

CAPÍTULO SEXTO

CÁLCULO INTEGRAL DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

§ 44. INTEGRALES MÚLTIPLES

44.1. CONCEPTO DE VOLUMEN EN UN ESPACIO n -DIMENSIONAL (MEDIDA DE JORDAN). CONJUNTOS MEDIBLES

Recordemos brevemente los conceptos principales relacionados con la definición de volumen n -dimensional (área, cuando $n = 2$) y demos a conocer la nueva definición de volumen (medida) de un conjunto la que se diferenciará de la introducida antes (véase el p. 31.1).

Sea R^n un espacio euclídeo n -dimensional ($n = 1, 2, 3, \dots$). Sus puntos se designarán, como siempre, con $x = (x_1, \dots, x_n)$, donde $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, son las coordenadas del punto x en cierto sistema de coordenadas fijado de una vez y para siempre. Fijemos un número entero no negativo $k, (k = 0, 1, \dots)$. Consideraremos el i -ésimo eje coordenado ($i = 1, 2, \dots, n$), es decir, un conjunto de puntos x cuyas coordenadas son $x_1 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_n = 0$. Por los puntos del eje que tienen las coordenadas del tipo $x_i = 10^{-k}m, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ tracemos unos hiperplanos de dimensión $n - 1$ ortogonales al eje mencionado. El conjunto de todos los hiperplanos de esta índole construidos para todos los ejes coordenados $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, engendra una familia de los cubos cerrados n -dimensionales del tipo

$$Q^n = \left\{ x : \frac{m_i}{10^k} \leq x_i \leq \frac{m_i + 1}{10^k}, i = 1, 2, \dots, n \right\}, \quad (44.1)$$

donde $m_i, i = 1, 2, \dots, n$, recorren independientemente uno del otro el conjunto de todos los números reales.

Los cubos (44.1) se llaman *cubos de rango k* , la totalidad de ellos se designa con $T_k, k = 0, 1, \dots$.

El conjunto de todos los cubos de rango k cubre, obviamente, todo el espacio, es decir,

$$R^n = \bigcup_{Q^n \in T_k} Q^n.$$

Dos cubos de un mismo rango pueden tener en calidad de puntos comunes sólo algunos de sus puntos de frontera. Cuando $n = 1$, el cubo (44.1) es, evidentemente, un segmento y cuando $n = 2$, un cuadrado.



Fig. 175

El número $1/10^{kn}$ lleva el nombre de volumen n -dimensional del cubo (44.1) y se denota con μQ^n :

$$\mu Q^n \stackrel{\text{def}}{=} 10^{-kn}.$$

Para un conjunto S , que representa la unión de un número finito o numerable de diferentes cubos Q_j^n de rango dado $k, j = 1, 2, \dots$:

$$S = \bigcup_j Q_j^n, Q_j^n \in T_k,$$

su volumen n -dimensional μS se determina por la igualdad

$$\mu S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \mu Q_j^n. \quad (44.2)$$

Por lo visto, μS es un número no negativo o $+\infty$.

Sea ahora X un conjunto arbitrario en R^n . Designemos mediante $s_k = s_k(X)$ el conjunto de puntos de todos los cubos n -dimensionales de rango k íntegramente dispuestos en X , y mediante $S_k = S_k(X)$, el conjunto de puntos de todos los cubos n -dimensionales de rango k , cada uno de los cuales se interseca con el conjunto X por un conjunto no vacío ($k = 0, 1, 2, \dots$):

$$s_k(X) = \bigcup_{Q^n \subset X} Q^n, S_k(X) = \bigcup_{Q^n \cap X \neq \emptyset} Q^n, Q^n \in T_k.$$

De este modo, todos los cubos de rango k , contenidos en s_k , se disponen en el conjunto X , mientras que los cubos de rango k , contenidos en S_k , forman un recubrimiento del conjunto X (fig. 175), es decir, $s_k(X) \subset X \subset S_k(X)$. Cabe notar que el conjunto X se dispone "estrictamente dentro" del poliedro $S_k = S_k(X)$, es decir, no se interseca con su frontera ∂S_k . Efectivamente, el punto $x \in X \cap \partial S_k$ no puede existir, puesto que si fuera punto de frontera para S_k , pertenecería a la cara de cierto

cubo de rango k . Ya que los cubos en consideración son cerrados, entonces, por definición del poliedro S_k , le pertenecerían a él todos los cubos de rango k que contienen dicha cara, pues ésta última contiene el punto $x \in X$. De este modo, el punto citado no sería punto de frontera para S_k .

Es evidente que

$$s_0 \subset s_1 \subset \dots \subset s_k \subset s_{k+1} \subset \dots, S_0 \supset S_1 \supset \dots \supset S_k \supset S_{k+1} \supset \dots,$$

y, por consiguiente, en virtud de la definición (44.2),

$$\mu s_0 \leq \mu s_1 \leq \dots \leq \mu s_k \leq \mu s_{k+1} \dots, \mu S_0 \geq \mu S_1 \geq \dots \geq \mu S_k \geq \mu S_{k+1} \geq \dots \quad (44.3)$$

De este modo, se han obtenido dos sucesiones monótonas cuyos términos son los elementos del conjunto ampliado de números reales \bar{R} (véase el p. 2.5), a saber, o bien los números reales no negativos, o bien $+\infty$. Por eso, para cualquier conjunto $X \subset R^n$ siempre existen los límites finitos o infinitos

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} \mu s_k(X) \text{ y } \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu S_k(X)$$

Definición 1. El límite finito o infinito $\lim_{k \rightarrow -\infty} \mu s_k(X)$ lleva el nombre de medida de Jordan¹⁾ n -dimensional inferior o interior del conjunto X y se designa mediante $\mu_* X$.

$$\mu_* X \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow -\infty} \mu s_k(X), \quad (44.4)$$

mientras que el límite $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu S_k(X)$ se denomina medida de Jordan n -dimensional superior o exterior del conjunto X y se designa mediante $\mu^* X$,

$$\mu^* X \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu S_k(X). \quad (44.5)$$

Si las medidas inferior $\mu_* X$ y superior $\mu^* X$ del conjunto X son finitas y coinciden, el conjunto se llama medible según Jordan. El valor general de las medidas de Jordan inferior y superior del conjunto medible X se designa con μX y se llama medida de Jordan n -dimensional o volumen n -dimensional del conjunto X :

$$\mu X = \mu_* X = \mu^* X. \quad (44.6)$$

Para un conjunto vacío debe ser, por definición, $\mu \emptyset = 0$.

A veces, en lugar de μX se escribirá $\mu_n X$, con el fin de subrayar que se trata aquí de una medida del conjunto X que se considera como el subconjunto del espacio precisamente n -dimensional.

En lo que sigue, para simplificar, la medida de Jordan se llamará simplemente medida y el conjunto medible según Jordan, conjunto medible.

Por conjunto medible, como lo muestra el mismo sentido de la palabra "medible", se entiende en las matemáticas tal conjunto puntual en R^n que pueda ser medido de tal o cual manera, es decir, a este conjunto se le puede asignar, rigiéndose por ciertas reglas, un número no negativo que representa un volumen en el caso tridimensional, una área en el caso bidimensional y una longitud, en el caso unidimen-

¹⁾C. Jordan (1838 — 1922), matemático francés.

sional. Si la dimensión de un espacio $n \geq 3$, el conjunto, medible según Jordan en este espacio, se llama *cubicable* y en el caso de $n = 2$, *cuadrable*. Los términos relativos a los conjuntos cubicable y cuadrable reflejan el hecho de que la medición mencionada arriba del conjunto se realiza por medio de los cubos, o los cuadrados, respectivamente.

Por cálculos inmediatos no es difícil comprobar que si el conjunto X representa en sí una unión de un número finito de diferentes cubos n -dimensionales ($n = 1, 2, \dots$) de rango dado, es medible y su medida de Jordan coincide con la medida determinada por la igualdad (44.2).

Para todo conjunto X es evidente que

$$\mu S_k(X) \geq 0, \quad \mu_* S_k(X) \geq 0,$$

cualquiera que sea $k = 0, 1, 2, \dots$.

Pasando al límite para $k \rightarrow \infty$, obtenemos $\mu_* X \geq 0, \mu^* X \geq 0$. De aquí se deduce la siguiente propiedad de la medida de Jordan.

Propiedad 1°. Para todo conjunto medible, $\mu X \geq 0$.

Observemos ahora que en virtud de las definiciones (44.4) y (44.5), para todo conjunto X queda definida una medida de Jordan finita o infinita, inferior y superior. Además, puesto que para todo $k = 0, 1, 2, \dots$ se verifica la desigualdad $0 \leq \mu_* S_k(X) \leq \mu S_k(X)$, entonces, al pasar al límite para $k \rightarrow \infty$, tendremos para cualquier conjunto X

$$0 \leq \mu_* X \leq \mu^* X.$$

De aquí proviene evidentemente que si la medida superior del conjunto X es igual a cero, $\mu^* X = 0$, el conjunto X es medible y $\mu X = 0$.

