta \to b} \int\limits_a^\eta g(x)\,dx =$$

$$= \lambda\int\limits_a^b f(x)\,dx + \mu\int\limits_a^b g(x)\,dx, \quad a \leqslant \eta < b.$$

De forma semejante se demuestran las siguientes propiedades de las integrales impropias, análogas a las propiedades correspondientes de la integral de Riemann.

3°. **(Integración de desigualdades).** *Si las integrales* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *convergen, y para todos los* $x \in [a, b)$ *se cumple la desigualdad* $f(x) \leqslant g(x)$, *entonces*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

4°. **(Regla de integración por partes).** *Si las funciones* $u = u(x)$ *y* $v = v(x)$ *son continuamente diferenciables sobre el intervalo* $[a, b)$, *entonces*

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du, \tag{33.12}$$

además, si dos expresiones cualesquiera de las tres $\int_a^b u\,dv$, $uv\Big|_a^b$ *y* $\int_a^b v\,du$ *tienen sentido* (es decir, los límites correspondientes son finitos), *entonces tiene sentido también la tercera.*

5°. **(Cambio de variable en una integral impropia).** *Sean la función* f *continua sobre* $[a, b)$, *la función* $\varphi(t)$ *continuamente diferenciable sobre el intervalo semiabierto* $[\alpha, \beta)$, $-\infty < \alpha < \beta \leqslant +\infty$, *además* $a = \varphi(\alpha) \leqslant \varphi(t) < b = \lim\limits_{t \to \beta} \varphi(t)$ *cuando* $\alpha \leqslant t < \beta$, *entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)]\,dt. \tag{33.13}$$

En este caso las integrales en ambas partes de esta fórmula simultáneamente convergen o no.

Puede suceder que con ayuda de un cambio de variable la integral impropia se convierte en ordinario. Por ejemplo, realizando en la integral impropia $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ el cambio de variable $x = \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t < \frac{\pi}{2}$, obtenemos la integral propia

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Señalemos que cualquier integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ respecto al intervalo finito $[a, b)$ puede ser reducida mediante un cambio de variable a una integral impropia respecto a un intervalo no acotado. En efecto, al realizar, por ejemplo, el cambio de variable.

$$x = \frac{bt + a}{t + 1}, \quad dx = \frac{b - a}{(t + 1)^2}\,dt,$$

obtendremos

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a)\int_0^{+\infty} f\left(\frac{bt + a}{t + 1}\right)\frac{dt}{(t + 1)^3}.$$

Por analogia con la integral de Riemann la integral impropia convergente $\int_a^b f(x)\,dx$, $a < b$, según la definición, deberá ser

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Se debe prestar atención a que no todas las propiedades de la integral definida de Riemann se trasladan a las integrales impropias. Así, por ejemplo, el producto de dos funciones integrables por Riemann sobre cierto intervalo, es una función también integrable por Riemann sobre él. El análogo de esta afirmación para las integrales impropias no es siempre válido. Existen funciones f y g, cuyas integrales sobre cierto intervalo convergen, y la integral de su producto sobre este mismo intervalo diverge. En efecto, supongamos, por ejemplo, $f(x) = g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Como ya sabemos (p. 33.1) la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge y la integral

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x} \text{ diverge.}$$

La observación hecha nos recuerda una vez más que utilizando los análogos de las propiedades de la integral de Riemann al tratar integrales impropias, no se debe olvidar la necesidad de revisar la validez para la integral impropia de cualquier afirmación análoga a la afirmación correspondiente para la integral propia.

Ejemplos. Calculemos las siguientes integrales impropias utilizando las propiedades enunciadas anteriormente:

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. Por medio del cambio de variable $x = \dfrac{1}{t}$, obtendremos

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{arcsen}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2};$$

2. $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln x)^n\,dx$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Integrando por partes (cuando $n > 0$), tenemos

$$I_n = x(\ln x)^n\Big|_0^1 - n\int_0^1 (\ln x)^{n-1}\,dx = -nI_{n-1},$$

ya que $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln x)^n = 0$. Esta igualdad se obtiene fácilmente, si aplicamos n veces la regla de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} x(\ln x)^n = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)^n}{1/x} = -n\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)^{n-1}}{1/x} = \dots = (-1)^{n+1}\,n!\lim_{x\to 0} x = 0.$$

Observando que $I_0 = \displaystyle\int_0^1 dx = 1$, obtendremos $I_n = (-1)^n n!$[*];

[*] Recordemos que por definición $0! = 1$.

3. $J_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx,\ n = 0, 1, 2, \dots$. De nuevo integrando por partes la integral dada cuando $n > 0$, obtendremos

$$J_n = -x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + n \int\limits_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx = n\, I_{n-1}$$

y por cuanto

$$J_0 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$$

entonces

$$J_n = n!$$

4. Siguen siendo válidas para las integrales impropias las desigualdades de Minkovski y Hölder (véase el p. 28.4°):

$$\left(\int\limits_0^b |f(x) + g(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int\limits_a^b |(x)|^p\, dx\right)^{1/p} + \left(\int\limits_a^b |g(x)|^p\, dx\right)^{1/p},$$

$$\left|\int\limits_a^b f(x) g(x)\, dx\right| \leqslant \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{1/q},$$

$$1 < p < +\infty,\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Para la demostración es suficiente escribir las desigualdades correspondientes para las integrales sobre el segmento $[a, \eta]$ y pasar al límite cuando $\eta \to b$.

En el siguiente punto nos ocuparemos de un problema específico de la teoría de las integrales impropias: determinación de los criterios de su convergencia.

Ejercicios. Calcúlense las integrales impropias:

4. $\displaystyle\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}}$, $a > 0$.

5. $\displaystyle\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^3 + a^3}$, $a > 0$.

6. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}\, dx$.

7. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + ax + a^2}$, $a > 0$.

8. $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $0 \leqslant a < b$.

9. Hallése $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\int\limits_0^b (t^p + a^p)^q\, dt}{x^{pq+1}}$, $a, p, q > 0$.

Indicación: utilícese la regla de L'Hospital.

33.3. INTEGRALES IMPROPIAS DE FUNCIONES NO NEGATIVAS

El estudio de los criterios de convergencia de las integrales impropias lo comenzaremos con el caso cuando la función subintegral es no negativa. Además vamos a atenernos al acuerdo enunciado al inicio del punto anterior.

