CAPÍTULO CUARTO

SERIES

§ 35. SERIES NUMÉRICAS

35.1. DEFINICIÓN DE SERIE Y SU CONVERGENCIA

En el presente párrafo el concepto de suma se generaliza a algunos casos de conjunto infinito de sumandos y se estudian las propiedades de estas sumas generalizadas. Muchas de las cuestiones analizadas a continuación son válidas no sólo para los números reales sino también para los complejos. Por esto a diferencia de lo anterior en este capítulo vamos a realizar el análisis en la región compleja.

La expresión analítica que formalmente tiene aspecto de suma que contiene número infinito de sumandos se llama *serie infinita* o más breve *serie*. Daremos la definición estricta de serie y de su suma.

Definición 1. *Sea dada una sucesión de números complejos* u_n, $n = 1, 2, \ldots$ *Compongamos una nueva sucesión de números* s_n, $n = 1, 2, \ldots$, *de la siguiente forma*:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= u_1, \\
s_2 &= u_1 + u_2, \\
s_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
s_n &= u_1 + u_2 + \ldots + u_n.
\end{aligned}
$$

El par de sucesión $\{u_n\}$ y $\{s_n\}$ *se llama serie numérica (más detalladamente, serie numérica con término general* u_n*) y se denota por*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{35.1}$$

ó

$$\sum_{n=1}^{\infty} u^n. \tag{35.2}$$

Los elementos de la sucesión inicial $\{u_n\}$ *se llaman términos de la serie* (35.1) *y los elementos de la sucesión* $\{s_n\}$ *sumas parciales de esta serie, además* u_n *se llama término n-ésimo de la serie y la suma finita* s_n, *suma parcial n-ésima de la serie*, $n = 1, 2, \ldots$

Si la sucesión de sumas parciales de la serie (35.1) *converge, entonces ésta se llama convergente, y si diverge, entonces, divergente.*

Definición 2. *La serie cuyos términos son términos de la serie* (35.1) *tomados, comenzando por el* $(n + 1)$*-ésimo, en el mismo orden que en la serie inicial, se llama resto n-ésimo de la serie* (35.1) *y se denota por*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \quad ó \quad u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots .$$

Definición 3. *Si la serie* (35.1) converge, *entonces el límite*

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n$$

se llama su suma.

En este caso se escribe

$$s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots ,$$

ó

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{35.3}$$

De esta forma vamos a utilizar un mismo símbolo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ tanto para denotar la propia serie (35.1) como para la notación de su suma, si ella converge.

Si $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \infty$, o bien $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = +\infty$ o bien $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = -\infty$ entonces respectivamente se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty \quad ó \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = -\infty.$$

Así, cada serie es un par de dos sucesiones tales que la primera puede ser tomada arbitrariamente (la sucesión de los términos de la serie) y la segunda, formada de manera definida por los términos de la primera (la sucesión de las sumas parciales de los términos de la serie). No obstante la serie unívocamente se define por cada una de estas sucesiones. En efecto, si está dada una sucesión de los términos u_n de la serie, entonces los términos de la sucesión de sus sumas parciales se hallan según la definición 1 por las fórmulas $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Si está dada la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales de la serie, entonces sus términos se definen por las fórmulas $u_1 = s_1$, $u_n = s_n - s_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$. De aquí se deduce que para cualquier sucesión siempre se puede hallar una serie tal que ella será la sucesión de sus sumas parciales. En realidad, sea dada la sucesión de números complejos $\{z_n\}$. Hagamos

$$u_1 = z_1, \quad u_2 = z_2 - z_1, \ldots , \quad u_n = z_n - z_{n-1}, \ldots$$

y analicemos la serie

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots .$$

Entonces para sus sumas parciales tenemos:

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n =$$
$$= z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) = z_n.$$

Esto significa que el análisis de las series es equivalente al análisis de las sucesiones. Cualquier cuestión enunciada en términos de series, se puede parafrasear en una cuestión enunciada en términos de sucesiones y viceversa. Por ejemplo, el problema del estudio de la convergencia de las series es equivalente al problema del estudio de la convergencia de sucesiones.

Subrayemos que siempre si no se acuerda lo contrario, los términos de las series analizadas se suponen complejos.

Si el resto n-ésimo de la serie (35.1) (véase la definición 2) converge, entonces su suma la denotaremos por r_n:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \tag{35.4}$$

y nombraremos para mayor brevedad *sencillamente resto de la serie*.

Cualquier suma de un número finito de sumandos

$$s_{n_0} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n_0}$$

se puede analizar como una serie agregándole los términos

$$u_{n_0+1} = u_{n_0+2} = \ldots = 0.$$

La suma de la serie obtenida evidentemente coincidirá con la suma dada, ya que para todos los $n \geqslant n_0$ sus sumas parciales son iguales s_{n_0}.

Si no se sabe de antemano si la suma contiene un número finito o infinito de sumandos, entonces a veces es cómodo en ambos casos llamarla serie considerando que la suma finita es una serie en el sentido señalado anteriormente.

Señalemos una propiedad sustancial de las series convergentes.

Teorema 1 (condición necesaria de convergencia de una serie). *Si la serie* (35.1) *converge, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{35.5}$$

DEMOSTRACIÓN. Si la serie (35.1) converge, entonces la sucesión de sus sumas parciales s_n, $n = 1, 2, \ldots$, y s_{n-1}, $n = 2, 3, \ldots$, evidentemente tienen un mismo límite igual a la suma s de esta serie. Por esto observando que $u_n = s_n - s_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0. \ \square$$

Con ayuda del teorema 1 a veces se logra establecer la divergencia de la serie analizada: *si para la serie dada la condición* (35.5) *no se cumple, entonces ésta diverge.*

Ejemplos. 1. Sea q un número complejo y $|q| < 1$. Entonces la serie $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots$ con términos $u_n = q^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, que forman *una progresión geométrica decreciente infinita*, converge.

En realidad,

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q},$$

y ya que $\lim \frac{q^{n+1}}{1-q} = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}.$$

2. La serie cuyos términos forman una progresión geométrica $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots$ cuando $|q| \geqslant 1$ diverge, ya que su término general $u_n = q^n$ no tiende a cero: $|u_n| = |q|^n \geqslant 1$.

3. La serie $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots$ con términos $u_n = (-1)^{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, diverge.

En realidad en este caso

$$s_{2k} = 0,\quad k = 1, 2, \ldots,\quad s_{2k+1} = 1,\quad k = 0, 1, \ldots,$$

por esto la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ no tiene límite.

La divergencia de la serie analizada, se deduce naturalmente también de que todos sus términos por su valor absoluto son iguales a la unidad y por esto no se cumple la condición necesaria (35.5) de convergencia de la serie.

35.2. PROPIEDADES DE LAS SERIES CONVERGENTES

Teorema 2. *Sea c un número complejo. Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in C$ *converge, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ *llamada producto de la serie dada por el número c también converge y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{35.6}$$

Este teorema significa que el factor numérico "se puede sacar del paréntesis" también en el caso del conjunto infinito de sumandos si éstos forman una serie convergente. "Se puede" en el sentido que es válida la igualdad (35.6).

DEMOSTRACIÓN. Sean $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ y $s'_n = \sum_{k=1}^{n} cu_k$, entonces, evidentemente

$$s'_n = cs_n. \tag{35.7}$$

Por condición $\lim_{n\to\infty} s_n$ existe, por esto en virtud de (35.7) $\lim_{n\to\infty} s'_n$ también existe y

$$\lim_{n\to\infty} s'_n = c \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Según la definición de suma de una serie de aquí directamente se deduce (35.6). □

Teorema 3. *Supongamos que las series* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *convergen, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$, *llamada suma de las series dadas, también converge y*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \tag{35.8}$$

Este teorema significa que las series convergentes "se puede sumar término a término" (el término n-ésimo con el n-esimo), "se puede" en el sentido que es válida la igualdad (35.8).

DEMOSTRACIÓN. Sean

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad s_n' = \sum_{k=1}^{n} v_k \quad \text{y} \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k),$$

entonces $\sigma_n = s_n + s_n'$ y ya que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} s_n'$ por condición existen, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ también existe y

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty}(s_n + s_n') = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} s_n'.$$

Esta igualdad es equivalente a la igualdad (35.8). □

Teorema 4. *Si la serie converge, entonces cualquiera de sus restos converge. Si cualquier resto de la serie* (35.1) *converge, entonces la propia serie también converge. Además si*

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad s_m = \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad r_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} u_k,$$

entonces

$$s = s_m + r_m.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, $n = 1, 2, \ldots$, sumas parciales de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, y $s_k^{(m)} = u_{m+1} + \ldots + u_{m+k}$, sumas parciales de su resto m-ésimo

$$u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{m+k} + \ldots .$$

Es evidente que

$$s_n = s_m + s_k^{(m)}, \quad n = m + k \tag{35.9}$$

de donde para m fijo se deduce, que el límite

$$\lim_{n\to\infty} s_n$$

existe cuando y sólo cuando existe

$$\lim_{k\to\infty} s_k^{(m)}.$$

Dicho de otro modo la serie converge cuando y sólo cuando converge alguno de sus restos $r_m = \lim\limits_{k\to\infty} s_k^{(m)}$. Por cuanto el número natural m era arbitrario, entonces la primera parte del teorema está demostrada.

Pasando, finalmente, al límite en la igualdad (35.9) cuando $k \to \infty$ y m es fijo, tenemos $s = s_m + r_m$, ya que $n = m + k \to +\infty$ cuando $k \to +\infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, $\lim\limits_{k\to\infty} s_k^{(m)} = r_m$. □

De este teorema se deduce que la eliminación o adición de un número finito de términos a la serie dada no influye sobre su convergencia.

De la fórmula $s = s_m + r_m$ evidentemente se deduce que si la serie converge, entonces su resto tiende a cero:

$$\lim_{m \to \infty} r_m = \lim_{m \to \infty} (s - s_m) = 0. \tag{35.10}$$

Señalemos que sin ninguna duda la condición (35.10) no se puede tomar en calidad de definición de serie convergente ya que el resto de la serie es también una serie y se puede hablar sobre su tendencia a cero sólo dominando la definición de convergencia de la serie.

35.3. CRITERIO DE CAUCHY DE LA CONVERGENCIA DE LA SERIE

El criterio de Cauchy para la convergencia de las sucesiones puede ser fácilmente parafraseado conforme a las series. En realidad, como es conocido (véase el p. 4.7 y 23.3) para que una sucesión de números complejos $\{s_n\}$ sea convergente, es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista un número n_ε tal que para números cualesquiera $n \geqslant n_\varepsilon$ y cualesquiera enteros $p \geqslant 0$ se cumpla la desigualdad

$$|s_{n+p} - s_{n-1}| < \varepsilon.$$

Para mayor comodidad de la utilización de este criterio en el caso de series escribimos aquí la diferencia $s_{n+p} - s_{n-1}$ en lugar de la diferencia $s_{n+p} - s_n$, que escribimos anteriormente en el p. 3.7. Esto, naturalmente, no influye sobre la esencia del problema. Además por cuanto la suma s_0 no está definida, consideraremos siempre según la definición que $s_0 = 0$.

Si ahora por $\{s_n\}$ se entiende la sucesión de sumas parciales de la serie (35.1), entonces

$$s_{n+p} - s_{n-1} = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p},$$

y el criterio enunciado en estas notaciones toma la siguiente forma.

Teorema 5 (criterio de Cauchy). *Para que una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *converja, es necesario y suficiente que para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe un número* n_ε *tal que para cualquier* $n \geqslant n_\varepsilon$ *y cualquier entero* $p \geqslant 0$ *se cumple la desigualdad*

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon. \tag{35.11}$$

Del criterio de Cauchy de convergencia de una serie se puede fácilmente obtener de nuevo la condición suficiente (35.5) de convergencia de la serie. En realidad, en este caso la desigualdad (35.11) se cumple para cualquier $p \geqslant 0$ y, en particular, para $p = 0$. Por esto para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ tenemos $|u_n| < \varepsilon$ y en virtud de que $\varepsilon > 0$ es arbitrario esto significa que $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.

La propiedad (35.5) brevemente se expresa diciendo que *"el término general de una serie convergente tiende a cero"*.

Ejemplo. Analicemos la así llamada *serie armónica*

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots.$$

Aquí el término n-ésimo $u_n = 1/n$ tiende a cero cuando $n \to \infty$, pero la serie diverge. En realidad, para cualquier $n = 1, 2, \ldots$ tenemos

$$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{2n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} >$$
$$> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \quad (35.12)$$

es decir, para cualquier n cuando $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y $p = n - 1$ la desigualdad (35.11) no se cumple.

De esta forma, del criterio de Cauchy se deduce que la serie armónica diverge Este ejemplo muestra que la condición (35.5) siendo necesaria para la convergencia de la serie, no es al mismo tiempo suficiente.

Del ejemplo analizado se deduce que la serie

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots \quad (35.13)$$

cuando $\alpha < 1$ diverge. En realidad, observando que cuando $\alpha < 1$ para cualquier $n = 2, 3, \ldots$ es válida la desigualdad $n^\alpha < n$ tenemos por (35.12) la desigualdad

$$\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} > \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)} + \ldots + \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2}.$$

Por esto en el caso de la serie (35.13) cuando $\alpha < 1$ para cualquier $n = 1, 2, \ldots$ cuando $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y $p = n - 1$ la desigualdad (35.11) tampoco se cumple y, por consiguiente, en virtud del criterio de Cauchy la serie (35.13) cuando $\alpha < 1$ también diverge.

Ejercicios. Demuéstrese partiendo de la definición 1 que las siguientes series son convergentes y hállese la suma de cada una de ellas:

1. $\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \ldots + \frac{1}{(a+(n-1)b)(a+nb)} + \ldots, (a, b > 0).$
2. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \ldots$
3. $a + (a+d)q - (a+2d)q^2 + \ldots + (a+nd)q^n + \ldots, |q| < 1.$

Problema 22. Demuéstrese que para cualquier serie convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ con términos no negativos $a_n \geqslant 0$, existe una sucesión $\{b_n\}$ creciente e infinitamente grande $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, $b_n \leqslant b_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, tal que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ también converge.

35.4. SERIES CON TÉRMINOS NO NEGATIVOS

En este punto nos ocuparemos del estudio de las series, todos los términos de las cuales son números reales no negativos.

Lema 1. *Sean todos los términos de la serie* (35.1) *no negativos:*

$$u_n \geqslant 0, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{35.14}$$

Para que esta serie converja, es necesario y suficiente que exista al menos una subsucesión convergente de la sucesión de sus sumas parciales.

En efecto, de la condición (35.14) se deduce que

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k = s_n + u_{n+1} \geqslant s_n,$$

es decir, la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ de la serie analizada es creciente. Una sucesión monótona converge si y sólo si converge al menos una de sus subsucesiones (véase la observación después del teorema 3 en el p. 4.5). □

Lema 2. *Para que la serie* (35.1) *con términos no negativos converja, es necesario que la sucesión de sus sumas parciales sea acotada superiormente y suficiente que sea acotada superiormente al menos una subsucesión $\{s_{n_k}\}$ de la sucesión $\{s_n\}$ de sus sumas parciales, además si*

$$s = \sup_k \{s_{n_k}\},$$

entonces s es la suma de la serie (35.1).

En efecto, la convergencia de la serie significa la convergencia de la sucesión de sus sumas parciales, y cualquier sucesión convergente es acotada, en particular, acotada superiormente. De esta forma la primera parte del lema es válida sin la suposición de que son no negativos los términos de la serie.

No obstante en el caso general la condición de acotación incluso de todas las sumas parciales de la serie (y no sólo de alguna de sus subsucesiones) no es suficiente para la convergencia de la serie, como esto se muestra, por ejemplo, en el ejemplo 3, analizado en el p. 35.1. Por esto la condición de que son no negativos los términos de la serie es sustancial para la validez de la segunda parte del lema 2. Demostrémosla.

Del hecho de que los términos de la serie son no negativos, como nos convencimos en la demostración del teorema anterior, se deduce que la sucesión de sus sumas parciales es no decreciente. Por esto si existe una subsucesión $\{s_{n_k}\}$ acotada superiormente de la sucesión de las sumas parciales $\{s_n\}$ de la serie que se analiza, entonces tampoco decrece (como cualquier subsucesión de una sucesión no decreciente) y por consiguiente (véase el teorema 3 en el p. 3.5) converge, además

$$s = \sup_k \{s_{n_k}\} = \lim_{k \to \infty} s_{n_k}.$$

Por el lema anterior de la convergencia de la subsucesión de las sumas parciales $\{s_{n_k}\}$ se deduce la convergencia de la serie, es decir, la existencia del límite finito $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$, y por lo tanto, el límite de la sucesión convergente coincide con el límite de cualquier subsucesión suya, entonces

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{k \to \infty} s_{n_k} = s. \ \square$$

Del lema 2 se deduce que si la serie con términos no negativos diverge, entonces la sucesión de sus sumas parciales no es acotada superiormente y por su monotonía

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty.$$

Por esto para las series divergentes con términos no negativos por el acuerdo hecho en el p. 35.1 se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty.$$

Los lemas demostrados por sus enunciados recuerdan las afirmaciones correspondientes para las integrales impropias (véase el p. 33.3). Entre la convergencia de las series con términos no negativos y la convergencia de las integrales impropias de las funciones no negativas se puede a veces establecer también una relación más directa. Para las funciones decrecientes esto será hecho en el p. 35.7.

Ejemplo. Analicemos ahora la serie (35.13) cuando $\alpha > 1$. Mostremos que en este caso ella converge. Tomemos inicialmente las sumas parciales de esta serie de órdenes $n = 2^k - 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ agrupando sus sumandos en k grupos cuya forma general es

$$\frac{1}{2^{p\alpha}} + \frac{1}{(2^p+1)^\alpha} + \frac{1}{(2^p+2)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2^{p+1}-1)^\alpha}, \quad p = 0, 1, \ldots k-1,$$

es decir,

$$s_{2^k-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \\ + \ldots + \left(\frac{1}{2^{(k-1)\alpha}} + \ldots + \frac{1}{(2^k-1)^\alpha}\right).$$

Observando que para cada sumando del grupo de orden p-ésimo es válida la desigualdad

$$\frac{1}{(2^p+m)^\alpha} \leqslant \frac{1}{2^{p\alpha}}, \quad m = 0, 1, \ldots, 2^p - 1,$$

y que en este grupo hay 2^p sumandos, obtendremos

$$s_{2^k-1} < 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{2^2}{2^{2\alpha}} + \ldots + \frac{2^{k-1}}{2^{(k-1)\alpha}} < \\ < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{(k-1)(\alpha-1)}} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2^{\alpha-1}}} = \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}.$$

De esta forma la sucesión de sumas parciales s_{2^k-1} de la serie (35.13), cuando $\alpha > 1$, es acotada superiormente. Más adelante en virtud de la positividad de los términos de la serie analizada la sucesión de sus sumas parciales crece. Por esto existe el límite finito o infinito $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Pero entonces cualquier subsucesión de $\{s_n\}$, en particular, la subsucesión $\{s_{2^k-1}\}$, tiene el mismo límite s y por cuanto según lo demostrado esta sucesión es acotada, entonces el límite s es finito.

Señalemos que en el caso de $p = 2$ la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ se demuestra mucho más fácil. En efecto, para cualquier $n = 1, 2, \dots$ tenemos:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leqslant 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)n} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2, \quad n = 1, 2, \dots ,$$

es decir, las sumas parciales de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ son acotadas superiormente y, por consiguiente, según el lema 2 ella converge. De aquí para cualquier $p > 2$ en virtud de la desigualdad

$$\frac{1}{n^p} \leqslant \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots ,$$

directamente se deduce la acotación de las sumas parciales de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, cuando $p \geqslant 2$, y por esto también su convergencia (un método parecido para establecer la convergencia de la serie con términos no negativos será analizado en el caso general en el próximo punto). De esta forma sólo por el caso $1 < p < 2$ fue necesario aplicar anteriormente un método más complejo de estimación de las sumas parciales de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 1$, para establecer su convergencia.

35.5. CRITERIO DE COMPARACIÓN PARA LAS SERIES CON TÉRMINOS NO NEGATIVOS. MÉTODO DE SELECCIÓN DE LA PARTE PRINCIPAL DEL TÉRMINO DE LA SERIE

Pasemos ahora a los criterios de comparación para las series que también por su forma recuerdan los criterios correspondientes de convergencia de las integrales impropias.

Teorema 6 (**criterio de comparación**). *Sea*

$$u_n \geqslant 0, \quad v_n \geqslant 0, \quad n = 1, 2, \dots , \tag{35.15}$$

y

$$u_n = O(v_n)^{*)}. \tag{35.16}$$

Entonces, si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{35.17}$$

*) En particular, $u_n \leqslant v_n$. Véase la explicación de la notación "O" en el p. 23.3.

converge, converge también la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{35.18}$$

y si la serie (35.18) *diverge, entonces diverge también la serie* (35.17).

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que se cumple la condición (35.16). Entonces existe un $c > 0$ tal que

$$u_k \leqslant c v_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{35.19}$$

Si ahora la serie (35.17) converge, entonces por el lema 2 la sucesión $\{s_n\}$ de sus sumas parciales es acotada, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant M, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{35.20}$$

Denotemos por σ_n la suma parcial de la serie (35.18). Entonces en virtud de las desigualdades (35.19) y (35.20)

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant c \sum_{k=1}^{n} v_k = cs_n \leqslant cM, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Por el lema 2 de la acotación superior de las sumas parciales de la serie (35.18) se deduce su convergencia. Así, si la serie (35.17) converge, entonces la serie (35.18) también converge.

Si la serie (35.18) diverge, entonces la serie (35.17) también diverge, ya que si ella convergiera, entonces por lo demostrado convergería también la serie (35.18) lo que contradice la condición. □

Corolario. *Sea* $v_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *y*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = k, \tag{35.21}$$

en este caso

1) *si la serie* (35.17) *converge y* $0 \leqslant k < +\infty$, *entonces la serie* (35.18) *también converge;*

2) *si la serie* (35.17) *diverge y* $0 < k \leqslant +\infty$, *entonces la serie* (35.18) *también diverge.*

En particular si $u_n \sim v_n$ *(*u_n *y* v_n *son equivalentes, véase el p.* 23.3), *entonces las series* (35.17) *y* (35.18) *convergen o divergen simultáneamente.*

Del cumplimiento de la condición (35.21) para $0 \leqslant k < +\infty$ se deduce la existencia de n_0 tal que si $n \geqslant n_0$, entonces

$$\frac{u_n}{v_n} < k + 1, \quad \text{es decir,} \quad u_n < (k+1)v_n,$$

y esto significa que

$$u_n = O(v_n).$$

Por esto la afirmación 1 del corolario se deriva directamente de la afirmación 1 del teorema.

Del cumplimiento de la condición (35.21) para $0 < k \leqslant +\infty$ se deduce que si fijamos k' tal que $0 < k' < k$, entonces existe el número $n_0 = n_0(k')$ que tiene la propiedad de que si $n \geqslant n_0$, entonces

$$\frac{u_n}{v_n} > k', \quad \text{es decir,} \quad v_n < \frac{1}{k'} u_n,$$

y esto significa que

$$v_n = O(u_n).$$

Por esto la afirmación 2 del corolario se deriva directamente de la afirmación 2 del teorema. □

Ejemplos. 1. Sea $u_n = \dfrac{\operatorname{sen}^2 n\alpha}{2^n}$.

Entonces $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$, y ya que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ converge (véase el p. 35.1), entonces también converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^2 n\alpha}{2^n}$.

2. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$ diverge ya que $\dfrac{1}{1+\sqrt{n}} \geqslant \dfrac{n}{2\sqrt{n}}$, $p = 1, 2, \ldots$, y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ como hemos visto (véase el estudio de la serie (35.13)) diverge.

La efectividad de la utilización del criterio de comparación para el análisis de la convergencia de una serie depende, naturalmente, de la reserva de "series de comparación", es decir, de las series de las cuales ya sabemos si convergen o divergen, y que por esto podemos tratar de utilizar para el análisis de la convergencia de la serie dada.

Si en calidad de "serie de comparación" (35.17) tomamos la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, de la cual ya sabemos para que α converge, entonces del teorema 6 se deduce directamente la validez del siguiente teorema.

Teorema 7. *Sea $u_n \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Entonces si $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ y $\alpha > 1$, la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{35.22}$$

converge; si $\dfrac{1}{n^\alpha} = O(u_n)$ y $\alpha \leqslant 1$, la serie (35.22) diverge.

Corolario. *Sea $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha u_n = k$ y en este caso*

1) si $\alpha > 1$ y $0 \leqslant k < +\infty$, entonces la serie (35.22) converge;
2) si $\alpha \leqslant 1$ y $0 < k \leqslant +\infty$, entonces la serie (35.22) diverge.

En particular, si $u_n \sim \dfrac{1}{n^\alpha}$, entonces la serie (35.22) converge cuando $\alpha > 1$ y diverge cuando $\alpha \leqslant 1$.

Si los términos u_n de la serie (35.22) están dados con ayuda de una fórmula que representa una función de n, la cual tiene sentido para todos los valores reales no negativos suficientemente grandes de la variable n y más aún es una función "suficientemente suave" de esta variable, entonces para la aplicación práctica del teorema 7 habituamente resulta conveniente desarrollar el término u_n con ayuda de la fórmula de Taylor según las potencias de $1/n$.

Si el término principal del desarrollo obtenido tiene la forma de $1/n^\alpha$, entonces tomando en calidad de serie de comparación la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ y aplicando el teorema 7 se puede definir si converge o diverge la serie dada.

En un sentido conocido se puede decir que este método de análisis de la convergencia de la serie es el más cómodo y además suficientemente general

Ejemplos. Analicemos la convergencia de las series cuyos términos generales se definen por las fórmulas dadas a continuación.

1. $u_n = 1 - \cos \frac{\pi}{n}$. Evidentemente, $u_n > 0$. Ya que (véase la observación al final del p. 13.3) $\cos x = 1 + O(x^2)$, $x \to 0$, y por consiguiente,

$$u_n = 1 - \left[1 + O\left(\frac{\pi^2}{n^2}\right)\right] = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty,$$

entonces según el teorema 7 la serie con término general u_n converge.

2. $u_n = \ln \cos \frac{1}{n}$. Aquí $u_n < 0$. Recordando que $\ln(1 + x) = O(x)$, $x \to 0$, y aplicando sucesivamente la fórmula de Taylor para el coseno y el logaritmo obtendremos:

$$u_n = \ln \cos \frac{1}{n} = \ln\left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty,$$

y por esto en virtud del teorema 7 la serie con términos positivos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-u_n)$ converge y junto con ella converge también la serie dada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

3. $u_n = \ln \dfrac{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$, $n = 3, 4, \ldots$. Tenemos $u_n \geqslant 0$ y $\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$, por eso

$$u_n = \ln\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) - \ln\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) = 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} + o\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) = \frac{2\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

De esta manera $u_n \sim \frac{2\pi}{n}$, ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n}$ diverge, entonces diverge también la serie $\sum_{n=3}^{\infty} \ln \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$.

35.6. CRITERIOS DE D'ALEMBERT Y DE CAUCHY PARA SERIES CON TÉRMINOS NO NEGATIVOS

A veces resultan útiles algunos criterios especiales de convergencia de la serie. Señalemos entre ellos el asi llamado criterio de D'Alembert *) y el criterio de Cauchy que se obtienen directamente del criterio de comparación, si en calidad de serie de comparación tomamos la progresión geométrica escogida de manera correspondiente.

Teorema 8 (criterio de D'Alembert). *Sea dada una serie con términos positivos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n > 0 \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{35.23}$$

Así pues,

1) *si existen un número q, $0 < q < 1$, y un número n_0 tales que para todos los $n \geqslant n_0$ se cumple la desigualdad*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q,$$

entonces la serie dada converge;

2) *si existe un número n_0 tal que para todos los $n > n_0$* se cumple la desigualdad

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1,$$

entonces la serie dada diverge.

DEMOSTRACIÓN. Sea $0 < q < 1$ y supongamos que existe un número n_0 tal que para $n \geqslant n_0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q, \quad \text{es decir,} \quad u_{n+1} \leqslant q u_n.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&u_{n_0+1} \leqslant u_{n_0} q, \\
&u_{n_0+2} \leqslant u_{n_0+1} q \leqslant u_{n_0} q^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&u_{n_0+p} \leqslant u_{n_0+p-1} q \leqslant \ldots \leqslant u_{n_0} q^p, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

*) J. D'Alembert (1717 — 1783), filósofo y matemático francés.

y ya que la serie $u_{n_0}q + u_{n_0}q^2 + \ldots + u_{n_0}q^p + \ldots$ siendo la suma de una progresión geométrica decreciente infinita con denominador $q\,(0 < q < 1)$ converge, entonces por el criterio de comparación converge también la serie

$$u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \ldots + u_{n_0+p} + \ldots,$$

así como la serie original (35.23).

Si existe n_0 tal que para todos los $n \geqslant n_0$ se cumple la desigualdad $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, entonces

$$u_{n_0+1} \geqslant u_{n_0},$$
$$u_{n_0+2} \geqslant u_{n_0+1} \geqslant u_{n_0},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

y ya que, por suposición, $u_{n_0} > 0$, entonces el término n-ésimo de la serie siendo acotado inferiormente por una constante positiva no tiende a cero. Por consiguiente no se cumple la condición necesaria de convergencia de una serie (véase el teorema 1 de este párrafo) y por esto la serie (35.23) diverge. □

Corolario. *Supongamos que existe* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$. *En este caso, si* $l < 1$, *entonces la serie* (35.23) *converge, y si* $l > 1$, *la serie* (35.23) *diverge.*

Esto se deriva directamente del teorema demostrado.

En calidad de ejemplo analicemos la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$.

Aquí $u_n = \dfrac{1}{n!}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, por esto según el corolario del teorema 10 la serie dada converge. Naturalmente, su convergencia se puede establecer comparándola por ejemplo, con la serie convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Ejemplos con más contenido de la aplicación del criterio de D'Alembert se darán más adelante (véase, por ejemplo, el p. 36.1).

Teorema 9 (criterio de Cauchy). *Sea dada la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n \geqslant 0,\quad n = 1, 2, \ldots. \tag{35.24}$$

En este caso

1) *si existen* q, $0 \leqslant q < 1$, *y* n_0 *tales que para todos los* $n \geqslant n_0$ *es cumple la desigualdad*

$$\sqrt[n]{u_n} \leqslant q,$$

entonces la serie dada converge;

2) *si existe un número* n_0 *tal que para todos los* $n \geqslant n_0$ *se cumple la desigualdad*

$$\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1,$$

entonces la serie dada diverge.

DEMOSTRACIÓN. Si para $n \geqslant n_0$

$$\sqrt[n]{u_n} \leqslant q, \quad \text{es decir,} \quad u_n \leqslant q^n,$$

entonces según el criterio de comparación la serie (35.24) converge ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ cuando $0 < q < 1$ converge. Si

$$\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1, n \geqslant n_0,$$

entonces $u_n \geqslant 1$ y esto significa que la serie (35.24) diverge (véase el teorema 1). □

Corolario. *Supongamos que existe*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

Si $l < 1$, la serie (35.24) *converge y si $l > 1$, ella diverge.*

La demostración del corolario es evidente.

Analicemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Ya que $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, entonces por el corolario del teorema 9 la serie dada converge. Su convergencia se establece fácilmente con ayuda del teorema 7.

OBSERVACIÓN. Si de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ es conocido sólo que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1, \quad \text{ó} \quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1, \tag{35.25}$$

entonces no se puede decir nada definido sobre su convergencia: la serie puede tanto converger como diverger. Por ejemplo, las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

satisfacen ambas condiciones (35.25), no obstante la primera de ellas diverge y la segunda converge.

<u>Ejercicios.</u> Analícese la convergencia de las series:

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \pi\sqrt{n^2 + a^2}$ ($a = \text{const} \in R$).

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsen \frac{n}{n+1}\right)$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \ln \frac{2n+1}{2n-1}\right)$.

10. Sea $0 < p < q < 1$. Demuéstrese que la serie
$p + q^2 + p^3 + q^4 + \ldots$
converge y $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} = \infty$.

11. Sea $0 < \alpha < \beta < 1$. Demuéstrese que la serie
$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \ldots$
converge y $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \infty$.

35.7. CRITERIO INTEGRAL DE CONVERGENCIA DE LAS SERIES CON TÉRMINOS NO NEGATIVOS

Si para la serie dada (35.1) se logra escoger una función definida para $x \geqslant 1$ y tal que $f(n) = u_n$, entonces a determinadas condiciones, de la convergencia o divergencia de la integral

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

se puede juzgar también sobre la convergencia o divergencia de la serie (35.1).