Si en el conjunto X se tiene un punto interior, existe tal número k_0 que el conjunto $S_{k_0}(X)$ será no vacío; por lo tanto, $\mu S_{k_0}(X) > 0$, de donde, en virtud de (44.3), (44.4) y (44.6), se deducirá que $\mu_* X > 0$. Efectivamente, si x es un punto interior del conjunto X , existe tal $\varepsilon > 0$, que el entorno esférico $U(x, \varepsilon)$ está contenido en X . Por ello, será suficiente tomar tal rango k_0 que la longitud de la diagonal de un cubo* de rango k_0 sea menor que ε :

$$10^{-k_0} \sqrt{n} < \varepsilon.$$

En este caso el cubo Q^n de rango k , que contiene el punto x (por lo menos un cubo de esta especie siempre existe) se dispondrá íntegramente dentro del conjunto $S_{k_0}(X)$ (fig. 176). Por esta razón

$$\mu S_{k_0}(X) \geq \mu Q^n > 0.$$

De lo expuesto se infiere que la *medida de Jordan inferior de cualquier conjunto abierto G es siempre positiva*: $\mu_* G > 0$.

Observemos que el volumen de un conjunto abierto, determinado anteriormente en el p. 31.1, coincide con su medida de Jordan inferior. No obstante, para construir un análogo, bastante general de la integral de Riemann en el caso de las fun-

* La diagonal de un cubo n -dimensional con la arista de longitud a es igual a $a\sqrt{n}$.

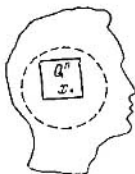


Fig. 176

ciones de varias variables, sólo el concepto de medida de Jordan inferior resulta insuficiente. Para este objeto es muy cómodo el concepto de conjunto medible según Jordan.

Si el conjunto X es acotado, $\mu_* X$ y $\mu^* X$ son siempre finitas. En efecto, del hecho de que el conjunto X es acotado proviene que dicho conjunto se interseca sólo con el conjunto finito de cubos de rango nulo y, por consiguiente, $S_0(X)$ se compone del número finito de cubos. Por ello, de acuerdo con (44.2), $\mu S_0(X) < +\infty$. Pero, para todo $k = 0, 1, \dots$

$$s_k(X) \subset S_k(X) \subset S_0(X).$$

Por esta razón

$$0 \leq \mu s_k(X) \leq \mu S_k(X) \leq \mu S_0(X).$$

De aquí, pasando al límite para $k \rightarrow +\infty$, obtendremos

$$0 \leq \mu_* X \leq \mu^* X \leq \mu S_0(X) < +\infty,$$

es decir, las medidas $\mu_* X$ y $\mu^* X$ son finitas.

Si, en cambio, el conjunto X no es acotado, para todo $k = 0, 1, 2, \dots$ el conjunto $S_k(X)$ se compone de un número infinito de cubos de rango k . Por eso, en virtud de la fórmula (44.2), para todo k tenemos $\mu S_k(X) = +\infty$, por consiguiente, también $\mu^* X = +\infty$, es decir, el conjunto X es a ciencia cierta no medible. De aquí:

si un conjunto es medible según Jordan quiere decir que es acotado.

Las medidas de Jordan, tanto superior como inferior, poseen la así llamada *propiedad de monotonía*. Enunciamosla en forma de un lema.

Lema 1. Si $X_1 \subset X_2$, se tiene

$$\mu_* X_1 \leq \mu_* X_2, \mu^* X_1 \leq \mu^* X_2. \quad (44.7)$$

Esto se deduce directamente del hecho de que para todo $k = 0, 1, 2, \dots$ tienen lugar las inclusiones

$$s_k(X_1) \subset s_k(X_2), \quad S_k(X_1) \subset S_k(X_2), \quad (44.8)$$

pues la primera de ellas significa que un cubo de rango k dispuesto en X_1 se dispone también en X_2 , mientras que la segunda es indicio de que un cubo de rango k que se interseca con el conjunto X_1 se corta también con X_2 . Ambas afirmaciones pro-

vienen de la inclusión $X_1 \subset X_2$. De (44.8), en virtud de (44.2), se desprende la validez de las desigualdades

$$\mu S_k(X_1) \leq \mu S_k(X_2), \quad \mu S_k(X_1) \leq \mu S_k(X_2).$$

Al hacer tender k hacia $+\infty$, obtenemos en límite (44.7). \square

Corolario 1. Si $X_1 \subset X_2$ y $\mu X_2 = 0$, se tiene $\mu X_1 = 0$.

Efectivamente, en vista del lema 1

$$0 \leq \mu^* X_1 \leq \mu^* X_2 = \mu X_2 = 0.$$

Por tanto, $\mu^* X_1 = 0$, de donde también $\mu X_1 = 0$. \square

Corolario 2. Si $\mu X = 0$ y \bar{X} es una clausura del conjunto X (véase el p. 18.2), entonces $\mu \bar{X} = 0$.

En efecto, de la condición $\mu X = 0$ se infiere que para todo $\varepsilon > 0$ existe un rango k tal que

$$\mu S_k(X) < \varepsilon.$$

El poliedro $S_k(X)$ se compone de un número finito de cubos cerrados (si el número de cubos de rango k contenidos en el conjunto $S_k(X)$ fuera infinito, entonces, de acuerdo con (44.2), su medida sería infinita: $\mu S_k(X) = +\infty$) y, por ende, es un conjunto cerrado: $\bar{S}_k(X) = S_k(X)$. Pero, $X \subset S_k(X)$, por lo cual $\bar{X} \subset \bar{S}_k(X) = S_k(X)$. De aquí $\mu^* X \leq \mu^* S_k(X) = \mu S_k(X)$, es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$:

$$\mu^* \bar{X} < \varepsilon.$$

Esto es posible sólo cuando $\mu \bar{X} = 0$. \square

Del lema 1 se desprende la siguiente propiedad para los conjuntos medibles.

Propiedad 2° (monotonía de la medida). Si X_1 y X_2 son unos conjuntos medibles según Jordan y $X_1 \subset X_2$, entonces

$$\mu X_1 \leq \mu X_2. \quad (44.9)$$

Lema 2 (semiaditividad de la medida superior). Para toda totalidad finita de conjuntos X_1, X_2, \dots, X_m tiene lugar la desigualdad

$$\mu^* \bigcup_{j=1}^m X_j \leq \sum_{j=1}^m \mu^* X_j. \quad (44.10)$$

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier rango $k = 0, 1, 2, \dots$ se verifica la igualdad

$$S_k \left(\bigcup_{j=1}^m X_j \right) = \bigcup_{j=1}^m S_k(X_j).$$

En efecto, cada cubo de rango k que se interseca con el conjunto $\bigcup_{j=1}^m X_j$, se interseca por lo menos con uno de los conjuntos X_j y viceversa. Por ello, en virtud de (44.2)

$$\mu S_k \left(\bigcup_{j=1}^m X_j \right) = \mu \bigcup_{j=1}^m S_k(X_j) \leq \sum_{j=1}^m \mu S_k(X_j).$$

Pasando aquí al límite para $k \rightarrow +\infty$, obtenemos (44.10). \square

Corolario. La unión de un número finito de los conjuntos de medida cero tiene medida cero.

En efecto, si $\mu X_j = 0, j = 1, 2, \dots, m$, entonces, en virtud de (44.10)

$$\mu^* \bigcup_{j=1}^m X_j \leq \sum_{j=1}^m \mu^* X_j = \sum_{j=1}^m \mu X_j = 0.$$

Por consiguiente, el conjunto $\bigcup_{j=1}^m X_j$ es medible y su medida superior y, por tanto, la medida son iguales a cero:

$$\mu \bigcup_{j=1}^m X_j = 0. \quad \square$$

Ejercicios. 1. Pruébese que la unión de una totalidad numerable de los conjuntos cuya medida de Jordan es cero puede no tener la medida cero.

2. Demuéstrese que si X_1 y X_2 son los conjuntos abiertos, entonces

$$\mu_*(X_1 \cup X_2) \leq \mu_* X_1 + \mu_* X_2.$$

Indicación. Es útil aprovechar la afirmación contenida en el ejercicio 14 del p. 18.3. ¿Será siempre válida esta desigualdad, es decir, sin la suposición de que los conjuntos X_1 y X_2 son abiertos?

3. Dése un ejemplo de tales conjuntos disjuntos X_1 y X_2 que

$$\mu^*(X_1 \cup X_2) \neq \mu^* X_1 + \mu^* X_2.$$

El criterio de mensurabilidad de los conjuntos se establece mediante el siguiente teorema.

Teorema 1. Para que el conjunto X sea medible según Jordan, es necesario y suficiente que sea acotado y que su frontera ∂X tenga medida de Jordan igual a cero:

$$\mu \partial X = 0. \quad (44.11)$$

Cualquiera que sea el conjunto X , designemos mediante $\sigma_k = \sigma_k(X)$ el conjunto de puntos de aquellos, y sólo aquellos, cubos de rango k que están contenidos en $S_k(X)$ y no se contienen en $s_k(X)$:

$$\sigma_k(X) = \bigcup_{Q^n \subset S_k, Q^n \not\subset s_k} Q^n.$$

De este modo, el conjunto $\sigma_k(X)$ se compone de los cubos cerrados y la diferencia en el sentido de la teoría de conjuntos $S_k(X) \setminus s_k(X)$ se contiene en el conjunto $\sigma_k(X)$ y, en el caso general, no coincide con éste. Por otra parte

$$\overline{S_k(X) \setminus s_k(X)} = \sigma_k(X)^*.$$

Antes de demostrar el teorema demos a conocer un lema.