Lema 1. *Si la función f es no negativa sobre el intervalo semiabierto $[a, b)$, entonces para la convergencia de la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ es necesario y suficiente que todas las integrales*

$$\int_a^\eta f(x)\,dx, \quad a \leqslant \eta < b$$

sean acotadas en conjunto, es decir, que exista una constante $M > 0$ tal que para todos los $\eta \in [a, b)$ se cumple la desigualdad

$$\int_a^\eta f(x)\,dx \leqslant M. \tag{33.14}$$

Cuando se cumple esta condición

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup_{a \leqslant \eta < b} \int_a^\eta f(x)\,dx. \tag{33.15}$$

DEMOSTRACIÓN. Analicemos la función

$$\varphi(\eta) = \int_a^\eta f(x)\,dx, a \leqslant \eta < b. \tag{33.16}$$

Por cuanto $f \geqslant 0$ la función φ crece: en realidad si $a \leqslant \eta < \eta' < b$, entonces (véase la propiedad 8° de la integral en el p. 28.1)

$$\int_\eta^{\eta'} f(x)\,dx \geqslant 0,$$

por esto

$$\varphi(\eta') = \int_a^{\eta'} f(x)\,dx = \int_a^\eta f(x)\,dx + \int_\eta^{\eta'} f(x)\,dx \geqslant \int_a^\eta f(x)\,dx = \varphi(\eta).$$

Observemos ahora que la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si y sólo si existe el límite $\lim\limits_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\,dx = \lim\limits_{\eta \to b} \varphi(\eta)$, y el último límite existe cuando y sólo cuando (véase el teorema 5 en el p. 4.10) la función φ está acotada superiormente, es decir, cuando se cumple la condición (33.14). Además,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to b} \varphi(\eta) = \sup_{a \leqslant \eta < b} \varphi(\eta) = \sup_{a \leqslant \eta < b} \int_a^\eta f(x)\,dx. \ \square$$

Del lema demostrado se deduce que para que la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ de una función no negativa diverja, es necesario y suficiente que la función $\varphi(\eta)$ (véase (33.16)) sea no acotada superiormente, pero entonces en virtud de su crecimiento

$$\lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\,dx = \lim_{\eta \to b} \varphi(\eta) = +\infty.$$

Por esto, si la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ de una función no negativa diverge, entonces se escribe $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$. Con este acuerdo permanece válida la igualdad (33.15).

Teorema 1 (criterio de comparación). *Sean las funciones f y g no negativas sobre el intervalo semiabierto $[a, b)$ y*

$$f(x) = O(x)) \quad \text{cuando} \quad x \to b^{*)}. \tag{33.17}$$

Entonces

1) *si la integral $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, entonces converge también la integral $\int_a^b f(x)\,dx$;*

2) *si la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, entonces diverge también la integral $\int_a^b g(x)\,dx$.*

Corolario. *Sean las funciones f, g no negativas sobre el intervalo semiabierto $[a, b)$, $g(x) \neq 0$, $x \in [a, b)$ y existe*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k, a \leqslant x < b. \tag{33.18}$$

Entonces

1) si la integral $\int_a^b g(x)\,dx$ converge y $0 \leqslant k < +\infty$ entonces la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ también converge;

2) si la integral $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge y $0 < k \leqslant +\infty$ entonces la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ también diverge.

En particular, si f y g son funciones equivalentes cuando $x \to b$: $f \sim g$, $x \to b$ (véase el p. 8.2), *entonces las integrales $\int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_a^b g(x)\,dx$ convergen o divergen simultáneamente.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Supongamos que la integral $\int_a^b g(x)\,dx$ converge. De la condición (33.17) se deduce la existencia de un η_0, $a \leqslant \eta_0 < b$, y $c > 0$ tales

---

*) En particular $f(x) \leqslant g(x)$, $x \in [a, b)$.

que para todos los $x \in [\eta_0, b)$ se cumple la desigualdad

$$f(x) \leqslant cg(x) \tag{33.19}$$

(véase el p. 8.2). De la convergencia de la integral $\int_a^b g(x)\,dx$ se deduce la convergencia de la integral $\int_{\eta_0}^{b} g(x)\,dx$. En virtud de la necesidad de las condiciones del lema para la convergencia de la integral, existe un número $M > 0$ tal que para cualquier $\eta \in [\eta_0, b)$ es válida la desigualdad

$$\int_{\eta_0}^{\eta} g(x)\,dx \leqslant M.$$

De aquí y de la desigualdad (33.19) tenemos

$$\int_{\eta_0}^{\eta} f(x)\,dx \leqslant c \int_{\eta_0}^{\eta} g(x)\,dx \leqslant cM.$$

De esta desigualdad, en virtud de la suficiencia de las condiciones del lema para la convergencia de la integral de una función no negativa obtenemos que la integral $\int_{\eta_0}^{b} f(x)\,dx$ y por consiguiente también la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ convergen.

La primera afirmación del teorema está demostrada. La segunda lógicamente es equivalente a la primera. En particular, si la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_a^b g(x)\,dx$ no puede converger, ya que si ella fuera convergente, entonces por la primera afirmación del teorema ya demostrada convergería también la integral $\int_a^b f(x)\,dx$. De esta forma la integral $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge. □

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Del cumplimiento de la condición (33.18) para k, que satisface la condición $0 \leqslant k < +\infty$, se deduce que existe un $\eta \in [a, b)$ tal que si $\eta < x < b$, entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} < k + 1, \quad \text{es decir,} \quad f(x) < (k + 1)g(x)$$

y esto significa que

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to b.$$

Por esto la afirmación 1) del corolario se deriva directamente de la afirmación 1) del teorema 1.

Supongamos ahora que la condición (33.18) se cumple para cierto k, que satisface la condición $0 < k \leqslant +\infty$. Entonces para cualquier $k' \in (0, k)$ existe tal $\eta \in$

$\in [a, b)$ que si $\eta < x < b$ entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} < k' \quad \text{o} \quad g(x) < \frac{1}{k'} f(x).$$

Esto significa que $g(x) = O(f(x))$, $x \to b$. Por esto la afirmación 2) del corolario se deriva directamente de la afirmación 2) del teorema 1. □

La función $g(x)$ en la afirmación 1 del teorema 1 y en su corolario, con cuya ayuda se demuestra la convergencia de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, se llama *función de comparación*. Si en particular $f(x) \leqslant g(x)$ para todos los $x \in [a, b)$, entonces se dice también que $f(x)$ se mayorea por la función $g(x)$ o que $g(x)$ sirve de *mayorante* para $f(x)$.

La efectividad de la utilización del criterio de comparación para resolver el problema sobre la convergencia de la integral depende, claro, de la reserva de funciones de comparación, sobre las cuales es sabido si converge o diverge la integral impropia de ellas tomada en el intervalo analizado, y las cuales de esta manera se puede tratar de utilizarlas para analizar la convergencia de la integral dada. Señalemos que la afirmación análoga al teorema 1, es válida, claro, también para las integrales impropias del tipo (33.6).