Teorema 10 (criterio integral de convergencia de las series). *Si la función $f(x)$, definida para todos los $x \geqslant 1$, es no negativa y decrece, entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{35.26}$$

converge si y sólo si converge la integral

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx. \tag{35.27}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $k \leqslant x \leqslant k + 1$, en virtud del decrecimiento de la función $f(x)$ (fig. 147).

$$f(k) \geqslant f(x) \geqslant f(k + 1), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

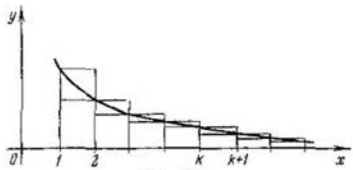


FIG. 147

por esto integrando respecto al segmento $[k, k + 1]$ tendremos

$$f(k) \geqslant \int_{k}^{k+1} f(x)dx \geqslant f(k + 1), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Sumando estas desigualdades desde $k = 1$ hasta $k = n$, obtendremos

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geqslant \int_{1}^{n+1} f(x)dx \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(k + 1)$$

y suponiendo

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

tendremos

$$s_n \geqslant \int_{1}^{n+1} f(x)dx \geqslant s_{n+1} - f(1), \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{35.28}$$

Si la integral (35.27) converge, entonces por el lema 1 del p. 33.3 para cualquier $n = 1, 2, \ldots$

$$\int_{1}^{n+1} f(x)dx \leqslant \int_{1}^{+\infty} f(x)dx.$$

De aquí y de la desigualdad (35.28) se deduce, que

$$s_{n+1} \leqslant f(1) + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx,$$

es decir, la sucesión de las sumas parciales de la serie (35.26) es acotada superiormente y significa según el teorema anterior que esta serie converge.

Si la serie (35.26) converge y su suma es igual a s, entonces por este mismo teorema, $s_n \leqslant s$ para todos los $n = 1, 2, \ldots$, y por la desigualdad (35.17) para todos los $n = 1, 2, \ldots$

$$\int_{1}^{n+1} f(x)dx \leqslant s.$$

Si ahora $\xi \geqslant 1$, entonces tomando n tal que $n \geqslant \xi$ obtendremos en virtud de que la función f es no negativa

$$\int_{1}^{\xi} f(x)dx \leqslant \int_{1}^{n} f(x)dx \leqslant s.$$

Así, el conjunto de todas las integrales $\int_{1}^{\xi} f(x)dx$, $\xi \geqslant 1$, es acotado superiormente y por esto la integral (35.27) converge (véase el lema 1 del p. 33.3). □

Este teorema a menudo facilita sustancialmente el análisis de la convergencia de las series ya que si para la serie dada se logra escoger la función f correspondiente, en este caso reducir la cuestión sobre el estudio de la convergencia de la serie al estudio de la convergencia de la integral, entonces esto da la posibilidad de aplicar el aparato del cálculo integral desarrollado en el capítulo anterior.

Ejemplos. 1. Analicemos de nuevo (véase el p. 35.3) la serie

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots \tag{35.13}$$

con término n-ésimo $u_n = 1/n^\alpha$, $n = 1, 2, \ldots$.

En el caso dado, la función $f(x)$ señalada en el teorema se encuentra fácilmente:

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \geqslant 1.$$

Ya que la integral $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge cuando $\alpha > 1$ y diverge cuando $\alpha \leqslant 1$, entonces la serie (35.13) converge para $\alpha > 1$ y diverge para $\alpha \leqslant 1$.

Estos hechos fueron establecidos anteriormente por otro método en el p. 35.3 (véanse allí los ejemplos 1 y 2). Como se ve de lo anteriormente expuesto la aplicación del criterio integral de convergencia de las series al estudio de la serie (35.13) considerablemente simplificó el problema del análisis de la convergencia de esta serie.

2. Analicemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}. \tag{35.29}$$

Esta serie se puede fácilmente analizar con ayuda del criterio integral de convergencia: del hecho de que la integral $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \int\limits_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge se deduce que la serie (35.29) también diverge.

Enunciemos ahora un sencillo corolario del teorema 10 que a menudo es útil en las aplicaciones.

Si existe n_0 natural tal que la función no negativa f decrece cuando $x \geqslant n_0$, entonces la serie

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$$

converge si y sólo si converge la integral

$$\int\limits_{n_0}^{+\infty} f(x)dx.$$

Este caso se reduce al analizado en el teorema con el cambio de variable $x = y + n_0 - 1$.

35.8*. DESIGUALDADES DE HÖLDER Y DE MINKOWSKI PARA LAS SUMAS FINITAS E INFINITAS

Sean dados los números (en general complejos) $x_1, \ldots, x_n, \ldots, y_1, \ldots, y_n$, $< p < +\infty$ y el numéro q se define por la igualdad $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (véanse el p. 20.8

y el p. 28.4*). Entonces son válidas las desigualdades

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{1/q} \tag{35.30}$$

(desigualdad de Hölder) y

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{1/p} \tag{35.31}$$

(desigualdad de Minkowski).

Su demostración se realiza por el mismo esquema que en el caso de las desigualdades integrales correspondientes (véase el p. 28.4*).

Introduzcamos para mayor brevedad las notaciones

$$\|x\|_p \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad \|y\|_q \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{1/q}. \tag{35.32}$$

Aplicando la desigualdad (20.53) $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, a \geqslant 0, b \geqslant 0$ a

$$a = \frac{|x_i|}{\|x\|_p}, \quad b = \frac{|y_i|}{\|y\|_q}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

tendremos

$$\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \frac{|y_i|}{\|y\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \frac{|x_i|}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}.$$

Sumando estas desigualdades por i desde 1 hasta n por (35.32) y la condición $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, obtendremos:

$$\frac{1}{\|x\|_q \|y\|_q} \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \frac{1}{p\|x\|_p^p} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \frac{1}{q\|y\|_q^q} \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q;$$

de este modo la desigualdad (35.30) queda demostrada.

La desigualdad de Minkowski (35.31) se deduce de la desigualdad de Hölder (35.30): de la relación evidente

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i|\,|x_i + y_i|^{p-1},$$

aplicando a cada sumando en el segundo miembro la desigualdad de Hölder, obtendremos

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{1/q}$$

Si el primer miembro es igual a cero, entonces la desigualdad de Minkowski es válida evidentemente; si éste no es igual a cero, entonces reduciendo ambos miembros por el factor $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{1/q}$ y observando que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $q(p-1) = p$, obtendremos la desigualdad (35.31).

Con los casos particulares de las desigualdades de Hölder y de Minkowski cuando $p = q = 2$ ya nos hemos encontrado anteriormente en el § 18 (véanse (18.2) y (18.3)).

Para dos series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ cualesquiera son válidas las desigualdades análogas

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{1/q}. \tag{35.33}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right)^{1/p} \tag{35.34}$$

En efecto, para todas las sumas parciales de un mismo orden de las series dadas son válidas las desigualdades de Hölder y de Minkowski. Pasando en ellas al límite cuando $n \to \infty$ obtendremos las desigualdades (35.33) y (35.34).

De las desigualdades demostradas se deduce, en particular, que si las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q$$

convergen, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|$ converge, y si convergen las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q,$$

entonces converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p$.

35.9. SERIES DE TÉRMINOS DE SIGNO VARIABLE

En este punto se analizan las series con términos reales, cuyos signos, en general varían con la variación del número, estas series se llaman de *términos de signo variable*.

Analicemos ante todo las así llamadas series *alternadas*, es decir, las series cuyos términos son consecutivamente positivos o negativos.

Teorema 11 (de Leibniz). *Si*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \tag{35.35}$$

y

$$u_n \geqslant u_{n+1} > 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{35.36}$$

entonces la serie alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \tag{35.37}$$

converge. Además cualquier suma parcial s_n de la serie (35.37) *se diferencia de su suma s en una magnitud menor que término siguiente u_{n+1}, dicho de otra forma, la magnitud absoluta del resto de la serie r_n en este caso no es mayor que el valor absoluto de su primer término, es decir,*

$$|r_n| = |s - s_n| \leqslant u_{n+1}.$$

DEMOSTRACIÓN. Analicemos las sumas parciales de orden par de la serie (35.37)

$$s_{2k} = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} u_n.$$

Estas se pueden escribir en la forma

$$s_{2k} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2k-1} - u_{2k}), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

En virtud de la condicion (35.36) las expresiones entre paréntesis son no negativas y por esto $s_{2k} \leqslant s_{2k+2}$, es decir, la sucesión de sumas parciales de orden par de la serie (35.37) crece.

Observando que las sumas parciales s_{2k} se pueden escribir también en la forma

$$s_{2k} = u_1 - (u_2 - u_3) - \ldots - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

y que las expresiones entre paréntesis por la condición (35.36) son no negativas y $u_{2k} > 0$, obtenemos que $s_{2k} < u_1$, es decir, la sucesión $\{s_{2k}\}$ es acotada superiormente. Del crecimiento y la acotación superior de la sucesión $\{s_{2k}\}$ se deduce que ésta converge

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k} = s. \tag{35.38}$$

Mostremos que las sumas parciales de orden impar de la serie (35.37) también tienden al mismo límite. En efecto

$$s_{2k+1} = s_{2k} + u_{2k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{35.39}$$

y ya que por (35.35) $\lim\limits_{k\to\infty} u_{2k+1} = 0$, entonces por (35.38) y (35.39) tenemos

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = s. \tag{35.40}$$

De (35.38) y (35.40) se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

Ahora señalemos que para la serie (35.37) es válida la desigualdad

$$s_{2k} \leqslant s \leqslant s_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{35.41}$$

En efecto por un lado, ya vimos que s es el límite de la sucesión creciente $\{s_{2k}\}$, por esto $s_{2k} \leqslant s$. Por otro lado

$$s_{2k+1} = s_{2k-1} - (u_{2k} - u_{2k+1}) \leqslant s_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots ,$$

es decir, la sucesión $\{s_{2k-1}\}$ decrece y ya que s es también el límite de la sucesión $\{s_{2k-1}\}$ (véase (35.40)), entonces $s \leqslant s_{2k-1}$. De la desigualdad (35.41) se deduce

$$s - s_{2k} \leqslant s_{2k+1} - s_{2k} = u_{2k+1},$$

$$s_{2k-1} - s \leqslant s_{2k-1} - s_{2k} = u_{2k}, \quad k = 1, 2, \ldots ,$$

y esto significa que para todos los $n = 1, 2, \ldots$ se cumple la desigualdad $|s - s_n| \leqslant u_{n+1}$. □

Si las condiciones de alternación de los signos de la serie y la monotonía se cumplen no a partir del primer término, sino comenzando desde cierto número n_0, entonces, cuando se cumple la condición (35.35), es decir, cuando el término general de la serie tiende a cero, la serie analizada también converge. Esto se deduce de que la eliminación de un número finito de términos de la serie no influye sobre su convergencia (véase el teorema 4 en el p. 35.2).

En calidad de ejemplo analicemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \tag{35.42}$$

Sus términos satisfacen, evidentemente, las condiciones del teorema 11, y por eso converge. Observando que en ella $s_1 = 1$ y $s_2 = 1/2$ para su suma S, tenemos la estimación

$$\frac{1}{2} \leqslant S \leqslant 1. \tag{35.43}$$

A las series se extienden no todas las propiedades de las sumas finitas. Aclaremos esto en el ejemplo de la misma serie (35.42). Si

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots , \tag{35.44}$$

entonces

$$\frac{1}{2} S = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots ,$$

sumando término a término esta serie con la serie (35.44) obtendremos la igualdad

$$\frac{3}{2} S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{8} + \ldots , \tag{35.45}$$

es decir, la serie formada por los mismos términos que la serie dada (35.44) tomados sólo en otro orden, por eso $\frac{3}{2} S = S$, de donde se deduce que $S = 0$ lo que contradice la desigualdad (35.43).

A pesar de la aparente evidencia de la legalidad de nuestros razonamientos hemos cometido un grave error. ¿Dónde? Un análisis detallado de esto será dado en uno de los siguientes puntos.

35.10. SERIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES. APLICACIÓN DE LAS SERIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES A LA INVESTIGACIÓN DE LA CONVERGENCIA DE LAS SERIES ARBITRARIAS

En este punto de nuevo se estudian las series cuyos términos en general son números complejos.

Definición 4. *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n \in C \tag{35.46}$$

se llama absolutamente convergente, si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \tag{35.47}$$

converge.

Aplicando el criterio de Cauchy de convergencia de una serie a la serie (35.47) obtendremos: *para que la serie* (35.46) *converja absolutamente es necesario y suficiente que para cualquier* $\varepsilon > 0$ *exista un número* n_ε *tal que para todos los* $n \geqslant n_\varepsilon$ *y todos los enteros* $p \geqslant 0$ *se cumpla la desigualdad*

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

Ejemplos. 1. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^n} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{n+1}$ converge absolutamente ya que $\left|\frac{i^n}{2^n} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{n+1}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge.

2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, como sabemos, converge, no obstante no absolutamente ya que la serie formada por los valores absolutos de sus términos, es decir, la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Teorema 12. *Si la serie converge absolutamente, entonces también converge simplemente.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la serie (35.46) converge absolutamente, es decir, la serie (35.47) converge. Entonces por la necesidad del cumplimiento de la condición de Cauchy para la convergencia de la serie (véase el teorema 5) para cualquier $\varepsilon > 0$ existe n_ε tal que para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los enteros $p \geqslant 0$ se cumple la

desigualdad
$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

De aquí y de la desigualdad $\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} |u_k|$ se deduce que para todos los números $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los $p = 0, 1, 2, \ldots$ se cumple la desigualdad
$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon.$$
Y esto significa también en virtud de la suficiencia del cumplimiento de la condición de Cauchy para la convergencia de una serie que la serie (35.46) converge. □

OBSERVACIÓN. Se dede tener en cuenta que la propiedad del valor absoluto de la suma de no superar la suma de los valores absolutos de los sumandos permanece válida también para las series convergentes:
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \tag{35.48}$$
Esta desigualdad tiene sentido cuando su segundo miembro es finito, es decir, cuando la serie analizada converge absolutamente. En este caso el primer miembro de la desigualdad siempre tiene sentido, ya que de la convergencia absoluta de la serie se deduce su convergencia común. Formalmente la desigualdad (35.48) según nuestro acuerdo sobre la utilización del símbolo $+\infty$ (véanse las págs. 42 y 570) es cierta también para cualquier serie convergente si la serie del segundo miembro (35.48) diverge.

Para la demostración de la desigualdad (35.48) en el caso de la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ observemos que para cualquier m natural
$$\left|\sum_{n=1}^{m} u_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{m} |u_n|.$$
Pasando aquí al límite cuando $m \to \infty$, obtendremos la desigualdad (35.44).

Denotemos por
$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^* \tag{35.49}$$
la serie compuesta por los mismos términos que la serie (35.46), pero tomados, en general, en otro orden.

Teorema 13. *Si la serie* (35.46) *converge absolutamente, entonces la serie* (35.49) *también converge absolutamente y tiene la misma suma.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la serie (35.46) converge absolutamente, es decir, converge la serie (35.47) y sea la suma de la serie (35.46) igual a s:
$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{35.50}$$

Mostremos inicialmente que la serie (35.49) también converge y más aún su suma es igual a la suma de la serie (35.46), es decir, a s. Denotemos las sumas parciales de la serie (35.46) por s_n:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad n = 1, 2, \dots,$$

y las sumas parciales de la serie (35.49) por s_n^*:

$$s_m^* = \sum_{k=1}^{m} u_k^*,$$

además, pongamos

$$\bar{s} = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|, \quad \bar{s}_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Sea fijo arbitrariamente un $\varepsilon > 0$, entonces por la convergencia de la serie (35.47) existe un número n_ε tal que

$$\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n| = \bar{s}_n - \bar{s}_{n_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{35.51}$$

por consiguiente se cumple también la desigualdad

$$|s - s_n| = \left| \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{35.52}$$

Elijamos, más adelante, un número m_ε de forma tal que la suma parcial $s_{m_\varepsilon}^*$ de la serie (35.49) contenga en calidad de sumandos todos los términos de la serie (35.46), que aparecen en la suma s_{n_ε} (dicho de otro modo, el número m_ε es tal que todos los términos de la serie (35.46) con números no superiores a n_ε, tienen en la serie (35.49) números no mayores que m_ε). Sea $m \geqslant m_\varepsilon$. Hagamos

$$s_m^{**} = s_m^* - s_{n_\varepsilon}.$$

Por cuanto $|s_m^{**}|$ no es mayor que la suma de los valores absolutos de los sumandos que entran en s_m^{**} y por cuanto los números de estos sumandos son mayores que n_ε y por consiguiente todos ellos están contenidos en la suma $\sum\limits_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n|$, entonces por (35.51) tenemos

$$|s_m^{**}| \leqslant \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{35.53}$$

Utilizando (35.52) y (35.53) obtendremos cuando $m \geqslant m_\varepsilon$

$$|s - s_m^*| = |s - (s_{n_\varepsilon} + s_m^{**})| \leqslant |s - s_{n_\varepsilon}| + |s_m^{**}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto significa que

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^* = s.$$

Queda demostrar que la serie (34.49) también converge absolutamente. Esto se deduce directamente de la afirmación, que acabamos de demostrar, si la aplicamos a la serie (34.47). En efecto esta serie converge absolutamente (como cualquier serie convergente con términos no negativos) y por esto, según lo demostrado, la serie $\sum_{m=1}^{\infty} |u_m^*|$ formada por los valores absolutos de la serie (34.49) no sólo converge (lo que significa también la convergencia absoluta de la serie (34.49)) sino que su suma coincide con la suma de la serie (34.47). □

Teorema 14. *Si la serie* (35.46) *converge absolutamente y c es un número cualquiera, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ *también converge absolutamente.*

Esto se deduce del criterio de Cauchy de convergencia de las series y de la igualdad

$$\sum_{n=1}^{n+p} |cu_k| = |c| \sum_{k=n}^{n+p} |u_k|.$$

Teorema 15. *Si las series* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *convergen absolutamente, entonces su suma* $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ *también converge absolutamente.*

Esto se deduce del criterio de Cauchy de convergencia de las series y de la desigualdad

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k + v_k| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} |u_k| + \sum_{k=n}^{n+p} |v_k|.$$

Teorema 16. *Si las series*

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m y \sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{35.54}$$

convergen absolutamente, entonces la serie formada por todos los productos dos a dos posibles $u_m v_n$ *de los términos de estas series, situados en cualquier orden, también converge absolutamente. Si la suma de esta serie es igual a s y la suma de las series* (35.54) *son iguales respectivamente a s' y s'', es decir,*

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m = s', \ \sum_{n=1}^{\infty} v_n = s'',$$

entonces

$$s = s's''. \tag{35.55}$$

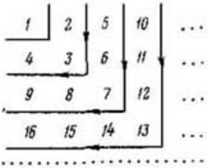
DEMOSTRACIÓN. Hagamos la siguiente tabla de los productos dos a dos de los términos de las series (35.54):

u_1v_1	u_1v_2	...	u_1v_n	...
u_2v_1	u_2v_2	...	u_2v_n	...
...	...	...	...	...
u_mv_1	u_mv_2	...	u_mv_n	...
...	...	...	...	...

Compongamos de los elementos de esta tabla la serie

$$u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1 + \ldots, \tag{35.56}$$

en la cual los elementos están dispuestos en el orden mostrado en el siguiente esquema donde en el lugar de cada producto de la tabla está señalado su número de orden como término de la serie (35.56):



Demostremos que la serie (35.56) converge absolutamente, es decir, que converge la serie

$$|u_1v_1| + |u_1v_2| + |u_2v_2| + |u_2v_1| + \ldots \tag{35.57}$$

Para esto, en virtud de que sus términos son no negativos es suficiente demostrar que existe al menos una subsucesión acotada superiormente de sus sumas parciales (véase el lema 2 en el p. 35.4).

Denotemos por s'_n y s''_n las sumas parciales de las series respectivamente

$$s' \overset{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} |u_m|, \quad s'' \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} |v_n|.$$

las que por la convergencia absoluta de las series (35.54) convergen, es decir, $0 \leqslant s' < +\infty$, $0 \leqslant s'' < +\infty$. Entonces para las sumas parciales de orden n^2 de la serie (35.57) tendremos

$$s_1 = |u_1v_1| = s'_1 s''_1 \leqslant s's'',$$

$$\bar{s}_4 = |u_1v_1| + |u_1v_2| + |u_2v_2| + |u_2v_1| = \\ = (|u_1| + |u_2|)(|v_1| + |v_2|) = \bar{s}'_2\bar{s}''_2 \leqslant \bar{s}'',$$

. . . .

$$\bar{s}_{n^2} = |u_1v_1| + \ldots + |u_1v_n| + \ldots + |u_nv_n| + \ldots + |u_nv_1| = \\ = (|u_1| + \ldots + |u_n|)(|v_1| + \ldots + |v_n|) = \bar{s}'_n\bar{s}''_n \leqslant \bar{s}'\bar{s}'',$$

. . . .

Así, la subsucesión de sumas parciales $\{\bar{s}_{n^2}\}$ de la serie (35.57) es acotada superiormente y por consiguiente esta serie converge. Esto significa la convergencia absoluta de la serie (35.56) y de cualquier serie obtenida por una reordenación arbitraria de sus términos (véase el teorema 13). De esta forma, cualquier serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{m_k}v_{n_k} \tag{35.58}$$

formada por todos los productos dos a dos posibles $u_m v_n$ de los términos de las series (35.54) converge y además absolutamente.

Para la demostración de las fórmulas (35.55) nos aprovechemos de que la suma de la serie (35.58) no depende del orden de sus términos y de nuevo los ubicaremos del modo más cómodo para nosotros, precisamente, analicemos de nuevo la serie (35.56). Denotando por s'_n y s''_n las sumas parciales de las series (35.54) para las sumas parciales s_{n^2}, $n = 1, 2, \ldots$, de la serie (35.56), evidentemente, obtenemos

$$s_{n^2} = s'_n s''_n. \tag{35.59}$$

Pero

$$\lim_{n\to\infty} s'_n = s', \quad \lim_{n\to\infty} s''_n = s'', \quad \lim_{n\to\infty} s_{n^2} = s,$$

por esto pasando al límite en la igualdad (35.59) cuando $n \to \infty$ obtenemos la igualdad (35.55). □

Los teoremas 13 — 16 muestran que las propiedades de las series absolutamente convergentes son muy parecidas a las propiedades de las sumas finitas: la magnitud de la suma de esta serie no depende del orden de los sumandos, las series absolutamente convergentes se pueden multiplicar término a término, etc. En el siguiente punto será demostrado que para las series convergentes, que no convergen absolutamente estas propiedades no tienen lugar.

OBSERVACIÓN. Como conclusión de este punto subrayemos que cuando los términos de la serie son reales o complejos, pero cambian de signo, el problema de la convergencia de esta serie no se puede resolver sólo con ayuda de la definición de orden de decrecimiento del término n-ésimo. Por ejemplo los términos n-ésimos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ tienen un mismo orden cuando $n \to \infty$, no obstante la primera serie diverge y la segunda converge.

Más aún, no es difícil citar el ejemplo de dos series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, cuyos términos n-ésimos son equivalentes ($u_n \sim v_n$, $n = 1, 2, \ldots$), de las cuales una converge y la otra diverge.

En calidad de series tales se pueden tomar, por ejemplo, la serie con término n-ésimo

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

y la serie con término n-ésimo

$$v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

Por otro lado, aquí $u_n \sim v_n$, $n = 1, 2, \ldots$, ya que

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n} + \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}} = 1 + \frac{(-1)^{n+1}n}{(n+1)\ln(n+1)}$$

y por esto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1.$$

Por otro lado la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es una serie del tipo (35.37), por eso converge. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ diverge. En efecto, si convergiera, entonces convergería también la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (v_n - u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)},$$

es decir, la serie (35.29) la cual, como ya vimos, diverge.

Sería un error, no obstante, considerar que el método de selección de la parte principal es útil sólo en el caso de series con términos reales que tienen un mismo signo. El método de selección de la parte principal puede utilizarse con éxito para aclarar la convergencia de cualquier serie. La esencia de este método en el caso analizado está basada en la siguiente observación: sea dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Si representamos sus términos de la forma $u_n = v_n + w_n$ donde la serie $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge y diverge simultáneamente con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (¿por qué?). Por esto para la investigación de la convergencia de la serie $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_n$ es conveniente tratar de representar sus términos, por ejemplo, en la forma $u_n = v_n + w_n$ de tal modo que $w_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ cuando $\alpha > 1$. Por cuanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ converge (incluso absolutamente) entonces la convergencia de la serie dada se reduce a la investigación de la convergencia de la serie $\sum_{n \to \infty}^{\infty} v_n$. Este método, claro está, es conveniente en el caso, cuando la serie obtenida $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ se somete con más facilidad a la investigación de la convergencia, que la serie dada (compárese con la investigación análoga de la convergencia de las integrales en el p. 33.6).

Por ejemplo, analicemos la serie con término general

$$u_n = \ln\left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right].$$

Por cuanto (véase la observación en el p. 13.3)

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3), \quad x \to 0,$$

entonces

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Hagamos $v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n}$ y $w_n = u_n - v_n$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ diverge como la diferencia de series, de las cuales una converge y la otra diverge. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ converge, e incluso absolutamente ya que $w_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, $n \to \infty$.

De esta forma, la serie dada $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge aunque su "parte principal" $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ es una serie convergente. Así estas series son un ejemplo más de dos series cuyos términos forman sucesiones equivalentes de las cuales una converge y la otra diverge.

35.11. CRITERIOS DE D'ALEMBERT Y CAUCHY PARA SERIES NUMÉRICAS ARBITRARIAS

Si en el caso de la serie numérica (35.1) $u_n \neq 0$, $u_n \in C$, $n = 1, 2, \ldots$, existen un q, $0 < q < 1$ y un número n_0 tal que para todos los $n \geqslant n_0$ se cumple la desigualdad

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant q \text{ ó } \sqrt[n]{|u_n|} \leqslant q,$$

entonces por el criterio de D'Alembert, respectivamente de Cauchy (véase el p. 35.6) la serie dada converge y además absolutamente.

Si existe un número n_0 tal que para todos los $n \geqslant n_0$ tiene lugar la desigualdad

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geqslant 1 \tag{35.60}$$

ó

$$\sqrt[n]{|u_n|} \geqslant 1, \tag{35.61}$$

entonces a base de los criterios de D'Alembert y Cauchy sólo se puede afirmar que en este caso la serie de las magnitudes absolutas de los términos de la serie (35.1), es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ diverge, lo cual sólo significa que la serie dada no converge absolutamente.

En realidad, de (35.60) y de (35.61) se deduce que la serie dada (35.1) en general diverge. En efecto, como se ve de la demostración del criterio de D'Alembert, respectivamente del criterio de Cauchy, aplicable a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ (véanse los teoremas 8 y 9 en el p. 35.6) cuando se cumple cada una de las condiciones (35.60) y (35.61) por separado la sucesión $\{|u_n|\}$ no tiende a cero, por lo tanto tampoco tiende a cero la sucesión $\{u_n\}$, es decir, no se cumple la condición necesaria de convergencia de la serie.

Los criterios obtenidos de divergencia de la serie también se llaman habitualmente *criterios de D'Alembert y de Cauchy.*

35.12. SERIES CONVERGENTES QUE NO CONVERGEN ABSOLUTAMENTE. TEOREMA DE RIEMANN

Si una serie converge, pero no absolutamente, entonces como será mostrado a continuación ya no se puede afirmar que reordenando sus términos obtendremos una serie convergente a la misma suma. La paradoja al final del p. 35.9 se explica con esta circunstancia: la serie allí obtenida (35.45) se diferencia, en el orden de los términos, de la serie dada (35.42) convergente, pero no absolutamente y por esto no se podía afirmar que su suma es también igual a S. Más aún la contradicción obtenida muestra que esto a ciencia cierta no es así.

Así, la suma de la serie depende del orden de los sumandos, es decir, la ley conmutativa de la suma no tiene lugar para las series convergentes no absolutamente.

Si en la serie dada agrupamos de alguna manera sus términos sin infringir su orden y los sumamos, entonces la sucesión de las sumas parciales de la serie obtenida será una subsucesión de las sumas parciales de la serie inicial. Por esto si la serie original converge, entonces convergerá también la nueva serie obtenida, además las sumas de ambas series serán iguales. No obstante, si la serie dada diverge, entonces la segunda serie puede converger. Por ejemplo, la serie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + + \ldots$ diverge. Al agrupar dos a dos sus términos $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - - 1) + \ldots$ obtendremos una serie convergente. De esta forma, en general, para las series no es cierta tampoco la ley asociativa de la suma.

Analicemos algunas propiedades de las series convergentes, pero no absolutamente, con términos reales. Sea dada la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{35.62}$$

Denotemos por $u_1^+, u_2^+, \ldots, u_n^+, \ldots$ sus términos no negativos: $u_n^+ \geqslant 0$, y por $-u_1^-, -u_2^-, \ldots, -u_n^-, \ldots$ sus términos negativos: $u_n^- > 0$, tomados en el mismo orden que estén situados en la serie (35.56). Analicemos las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+, \tag{35.63}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-. \tag{35.64}$$

Señalemos que si la serie (35.63) contiene sólo un número finito de términos diferentes de cero, o la serie (35.64), todos los términos de la cual por definición son distintos de cero, está formada sólo por un número finito de términos, entonces comenzando desde un número, todos los términos de la serie original (35.62) tienen el mismo signo y por lo tanto su convergencia es equivalente a la convergencia absoluta.

Lema 3. *Si la serie* (35.62) *converge, pero no absolutamente, entonces ambas series* (35.63) *y* (35.64) *divergen.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la serie (35.62) converge, es decir, existe el límite finito

$$\lim_{n \to \infty} s_n \tag{35.65}$$

donde s_n son sus sumas parciales, $n = 1, 2, \ldots$. Denotemos por s_m^+, $m = 1, 2, \ldots$, la suma parcial de orden m de la serie (35.63) y por s_k^-, $k = 1, 2, \ldots$, la suma parcial de orden k de la serie (35.64). Para comodidad hagamos además $s_0^+ = s_0^- = 0$. Entonces para cualquier natural n existen $m = m(n)$ y $k = k(n)$ enteros no negativos tales que

$$s_n = s_m^+ - s_k^-, \quad n = m + k; \tag{35.66}$$

además, por cuanto la serie (35.62) converge no absolutamente, entonces ambas series (35.63) y (35.64) contienen un número infinito de términos diferentes de cero y por consiguiente

$$\lim_{n \to \infty} m(n) = \lim_{n \to \infty} k(n) = +\infty. \tag{35.67}$$

Denotemos ahora por $\bar{s}_n$ la suma parcial de orden n de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \tag{35.68}$$

Entonces evidentemente

$$s_n = s_m^+ + s_k^-. \tag{35.69}$$

Por cuanto la serie dada (35.62) no converge absolutamente, es decir, por cuanto diverge la serie (35.68) entonces

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty. \tag{35.70}$$

Ambos sumandos del segundo miembro de la igualdad (35.69) son no negativos, por eso de (35.70) y de (35.67) se deduce que al menos uno de los sumandos señalados tiende al infinito cuando $n \to \infty$. Volviéndonos ahora a la igualdad (35.66) vemos que el primer miembro de esta igualdad tiene límite finito (véase (35.65)) y una de las sumas s_m^+ y s_k^-, según lo demostrado, tiende a infinito cuando $n \to \infty$. Esto es posible sólo con la condición de que la segunda de las sumas analizadas también tiende a infinito cuando $n \to \infty$.

Así, ambas series (35.63) y (35.64) divergen. □

Teorema 17 (de Riemann). *Si la serie (35.62) converge, pero no absolutamente, entonces, cualquiera que sea el número A, se pueden reordenar los términos de esta serie de tal forma que la suma de la serie obtenida será igual a A.*

DEMOSTRACIÓN. Analicemos de nuevo las series (35.63) y (35.64). Por el lema

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^+ = +\infty, \tag{35.71}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^- = +\infty. \tag{35.72}$$

Sea para mayor exactitud $A \geqslant 0$. Escojamos un número n_1 tal que

$$u_1^+ + u_2^+ + \ldots + u_{n_1}^+ > A, \tag{35.73}$$

además en el caso cuando el número $n_1 = 1$ no satisface esta condición, la elección de n_1 la llevaremos a cabo aún de forma tal que se cumpla también la desigualdad

$$u_1^+ + u_2^+ + \ldots + u_{n_1-1}^+ \leqslant A. \tag{35.74}$$

La existencia de los números n_1 para los cuales se cumple la condición (35.73) se deduce de la condición (35.71), para que además se cumpla también la condición (35.74) es necesario tomar el menor de estos números n_1.

Más adelante escojamos de la serie (35.64) los n_2 primeros términos tales que

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- < A,$$

además, en el caso cuando el número $n_2 = 1$ no satisface esta condición, la elección de n_2 la llevaremos a cabo de forma tal que se cumpla también la desigualdad

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1-1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2-1}^- \geqslant A.$$

La existencia de tal número n_2 se demuestra partiendo de (35.72) análogamente a la existencia del número n_1.