*La raya por encima del conjunto significa, como siempre, su clausura (véase el p. 18.2)

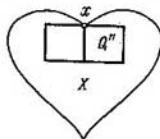


Fig. 177

Lema 3. Para todo conjunto acotado $X \subset \mathbb{R}^n$ son válidas las inclusiones

$$\partial X \subset \sigma_k(X) \subset S_k(\partial X). \quad (44.12)$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Mostremos primero que

$$\partial X \subset \sigma_k(X). \quad (44.13)$$

Por cuanto $X \subset S_k(X)$, se tiene $\bar{X} \subset \overline{S_k(X)}$. El conjunto $S_k(X)$ se compone, por ser cerrado el conjunto X , de un número finito de cubos cerrados y por esta razón es cerrado: $\overline{S_k(X)} = S_k(X)$. Por consiguiente, para cualquier $k = 0, 1, 2, \dots$, $\bar{X} \subset S_k(X)$, por ende, también $\partial X \subset S_k(X)$, pues $\partial X \subset \bar{X}$.

Tomemos un punto de frontera x del conjunto X : $x \in \partial X$. En virtud de la inclusión $\partial X \subset S_k(X)$ existe por lo menos un cubo Q^n de rango k tal que $x \in Q^n$ y $Q^n \subset S_k(X)$. Si Q^n no está contenido en $s_k(X)$, entonces, por lo visto, $Q^n \subset \sigma_k(X)$ y, por tanto, también $x \in \sigma_k(X)$.

Si, en cambio, $Q^n \subset s_k(X)$ (fig. 177), entonces, en virtud de las inclusiones $x \in Q^n$ y $Q^n \subset s_k(X) \subset X$, tenemos $x \in X$. Por eso, en este caso, todos los cubos de rango k que contienen el punto x , se disponen en $S_k(X)$, pues la intersección de todo cubo de esta índole con el conjunto X contiene el punto x y, por tanto, no es vacía. Todos estos cubos no pueden pertenecer al conjunto X , de lo contrario el punto x no sería punto de frontera del conjunto X , sino el interior. Por ello, entre todos los cubos de rango k que contienen el punto x existe por lo menos un cubo Q_0^n que no se contiene en $s_k(X)$, es decir, $Q_0^n \subset S_k(X)$, pero $Q_0^n \not\subset s_k(X)$. De aquí se deduce que $Q_0^n \subset \sigma_k(X)$, y, dado que $x \in Q_0^n$, entonces también en este caso $x \in \sigma_k(X)$. El punto x fue punto arbitrario de la frontera ∂X , y por eso, la inclusión (44.13) se ha demostrado.

La segunda inclusión (44.12), es decir, la inclusión $\sigma_k(X) \subset S_k(\partial X)$ se demuestra de un modo más fácil, sin que incluso se suponga la acotación del conjunto X . Todo cubo Q^n de rango k , que se dispone en $\sigma_k(X)$ tiene, a ciencia cierta, tanto los puntos del conjunto X (pues, en virtud de la definición de conjunto $\sigma_k(X)$, cualquier cubo de rango k , contenido en este conjunto, se contiene también en $S_k(X)$, y, por lo tanto, se interseca con X) como aquellos que no pertenecen a X (pues, de conformidad con la misma definición, ningún cubo de rango k , dispuesto íntegramente en X , es decir, perteneciente a $s_k(X)$, no se contiene en $\sigma_k(X)$). Como el cubo Q^n es un conjunto linealmente conexo, hay en él, a ciencia cierta, unos puntos de la frontera del conjunto X (véase el lema 9 en el p. 18.2). Esto significa precisamente que $Q^n \subset S_k(\partial X)$ y, como Q^n fue un cubo arbitrario de rango k , dispuesto en $\sigma_k(X)$, se tiene

$$\sigma_k(X) \subset S_k(\partial X). \quad \square \quad (44.14)$$

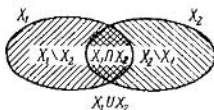


Fig. 178

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. NECESIDAD. Sea X un conjunto medible. De acuerdo con lo demostrado, es acotado. Luego, conforme a la definición de conjunto medible, las medidas inferior y superior del conjunto X son finitas e iguales: $\mu_* X = \mu^* X$, es decir,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu s_k(X) = \lim_{k \rightarrow -\infty} \mu S_k(X). \quad (44.15)$$

Por cuanto, conforme a la definición del conjunto $\sigma_k(X)$ y la fórmula (44.2),

$$\mu \sigma_k(X) = \mu S_k(X) - \mu s_k(X), \quad (44.16)$$

de (44.15) se infiere que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu \sigma_k(X) = 0. \quad (44.17)$$

En virtud de la inclusión (44.13) y la monotonía de la medida superior (véase (44.7), para todo $k = 0, 1, 2, \dots$ se verifica la desigualdad

$$\mu^* \partial X \leq \mu^* \sigma_k(X) = \mu \sigma_k(X).$$

Pasando al límite para $k \rightarrow +\infty$, en vista de (44.17), obtendremos $\mu^* \partial X = 0$. Por lo tanto, el conjunto ∂X es medible según Jordan y $\mu \partial X = 0$.

SUFICIENCIA. Sea X un conjunto acotado y $\mu \partial X = 0$. Por definición de la medida

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu S_k(\partial X) = 0. \quad (44.18)$$

En virtud de la inclusión (44.14) y la monotonía de la medida (véase la propiedad 2 de la medida) se verifica la desigualdad $\mu \sigma_k(X) \leq \mu S_k(\partial X)$, y por lo tanto (véase (44.16)), la desigualdad

$$\mu S_k(X) - \mu s_k(X) \leq \mu S_k(\partial X). \quad (44.19)$$

Por cuanto el conjunto X es acotado, su medida inferior $\mu_* X$ y la superior $\mu^* X$ son finitas y, por ende (véanse (44.4) y (44.5)) en la desigualdad (44.19) podemos pasar al límite para $k \rightarrow +\infty$. En vista de (44.18), obtendremos

$$\mu^* X - \mu_* X = 0, \text{ es decir, } \mu^* X = \mu_* X.$$

Esto significa precisamente la mensurabilidad según Jordan del conjunto X . \square

Con ayuda del teorema 1 se muestra fácilmente que al realizarse las operaciones de unión en el sentido de la teoría de conjuntos, como también las de intersección y sustracción su mensurabilidad no se perturba. Observemos previamente que para cualesquiera dos conjuntos X_1 y X_2 , dispuestos en el espacio R^n , son válidas las inclusiones (fig. 178).

$$\partial(X_1 \cup X_2) \subset \partial X_1 \cup \partial X_2, \quad (44.20)$$

$$\partial(X_1 \cap X_2) \subset \partial X_1 \cup \partial X_2, \quad (44.21)$$

$$\partial(X_1 \setminus X_2) \subset \partial X_1 \cup \partial X_2, \quad (44.22)$$

Demostremos, por ejemplo, la inclusión (44.21). Sea $x \in \partial(X_1 \cap X_2)$. Entonces, ante todo, $x \in \bar{X}_1 \cap \bar{X}_2$, pues de lo que $x \in \partial(X_1 \cap X_2)$ se deduce que en todo entorno del punto x se tienen puntos que pertenecen simultáneamente a X_1 y a X_2 , es decir, x es un punto de adherencia tanto del conjunto X_1 , como del X_2 . Si $x \in \partial X_1$ o bien $x \in \partial X_2$, o bien tienen lugar ambos casos, entonces, evidentemente, $x \in \partial X_1 \cup \partial X_2$. Si, en cambio, $x \notin \partial X_1$ y $x \notin \partial X_2$, entonces, como $x \in \bar{X}_1$ y $x \notin \partial X_1$, x es un punto interior para el conjunto X_1 y, por analogía, punto interior para el conjunto X_2 (pues la clausura de todo conjunto sólo se compone de los puntos interiores de este conjunto y sus puntos de frontera; cada uno de ellos puede ser, naturalmente, vacío). En este caso el punto x cuenta con los entornos $U_1(x) \subset X_1$ y $U_2(x) \subset X_2$, cuya intersección $U(x) = U_1(x) \cap U_2(x)$ será también el entorno del punto x , y, evidentemente, $U(x) \subset X_1 \cap X_2$. De este modo, para el punto x se ha encontrado un entorno $U(x)$, todos los puntos del cual pertenecen al conjunto $X_1 \cap X_2$, es decir, x es un punto interior y no de frontera de dicho conjunto: $x \notin \partial(X_1 \cap X_2)$. La contradicción obtenida muestra que el caso en que $x \notin \partial X_1$ y, a la vez, $x \notin \partial X_2$ es imposible, siempre que $x \in \partial(X_1 \cap X_2)$.

Ejercicio 4. Demuéstranse las inclusiones (44.20) y (44.22).

De las inclusiones (44.20) y (44.21) se establece con facilidad la validez de las inclusiones

$$\partial \bigcup_{j=1}^m X_j \subset \bigcup_{j=1}^m \partial X_j, \quad \partial \bigcap_{j=1}^m X_j \subset \bigcap_{j=1}^m \partial X_j, \quad (44.23)$$

empleando el método de inducción matemática para cualquier número finito de conjuntos.