En calidad de funciones de comparación $g(x)$ a menudo es suficiente tomar funciones potenciales. Exactamente en el caso de intervalos finitos $[a, b)$ y $(a, b]$ se toman respectivamente las funciones $g(x) = \dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$ y $g(x) = \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$, cuyas integrales $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ convergen cuando $\alpha < 1$ y divergen cuando $\alpha \geqslant 1$ (de esto es fácil convencerse reduciendo las integrales señaladas con un cambio de variable lineal a las integrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, analizadas en el p. 33.1). En el caso de intervalos infinitos $[a, +\infty)$ y $(-\infty, b]$ como funciones de comparación se toman respectivamente $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ y $g(x) = \dfrac{1}{|x|^\alpha}$ cuyas integrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{|x|^\alpha}$ convergen cuando $\alpha > 1$ y divergen cuando $\alpha \leqslant 1$ (véanse los ejemplos en el p. 33.1).

Señalemos además que de manera evidente todos los criterios enunciados de convergencia y divergencia de las integrales quedan vigentes (con evidentes variaciones), si en ellas la condición de que la función f es no negativa se cambia por la condición de su no positividad (esto se deduce de que la integral $\int_a^b (-f(x))\,dx$ converge si y sólo si converge la integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

Ejemplos. 1. La integral

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx \tag{33.20}$$

converge. En efecto, denotando por f la función subintegral $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ y tomando en calidad de función de comparación

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}, \quad \text{aquí} \quad \alpha = \frac{1}{3},$$

tenemos

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1-0} \sqrt[3]{1-x}\,\frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

por eso, según el corolario del teorema 1, la integral (33.20) converge.

2. La integral $\int_0^1 \frac{1}{1-x^2}\,dx$ diverge. Para convencerse de esto es suficiente tomar en calidad de función de comparación $g(x) = \frac{1}{1-x}$, aquí $\alpha = 1$.

En los ejemplos analizados se podría elegir inmediatamente el exponente α en la función de comparación partiendo del tipo concreto de la función subintegral dada. En ocasiones cuando esta elección de inmediato no está clara, se hace necesario previamente realizar algunos análisis complementarios, por ejemplo, tratar de separar su parte principal recurriendo a la fórmula de Taylor. Analicemos ejemplos semejantes.

3. La integral

$$\int_0^1 \ln x\,dx \tag{33.21}$$

converge. En realidad, por la regla de L'Hospital para cualquier $\alpha > 0$, en particular cuando $0 < \alpha < 1$, tenemos

$$\lim_{x\to +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to +0} \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x\to +0} x^\alpha = 0,$$

por esto, de acuerdo con el corolario del teorema 1 (más exacto, con su análogo para las funciones no positivas) la integral (33.21) converge.

Geométricamente la convergencia y la divergencia de las integrales (33.9), (33.10) y (33.21) significa lo finito o infinito de las áreas de los respectivos "trapecios curvilíneos infinitos" cuya disposición comparativa está representada en la fig. 145.

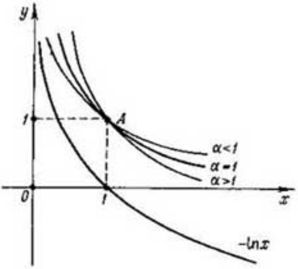


FIG. 145

4. Para aclarar la cuestión sobre la convergencia de la integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\ln x} \tag{33.22}$$

observemos que $\ln x = \ln [1 + (x - 1)] \sim x - 1$ cuando $x \to 1$ y tomemos como función de comparación $g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$, $(\alpha = 1)$. Entonces $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x}{\ln x} = -1$ y por consiguiente la integral (33.22) diverge.

5. La integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3 + 1}}\, dx \tag{33.23}$$

converge. En efecto, tenemos $\alpha = \dfrac{3}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Entonces aplicando de nuevo la regla de L'Hospital, obtendremos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}-\varepsilon} \ln x}{\sqrt{x^3 + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^3 + 1}} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\varepsilon}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\varepsilon x^{\varepsilon}} = 0.$$

Escojamos $\varepsilon > 0$ tal que $\dfrac{3}{2} - \varepsilon > 1$; en este caso la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}-\varepsilon}}$ converge, y por ello, según el corolario del teorema 1, converge también la integral (33.23).

6. Analicemos la convergencia de la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p}\,dx. \tag{33.24}$$

Aquí la función subintegral es siempre negativa. Evidentemente la integral (33.24) converge o diverge simultáneamente con la integral

$$\int_1^{+\infty} \left(-\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p}\right)dx \tag{33.25}$$

en la cual la función subintegral es siempre positiva. Desarrollando la función $\ln\cos\frac{1}{x}$ según la fórmula de Taylor, obtendremos

$$-\ln\cos\frac{1}{x} = -\frac{\ln\left[1-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]}{x^p} =$$

$$= -\frac{-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^p} = \frac{1}{2x^{2+p}} + o\left(\frac{1}{x^{2+p}}\right), \quad x \to +\infty.$$

De esta manera, $-\dfrac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p} \sim \dfrac{1}{2x^{2+p}}$ cuando $x \to +\infty$ y por consiguiente, la integral (33.24) converge cuando $2 + p > 1$, es decir, cuando $p > -1$ y diverge cuando $p \leqslant -1$.

En los ejemplos 2 y 3 sería posible establecer la convergencia de las integrales allí analizadas, calculándolas por la fórmula de Newton — Leibniz. No obstante la aclaración de la convergencia de las integrales con ayuda del criterio de comparación habitualmente exige menos operaciones que mediante su cálculo preliminar por la fórmula de Newton — Leibniz. Es importante señalar que utilizando el criterio de comparación, se puede aclarar la convergencia de las integrales, naturalmente, también en el caso cuando la primitiva de la función subintegral no es elemental y por consiguiente, mediante el método común, con ayuda de la fórmula de Newton — Leibniz, la integral a ciencias ciertas no se calcula, como ocurrió en los ejemplos 4 y 5.

Subrayemos una vez más que el criterio de comparación para aclarar la cuestión sobre la convergencia de la integral impropia se puede aplicar sólo para las funciones que no cambian de signo. Surge la pregunta: ¿comó se aclara si converge o diverge la integral impropia en el caso cuando la función subintegral cambia el signo? En los siguientos puntos nos ocuparemos del estudio de esta cuestión.

33.4. CRITERIO DE CAUCHY DE LA CONVERGENCIA DE INTEGRALES IMPROPIAS

En este punto ya no vamos a suponer que los valores de las funciones analizadas conservan un mismo signo en el intervalo semiabierto $[a, b)$ — ellas pueden tomar valores de cualquier signo —, pero como antes supondremos que todas las funciones analizadas para cualquier elección de un número $\eta \in [a, b)$ son integrables según Riemann sobre el segmento $[a, \eta)$.