Escojamos de nuevo una subserie de la serie (35.63) con términos hasta cierto número n_3 de tal forma que se cumple la desigualdad

$$u_1^+ + \ldots u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \ldots + u_{n_3-1}^+ > A$$

y (cuando $n_3 > n_1 + 1$) la desigualdad

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \ldots + u_{n_3-1}^+ \leqslant A.$$

Continuando este proceso obtendremos la serie

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \ldots$$
$$\ldots + u_{n_3}^+ - u_{n_2+1}^- - \ldots - u_{n_4}^- + \ldots . \quad (35.75)$$

Para la sucesión de sus sumas parciales

$$s_{n_1}, s_{n_1+n_2}, s_{n_2+n_3}, \ldots s_{n_k+n_{k+1}}, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

a base de la construcción se cumplen las desigualdades

$$s_{n_1} > A, s_{n_1+n_2} < A, s_{n_2+n_3} > A, \ldots,$$

además, la desviación del número A de cada una de las sumas parciales señaladas $s_{n_k+n_{k+1}}$ no es mayor que su último término

$$|A - s_{n_k+n_{k+1}}| \leqslant u_{n_{k+1}}^{\pm}. \quad (35.76)$$

Aquí por $u_{n_{k+1}}^{\pm}$ está *denotada* la magnitud absoluta del término de la serie (34.75) con número n_{k+1} en la serie (34.75) y con el índice superior correspondiente "+" ó "−".

Por la convergencia de la serie original (35.62) tenemos

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

y ya que cuando $k \to \infty$ el número del término $u_{n_{k+1}}^{\pm}$ en la serie (35.62) también tiende a ∞, entonces

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_{k+1}}^{\pm} = 0.$$

Por esto de (35.76) se deduce que

$$\lim_{k\to\infty} s_{n_k+n_{k+1}} = A. \quad (35.77)$$

Si ahora tomamos cualquier suma parcial s_n de la serie (35.75), entonces por la construcción de esta serie siempre se puede hallar un número $k = k(n)$ tal que tendrá lugar o bien la desigualdad

$$s_{n_k+n_{k+1}} \leqslant s_n \leqslant s_{n_{k+1}+n_{k+2}},$$

o bien la desigualdad

$$s_{n_k+n_{k+1}} \geqslant s_n \geqslant s_{n_{k+1}+n_{k+2}},$$

y por esto de (35.77) se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = A. \;\square$$

Ejercicio 12. Demuéstrese que si la serie (35.62) converge pero no absolutamente, entonces se puede reordenar sus términos de forma tal que la serie obtenida divergerá. En particular se puede hacer de forma tal que su suma sea igual a $+\infty$, $-\infty$, e incluso que la sucesión de sus sumas parciales no tenga límite finito ni infinito.

35.13. TRANSFORMACIÓN DE ABEL. CRITERIOS DE CONVERGENCIA DE DIRICHLET Y DE ABEL

En este punto serán demostrados los criterios suficientes de convergencia de series numéricas, aplicables también para las series con términos complejos.

Preliminarmente analicemos una transformación de las sumas del tipo

$$S = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \tag{35.78}$$

donde a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son números complejos. Hagamos

$$B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \ldots, B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

entonces

$$b_1 = B_1, b_2 = B_2 - B_1, \ldots, b_n = B_n - B_{n-1}$$

y

$$S = a_1B_1 + a_2(B_2 - B_1) + \ldots + a_n(B_n - B_{n-1}).$$

Abriendo los paréntesis y agrupando nuevamente los términos, obtenemos la igualdad

$$S = (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + \ldots + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_nB_n.$$

De esta forma, finalmente tenemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_ib_i = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1})B_i + a_nB_n. \tag{35.79}$$

Esta transformación de las sumas del tipo (35.78) se denomina *transformación de Abel**), ella es en cierto sentido un análogo de la integración por partes. Esta analogía se ve especialmente si escribimos la fórmula (35.79) de la forma

$$\sum_{i=2}^{n} a_i(B_i - B_{i-1}) = (a_nB_n - a_1B_1) - \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)B_i.$$

Demostremos un lema con ayuda de la transformación de Abel.

Lema 4 (desigualdad de Abel). *Si*

$$a_i \geqslant a_{i+1}, i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{35.80}$$

ó

$$a_i \leqslant a_{i+1}, i = 1, 2, \ldots, n-1\ ^{**)} \tag{35.81}$$

*) N. Abel (1802 — 1829), matemático noruego.

**) De estas desigualdades se deduce que los números a_i, $i = 1, 2, \ldots n$, son reales.

y
$$|b_1 + \ldots + b_i| \leqslant B, \quad b_i \in C, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{35.82}$$
entonces
$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leqslant B(|a_1| + 2|a_n|). \tag{35.83}$$

En efecto por las condiciones (35.80) ó (35.81) todas las diferencias $a_i - a_{i+1}$ en la fórmula (35.79) son de un mismo signo y por esto en virtud de las fórmulas (35.79) y la condición (35.82) tenemos:
$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}|\,|B_i| + |a_n|\,|B_n| \leqslant$$
$$\leqslant B\left[\left| \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) \right| + |a_n|\right] = B[|a_1 - a_n| + |a_n|] \leqslant B[|a_1| + 2|a_n|]. \ \square$$

Es sustancial prestar atención a que en la desigualdad de Abel la estimación de la suma analizada se da a través del primero y el último de sus términos y no depende del número de sumandos en esta suma.

Teorema 18 (criterio de Dirichlet). *Sea dada la serie*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{35.84}$$
tal que la sucesión $\{a_n\}$ *tiende a cero monótonamente y la sucesión de sumas parciales* $\{B_n\}$ *de la serie*
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b_n \in C, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
es acotada, entonces la serie (35.78) *converge.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud de la acotación de la sucesión $\{B_n\}$ existe un número $B > 0$ tal que $|B_n| \leqslant B$ para todos los $n = 1, 2, \ldots$. De aquí se deduce que para cualquier $n = 2, 3, \ldots$ y cualquier entero $p \geqslant 0$
$$\left| \sum_{i=n}^{n+p} b_i \right| = |B_{n+p} - B_{n-1}| \leqslant |B_{n+p}| + |B_{n-1}| \leqslant 2B. \tag{35.85}$$

Sea dado $\varepsilon > 0$. De la condición $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ se deduce la existencia de un número n_ε tal que para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad
$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{6B}. \tag{35.86}$$

Ahora aplicando la desigualdad de Abel (35.83) a la suma $\sum\limits_{i=n}^{n+p} a_i b_i$ donde $n \geqslant n_\varepsilon$ y prestando atención a las desigualdades (35.85) y (35.86) obtendremos:
$$\left| \sum_{i=n}^{n+p} a_i b_i \right| \leqslant 2B(|a_n| + 2|a_{n+p}|) < \varepsilon,$$
de aquí, por el criterio de Cauchy se deduce que la serie (35.84) converge. $\square$

En calidad de ejemplo analicemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{n}. \tag{35.87}$$

Ante todo, si $\alpha \neq 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k\alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} k\alpha}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \left[\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\alpha - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\alpha\right]}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \frac{n+1}{2} \alpha \operatorname{sen} \frac{n}{2} \alpha}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}$$

y por esto

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k\alpha \right| \leqslant \frac{1}{\left|\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}\right|}.$$

Si $\alpha = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, entonces todos los términos de las sumas $\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k\alpha$ son iguales a cero, por esto, estas sumas para cualquier n son iguales a cero y por consiguiente acotadas. De esta forma para todos los α, las sumas $\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k\alpha$ son acotadas.

Por otro lado la sucesión $\{1/n\}$ decrece monótonamente y tiende a cero, por esto por el criterio de Dirichlet la serie (35.87) converge para cualquier α.

Observemos que el criterio de Leibniz (véase el p. 35.9) se deduce del criterio de Dirichlet. En efecto, si en la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \tag{35.88}$$

donde $a_n \geqslant a_{n+1} > 0$, hacemos $b_n = (-1)^n$, entonces, evidentemente, las sumas $b_1 + \ldots + b_n$, $n = 1, 2, \ldots$, son iguales a cero o a la unidad y por esto son acotadas; en este caso en virtud del criterio de Dirichlet la serie (35.88) converge.

De la desigualdad de Abel (35.88) se puede obtener otro criterio más de convergencia de una serie.

Teorema 19 (criterio de Abel). *Si la sucesión $\{a_n\}$ es monótona y acotada, y la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n \in C$, $n = 1, 2, \ldots$, *converge, entonces la serie* (35.78) *también converge.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud de la acotación de la sucesión $\{a_n\}$ existe un número $M > 0$ tal que para todos los $n = 1, 2, \ldots$ se cumple la desigualdad $|a_n| \leqslant M$.

Sea ahora dado $\varepsilon > 0$. De la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ se deduce la existencia de un número n_ε tal que para todos los números $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los enteros $p \geqslant 0$ se cumple la desigualdad $\left| \sum_{k=0}^{n} b_{n+k} \right| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Por esto para todos los números $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los enteros $p \geqslant 0$ por el lema 4, es válida la desigualdad

$$\left| \sum_{k=0}^{p} a_{n+k} b_{n+k} \right| < \frac{\varepsilon}{3M} (|a_n| + 2|a_{n+p}|) < \varepsilon.$$

Por el criterio de Cauchy de convergencia de las series esto significa que la serie (35.84) converge. □

Señalemos que el teorema 19 puede ser obtenido del teorema 18. En efecto, si se cumplen las condiciones del teorema 19, entonces por la monotonía y la acotación de la secesión $\{a_n\}$ existe el límite finito $a = \lim_{n \to \infty} a_n$ y por consiguiente la sucesión $c_n = a_n - a$, $n = 1, 2, \ldots$, tiende a cero monótonamente. La sucesión de las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es acotada ya que esta serie converge por condición. Por esto, según el teorema 18 la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n$ converge. Pero $c_n b_n = a_n b_n - a b_n$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a b_n = a \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también converge. Por consiguiente, como suma de dos series convergentes, converge también la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n + a \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Ejemplo. Investigamos la convergencia de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\alpha \cos \frac{\pi}{n}}{\ln \ln n}. \tag{35.89}$$

Observemos que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\ln \ln n}$ converge por el criterio de Dirichlet: la sucesión $\frac{1}{\ln \ln n}$ tiende a cero monótonamente y la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{sen} n\alpha$ es acotada (véase el ejemplo anterior). La sucesión $\cos\dfrac{\pi}{n}$, $n = 2,$ $3, \ldots$, es monótona, por esto, según el criterio de Abel la serie (35.89) converge para todos los α.

35.14.*. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LOS RESTOS DE LAS SERIES CONVERGENTES Y DE LAS SUMAS PARCIALES DE ALGUNAS SERIES DIVERGENTES

De forma semejante a las integrales impropias, para las series es necesario a veces aclarar no sólo la cuestión de su convergencia, sino en el caso de convergencia de la serie estimar su velocidad, y en el caso de divergencia aclarar el carácter del comportamiento de sus sumas parciales cuando crece su número.

En el caso de las series de tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

donde f es una función decreciente no negativa, para problemas semejantes a veces se logra obtener respuesta con ayuda del método aplicado en la demostración del criterio integral de convergencia de las series (véase el p. 35.7). En efecto, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge, y por consiguiente converge la integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$, entonces, denotando como siempre, por r_n el resto de la serie analizada obtendremos la desigualdad

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} f(x)dx = \int_{n}^{+\infty} f(x)dx. \qquad (35.90)$$

Esta es la estimación buscada del resto de la serie que muestra que cuando $n \to \infty$ este resto decrece no más lento que la integral $\int_n^{+\infty} f(x)dx$.

Análogamente se obtiene la estimación inferior para el resto de la serie:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \geqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} f(x)dx = \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx. \qquad (35.91)$$

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ diverge y por consiguiente diverge también la integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$, entonces, observando que

$$0 \leqslant f(k) - \int_{k}^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k) - f(k+1)$$

y sumando estas desigualdades por k desde 1 hasta n, obtendremos:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n+1} f(x)dx \leqslant f(1) - f(n+1) < f(1).$$

De las desigualdades anteriores se deduce que la sucesión

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n+1} f(x)dx, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

crece monótonamente y es acotada superiormente y por eso tiende a un límite finito. Dicho de otro modo, existe una constante c tal que

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n+1} f(x)dx\right] = c. \tag{35.92}$$

Esta igualdad se puede transcribir en la forma

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_{1}^{n+1} f(x)dx + c + \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{35.93}$$

donde $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Ella muestra que con exactitud hasta una sucesión infinitesimal las sumas parciales de la serie divergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ crecen, así como $\int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx + c$ donde c es cierta constante.

Ejemplos. 1. Analicemos la serie armónica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que suponiendo $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geqslant 1$, escribiremos en la forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.

La función $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geqslant 1$ satisface las condiciones del teorema 10 y por cuanto $\int\limits_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$, entonces de lo demostrado se deduce que existe una constante C tal que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln(n+1) + C + \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

donde $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Esta constante C se llama *constante de Euler*. Observando que $\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 0$ cuando $n \to \infty$ en la fórmula obtenida se puede sustituir $\ln(n+1)$ por $\ln n$ (además, naturalmente, varía la sucesión ε_n, pero ésta permanece siendo una sucesión infinitesimal)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{35.94}$$

Es curioso observar que hasta ahora no se logra aclarar la naturaleza de la constante euleriana en el sentido que no se conoce incluso si es un número racional o no.

De la fórmula (35.94) evidentemente se deduce la igualdad asintótica

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \sim \ln n, \quad n \to \infty.$$

2. Analicemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $0 < \alpha < 1$.

En este caso tomemos la función $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, $x \geqslant 1$, entonces

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha}.$$

De (35.92) y (35.93) para el caso dado se deduce que existe una constante c_{α}, tal que

$$1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha}} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha} + c_{\alpha} + \varepsilon_n,$$

donde $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$. De aquí obtenemos la igualdad asintótica

$$1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha}} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

3. Analicemos la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 1$.

Tomando de nuevo en calidad de función f la función $\frac{1}{x^{\alpha}}$ y observando que

$$\int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha - 1}}$$

en virtud de las fórmulas (35.90) y (35.91) obtendremos:

$$\frac{1}{(\alpha - 1)(n+1)^{\alpha - 1}} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha - 1}},$$

de donde

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \sim \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha - 1}}.$$

4. Analicemos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{35.95}$$

Ya sabemos que esta serie converge y que su límite es igual al número (véase el ejemplo 6 en el p. 4.9):

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{35.96}$$

Estimemos el resto r_n de esta serie

$$0 = r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right] <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{1 - \dfrac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n!(n+1)^2} < \frac{1}{n!n}. \tag{35.97}$$

Por consiguiente si s_n es una suma parcial de la serie (35.96), entonces

$$e = s_n + r_n \tag{35.98}$$

y por la desigualdad (35.97) es válida la siguiente estimación del error al cambiar e por s_n:

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n!n}.$$

De esta forma el número e se puede calcular aproximadamente en forma de la suma

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!},$$

además, la estimación obtenida señala la exactitud de las aproximaciones obtenidas.

OBSERVACIÓN. Si hacemos

$$\theta_n \stackrel{\text{def}}{=} r_n n!n,$$

entonces de (35.97) obtendremos

$$0 < \theta_n < 1,$$

y por consiguiente en virtud de (35.98)

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}, \quad 0 < \theta_n < 1, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{35.99}$$

De aquí se deduce fácilmente que el número e es irracional. En efecto si e fuera un número racional: $e = \dfrac{m}{n}$, $m \in N$, $n \in N$, entonces por (35.99) sería válida la igualdad

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n},$$

de donde

$$n!m - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) n!n = \theta_n.$$

Pero esta igualdad es imposible ya que a la izquierda aparece un número entero y a la derecha θ_n, donde $0 < \theta_n < 1$. □

35.15. SOBRE LA SUMABILIDAD DE SERIES POR EL MÉTODO DE LAS MEDIAS ARITMÉTICAS

A veces tiene interés el estudio de las series divergentes, es decir, de las series cuyas sumas parciales no tienden a un límite finito. Como ya vimos series semejantes dan la posibilidad de obtener fórmulas asintóticas (véanse el p. 35.14* y también el p. 37.10*). El estudio de las series divergentes es conveniente en particular en el caso cuando para ellas se logra definir con el método adecuado el concepto de suma. Los distintos métodos de definición de las sumas de series se llaman *métodos de sumación de series*. El método de sumación de una serie se llama regular si para una serie convergente su suma definida por este método coincide con su suma ordinaria (en este caso se dice: el método regular suma a la serie convergente a su suma).

Analicemos el así llamado método de sumación de la serie con las medias aritméticas de sus sumas parciales. Sea dada la serie

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

y sea

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

una sucesión de sus sumas parciales. Denotemos por σ_n la media aritmética de los primeros n términos de esta sucesión

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}.$$

Definición 5. *Una serie se llama sumable por el método de las medias aritméticas al número σ, si la sucesión $\{\sigma_n\}$ de las medias aritméticas de sus sumas parciales converge a σ:*

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \sigma.$$

El método de sumación con las medias aritméticas es un método regular de sumación, pues, del hecho de que cierta sucesión $\{x_n\}$ tiene límite se deduce que la sucesión compuesta por las medias aritméticas de sus primeros n términos

$$\left\{\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right\}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

tiene ese mismo límite (véase el ejemplo 5 en el p. 3.1).

Por otro lado, existen series divergentes que se suman por el método de las medias aritméticas. Tal ejemplo es la serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \tag{35.100}$$

En este caso $s_{2k} = 0$, $s_{2k-1} = 1$, $\sigma_{2k} = \frac{1}{2}$, $\sigma_{2k-1} = \frac{k}{2k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Por consiguiente, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$, es decir, la serie (35.100) se suma por el método de las medias aritméticas.

Con la aplicación de la sumación de las series por el método de las medias aritméticas nos encontraremos en el p. 55.6.

Ejercicios. Investíguense la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes series:

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{-n}}{n^3+1}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n \ln n}{n^2}$.

16. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right)$.

22. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\frac{n+1}{n-1}$.

23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln\frac{n-1}{n+1}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}\right]$.

25. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left[1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}\right]$.

Problema 23 (criterio de Du Bois Reymond*) de convergencia de una serie). Demuéstrese que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ (a_n y b_n son números complejos) converge, si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente.

---

*) P. Du Bois Reymond (1831 — 1899), matemático alemán.

Problema 24 (criterio de Dedekind de convergencia de una serie). Demuéstrese que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ (a_n y b_n son números complejos) converge, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_{n+1})$ converge absolutamente, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son acotadas.

§ 36. SUCESIONES FUNCIONALES Y SERIES DE FUNCIONES

36.1. CONVERGENCIA DE SUCESIONES FUNCIONALES Y SERIES DE FUNCIONES

En el presente párrafo analizaremos las sucesiones y series cuyos términos son ciertas funciones de valores complejos, es decir, las sucesiones

$$f_n(x) \in C, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{36.1}$$

y respectivamente las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad u_n(x) \in C, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{36.2}$$

Para cada valor fijo del argumento x estas sucesiones y series, evidentemente, representan las sucesiones y series numéricas y analizadas.

Sea X cierto conjunto de elementos, en particular, el conjunto de puntos de una recta, de un plano de un espacio n-dimensional o en general de elementos de naturaleza arbitraria y sea (36.1), una sucesión de funciones que están definidas sobre el conjunto X y cuyos valores son en general números complejos.

Definición 1. *La sucesión* (36.1) *se llama acotada sobre el conjunto X, si existe una constante $M > 0$ tal que para todos los $x \in X$ y todos los $n = 1, 2, \ldots$ se cumplen las desigualdades*

$$|f_n(x)| \leqslant M.$$

(A veces en este caso la sucesión (36.1) se llama también *uniformemente acotada.*)

Definición 2. *La sucesión* (36.1) *se llama decreciente (creciente) sobre el conjunto X si para todos los $x \in X$ y todos los $n = 1, 2, \ldots$ se cumplen las desigualdades*

$$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$$

(respectivamente, si para todos los $x \in X$ y todos los $n = 1, 2, \ldots$ se cumplen las desigualdades

$$f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)).$$

Esta definición, evidentemente, supone que las funciones $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, toman valores reales.

Definicion 3. *La sucesión* (36.1) *se llama convergente en el punto*[*] $x_0 \in X$, *si la sucesión numérica* $\{f_n(x_0)\}$ *converge.*

---

[*] Llamamos puntos a los elementos del conjunto X.

La sucesión (36.1) *se llama convergente sobre el conjunto X si converge en cada punto del conjunto X.*

Si $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in X$, *entonces se dice que la sucesión* (36.1) *converge a la función* $f(x)$, $x \in X$.

Una definición análoga se puede dar también para la serie (36.2).

Definición 3'. *La serie* (36.2) *se llama convergente en el punto $x_0 \in X$ si converge la serie numérica* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

La serie (36.2) *se llama convergente sobre el conjunto X si converge en cada punto de este conjunto.*

Definición 4. *La serie* (36.2) *se llama convergente absolutamente sobre el conjunto X si sobre el conjunto X converge la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$. De forma semejante al caso de las series numéricas, la suma

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

se llama suma parcial n-ésima de la serie (36.2), el límite de las sumas parciales de la serie (36.2) convergente sobre el conjunto X se llama su *suma* $s(x)$

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x).$$

La serie

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \tag{36.3}$$

se llama *resto* n-ésimo *de la serie* (36.2). El resto de la serie converge sobre X si y sólo si sobre X converge la misma serie (36.2). Si en este caso la suma del resto de la serie la denotamos por $r_n(x)$, entonces

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x).$$

Como en el caso de las series numéricas, por definición, cada serie de funciones es un par de sucesiones $\{u_n(x)\}$ y $\{s_n(x)\}$ donde $u_n(x)$ son sus términos y $s_n(x)$, sus sumas parciales

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Además para cada sucesión funcional (36.1) existe la serie (36.2) para la cual es una sucesión de sus sumas parciales. Los términos de esta serie se definen unívocamente

$$u_1(x) = f_1(x), \quad u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \quad n = 2, 3, \ldots$$

Esta circunstancia da la posibilidad de parafrasear cualquier teorema, demostrado para las series de funciones, en el teorema correspondiente para las sucesiones funcionales y viceversa. Utilizaremos repetidas veces esta circunstancia.

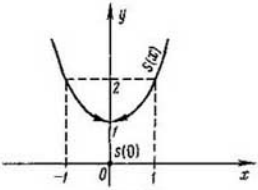


FIG. 148

Ejemplos 1. Sea dada la serie

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, \tag{36.4}$$

z es un número complejo. Investiguemos su convergencia absoluta, es decir, la convergencia de la seire con término n-ésimo $u_n = \frac{|z|^n}{n!}$. Aplicando el criterio de D'Alembert obtendremos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$$

para cualquier complejo z. De esta forma la serie (36.4) converge absolutamente y, entonces, sencillamente converge para cualquier complejo z o, como se dice comúnmente, sobre todo el plano complejo.

2. Estudiemos la convergencia de la serie

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \ldots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \ldots, \tag{36.5}$$

x es número real. Esta serie converge para todos los x. En efecto, si $x \neq 0$, entonces tenemos la suma de una progresión geométrica con denominador

$$q = \frac{1}{1+x^2}, \quad 0 < q < 1.$$

Y en este caso la suma $s(x)$ de la serie (36.5) se calcula fácilmente:

$$s(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2.$$

Si $x = 0$, entonces todos los términos de la serie (36.5) son iguales a cero, por esto evidentemente la serie converge y $s(0) = 0$.

De esta forma

$$(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x = 0. \\ 1 + x^2 & \text{para} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

La gráfica de la función $s(x)$ está representada en la fig. 148.

Como se ve, a pesar de que todos los términos de la serie (36.5) son funciones continuas y la serie converge en todos los puntos del eje real, su suma es una función discontinua. Por consiguiente en el caso de las series convergentes (36.2) cuyos términos son funciones reales continuas $u_n(x)$ su suma $s(x)$, en general, no es continua, es decir

$$\lim_{x \to x_0} s(x) \neq s(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$$

o lo que es lo mismo

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u(x) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x).$$

De esta forma, el límite de la suma de un número infinito de sumandos no es igual obligatoriamente a la suma de sus límites.

La serie analizada (36.5) muestra, cómo en procesos límites (la progresión geométrica) de funciones continuas sencillas surgen funciones discontinuas que son de naturaleza mucho más compleja.

En el futuro aclararemos las condiciones, para las cuales se puede garantizar la continuidad de la suma de una serie convergente de funciones continuas.

Ejercicios.. Investíguense la convergencia y la convergencia absoluta de las series:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$ 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \operatorname{sen} nx}{1+n^2}$

36.2. CONVERGENCIA UNIFORME DE LAS SUCESIONES FUNCIONALES

Definición 5. *Sean dadas la sucesión de funciones* (36.1) *y la función f, definidas sobre el conjunto X. Diremos que la sucesión señalada converge a la función f uniformemente sobre el conjunto X si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número n_ε tal que si $n \geqslant n_\varepsilon$ entonces para todos los $x \in X$ se cumple la desigualdad*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{36.6}$$

La sucesión (36.1) *se llama convergente uniformemente sobre el conjunto X, si existe una función f a la cual ella uniformemente converge sobre X.*

Es evidente que si la sucesión (36.1) converge uniformemente a la función f sobre el conjunto X, entonces también converge sencillamente a esta función sobre X.

Si la sucesión $\{f_n\}$ converge sobre el conjunto X a la función f, entonces escribiremos esto simbólicamente de la siguiente forma

$$f_n \underset{X}{\to} f.$$

Si esta sucesión converge uniformemente sobre X a la función f, entonces escribiremos

$$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f.$$

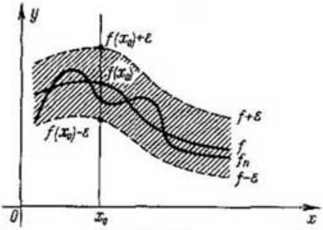


FIG. 149

Observemos que si la sucesión (36.1) converge sencillamente a la función f sobre el conjunto X, entonces esto significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier $x \in X$ existe el número $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ dependiente tanto de ε, como de x, tal que para todos los números $n \geqslant n_0$ tiene lugar la desigualdad (36.6).

La esencia de la convergencia uniforme de una sucesión de funciones consiste en que para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede elegir un número n_ε dependiente sólo del ε dado y no dependiente de la elección del punto $x \in X$, tal que para $n \geqslant n_\varepsilon$ la desigualdad (36.6) se cumplirá en todos los puntos sobre el conjunto X, es decir, "las gráficas" de las funciones f_n estarán situadas en la "ε-franja" que rodea a la gráfica de la función f (fig. 149).

De esta forma, en el caso de la convergencia uniforme para cualquier $\varepsilon > 0$, para todos los n suficientemente grandes (precisamente para $n \geqslant n_\varepsilon$), los valores de las funciones f_n aproximan a la función f con un error menor que ε, en todos los puntos del conjunto X.

Escribamos, para mayor claridad, las definiciones de sucesiones convergentes y convergentes uniformemente sobre el conjunto X con ayuda de los símbolos de existencia y universalidad:

$$f_n \underset{X}{\to} f \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in X)(\exists n_\varepsilon)(\forall n \geqslant n_\varepsilon) |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$

$$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon)(\forall x \in X)(\forall n \geqslant n_\varepsilon): |f_n/(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

En esta escritura una definición se diferencia de la otra por la permutación de los símbolos $(\forall x \in X)$ y $(\exists n_\varepsilon)$.

Ejemplos. 1. La sucesión

$$1, x, x^2, \ldots, x^n \ldots \tag{36.7}$$

sobre el segmento $[0, q]$, $0 < q < 1$, converge uniformemente a la función idénticamente igual a cero. En efecto, si $0 \leqslant x \leqslant q$, entonces

$$0 \leqslant x^n \leqslant q^n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{36.8}$$

Por cuanto $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ fijo existe un n_ε tal que

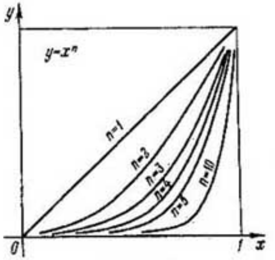


FIG. 150

$q^n < \varepsilon$ para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$. En virtud de la desigualdad (36.8) $0 \leqslant x^n < \varepsilon$ para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los $x \in [0, q]$.

2. La misma sucesión (36.7) sobre el intervalo semiabierto $[0, 1)$ también, evidentemente converge a la función idénticamente igual a cero: $\lim\limits_{n \to \infty} x^n = 0$, $0 \leqslant x < 1$. No obstante en este caso la convergencia ya no es uniforme (fig. 150). En efecto, si la sucesión x^n, $n = 1, 2, \ldots$, convergiera uniformemente sobre el intervalo semiabierto $[0, 1)$ a cierta función, entonces también convergería sencillamente a esta función. Por esto la sucesión (36.7) puede, sobre el intervalo semiabierto $[0, 1)$, uniformemente converger, sólo a la función igual a cero en todos los puntos de este intervalo semiabierto.

Observemos que para cualquier n natural fijo $\lim\limits_{x \to 1} x^n = 1$. Por consiguiente cualquiera que sea ε, $0 < \varepsilon < 1$, para un n fijo se halla un x_ε, $0 < x_\varepsilon < 1$, tal que $x_\varepsilon^n \geqslant \varepsilon$ (por ejemplo, para $x_\varepsilon = \sqrt[n]{\varepsilon}$ tendremos $x_\varepsilon^n = \varepsilon$). Por esto para un ε fijo, $0 < \varepsilon < 1$, no existe un número N tal que para todos los $n \geqslant N$ y todos los $x \in [0, 1)$ se cumplirá la desigualdad (36.6) cuando $f_n(x) = x^n$, $f(x) = 0$, $0 \leqslant x < 1$. Más aún, cualquiera que sea N que tomemos, para c a d a $n \geqslant N$ se encuentra un $x \in [0, 1)$ tal que para él se cumplirá la desigualdad contraria a la desigualdad (36.6), es decir,

$$|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$$

(en calidad de x concreto aquí podemos tomar por ejemplo, x_ε).

Así la convergencia no uniforme de la sucesión (36.7) sobre el intervalo semiabierto $[0, 1)$ está demostrada. Observemos que de los razonamientos realizados se deduce que la sucesión (36.7) tampoco converge uniformemente sobre cualquier intervalo del tipo $(r, 1)$ donde $0 \leqslant r < 1$, en particular, sobre el intervalo $(0, 1)$.

Se debe prestar atención a que si la sucesión de las funciones $f_n(x)$ definidas sobre el conjunto X no converge uniformemente sobre cierto subconjunto $X_0 \subset X$, entonces a ciencia cierta no converge uniformemente tampoco sobre el propio conjunto X; si las condiciones de la definición 1 no se cumplen para todos los puntos $x \in X_0$ entonces éstas, a ciencia cierta no se cumplen para todos los puntos del conjunto X. Al mismo tiempo, si la sucesión de funciones converge uniformemente sobre determinado conjunto, entonces tanto mucho converge uniformemente sobre cada uno de sus subconjuntos.

De aquí se deduce, por ejemplo, que la sucesión (36.7) convergente sobre el segmento $[0, 1]$ a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{cuando} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 1 & \text{cuando} \quad x = 1, \end{cases}$$

no converge sobre este uniformemente ya que no converge uniformemente sobre el intervalo semiabierto $[0, 1)$.

Pasemos a la descripción de los criterios de convergencia uniforme. Para la función f y la sucesión de funciones $\{f_n\}$ dadas sobre cierto conjunto X analizaremos la sucessión de números (finitos o infinitos)

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{36.9}$$

pertenecientes, en general, al conjunto ampliado de los números reales $\overline{R}$ (véase el p. 2.5) y su límite (véase el p. 3.2).

Si la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre el conjunto X, hacia la función f, entonces existe un número n_0, tal que, para todos los $n \geqslant n_0$ las cotas superiores (36.9) son finitas. En efecto, si $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$, entonces por la definición de convergencia uniforme, para cualquier $\varepsilon > 0$, por ejemplo, para $\varepsilon = 1$, existe un número n_0, tal que, para todos los $n \geqslant n_0$ y todos los $x \in X$ se cumple la desigualdad

$$|f_n(x) - f(x)| < 1$$

y por lo tanto, también la desigualdad

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant 1.$$

Por esto, para $n \geqslant n_0$, todas las cotas superiores (36.9) son finitas.

Teorema 1. *Una sucesión de funciones $\{f_n\}$, definidas sobre el conjunto X, converge uniformemente sobre este conjunto, hacia la función f, si y sólo si*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{36.10}$$

Corolario. *Para que la sucesión $\{f_n\}$ converja uniformemente hacia la función f sobre el conjunto X, es necesario y suficiente, que se encuentre una sucesión numérica $\{a_n\}$ tal que*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \quad a_n \geqslant 0, \tag{36.11}$$

y exista un número n_0 tal que, para todos los $n \geqslant n_0$ y todos los $x \in X$, se cumpla la desigualdad

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n. \tag{36.12}$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Si se cumplen las condiciones de la definición 5, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un número n_ε tal que, para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los $x \in X$, se cumple la desigualdad

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando el n_ε *señalado, para todos los* $n \geqslant n_\varepsilon$, tendremos

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

y esto, por la definición de límite de una sucesión numérica, significa que se cumple la condición (36.10).