Propiedad 3^o. La unión e intersección de un número finito de los conjuntos medibles según Jordan, como también la diferencia entre dos tales conjuntos, son conjuntos medibles según Jordan.

Efectivamente, si los conjuntos X_j son medibles, entonces, de acuerdo con el teorema 1, $\mu \partial X_j = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Por ello, debido al corolario del lema 2,

$\mu \bigcup_{j=1}^m \partial X_j = 0$, y en este caso (véase el corolario 1 del lema 1) de las inclusiones (44.23) se deduce, respectivamente, que

$$\mu \partial \bigcup_{j=1}^m X_j = 0, \quad \mu \partial \bigcap_{j=1}^m X_j = 0.$$

De aquí proviene que, en virtud del mismo teorema 1, los conjuntos $\bigcup_{j=1}^m X_j$ y

$\bigcap_{j=1}^m X_j$ son también medibles. Análogamente se demuestra la mensurabilidad

de la diferencia entre los conjuntos medibles.

Ahora podemos demostrar fácilmente que para la medida de Jordan se verifica la desigualdad análoga a la desigualdad (44.10) para la medida superior. Enunciemos la afirmación correspondiente.

Para cualquier totalidad finita de conjuntos medibles X_1, X_2, \dots, X_m es válida la desigualdad

$$\mu \bigcup_{j=1}^m X_j \leq \sum_{i=1}^m \mu X_i \quad (44.24)$$

En efecto, si los conjuntos X_i son medibles, se tiene $\mu^* X_i = \mu X_i$, y, de acuerdo con lo demostrado, la unión $\bigcup_{i=1}^m X_i$ es también medible y, por tanto, $\mu^* \bigcup_{j=1}^m X_j = \mu \bigcup_{j=1}^m X_j$. Por esta razón, la fórmula (44.24) en el caso que se considera coincide con la fórmula (44.10).

Propiedad 4° (aditividad de la medida). *La medida de una unión de un número finito de los conjuntos medibles según Jordan disjuntos dos a dos es igual a la suma de las medidas de estos conjuntos.*

De este modo, si X_i son conjuntos medibles, $X_i \cap X_j = \emptyset, i \neq j, i = 1, 2, \dots, m$, entonces

$$\mu \bigcup_{i=1}^m X_i = \sum_{i=1}^m \mu X_i. \quad (44.25)$$

Demostremos esto. Como para cualquier rango k es válida la inclusión $s_k(X_i) \cap s_k(X_j) \subset X_i \cap X_j$, de la condición $X_i \cap X_j = \emptyset$, para $i \neq j$, se infiere que $s_k(X_i) \cap s_k(X_j) = \emptyset, i \neq j$; por ello, de acuerdo con (44.2),

$$\sum_{i=1}^m \mu s_k(X_i) = \mu \bigcup_{i=1}^m s_k(X_i). \quad (44.26)$$

Si el cubo de rango k se dispone en cierto conjunto X_p , se dispone también en la unión $\bigcup_{i=1}^m X_i$ y, por consiguiente,

$$\bigcup_{i=1}^m s_k(X_i) \subset s_k \left(\bigcup_{i=1}^m X_i \right).$$

De aquí, en virtud de (44.26) y la monotonía de la medida (en el caso dado incluso de la fórmula (44.2)) se desprende que

$$\sum_{i=1}^m \mu s_k(X_i) = \mu \bigcup_{i=1}^m s_k(X_i) \leq \mu s_k \left(\bigcup_{i=1}^m X_i \right).$$

Pasando al límite para $k \rightarrow +\infty$, obtenemos

$$\sum_{i=1}^m \mu X_i \leq \mu \bigcup_{i=1}^m X_i. \quad (44.27)$$

Por otra parte, para cualesquiera conjuntos medibles se verifica la desigualdad (44.24). Evidentemente, de (44.24) y (44.27) proviene la igualdad (44.25), es decir, aditividad de la medida.

OBSERVACIÓN. De las propiedades 3 y 4 se infiere que si a un conjunto medible se le suma o se le resta un conjunto de medida cero, el conjunto obtenido será también medible y la medida de éste será igual a la del conjunto de partida. Efectivamente, si X es un conjunto medible y $\mu X_0 = 0$, entonces, según la propiedad 3 de la medida, los conjuntos $X \setminus X_0$ y $X \cup X_0$ son también medibles. Luego, de conformidad con la propiedad 4, para $X_0 \subset X$ y $\mu X_0 = 0$ tenemos

$$\mu X = \mu[(X \setminus X_0) \cup X_0] = \mu(X \setminus X_0) + \mu X_0 = \mu(X \setminus X_0).$$

Tomando en consideración la monotonía de la medida y las desigualdades (44.24) llegamos a que para todo X_0 , $\mu X_0 = 0$ se verifican las desigualdades

$$\mu X \leq \mu(X \cup X_0) \leq \mu X + \mu X_0 = \mu X,$$

de donde $\mu(X \cup X_0) = \mu X$.

De lo expuesto proviene, además, que si a un conjunto medible se le agrega o se le resta algún conjunto de sus puntos de frontera, se obtendrá nuevamente un conjunto medible de la misma medida que el conjunto dado. Esto se debe a que en virtud del teorema 1, la frontera de un conjunto medible y, por ende, cualquier subconjunto de ésta, tienen medida cero. De este modo, en particular, si el conjunto X es medible, su clausura $\bar{X} = X \cup \partial X$ es también medible, con la particularidad de que $\mu \bar{X} = \mu X$.

La afirmación recíproca no es cierta: *existen unos conjuntos no medibles según Jordan cuyas clausuras son medibles*. De ejemplo sencillo del conjunto semejante sirve el conjunto de todos los puntos reales en cierto segmento. Dicho conjunto es no medible (¿por qué?), mientras que su clausura está constituida por un segmento que es medible.

Los ejemplos de conjuntos medibles de dimensión tan grande como se quiera se pueden obtener construyendo cilindros cuyas bases son los conjuntos medibles. Enunciamos la definición del cilindro.

Definición 2. Sea X_0 un conjunto dispuesto en la hipersuperficie $R^{n-1} = [x : x_n = 0]$ del espacio R^n , y sean a y b unos números reales, $a \leq b$. El conjunto

$$X = \{x : (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) \in X_0, a \leq x_n \leq b\}$$

se llama cilindro n -dimensional de base X_0 y generatriz (paralela al eje coordenado x_n) de longitud $h = b - a$.

Es obvio que recurriendo a la noción de producto de los conjuntos (véase el p. 1.2° ó 41.2), podemos decir que el cilindro X es un producto de los conjuntos X_0 y del segmento $[a, b]$: $X = X_0 \times [a, b]$. Si X_0 es un conjunto acotado, el cilindro de

base X_0 es un conjunto acotado. De aquí se infiere que todo cilindro, de cuya base sirve un conjunto medible, es acotado, pues el conjunto medible es acotado.

Teorema 2. Si X_0 es un conjunto medible según Jordan del espacio R^{n-1} , todo cilindro n -dimensional X de base X_0 es un conjunto medible según Jordan del espacio R^n y

$$\mu_n X = h \mu_{n-1} X_0, \quad (44.28)$$

donde h es la longitud de la generatriz del cilindro X .

Corolario. Si la base del cilindro tiene medida $(n-1)$ -dimensional igual a cero, entonces el propio cilindro n -dimensional tiene medida n -dimensional que es también igual a cero.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Observemos, ante todo, que la proyección*) de cualquier cubo n -dimensional Q^n de rango k representa un cubo $(n-1)$ -dimensional Q^{n-1} también de rango k y

$$\mu Q^n = 10^{-k} \mu Q^{n-1}. \quad (44.29)$$

Designemos mediante $q_1^{n-1}, \dots, q_l^{n-1}$ los cubos $(n-1)$ -dimensionales de rango k que componen el conjunto $s_k(X_0)$ y mediante $Q_1^{n-1}, \dots, Q_m^{n-1}$, los cubos $(n-1)$ -dimensionales que componen el conjunto $S_k(X_0)$.

Sean $q_{ij}^n, \dots, q_{ip}^n$ los cubos n -dimensionales de $s_k(X)$ que se proyectan en el cubo $q_i^{n-1} \subset s_k(X_0)$. Por cuanto X es un cilindro, el número p de estos cubos n -dimensionales q_{ij}^n será el mismo para todo $i = 1, 2, \dots, l$, por lo cual

$$s_k(X) = \bigcup_{i=1}^l \bigcup_{j=1}^p q_{ij}^n. \quad (44.30)$$

Análogamente, el número r de cubos n -dimensionales Q_{ij}^n de $S_k(X)$ que se proyectan en un mismo cubo Q_i^{n-1} de $S_k(X_0)$ es igual para todo $i = 1, 2, \dots, m$, por lo cual

$$S_k(X) = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^r Q_{ij}^n. \quad (44.31)$$

La proyección del conjunto $\bigcup_{j=1}^p q_{ij}^n$ sobre el eje x_n es un segmento de longitud $p \cdot 10^{-k}$, con la particularidad de que

$$p \cdot 10^{-k} \leq h, \quad (44.32)$$

pues todos los cubos q_{ij}^n se contienen en $s_k(X)$ y, por consiguiente, en el cilindro X . En cuanto a la proyección del conjunto mencionado sobre el hiperplano R^{n-1} , ésta representa uno de los cubos q_i^{n-1} , por lo cual

*) Se llama proyección $pr_{x_n} X$ del conjunto $X \subset R^n$ sobre el hiperplano $R^{n-1} = \{x : x_n = 0\}$ un conjunto de puntos del tipo $(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ para cada uno de los cuales existe tal x_n que $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in X$.