Teorema 2. *Para la convergencia de la integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *es necesario y suficiente que para cualquier* $\varepsilon > 0$ *exista un número* $\eta = \eta(\varepsilon)$, $a \leqslant \eta < b$, *tal que si* $\eta < \eta' < b$, $\eta < \eta'' < b$, *entonces*

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon. \tag{33.26}$$

DEMOSTRACIÓN. Hagamos $\varphi(\eta) = \int_a^\eta f(x)\,dx$, $a \leqslant \eta < b \leqslant +\infty$. Entonces la convergencia de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, es decir, la existencia del límite (33.1) significa la existencia del límite $\lim\limits_{\eta \to b} \varphi(\eta)$. En virtud del criterio de Cauchy para la existencia del límite finito de la función $\varphi(\eta)$ cuando $\eta \to b$ es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista un entorno reducido por la izquierda $\mathring{U}(b, \eta) = \{x : \eta < x < b\}$ del punto b, es decir, que exista un número η, $a \leqslant \eta < b$, tal que para todos los $\eta' \in \mathring{U}(b, \eta)$ y $\eta'' \in \mathring{U}(b; \eta)$ (que es equivalente a la condición: $\eta < \eta' < b$, $\eta < \eta'' < b$) se cumpla la desigualdad

$$|\varphi(\eta'') - \varphi(\eta')| < \varepsilon \tag{33.27}$$

Por cuanto

$$\varphi(\eta'') - \varphi(\eta') = \int_a^{\eta''} f(x)\,dx - \int_a^{\eta'} f(x)\,dx = \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx,$$

entonces la desigualdad (33.27) es equivalente a la condición (33.26) (fig. 146). □

El teorema 2 se llama *criterio de Cauchy de convergencia de la integral*.

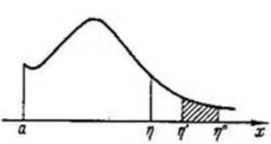


FIG. 146

33.5. INTEGRALES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES

Un concepto importante para las integrales impropias de las funciones que varían el signo es el concepto de la integral absolutamente convergente.

Definición 2. *La integral impropia* $\int_a^b f(x)\,dx$ *se denomina absolutamente convergente si converge la integral* $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Las funciones para las cuales la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ converge absolutamente se llaman absolutamente integrables (en sentido impropio) sobre el intervalo con extremos a y b. En el caso cuando a y b son finitos se dice también que la función f es absolutamente integrable sobre el segmento $[a, b]$.

Del teorema 2 se deduce directamente el criterio de convergencia absoluta de la integral.

Teorema 3. *Para que la integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *converja absolutamente es necesario y suficiente que para cualquier* $\varepsilon > 0$ *exista un* $\eta = \eta(\varepsilon)$ *tal que si* $\eta < \eta' < b$ *y* $\eta < \eta'' < b$, *entonces*

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\,dx \right| < \varepsilon.$$

Este teorema se llama *criterio de Cauchy de convergencia absoluta de la integral.*

Recordemos que como siempre aquí se supone que la función f es integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[a, \eta]$ donde $a \leqslant \eta < b$, $-\infty < a < < b \leqslant +\infty$.

El criterio de convergencia de las integrales de funciones no negativas evidentemente lo aplicaremos también para la aclaración de la convergencia absoluta de las integrales. Supongamos, por ejemplo, que se exige aclarar: converge o no la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx. \tag{33.28}$$

Por cuanto $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$ y la integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge entonces por el criterio de comparación converge también la integral $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx$, es decir, la integral (33.28) converge absolutamente.

Una relación importante entre la convergencia y la convergencia absoluta de las integrales se establece con el siguiente teorema.

Teorema 4. *Si la integral converge absolutamente, entonces simplemente converge.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dado $\varepsilon > 0$. Si la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ converge absolutamente, entonces por el criterio de Cauchy de la convergencia absoluta de la integral (véase el teorema 3) para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\eta = \eta(\varepsilon)$ tal que si $\eta < \eta' < b$, $\eta < \eta'' < b$, entonces

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\, dx \right| < \varepsilon. \tag{33.29}$$

Por cuanto $\left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\, dx \right| \leqslant \left| \int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\, dx \right|$, entonces en virtud de la desigualdad (33.29) para cualesquiera η' y η'' indicados tenemos

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\, dx \right| < \varepsilon,$$

por eso según el criterio de Cauchy sobre la convergencia de las integrales (véase el teorema 2) la integral $\int_a^b f(x)\, dx$ converge. □

Ejercicio 10. Si la integral impropia de una función definida sobre un segmento converge absolutamente, entonces ella sencillamente converge. La integral de Riemann es un caso particular de integral impropia. Por consiguiente, si existe la integral de Riemann de la magnitud absoluta de la función, entonces existe también la integral de Riemann de la propia función. Esto no es válido (cítese el ejemplo correspondiente). ¿Dónde está el error en el razonamiento realizado?

Es esencial observar que una integral puede converger, pero no converger absolutamente. En calidad de ejemplo analicemos la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx. \tag{33.30}$$

Ante todo, señalemos que por cuanto $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ entonces la función subintegral definida complementariamente con la unidad cuando $x = 0$, será continua sobre la semirrecta $x \geqslant 0$ y por lo tanto integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[0, \eta]$, en particular, sobre el segmento $[0, 1]$. Por esto la cuestión sobre la convergencia, respectivamente sobre la convergencia absoluta, de la integral (33.30) es equivalente a la cuestión sobre la convergencia, respectivamente sobre la convergencia absoluta, de la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx. \tag{33.31}$$

Para analizar su convergencia realicemos la integración por partes:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = -\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, d(\cos x) =$$

$$= -\frac{\cos x}{x}\bigg|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \cos x\, d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

En la parte derecha se obtuvo la integral (33.28) la cual como es conocido converge absoluta y, por lo tanto, simplemente.

De esta manera ambas expresiones obtenidas en la parte derecha tienen sentido y, por lo tanto, son finitas. Por esto, en primer lugar la integración por partes hecha es válida y en segundo lugar la parte izquierda es también finita, es decir, la integral (33.31) converge.

Señalemos que como resultado de la integración por partes, hemos sustituido la integral (33.31) por la suma de una expresión finita y otra integral impropia la cual en el denominador de la expresión subintegral tiene el exponente de la variable de integración más alto que en (33.31) y en el numerador, una función acotada, como en (33.31). En la integral obtenida la función subintegral tiende a cero más rápido que en la integral inicial, en el sentido de que

$$\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{cuando} \quad x \to \infty.$$

Por esto su convergencia resultó más fácil de investigar directamente que la convergencia de la integral inicial: ella resulta incluso no simplemente convergente, sino absolutamente convergente.