Por el contrario, si la condición (36.10) se cumple, entonces por la definición de límite finito para una sucesión de elementos de $\overline{R}$, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número n_ε tal que para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

De aquí se deduce que, para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y para todos los $x \in X$, es válida la desigualdad

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

es decir, se cumplen las condiciones de la definición 5. □

Debido a que casi todos los términos de la sucesión de cotas superiores (36.9) para las sucesiones de funciones uniformemente convergentes son finitos, el criterio (36.10) en esencia, reduce el concepto de convergencia uniforme de una sucesión funcional, al concepto de convergencia de una sucesión numérica.

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Si $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$, entonces por lo dicho anteriormente, existe un número n_0 tal que para todos los $n \geqslant n_0$ todas las cotas superiores (36.9) son finitas. Por esto, en calidad de sucesión $\{a_n\}$ podemos tomar,

$$a_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|, \quad n = n_0, n_0 + 1, \ldots,$$

(evidentemente $a_n \geqslant 0$), eligiendo los primeros términos, $a_1, \ldots, a_{n_0 - 1}$, de una forma arbitraria. Entonces para $n \geqslant n_0$, la condición (36.12) se cumple de una forma evidente, y según (36.10), tendremos $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Si existe la sucesión numérica $\{a_n\}$, que satisface las condiciones (36.11) y (36.12), entonces por (36.12) para cualquier $n \geqslant n_0$ se cumple la desigualdad

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n.$$

Pasando en ella al límite cuando $n \to \infty$, obtendremos por (36.11), que

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

El cumplimiento de esta condición significa (véase el teorema 1) la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n\}$ a la función f sobre el conjunto X. □

Ejemplos. 3. Demostremos otra vez más con ayuda de la condición (36.10), que la sucesión x^n, $n = 1, 2, \ldots$, no converge uniformemente sobre el intervalo semiabierto $[0, 1)$. Ya que el límite de la sucesión señalada sobre el intervalo se-

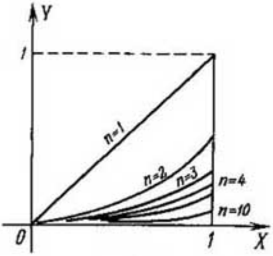


FIG. 151

miabierto analizado es igual a cero, entonces la afirmación hecha se deduce inmediatamente de la igualdad evidente (para cualquier $n = 1, 2, \ldots,$ dado), $\sup\limits_{x \in [0,1)} |x^n - 0| = 1$, de la cual se ve claramente que la condición (36.10) de convergencia uniforme, en el caso dado, no se cumple.

4. La sucesión $f_n(x) = \dfrac{1}{n}x^n$, $n = 1, 2, \ldots, 0 \leqslant x \leqslant 1$, converge uniformemente sobre el segmento $[0, 1]$ (fig. 151).

En efecto, ya que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ y $0 < \dfrac{1}{n}x^n \leqslant \dfrac{1}{n}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots,$ entonces la afirmación expresada se deduce del corolario del teorema 1.

Enunciemos y demostremos el criterio de convergencia uniforme de una sucesión, habitualmente llamado criterio de Cauchy.

Teorema 2 (criterio de Cauchy de convergencia uniforme de sucesiones). *Para que la sucesión de funciones f_n, $n = 1, 2, \ldots$, definidas sobre un conjunto X, converja uniformemente sobre este conjunto, es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista un número n_ε tal que para todos los números $n \geqslant n_\varepsilon$, todos los enteros $p \geqslant 0$ y todos los puntos $x \in X$ se cumple la desigualdad*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \tag{36.13}$$

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Supongamos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre el conjunto X. Entonces, por la definición de convergencia uniforme, existe una función f tal que, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número n_ε tal que, para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los $x \in X$ se cumple la desigualdad

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por esto, si $n \geqslant n_\varepsilon$ y $p \geqslant 0$, entonces para todas las $x \in X$ obtendremos

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Si se cumple la condición (36.13), entonces para cualquier $x \in X$ dado, la sucesión

$$f_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{36.14}$$

es una sucesión numérica que satisface el criterio de Cauchy (véanse el p. 3.7 y el p. 23.3), y por esto converge.

Denotemos el límite de la sucesión (36.14) sobre el conjunto X por $f(x)$. Mostremos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a la función f sobre el conjunto X. En efecto, por la condición (36.13) para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un n_ε tal que, para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$, todos los enteros $p \geqslant 0$ y todas las $x \in X$, es válida la desigualdad

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{36.15}$$

Observando que $\lim\limits_{p \to \infty} f_{n+p}(x) = f(x)$, pasemos el límite en la desigualdad (36.15) cuando $p \to \infty$, entonces para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los $x \in X$ obtendremos

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

y esto significa que $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$. □

Para concluir, señalemos dos propiedades de las sucesiones uniformemente convergentes.

1°. *Si las sucesiones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen uniformemente a las funciones f y g, respectivamente, sobre el conjunto X, entonces cualquier combinación lineal $\{\lambda f_n + \mu g_n\}$, $\lambda \in C$, $\mu \in C$, de las sucesiones dadas también converge uniformemente sobre este conjunto a la misma combinación lineal de las funciones límites, es decir, a $\lambda f + \mu g$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\lambda = \mu = 0$, entonces la afirmación es evidente. Sea al menos uno de los números λ ó μ diferente de cero, es decir, $|\lambda| + |\mu| > 0$. Fijemos arbitrariamente $\varepsilon > 0$. En virtud de las condiciones $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$ y $g_n \underset{X}{\rightrightarrows} g$, existe un número n_0, tal que, para todos los $n \geqslant n_0$ y todos los $x \in X$, se cumplen las desigualdades

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|}, \quad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|}$$

y por esto, también la desigualdad

$$\begin{aligned} |[\lambda f_n(x) + \mu g_n(x)] - [\lambda f(x) + \mu g(x)]| &\leqslant \\ \leqslant |\lambda|\,|f_n(x) - f(x)| + |\mu|\,|g_n(x) - g(x)| &< \\ < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} + |\mu| \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Según la definición de convergencia uniforme, esto significa que $\lambda f_n + \mu g_n \underset{X}{\rightrightarrows} \lambda f + \mu g$. □

2°. *Si la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre el conjunto X a la función f, y la función g es acotada sobre este conjunto, entonces la sucesión $\{gf_n\}$ también converge uniformemente sobre X a la función gf.*

DEMOSTRACIÓN. La acotación de la función g sobre el conjunto X significa que existe un $M > 0$ tal que, para todas las $x \in X$ se cumple la desigualdad $|g(x)| \leqslant M$. En virtud de la convergencia uniforme sobre el conjunto X de la sucesión $\{f_n\}$ a la función f, existen un número n_0 tal que, para todos los $n \geqslant n_0$ y todos los $x \in X$, se cumple la desigualdad

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{M},$$

y por esto también la desigualdad

$$|g(x)f_n(x) - g(x)f(x)| = |g(x)|\,|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Esto significa que $gf_n \underset{X}{\rightrightarrows} gf$. □

36.3. SERIES DE FUNCIONES UNIFORMEMENTE CONVERGENTES

Para las series, naturalmente, también se puede introducir el concepto de convergencia uniforme.

Definición 6. *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{36.16}$$

cuyos términos son funciones, definidas sobre el conjunto X, se llama uniformemente convergente sobre este conjunto, si la sucesión de sus sumas parciales converge uniformemente sobre X.

De esta forma, la convergencia uniforme de la serie (36.16) significa la existencia de una función $s(x)$ tal que

$$s_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} s(x) \tag{36.17}$$

(aquí, como siempre $s_n(x)$ es la suma parcial de orden n de la serie (36.16), $n = 1, 2, \ldots$).

Ya que de (36.17) se deduce que $s_n(x) \to s(x)$ sobre X, entonces $s(x)$ es la suma de la serie (36.16).

Hagamos

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x).$$

Entonces $s(x) - s_n(x) = r_n(x)$ y la condición (36.17) para la serie convergente sobre X se puede transcribir en la forma equivalente:

$$r_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0, \tag{36.18}$$

de donde en virtud de la equivalencia de la definición 5 de convergencia uniforme de una sucesión de funciones y la condición (36.10) se deduce que *para que la serie* (36.16) *convergente sobre X converja uniformemente sobre el conjunto X, es necesario y suficiente que*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |r_n(x)| = 0. \tag{36.19}$$

De esta forma, de la convergencia uniforme de la serie, en particular, se deriva que a partir de un cierto número las cotas superiores

$$\sup_{x \in X} |r_n(x)|$$

son finitas, y la condición (36.19) reduce el concepto de convergencia uniforme de la serie al concepto de tendencia a cero de la sucesión numérica de estas cotas superiores.

Señalemos una propiedad esencial de las series uniformemente convergentes.

Teorema 3 (condición necesaria de la convergencia uniforme de una serie). *Si la serie* (36.16) *converge uniformemente sobre el conjunto X, entonces la sucesión de sus términos $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$; tiende hacia cero uniformemente sobre X, es decir,*

$$u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0.$$

De forma breve esta propiedad se expresa de la forma siguiente: *el término general de una serie uniformemente convergente tiende uniformemente a cero.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la serie (36.16) converge uniformemente sobre el conjunto X. Denotemos sus sumas parciales, como es usual, por $s_n(x)$, y su suma por $s(x)$, $x \in X$. Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número n_ε tal que para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los $x \in X$ se cumple la desigualdad

$$|s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por esto para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los $x \in X$ es válida también la desigualdad

$$|u_{n+1}(x)| = |s_{n+1}(x) - s_n(x)| = |[s_{n+1}(x) - s(x)] + [s(x) - s_n(x)]| \leqslant$$
$$\leqslant |s_{n+1}(x) - s(x)| + |s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto significa la convergencia uniforme (sobre el conjunto X) a cero da la sucesión de términos de la serie uniformemente convergente sobre este conjunto. □

Señalemos que en virtud de la condición (36.10), el hecho de que el término general de la serie (36.16) tienda uniformemente a cero, significa que

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |u_n(x)| = 0.$$

Con ayuda del teorema 3, a veces se logra establecer que la serie analizada no converge uniformemente. Así, la serie cuyos términos forman una progresión geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ no converge uniformemente sobre el intervalo $(0, 1)$, ya que como esto fue mostrado en el p. 36.2 (véase el ejemplo 2), la sucesión x^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, de los términos de esta serie no converge uniformemente a cero sobre este intervalo. De aquí, a propósito, se deduce que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, donde z es un número complejo, tampoco converge uniformemente en el círculo unitario $|z| < 1$, puesto que no converge uniformemente ya sobre el subconjunto $(0, 1)$ de este círculo.

A menudo resulta útil el siguiente criterio suficiente de la convergencia uniforme.

Teorema 4 (criterio Weierstrass). *Sean dadas dos series: una de funciones* (36.16), *cuyos términos son las funciones* $u_n(x)$, *definidas sobre el conjunto* X, *y otra numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geqslant 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{36.20}$$

Si la serie (36.20) *converge y para cualquier* $x \in X$ *se cumple la desigualdad*

$$|u_n(x)| \leqslant a_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{36.21}$$

entonces la serie (36.16) *converge absoluta y uniformemente sobre el conjunto* X.

La convergencia absoluta de la serie (36.16) sobre X, en el caso de convergencia de la serie (36.20) se deduce inmediatamente, por el criterio de comparación, de la desigualdad (36.21). La convergencia uniforme de esta serie se deduce fácilmente del teorema 1 de este punto. Sin embargo, daremos su demostración directa.

Sea $s(x)$ la suma de la serie (36.21) y $s_n(x)$, su suma parcial. En virtud de la convergencia de la serie (36.20) para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número $n_\varepsilon > 0$ tal que para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad (véase (35.10)), $\sum\limits_{m=n}^{\infty} a_m < \varepsilon$. Pero entonces, cuando todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los $x \in X$, para los restos $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$ de la serie (36.16) (según lo demostrado anteriormente es absolutamente convergente, por lo tanto, simplemente convergente, por esto, la igualdad $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$, tiene sentido), tendremos

$$|s(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| = \left| \sum_{m=n}^{\infty} u_m(x) \right| \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} |u_m(x)| \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} a_m \leqslant \varepsilon.$$

Esto significa, por la definición 5, la convergencia absoluta de la serie (36.16) sobre el conjunto X. □

Señalemos que la serie (36.20) se llama serie que mayorea la serie (36.16).

En calidad de ejemplo tomemos otra vez la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, cuyos términos forman una progresión geométrica. Analicémosla en el círculo de radio r: $|z| \leqslant r$, donde $0 < r < 1$. Por cuanto la serie numérica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$ con términos no negativos que forman una sucesión geométrica infinitamente decreciente, converge y para los términos de la serie funcional dada es válida la estimación $|z^n| \leqslant r^n$, ya que $|z| \leqslant r$, entonces según el criterio de Weierstrass converge uniformemente en cualquier círculo $|z| \leqslant r < 1$. Al mismo tiempo, como fue demostrado anteriormente, esta serie no converge uniformemente en el círculo $|z| < 1$.

El criterio de Weierstrass da sólo las condiciones suficientes para la convergencia uniforme de una serie, las que de ningún modo son necesarias. Es muy fácil convencerse de esto para las series, en las cuales a medida que crecen los números de términos se alternan sus signos. En efecto, la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (como toda serie numérica convergente), puede ser analizada como una serie uniformemente convergente, por ejemplo, sobre todo el eje numérico R: sus términos $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ son funciones constantes sobre R. Al mismo tiempo toda serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, que satisface la condición $|u_n| \leqslant a_n$, es decir, en el caso dado la condición $\frac{1}{n} \leqslant a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, diverge según el criterio de comparación. De esta forma, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge uniformemente, y la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, que satisface las condiciones del criterio de Weierstrass, no existe.

Se puede mostrar que más aún, las condiciones del criterio de Weierstrass no son necesarias para la convergencia uniforme, incluso de las series cuyos términos son todos no negativos. Para convencerse de esto, citemos un ejemplo de una serie uniformemente convergente sobre el segmento $[0, 1]$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ con términos no negativos, para la cual tampoco existe la serie numérica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, que satisfaga la condición (36.21).

Definamos el término de la serie $u_n(x)$ de la forma siguiente: $u_n(x) = 0$ sobre los segmentos $\left[0, \frac{1}{n+1}\right]$ y $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $u_n\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}$ y la función $u_n(x)$ es lineal y continua sobre cada uno de los segmentos $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)\right]$ y $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right), \frac{1}{n}\right]$. Su gráfica está representada en la fig. 152.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformemente sobre el segmento $[0, 1]$. En efecto, si $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ es el resto de esta serie, $n = 1, 2, \ldots$, entonces para cualquier $x \in [0, 1]$, entre sus términos existe no más de uno, para el cual $u_k(x) \neq 0$, $k \geqslant n + 1$. En este caso, evidentemente, $0 \leqslant u_k(x) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n+1}$, por esto $0 \leqslant r_n(x) \leqslant \frac{1}{n+1}$ y, por lo tanto, $r_n(x) \underset{[0,1]}{\rightrightarrows} 0$, cuando $n \to \infty$, es decir, la serie analizada converge uniformemente sobre el segmento $[0, 1]$.

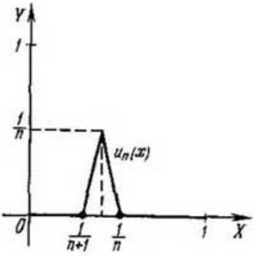


FIG. 152

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie numérica tal que, para todos los $x \in [0, 1]$, se cumple la desigualdad $0 \leqslant u_n(x) \leqslant a_n$, entonces

$$\frac{1}{n} = \max_{[0,\,1]} u_n(x) \leqslant a_n.$$

Por cuanto la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, entonces también diverge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. De esta forma, en el caso analizado, una serie numerica que satisfaga, con respecto a la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, las condiciones del criterio de Weierstrass, a ciencia cierta no existe.

Pasemos ahora a las condiciones de convergencia uniforme de una serie, que son simultáneamente necesarias y suficientes.

Observando que

$$s_{n+p}(x) - s_{n-1}(x) = \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x), \tag{36.22}$$

del teorema 2 obtenemos el siguiente criterio de convergencia uniforme.

Teorema 5 (criterio de Cauchy de convergencia uniforme de las series). *Para que la serie (36.16) converja uniformemente sobre el conjunto X, es necesario y suficiente, que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista un número n_ε tal que, para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$, todos los enteros $p \geqslant 0$ y todos los $x \in X$, se cumpla la desigualdad*

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon. \tag{36.23}$$

Es evidente, que del criterio de Cauchy de convergencia uniforme de una serie, se obtiene otra vez (si en (36.23) hacemos $p = 0$), el teorema 3, es decir, la condición necesaria para la convergencia de la serie (36.16).

Ejercicio 3. Aclárese, si la serie del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (a_n y z son números complejos), que tiene un número infinito de coeficientes diferentes de cero, puede converger uniformemente sobre todo el plano complejo.

Ejemplos. 1. Analicemos de nuevo la serie (véase el p. 36.1)

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \tag{36.4}$$

y mostremos que, cualquiera que sea el número $r > 0$, la serie (36.4) converge uniformemente en el círculo $|z| \leqslant r$.

Como ya hemos visto, la serie (36.4) converge para cualquier complejo z, en particular, para $z = r$, es decir, la serie numérica

$$1 + r + \frac{r^2}{2!} + \ldots + \frac{r^n}{n!} + \ldots$$

converge. Tomándola en calidad de serie de comparación (36.20) para la serie (36.4), cuando $|z| \leqslant r$, tenemos $\left|\frac{z^n}{n!}\right| \leqslant \frac{r^n}{n!}$. Por esto nuestra afirmación sobre la convergencia uniforme de la serie (36.4) se deduce directamente del teorema 4.

Mostremos que la serie (36.4) no converge uniformemente sobre todo el plano complejo. Esto se deduce del hecho de que en el caso dado, no se cumple la condición necesaria de la convergencia uniforme de una serie (véase el teorema 3). En efecto, para cualquier n_0 fijo

$$\lim_{|z| \to \infty} |z^{n_0}/n_0!| = +\infty. \tag{36.24}$$

Por esto, si $\varepsilon > 0$ es dado, entonces cualquiera que sea $n_0 > 0$ según (36.24), se puede elegir z_0 de tal forma que

$$|z_0^{n_0}/n_0!| > \varepsilon,$$

es decir, $z^n/n!$, no tiende uniformemente a cero sobre todo el plano complejo.

2. Investiguemos la convergencia uniforme de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} nx}{\sqrt{1 + n^2(1 + nx^2)}}, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{36.25}$$

Ante todo observemos que

$$\left|\frac{x \operatorname{sen} nx}{\sqrt{1 + n^2(1 + nx^2)}}\right| \leqslant \frac{|x|}{\sqrt{1 + n^2(1 + nx^2)}}. \tag{36.26}$$

Más adelante, $1 + nx^2 \geqslant 2|x|\sqrt{n}$ *), por esto

$$\frac{|x|}{\sqrt{1 + n^2(1 + nx^2)}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n(1 + n^2)}} \leqslant \frac{1}{2n^{3/2}}. \qquad (36.27)$$

Ya que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}$ converge, entonces por el criterio de Weierstrass debido a las desigualdades (36.26) y (36.27), la serie inicial (36.25) converge uniformemente sobre todo el eje real.

3. Analicemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^5x^2} \operatorname{sen} nx. \qquad (36.28)$$

Evidentemente, $|e^{-n^5x^2} \operatorname{sen} nx| \leqslant n|x|e^{-n^5x^2}$. Hallemos el máximo de la función

$$v_n(x) = n|x|e^{-n^5x^2}$$

para un n dado. La función $v_n(x)$ es par, por esto es suficiente analizar solamente el caso $x \geqslant 0$ (¿por qué?). La derivada $v_n'(x) = n(1 - 2n^5x^2)e^{-n^5x^2}$ se anula en el punto $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}n^{5/2}}$. Por cuanto $v_n(x) \geqslant 0$ para todas los x, $v_n(0) = 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} v_n(x) = 0$, entonces en el punto x_0 la función $v_n(x)$ tiene un máximo (¿por qué?).

Por esto

$$v_n(x) \leqslant v_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}n^{5/2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}n^{3/2}}e^{-1/2} < \frac{1}{n^{3/2}}$$

y ya que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, entonces por el criterio de Weierstrass, la serie (36.28) converge uniformemente sobre todo el eje real.

El método, utilizado para establecer la convergencia uniforme de la serie (36.28) (la investigación con respecto al extremo del módulo del término general o de su mayorante, con los métodos del cálculo diferencial), es suficientemente general y con frecuencia se utiliza en la práctica. Con este método se hubiera podido investigar la convergencia uniforme de la serie (36.25), sin embargo, el método utilizado más arriba en la investigación de esta serie conduce más rápidamente al objetivo.

4. Analicemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2 + n}. \qquad (36.29)$$

---

*) Hemos utilizado aquí desigualdad $2ab \leqslant a^2 + b^2$, la que se obtiene inmediatamente de la desigualdad evidente $(a - b)^2 \geqslant 0$.

Por el criterio de Leibniz (véase el p. 35.9), converge para cualquier x real, y como fue señalado allí mismo, el resto de la serie se estima por su primer término:

$$|r_n(x)| < \frac{1}{x^2+n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

De esto se deduce que

$$r_n(x) \rightrightarrows 0 \text{ cuando } -\infty < x < +\infty,$$

es decir, la serie (36.29) converge uniformemente sobre todo el eje real.

Mostremos que esta serie no converge absolutamente en todos los puntos. En efecto, escojamos para un número x dado, cualquier natural n_x tal que $x^2 \leqslant n_x$. Entonces para todos los $n \geqslant n_x$ se cumplirá la desigualdad $x^2 \leqslant n$, y, por lo tanto, también la desigualdad

$$\frac{1}{x^2+n} \geqslant \frac{1}{2n}.$$

Y ya que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, entonces por el criterio de comparación, la serie (36.29) no converge absolutamente.

Ejercicio 4. Cítese un ejemplo de serie, que converja absolutamente en todos los puntos de un cierto conjunto, pero que no converja uniformemente sobre este conjunto.

Indicación. Es útil recordar el ejemplo 2 del p. 36.1.

Demostremos ahora un criterio suficiente de convergencia uniforme, aplicable, a diferencia del criterio de Weierstrass, a las series que no convergen absolutamente. Este criterio, por su enunciado, recuerda el criterio de Dirichlet para la convergencia de las series numéricas (véase el p. 35.13) y por primera vez aparece en los trabajos de Hardy*).

Teorema 6. *Sea dada la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \tag{36.30}$$

en la cual las funciones $a_n(x)$ y $b_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, están definidas sobre el conjunto X y tales que

1) *La sucesión $\{a_n(x)\}$ es monótona para cada $x \in X$ y tiende uniformemente a cero sobre X;*

2) *la sucesión de las sumas parciales $B_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$$

está acotada sobre el conjunto X.

Entonces la serie (36.30) *converge uniformemente sobre el conjunto X.*

*) G. Hardy (1877 — 1947), matemático inglés.

DEMOSTRACIÓN. Por la condición 2 del teorema existe un $B > 0$ tal que $|B_n(x)| \leqslant B$, para todos los $x \in X$ y todos los $n = 1, 2, \ldots$, y por esto

$$\sum_{k=n}^{n+p} b_k(x) = |B_{n+p}(x) - B_{n-1}(x)| \leqslant |B_{n+p}(x)| + |B_{n-1}(x)| \leqslant 2B$$

para todos los $x \in X$, todos los $n = 2, 3, \ldots$, y todos los enteros $p \geqslant 0$. De la condición 1 del teorema se deduce, que para cualquier $\varepsilon > 0$ fijo, existe un número n_ε tal que, para todos los $x \in X$ y todos los $n \geqslant n_\varepsilon$, se cumple la desigualdad

$$0 \leqslant |a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6B}.$$

Ahora, aplicando la desigualdad de Abel (véase el p. 35.13), obtendremos que

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k(x) b_k(x)\right| \leqslant 2B[|a_n(x)| + 2|a_{n+p}(x)|] < \varepsilon$$

para todos los $x \in X$, todos los $x \geqslant n_\varepsilon$ y todos los enteros $p \geqslant 0$. Esto demuestra la convergencia uniforme de la serie (36.30). □

En calidad de ejemplo para la utilización del teorema 6, analicemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}.$$

Por el teorema 6, esta serie converge uniformemente sobre cualquier segmento $[a, b]$, que no contenga puntos del tipo $2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. En efecto, la sucesión $a_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, en el caso dado es una sucesión numérica, esta sucesión decrece monótonamente y tiende a cero (y por lo tanto, también tiende a cero uniformemente), y las sumas $\sum\limits_{k+1}^{\infty} \operatorname{sen} kx$ satisfacen la desigualdad

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\right|} \leqslant \max_{[a,b]} \frac{1}{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}} < +\infty$$

(véase el p. 35.13), es decir, están acotadas sobre cualquiera de los segmentos señalados.

Sobre cualquier segmento, que contenga puntos del tipo $x = 2k\pi$, la serie analizada no converge uniformemente. Por las propiedades del seno es suficiente demostrar esto para el segmento $[0, \pi]$. Hagamos $x_n = \dfrac{1}{2n}$; entonces para todos los $k = n + 1, n + 2, \ldots, 2n$ tendremos $0 < kx_n \leqslant 1 < \dfrac{\pi}{2}$. Por lo tanto, en virtud de la desigualdad $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} > \dfrac{2}{\pi}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ (véase (14.1)), obtendremos

$$\frac{\operatorname{sen} kx_n}{k} = \frac{\operatorname{sen} kx_n}{kx_n}\frac{1}{2n} \geqslant \frac{2}{\pi}\frac{1}{2n} = \frac{1}{\pi n}, \quad k = n + 1, \ldots, 2n.$$

De aquí

$$\frac{\operatorname{sen}(n+1)x_n}{n+1} + \frac{\operatorname{sen}(n+2)x_n}{n+2} + \ldots + \frac{\operatorname{sen} 2nx_n}{2n} > \underbrace{\frac{1}{\pi n} + \ldots + \frac{1}{\pi n}}_{n \text{ veces}} = \frac{1}{\pi}.$$

Por esto, para ningún $\varepsilon < \frac{1}{\pi}$ sobre el segmento $[0, \pi]$ se cumple el criterio de Cauchy de convergencia uniforme.

Observemos que con ayuda del criterio de Weierstrass, no se puede demostrar la convergencia uniforme de la serie analizada sobre un segmento que no contenga puntos del tipo $x = 2k\pi$. Por ejemplo, para el segmento $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ tenemos

$$\max_{\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]} \left|\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

Por esto no existe una serie numérica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que $\left|\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right| \leqslant a_n$ sobre $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, ya que entonces $a_n \geqslant \frac{1}{n}$, y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

De forma semejante al caso de las series numéricas, utilizando la desigualdad de Abel, se puede obtener un criterio más de convergencia uniforme de las series funcionales, análogo al criterio de Abel para las series numéricas. Este criterio también aparece por primera vez en los trabajos de Hardy.

Teorema 7. *Si*

1) *la sucesión* $\{a_n(x)\}$ *está acotada sobre el conjunto* X:

$$|a_n(x)| \leqslant M, \quad x \in X, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

y decrece o crece para cada $x \in X$;

2) *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *converge uniformemente sobre el conjunto* X,

entonces la serie (36.30) *también converge uniformemente sobre* X.

DEMOSTRACIÓN. Sea dado $\varepsilon > 0$. Por la convergencia uniforme de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$, existe un número n_ε tal que, para todos los números $n \geqslant n_\varepsilon$, todos los enteros $p \geqslant 0$ y todos los puntos $x \in X$, se cumple la desigualdad

$$\left|\sum_{k=0}^{p} b_{n+k}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

De aquí, por la desigualdad de Abel (véase el p. 35.77) para todos los números $n \geqslant n_\varepsilon$, todos los enteros $p \geqslant 0$ y todos los puntos $x \in X$, será válida la desigualdad

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k}(x) b_{n+k}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}(|a_n(x)| + 2|a_{n+p}(x)|) \leqslant \varepsilon.$$

Por el criterio de Cauchy, esto significa, que la serie (36.30) converge uniformemente. □

Ejemplo. Analicemos la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx \cos \frac{x}{n}}{\ln \ln n}$.

Sobre cualquier segmento, que no contenga puntos del tipo $2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \ldots$, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{\ln \ln n}$, por el teorema 6, converge uniformemente, y la sucesión $\cos \frac{x}{n}$ $n = 2, 3, \ldots$, está acotada y crece monótonamente a partir de cierto número, además se puede elegir un número tal que a partir de este número esta sucesión crecerá en todos los puntos del segmento señalado. Por esto, sobre un segmento, que no contenga puntos del tipo $2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \ldots$, la serie analizada converge uniformemente.

Para concluir observemos que de las dos propiedades de las sucesiones uniformemente convergentes, demostradas al final del p. 36.2, se deduce directamente la validez de las propiedades correspondientes para las series uniformemente convergentes:

1°. *Si las series* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ convergen uniformemente sobre el conjunto X, *entonces para números cualesquiera* $\lambda \in C$ *y* $\mu \in C$, *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n(x) + \mu v_n(x)$ *también converge uniformemente sobre el conjunto* X.

2°. *Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *converge uniformemente sobre el conjunto* X *y la función* $g(x)$ *está acotada sobre este conjunto, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} g(x)u_n(x)$ *también converge uniformemente sobre* X.

Ejercicios.. Investíguense con respecto a la convergencia, la convergencia absoluta y la convergencia uniforme de las series:

5. $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - x)x^n$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^{\alpha}}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + x^n)$.

(En todos los casos x es número real).

36.4. PROPIEDADES DE LAS SERIES Y SUCESIONES UNIFORMEMENTE CONVERGENTES

Hemos visto que la suma de una serie convergente, todos los términos de la cual son funciones continuas, puede no ser una función continua. El siguiente teorema contiene las condiciones suficientes para la continuidad de la suma de una serie.

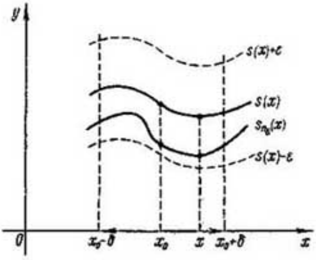


FIG. 153

Se debe prestar atención al hecho de que el análisis de funciones continuas sobre cierto conjunto impone una restricción adicional al conjunto: éste no puede ser un conjunto de naturaleza arbitraria (como ha sido hasta ahora el conjunto X, sobre el que han sido dados los términos de las series analizadas, los elementos de las sucesiones, etc.), sino que debe ser tal que, para las funciones dadas sobre él, esté definido el concepto de continuidad. Cuando hablemos de derivadas e integrales, tendremos que restringir aún más la clase de los conjuntos X admisibles.

Teorema 8. *Si las funciones $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, son continuas en el punto x_0 del conjunto $X \subset R^m$*), y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformemente sobre X, entonces su suma $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ también es continua en el punto x_0.*

DEMOSTRACIÓN.

Fijemos un $\varepsilon > 0$ cualquiera. Sea

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad x \in X.$$

Por la condición del teorema,

$$s_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} s(x),$$

por esto, existe un número n_ε tal que

$$|s(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{36.31}$$

para todos los $x \in X$, todos los $n \geqslant n_\varepsilon$, y, en particular, para $n = n_\varepsilon$. La función $s_{n_\varepsilon}(x)$ como suma de un número finito de funciones $u_k(x)$, continuas sobre X,

---

*) Aquí, como en todos los casos cuando no se haya acordado lo contrario, se analizan funciones $u_n(x)$ de valores complejos; véase el concepto de continuidad para estas funciones en el p. 23.3; R^m como es usual, denota el espacio euclídeo m-dimensional

$k = 1, 2, \ldots, n_\varepsilon$, es continua en el punto $x_0 \in X$. Por esto, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todos los puntos $x \in X$, que satisfacen la condición $\rho(x, x_0) < \delta$, tenemos

$$|s_{n_\varepsilon}(x) - s_{n_\varepsilon}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{36.32}$$

Ahora, observando que

$$s(x) - s(x_0) = [s(x) - s_{n_\varepsilon}(x)] + [s_{n_\varepsilon}(x) - s_{n_\varepsilon}(x_0)] + [s_{n_\varepsilon}(x_0) - s(x_0)]$$

(fig. 153), de la desigualdad (36.31), tomada en los puntos x_0 y x, y de la desigualdad (36.32) obtendremos cuando $\rho(x, x_0) < \delta$ y $x \in X$

$$|s(x) - s(x_0)| < |s(x) - s_{n_\varepsilon}(x)| + |s_{n_\varepsilon}(x) - s_{n_\varepsilon}(x_0)| + \\ + |s_{n_\varepsilon}(x_0) - s(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

lo que demuestra la continuidad de la función $s(x)$ en el punto x_0. □

En el caso, cuando x_0 es un punto de acumulación del conjunto X, a la afirmación del teorema se le puede dar la forma

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} s(x) = s(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

y ya que cada función $u(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, es continua en el punto $x \in X$, entonces $u_n(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} u_n(x)$, por esto

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} u_n(x).$$

De esta forma, en las condiciones del teorema 8, el límite de la suma de la serie es igual a la suma de los límites de sus términos, es decir, en la serie analizada es permitido el paso al límite término a término.