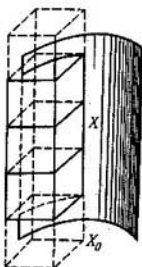


Fig. 179

$$\begin{aligned}\mu_n s_k(X) &= \sum_{i=1}^i \sum_{j=1}^p \mu_n Q_{ij}^n = \sum_{i=1}^i \sum_{j=1}^p \frac{1}{10^k} \mu_n \cdot 10^{n-1} Q_i^{n-1} = \\ &= \frac{p}{10^k} \sum_{i=1}^i \mu_n \cdot 10^{n-1} Q_i^{n-1} = \frac{p}{10^k} \mu_n \cdot 10^{n-1} s_k(X_0). \quad (44.33)\end{aligned}$$

La proyección de la "columna de cubos" $\bigcup_{j=1}^r Q_{ij}^n$ (fig. 179) sobre el eje x_n es un segmento de longitud $10^{-k}r$, con la particularidad de que

$$h \leq \frac{r}{10^k} \leq h + \frac{2}{10^k}. \quad (44.34)$$

Luego, cada columna de este género se proyecta sobre el hiperplano R^{n-1} en el cubo Q_i^{n-1} que o bien se contiene en $s_k(X_0)$ o bien en $\sigma_k(X_0) = \overline{s_k(X_0)} \setminus s_k(X_0)$ (el conjunto $\sigma_k(X_0)$ se ha introducido al demostrar el teorema 1). Por esta razón

$$\begin{aligned}\mu_n s_k(X) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r \mu_n Q_{ij}^n = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r \frac{1}{10^k} \mu_n \cdot 10^{n-1} Q_i^{n-1} = \\ &= \frac{r}{10^k} \sum_{i=1}^m \mu_n \cdot 10^{n-1} Q_i^{n-1} = \frac{r}{10^k} [\mu s_k(X_0) + \mu \sigma_k(X_0)]. \quad (44.35)\end{aligned}$$

Observemos, por fin, que cada una de las columnas $\bigcup_{j=1}^p Q_{ij}^n$ que se proyecta en el cubo $Q_i^{n-1} \subset s_k(X_0)$ se diferencia de la columna $\bigcup_{j=1}^p Q_{ij}^n$, que se proyecta en el mismo cubo, sólo en dos cubos adicionados a la columna por arriba y por de-

bajo (en el sentido de decrecimiento, de crecimiento, respectivamente, de la coordenada x_n , véase la fig. 179). Por ello

$$r = p + 2.$$

De aquí y de las desigualdades (44.32) y (44.34) tenemos

$$\frac{p}{10^k} \leq h \leq \frac{p+2}{10^k} = \frac{r}{10^k} \leq h + \frac{2}{10^k}.$$

Debido a esta circunstancia, de las desigualdades (44.33) y (44.35), obtenemos

$$\begin{aligned} \mu_n S_k(X) - \mu_n S_k(X_0) &= \frac{r-p}{10^k} \mu_{n-1} S_k(X_0) + \\ &+ \frac{r}{10^k} \mu \sigma_k(X_0) \leq \frac{2}{10^k} \mu_{n-1} X_0 + \left(h + \frac{2}{10^k} \right) \mu \sigma_k(X_0) \end{aligned}$$

y como $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{10^k} = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu \sigma_k(X_0) = 0$, entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\mu_n S_k(X) - \mu_n S_k(X_0)] = 0. \quad (44.36)$$

El conjunto X_0 es acotado, como cualquier otro conjunto medible. No es difícil convencerse de que los diámetros $d(X_0)$ y $d(X)$ de los conjuntos X_0 y X están ligados mediante la correlación $d(X) = \sqrt{[d(X_0)]^2 + h^2}$, de la cual se deduce que el conjunto X es también acotado. Por ello, de acuerdo con lo expuesto más arriba, tiene medidas finitas superior e inferior. De las fórmulas (44.4), (44.5) y (44.36) proviene que dichas medidas son iguales: $\mu^* X = \mu_* X$, es decir, el conjunto X es medible.

Demostremos ahora la fórmula (44.28). Con este objeto multipliquemos por h la desigualdad

$$\mu_{n-1} S_k(X_0) \leq \mu X_0 \leq \mu_{n-1} S_k(X_0).$$

Al aplicar las desigualdades (44.32) y (44.34), tendremos (véase también (44.33) y (44.35))

$$\mu_n S_k(X) = \frac{p}{10^k} \mu_{n-1} S_k(X_0) \leq h \mu X_0 \leq \frac{r}{10^k} \mu_{n-1} S_k(X_0) = \mu_n S_k(X),$$

observando que en virtud de (44.36) ambos miembros de la desigualdad obtenida tienden, para $k \rightarrow \infty$, hacia un mismo límite μX , de lo que se infiere la fórmula (44.28).

Problema 29. Constrúyase un ejemplo de región que sea no medible según Jordan.

Problema 30. Demuéstrese que la medida de Jordan no depende de cómo se elige el sistema de coordenadas cartesianas.

44.2. CONJUNTOS DE MEDIDA CERO

En el punto antecedente se ha establecido que un conjunto es medible según Jordan cuando, y sólo cuando, su frontera tiene medida cero. Resulta importante, pues, conocer los criterios, rigiéndose por los cuales se podría establecer que un con-

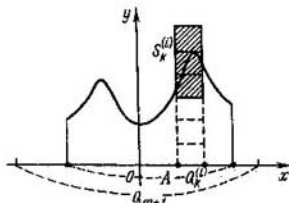


Fig. 180

junto tiene medida cero. Como ejemplo suficientemente general de conjuntos de medida cero sirven los cilindros en cuya base se disponen conjuntos de medida cero (véase el corolario del teorema 2). Otra clase amplia de los conjuntos de medida cero se proporciona en el teorema que sigue.

Teorema 3. *La gráfica de cualquier función continua en un compacto tiene medida cero.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ es continua en el compacto $A \subset R_x^n$. Sea X la gráfica de esta función, es decir, el conjunto de tales puntos $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y)$ en el espacio n -dimensional R_{xy}^{n+1} que $(x_1, \dots, x_n) \in A$ e $y = f(x_1, \dots, x_n)$:

$$X = \{(x, y) : (x_1, \dots, x_n) \in A, y = f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Mostremos que la medida de Jordan $(n+1)$ -dimensional del conjunto X es igual a cero. El conjunto A , siendo un compacto, es acotado. Por eso existe tal número natural m que el cubo n -dimensional

$$P_m = \{x : -m \leq x_i \leq m, i = 1, 2, \dots, n\}$$

contiene el conjunto $A : P_m \supset A$. Con mayor razón el cubo

$$P_{m+1} = \{x : -m-1 \leq x_i \leq m+1, i = 1, 2, \dots, n\}$$

también contiene $A : P_{m+1} \supset A$, y más aún, cualquiera que sea el cubo Q de cierto rango $k = 0, 1, 2, \dots$, que se interseca con el conjunto A , es decir, $Q \subset S_k(A)$, está contenido también en $P_{m+1} : Q \subset P_{m+1}$. Por lo tanto, para todo k se tiene $S_k(A) \subset P_{m+1}$. Aquí y en adelante mediante $S_k(A)$, $S_k(X)$, al igual que en el p. 44.1, se denotan los conjuntos de puntos de todos los cubos de rango k de los espacios correspondientes que se intersecan con los conjuntos $A \subset R_x^n$, $X \subset R_{xy}^{n+1}$.

El conjunto $S_k(X)$ se descompone en un número finito de "columnas" S_k^i , $i = 1, 2, \dots, i_0$, cada una de las cuales consta de los cubos $(n+1)$ -dimensionales de rango k que tienen una misma proyección (véase la llamada en la pág. 128) Q_k^i en el espacio R_x^n (en la fig. 180 se muestra el caso en que $n = 1$):

$$S_k(X) = \bigcup S_k^i, \text{ pr}_y S_k^i = Q_k^i, k = 0, 1, 2, \dots \quad (44.37)$$

Designemos con $\omega(\delta)$ el módulo de continuidad de la función f en A . Observando que la diagonal (el diámetro*) del cubo n -dimensional con la arista de longitud $1 \cdot 10^{-k}$ es igual a $\sqrt{n} \cdot 10^{-k}$, para la altura $h_k^{(j)}$ de cada columna $S_k^{(j)}$ tenemos (véase la fig. 161) una estimación

$$h_k^{(j)} \leq \omega \left(\frac{\sqrt{n}}{10^k} \right) + \frac{2}{10^k}. \quad (44.38)$$