El método que permite reducir el análisis de la convergencia de la integral dada al análisis de la convergenica de otra integral que en un determinado sentido "converge mejor" que la integral dada se llama *método de mejoramiento de la convergencia.*

Mostremos ahora que la integral (33.31) no converge absolutamente, es decir, que la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx \tag{33.32}$$

diverge. En realidad, de la desigualdad

$$|\operatorname{sen} x| \geqslant \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

para cualquier $\eta > 1$ tenemos:

$$\int_1^{\eta} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx \geqslant \frac{1}{2}\int_1^{\eta} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_1^{\eta} \frac{\cos 2x}{x}\, dx. \tag{33.33}$$

La integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge y es igual a $+\infty$. La integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\, dx$ converge. Para convencernos de esto integrémosla por partes:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,d(\operatorname{sen} 2x) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\Bigg|_1^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} 2x\, d\frac{1}{x} = \frac{\operatorname{sen} 2}{2} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x^2}\,dx.$$

En virtud de esta fórmula la convergencia de la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ directamente se deduce de la convergencia absoluta de la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x^2}\,dx$, la cual a su vez se deriva de la desigualdad evidente

$$\left|\frac{\operatorname{sen} 2x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

Pasando ahora al límite cuando $\eta \to +\infty$, en la desigualdad (33.33) obtenemos que el segundo miembro y, por consiguiente, el primer miembro de esta desigualdad tienden a $+\infty$ y por esto la integral (33.32) diverge.

De esta forma la integral (33.31), así como la integral (33.30) no convergen absolutamente.

Demostremos otra afirmación auxiliar útil para el futuro.

Lema 2. *Si la función f es absolutamente integrable y la función g es integrable según Riemann sobre el segmento $[a, b]$ entonces su producto gf es también absolutamente integrable sobre $[a, b]$.*

DEMOSTRACIÓN. Como acordamos anteriormente se analizan sólo las funciones f tales que para cualquier $\eta \in [a, b)$ son integrables según Riemann sobre el segmento $[a, \eta]$. Por cuanto según la condición la función g es integrable según Riemann sobre el segmento $[a, b]$, entonces es integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[a, \eta]$, $\eta \in [a, b)$ (véase la propiedad 2 en el p. 28.1). Por esto el producto gf es también integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[a, \eta]$ indicado (véase la propiedad 6 en p. 28.1). Esto significa que tiene sentido el estudio de la integral impropia $\int_a^b g(x)f(x)\,dx$.

En virtud de la integrabilidad según Riemann de la función g sobre el segmento $[a, b]$, ésta es acotada sobre él, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que para todos los $x \in [a, b]$ se cumple la desigualdad $|g(x)| \leqslant M$. Por consiguiente, para todos los $x \in [a, b)$ es válida también la desigualdad $|g(x)f(x)| \leqslant M|f(x)|$. Observando que en virtud de la integrabilidad absoluta de la función f sobre el segmento $[a, b]$ la integral $\int_a^b M|f(x)|\,dx = M\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge, obtendremos según el criterio de comparación que converge también la integral $\int_a^b |g(x)\,f(x)|\,dx$, es decir, que el producto gf es absolutamente integrable sobre el segmento $[a, b]$. □

Todo lo dicho en este punto de forma natural se transfiere a las integrales impropias de otros tipos analizadas en el p. 33.1, es decir, a las integrales del tipo (33.6) y también a las integrales del tipo general (33.8).

33.6. ANÁLISIS DE LA CONVERGENCIA DE LAS INTEGRALES

Demostremos un criterio suficiente de convergencia de las integrales, denominado comúnmente *criterio de Dirichlet.*

Teorema 5 (criterio de Dirichlet). *Supongamos que*

1) *la función f es continua y tiene primitiva acotada F cuando $x \geqslant a$;*

2) *la función g es continuamente diferenciable y decrece cuando $x \geqslant a$;*

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0,$

entonces la integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx \tag{33.34}$$

converge.

DEMOSTRACIÓN. Ante todo observemos que según las suposiciones hechas la función fg es continua y, por lo tanto, integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[a, b]$, $a < b < +\infty$, y por esto tiene sentido hablar de la integral impropia (33.34).

Integrando por partes el producto $f(x)g(x)$ sobre el segmento $[a, b]$ obtendremos:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)dF(x) = g(x)F(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx. \tag{33.35}$$

Investiguemos el comportamiento de ambos sumandos de la parte derecha cuando $b \to +\infty$. Por la acotación de la función F (véase la condición 1 del teorema)

$$M = \sup |F(x)| < +\infty, \quad \text{por esto} \quad |g(b)F(b)| \leqslant Mg(b).$$

En virtud de la condición 3 del teorema $\lim\limits_{b \to +\infty} g(b)F(b) = 0.$

Más adelante, del hecho de que la función g decrece monótonamente se deduce que $g'(x) \leqslant 0$ cuando $x \geqslant a$ y por esto

$$\int_a^b |F(x)g'(x)|\,dx \leqslant M\int_a^b |g'(x)|\,dx = -M\int_a^b g'(x)\,dx =$$
$$= M[g(a) - g(b)] \leqslant Mg(a),$$

ya que de las condiciones 2 y 3 del teorema se deduce que $g(x) \geqslant 0$, en particular, que $g(b) \geqslant 0$.

De esta forma, las integrales $\int_a^b |F(x)g'(x)|\,dx$ están acotadas en conjunto para todos los $b > a$ y por esto la integral

$$\int_a^{+\infty} F(x)g'(x)\,dx$$

converge absoluta y también simplemente, es decir, existe el límite finito

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b F(x)g'(x)\,dx.$$

Demostremos que en la parte derecha de la igualdad (33.35) ambos sumandos cuando $b \to +\infty$ tienen límite finito, por ello el límite de la parte izquierda cuando $b \to +\infty$, es finito lo que significa la convergencia de la integral (33.34). □

OBSERVACIÓN. La obtención de las estimaciones necesarias en la demostración realizada recuerda los razonamientos en la demostración del segundo teorema integral sobre la media (véase el p. 30.3*). Esto no es casual, si utilizamos el teorema señalado para la estimación de la integral $\int_b^\eta f(x)g(x)\,dx$, $a < b < \eta < +\infty$, entonces el criterio de Dirichlet se puede demostrar más breve. No hemos hecho esto para mostrar una vez más como con ayuda de la integración por partes se puede mejorar la convergencia de la integral.

Ejemplos. 1. Apliquemos el criterio de Dirichlet al análisis de la convergencia de la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\,dx, \quad \alpha > 0. \tag{33.36}$$

La función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ tiene primitiva acotada $F(x) = -\cos x$, la función continuamente diferenciable $g(x) = 1/x^\alpha$ cuando $\alpha > 0$ decrece monótonamente y tiende a cero cuando $x \to +\infty$. Todas las condiciones del teorema 5 se cumplen, por esto la integral (33.36) converge.