Se ha señalado anteriormente. que a cada sucesión de funciones le corresponde una serie de funciones, para la cual ella es la sucesión de sus sumas parciales. En este caso, si la sucesión dada converge uniformemente sobre cierto conjunto, entonces también la serie señalada, evidentemente, converge uniformemente sobre este conjunto. Esta circunstancia permite parafrasear los teoremas sobre las series uniformemente convergentes, en los correspondientes teoremas sobre sucesiones uniformemente convergentes. Por ejemplo, el teorema 8 puede ser parafraseado de la siguiente forma..

Teorema 8'. *Si las funciones f_n, $n = 1, 2, \ldots$, son continuas en el punto $x_0 \in X \subset R^m$ y $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$, entonces f es continua en x_0.*

Esto significa, que para el punto $x_0 \in X$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f_n(x),$$

es decir, los pasos al límite por n y por x pueden ser conmutados.

En efecto, el límite f de la sucesión f_n, $n = 1, 2, \ldots$, por el teorema 8', es una función continua en el punto $x_0 \in X$, y por esto el primer miembro de la igualdad es igual a $f(x_0)$:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0),$$

pero el segundo miembro de la igualdad analizada, según la continuidad de la función f_n, también es igual a $f(x_0)$:

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0). \ \square$$

Problema 25 (teorema de Dini*)). Supongamos que las funciones f_n, $n = 1, 2, \ldots$, son continuas y, creciendo o decreciendo monótonamente, tienden a la función f sobre el compacto $X \subset R^m$. Demuéstrese que para que la función f sea continua, es necesario y suficiente que la sucesión $\{f_n\}$ converja uniformemente sobre el conjunto X. Parafraséese este resultado para las series.

Ahora pasemos a la cuestión de la integración y diferenciación término a término de las series. Ya que la derivada y la integral están definidas sólo en el dominio real, entonces a partir de aquí y hasta el final del párrafo, consideraremos que todas las funciones analizadas están definidas sobre intervalos del eje real y toman valores reales.

Analicemos inicialmente un ejemplo que nos convencerá de que sólo la convergencia de la serie de funciones no es suficiente para que la integral de la función, igual a su suma, pueda ser hallada integrando término a término. En otras palabras, mostremos que incluso si las series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$ convergen, entonces la igualdad

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$$

puede no ser cierta, incluso en el caso cuando todas las integrales escritas existen.

Parafraseemos inicialmente esta afirmación en términos de sucesiones. Si hacemos $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ entonces tendremos

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \int_a^b s(x)dx = \int_a^b \lim_{n \to \infty} s_n(x)dx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)dx =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right] dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b s_n(x)dx.$$

*) U. Dini (1845 — 1918), matemático italiano.

Mostremos que la igualdad

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} s_n(x)dx$$

no es válida siempre, cuando sobre el segmento $[a, b]$ existe el límite $\lim_{n\to\infty} s_n(x)$ y todas las funciones analizadas son integrables, es decir, que en este caso no siempre se puede pasar al límite bajo el signo de la integral.

Sea $s_n(x) = nx\, e^{-nx^2}$, $n = 1, 2, \ldots, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Entonces $s_n(0) = 0$ y para cualquier $x \neq 0$: $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = 0$. De esta forma $s_n \underset{[0, 1]}{\to} 0$ y, por lo tanto, la integral de la función límite, es decir, de cero, también es igual a cero. Sin embargo

$$\int_0^1 s_n(x)dx = n\int_0^1 xe^{-nx^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^n e^{-t}dt = \frac{1}{2}(1 - e^{-n}).$$

Por esto, $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 s_n(x)dx = \frac{1}{2}$, es decir, en efecto, para la sucesión $\{s_n(x)\}$ analizada, tiene lugar la desigualdad

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 s_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} s_n(x)dx = 0.$$

Si se construye la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, para la cual la sucesión $\{s_n(x)\}$ es la sucesión de sus sumas parciales, es decir, haciendo

$$u_1(x) = s_1(x),\ u_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x),\quad n = 2, 3, \ldots,$$

entonces para esta serie tendremos

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx \neq \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)dx.$$

Teorema 9. *Sean las funciones* $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, *continuas sobre el segmento* $[a, b]$ *y la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{36.33}$$

converge uniformemente sobre $[a, b]$. *Entonces cualquiera que sea el punto* $c \in [a, b]$, *la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x u_n(t)dt \tag{36.34}$$

también converge uniformemente sobre $[a, b]$, *y si*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{36.35}$$

entonces

$$\int_c^x s(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n(t)dt, \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{36.36}$$

Si esta fórmula se transcribe en la forma

$$\int_c^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n(t)dt,$$

entonces, se ve que esto significa la legitimidad, para las condiciones enunciadas en el teorema 9, *de la integración término a término de la serie.*

DEMOSTRACIÓN. Por la convergencia uniforme de la serie (36.33), según el teorema 8, la función $s(x)$ (véase (36.35)), es continua sobre el segmento $[a, b]$ y por esto es integrable sobre cualquier segmento con extremos en los puntos $c \in [a, b]$ y $x \in [a, b]$.

Mostremos, que la serie (36.34) sobre el segmento $[a, b]$ converge uniformemente a la función

$$\sigma(x) = \int_c^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right] dt = \int_c^x s(t)dt. \tag{36.37}$$

Sea

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \quad \text{y} \quad r_n(x) = s(x) - s_n(x).$$

Entonces para cualquier $x \in [a, b]$ tenemos

$$\begin{aligned} \left|\sigma(x) - \sum_{k=1}^{n} \int_c^x u_k(t)dt\right| &= \left| \int_c^x s(t)dt - \int_c^x \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(t) \right] dt \right| = \\ &= \left| \int_c^x s(t)dt - \int_c^x s_n(t)dt \right| \leqslant \left| \int_c^x |s(t) - s_n(t)|dt \right| = \\ &= \left| \int_c^x |r_n(t)|dt \right| \leqslant \sup_{[a, b]} |r_n(t)| \left| \int_c^x dt \right| \leqslant \\ &\leqslant |x - c| \sup_{[a, b]} |r_n(t)| \leqslant (b - a) \sup_{[a, b]} |r_n(x)|. \end{aligned} \tag{36.38}$$

La sucesión $\sup\limits_{[a, b]} |r_n(x)|$, $n = 1, 2, \dots$, es una sucesión numérica. Por la convergencia uniforme de la serie (36.33) tenemos

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{[a, b]} |r_n(x)| = 0$$

(véase el p. 36.3); por esto de la desigualdad (36.38), según el criterio de Weierstrass de convergencia uniforme de una sucesión, se deduce que la sucesión de sumas parciales de la serie (36.34) converge uniformemente hacia la función (36.37), y esto implica la convergencia uniforme de la serie (36.34) a la función (36.37). El teorema y, en particular, la fórmula (36.36) están demostrados. □

Parafraseemos el resultado obtenido para las sucesiones de funciones.

Teorema 9'. *Si una sucesión de funciones f_n, $n = 1, 2, \ldots$, continuas sobre el segmento $[a, b]$, converge uniformemente a la función f sobre este segmento, entonces cualquiera que sea el punto $c \in [a, b]$,*

$$\int_c^x f_n(t)dt \rightrightarrows \int_c^x f(t)dt \text{ sobre } [a, b],$$

en particular,

$$\lim_{n\to\infty} \int_c^x f_n(t)dt = \int_c^x [\lim_{n\to\infty} f_n(t)]dt.$$

Ejercicio 9. Demuéstrese, que si

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n & \text{cuando } x = \dfrac{1}{2n}, \\ 0 & \text{cuando } x = 0 \text{ y } \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

y $f_n(x)$ es lineal sobre los segmentos $\left[0, \dfrac{1}{2n}\right]$ y $\left[\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{n}\right]$ entonces para todos los $x \in [0, 1]$ tiene lugar la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \text{ y } \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1.$$

Pasemos ahora a la cuestión sobre la diferenciación de las series.

Teorema 10. *Sean las funciones $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, continuamente diferenciables sobre el segmento $[a, b]$ y la serie, formada por sus derivadas*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \tag{36.39}$$

converge uniformemente sobre el segmento $[a, b]$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge al menos en un punto $c \in [a, b]$, entonces ella converge uniformemente sobre todo el segmento $[a, b]$, su suma

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{36.40}$$

es continuamente diferenciable y

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{36.41}$$

Si esta fórmula se transcribe en la forma

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x),$$

entonces se ve que ella significa la legitimidad, para las suposiciones hechas, de la diferenciación *término a término* de la serie.

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{36.42}$$

En virtud de la convergencia uniforme de esta serie, su suma es una función continua y puede ser integrada término a término

$$\int_c^x \sigma(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n'(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(c)], \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{36.43}$$

Por el teorema 9, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(c)], \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{36.44}$$

es convergente. Converge, por condición del teorema, también la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c) \tag{36.45}$$

y por esto converge también la suma de las series (36.44) y (36.45), es decir, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{36.46}$$

De aquí se deduce que la igualdad (36.43) puede transcribirse en la forma

$$\int_c^x \sigma(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$$

o, lo que es lo mismo (véase (36.40)), en la forma

$$\int_c^x \sigma(t)dt = s(x) - s(c). \tag{36.47}$$

La función que se encuentra en el primer miembro tiene derivada respecto a x, por lo tanto también la función $s(x)$ tiene derivada. Diferenciando la igualdad (36.47), obtendremos (véase el p. 29.2)

$$s'(x) = \sigma(x), \tag{36.48}$$

donde la función $\sigma(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ ya que representa la suma de la serie uniformemente convergente (36.39), cuyos términos son funciones continuas. Sustituyendo (36.42) en (36.48), obtendremos la fórmula buscada (36.41).

Resta sólo señalar que de la igualdad (36.43) por la convergencia demostrada de las series (36.44) y (36.45) se deduce que

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n'(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(c).$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n'(t)dt$ converge uniformemente sobre el segmento $[a, b]$ (véase el teorema 9), y $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ es una serie numérica, por esto también su suma, es decir, la serie (36.40), converge uniformemente sobre el segmento $[a, b]$. □

Así, si una serie convergente de funciones continuamente diferenciables es tal que la serie formada por sus derivadas converge uniformemente, entonces la suma de la serie es una función diferenciable y su derivada se obtiene diferenciando la serie término a término.

Por cuanto de las premisas de este teorema se deduce la convergencia uniforme de la serie, entonces, sin perder generalidad, se puede parafrasearlo de la siguiente forma.

Si una serie de funciones continuamente diferenciables y la serie formada por sus derivadas convergen uniformemente, entonces la suma de la serie inicial es continuamente diferenciable y su derivada es igual a la suma de las derivadas de los términos de la serie dada (es decir, la serie puede ser diferenciada término a término).

Parafraseemos ahora el teorema 10 para las sucesiones.

Teorema 10'. *Supongamos que la sucesión de funciones*

$$f_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{36.49}$$

continuamente diferenciables sobre el segmento $[a, b]$, *converge al menos en un punto* $c \in [a, b]$, *y la sucesión de sus derivadas* f_n', $n = 1, 2, \ldots$, *converge uniformemente sobre* $[a, b]$. *Entonces la sucesión* (36.49) *converge uniformemente sobre* $[a, b]$, *su límite es una función continuamente diferenciable sobre este segmento y*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{df_n(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \lim_{n \to \infty} f_n(x), \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Ejemplos de la aplicación de estas teoremas serán dados en el párrafo siguiente.

Ejercicios. 10. ¿Será válida la igualdad

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 x^n dx = \int_0^1 (\lim_{n \to \infty} x^n) dx?$$

¿Puede ser establecida la validez con ayuda del teorema 9?

11. Constrúyase un ejemplo de una sucesión de funciones continuamente diferenciables, convergente sobre un segmento, cuyo límite también sea una función continuamente diferenciable, no obstante, las derivadas de los términos de la sucesión no convergen a la derivada de la función límite.

§ 37. SERIES DE POTENCIAS

37.1. RADIO DE CONVERGENCIA Y CÍRCULO DE CONVERGENCIA DE UNA SERIE DE POTENCIAS

Definición 1. *Las series funcionales del tipo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{37.1}$$

donde a_n y z_0 son números complejos dados, y z es una variable compleja, se llaman series de potencias. Los números

$$a_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

se llaman coeficientes de las series de potencias (37.1).

Suponiendo que los coeficientes de la serie y el número z_0 están dados, investigaremos el comportamiento de la serie (37.1) para los diferentes z.

Si en la serie (37.1) efectuamos un cambio de variable, haciendo $\zeta = z - z_0$, entonces obtendremos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n. \tag{37.2}$$

Evidentemente, la investigación de la convergencia de la serie (37.1), es equivalente a la investigación de la convergencia de la serie (37.2), por esto en el futuro analizaremos las series del tipo (37.2), utilizando, es cierto, como regla, para designar la variable la letra z y no la letra ζ.

Teorema 1 (de Abel). *Si la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{37.3}$$

converge para $z = z_0 \neq 0$, entonces converge, y además absolutamente, para cualquier z, para el cual $|z| < |z_0|$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \tag{37.4}$$

converge. Entonces su término n-ésimo $a_n z_0^n$ tiende a cero cuando $n \to \infty$ (véase el p. 35.1), y por esto la sucesión $\{a_n z_0^n\}$ está acotada, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que

$$|a_n z_0^n| \leqslant M, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Por esto, para el término n-ésimo de la serie (37.2), se obtiene la estimación

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

Si $|z| < |z_0|$ (fig. 154), entonces la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$, al ser la suma de una progresión geométrica con denominador $q = \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, converge. Por esto, por el criterio de comparación (véase el p. 35.5) también converge la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ y esto significa la convergencia absoluta de la serie (37.3) cuando $|z| < |z_0|$. □

Corolario 1. *Si la serie de potencias* (37.3) *diverge para $z = z_0$, entonces diverge para cualquier z,* para el cual $|z| > |z_0|$.

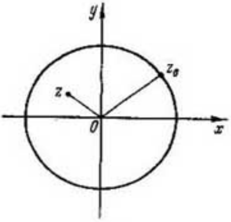


FIG. 154

En efecto, si $|z| > |z_0|$ y la serie (37.4) diverge, entonces también diverge la serie (37.3), ya que si convergiera, entonces por lo demostrado, convergería también la serie (37.4).

Definición 2. *Sea dada la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. *Si R es un número no negativo o* $+\infty$ *y tiene la propiedad de que para todos los z, para los cuales* $|z| < R$, *la serie* (37.3) *converge, y para todos los z, para los cuales* $|z| > R$, *la serie* (37.3) *diverge, entonces este número se llama radio de convergencia de la serie de potencias* (37.3).

El conjunto de los puntos z, para los cuales $|z| < R$, *se llama círculo de convergencia de la serie* (37.3).

Teorema 2. *Para cualquier serie de potencias* (37.3), *existe un radio de convergencia R. En el círculo de convergencia, es decir, para cualquier z, para el cual* $|z| < R$, *la serie* (37.3) *converge absolutamente. Sobre cualquier círculo* $|z| \leqslant r$, *donde r es fijo y* $r < R$, *la serie* (37.3) *converge uniformemente.*

DEMOSTRACIÓN. Designemos por A el conjunto de todos los números no negativos en los cuales la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{37.5}$$

converge. Ya que para $x = 0$, esta serie converge a ciencia cierta, entonces el conjunto A es no vacío, y por esto tiene cota superior finita o infinita. Mostremos que $\sup A = R$. En efecto, sea $z \in C$ y $|z| < R$. Por la definición de cota superior existe $x \in A$ tal que $|z| < x < R$ (véase la definición 6′ en el p. 3.4). Por la definición del conjunto A, para el x señalado la serie (37.5) converge, por lo tanto, según el teorema de Abel en el punto z escogido converge también la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Si $|z| > R$, entonces escogemos un número real x tal que $R < x < |z|$; entonces, otra vez por la definición del conjunto A, la serie (37.5) diverge en este punto x, pues está sobre el eje real más a la derecha que todos los puntos en los cuales la serie (37.5) converge. Por esto, según el corolario del teorema de Abel para el z escogido diverge también la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

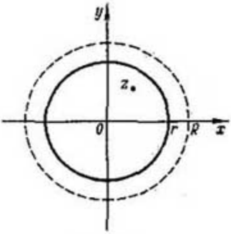


FIG. 155

Así, en efecto, R es el radio de convergencia de la serie (37.3).

Si ahora $0 < r < R$, entonces, por lo demostrado, la serie (37.3) para $z = r$ converge absolutamente, es decir, converge la serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n.$$

Y ya que para cualquier punto z del círculo $|z| \leqslant r$ (fig. 155)

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

entonces, por el criterio de Weierstrass (véase el p. 36.3), sobre este círculo, la serie (37.3) converge uniformemente. □

De esta forma, la región de convergencia de cualquier serie de potencias es siempre un "círculo"*), excluyendo, puede ser, cierto conjunto de sus puntos de frontera. En los puntos de frontera del círculo de convergencia, la serie puede tanto converger como diverger (véanse los ejemplos a continuación).

Subrayemos, que el radio de convergencia de la serie de potencias (37.3) tiene la siguiente propiedad: para cada número z tal que $|z| < R$, la serie señalada *absolutamente*, y para cada z tal que $|z| > R$, sencillamente, y por lo tanto, aún más, diverge *absolutamente* (diverge la serie formada por las magnitudes absolutas de los términos de la serie dada). Esto se deduce evidentemente de la definición del radio de convergencia y del teorema 2.

Los términos de la serie de potencias son funciones continuas y, como fue mostrado, sobre cualquier círculo que se encuentre junto con su frontera dentro del círculo de convergencia, la serie de potencias converge uniformemente, y por esto su suma es continua sobre cualquier círculo señalado. Es evidente, que para cualquier punto z del círculo de convergencia, $|z| < R$, se puede escoger un círculo que contenga este punto y que esté junto con su frontera en el círculo de convergencia (es suficiente tomar su radio r tal que $|z| < r < R$), por esto, *la serie de potencias es*

---

*) La palabra "círculo" está escrita entre comillas ya que en el caso de $R = +\infty$ el "círculo" significa todo el plano.

continua en cada punto de su círculo de convergencia $|z| < R$ (subrayemos que aquí se habla de un círculo abierto).

Analicemos ahora el caso cuando la serie de potencias converge en el punto $z = R$, que está sobre la frontera de su círculo de convergencia. Señalemos que el caso de $z = -R$ puede ser reducido al caso de $z = R$ con el sencillo cambio de variable $\zeta = -z$.

Teorema 3 (de Abel). *Si R es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y esta serie converge para $z = R$, entonces converge uniformemente sobre el segmento* $[0, R]$.

Corolario. *Si la serie de potencias* (37.3) *converge para $z = R$, entonces su suma es continua sobre el segmento* $[0, R]$.

Esta afirmación con frecuencia se llama *segundo teorema de Abel* sobre las series de potencias.

DEMOSTRACIÓN. Sea $0 \leqslant x \leqslant R$. Representemos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en la forma de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$. Ya que los términos de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ no dependen de x, entonces su convergencia implica también su convergencia uniforme. La sucesión $\{(x/R)^n\}$ es acotada sobre el segmento $[0, R]$, sus términos son no negativos: $0 \leqslant \left(\frac{x}{R}\right)^n \leqslant 1$ y ella decrece monótonamente en cada punto (para $x = R$ ella decrece no estrictamente, más exactamente, es estacionaria). Por esto, según el criterio de Abel de convergencia uniforme de las series (véase el teorema 7 en el p. 36.3), la serie (37.3) converge uniformemente sobre el segmento $[0, R]$. □

El corolario se deriva de que la suma de una serie uniformemente convergente de funciones continuas, también es una función continua.

Todo lo dicho se traslada a las series de potencias generales del tipo (37.1), con ayuda de la transformación del tipo $z = \zeta - \zeta_0$ (ζ es una nueva variable, ζ_0 está fijo). En particular, la región de convergencia de esta serie consta de un círculo del tipo $|z - z_0| < R$ y cierto conjunto de los puntos sobre su frontera (este conjunto puede ser vacío).

Este círculo se llama círculo de convergencia de la serie (37.1), y R, su radio se convergencia.

Ejemplos. 1. El radio de convergencia R de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$ es igual a cero, es decir, esta serie converge sólo para $z = 0$*).

En efecto, investigando la convergencia absoluta de esta serie, por el criterio de D'Alembert, para cualquier $z \neq 0$, obtendremos

*) Para $z = 0$, evidentemente, converge cualquier serie del tipo (37.3).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(n+1)!z^{n+1}|}{|n!z^n|} = \lim_{n\to\infty}(n+1)|z| = +\infty.$$

De esta forma, la serie analizada no converge absolutamente para todo $z \neq 0$; de aquí, por el corolario del teorema de Abel, diverge para cualquier $z \neq 0$.

2. El radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ es igual a $+\infty$, ya que, como hemos visto (véase el p. 36.1), esta serie converge para cualquier z.

3. La suma de la progresión geométrica infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{37.6}$$

converge para $|z| < 1$ y diverge para $|z| \geqslant 1$. Por esto, su radio de convergencia es $R = 1$. Señalemos, que en todos los puntos de la frontera del círculo de convergencia, es decir, en todos los puntos de la circunferencia $|z| = 1$, la serie (37.6) diverge, ya que para el término general de la serie tenemos $|z^n| = 1$, y, por lo tanto, no tiende a cero cuando $n \to \infty$.

4. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \tag{37.7}$$

converge para $|z| \leqslant 1$, ya que cuando se cumple esta condición $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Para $|z| > 1$, la serie (37.7) diverge, ya que en este caso $\lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{n^2} = +\infty$*), es decir, no se cumple la condición necesaria para la convergencia de una serie. El radio de convergencia de la serie (37.7), como el de la serie (37.6), es igual a la unidad, sin embargo, en cada punto de la frontera del círculo de convergencia la serie (37.7), a diferencia de la serie (37.6), converge.

5. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

tiene radio de convergencia $R = 1$.

En efecto, aplicando el criterio de D'Alembert para la definición de z, para los cuales la serie converge absolutamente (respectivamente, diverge), obtendremos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z^{n+1}/(n+1)|}{|z^n/n|} = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |z|$$

---

*) En efecto, es fácil, por ejemplo, con ayuda de la regla de L'Hospital convencerse de que $\lim_{x\to+\infty} \frac{|z|^x}{x^2} = +\infty$ (véase el ejemplo 2 en el p. 12.2).

y, por consiguiente, para $|z| < 1$, la serie dada converge, además absolutamente, y para $|z| > 1$, diverge. Para $z = 1$, se obtiene la serie armónica divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, y para $z = -1$, la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (véanse el p. 35.3 y el p. 35.9). De esta forma, en este ejemplo sobre la frontera del círculo de convergencia hay puntos en los cuales la serie converge y hay puntos en los cuales diverge.

De los ejemplos analizados (véase también el p. 36.1) se ve que a veces el radio de convergencia R de la serie de potencias se halla con ayuda del criterio de D'Alambert de convergencia de las series con términos positivos (véase el teorema 8 en el p. 35.6). Efectivamente, es válida la siguiente afirmación: *si existe el límite (finito o infinito)* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, *entonces*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{37.8}$$

En efecto, si el número R está definido por esta fórmula y $|z| < R$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{a_n z^n} = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|z|}{R} < 1,$$

y por esto la serie (37.3) para este z converge (y además absolutamente).

Si $|z| > R$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|z|}{R} > 1$ y, por consiguiente, la serie (37.3) diverge absolutamente. De esta forma, R, en efecto, es el radio de convergencia de la serie (37.3).

De forma análoga se puede hallar la magnitud del radio de convergencia R con ayuda del criterio de Cauchy (véase el teorema 9 en el p. 35.6), si sólo existe el límite (finito o infinito) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. En este caso

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{37.8'}$$

En efecto, si el número R está dado por esta fórmula y si $|z| < R$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{R} < 1,$$

y por esto la serie (37.3) converge. Si $|z| > R$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \frac{|z|}{R} > 1$$

y, por lo tanto, la serie (37.3), no converge absolutamente.

De esta forma, R es el radio de convergencia de la serie (37.3).

Al aplicar este método de determinación del radio de convergencia de una serie de potencias pueden surgir dificultades, por ejemplo, en el caso cuando en la serie analizada se tienen coeficientes, con números tan grandes como se quiera, iguales a cero. En este caso se puede probar utilizar el método señalado, renumerando previa y consecutivamente todos los términos de la serie con coeficientes distintos de cero (por lo que su convergencia y suma, en caso de que converja, no varían).

Aclaremos lo dicho en un ejemplo. Supongamos que se exige determinar el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{donde} \quad a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si} \quad n = 1, 3, 5, \ldots, \\ 0 & \text{si} \quad n = 0, 2, 4, \ldots . \end{cases}$$

El criterio D'Alembert no es aplicable para determinar la convergencia de esta serie, ya que la relación $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ no tiene sentido para los números pares n. Tampoco nos da respuesta en este caso el criterio de Cauchy, ya que no es difícil comprobar que aquí el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ no existe. Sin embargo, si hacemos $b_k = \dfrac{1}{2k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, y escribimos la serie dada en la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1},$$

entonces, investigando la convergencia absoluta de esta serie con ayuda del criterio de D'Alembert, obtendremos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|b_{k+1} z^{2k+3}|}{|b_k z^{2k+1}|} = |z|^2 \lim_{k\to\infty} \frac{2k+1}{2k+3} = |z|^2.$$

De aquí se deduce que la serie analizada converge absolutamente, cuando $|z^2| < 1$, es decir, cuando $|z| < 1$, y diverge absolutamente cuando $|z| > 1$. De esta forma, el radio de convergencia de esta serie de potencias es igual a 1.

Subrayemos, que con ayuda del criterio de D'Alembert y del criterio de Cauchy se puede hallar el radio de convergencia no para una serie de potencias arbitrarias, sino sólo para aquella para la cual existen los límites señalados anteriormente (es posible, después de una nueva numeración de sus términos).

Ejercicios. Determínense los radios de convergencia de las series:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^3}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{z}{n}\right)^n$.
4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n z^{2n}$.

37.2*. FÓRMULA DE CAUCHY — HADAMARD PARA EL RADIO DE CONVERGENCIA DE UNA SERIE DE POTENCIAS

Hallemos ahora la fórmula para determinar el radio de convergencia de una serie de potencias arbitraria, a través de sus coeficientes en el caso general.

Teorema 4. *Sea R el radio de convergencia de la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{37.3}$$

entonces

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}\text{ *)}. \tag{37.9}$$

La fórmula (37.9) se llama *fórmula de Cauchy-Hadamard* **).

DEMOSTRACIÓN. Hagamos $\rho = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Analicemos inicialmente el caso de $\rho = 0$. Mostremos que en este caso la serie (37.3) converge para cualquier z. Tomemos cualquier $z \neq 0$ y ε tal que $0 < \varepsilon < 1$. Entonces (véase el teorema 10 en el p. 4.12*) existe N tal que

$\sqrt[n]{|a_n|} < \dfrac{\varepsilon}{|z|}$ para todos los $n \geqslant N_1$, es decir,

$$|a_n|\,|z|^n < \varepsilon^n \text{ para todos los } n \geqslant N_1.$$

De aquí, por el criterio de comparación se deduce que la serie (37.3) converge absolutamente, y por lo tanto, sencillamente converge para el z dado, y ya que z era arbitrario, entonces esto significa que $R = +\infty$.

Tomemos otro caso extremo: sea $\rho = +\infty$. Mostremos que en este caso la serie (37.3) diverge para cualquier $z \neq 0$. En efecto, si $\rho = +\infty$, entonces existe la sucesión n_k, $k = 1, 2, \ldots$, de la serie natural, tal que $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = +\infty$. Por esto, cualquiera que sea $z \neq 0$, existe un número k tal que para $k > k_z$

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geqslant \frac{1}{|z|}, \text{ es decir, } |a_{n_k} z^{n_k}| \geqslant 1.$$

De esta forma, no se cumple la condición necesaria de convergencia de una serie, o sea, la tendencia a cero de su término n-ésimo, por esto para un $z \neq 0$ dado, la serie diverge y ya que $z \neq 0$ era arbitrario, entonces esto significa que $R = 0$.

Sea ahora $0 < \rho < +\infty$. Mostremos que para cualquier z tal que $|z| < \dfrac{1}{\rho}$ la serie (37.3) converge. Elijamos $\varepsilon > 0$ de tal modo que $|z| < \dfrac{1}{\rho + \varepsilon}$ ***), entonces el número q, definido por la igualdad $q = (\rho + \varepsilon)\,|z|$, va a satisfacer la desigualdad $q < 1$. Por la propiedad del límite superior existe un número N_1 tal que para $n \geqslant N_1$

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \rho + \varepsilon,$$

) Sobre el límite superior véase en el p. 4.12.

**) J. Hadamard (1865 — 1963), matemático francés.

***) Para esto es suficiente tomar $\varepsilon < \dfrac{1}{|z| - \rho}$.

por esto para $n \geqslant N_1$

$$|z| \sqrt[n]{|a_n|} < |z| (\rho + \varepsilon) = q, \quad \text{es decir,} \quad |a_n z^n| < q^n, \quad 0 < q < 1,$$

y por el criterio de comparación la serie (37.3), para el z analizado, converge absolutamente, y por lo tanto, sencillamente converge.

Mostremos ahora, que la serie (37.3), para cualquier z tal que $|z| > \frac{1}{\rho}$, diverge.

Escojamos $\varepsilon > 0$ de tal modo que

$$|z| > \frac{1}{\rho - \varepsilon} > 0, \tag{37.10}$$

entonces $|z| (\rho - \varepsilon) > 1$. Según la propiedad del límite superior (véase el teorema 10 del p. 4.12*), existe la subsucesión n_k, $k = 1, 2, \ldots$, de números naturales tal que

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \rho - \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

De esto, en virtud de (37.10) se deduce que

$$|z| \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > |z| (\rho - \varepsilon) > 1$$

y, por lo tanto,

$$|a_{n_k} z^{n_k}| > 1,$$

es decir, en este caso no se cumple la condición necesaria de la convergencia de una serie, o sea, la tendencia a cero de su término n-ésimo, y por esto para el z analizado la serie (37.3), diverge.

De esta forma, la serie (37.3) converge si $|z| < \frac{1}{\rho}$ y diverge, si $|z| > \frac{1}{\rho}$, y esto significa que $R = \frac{1}{\rho}$. □

37.3. FUNCIONES ANALÍTICAS

Definición 3. *La función $f(z)$ se llama analítica en el punto z_0 si existe $R > 0$ tal que en el círculo $|z - z_0| < R$ ella es representable por una serie de potencias del tipo* (37.1), *es decir, existen los números complejos a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, tales que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R. \tag{37.11}$$

La suma, la deferencia y el producto de funciones analíticas en un punto es otra vez una función analítica en este punto (¿por qué?).

Lema 1. *Si R es el radio de convergencia de la serie* (37.11), $R > 0$ *y*

$$r_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

es el resto de la serie (37.11), *entonces*

$$r_n(z) = O((z - z_0)^{n+1}) \text{ cuando } z \to z_0, \tag{37.12}$$

y, por lo tanto,

$$r_n(z) = o((z - z_0)^n) \text{ cuando } z \to z_0. \tag{37.13}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $|z - z_0| < R$, entonces

$$r_n(z) = (z - z_0)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n+1}$$

y la serie, que se obtiene después de sacar el factor $(z - z_0)^{n+1}$, converge. Por esto la función $\varphi(z) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n-1}$ como la suma de una serie de potencias, es continua en el círculo $|z - z_0| < R$.

Si ahora $0 < r < R$, entonces la función $\varphi(z)$, siendo continua sobre el círculo cerrado $|z - z_0| \leqslant r$, será, además, acotada sobre él, es decir, se encuentra una constante $M > 0$ tal que (véase el p. 23.3) para $|z - z_0| \leqslant r$ se cumple la desigualdad $|\varphi(z)| \leqslant M$. Por cuanto $r_n(z) = (z - z_0)^{n+1} \varphi(z)$, entonces para $|z - z_0| \leqslant r$ obtendremos:

$$|r_n(z)| = |z - z_0|^{n+1} |\varphi(z)| \leqslant M |z - z_0|^{n+1},$$

y esto significa (37.12). La condición (37.13) se deduce directamente de (37.12). □

Teorema 5. *La representación de la función $f(z)$, analítica en el punto z_0, en la forma de serie de potencias* (37.11) *es única, es decir, si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R, \quad R > 0, \tag{37.14}$$

entonces

$$a_n = b_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

DEMOSTRACIÓN. De la igualdad (37.14) para $n = 0$, según la fórmula (37.12) se deduce que cuando $z \to z_0$

$$a_0 + O(z - z_0) = b_0 + O(z - z_0).$$

Pasando en esta igualdad al límite para $z \to z_0$, obtendremos $a_0 = b_0$.