Efectivamente, para estimar la altura $h_k^{(j)}$, a la distancia $\omega(10^{-k}\sqrt{n})$ entre los valores máximo y mínimo de la función $f(x)$ en el cubo $Q_k^{(j)}$ es suficiente añadir las longitudes de las aristas de los cubos más inferior y más superior de la columna en consideración $S_k^{(j)}$ (esta estimación se logra cuando los puntos de la gráfica, correspondientes a los valores extremos mencionados, se dispongan en las aristas, paralelas al espacio R_x^n , de los cubos de rango k). De (44.37) y (44.38) obtenemos:

$$\begin{aligned} \mu S^k(X) &= \mu \bigcup_j S_k^{(j)} = \sum_j \mu S_k^{(j)} = \\ &= \sum_j h_k^{(j)} \mu Q_k^{(j)} \leq \left[\omega \left(\frac{\sqrt{n}}{10^k} \right) + \frac{2}{10^k} \right] \sum_j \mu Q_k^{(j)} \leq \\ &\leq \left[\omega \left(\frac{\sqrt{n}}{10^k} \right) + \frac{2}{10^k} \right] \mu P_{m+1}. \end{aligned} \quad (44.39)$$

Siendo la función f continua en el compacto, es uniformemente continua en él, por lo cual $\lim_{k \rightarrow +\infty} \omega(10^{-k}\sqrt{n}) = 0$, y como $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2}{10^k} = 0$, de (44.39) tenemos $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu S_k(X) = 0$, lo que es testimonio de que $\mu^* X = 0$, por consiguiente, también $\mu X = 0$. \square

En virtud de los teoremas 2 y 3, todo conjunto acotado cuya frontera puede ser representada como una unión de un número finito de los conjuntos, cada uno de los cuales representa o bien una parte de la gráfica de una función continua en el conjunto cerrado acotado, o bien una parte de cilindro con la base de medida cero, es un conjunto medible, pues debido a la aditividad de la medida, la medida de la frontera del conjunto citado es igual a cero y, por lo tanto, de acuerdo con el teorema 1, el conjunto es medible. De este modo hemos obtenido la descripción de una clase bastante amplia de conjuntos medibles según Jordan que se encuentran frecuentemente en el análisis matemático y en sus aplicaciones. Así, por ejemplo, los conjuntos planos (trapecios curvilíneos, "sectores" de las curvas definidas en las coordenadas polares, como también cuerpos de revolución, cuyas áreas y, respectivamente, volúmenes, se calculaban en el § 32 con ayuda de la integral unidimensional de Riemann) son conjuntos medibles según Jordan, pues sus fronteras tienen medida cero, de lo que no es difícil convencerse.

De modo semejante son medibles según Jordan los paralelepípedos y elipsoides, en particular, las esferas, puesto que sus fronteras pueden representarse en forma de la unión de las gráficas de las funciones continuas en los compactos.

* Véase en el p. 19.6 la definición de diámetro de un conjunto.

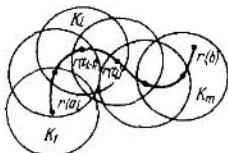


Fig. 181

Cabe notar que en el § 31 se ha introducido el concepto de medida mes G para los conjuntos abiertos. Al comparar la definición para la medida mencionada con la aducida en el p. 44.1, vemos que mes $G = \mu_* G$ es decir, la medida introducida en el § 31 es una medida inferior de Jordan. Sin embargo, en virtud de lo expuesto más arriba, todos los conjuntos considerados en los ejemplos del § 32 eran medibles según Jordan y, por consiguiente, para ellos mes G fue la medida de Jordan, es decir, para los conjuntos mencionados tuvo lugar mes $G = \mu G$.

Resulta interesante generalizar el teorema 3 para el caso de los conjuntos dados paramétricamente, en particular, para unas curvas paramétricas. Se pone de manifiesto que incluso en este caso, para que las curvas en consideración tengan medida cero no es suficiente que sean sólo continuas. Existen, por ejemplo, unas curvas $x_i = x_i(t)$, $a \leq t \leq b$, $i = 1, 2, \dots, n$ ($x_i(t)$ son las funciones continuas en cierto segmento $[a, b]$) llamadas curvas de Peano*) que pasan por cada punto de cierto cubo n -dimensional y, por ende, no tienen medida cero.

Problema 31. Constrúyase un ejemplo de curva de Peano.

Teorema 4. Toda curva plana rectificable tiene medida cero.

DEMOSTRACIÓN. Sea dada una curva rectificable γ , cuya longitud es igual a S . Supongamos, además, que $r = r(t)$, $a \leq t \leq b$, es cierta representación de la curva γ . Dividamos la curva mencionada de manera sucesiva, o sea, en el orden de crecimiento del parámetro t , mediante los puntos $r(t_i)$, $t_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \dots, m$, $t_0 = a$, $t_m = b$, en m partes de igual longitud, es decir, adoptemos tal partición $\tau = \{t_i\}_{i=0}^m$ del segmento $[a, b]$, que la longitud de cada parte γ_i (de la curva γ), definida por la representación $r = r(t)$, $t_{i-1} \leq t \leq t_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, tenga la longitud S/m .

Designemos mediante K_i un círculo cerrado de radio S/m y centro en el punto $r(t_{i-1})$. Ya que el arco γ_i es de longitud S/m y su origen coincide con el centro del círculo K_i , se dispone íntegramente en este círculo (fig. 181). De aquí se deduce que toda la curva γ está contenida en la reunión de los círculos K_i :

$$\gamma \subset \bigcup_{i=1}^m K_i.$$

*) J. G. Peano (1858 — 1932), matemático italiano.

Por consiguiente, por ser monótona y semiaditiva la medida superior (véase los lemas 1 y 2 en el p. 44.1),

$$\mu^* \gamma \leq \mu^* \bigcup_{i=1}^m K_i \leq \sum_{i=1}^m \mu^* K_i. \quad (44.40)$$

Pero, $\mu^* K_i = \mu K_i = \pi \left(\frac{S}{m} \right)^2$, $i = 1, \dots, m^*$, por lo cual, de (44.40) tenemos $\mu^* \gamma \leq \pi S^2/m$.

El primer miembro de la desigualdad no depende de m , mientras que el segundo miembro tiende a cero cuando $m \rightarrow +\infty$, a consecuencia de lo cual $\mu \gamma = 0$. \square

Ejercicio 5. Demuéstrese que toda curva rectificable tiene en un espacio tridimensional una medida cero.

De los teoremas 1 y 4 proviene que todo conjunto plano acotado, cuya frontera es una curva rectificable, es medible.

44.3. DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL MÚLTIPLE

Enunciemos la definición de la integral múltiple de Riemann. Con este fin introduzcamos ante todo el concepto de partición de un conjunto medible y el de finura de dicha partición.

Sea X un conjunto medible según Jordan, $X \subset R^n$. Un sistema finito $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i_0}$ de conjuntos no vacíos medibles según Jordan X_i , $i = 1, 2, \dots, i_0$, se denomina *partición del conjunto X* , siempre que

- 1) las intersecciones de dos de los conjuntos X_i tienen medida cero:

$$\mu(X_i \cap X_j) = 0, \quad i \neq j;$$

$$2) \bigcup_{i=1}^{i_0} X_i = X.$$

El número $\delta_\tau = \max_{i=1, 2, \dots, i_0} d(X_i)$, donde $d(X_i)$ es el diámetro del conjunto X_i , lleva el nombre de *finura de la partición τ* .

Por ser aditiva la medida de Jordan, para toda partición $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i_0}$ del conjunto X tenemos

$$\mu X = \sum_{i=1}^{i_0} \mu X_i. \quad (44.41)$$

En efecto, supongamos que para i fijo se tiene $X_i^* = \bigcup_{j \neq i} X_j \cap X_j$

* En efecto, la circunferencia C , que es la frontera del círculo K , puede representarse como reunión de dos semicircunferencias, cada una de las cuales representa la gráfica de una función continua en el segmento. Por ello, de acuerdo al teorema 3, $\mu C = 0$, por consiguiente, todo círculo K es un conjunto medible.

y $X^* = \bigcup_{i=1}^{i_0} X_i^*$. En tal caso, en virtud del p. 1) de la definición de partición de un conjunto, $\mu(X_i \cap X_j) = 0$, $i \neq j$, por lo cual $\mu X_i^* \leq \sum_{j=1}^{i_0} \mu(X_i \cap X_j) = 0$, es decir, $\mu X_i^* = 0$. De aquí $\mu X^* \leq \sum_{i=1}^{i_0} \mu X_i^* = 0$, por consiguiente, $\mu X^* = 0$. Además, los conjuntos X^* , $X_i \setminus X^* = X_i^{**}$, $i = 1, 2, \dots, i_0$, son disjuntos dos a dos y, en virtud del p. 2), $\bigcup_{i=1}^{i_0} X_i^{**} \cup X^* = \bigcup_{i=1}^{i_0} X_i = X$.

Puesto que

$$\mu X_i = \mu(X_i \setminus X^*) = \mu X_i^{**},$$

de todo lo dicho proviene, por ser aditiva la medida, que

$$\mu X = \sum_{i=1}^{i_0} \mu X_i^{**} + \mu X^* = \sum_{i=1}^{i_0} \mu X_i. \quad \square$$

Para simplificar las designaciones, a veces, en lugar de $\{X_i\}_{i=1}^{i_0}$ escribiremos $\{X_j\}$.

Sean $\tau = \{X_j\}$ y $\tau' = \{X'_j\}$ las particiones del conjunto medible X . La partición τ' se llama *inscrita* en la partición τ , si para cualquier $X'_j \in \tau'$ existe tal elemento de $X_i \in \tau$ que $X'_j \subset X_i$. En este caso suele escribirse $\tau' > \tau$, o bien $\tau < \tau'$.