2. Es necesario, no obstante, tener en cuenta que el criterio de Dirichlet da sólo condiciones suficientes y no necesarias de convergencia de la integral, por esto no siempre con su ayuda se puede resolver el problema sobre la convergencia de la integral. Por ejemplo, analicemos la convergencia de la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{x^\alpha - \operatorname{sen} x}, \quad \alpha > 0. \tag{33.37}$$

Tratemos de aplicar el criterio de Dirichlet, haciendo $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha - \operatorname{sen} x}$. Es evidente que $g(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$. Hallemos la derivada:

$$g'(x) = \frac{-\alpha x^{\alpha-1} + \cos x}{(x^\alpha - \operatorname{sen} x)^2}.$$

De aquí se ve que cuando $\alpha < 1$ esta derivada si $x \to +\infty$, cambia su signo infinitas veces y por consiguiente la propia función $g(x)$ no es una función monótonamente decreciente.

De esta forma cuando $\alpha < 1$ el criterio de Dirichlet no es aplicable, por el método señalado, a la aclaración de la cuestión sobre la convergencia de la integral (33.37). En este caso es natural probar a recurrir de nuevo al método de selección de la parte principal.

Aplicando el desarrollo de la función $(1 - t)^{-1}$, $-1 < t < 1$, según la fórmula de Taylor (véase el p. 13.3) obtendremos, cuando $x \to +\infty$,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha - \operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha} \frac{1}{1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}} = \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\left[1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right] =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha} + \frac{1}{2x^{2\alpha}} - \frac{\cos 2x}{2x^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right). \quad (33.38)$$

Las integrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\, dx \text{ y } \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^{2\alpha}}\, dx \quad (33.39)$$

convergen por el criterio de Dirichlet para todos los $\alpha > 0$. La integral

$$\int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{2x^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)\right] dx \quad (33.40)$$

también converge cuando $2\alpha > 1$, es decir, cuando $\alpha > \frac{1}{2}$, y diverge cuando $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. En realidad, de la fórmula (33.38) se deduce que la función $o(1/x^{2\alpha})$ en la fórmula indicada es continua respecto a x cuando $x \geqslant 1$, $\alpha > 0$ y, por consiguiente, tiene sentido hablar de la integral (33.40). Las funciones $\frac{1}{2x^{2\alpha}}$ y $\frac{1}{2x^{2\alpha}} + o(1/x^{2\alpha})$ son no negativas en cierto entorno de $+\infty$ y equivalentes cuando $x \to +\infty$, por esto la integral (33.40) converge y diverge para los mismos valores del parámetro α, que la integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\alpha}}$ (véase el corolario del teorema 1 en el p. 33.3).

De esta forma cuando $\alpha > \frac{1}{2}$ todas las integrales (33.39) y (33.40) convergen y por eso, en virtud de (33.38) converge también la integral (33.37). Cuando $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ las integrales (33.39) convergen y la integral (33.40) diverge, por consiguiente, diverge también la integral (33.37).

Observemos que cuando $\alpha \leqslant 0$ la integral (33.37) diverge. Efectivamente, en este caso el denominador de la función subintegral se anula infinitas veces, y además si $x_0^\alpha - \operatorname{sen} x_0 = 0$, entonces la función $x^\alpha - \operatorname{sen} x$ en un entorno del punto x_0 según la fórmula de Taylor es de la forma (¿por qué?) $x^\alpha - \operatorname{sen} x = (x - x_0)^k \varphi(x)$ donde k es cierto número natural y $\varphi(x_0) \neq 0$. Por cuanto $\operatorname{sen} x_0 \neq 0$, entonces en cada punto x_0 semejante tenemos una particularidad no integrable.

Se debe prestar atención a que para cada $\alpha > 0$ dado las funciones

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha - \operatorname{sen} x} \quad \text{y} \quad \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}$$

son equivalentes cuando $x \to +\infty$, es decir,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha} = \varepsilon(x) \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha - \operatorname{sen} x},$$

donde $\varepsilon(x) = 1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha} \to 1$ cuando $x \to +\infty$; no obstante si $0 < \alpha \leqslant 1/2$, entonces la integral (33.37) de la primera de ellas diverge y la integral (33.36) de la segunda de ellas converge.

De esta forma, el cambio de la función subintegral por una equivalente puede cambiar la convergencia de la integral (si, naturalmente, la integral no converge absolutamente).

3. Analicemos la convergencia y la convergencia absoluta de la integral

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) dx. \tag{33.41}$$

Por cuanto $\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\right| \sim \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x}$ cuando $x \to +\infty$ y la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} dx$ diverge (véase (33.32)), entonces diverge también la integral

$$\int_1^{+\infty} \left|\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\right| dx,$$

es decir, la integral (33.41) no converge absolutamente.

Es fácil comprobar que cuando $y \to 0$

$$\operatorname{tg} y = y + O(y^3), \tag{33.42}$$

además en calidad de entorno que participa en la definición del símbolo O (véase la definición 1 en el p. 8.2), aquí se puede tomar el intervalo $(-1, 1)$: existe una constante $c > 0$ tal que

$$|O(y^3)| \leqslant c|y|^3, \quad |y| < 1.$$

En lo adelante en virtud de la fórmula (33.42) cuando $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ la integral (33.41) se puede representar en la forma

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx + \int_1^{+\infty} O\left(\frac{1}{x^3}\right) dx. \qquad (33.43)$$

Por cuanto la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ converge (por ejemplo, según el criterio de Dirichlet) y la integral $\int_1^{+\infty} O\left(\frac{1}{x^3}\right)$ converge absolutamente, entonces la integral (33.41) es convergente.

Ejercicios. Analícense la convergencia y la convergencia absoluta de los siguientes integrales:

11. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4 + x^2 + 1}$.

12. $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

13. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$.

14. $\int_0^{1} \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$.

15. $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}\,dx$.

16. $\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x^{10}}\,dx$.

17. $\int_0^{1} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

18. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$.

19. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

20. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

21. $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x^2\,dx$.

22. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x\sqrt{1 + x}}\,dx$.

23. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^\alpha x\,dx,\ -\infty < \alpha < +\infty$.

24. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1 + (\ln x)^p},\ -\infty < p < +\infty$.

25. $\int_0^{\pi} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{x}\,dx$.

26. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{(x + \cos x)^\alpha}\, dx.$ 27. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} dx.$

§ 34*. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LAS INTEGRALES CON LÍMITES DE INTEGRACIÓN VARIABLES

A menudo resolviendo problemas resulta necesario no sólo determinar la convergencia o la divergencia de la integral analizada, sino también poder estimar en un sentido determinado el grado de velocidad de su convergencia o el carácter de la divergencia. No vamos aquí a demostrar ningunos teoremas generales relacionados con esta cuestión (sobre algunos métodos generales de estudio del comportamiento asintótico de las funciones véase en el p. 37.10*) sino que sólo la ilustraremos en ejemplos aislados de búsqueda del grado de las integrales con límite superior variable, cuando ellas tienden a cero o al infinito. Específicamente, si, por ejemplo, la integral $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge, entonces se analizará el orden de la tendencia a cero cuando $x \to +\infty$ de la integral $\int_x^{+\infty} f(t)dt$. Precisamente, este orden se llama velocidad de convergencia de la integral impropia convergente dada $\int_a^{+\infty} f(t)dt$. Si además la integral $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge y es igual a $+\infty$ ó $-\infty$, entonces se estudiará el orden de tendencia al infinito de la integral $\int_a^x f(t)dt$ cuando $x \to +\infty$. Este orden se llama velocidad o grado de divergencia de la integral impropia divergente analizada.