Supongamos que ya está demostrado que

$$a_j = b_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n - 1,$$

entonces por (37.12) y (37.14)

$$a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + O((z - z_0)^{n+1}) =$$
$$= b_0 + b_1(z - z_0) + \ldots + b_n(z - z_0)^n + O((z - z_0)^{n+1}).$$

Eliminando los términos iguales en ambos miembros de esta igualdad y dividiendo ambos miembros por $(z - z_0)^n$ tendremos

$$a_n + O(z - z_0) = b_n + O(z - z_0), \quad z \to z_0.$$

De aquí, en el límite cuando $z \to z_0$ obtendremos que $a_n = b_n$ (compárese con el teorema 2 en el p. 13.2). □

Puede suceder que sólo analizando la serie en el dominio de los números complejos se puede explicar la magnitud de su radio de convergencia. Por ejemplo, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

que es la suma de la progresión geométrica con denominador $-x^2$, converge para $|x| < 1$ y diverge para $|x| \geqslant 1$. Su suma sobre el intervalo $(-1; 1)$ es igual a $\frac{1}{1+x^2}$. La función $\frac{1}{1+x^2}$ está definida y es infinitamente diferenciable sobre todo el eje real, por esto no se entiende por qué al descomponerla en la serie

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

obtenemos una serie que sólo converge para $|x| < 1$. Esto se hace completamente natural, si analizamos esta función en el dominio de los números complejos, ya que la función $\frac{1}{1+z^2}$ tiene un "punto singular" para $z = i$ (en este punto la función no está definida y cuando se acerca a él, tiende al infinito), es decir, precisamente en la frontera del círculo $|z| \leqslant 1$.

37.4. FUNCIONES ANALÍTICAS REALES

En el presente punto en lo fundamental se estudiarán las series de potencias con términos reales. Sin embargo, previamente demostraremos un lema, válido para las series de potencias en el dominio complejo.

Lema 2. *Los radios de convergencia de las series*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{37.15}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^{n+1}}{n+1}, \tag{37.16}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \tag{37.17}$$

son iguales.

DEMOSTRACIÓN. Sea R el radio de convergencia de la serie (37.15); R_1, el radio de convergencia de la serie (37.16) y R_2, el radio de convergencia de la serie (37.17). De las desigualdades

$$\left|\frac{a_n z^{n+1}}{n+1}\right| \leqslant |z|\,|a_n z^n| \leqslant |z^2|\,|n a_n z^{n-1}|,\ n = 1, 2, \ldots,$$

y del teorema de comparación (véase el teorema 6 en el p. 35.5) se deduce que si en cierto punto z converge la serie (37.17), entonces en este punto converge también la serie (37.16) y si en cierto punto z converge la serie (37.16), entonces en este mismo punto converge también la serie (37.15). De aguí se deduce que

$$R_2 \leqslant R \leqslant R_1. \tag{37.18}$$

Mostremos ahora que

$$R_1 \leqslant R_2. \tag{37.19}$$

Supongamos que la serie (37.16) converge en el punto z_0 y $0 < |z_0| < R_1$. Escojamos el número real r tal que $|z_0| < r < R_1$. Entonces para $n = 1, 2, \ldots$, obtendremos

$$|na_n z_0^{n-1}| = \frac{n(n+1)}{|z_0|^2}\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right|\left|\frac{z_0}{r}\right|^{n+1}. \tag{37.20}$$

En virtud de la convergencia de la serie (37.16) para $z = r$, el término general de esta serie para $z = r$ tiende a cero, cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty}\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right| = 0.$$

Por lo tanto, la sucesión $\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right|$, $n = 1, 2, \ldots$, es acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que para todos los $n = 1, 2, \ldots$, se cumple la desigualdad

$$\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right| \leqslant M.$$

Haciendo $q = \left|\frac{z_0}{r}\right|$ de (37.20) obtendremos la desigualdad

$$|na_n z_0^{n-1}| \leqslant \frac{n(n+1)}{|z_0|^2} Mq^{n+1}, \quad 0 < q < 1.$$

Ya que la serie con término general $\frac{n(n+1)}{|z_0|^2} Mq^{n+1}$ converge (es fácil convencerse de esto, por ejemplo, según el criterio de D'Alembert), entonces para $z = z_0$ converge también la serie (37.17). La desigualdad (37.19) está demostrada. De las desigualdades (37.18) y (37.19) se deduce que

$$R = R_1 = R_2. \ \square$$

OBSERVACIÓN. La afirmación del lema puede ser demostrada de una forma más sencilla si se utiliza la fórmula de Cauchy — Hadamard para el radio de convergencia de una serie de potencias (véase el p. 37.2*). No hemos hecho esto, ya que la demostración dada tampoco es complicada y por cuanto no utiliza la fórmula de Cauchy — Hadamard, entonces el punto 37.2* puede ser omitido en la primera lectura (lo que señala el asterisco adjunto a su número).

En lo adelante de este párrafo en todos los casos cuando no se diga lo contrario, supondremos que los coeficientes de todas las series analizadas son reales y que las variables z y z_0 también son reales (en este caso las denotaremos por x y x_0). Cierto es, que todas las propiedades de las series de potencias analizadas a continuación se trasladan también, en cierto sentido, sobre las series de potencias en el dominio complejo; sin embargo para esto tendríamos que generalizar el concepto de derivada e integral para las funciones de argumento complejo, y esto no se incluye en el objetivo del presente curso.

Así, analizaremos las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \tag{37.21}$$

donde $a_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$, x y x_0 son reales. Si R es el radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)$ donde z es un número complejo, es decir, la serie con los mismos coeficientes que la serie (37.21), pero analizada en el dominio complejo. entonces, evidentemente, la serie (37.21) converge si $|x - x_0| < R$ y diverge si $|x - x_0| > R$.

En este caso R, como hasta ahora, se llama *radio de convergencia de la serie* (37.21), y el intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$ *es su intervalo de convergencia.*

Teorema 6. *Si R es el radio de convergencia de la serie de potencias*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \tag{37.22}$$

$R > 0$, *entonces*

1) *la función f tiene en el intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$ derivadas de todos los órdenes, las cuales se hallan a partir de la serie* (37.22) *diferenciando término a término;*

2) *para cualquier $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1},$$

es decir, en el interior del intervalo de convergencia la serie de potencias puede ser integrada término a término;

3) *las series de potencias que se obtienen de la serie* (37.22) *como resultado de la diferenciación o de la integración término a término, tienen el mismo radio de convergencia que la propia serie* (37.22).

DEMOSTRACIÓN. Por el lema, demostrado al inicio de este párrafo, los radios de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1},$$

obtenida de la serie (37.22) diferenciando término a término, y de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x - x_0)^{n+1}}{n+1},$$

obtenida de la misma serie integrando término a término, son iguales al radio de convergencia de la serie (37.22) (para convencerse de esto, es suficiente hacer el cambio de variable $x - x_0 = z$).

Por cuanto cualquier serie de potencias de la forma (37.22) con radio de convergencia R, converge uniformemente sobre el segmento $[x_0 - r, x_0 + r]$, $0 < r < R$ (véase el teorema 2 en el p. 37.1), entonces la afirmación del teorema sobre la posibilidad de la diferenciación y de la integración término a término de las series de potencias reales, se deduce directamente de los teoremas correspondientes sobre la diferenciabilidad e integrabilidad de las series funcionales, demostrados en el punto 36.4. ☐

Observemos que, por ejemplo, la posibilidad de integración término a término de la serie de potencias (37.22) dentro del intervalo de convergencia $(x_0 - R, x_0 + R)$ se deriva inmediatamente (véase el teorema 9 en el p. 36.4) de que la serie de potencias converge uniformemente sobre cualquier segmento $[x_0 - r, x_0 + r]$, $0 < r < R$. De aquí se deduce que durante la integración término a término el radio de convergencia de una serie de potencias no disminuye. El teorema demostrado contiene una afirmación más completa, que el radio de convergencia señalado, además, no aumenta, es decir, permanece igual.

Teorema 7. *Si la función f es analítica en el punto x_0, es decir, es representable en un entorno de este punto, por la serie* (37.22) *con radio de convergencia* $R > 0$, *entonces*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{37.23}$$

es decir,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

DEMOSTRACIÓN. Diferenciando n veces ambos miembros de la igualdad (37.22), obtendremos (véase el teorema 6):

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)\dots 2\cdot 1\cdot a_n + (n+1)n\dots 2n_{n+1}(x - x_0) + \\ + (n+2)(n+1)\dots 3a_{n+2}(x - x_0)^2 + \dots .$$

De aquí, para $x = x_0$ se obtiene la fórmula (37.23). ☐

Observemos que del teorema demostrado se deduce otra vez la propiedad de la unicidad del desarrollo de una función en serie de potencias (cierto está, esta vez a base de las restricciones hechas sólo en el dominio real, compárese con el p. 37.3).

37.5. DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIES DE POTENCIAS. DIFERENTES FORMAS DE ESCRITURA DEL TÉRMINO RESIDUAL DE LA FÓRMULA DE TAYLOR

Definición 4. *Sea la función f definida en cierto entorno del punto x_0 y tiene en este punto derivadas de todos los órdenes. Entonces la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{37.24}$$

se llama serie de Taylor de la función f en el punto x_0.

Para $x_0 = 0$ la serie (37.24) se llama también serie de Maclaurin de la función $f(x)$.

Como sabemos, cualquier función analítica en el punto x_0 es infinitamente diferenciable en cierto entorno de este punto y es igual en este entorno a la suma de su serie de Taylor. Resulta que lo contrario, en general, no es cierto: existen funciones infinitamente diferenciables, pero que no son analíticas, y por consiguiente, no representables por su serie de Taylor.

Un ejemplo de esta función es la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{para} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{para} \quad x = 0 \end{cases} \tag{37.25}$$

Para $x \neq 0$ esta función tiene derivadas de todos los órdenes, las que se calculan fácilmente:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, \quad f''(x) = -\frac{6}{x^4} e^{-1/x^2} + \frac{4}{x^6} e^{-1/x^2},$$

y en general

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$$

donde $P_n(1/x)$ es un polinomio de cierto grado respecto a $1/x$ (n es el número de orden y no el grado del polinomio), es decir, $f^n(x)$ es una combinación lineal de los sumandos del tipo

$$\frac{1}{x^m} e^{-1/x^2}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots . \tag{37.26}$$

Esto se comprueba fácilmente por inducción. Haciendo el cambio de variable $t = \frac{1}{x^2}$ hallamos, aplicando la regla de L'Hospital, el límite del módulo de la expresión (37.26) cuando $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{1}{x^m} e^{-1/x^2} \right| = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^{m/2}}{e^t} = 0.$$

De aquí se deduce que el límite de la expresión (37.26) cuando $x \to 0$ también es igual a cero y que para cualquier $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\lim_{x \to 0} f^n(x) = \lim_{x \to 0} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = 0. \tag{37.27}$$

De la fórmula (37.27) para $n = 0$ y $n = 1$ se deduce que la función f es continua en el punto $x = 0$ y $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = 0$, por esto (véase el corolario 3 del teorema 3 del p. 11.2) $f'(0)$ existe y $f'(0) = 0$. Por inducción es fácil convencerse en forma semejante de que $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

De esta forma, todos los términos de la serie de Taylor de la función (37.25) en el punto $x_0 = 0$ son iguales a cero, por esto su suma para todos los x, también es igual a cero y, por lo tanto, no coincide con la propia función f. Observemos también que por el teorema 5 del p. 37.3, la función (37.25) no puede ser descompuesta en ninguna serie de potencias (ya que si esto fuera posible ésta sería una serie de Taylor), y esto significa que la función no es analítica.

Ejercicios. 6. ¿Se puede desarrollar la función $f(x) = e^{-1/x}$, $x > 0$, sobre el segmento $[0, 1]$ en una serie de Maclaurin?

7. Sea

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{cuando} \quad x \geqslant 0, \\ -1 & \text{cuando} \quad x < 0. \end{cases}$$

Demuéstrese que la función $\theta(x)e^{-1/x^2}$ puede definirse complementariamente para $x = 0$ de tal forma que como resultado se obtenga una función infinitamente diferenciable sobre todo el eje numérico.

Observemos que si una función se descompone, en cierto entorno de un punto dado, en una serie de potencias, entonces esta serie es única (véase el teorema 5 ó el teorema 7) y es su serie de Taylor. Sin embargo, una misma serie de potencias puede ser serie de Taylor para distintas funciones. Así, la serie de potencias con coeficientes nulos $\sum_{n=0}^{\infty} 0x^n$ es tanto serie de Taylor de la función idénticamente nula sobre todo el eje numérico: $f(x) = 0$, $x \in R$, como serie de Taylor para la función (37.25) en el punto $x = 0$.

Surge la pregunta: ¿cuándo la *serie de Taylor* (37.24) de la función $f(x)$ sobre cierto intervalo converge a $f(x)$? Para investigar esta cuestión, escribamos la *fórmula de Taylor* para la función f (véase el p. 13.1):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x) \tag{37.28}$$

la que es válida para cualquier $n = 0, 1, 2, \ldots$. En esta fórmula $r_n(x)$ denota el término residual de la fórmula de Taylor, y no el resto de la serie de Taylor, ya que con el resto de la serie no se puede operar hasta que se establezca que la serie converge, sólo en este caso se puede afirmar que el término residual de la fórmula de Taylor coincide con el resto de la serie de Taylor. Suponiendo

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

escribamos la fórmula (37.28) en la forma

$$f(x) = s_n(x) + r_n(x) \tag{37.29}$$

donde $s_n(x)$ es la suma parcial n-ésima de la serie de Taylor. De aquí se ve que para que la función f sea igual, sobre el segmento analizado, a la suma de su serie de Taylor, es decir, para que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$, es necesario y suficiente que *para todos los x de este intervalo su término residual en la fórmula de Taylor tienda a cero*,

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0. \tag{37.30}$$

Si esto tiene lugar, entonces de la fórmula (37.29) se deduce que el término residual de la fórmula de Taylor $r_n(x)$ es también la suma del resto n-ésimo de la serie de Taylor (37.24).

Teorema 8. *Sea la función f definida y continua junto con todas sus derivadas hasta el orden $n + 1$ inclusive, sobre el intervalo $(x_0 - h, x_0 + n)$, $h > 0$. Entonces el término residual $r_n(x)$ de su fórmula de Taylor* (37.29) *para todos los $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ puede ser escrito en las tres formas siguientes*:

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x - t)^n f^{(n+1)}(t)dt, \tag{37.31}$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{37.32}$$

donde ξ pertenece al intervalo con extremos en los puntos x_0 y x, y

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)]}{n!}(1 - \theta)^n(x - x_0)^{n+1} \tag{37.33}$$

donde $0 < \theta < 1$.

La fórmula (37.31) *se llama término residual de la fórmula de Taylor en forma integral, la fórmula* (37.32), *en la forma de Lagrange, y la* (37.33), *en la forma de Cauchy.*

DEMOSTRACIÓN. Del teorema fundamental del cálculo diferencial e integral (véase en el p. 29.3 el teorema 4), tenemos

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x_0) - \int_{x_0}^{x} f'(t)\,d(x - t).$$

Integrando por partes la integral en la parte derecha, obtendremos

$$f(x) = f(x_0) + [-f'(t)(x - t)]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x - t)dt =$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\int_{x_0}^{x} f''(t)(x - t)dt.$$

Supongamos que está demostrado para cierto $m \leqslant n$, que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x - t)^{m-1}dt. \tag{37.34}$$

Integremos por partes el último término otra vez:

$$\frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x - t)^{m-1}dt = -\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)d(x - t)^m =$$

$$= -\left.\frac{f^{(m)}(t)(x - t)^m}{m!}\right|_{x_0}^{x} + \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x - t)^m dt =$$

$$= \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m + \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x - t)^m dt$$

y sustituyamos esta expresión en (37.34):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x - t)^m dt.$$

Como resultado se ha obtenido la fórmula (37.34), en la cual m ha sido sustituida por $m + 1$.

De esta forma, la fórmula (37.34) está demostrada por el método de inducción para todos los $m \leqslant n$. Para $m = n$ su término residual tiene la forma (37.31).

Apliquemos ahora el primer teorema integral sobre el valor medio a la integral (37.31), sacando fuera del signo de la integral "el valor medio" de la derivada $f^{(n+1)}$ (véase el corolario del teorema 1 en el p. 28.2):

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x}(x - t)^n dt =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left[-\frac{(x - t)^{n+1}}{n + 1}\right]_{x_0}^{x} = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

donde ξ está sobre el intervalo con extremos en los puntos x_0 y x.

La fórmula (37.32) está demostrada.

Si aplicamos el teorema integral sobre el valor medio a la integral (37.31), sacando fuera del signo de la integral "el valor medio" de toda la función subintegral (véase el p. 28.2), entonces obtendremos

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n(x - x_0), \tag{37.35}$$

donde ξ, como antes, está sobre el intervalo con extremos en los puntos x_0 y x, es decir,

$$\xi = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 < \theta < 1.$$

De aquí $x - \xi = x - x_0 - \theta(x - x_0) = (x - x_0)(1 - \theta)$. Substituyendo esta expresión en (37.35), obtenemos la fórmula (37.33). □

Señalemos ahora una condición suficiente del desarrollo de una función en serie de potencias.

Teorema 9. *Sean la función f y todas sus derivadas acotadas en conjunto sobre el intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que para todos los $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ y todos los $n = 0, 1, 2, \ldots$, se cumple la desigualdad*

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M. \tag{37.36}$$

Entonces sobre el intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$ la función f se desarrolla en la serie de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < h. \tag{37.37}$$

DEMOSTRACIÓN. Ante todo, observemos que cualquiera que sea el número a,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0 \tag{37.38}$$

(véase el ejemplo 4 en el p. 4.9, además, esta igualdad se deduce directamente de que la expresión $a^n/n!$ es el término general de la serie convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ (véase el (36.4)).

Para demostrar la fórmula (37.37) es suficiente convencerse (véase (37.30)) de que

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0 \tag{37.39}$$

donde $r_n(x)$ es el término residual en la fórmula de Taylor de la función f. Tomemos $r_n(x)$ en la forma de Lagrange (véase (37.32)). De la desigualdad (37.36) se deduce que

$$|r_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\leqslant M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

donde $|\xi-x_0|<|x-x_0|<h$. Por cuanto según (37.38)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0,$$

entonces para $|x-x_0|<h$ se cumple la condición (37.39). □

Ejercicio 8. Sustituyamos en el teorema 8 la condición de acotación de las derivadas $f^{(n)}(x)$, $n=1,2,\ldots$, sobre el intervalo (x_0-h, x_0+h) por la condición de su acotación sólo en el punto x_0, es decir, supongamos que existe $M>0$ tal que para todos los n se cumple la desigualdad $|f^{(n)}(x_0)|\leqslant M$. Entonces, evidentemente, la serie (37.37) converge y además absolutamente sobre todo el intervalo (x_0-h, x_0+h) ya que $\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n\right|\leqslant$ $\leqslant\frac{M(x-x_0)^n}{n!}$ *y la serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n!}$ converge para todos los x (véase la serie (36.4)). ¿Si se deduce de aquí la afirmación del teorema 9?

37.6. DESARROLLO DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES EN SERIES DE TAYLOR

Ante todo hallemos el desarrollo en serie de algunas de las principales funciones elementales.

1. *Desarrollo en serie de la función* $f(x)=e^x$. Ya que $f^{(n)}(x)=e^x$, entonces para cualquier $h>0$ dado, para todos los $x\in(-h,h)$ y todos los $n=0,1,\ldots$

$$0<f^{n}(x)<e^h.$$

De esta forma, las condiciones del teorema 9 se cumplen ($x_0=0$), por esto la función e^x se desarrolla en la serie de Taylor (37.34) sobre cualquier intervalo finito y, por consiguiente, sobre todo el eje real. Por cuanto en el caso dado $f^{(n)}(0) = 1$, entonces esta descomposición tiene la forma

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{37.40}$$

Recordemos que en el p. 36.1 se estableció que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge absolutamente sobre todo el plano complejo*). Vemos ahora, que para los $z = x$ reales su suma es igual a e^x. En el caso de z esencialmente complejos, su suma por analogía se denota por e^z; de esta forma, la fórmula

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{37.41}$$

para los complejos z es la definición de la función e^z.

La definición dada es natural, en primer lugar porque en el caso de $z = x$ real esta función coincide con la función exponencial e^x, y en segundo lugar porque la función e^z conserva una serie de propiedades características de la función e^x. Mostremos, por ejemplo, que

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \tag{37.42}$$

para z_1 y z_2 complejos cualesquiera.

Sabemos que la serie (37.41) converge absolutamente, por esto las series

$$e^{z_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}, \quad e^{z_2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_2^m}{m!}$$

pueden multiplicarse término a término (véase el p. 35.10), además, ya que la serie que se obtiene en este caso también absolutamente converge, sus términos se pueden colocar en orden arbitrario. Juntemos todos los términos que contengan el producto $z_1^n z_2^m$ con igual suma $n + m$, y coloquemos estos grupos de términos según el crecimiento de $n + m$:

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= \sum_{n+m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+m} \frac{z_1^{(n+m-k)}}{(n+m-k)!} \cdot \frac{z_2^k}{k!} = \\ &= \sum_{n+m=0}^{\infty} \frac{1}{(n+m)!} \sum_{k=0}^{n+m} \frac{(n+m)!}{(n+m-k)!k!} z_1^{n+m-k} z_2^k = \\ &= \sum_{n+m=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^{n+m}}{(n+m)!} = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

*) Esto se deduce, por el teorema de Abel, también de la convergencia de la serie (37.40), demostrada por nosotros, sobre todo el eje real.

2. *Desarrollo en serie de* sh$x$ *y* ch$x$. Sustituyendo en la fórmula (37.40) x por $-x$ (esto significa sencillamente un cambio de notación), obtenemos

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}. \tag{37.43}$$

Sumando y restando las igualdades (37.40) y (37.43), y después dividiéndolas por dos, obtenemos

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \tag{37.44}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}. \tag{37.45}$$

En las partes derechas de estas fórmulas, por la unicidad del desarrollo de funciones en series de potencias están las series de Taylor de las funciones ch$x$ y sh$x$.

Ya que la función e^z está definida ahora para todos los z complejos, entonces sobre los valores esencialmente complejos del argumento se pueden extender también las funciones hiperbólicas sh$x$ y ch$x$, haciendo

$$\operatorname{ch} z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Las funciones ch$z$ y sh$z$, definidas de esta forma, para los z complejos se desarrollan en las series de potencias (37.44) y (37.45), que convergen sobre todo el plano complejo (en ellas por x en este caso se entiende un número complejo).

3. *Desarrollo en serie del* sen$x$ *y del* cos$x$. *Fórmulas de Euler.* Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ (véase el ejemplo 3 en el p. 10.1), por esto $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$ para todos los reales x. Por el teorema 9, de aquí se deduce que la función sen$x$ se desarrolla en una serie de potencias sobre todo el eje real. Recordando la fórmula de Taylor para el seno (véase el p. 13.3), obtenemos la serie de Taylor para el sen$x$:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{37.46}$$

Razonando de forma análoga y recordando la fórmula de Taylor para el coseno (véase el p. 13.3), obtenemos para ella la fórmula de Taylor

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \tag{37.47}$$

que también converge sobre todo el eje real.

Por el teorema de Abel (véase el p. 37.1), las series que se encuentran en los segundos miembros de las fórmulas (37.46) y (37.47), convergen también para cualquier complejo x; esto permite extender el seno y el coseno sobre los valores complejos del argumento, haciendo para cualquier complejo z

$$\operatorname{sen} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{37.48}$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}. \tag{37.49}$$

En el dominio complejo es fácil establecer la relación entre la función exponencial y las trigonométricas. Sustituyendo en la serie (37.41) z inicialmente por iz y después por $-iz$, tenemos

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!}; \quad e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n z^n}{n!}. \tag{37.50}$$

Observando ahora que

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{cuando } n = 4k, \\ i & \text{cuando } n = 4k+1, \\ -1 & \text{cuando } n = 4k+2, \\ -i & \text{cuando } n = 4k+3, \end{cases}$$

y, por consiguiente, $i^{2k} = (-1)^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, de (37.50) tendremos

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Comparando estas fórmulas con (37.48) y (37.49), obtendremos

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{37.51}$$

De ellas se deduce directamente también la fórmula

$$\cos z + i \operatorname{sen} z = e^{iz}. \tag{37.52}$$

Estas fórmulas, naturalmente, son válidas, en particular, para los z reales.

Las fórmulas (37.51) y (37.52) se llaman *fórmulas de Euler*. Señalemos dos aplicaciones sencillas de ellas.

Si en la fórmula (37.52) $z = \varphi$ es un número real, entonces

$$\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi = e^{i\varphi}.$$

Por esto el número complejo con módulo r y argumento φ

$$r = z(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$$

se puede escribir en la forma

$$z = re^{i\varphi}.$$

Haciendo aquí $z = -1$, y, por consiguiente, $\varphi = \pi$, obtendremos

$$e^{i\pi} = -1$$

que es una relación entre los números e, π e i.

Recordemos que los números π, e e i surgieron en matemática por motivos completamente distintos y alejados unos de otros: el número π, como la relación de la longitud de la circunferencia con respecto al diámetro; e, como la base de la función exponencial para la cual la derivada de la función coincide con la propia función y la unidad imaginaria i fue introducida para que cada ecuación cuadrática tuviera solución.

Con auyda de la fórmula de Euler es fácil hallar el módulo y el argumento del número e^z, donde $z = x + iy$. En efecto (véase (37.42)),

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y),$$

es decir, $|e^z| = e^x$, $\mathrm{Arg}\, e^z = y$.

El seno y el coseno en el dominio complejo tienen muchas propiedades que las poseen también en el dominio real, sin embargo no todas; surgen también nuevas propiedades.

Ejercicios. Demuéstrese que para cualquier complejo z:

9. $\mathrm{sen}(-z) = -\mathrm{sen}\,z$, $\cos(-z) = \cos z$.
10. $\mathrm{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$.
11. $\mathrm{sen}(z + 2\pi) = \mathrm{sen}\,z$, $\cos(z + 2\pi) = \cos z$.
12. Demuéstrese que para todos los $z \in C$ es válida la desigualdad $e^z \neq 0$.
13. Sea $\mathrm{tg}\,z \overset{\mathrm{def}}{=} \dfrac{\mathrm{sen}\,z}{\cos z}$. Demuéstrese que para todos los $z \in C$ se cumple la desigualdad $\mathrm{tg}\,z \neq \pm i$. *Indicación.* Exprésese $\mathrm{tg}\,z$ a través de la función exponencial e^z.
14. ¿Se pueden desarrollar las funciones $\sqrt{z}$, $\mathrm{sen}\sqrt{z}$, $\cos\sqrt{x}$ en la serie de potencias (37.3)?

Mostremos que los valores absolutos del seno y el coseno en el dominio complejo pueden ser mayores que la unidad y, más aún, tener no acotados sus valores absolutos.

Sustituyamos en las series (37.48) y (37.49) z por iz:

$$\mathrm{sen}\,iz = i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},\quad \cos iz = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Comparando las series obtenidas con las series (37.44) y (37.45) (para $x = z$), obtendremos

$$i\,\mathrm{sh}\,z = \mathrm{sen}\,iz,\quad \mathrm{ch}\,z = \cos iz.$$

En particular para $z = y$ real

$$|\mathrm{sen}\,iy| = |\mathrm{sh}\,y| \text{ y } |\cos iy| = \mathrm{ch}\,y$$

de donde se ve que sobre el eje imaginario las funciones sen z y cos z no son acotadas en valor absoluto.

En calidad de propiedad de nuevo tipo, que aparece para la función exponencial e^z en el domino complejo, señalemos ahora su periodicidad*). Precisamente, demostremos que la función e^z tiene periodo $2\pi i$:

$$e^{z + 2\pi i} = e^{x + i(y + 2\pi)} = e^x[\cos(y + 2\pi) + i\,\mathrm{sen}(y + 2\pi)] =$$
$$= e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\, y) = e^{x + iy} = e^z, z = x + iy.$$

4. *Desarrollo en serie de la función* $\ln(1 + x)$. La fórmula de Taylor para $\ln(1 + x)$ tiene la forma (véase el p. 13.3)

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + r_n(x).$$

Escribamos el término residual $r_n(x)$ en la fórmula de Lagrange. Notando que

$$[\ln(1 + x)]^{n+1} = (-1)^n \frac{n!}{(1 + x)^{n+1}}$$

obtendremos

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n + 1)(1 + \theta x)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, entonces $0 < \dfrac{1}{1 + \theta x} \leqslant 1$ y por esto $|r_n(x)| < \dfrac{1}{n + 1}$ de donde

$$\lim_{x \to \infty} r_n(x) = 0. \tag{37.53}$$

Si $-1 < x < 0$, entonces es conveniente escribir el término residual $r_n(x)$ en la forma de Cauchy:

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{(1 - \theta)^n}{(1 + \theta x)^{n+1}} x^{n+1}.$$

En este caso

$$0 < \frac{1 - \theta}{1 + \theta x} = \frac{1 - \theta}{1 - \theta |x|} < 1,$$

ya que en el numerador de la fraccion $\dfrac{1 - \theta}{1 - \theta|x|}$ de la unidad se resta un número mayor que en el denominador, además de esto

$$\frac{1}{1 + \theta x} = \frac{1}{1 - \theta|x|} < \frac{1}{1 - |x|}.$$

---

*) Si la función f está definida sobre cierto conjunto de números (en general complejos) X, entonces el número $T \in C$ se llama su *período* si para cada $x \in X$ tenemos $x \pm T \in X$ y $f(x + T) = f(x)$. La función que tiene período se llama *periódica*.

por esto

$$|r_n(x)| \leqslant \left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n \cdot \frac{1}{|1+\theta x|}|x|^{n+1} \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},$$

de donde para $-1 < x < 0$ también obtenemos (37.53).

De esta forma,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \tag{37.54}$$

para todos los $x \in (-1; 1]$.

Para $x = -1$ la serie, que aparece en el segundo miembro de la igualdad (37.54), se diferencia de la serie armónica sólo en el factor -1 y por esto diverge. Diverge también para todos los valores de x tales que $|x| > 1$, ya que en este caso el término n-ésimo de la serie (37.54) no tiende a cero, más aún (véase el p. 12.2),

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{n}\right| = +\infty.$$

5. *Desarrollo en serie del binomio* $(1+x)^\alpha$. La fórmula de Taylor para la función binominal tiene la forma (véase el p. 13.3)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + r_n(x). \tag{37.55}$$

Analicemos la serie correspondiente (llamada serie binominal con exponente α):

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n. \tag{37.56}$$

Si α es un entero no negativo, entonces la serie (37.56) contiene solamente un número finito de términos, distintos de cero, y, por lo tanto, converge para todos los x.

Analicemos ahora el caso cuando α no es un entero no negativo. En este caso en la serie (37.56) todos los términos son distintos de cero para $x \neq 0$.

Para la investigación de la convergencia absoluta de la serie (37.56) utilicemos el criterio de D'Alembert. Dicho de otra forma, apliquemos el criterio de D'Alembert a la serie con término n-ésimo:

$$u_n = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\right|.$$

Observando que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\alpha-n}{n+1}x\right| = |x|$ obtendremos que la serie (37.56) converge absolutamente, y por consiguiente, sencillamente converge para $|x| < 1$ y diverge para $|x| > 1$.

Sin embargo, del solo hecho de la convergencia de la serie binominal (37.56) para $|x| < 1$, no se puede aún hacer la conclusión de que su suma es igual a $(1+x)^\alpha$.