Cabe señalar dos propiedades de las particiones de un conjunto.

1°. Si $\tau < \tau'$ y $\tau' < \tau''$, se tiene $\tau < \tau''$.

2°. Para cualesquiera dos particiones $\tau' = \{X'_j\}$ y $\tau'' = \{X''_j\}$ de un conjunto medible X existe tal partición suya τ que $\tau > \tau'$ y $\tau > \tau''$.

La propiedad 1° proviene, evidentemente, de la definición de partición inscrita. A título de partición τ , indicada en la propiedad 2°, puede tomarse un conjunto de toda una serie de intersecciones no vacías $X'_i \cap X''_j$.

Como ejemplo de partición de un conjunto medible interviene una totalidad de toda clase de intersecciones no vacías del conjunto dado con los cubos de cierto rango fijado k . De aquí se ve que para todo conjunto medible existen particiones cuya finura es tan menuda como se quiera.

Definición 3. Sea $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ una función dada en el conjunto medible según Jordan $X \subset \mathbb{R}^n$ y sea τ una partición del conjunto X , $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i_0}$; elijamos arbitrariamente los puntos $\xi^{(i)} \in X_i$, $i = 1, 2, \dots, i_0$. Una suma del tipo

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(f; \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(i_0)}) = \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)}) \mu X_i \quad (44.42)$$

lleva el nombre de *suma integral de Riemann de la función f* .

Al igual que en el caso de la función de una sola variable, la definición de la integral múltiple puede enunciarse, haciendo uso del concepto de límite de una sucesión o "el lenguaje $\varepsilon - \delta$ ".

Definición 4. El número A se denomina *integral de Riemann de la función f referida al conjunto medible según Jordan $X \subset R^n$* , si cualquiera que sea la sucesión de particiones $\tau_m = \{X_i^m\}_{i=1}^{i^{(m)}}$, $m = 1, 2, \dots$, del conjunto X tal que las finuras de las particiones τ_m tienden a cero cuando $m \rightarrow +\infty$: $\lim_{m \rightarrow +\infty} \delta_{\tau_m} = 0$, y cualesquiera que sean los puntos $\xi^{(i, m)} \in X_i^m$, $i = 1, 2, \dots, i^{(m)}$, la sucesión de sumas integrales $\sigma_{\tau_m}(f; \xi^{(1, m)}, \dots, \xi^{(i^{(m)}, m)})$ tiene como su límite, para $m \rightarrow +\infty$, el número A :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sigma_{\tau_m}(f; \xi^{(1, m)}, \dots, \xi^{(i^{(m)}, m)}) = A. \quad (44.43)$$

La integral de la función f , referida al conjunto X , se designa mediante

$$\int f(x) dX \text{ o bien } \int \int \dots \int_X f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Si existe la integral $\int f(x) dX$, la función f se llama *integrable según Riemann* en el conjunto X . Las funciones integrables según Riemann se denominarán con frecuencia *integrables*.

La igualdad (44.43), es decir, la definición de la integral, se escribe brevemente como la fórmula

$$\int f(x) dX = \lim_{\sigma_r \rightarrow 0} \sigma_r. \quad (44.44)$$

En términos de ε y δ este límite significa lo siguiente: *para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal $\delta_\varepsilon > 0$, que cualquiera que sea la partición $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i_0}$ del conjunto X de finura $\delta_r < \delta_\varepsilon$ y cualesquiera que sean los puntos $\xi^{(i)} \in X_i$, $i = 1, 2, \dots, i_0$, se verifica la desigualdad*

$$|\sigma_r(f; \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(i_0)}) - \int f(x) dX| < \varepsilon. \quad (44.45)$$

Recurriendo al modo habitual, se demuestra que las definiciones (44.43) y (44.45) del límite de sumas integrales son equivalentes.

Señalemos que la definición de la integral (44.44) en el caso en que $n = 1$ y a título de conjunto, respecto al cual se realiza la integración, sirve un segmento, no coincide formalmente con la definición de integral de Riemann, introducida anteriormente, de la función de una sola variable, puesto que en aquel caso se consideraban sólo las particiones de un segmento en segmentos, mientras que ahora se consideran toda clase de particiones de un segmento en conjuntos medibles según Jordan. No obstante, se puede mostrar (lo haremos en el p. 44.7*) que para $n = 1$ ambas definiciones resultan equivalentes al considerar el caso en que un conjunto, respecto del cual se realiza la integración, es un segmento, es decir, las dos definiciones conducen a un mismo concepto de integrabilidad de las funciones y a un mismo concepto de integral.

Al determinar una integral referida al conjunto $X \subset R^n$, se pueden utilizar, para formar las sumas integrales, no todos los elementos de las particiones τ del conjunto X , sino despreciar aquellos sumandos que corresponden a los elementos de la partición cuyas clausuras se intersecan con cierto conjunto fijo de medida cero. Analicemos esta circunstancia más detalladamente.

Sea X un conjunto medible, $X_0 \subset X$, y sea $\tau = \{X_i\}_i = \{p\}$ la partición del conjunto X . Designemos mediante $\tau(X_0)$ la totalidad de aquellos elementos de la partición τ , cuyas clausuras no se intersecan con el conjunto X_0 :

$$\tau(X_0) = \{X_i : \bar{X}_i \cap X_0 = \emptyset, X_i \in \tau\} \quad (44.46)$$

y, viceversa, con $\tau_0(X_0)$, la totalidad de aquellos X_i , para los cuales sus clausuras \bar{X}_i se cortan con X_0 :

$$\tau_0(X_0) = \{X_i : \bar{X}_i \cap X_0 \neq \emptyset, X_i \in \tau\}. \quad (44.47)$$

Lema 6. Sea X un conjunto del espacio R^n medible según Jordan, $X_0 \subset X$ y $\mu X_0 = 0$. En este caso

$$\lim_{\delta_r \rightarrow 0} \sum_{X_i \in \tau_0(X_0)} \mu X_i = 0. \quad (44.48)$$

Esta igualdad significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe tal $\delta > 0$ que cualesquiera que sean las particiones τ del conjunto X de finura $\delta_r < \delta$, se verifica la desigualdad

$$\sum_{X_i \in \tau_0(X_0)} \mu X_i < \varepsilon.$$

La sumación en la fórmula (44.48) se efectúa sólo según aquellos índices i , para los cuales $X_i \in \tau_0(X_0)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $X_0 \subset X$ y $\mu X_0 = 0$; entonces también $\mu \bar{X}_0 = 0$ (véase en el p. 44.1 la observación que sigue tras la demostración de la aditividad de una medida). Por ello, para todo $\varepsilon > 0$ existe tal rango k que

$$\mu S_k(\bar{X}_0) < \varepsilon. \quad (44.49)$$

Aquí, como siempre, $S_k(\bar{X}_0)$ denota la totalidad de los puntos de todos los cubos de rango k que se intersecan con el conjunto \bar{X}_0 y, por lo tanto, lo recubren: $\bar{X}_0 \subset S_k(\bar{X}_0)$.

Recordemos que \bar{X}_0 se dispone estrictamente dentro del poliedro $S_k(\bar{X}_0)$, es decir, no se corta con su frontera (véase el p. 44.1). Por cuando el conjunto X_0 es acotado y cerrado, mientras que la frontera $\partial S_k(\bar{X}_0)$ del poliedro $S_k(\bar{X}_0)$, igual que la frontera de cualquier conjunto, está cerrada, entonces \bar{X}_0 y $\partial S_k(\bar{X}_0)$ se hallan a una distancia positiva δ uno de la otra (véase el lema 7 en el p. 18.2).

$$\delta = \rho(\bar{X}_0, \partial S_k(\bar{X}_0)) > 0. \quad (44.50)$$

Por ello todo conjunto D de diámetro $d(D)$ inferior a δ , que se corta con el conjunto $X_0 \subset \bar{X}_0$, se dispondrá íntegramente en $S_k(\bar{X}_0)$ (fig. 182). Efectivamente, si $d(D) < \delta$ y existe $x \in D \cap X_0$, entonces (véase (44.50)) $D \subset U(x, \delta) \subset S_k(\bar{X}_0)$, donde, como hasta ahora, $U(x, \delta)$ es el entorno esférico del punto x de radio δ .