Ejemplos. 1. Analicemos la integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t} \tag{34.1}$$

para distintos valores reales de los parámetros α y β. Analizaremos inicialmente el caso de $\alpha > 0$ y de cualquier $\beta \in R$. Para tales valores de los parámetros la integral (34.1) converge, lo que es fácil establecer por el criterio de comparación, si en calidad de función de comparación tomamos por ejemplo la función $g(t) = t^{-\frac{\alpha}{2}-1}$ cuya integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{\alpha}{2}+1}}$ converge.

Por la convergencia de la integral (34.1) para los valores indicados de los parámetros α y β en la igualdad $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t} = \int_2^x \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t} + \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t}$ el segundo sumando de su segundo miembro tiende a 0 cuando $x \to \infty$.

Estidiemos el grado de su decrecimiento, o sea, mostremos la validez de la igualdad asintótica

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t} \sim \frac{1}{\alpha x^\alpha \ln^\beta x}, \quad x \to +\infty. \tag{34.2}$$

Para la demostración hagamos

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t}, \quad \Phi(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\alpha x^\alpha \ln^\beta x}.$$

Por la convergencia de la integral (34.1) cuando $\alpha > 0$, $\beta \in R$ tenemos $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$. Evidentemente, también $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 0$. Por cuanto

$$F'(x) = -\frac{1}{x^{\alpha+1}\ln^\beta x}, \Phi'(x) = -\frac{1}{x^{\alpha+1}\ln^\beta x} - \frac{1}{\alpha x^{\alpha+1}\ln^{\beta+1} x},$$

entonces aplicando la regla de L'Hospital, obtendremos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\Phi(x)}{F(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\Phi'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha \ln x}\right) = 1,$$

es decir, la relación (34.2) está demostrada.

En el caso $\alpha = 0$, $\beta > 1$ por integración directa obtendremos incluso la expresión explícita de la integral que nos interesa:

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^\beta t} = \int_x^{+\infty} \frac{d\ln t}{\ln^\beta t} = \left.\frac{1}{(1-\beta)\ln^{\beta-1} t}\right|_x^{+\infty} = \frac{1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1} x}. \tag{34.3}$$

Mostremos ahora que para $\alpha < 0$ y cualquier $\beta \in R$ la integral (34.1) diverge y más aún tiene lugar la igualdad asintótica

$$\int_2^x \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t} \sim -\frac{1}{\alpha x^\alpha \ln^\beta x}, \quad x \to +\infty. \tag{34.4}$$

Haciendo en este caso

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \int_2^x \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t}, \quad \Phi(x) \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{\alpha x^\alpha \ln^\beta x},$$

y aplicando la regla de L'Hospital, obtendremos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\Phi(x)}{F(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\Phi'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha \ln x}\right) = 1,$$

es decir, la igualdad (34.4) está demostrada.

Para los valores restantes de los parámetros α y β la integral

$$\int_2^x \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t} \tag{34.5}$$

se calcula en funciones elementales. Si $\alpha = 0$ y $\beta < 1$ entonces

$$\int_2^x \frac{dt}{t\ln^\beta t} = \int_2^x \frac{d\ln t}{\ln^\beta t} = \frac{1}{(1-\beta)\ln^{\beta-1} t}\Bigg|_2^x = \frac{\ln^{1-\beta} x - \ln^{1-\beta} 2}{1-\beta},$$

y si $\alpha = 0$, $\beta = 1$ entonces

$$\int_2^x \frac{dt}{t\ln t} = \int_2^x \frac{d\ln t}{\ln t} = \ln\ln t\Bigg|_2^x = \ln\frac{\ln x}{\ln 2}.$$

Así, la integral (34.1) converge para $\alpha > 0$ y cualquier $\beta \in R$ y también cuando $\alpha = 0$ y $\beta > 1$; además se han establecido las igualdades asintóticas, respectivamente exactas (34.2) y (34.3), para la integral $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t}$. Para los valores restantes de los parámetros α y β la integral (34.1) diverge y fue obtenida la característica asintótica o exacta de la integral (34.5).

2. Analicemos la integral

$$\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt, \tag{34.6}$$

donde para $t \geqslant T$ la función f es continua no negativa:

$$f(t) \geqslant 0 \tag{34.7}$$

tiene período T:

$$f(t + T) = f(t) \tag{34.8}$$

y la integral de ella respecto al período es positiva

$$\int_T^{2T} f(t)dt > 0. \tag{34.9}$$

Mostremos que la integral (34.6) diverge y que

$$\int_t^x \frac{f(t)}{t}\, dt = \ln x, \quad x \to +\infty, \tag{34.10}$$

es decir, que la función en la parte izquierda de esta fórmula cuando $x \to +\infty$ tiene orden $\ln x$ (véase el p. 8.2).

Por cuanto la función f es continua, entonces es acotada sobre el segmento $[T, 2T]$ y, por consiguiente, en virtud de su periodicidad es acotada para todos los $t \geqslant T$, es decir, existe el número $M > 0$ tal que para todos los $t \geqslant T$ se cumple la desigualdad

$$f(t) \leqslant M. \tag{34.11}$$

Por esto tenemos

$$\int_T^x \frac{f(t)}{t}\,dt \underset{(34.11)}{\underset{(34.7)}{\leqslant}} M\int_T^x \frac{dt}{t} = \ln x - \ln T = O(\ln x), \quad x \geqslant T. \tag{34.12}$$

Denotemos ahora por I la integral de la función f por el período, es decir,

$$I = \int_T^{2T} f(t)dt. \tag{34.13}$$

Realizando en las integrales escritas a continuación el cambio de variable $t = u + (k - 1)\,T$ sobre los segmentos $[kT, (k + 1)T]$, $k = 2, 3, \ldots$, obtendremos

$$\int_T^{nT} \frac{f(t)}{t}\,dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{f(t)}{t}\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \int_T^{2T} \frac{f(u + (k-1)T)}{u + (k-1)T}\,du \underset{(34.8)}{=} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{n-1} \int_T^{2T} \frac{f(u)}{\frac{u}{T} + k - 1}\,du \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2 + k - 1} \int_T^{2T} f(u)du \underset{(34.13)}{\geqslant} \frac{I}{T} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}. \tag{34.14}$$

Observemos que para los números x que están en el segmento $[k + 1, k + 2]$ se cumple la desigualdad

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k+1},$$

integrándola se obtiene la desigualdad

$$\int_{k+1}^{k+2} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k+1}. \tag{34.15}$$