Para esto es necesario demostrar que en la fórmula (37.55) $r_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Observando que

$$[(1 + x)^\alpha]^{(n+1)} = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n)(1 + x)^{\alpha - n - 1},$$

escribamos el término residual $r_n(x)$ de la fórmula (37.55) en la forma de Cauchy:

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n)(1 + \theta x)^{\alpha - n - 1}}{n!}(1 - \theta)^n x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1$$

(θ depende de x y de n). Hagamos

$$A_n(x) = \frac{(\alpha - 1)\ldots[(\alpha - 1) - (n - 1)]}{n!}x^n,$$

$$B_n(x) = \alpha x(1 + \theta x)^{\alpha - 1}, \quad C_n(x) = \left(\frac{1 - \theta}{1 + \theta x}\right)^n;$$

entonces

$$r_n(x) = A_n(x)B_n(x)C_n(x).$$

Es evidente que $A_n(x)$ es el término general de la serie binominal con exponente $\alpha - 1$, y por consiguiente, por la convergencia de la serie binominal para $|x| < 1$, demostrada anteriormente,

$$\lim_{n \to \infty} A_n(x) = 0, \quad |x| < 1.$$

Más adelante, de que $1 - |x| < 1 + \theta x < 1 + |x|$ se deduce que los valores de $|B_n(x)|$ están incluidos entre las magnitudes

$$|\alpha x|(1 - |x|)^{\alpha - 1} \quad \text{y} \quad |\alpha x|(1 + |x|)^{\alpha - 1}$$

que no depende de θ, es decir, la sucesión $\{B_n(x)\}$ para un $x \in (-1, 1)$ dado, es acotada. Por último,

$$|C_n(x)| = \left|\frac{1 - \theta}{1 - \theta x}\right|^n \leqslant \left|\frac{1 - \theta}{1 - \theta|x|}\right|^n < 1.$$

De las propiedades establecidas de $A_n(x)$, $B_n(x)$ y $C_n(x)$ se deduce, que

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0, \quad |x| < 1.$$

De esta forma, para cualquier $x \in (-1, 1)$ es válida la igualdad

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n.$$

Problema 26. Demuéstrese que 1) en el punto $x = 1$ para $\alpha > -1$ la serie binominal converge, y para $\alpha \leqslant -1$ diverge;

2) en el punto $x = -1$ para $\alpha \geqslant 0$ la serie binominal converge absolutamente, y para $\alpha < 0$ diverge.

Además, cada vez, cuando la serie binominal (37.56) converge, su suma es igual a $(1 + x)^\alpha$.

37.7. MÉTODOS DE DESARROLLO DE LAS FUNCIONES EN SERIES DE POTENCIA

Diferenciando o integrando los desarrollos conocidos, en series de Taylor, se puede obtener el desarrollo de nuevas funciones en series de potencias. Así, por ejemplo, integrando la fórmula de la progresión geométrica

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \ldots + (-1)^n t^n + \ldots \tag{37.57}$$

en los límites desde 0 hasta x, $|x| < 1$ (esto es válido, ya que la serie (37.57) converge uniformemente sobre el segmento con extremos en los puntos 0 y x para $|x| < 1$), obtenemos la conocida fórmula (37.54):

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots .$$

Antes esta fórmula fue demostrada sobre el intervalo semiabierto $(-1; 1]$ y ahora sólo para el intervalo $(-1; 1)$. No obstante, por el segundo teorema de Abel sobre las series de potencias (p. 37.1), de la validez de la fórmula (37.54) sobre el intervalo $(-1; 1)$ se deduce inmediatamente su validez para $x = 1$. En efecto, la serie en la parte derecha de esta fórmula converge para $x = 1$ y, por lo tanto, su suma es continua en este punto (véase el teorema 3 en el p. 37.1), la función $\ln(1+x)$ también es continua para $x = 1$, por esto en ambos miembros de la igualdad (37.54) (si es conocido que es válida sobre el intervalo $(-1; 1)$) se puede pasar al límite cuando $x \to 1 - 0$ y de esta forma demostrar su validez también para $x = 1$:

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Como resultado de la diferenciación o de la integración de la serie de potencias dada, a veces se logra obtener una serie, cuya suma ya es conocida; esto permite calcular también la suma de la serie de potencias inicial.

Ejemplos. 1. Hallemos el desarrollo de la función $\operatorname{arcsen} x$ en serie. Observando que

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

desarrollemos $(\operatorname{arcsen} x)'$ en serie según la fórmula de desarrollo de una potencia del binomio (véase el p. 37.6):

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n} \tag{37.58}$$

El radio de convergencia de la serie obtenida es igual a la unidad (véase allí mismo). Integrando la serie (37.58) desde 0 hasta x, $|x| < 1$, obtendremos:

$$\operatorname{arcsen} x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

2. Desarrollemos la función arctg$x$ en serie de potencia y con ayuda de ella hallemos la serie numérica, cuya suma es igual a π.

Actuando para $|x| < 1$ de forma análoga al ejemplo 1, tenemos:

$$\operatorname{arctg} x = \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \qquad (37.59)$$

Observemos que la serie obtenida para $x = \pm 1$, por el criterio de Leibniz (véase el p. 35.9, el teorema 11) converge, ya que converge la serie con términos de signo variable:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Ya que la función arctg$x$ es continua para $x = \pm 1$, entonces por el segundo teorema de Abel para las series de potencias (véase en el p. 37.1, el teorema 3) la suma de la serie (37.59), siendo una función continua sobre el segmento $[-1, 1]$ y coincidiendo con arctg$x$ sobre el intervalo $(-1, +1)$, coincide con él también en los puntos extremos $x = \pm 1$. Dicho de otra forma, el desarrollo (37.59) es válido para el segmento $[-1, +1]$. Tomando en este desarrollo, por ejemplo, $x = 1$ y observando que $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, obtendremos

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Esta serie se llama *serie de Leibniz*.

Señalemos que el arco tangente está definido sobre todo el eje numérico, en particular, también fuera del segmento $[-1, 1]$. Sin embargo, su desarrollo en la serie de potencias (37.59) es válido sólo sobre este segmento. Fuera de este segmento la serie (37.59) diverge, de lo que es fácil convencersé, hallando su radio de convergencia, por ejemplo, a base de la fórmula (37.8'). El análisis de este fenómeno se realiza en la teoría de las funciones de variable compleja.

3. Hallemos la suma de la serie

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n. \qquad (37.60)$$

El radio de convergencia de esta serie es igual a la unidad. Es fácil convencerse de esto, por ejemplo, a partir del criterio de D'Alembert

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+1}}{nx} \right| = |x|.$$

Por lo tanto, la serie (37.60) converge absolutamente para $|x| < 1$ y diverge para $|x| > 1$. De (37.60) se deduce que

$$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad |x| < 1.$$

Integremos esta serie término a término desde 0 hasta x, $|x| < 1$:

$$\int_0^x \frac{S(t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

y después diferenciamos la identidad obtenida:

$$\frac{S(x)}{x} = \frac{d}{dx}\frac{x}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Como resultado obtenemos

$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

4. Hallemos la suma de la serie

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}. \tag{37.61}$$

El radio de convergencia de esta serie es igual a la unidad; es fácil convencerse de ello, por ejemplo, de la misma forma que en el caso de la serie (37.60). Diferenciando la serie (37.61), término a término

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

y utilizando el desrrollo del logaritmo (véase el p. 37.6), obtendremos

$$xS'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad |x| < 1 \quad \text{ó} \quad S'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

Observando que $S(0) = 0$, definitivamente obtendremos

$$S(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt.$$

De esta forma la respuesta aquí no se expresa en funciones elementales.

5. Durante el desarrollo de las funciones racionales en serie de Taylor es cómodo utilizar su desarrollo en fracciones elementales (véase el p. 23.6). Aclaremos este método con un ejemplo: hallemos el desarrollo de la función

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

en serie de Taylor en los entornos de los puntos $z_0 = 0$, $z_0 = \dfrac{3}{2}$ y $z_0 = 4$. Desarrollando la función $f(z)$ en fracciones elementales, obtendremos

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{2}{2-z}.$$

Hallemos inicialmente la serie de Taylor para $f(z)$ en el entorno de $z_0 = 0$. Observemos que las fracciones

$$\frac{1}{1-z} \quad \text{y} \quad \frac{2}{2-z} = \frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}$$

representan las sumas de las progresiones geométricas infinitas

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

con denominadores z y $\dfrac{z}{2}$ a condición de que $|z| < 1$ y, respectivamente, que $\left|\dfrac{z}{2}\right| < 1$. Ambas condiciones se cumplen cuando se cumple la primera. De esta forma

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) z^n, \quad |z| < 1.$$

Este es el desarrollo de la función $f(z)$ en serie de Taylor en un entorno del punto $z_0 = 0$, además, el radio de convergencia de la serie obtenida es igual a 1. En efecto, por lo demostrado, éste no puede ser menor que 1 (la serie de potencias obtenida converge para $|z| < 1$), y por otra parte tampoco puede ser mayor que 1, ya que a la distancia unidad del punto $z_0 = 0$ se tiene el punto $z_1 = 1$, para el cual $\lim\limits_{z \to z_1} f(z) = \infty$ y por esto el desarrollo de la función $f(z)$ en serie de potencias no puede converger en el punto z_1.

Para obtener la serie de Taylor de la función $f(z)$ en el entorno del punto $z_0 = \dfrac{3}{2}$, utilicemos otra vez la suma de la progresión geométrica infinitamente decreciente, pero hagamos esto de otra forma, eliminando en los denominadores de las fracciones elementales, en las que se desarrolla la fracción $f(z)$, los términos $z - \dfrac{3}{2}$:

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{2}{2-z} = -\frac{1}{\dfrac{1}{2} + \left(z - \dfrac{3}{2}\right)} -$$

$$-\frac{2}{\dfrac{1}{2} - \left(z - \dfrac{3}{2}\right)} = -\frac{2}{1 + 2\left(z - \dfrac{3}{2}\right)} - \frac{4}{1 - 2\left(z - \dfrac{3}{2}\right)} =$$

$$= -2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n\left(z-\frac{3}{2}\right)^n - 4\sum_{n=0}^{\infty}2^n\left(z-\frac{3}{2}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}[(-1)^{n+1}-2]\left(z-\frac{3}{2}\right)^n.$$

Este cálculo es válido para la condición de que $2\left|z-\frac{3}{2}\right| < 1$ (la magnitud absoluta del denominador de las progresiones geométricas analizadas es menor que la unidad), es decir,si $\left|z-\frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2}$. Razonando igual que en el caso de $z_0 = 0$, obtenemos que el radio de convergencia de la serie obtenida es igual a $\frac{1}{2}$

Por último, en el caso de $z_0 = 4$ tenemos

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{2}{2-z} = \frac{1}{-3-(z-4)} - \frac{2}{-2-(z-4)} =$$

$$= -\frac{1}{3\left(1+\frac{z-4}{3}\right)} + \frac{1}{1+\frac{z-4}{2}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-4)^n}{3^n} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-4)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^n}\right](z-4)^n.$$

Todo esto es válido cuando $\left|\frac{z-4}{2}\right| < 1$, es decir, para $|z-4| < 2$. De aquí, como anteriormente, se deduce que el radio de convergencia de la serie obtenida es igual a 2.

Prestemos atención a que en todos los tres casos, el radio de convergencia de las series de potencias obtenidas es igual a distancia desde el punto z_0, en cuyo entorno se determinaba el desarrollo señalado, hasta el "punto singular" de la función, más cercano a él. En el caso dado hasta el punto tal que $\lim_{z\to z_1} f(z) = \infty$. En el caso de $z_0 = 0$ este punto es 1 y $|z_0 - z_1| = 1$; en el caso de $z_0 = \frac{3}{2}$ es $z_1 = 1$ ó $z_1 = 2$ y aquí $|z_1 - z_0| = \frac{1}{2}$; por último para $z_0 = 4$ tenemos $z_1 = 2$ y $|z_1 - z_0| = 2$. Este no es un fenómeno casual, se estudia detalladamente en la teoría de funciones de variable compleja.

Aplicando el método analizado se puede desarrollar en los correspondientes dominios las funciones racionales también en las series no sólo según las potencias positivas de z, sino también según las negativas.

Por ejemplo, para $|z| > 2$, tenemos

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{2}{2-z} = -\frac{1}{z\left(1-\dfrac{1}{z}\right)} + \frac{1}{z\left(1-\dfrac{2}{z}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)\frac{1}{z^n}$$

y en el anillo $1 < |z| < 2$:

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z\left(1-\dfrac{1}{z}\right)} - \frac{1}{1-\dfrac{z}{2}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}.$$

En el primer caso el desarrollo obtenido contiene sólo potencias negativas de z, en el segundo, tanto positivas como negativas. La teoría general de semejantes desarrollos también se estudia en la teoría de las funciones de variable compleja.

Se reduce también al desarrollo de fracciones racionales en series de potencias, el desarrollo en tales series, de las funciones de la forma $\ln\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $\operatorname{arctg}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ y $\operatorname{arcctg}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son ciertos polinomios. Para obtener los desarrollos necesarios se puede diferenciar las funciones dadas, como resultado se obtienen fracciones racionales. Al desarrollar estas fracciones racionales en series de potencias y al integrarlas, tendremos los desarrollos buscados.

Ejercicios. 14. Descompóngase en serie de potencia la función $(\operatorname{arcsen} x)^2$.

15. Hállese la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$.

37.8. FÓRMULA DE STIRLING

Con ayuda del desarrollo de la función logarítmica en serie de potencias se puede hallar fácilmente la fórmula, que describe el comportamiento asintótico del factorial $n!$ cuando $n \to \infty$. Está fórmula se llama *fórmula de Stirling* *) y puede ser escrita en la forma

$$n! \sim \frac{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}, \quad n \to \infty; \tag{37.62}$$

*) J. Stirling (1692 — 1770), matemático inglés.

según la definición de igualdad asintótica para las sucesiones (véase el p. 23:3) esto significa que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = 1.$$

Del desarrollo

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

se deduce que

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x^n}{n}\right) = 2x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k+1}.$$

Suponiendo aquí $x = \dfrac{1}{2n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, obtendremos

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\frac{1+\dfrac{1}{2n+1}}{1-\dfrac{1}{2n+1}} =$$

$$= \frac{2}{2n+1}\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots\right] > \frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n+\frac{1}{2}},$$

de donde

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1$$

o, potenciando y teniendo en cuenta que la función $\ln x$ es creciente,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} > e. \tag{37.63}$$

Hagamos

$$x_n \overset{\text{def}}{=} \frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}; \tag{37.64}$$

por cuanto según (37.63)

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} > 1,$$

entonces $x_n > x_{n+1}$, es decir, la sucesión $\{x_n\}$ decrece, y, además, está acotada inferiormente, $x_n \geqslant 0$. Por lo tanto, existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} x_n \overset{\text{def}}{=} a.$$

Por esto

$$x_n = a(1 - \varepsilon_n) \tag{37.65}$$

donde $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Mostremos que $a \neq 0$. Ya que

$$\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots < \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots\right] = \frac{1}{3}\,\frac{\frac{1}{(2n+1)^2}}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}} = \frac{1}{12n(n+1)},$$

entonces

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}$$

y, por consiguiente,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1 + \frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Por esto

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} < \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}} = \frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}},$$

es decir

$$x_n e^{-\frac{1}{12n}} < x_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}}.$$

De esta forma, la sucesión $y_n = x_n e^{-\frac{1}{12n}}$, $n = 1, 2, \ldots$, crece y ya que, evidentemente, $y_n < x_n$, entonces está acotada superiormente y, por lo tanto, tiene límite

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{12n}} = a.$$

Además, para cualquier n es válida la desigualdad $a > y_n > 0$, por esto $a > 0$.

Sustituyamos (37.65) en (37.64)

$$n! = a\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}(1+\varepsilon_n). \tag{37.66}$$

Para obtener la fórmula (37.62) resta sólo mostrar que $a = \sqrt{2\pi}$. Por la forma de Wallis (véase (30.8) en el p. 30.2)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \tag{37.67}$$

y según (37.66)

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = a\sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{(1+\varepsilon_n)^2}{1+\varepsilon_{2n}}.$$

Sustituyendo esta expresión en (37.67), obtendremos

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}a^2\frac{n}{2}\frac{(1+\varepsilon_n)^4}{(1+\varepsilon_{2n})^2} = \frac{a^2}{4},$$

de donde $a = \sqrt{2\pi}$. □

37.9* FÓRMULA Y SERIE DE TAYLOR PARA LAS FUNCIONES VECTORIALES

Analicemos la función vectorial $f\colon [a, b] \to R^n$, donde R^n es un espacio vectorial n-dimensional. Como ya se ha señalado, para las funciones vectoriales se generalizan los conceptos de límite, continuidad, derivada, diferencial e integral (véanse en el § 15 el p. 18.4 y el p. 30.4) sobre los cuales se extienden muchas propiedades de estos conceptos válidas para las funciones numéricas. No obstante, no para todas las propiedades esto tiene lugar. Así, en el p. 15.2 fue mostrado, que la afirmación, análoga a la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange, ya no es válida para las funciones vectoriales. Por esto, no es válida, naturalmente, tampoco su generalización en forma de fórmula de Taylor con término residual en forma de Lagrange. Mostremos que para las funciones vectoriales es válida la fórmula de Taylor con término residual en forma integral.

Teorema 10. *Supongamos que la función $f\colon (t_0 + h, t_0 - h) \to R^n$ es continua junto con todas sus derivadas, hasta la de orden $n + 1$ inclusive, sobre el intervalo $(t_0 - h, t_0 + h)$, $h > 0$. Entonces para cualquier $t \in (t_0 - h, t_0 + h)$* es válida la fórmula

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^n\cdot f^{(n+1)}\tau\,d\tau. \tag{37.68}$$

Corolario.

$$\left|f(t) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}t_0(t-t_0)\right|^k \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n!}(t-t_0)^{n+1}\sup_{(t_0-h,\,t_0+h)}|f^{(n+1)}(\tau)|,$$

$t \in (t_0 - h, t_0 + h)$.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Ante todo recordemos que si

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)), \tag{37.69}$$

entonces

$$f'(t) = (f_1'(t), \dots, f_n'(t)), \quad t \in (t_0 - h, t_0 + h), \tag{37.70}$$

$$\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau = \left(\int_{t_0}^{t} f_1(\tau)d\tau, \dots, \int_{t_0}^{t} f_n(\tau)d\tau \right). \tag{37.71}$$

De las suposiciones del teorema se deduce que cada función de coordenadas f_i es continua sobre el intervalo $(t_0 - h, t_0 + h)$ junto con todas sus derivadas, hasta la de orden $n + 1$ inclusive, y por esto para ella es válida la fórmula de Taylor con término residual en forma integral

$$f_i(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f_i^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k +$$

$$= \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} (t - \tau)^n f_i^{(n+1)}(\tau)d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

De aquí, por (37.70) y (37.71) se deduce inmediatamente la validez de la fórmula (37.68). □

El corolario se deriva de la desigualdad

$$\left| \int_{t_0}^{t} (t - \tau)^n f^{n+1}(\tau)d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant |t - t_0|^n \int_{t_0}^{t} \left| f^{(n+1)}(\tau)d\tau \right| \leqslant |t - t_0|^n \sup_{(t_0 - h, t_0 + h)} |f^{(n+1)}(\tau)| \left| \int_{t_0}^{t} d\tau \right| =$$

$$= |t - t_0|^{n+1} \sup_{(t_0 - h, t_0 + h)} |f^{(n+1)}(\tau)|. \ \square$$

Para las funciones vectoriales es válida también la fórmula de Taylor con término residual en la forma de Peano: si la función $f: (t_0 - h, t_0 + h) \to R^n$ tiene en el punto t_0 derivada de orden n, entonces

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k + o((t - t_0)^n).$$

Esto también se deduce inmediatamente de que para cada función de coordenadas f_i, $i = 1, 2, \dots, n$, en las suposiciones del teorema, tiene lugar la fórmula de Taylor con término residual en la forma de Peano, en el entorno del punto t_0 (véase el p. 13.1).

Si la función vectorial $f: (t_0 - h, t_0 + h) \to R^n$ tiene en el punto t_0 derivadas de todos los órdenes y para cualquier $t \in (t_0 - h, t_0 + h)$ se cumple la condición

$$\lim_{n \to \infty} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k \right] = 0,$$

entonces, sobre el intervalo $(t_0 - h, t_0 + h)$ la función f se desarrolla en una serie de potencias con coeficientes vectoriales

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(t_0)(t - t_0)^n$$

llamada su *serie de Taylor*.

37.10*. SERIES DE POTENCIAS ASINTÓTICAS

Es sabido (véase el p. 13.1), que si la función f está definida en un entorno del punto x_0 y es n veces diferenciable en él, entonces existe un polinomio $P_n(x)$ de grado, no mayor que n, precisamente el polinomio de Taylor tal que

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{37.72}$$

Además

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{37.73}$$

De (37.72) y (37.73) se deduce que la diferencia $f(x) - P_{n-1}(x)$ es representable en la forma

$$f(x) - P_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

y, de esta forma, tiene lugar la igualdad asintótica

$$f(x) - P_{n-1}(x) \sim \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x \to x_0.$$

De esta forma, los términos del polinomio de Taylor $P_n(x)$ (serie de Taylor, si la función f es infinitamente diferenciable en el punto x_0) se pueden definir sucesivamente como los sumandos de la forma $a_n(x - x_0)^n$ iguales asintóticamente a la diferencia $f(x) - P_{n-1}(x)$ cuando $x \to x_0$.

De forma análoga se puede actuar durante el estudio de las funciones en el infinito. Sea ahora, para mayor definición, la función f definida para $x \geqslant a$, y existe el límite finito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a_0 \tag{37.74}$$

y, por lo tanto $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - a_0] = 0$.

A veces surge la pregunta: ¿Cómo tiende precisamente la diferencia $f(x) - a_0$ a cero? ¿Cuál es el orden de decrecimiento de esta diferencia? Puede suceder que la diferencia señalada tiene al menos orden $\frac{1}{x}$, más aún que existe un número a_1 tal que

$$f(x) - a_0 \sim \frac{a_1}{x}, \quad x \to +\infty, \tag{37.75}$$

es decir, (véase el teorema 1 en el p. 8.3)

$$f(x) - a_0 = \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +\infty, \tag{37.76}$$

de donde

$$x[f(x) - a_0] = a_1 + xo(1/x), \quad x \to +\infty,$$

y ya que por la definición del símbolo o, $\lim\limits_{x \to +\infty} xo(1/x) = 0$, entonces

$$a_1 = \lim_{x \to +\infty} x[f(x) - a_0]. \tag{37.77}$$

Viceversa, de (37.77) se deduce que

$$x[f(x) - a_0] = a_1 + \varepsilon(x), \quad \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0,$$

y, por lo tanto

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{\varepsilon(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +\infty,$$

es decir, se cumple la igualdad asintótica (37.76). Si el a_1 señalado está hallado, entonces con frecuencia es necesario hallar, como se dice, "el término siguiente del desarrollo asintótico" de la función f, es decir, hallar el comportamiento asintótico de la diferencia $f(x) - \left(a_0 + \dfrac{a_1}{x}\right)$ cuando $x \to +\infty$. Esta diferencia, por (37.76), no es otra cosa que $o(1/x)$, $x \to +\infty$. Puede suceder que el número a_2 sea ral, que la diferencia señalada tiene al menos orden $\dfrac{1}{x^2}$, más aún, que existe

$$f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x}\right) \sim \frac{a_2}{x^2},$$

o lo que es lo mismo

$$f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x}\right) = \frac{a_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \to +\infty.$$

Esta condición es equivalente a la existencia del límite

$$\lim_{x \to +\infty} x^2\left[f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x}\right)\right] = a_2.$$

En general, si

$$S_{n-1}(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}, \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{37.78}$$

es un polinomio de grado no mayor que $n - 1$ respecto a la variable $1/x$ tal que

$$f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{x^{n-2}}\right) \sim \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}, \quad x \to +\infty, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

entonces puede ocurrir que existe la constante a_n, para la cual tiene lugar la igualdad asintótica

$$f(x) - S_{n-1}(x) \sim \frac{a_n}{x^n}, \quad x \to +\infty. \tag{37.79}$$

Esta condición es equivalente a lo siguiente:

$$f(x) - S_{n-1}(x) = \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to \infty \tag{37.80}$$

lo que, suponiendo

$$S_n(x) = S_{n-1}(x) + \frac{a_n}{x^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k}, \tag{37.81}$$

se puede escribir en la forma

$$f(x) - S_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty, \tag{37.82}$$

o, lo que es lo mismo, en la forma

$$\lim_{x \to +\infty} x^n[f(x) - S_n(x)] = 0. \tag{37.83}$$

Aquí, como antes, para $n = 1$, es fácil mostrar que la condición (37.80) es equivalente a la existencia del límite finito

$$\lim_{x \to +\infty} x^n[f(x) - S_{n-1}(x)] = a_n. \tag{37.84}$$

Si los límites señalados a_n, existen para todos los $n = 0, 1, 2, \ldots$, entonces se puede formar la serie

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \ldots . \tag{37.85}$$

Las series de este tipo también se pueden llamar *series de potencias*, más exactamente, series de potencias según las potencias enteras negativas de la variable x.

Definición 5. *Sea la función f definida para $x \geqslant a$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a_0$. Si existe la serie de la forma* (37.85), *las sumas parciales* (37.78) *de la cual satisfacen o bien la condición* (37.79), *o bien, lo que es equivalente, una de las condiciones* (37.82) *ó* (37.83), *entonces esta serie se llama serie asintótica (o desarrollo asintótico) en el sentido de Poincaré**) *de la función f cuando $x \to +\infty$.*

En este caso se escribe

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}. \tag{37.86}$$

Subrayemos que aquí el signo ~ significa no la igualdad asintótica en el sentido, como por ejemplo, se entiende en la fórmula (37.79), es decir, en el sentido de la definición 3 del p. 8.2, sino la correspondencia: la serie (37.85) corresponde a la función f.

Como se ha señalado, la condición (37.80) es equivalente a la condición (37.84), por esto, si la función f tiene, cuando $x \to +\infty$, la serie asintótica (37.85), entonces sus coeficientes a_n, $n = 1, 2, \ldots$, pueden ser sucesivamente hallados por la fór-

*) A. Poincaré (1854 — 1912), matemático francés.

mula (37.84). Para $n = 0$ se debe utilizar la fórmula (37.74). De aquí se deduce que si la función tiene, para $x \to \infty$, serie asintótica, entonces ésta es única y sus coeficientes se expresan por las fórmulas (37.74) y (37.84).

Recordemos que durante el desarrollo de una función en serie de potencias, también fue demostrada la unicidad de la serie de potencias en la que se desarrolla la función, más precisamente, fue demostrada su coincidencia con la serie de Taylor. Sin embargo, allí fue señalado que una misma serie de potencias puede ser serie de Taylor para diferentes funciones. Una situación semejante tiene lugar también para las series asintóticas: una misma serie de la forma (37.85) puede ser serie asintótica de diferentes funciones cuando $x \to +\infty$. Por ejemplo, la serie nula, es decir, la serie todos los coeficientes de la cual son iguales a cero,

$$a_n = 0, \quad x = 0, 1, 2, \ldots,$$

es serie asintótica para $x \to +\infty$ tanto de la función, igual a cero en todos los puntos del eje numérico: $f_1(x) = 0$, $-\infty < x < +\infty$, como de la función $f_2(x) = e^{-x}$, de lo que es fácil convencerse, calculando en estos casos sucesivamente los límites (37.84).

A diferencia del desarrollo de las funciones en series de potencias cuando la suma de la serie es la función dada, y, por lo tanto, la serie de potencias analizada converge, en la construcción de la serie asintótica de una función puede suceder que la serie obtenida no sólo no converge a la función dada, sino que en general diverge en todos los puntos. A pesar de esto, la serie asintótica (37.86) es un instrumento útil para su estudio, en particular para el cálculo de sus valores. Esto, evidentemente, está relacionado con que las sumas parciales de la serie asintótica (37.86) de la función, por la condición (37.82), dan una aproximación suficientemente buena de la propia función, además, mucho mejor mientras mayor sea x.

Aclaremos lo dicho en el ejemplo de la función

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t}\, dt, \quad x > 0. \tag{37.87}$$

Integrando n veces por parte, obtenemos

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} + \\ + (-1)^n n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\, dt. \tag{37.88}$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \tag{37.89}$$

es el desarrollo asintótico de la función (37.87). En efecto, si $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$, $n = 1, 2, \ldots$, es decir, $S_n(x)$ son las sumas parciales de la serie (37.89), entonces integrando por partes, según (37.88), tendremos:

$$|f(x) - S_n(x)| = n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\, dt =$$

$$= \frac{n!}{x^{n+1}} - (n+1)! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+2}}\, dt \leqslant \frac{n!}{x^{n+1}} = o\left(\frac{1}{x^n}\right),$$

es decir, se cumple la condición (37.82).

Al mismo tiempo, es fácil convencerse, según el criterio de D'Alembert, de que la serie (37.89) converge para todos los $x \in (-\infty, +\infty)$. Efectivamente, suponiendo

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

obtenemos

$$\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{|x|} = +\infty.$$

Así, la serie asintótica (37.89) de la función (37.87) diverge en todos los puntos. Sin embargo, a pesar de esto los valores de la función (37.87), por la condición (37.82), pueden ser calculados, con un gran grado de exactitud, mediante las sumas parciales de esta serie.

Mostremos que si la serie (37.85) converge a cierta función f:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad x \geqslant a > 0, \tag{37.90}$$

entonces es también la serie asintótica de esta función cuando $x \to +\infty$.

En efecto, sea

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{x^k},$$

y, por consiguiente,

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

Mostremos que

$$R_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad x \to +\infty, \tag{37.91}$$

y por esto, más aún, que

$$R_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty,$$

es decir, que

$$f(x) - S_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty,$$

dicho de otra forma, que se cumple la condición (37.82). Para esto analicemos la función $F(t) \overset{\text{def}}{=} f(1/t)$, $0 < t \leqslant 1/a$. Por (37.90) obtenemos la igualdad

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

en la cual la serie, que se encuentra en el segundo miembro, converge cuando $0 < t < 1/a$, de donde, por el teorema de Abel, se deduce que converge para todos los t tales que $|t| < 1/a$. Si

$$r_n(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k t^k, \quad |t| < 1/a,$$

entonces (véase el lema 1 en el p. 37.3), $r_n(t) = O(t^{n+1})$, $t \to 0$. Efectuando aquí el cambio de variable $t = \dfrac{1}{x}$ obtenemos (37.91).

Para concluir señalemos que la condición (37.82) de desarrollo de una función en serie asintótica de potencias, se puede sustituir por otra condición que externamente es más fuerte, pero que en esencia es equivalente. Enunciémosla en forma de lema.

Lema 3. *Para que la serie* (37.85) *sea asintótica, cuando $x \to +\infty$, para la función f es necesario y suficiente que*

$$f(x) - S_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad x \to +\infty, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{37.92}$$

La suficiencia de esta condición es evidente, ya que $O\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right) = o\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$ (recordemos que igualdades semejantes se leen sólo de izquierda a derecha), y, por consiguiente, cuando se cumple la condición (37.92) se cumplirá (37.82).

Viceversa, si se cumple la condición (37.82):

$$f(x) - S_{n+1}(x) = o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \to +\infty,$$

entonces, ya que $S_{n+1}(x) = S_n(x) + \dfrac{a_{n+1}}{x^{n+1}}$ obtendremos

$$f(x) - S_n(x) = \frac{a_{n+1}}{x^{n+1}} + o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right). \ \square$$

37.11*. PROPIEDADES DE LAS SERIES ASINTÓTICAS DE POTENCIAS

En este punto serán enunciadas y demostradas algunas de las propiedades fundamentales de los desarrollos de funciones en series asintóticas de potencias. En el futuro, en el p. 54.6., serán analizadas de forma más general las series asintóticas, no obligatoriamente las de potencias. Por cuanto en el presente punto se estudiarán sólo los desarrollos asintóticos de las funciones, cuando $x \to +\infty$, en series de potencias de la forma (37.85), entonces las llamaremos sencillamente *desarrollos asintóticos*.

I. *Si*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}, \quad x \to +\infty, \tag{37.93}$$

entonces para cualesquiera números λ *y* μ

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda a_n + \mu b_n}{x^n}, \quad x \to +\infty,$$

es decir, el desarrollo asintótico de la combinación lineal de funciones, que tienen desarrollo asintótico, es igual a la misma combinación lineal de los desarrollos asintóticos de estas funciones.

En efecto, si

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty, \tag{37.94}$$

entonces para cualesquiera números λ y μ

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda a_k + \mu b_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty. \ \square$$

II. *Si tienen lugar los desarrollos asintóticos* (37.93), *entonces*

$$f(x)g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^n}, \quad x \to +\infty,$$

donde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$, *es decir, el desarrollo asintótico del producto de funciones que tienen desarrollos asintóticos, es igual al producto de estos desarrollos distribuidos según las potencias crecientes de* $1/x$.

En efecto, si tiene lugar (37.94), entonces

$$f(x)g(x) = \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)\right)\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)\right) = a_0 b_0 + \frac{a_0 b_1 + a_1 b_0}{x} + \ldots + \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \ x \to +\infty. \ \square$$

III. *Si*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad x \to +\infty, \tag{37.95}$$

y $a_0 \neq 0$, entonces la función $1/f(x)$ también tiene el desarrollo asintótico

$$f(x) \sim \frac{1}{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{x^n}, \quad x \to +\infty,$$

y el coeficiente d_n de este desarrollo se expresa por los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ del desarrollo (37.95), $n = 0, 1, 2, \ldots$.

En efecto, de (37.95) se deduce (véase (37.74)), que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a_0$. Por esto existe el límite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0}.$$

Más adelante, se puede mostrar sucesivamente la existencia de los límites (37.84) para la función $1/f(x)$, calculándolos directamente. Por ejemplo

$$\lim_{x \to +\infty} x \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a_0} \right) = \lim_{x \to +\infty} x \left(\frac{1}{a_0 + \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{a_0} \right) =$$

$$= - \lim_{x \to +\infty} \frac{a_1 + xo(1/x)}{a_0 \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = - \frac{a_1}{a_0^2},$$

es decir, $d_1 = -a_1/a_0^2$.

De forma análoga se calcula $d_2, d_3, \ldots$ □

IV. *Si la función f es continua para $x \geqslant a > 0$ y tiene el desarrollo asintótico, que comienza con el término de orden $\frac{1}{x^2}$*

$$f(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad x \to +\infty, \tag{37.96}$$

entonces

$$\int_x^{+\infty} f(t)dt \sim \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{(n-1)x^{n-1}}, \quad x \to +\infty, \tag{37.97}$$

es decir, en el caso señalado las series asintóticas se pueden integrar término a término.

Demostremos esto. Sea

$$S_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{x^k}, \quad R_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - S_n(x) \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Por cuanto las funciones f y S_n són continuas para $x \geqslant a$, entonces también la función R_n es continua para $x \geqslant a$. Por (37.96)

$$R_n(x) = o(1/x^n), \quad x \to +\infty.$$

Por esto para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \geqslant a$ tal que para todos los $x \geqslant x_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{x^n}.$$

De aquí se deduce, en primer lugar, que la integral $\int\limits_{x_\varepsilon}^{+\infty} R_n(t)dt$ y por esto, también la integral $\int\limits_{x}^{+\infty} R_n(t)dt$, $x \geqslant x_\varepsilon$, existen y en segundo lugar, que para $x \geqslant x_\varepsilon$ tiene lugar la desigualdad

$$\left|x^{n-1} \int\limits_x^{+\infty} R_n(t)dt\right| \leqslant x^{n-1} \int\limits_x^{+\infty} |R_n(t)|\,dt \leqslant \varepsilon x^{n-1} \int\limits_x^{+\infty} \frac{dt}{t^n} = \frac{\varepsilon}{n-1}$$

y, por lo tanto, en virtud de que $\varepsilon > 0$ es arbitrario,

$$\lim_{x \to +\infty} x^{n-1} \int\limits_x^{+\infty} R_n(t)dt = 0. \tag{37.98}$$

Ahora, integrando la igualdad $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$ obtendremos

$$\int\limits_x^{+\infty} f(t)dt = \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{(k-1)x^{k-1}} + \int\limits_x^{+\infty} R_n(t)dt. \tag{37.99}$$

Por cuanto se cumple la condición (37.98), la igualdad (37.99) implica la validez del desarrollo asintótico (37.97) (véase 37.83)). □

V. *Si la función f se desarrolla en la serie asintótica*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad x \to +\infty, \tag{37.100}$$

y si ella tiene para $x \geqslant a$ derivada continua, la cual también, para $x \to +\infty$, se desarrolla en serie asintótica, entonces esta serie se obtiene diferenciando formalmente término a término la serie (37.100)

$$f'(x) \sim -\sum_{n=1} \frac{na_n}{x^{n+1}}, \quad x \to +\infty. \tag{37.101}$$

En efecto, sea

$$f'(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}, \quad x \to +\infty. \tag{37.102}$$

Por la fórmula de Newton — Leibniz para $x \geqslant a$ e $y \geqslant a$ cualesquiera

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)dt = \int_x^y \left[b_0 + \frac{b_1}{x} \left(f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t} \right) \right] dt =$$

$$= b_0(y - x) + b_1 \ln \frac{y}{x} + \int_x^y \left[f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t} \right] dt. \quad (37.103)$$

Por (37.102) $f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ $t \to +\infty$. Por lo tanto, la integral

$$\int_x^{+\infty} \left[f' t - b_0 - \frac{b_1}{t} \right] dt$$

converge. Por (37.100) existe el límite finito

$$\lim_{y \to +\infty} f(y) = a_0.$$

Por esto, pasando al límite cuando $y \to +\infty$ en (37.103), nos convencemos de que existe el límite finito

$$\lim_{y \to +\infty} [b_0(y - x) + b_1 \ln y/x].$$

Esto es posible sólo en el caso cuando $b_0 = b_1 = 0$. De esta forma, la igualdad (37.103) en el límite se convierte en la igualdad

$$a_0 - f(x) = \int_x^{+\infty} f'(t)dt;$$

además, por la condición $b_0 = b_1 = 0$ de (37.102) tenemos:

$$f'(x) \sim \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{b_n}{x^n}, \quad x \to +\infty;$$

de aquí, integrando término a término en los límites de x a $+\infty$, por la propiedad IV, obtendremos

$$a_0 - f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n+1}}{nx^n}, \quad x \to +\infty.$$

Pero de (37.100) se deduce que

$$a_0 - f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}.$$

Recordando que el desarrollo de una función, cuando $x \to +\infty$, en una serie asintótica de potencias es única, de la comparación de las series obtenidas para la función $a_0 - f(x)$ hallaremos que

$$b_{n+1} = -na_n, \quad n = 1, 2, \ldots \ \square$$

OBSERVACIÓN. Si una función f, continuamente diferenciable para $x \geqslant a$, se desarrolla, cuando $x \to +\infty$, en una serie asintótica, entonces su derivada puede no tener desarrollo asintótico cuando $x \to +\infty$. Por eso, la existencia del desarrollo asintótico de la derivada en la proposición V es esencial. En calidad de ejemplo analicemos la función $f(x) = e^{-x}\operatorname{sen} e^x$, $-\infty < x < +\infty$. No es difícil, con ayuda de la fórmulas (37.84), convencerse de que la función f, cuando $x \to +\infty$, se desarrolla en la serie asintótica nula, es decir, la serie (37.85), para la cual $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Su derivada $f'(x) = -e^{-x}\operatorname{sen} e^x + \cos e^x$ a ciencia cierta no tiene desarrollo asintótico cuando $x \to +\infty$, ya que incluso no tiene límite cuando $x \to +\infty$.

Ejercicio 16. Demuéstrese que

a) $$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - \ldots, x \to +\infty;$$

b) $$\int_x^{+\infty} e^{x^2-t^2}\,dt \sim \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \frac{1\cdot 3}{2^3x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4x^7} + \ldots, \quad x \to +\infty.$$

§ 38*. SERIES MÚLTIPLES

38.1. SERIES NUMÉRICAS MÚLTIPLES

En el presente párrafo se analizarán las así llamados series múltiples de la forma

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{\infty} u_{n_1 \ldots n_k}, \tag{38.1}$$

donde $u_{n_1 \ldots n_k}$ son números dados (en general, complejos), numerados por k índices n_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, cada uno de los cuales recorre independientemente la serie natural de los números: $n_i = 1, 2, \ldots$. La serie (38.1) se llama serie de multiplicidad k, y los números $u_{n_1 \ldots n_k}$ son sus términos.

Definamos con precisión este concepto. Comencemos con el concepto de sucesión múltiple.

Definición 1. *Sea X cierto conjunto; se llama sucesión de multiplicidad k de los elementos del conjunto X, la aplicación* $f: \underbrace{N \times N \times \ldots \times N}_{k \text{ veces}} \to X$ (N, como siempre, denota el conjunto de los números naturales).

El elemento $x = f(n_1, \ldots, n_k)$, $n_1 \in N_1, \ldots, n_k \in N$, se denota por $x_{n_1 \ldots n_k}$ y la propia sucesión por $\{x_{n_1 \ldots n_k}\}$.

La sucesión de multiplicidad uno se llama sencillamente sucesión.

Así, los elementos de una sucesión de multiplicidad k están "numerados" por k índices naturales. Analizaremos sucesiones numéricas múltiples, es decir, sucesiones múltiples cuyos elementos son números complejos, en particular, reales. Para hacer sencilla la notación nos limitaremos al caso $k = 2$. La generalización al caso de un natural $k \in N$ arbitrario se hace sin gran trabajo.

Definición 2. *El número $a \in C$ se llama límite de la sucesión doble $\{x_{mn}\}$ y se escribe $a = \lim_{m,n\to\infty} x_{mn}$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in N$ tal que para todos los $m \geqslant n_\varepsilon$, $n \geqslant n_\varepsilon$, $m \in N$, $n \in N$, se cumple la desigualdad $|x_{mn} - a| < \varepsilon$.*

Si una sucesión doble tiene límite, entonces se llama *convergente.*

Prestemos atención al hecho de que la definición de límite dada para una sucesión doble se diferencia de la definición de su límite, contenida en el p. 19.2, donde esta definición era un caso particular del límite de la función $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y)$. Aclaremos detalladamente esta diferencia. En la definición anterior $a = \lim_{(m,n)\to\infty} u_{mn}$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in N$ tal que para todos los $m \in N$ y $n \in N$ tales que $\sqrt{m^2 + n^2} > n_\varepsilon$, tiene lugar la desigualdad $|u_{mn} - a| < \varepsilon$. La condición $\sqrt{m^2 + n^2} > n_\varepsilon$ se puede cumplir a cuenta de la elección de un índice suficientemente grande entre los índices, el otro puede ser incluso igual a la unidad. En la definición 2 enunciada aquí, ambos índices m y n deben ser lo suficientemente grandes para asegurar que se cumpla la desigualdad $|u_{mn} - a| < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. En este párrafo utilizaremos sólo la definición 2.

Señalemos que no todas las propiedades de los límites las sucesiones ordinarias se extienden a las sucesiones dobles. Así, por ejemplo, la sucesión $u_{1n} = n$, $u_{mn} = 0, m \neq 1, n = 1, 2, \ldots, m = 2, 3, \ldots$, converge: $\lim_{m,n\to\infty} u_{mn} = 0$; no obstante esta sucesión, evidentemente, no está acotada.

Definición 3. *Una sucesión doble se llama sucesión que tiende a $+\infty$, y se escribe $\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = +\infty$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in N$ tal que para todos los $m \geqslant n_\varepsilon$, $n \geqslant n_\varepsilon$, $m \in N$, $n \in N$, se cumple la desigualdad $x_{mn} > \varepsilon$.*

De forma análoga se define los límites infinitos $\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = -\infty$ y $\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \infty$.

Como es usual, por límite (en el caso dado de una sucesión doble) se entiende límite finito si no se dice otra cosa.

Definamos ahora una serie doble.

Definición 4. *Sea dada la sucesión doble $\{u_{mn}\}$. Formemos la sucesión numérica doble*

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} u_{kl} \tag{38.2}$$

El par de sucesiones $\{u_{mn}\}$, $\{S_{mn}\}$ se llama serie doble y se denota por

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}. \tag{38.3}$$

Los elementos de la sucesión doble $\{u_{mn}\}$ se llaman *términos de la serie* (38.3), y los elementos de la sucesión doble $\{S_{mn}\}$, *sumas parciales* de esta serie.

Definición 5. *La serie doble* (38.3) *se llama convergente si la sucesión de sus sumas parciales converge. Su límite se llama suma de la serie*; *además, si*

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = S, \tag{38.4}$$

entonces se escribe

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} = S.$$

Si el límite finito (38.4) *no existe, entonces la serie* (38.3) *se llama divergente. Si existe uno de los límites infinitos*

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = +\infty, \quad \lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = -\infty, \tag{38.5}$$

entonces respectivamente se escribe

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} = +\infty, \quad \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} = -\infty.$$

OBSERVACIÓN. El contenido de la definición de serie como par de sucesiones se ve claramente en el ejemplo de las series múltiples. Por ejemplo, si está dada la sucesión $\{u_{mn}\}$, entonces la sucesión de "sumas parciales" que le corresponde puede ser dada no sólo de la forma señalada anteriormente (38.2), sino también de otra forma. Junto con las sumas (38.2), definidas anteriormente y llamadas *rectangulares* (en ellas se suman los elementos u_{kl}, a los cuales corresponden los puntos (k, l) del plano xy, contenidos en el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant m$, $0 \leqslant y \leqslant n$), se analizan las sumas *triangulares* $T_r = \sum\limits_{k+l<r} u_{kl}$, $r = 1, 2, \ldots$, (el punto (k, l) se encuentra el el triángulo $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant r$), *las esféricas* $S_r = \sum\limits_{k^2+l^2 \leqslant r^2} u_{k,l}$, $r = 1, 2, \ldots$, (el punto (k, l) se encuentra en el círculo $x^2 + y^2 \leqslant r^2$) y otras. De esta forma para una misma sucesión $\{u_{mn}\}$ se tienen distintas sucesiones de sumas parciales, además en el caso de que converja una de ellas no obligatoriamente converja la otra. Por esto es natural analizar cada par, formado por la sucesión $\{u_{mn}\}$ de términos de la serie y algunas de sus "sumas parciales", como una serie independiente.

Señalemos que la sucesiones de sumas parciales de las series múltiples (por ejemplo, las sumas parciales T_r ó S_r) a diferencia de las sucesiones de las sucesiones de las sumas parciales de las series de multiplicidad uno, no siempre definen unívocamente la sucesión de los términos generales de la serie.

Al mismo tiempo, en el ejemplo de las series múltiples se ve la conveniencia de ampliar el concepto de serie, precisamente, su definición, como par formado por una sucesión (múltiple), llamada sucesión de sus términos, y cierto conjunto $\{S_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, de sumas S_α de sus términos. Aquí $\mathfrak{A}$ es cierto conjunto, cuyos elementos α son juegos de índices múltiples $(n_1, \ldots, n_k)$ (en particular los índices ordinarios) y

$$S_\alpha = \sum_{(n_1, \ldots, n_k) \in \alpha} u_{n_1 \ldots n_k}.$$

Por ejemplo, para las series dobles se pueden analizar las sumas triangulares

$$S_r = \sum_{k+l \leqslant r} u_{kl}$$

para cualquier real no negativo r y llamar serie doble correspondiente al par $\{u_{kl}\}$, $\{S_r\}$, $r \in R$, $r \geqslant 0$.

En el futuro vamos a analizar sólo las sumas parciales rectangulares S_{mn}.

Ejemplo. Sean $|p| < 1$, $|q| < 1$, $p \in C$, $q \in C$, entonces la serie $\sum\limits_{mn=0}^{\infty} p^m q^n$ converge. Efectivamente, en este caso

$$S_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} p^{\mu} q^{\nu} = \sum_{\mu=0}^{m} p^{\mu} \sum_{\nu=0}^{n} p^{\nu} = \frac{1 - p^{m+1}}{1 - p} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Por esto existe el límite $\lim\limits_{m,n \to \infty} S_{mn} = \dfrac{1}{(1-p)(1-q)}$. De esta forma

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} p^m q^n = \frac{1}{(1-p)(1-q)}, \quad |p| < 1, \quad |q| < 1.$$

A las series múltiples se extiende una serie de propiedades de las series ordinarias (de multiplicidad uno), por ejemplo:

1°. *Si la serie* $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}$ *converge y* S *es su suma, entonces* $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \lambda u_{mn} = \lambda S$ *para cualquier número* λ.

2°. *Si las series* $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} u'_{mn} = S'$ *y* $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} u''_{mn} = S''$ *convergen, entonces*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} (u'_{mn} + u''_{mn}) = S' + S''.$$

Estas afirmaciones se demuestran fácilmente, de forma análoga al caso de las series de multiplicidad uno (esto se propone que lo haga el lector).

Demostremos ahora algunos teoremas sobre las series múltiples.

Teorema 1. *Si la serie* (38.3) *converge, entonces*

$$\lim_{m,n \to \infty} u_{mn} = 0.$$

Esto se deduce inmediatamente de la igualdad

$$u_{mn} = S_{mn} - S_{m-1n} - S_{mn-1} + S_{m-1\ n-1}$$

y de la condición (38.4). □

Teorema 2. *Si todos los términos de la serie* (38.3) *son no negativos*

$$u_{mn} \geqslant 0, \quad m, n = 1, 2, \ldots, \tag{38.6}$$

entonces siempre existe el límite, finito o infinito, de sus sumas parciales S_{mn}, *además*

$$\lim_{m,n \to \infty} S_{mn} = \sup_{m,n = 1, 2, \ldots} S_{mn}. \tag{38.7}$$

DEMOSTRACIÓN. Si se cumple la condición (38.6) y $m' \geqslant m$, $n' \geqslant n$, entonces $S_{m'n'} \geqslant S_{mn}$.

Más adelante, si $S = \sup\limits_{m,n=1,2,\ldots} S_{mn}$ y $S' < S$, entonces por la definición de cota superior existen los números m_0 y n_0 tales que $S_{m_0 n_0} > S'$.

Hagamos $N = \max\{m_0, n_0\}$, entonces para $m \geqslant N$ y $n \geqslant N$

$$S_{mn} \geqslant S_{NN} \geqslant S_{m_0 n_0} > S'$$

y ya que $S_{mn} \leqslant S$, entonces $\lim\limits_{m,n\to\infty} S_{mn} = S$, es decir, se cumple la condición (38.7). □

Corolario. *En las suposiciones del teorema, la serie* (38.3) *converge si y sólo si sus sumas parciales están acotadas.*

La demostración del corolario es evidente.

Para las series dobles con términos no negativos es válido el criterio de comparación.

Teorema 3. *Si la serie* $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ *converge y existe* $c > 0$ *tal que para todos los* $m, n = 1, 2, \ldots$, *se cumple la desigualdad*

$$0 \leqslant u_{mn} \leqslant c a_{mn},$$

entonces la serie $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}$ *también converge.*

Esto se deduce inmediatamente del corolario del teorema 2, ya que para cualesquiera naturales m y n se cumplen las desigualdades

$$\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} u_{\mu\nu} \leqslant \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}.$$

De la serie doble (38.3) se pueden formar formalmente dos series, las así llamadas series reiteradas. Para esto inicialmente se debe efectuar la sumación respecto a un índice, fijando el otro, y después realizar la sumación respecto al índice restante:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} \tag{38.8}$$

De forma análoga al teorema demostrado anteriormente sobre los límites reiterados (véase el teorema 1 en el p. 19.2), se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 4. Si converge la serie doble (38.3) y para todos los $n = 1, 2, \ldots$, converge la serie $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_{mn}$, entonces la serie reiterada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} u_{mn}$ también converge y su suma es igual a la suma de la serie dada (38.3).

Definición 6. *La serie* (38.3) *se llama absolutamente convergente si converge la serie formada por los valores absolutos de sus términos, es decir, la serie*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |u_{mn}|. \tag{38.9}$$

Señalemos que si la serie (38.3) converge absolutamente, entonces su término general tiende a cero cuando crece ilimitadamente al menos uno de los índices:

$$\lim_{\text{máx}\{m,\, n\} \to +\infty} u_{mn} = 0.$$

En efecto, sea $\bar{S} = \sum_{m,\, n = 1}^{\infty} |u_{mn}|$, entonces para un $\varepsilon > 0$ cualquiera, existe el natural N tal que para $m > N$ y $n > N$ se cumple la desigualdad

$$0 < \bar{S} - \sum_{k,\, l = 1}^{m,\, n} |u_{kl}| < \varepsilon.$$

Por esto para máx $\{m, n\} > N + 1$ tendremos

$$|u_{mn}| \leqslant \sum_{\{\mu > m\} \cup \{\nu \geqslant n\}} |u_{\mu\nu}| \leqslant \bar{S} - \sum_{k,\, l = 1}^{N+1} |u_{kl}| < \varepsilon.$$

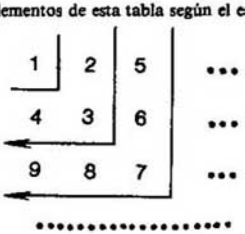
De la tendencia a cero ya señalada del término general de una serie absolutamente convergente, evidentemente se deduce que los términos de esta serie están acotados. Señalemos que para una serie convergente, que no sea absolutamente convergente, esto puede no tener lugar. Un ejemplo de tales series es, por ejemplo, la serie analizada a continuación (38.17) en el punto (1, 1).

Teorema 5. *Si la serie* (38.3) *converge absolutamente, entonces converge también cualquier serie* (*de multiplicidad uno, doble o reiterada*), *obtenida cambiando de lugar los términos de la serie dada* (*en particular converge también la propia serie dada*). *En este caso la suma de cualquiera de estas series coincide con la suma de la serie inicial* (38.3).

DEMOSTRACIÓN. Coloquemos los términos de la serie (38.3) en una matriz rectangular infinita, poniendo en su fila m los términos de la serie cuyos primeros números fijos son m, colocados según el orden creciente del segundo índice n:

$$\begin{matrix} u_{11} u_{12} u_{13} \ldots u_{1n} \ldots \\ u_{21} u_{22} u_{23} \ldots u_{2n} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{m1} u_{m2} u_{m3} \ldots u_{mn} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}$$

Numeremos ahora a los elementos de esta tabla según el esquema siguiente



El término de la serie (38.3), que tiene según esta numeración el número k, será designado por v_k. Analicemos la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \tag{38.10}$$

y mostremos que ella converge absolutamente, es decir, que converge la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|. \tag{38.11}$$

Denotemos las sumas,parciales de la serie (38.9) por S^*_{mn}, su suma por S^* y las sumas parciales de la serie (38.11) por S^*_k. Ante todo observemos que para cualquier suma S^*_k se encuentran los números m y n tales que todos los términos de la serie (38.11), que se incluyen en la suma S^*_k, aparecen también en la suma S^*_{mn}, entonces

$$S^*_k \leqslant S^*_{mn} \leqslant S^*.$$

De aquí se deduce (véase el p. 35.4) la convergencia de la serie (38.11).

De la convergencia absoluta de la serie (38.10) se deduce que para otra serie cualquiera de multiplicidad uno, formada por los términos de la serie (38.2), también converge y su suma es igual a la suma de la serie (38.10) (véase el p. 35.10). Sea

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = S.$$

Mostremos ahora que cualquier serie doble

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u'_{mn} \tag{38.12}$$

obtenida por cierta renumeración de los índices dobles de los términos de la serie dada (38.3), converge absolutamente y que su suma también es igual a S.

La convergencia absoluta de la serie (38.12) fácilmente se deduce de la convergencia absoluta de la serie (38.3), es decir, de la convergencia de la serie (38.9), y se demuestra de la misma forma como fue demostrada la convergencia absoluta de la serie (38.10). Demostremos ahora que la suma de la serie (38.12) es igual a S. Denotemos sus sumas parciales por S'_{mn}, y las sumas parciales de la serie (38.10) por S_k. Sea dado el número $\varepsilon > 0$. Por la convergencia de la serie (38.11) existe el número k_ε tal que

$$\sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{38.13}$$

entonces, como antes

$$|S - S_{k_\varepsilon}| = \left| \sum_{n=k_\varepsilon+1}^{\infty} v_k \right| < \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{38.14}$$

Seleccionemos el número N_ε tal que la suma parcial $S'_{N_\varepsilon N_\varepsilon}$ de la serie (38.12) contenga en calidad de sumandos todos los términos de la serie (38.10), que forman parte de la suma S_{k_ε}. Sea $m \geqslant N_\varepsilon$ y $n \geqslant N_\varepsilon$. Hagamos

$$S''_{mn} = S'_{mn} - S_{k_\varepsilon};$$

entonces, utilizando (38.13) y (38.14), obtendremos

$$|S - S'_{mn}| = |S - S_{k_\varepsilon}| + |S''_{mn}| < \varepsilon.$$

Así, S es la suma de cualquier serie (38.12), en particular, la suma de la propia serie (38.3).

Mostremos por último, que S es también la suma de las series reiteradas (38.8). En efecto, para cualquier n dado

$$\sum_{m=1}^{m_0} |u_{mn}| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |v_k| = S.$$

Por lo tanto, todas las series

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

convergen, y además, absolutamente.

Hagamos

$$u_n = \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}. \tag{38.15}$$

Fijemos de nuevo un número arbitrario $\varepsilon > 0$. Seleccionemos el número k_ε de tal forma que se cumpla la condición (38.13), y por lo tanto, también la condición (38.14). Más adelante, de forma semejante a como fue hecho anteriormente, seleccionemos el número N_ε, tal que la suma parcial $S_{N_\varepsilon N_\varepsilon}$ de la serie (38.3) contenga en calidad de sumandos todos los términos de la serie (38.10), que forman parte de la suma S_{k_ε}. Entonces para todos los $m \geqslant N_\varepsilon$ y $n \geqslant N_\varepsilon$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} u_{ji} - S_{k_\varepsilon} \right| \leqslant \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pasando en esta desigualdad al límite cuando $m \to \infty$, obtendremos (véase (38.15)):

$$\left| \sum_{i=1}^{n} u_i - S_{k_\varepsilon} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

De aquí, por (38.14) se deduce que para $n \geqslant N_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$\left| \sum_{i=1}^{n} u_i - S \right| \leqslant \left| \sum_{i=1}^{n} u_i - S_{k_\varepsilon} \right| + |S_{k_\varepsilon} - S| < \varepsilon.$$

Esto implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S. \ \square$$

Ejercicio 1. Generalícese el criterio de Cauchy sobre la convergencia de las sumas de multiplicidad uno al caso de las series múltiples.

38.2. SERIES DE FUNCIONES MÚLTIPLES

Definición 7. *La serie de la forma*

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 1} u_{n_1, \ldots, n_k}(x) \tag{38.16}$$

donde las funciones $u_{n_1, \ldots, n_k}(x)$ *están definidas sobre cierto conjunto* X, *se llama serie de funciones de multiplicidad* k, *y las sumas de la forma*

$$S_{m_1, \ldots m_k}(x) = \sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{m_1, \ldots, m_k} u_{n_1, \ldots n_k}(x),$$

sus sumas parciales.

Definición 8. *La serie* (38.16) *se llama convergente sobre cierto conjunto* X, *si para cada* $x_0 \in X$ *dado, converge la serie numérica múltiple*

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 1} u_{n_1, \ldots, n_k}(x_0).$$

Si la serie (38.16) *converge sobre* X, *entonces la función*

$$S(x) = \sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{\infty} u_{n_1 \ldots n_k}(x), \quad x \in X$$

se llama su suma.

A las series de funciones múltiples fácilmente se extienden los conceptos de convergencia uniforme de la serie, el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de una serie, el criterio de Weierstrass sobre convergencia uniforme, etc. No nos detendremos en esto.

Ejercicio 2. Definiendo el concepto de convergencia uniforme de una serie doble, demuéstrese que si la serie (38.16) converge uniformemente y sus términos son funciones continuas sobre el conjunto $X \subset R^n$, entonces también la suma de la serie (38.16) es una función continua sobre el conjunto X.

Definición 9. *Las series de la forma*

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 0}^{\infty} c_{n_1 \ldots n_k}(x_1 - x_1^{(0)})^{n_1} \ldots (x_n - x_n^{(0)})^{n_k},$$

donde $c_{n_1 \ldots n_k}$ *son números complejos, se llaman series de potencias múltiples.*

Aunque, como se ve de lo anterior, muchas afirmaciones que son válidas para las series de multiplicidad uno, se generalizan también para las series múltiples, las últimas tienen muchas particularidades específicas, que las diferencian esencialmente de las series de multiplicidad uno.

En calidad de ejemplo daremos uno serie de potencias doble con coeficientes reales, la que siendo analizada en el dominio real converge sólo en dos puntos del plano, precisamente en los puntos (0; 0) y (1; 1). De esta forma, el análogo del teorema de Abel para las series de potencias (véase el p. 37.1), en todo caso en el sentido directo, para las series dobles no existe. Este ejemplo muestra el peligro de utilizar las analogías que no estén reforzadas por demostraciones matemáticas.

Analicemos la serie

$$\sum_{m, n = 0}^{\infty} c_{mn} x^m y^n, \tag{38.17}$$

donde $c_{00} = 0$, $c_{0n} = c_{n0} = n!$, $n = 1, 2, \ldots$; $c_{1m} = c_{m1} = -m!$; $m = 1, 2, \ldots$, ; $c_{mn} = 0$, $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$.

Sus sumas parciales tienen la forma

$$S_{mn}(x,y) = (1-y)\sum_{k=1}^{m} k!x^k + y + (1-x)\sum_{l=2}^{n} l!y^l. \tag{38.18}$$

Es evidente que $S_{mn}(0, 0) = 0$ y $S_{mn}(1; 1) = 1$, $m, n = 1, 2, \ldots$, y por esto la serie (38.17) converge en los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

Observemos ahora que el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!z^n$$

es igual a cero (véase el ejemplo 1 en el p. 37.1), además sus sumas parciales

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} k!z^k, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

para $z > 0$ reales, evidentemente tiende a $+\infty$.

Mostremos que para $z < 0$ sus sumas parciales pares $S_{2n}(z)$ también tienden a $+\infty$. En efecto, uniendo para $z < 0$ para a par los términos contiguos, obtendremos

$$S_{2n}(z) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)!\,|z|^{2k-1}(2k|z| - 1).$$

Más adelante, observemos que para cualquier $z \neq 0$ dado, para los números $k > \frac{1}{|z|}$ se cumple la desigualdad

$$(2k-1)!\,|z|^{2k-1}(2k|z| - 1) > (2k-1)!\,|z|^{2k-1}$$

y que para $z \neq 0$ la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)!\,z^{2k-1}$$

diverge (esto, por ejemplo, se demuestra fácilmente de la misma forma como se demostró para $z \neq 0$ la divergencia de la serie en el ejemplo 1 del p. 37.1) y, por lo tanto, para $z > 0$ su suma es igual a $+\infty$, por esto también

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n}(z) = +\infty, \quad z \neq 0.$$

De lo dicho y de la igualdad (38.18) se deduce que si $(x, y) \neq (0, 0)$ ó $(x, y) \neq (1, 1)$ entonces cualquiera que sea el número $\varepsilon > 0$, siempre se pueden escoger los números m y n tales que

$$|S_{mn}(x, y)| > \varepsilon.$$

Y esto implica que la serie (38.17) para los (x, y) señalados diverge.

Observemos que aunque en el punto $(1, 1)$ la serie analizada converge, sus términos (es decir, en el caso dado coeficientes) no están acotados. Si los términos de la serie de potencias (38.17) en cierto punto (x_0, y_0) forman un conjunto acotado (esto tiene lugar, por ejemplo, si la serie converge absolutamente, véase el p. 38.1), entonces para esta serie es válido el análogo bidimensional del teorema de Abel (véase el p. 37.1).

Teorema 6. *Si en el punto* (x_0, y_0) *los términos de la serie* (38.17) *están acotados, entonces en cualquier punto* (x, y) *tal que* $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$ *la serie* (38.17) *converge absolutamente.*

DEMOSTRACIÓN. Si existe $M > 0$ tal que para todos los naturales m y n se cumple la desigualdad

$$|c_{mn}x_0^m y_0^n| \leqslant M,$$

entonces para $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$ obtendremos

$$|c_{mn}x^m y^n| = |c_{mn}x_0^m y_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^m \left|\frac{y}{y_0}\right|^n \leqslant M\left|\frac{x}{x_0}\right|^m \left|\frac{y}{y_0}\right|^n.$$

De aquí, por el criterio de comparación (véase el teorema 3) y la convergencia de la serie de la forma $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} p^m q^n$, $|p| < 1$, $|q| < 1$ (véase el ejemplo en el p. 38.1), se deduce la afirmación del teorema. □

Ejercicios. 3. El número S será llamado suma de la serie $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que para todos los números m y n que satisfacen la condición $m + n > N$, se cumple la desigualdad $|S_{mn} - S| < \varepsilon$. Aclárese si esta definición es equivalente o no a la definción 5 del p. 38.1.

4. El número S será llamado suma de la serie $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $\mathfrak{N}_\varepsilon = \{(m, n)\}$ de pares de índices m, n de los términos de la serie dada, tal que cualquiera que sea otro conjunto finito $\mathfrak{N}$ de pares de índices de los términos de esta serie, que contenga el conjunto $\mathfrak{N}_\varepsilon$: $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{N}_\varepsilon$, se cumple la desigualdad

$$\left|\sum_{(m,n)\in\mathfrak{N}} u_{mn} - S\right| < \varepsilon.$$

Aclárese si esta definición es equivalente o no a la definición 5 del p. 38.1 y a la definición enunciada en el ejercicio anterior.

Indice alfabético de autores

Indice alfabético de materias

A NUESTROS LECTORES

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y de ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a: Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú I-110, GSP, URSS.

MIR PUBLICA

Bugrov Ya., Nikolski S.

Cálculo diferencial e integral

Este es el segundo libro de la serie ¡Matemáticas superiores¿, que se compone además de otros dos volúmenes: ¡Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica¿ y ¡Ecuaciones diferenciales. Integrales múltiples. Series. Funciones de variable compleja¿.

En el presente volumen se exponen las siguientes partes: introducción al análisis matemático, cálculo diferencial e integral de funciones de una variable; cálculo diferencial e integral de funciones de varias variables; series.

Se estudian el concepto de límite de una sucesión, de función de su límite, de integral definida e indefinida, la aplicación de las mismas.

En el primer capítulo se dedican algunos parágrafos a los números reales, pese a que esta cuestón ha sido tratada en los últimos cursos de la escuela de enseñanza media.

En la presente obra se desarrollan todos los temas que integran los respectivos programos de los institutos técnicos de enseñanza superior.