Por esto

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \underset{(34.15)}{\geqslant} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k+1}^{k+2} \frac{dx}{x} = \int_2^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) - \ln 2 \geqslant \ln(n+1).$$

Sustituyendo esta estimación en la desigualdad (34.14) obtendremos

$$\int_T^{nT} \frac{f(t)}{t}\,dt \geqslant \frac{I}{T} \ln(n+1). \tag{34.16}$$

Observemos que por cuanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1)T} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \dfrac{\ln T}{\ln(n+1)}} = 1,$$

entonces existe un n_0 natural tal que cuando $n > n_0$ se cumple la desigualdad

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1)T} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{34.17}$$

Más adelante para cada número x existe un entero n tal que

$$nT \leqslant x \leqslant (n+1)T. \tag{34.18}$$

Ahora para cualquier x, para el cual en la desigualdad (34.18) tiene lugar $n \geqslant n_0$ tenemos

$$\int_0^x \frac{f(t)}{t}\,dt \underset{(34.18)}{\geqslant} \int_0^{nT} \frac{f(t)}{t}\,dt \underset{(34.16)}{\geqslant} \frac{I}{T}\ln(n+1) \underset{(34.17)}{\geqslant} \frac{I}{2T}\ln(n+1)T \underset{(34.18)}{\geqslant} \frac{I}{2T}\ln x. \tag{34.19}$$

Las desigualdades (34.12) y (34.19) demuestran precisamente la validez de la fórmula (34.10).

Tomando en la fórmula (34.10) en calidad de función f diferentes funciones concretas que satisfacen las condiciones enumeradas anteriormente obtendremos que las integrales correspondientes tendrán orden $\ln x$. Por ejemplo,

$$\int_1^x \frac{\ln(1+\cos^2 t)}{t}\,dt \asymp \ln x, \quad \int_0^x \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt \asymp \ln x.$$

No obstante, a veces se logra obtener una estimación más exacta. Así para la segunda integral tenemos

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt + \int_1^x \frac{1-\cos 2t}{2t}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos 2t}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln x + \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos 2t}{t}\,dt. \tag{34.20}$$

Por cuanto $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{t} = 0$, entonces la función $\dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{t}$, siendo definida complementariamente por cero para $t = 0$, será una función continua y, por consiguiente, integrable sobre el segmento $[0, 1]$, es decir, la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt$ es finita. La integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t}\,dt$ converge (esto, por ejemplo, se deduce directamente del criterio de Dirichler, véase el p. 33.6). De lo dicho se deriva que la función

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos 2t}{t}\,dt \tag{34.21}$$

siendo continua para todos los $x \geqslant 0$ y teniendo límite finito

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t}\,dt,$$

es acotada sobre el semieje no negativo. Por esto de la igualdad

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt \underset{\substack{(34.20)\\(34.21)}}{=} \frac{1}{2}\ln x + F(x)$$

se desprende que

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt \sim \frac{1}{2}\ln x,$$

es decir, en este caso se logra definir no sólo el orden de la integral con límite de integración variable x, sino también su comportamiento asintótico cuando $x \to +\infty$: es equivalente a $\frac{1}{2}\ln x$.

En los ejemplos analizados el comportamiento asintótico de las integrales se determinó con ayuda de métodos más o menos especiales que resultaron ser cómodos en los casos concretos analizados. Un método más general que da a menudo la posibilidad de hallar el comportamiento asintótico de las integrales es la integración ordinaria por partes.

3. Analicemos en calidad de ejemplo las así llamadas *integrales de Fresnel* *).

$$\int_0^\infty \cos\theta^2\,d\theta, \quad \int_0^\infty \operatorname{sen}\theta^2\,d\theta,$$

cuya velocidad de convergencia se define por el grado de decrecimiento de las integrales

$$\int_x^{+\infty} \cos\theta^2\,d\theta, \quad \int_x^{+\infty} \operatorname{sen}\theta^2\,d\theta, \quad x > 0. \tag{34.22}$$

El estudio del comportamiento asintótico de las integrales (34.22) cuando $x \to +\infty$ se realiza con el mismo método. Por esto analizaremos sólo una de ellas, por ejemplo, la primera. Realizando en ella el cambio de variable $\theta^2 = t$, inmediata-

*) A. Fresnel (1788 — 1827), físico francés.

mente nos convencemos según el criterio de Dirichlet de que esta converge. Después, integrando dos veces por partes la integral obtenida tendremos

$$\int_x^{+\infty} \cos\theta^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{x^2}^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}\Bigg|_{x^2}^{+\infty} + \frac{1}{4}\int_{x^2}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} t}{t\sqrt{t}}\,dt =$$

$$= -\frac{\operatorname{sen} x^2}{2x} + \frac{1}{4}\int_{x^2}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} t}{t\sqrt{t}}\,dt = -\frac{\operatorname{sen} x^2}{2x} + \frac{\cos x^2}{4x^3} - \frac{3}{8}\int_{x^2}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2\sqrt{t}}\,dt \qquad (34.23)$$

(según la terminología anterior, véase el p. 33.5, mejoramos por medio de la integración por partes la convergencia de la integral).

Por cuanto $\dfrac{\cos x^2}{4x^3} = O\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$, $x \to \infty$, y

$$\left|\int_{x^2}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2\sqrt{t}}\,dt\right| \leqslant \int_{x^2}^{+\infty}\frac{dt}{t^2\sqrt{t}} = -\frac{2}{3t^{3/2}}\Bigg|_{x^2}^{+\infty} = \frac{2}{3x^3},$$

entonces tendremos

$$\int_{x^2}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2\sqrt{t}}\,dt = O\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x \to +\infty.$$

Por consiguiente,

$$\int_x^{+\infty}\cos\theta^2 d\theta = -\frac{\operatorname{sen} x^2}{2x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x \to +\infty.$$

De esta forma, hemos logrado con exactitud hasta $O\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$, $x \to +\infty$, hallar una expresión simple para la integral $\int_x^{-\infty}\cos\theta^2 d\theta$, que da, en particular, una idea sobre el carácter de su decrecimiento cuando $x \to +\infty$. Si realizamos la posterior integración por partes de la integral que se encuentra en la parte derecha de la fórmula (34.22), entonces se pueden obtener fórmulas asintóticas para la integral $\int_x^{+\infty}\cos\theta^2 d\theta$ con exactitud hasta $O\left(\dfrac{1}{x^{2n+1}}\right)$, $x \to +\infty$, para cualquier n natural

Ejercicios. Analícese la velocidad de convergencia (divergencia) de las siguientes integrales para diferentes valores reales de los parámetros α y β:

1. $\int_0^{\infty} e^{-2\alpha t - t^2} t^{\beta - 1}\,dt.$

2. $\int_0^{\infty} \cos\left(\frac{1}{3}t^3 + \alpha t\right)dt.$

3. $\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2(\alpha + \ln t)^{1/3}}.$