Sea ahora $\tau = \{X_i\}$ una partición del conjunto X de finura $\delta_r < \delta$. Entonces para todo elemento X_i de esta partición cuya clausura se corta con el conjunto X_0 , es decir, para cada $X_i \in \tau_0(X_0)$ tendremos $X_i \subset S_k(\bar{X}_0)$. Por esta razón

$$\bigcup_{X_i \in \tau_0(X_0)} X_i \subset S_k(\bar{X}_0).$$

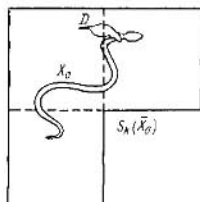


Fig. 182

Por consiguiente, en virtud de (44.49),

$$\sum_{X_i \in \tau_0(X_0)} \mu X_i = \mu \bigcup_{X_i \in \tau_0(X_0)} X_i \leq \mu S_k(\bar{X}_0) < \epsilon. \quad \square$$

Introducamos una designación más. Sea X un conjunto medible, sea $\tau = \{X_i\}_i = \{p$ cierta partición de este conjunto, $X_0 \subset X$. Para cualquier función f , definida en X , pongamos (véanse (44.46) y (44.47))

$$\sigma_{\tau(X_0)} = \sigma_{\tau(X_0)}(f; \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}) = \sum_{X_i \in \tau(X_0)} f(\xi^{(i)}) \mu X_i. \quad (44.51)$$

Esta inscripción significa que la sumación en el segundo miembro de la igualdad se realiza sólo según aquellos índices i , para los cuales $X_i \in \tau(X_0)$. Como siempre, $\xi^{(i)} \in X_i$. Para la simetría de la inscripción, las sumas integrales ordinarias de Riemann pueden, por analogía, anotarse en la forma

$$\sigma_{\tau} = \sum_{X_i \in \tau} f(\xi^{(i)}) \mu X_i.$$

En lugar del símbolo de sumación $\sum_{X_i \in \tau}$ a veces, para abreviar, se escribirá \sum_{τ} . El

límite de las sumas $\sigma_{\tau(X_0)}$ para $\delta_{\tau} \rightarrow 0$ se determina por analogía con el límite correspondiente de las sumas integrales σ_{τ} .

Teorema 5. Supongamos que X es un conjunto del espacio R^n medible según Jordan y $\tau = \{X_i\}_i = \{p$ es la partición en este conjunto, $X_0 \subset X$ y $\mu X_0 = 0$. Si la función f está acotada en el conjunto X , entonces la integral de Riemann

$$\int f(x) dX = \lim_{\delta_{\tau} \rightarrow 0} \sigma_{\tau}$$

existe cuando, y sólo cuando, existe el límite

$$\lim_{\delta_{\tau} \rightarrow 0} \sigma_{\tau(X_0)}$$

Además, si el último límite existe, es igual a la integral $\int f(x)dX$.

Las sumas $\sigma_{\tau(X_0)}$ se llamarán, para abreviar, sumas integrales incompletas (correspondientes al conjunto X_0).

DEMOSTRACIÓN. Cualquiera que sea la partición $\tau = \{X_i\}_i^p$ del conjunto X , la clausura \bar{X}_i de todo elemento X_i o bien no se corta con el conjunto X_0 y en este caso $X_i \in \tau(X_0)$ (véase (44.46)), o bien sí se corta (véase (44.47)) y en tal caso $X_i \in \tau_0(X_0)$. Por consiguiente, $\tau = \tau(X_0) \cup \tau_0(X_0)$, con la particularidad de que $\tau(X_0)$ y $\tau_0(X_0)$ no tienen elementos comunes.

Pongamos

$$\sigma_{\tau_0(X_0)} = \sum_{X_i \in \tau_0(X_0)} f(\xi^{(i)}) \mu X_i, \quad \xi^{(i)} \in X_i.$$

Aquí la sumación en el segundo miembro se realiza según aquellos índices i , para los cuales $X_i \in \tau_0(X_0)$. Es evidente que para cualquier suma integral de Riemann se verifica la igualdad (véanse (44.42) y (44.51))

$$\sigma_\tau = \sigma_{\tau(X_0)} + \sigma_{\tau_0(X_0)}. \quad (44.52)$$

Por ser la función f acotada en X , existe tal constante $M > 0$, que para todo $x \in X$ se verifica la desigualdad $|f(x)| \leq M$. Por eso

$$|\sigma_{\tau_0(X_0)}| \leq \sum_{X_i \in \tau_0(X_0)} |f(\xi^{(i)})| \mu X_i \leq M \sum_{X_i \in \tau_0(X_0)} \mu X_i.$$

Dado que, de acuerdo con el lema 6, $\lim_{\delta_r \rightarrow 0} \sum_{X_i \in \tau_0(X_0)} \mu X_i = 0$, se tiene

$$\lim_{\delta_r \rightarrow 0} \sigma_{\tau_0(X_0)} = 0.$$

Debido a esto, de la igualdad (44.52) se desprende que la suma integral σ_τ y la suma integral incompleta $\sigma_{\tau(X_0)}$ simultáneamente o bien tienen los límites o no los tienen cuando $\delta_r \rightarrow 0$, con la particularidad de que si estos límites existen, son iguales. \square

Del teorema demostrado se deduce que si una función está definida y es acotada en cierto conjunto medible X , entonces, al definir la integral como un límite de sumas integrales, podemos desechar en éstas todos los sumandos que corresponden a los elementos de la partición cuyas clausuras contienen puntos de frontera, pues el conjunto $X_0 = \partial X$ tiene medida cero (véase el teorema 1 en el p. 44.1).

Del teorema 5 proviene, además, que si una función f está definida y es continua en el conjunto medible X , la variación de sus valores en cierto conjunto $X_0 \subset X$ de medida cero que tiene por resultado la aparición de otra función, también acotada en X , no influye en la integrabilidad de la función, ni tampoco en el valor de la integral de la función, si existe. Esto se sigue directamente de lo que con la variación indicada de la función la suma $\sigma_{\tau(X_0)}$ queda inalterable, mientras que, en virtud del teorema 5, si su límite para $\delta_r \rightarrow 0$ existe, es igual a la integral $\int f(x)dX$:

$$\lim_{\delta_r \rightarrow 0} \sigma_{\tau(X_0)} = \int f(x)dX.$$

De esta observación se infiere, en particular, que la función f es integrable en el conjunto medible X cuando, y sólo cuando, en dicho conjunto sea integrable cualquier función que se obtiene de f por cambio arbitrario de sus valores en los puntos de frontera (es decir, en el conjunto $X \cap \delta X$) de un modo tal que los valores citados queden, sin embargo, acotados. Al realizarse esta operación, tampoco cambia el valor de la integral $\int f(x) dX$. Todo esto se debe a que la frontera de un conjunto medible y, por tanto, cualquier parte de ésta tienen medida cero.

De este modo, la integrabilidad y el valor de una integral de la función extendida al conjunto X no dependen de los valores de la función en los puntos de frontera del conjunto medible X , siempre que estos valores son acotados.

44.4. EXISTENCIA DE LA INTEGRAL

Como ejemplo más sencillo de función integrable según Riemann interviene la función numérica arbitraria f , definida en cierto conjunto $X \subset R^n$, cuya medida de Jordan es igual a cero: $\mu X = 0$. En este caso para cualquier partición $\tau = \{X_i\}_1^{i_0}$ del conjunto X tendremos $\mu X_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, i_0$, eso, sea cual sea la elección de los puntos $\xi^{(i)} \in X_i$, obtendremos $f(\xi^{(i)})\mu X_i = 0$ y, por consiguiente, (véase (44.42)),

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(f; \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(i_0)}) = \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu X_i = 0.$$

De aquí, de acuerdo con la definición de la integral, ella, en este caso, existe y es igual a cero:

$$\int f(x) dX = \lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau = 0.$$

Como la función f es arbitraria, puede ser, en particular, no acotada. En otras palabras, para su integrabilidad según Riemann en un conjunto arbitrario medible según Jordan, la condición de que dicha función sea acotada no es necesaria. Recordemos que para que una función sea integrable según Riemann en un segmento, la condición de acotar esta función era necesaria (véase el teorema 1 en el p. 27.2). Sin embargo, introducidas ciertas modificaciones, el teorema sobre la acotación de una función integrable resulta válido también para la integral que aquí se considera.

Demostremos previamente un lema.

Lema 7. Supongamos que la función f está definida en un conjunto medible según Jordan X , $\tau = \{X_i\}_1^{i_0}$ es la partición de este conjunto y X^* , la reunión de todos los elementos de dicha partición que tienen medida positiva: $X^* = \bigcup_{\mu X_i > 0} X_i$.

Si la función f no está acotada en el conjunto X^* , entonces, cualquiera que sea el número $M > 0$, se pueden escoger los puntos $\xi^{(i)} \in X_i$ de modo tal que sea válida la desigualdad

$$\left| \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu X_i \right| > M.$$

Corolario. Sea f una función definida en el conjunto medible según Jordan X . Si para X existen las particiones tan pequeñas como se quiera, para las cuales la función f no está acotada en la unión de todos elementos de medida positiva, entonces f no será integrable en X .

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Por hipótesis del lema, el conjunto X^* es una reunión de los elementos X_i de medida positiva de la partición τ . Puesto que cualquier partición consta de un número finito de elementos, X^* es una suma finita de los conjuntos citados $X_i \in \tau$. Por ello, si la función f no está acotada en el conjunto X^* , tampoco está en cierto conjunto X_i de medida positiva. Sea este conjunto, para concretar, X_1 . Debido a que la función f no está acotada en X_1 , se puede escoger tal sucesión $\xi_n^{(1)} \in X_1$, $n = 1, 2, \dots$, que se verificará la igualdad $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n^{(1)}) = \infty$. Fijemos de tal o cual manera los puntos restantes $\xi^{(i)} \in X_i$ para $i = 2, 3, \dots, i_0$.

Ya que la suma $\sum_{i=2}^n f(\xi^{(i)})\mu X_i$ es un número fijo y $\mu X_i > 0$, en la suma

$$f(\xi_n^{(1)})\mu X_1 + \sum_{i=2}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu X_i$$

el primer sumando tiende al infinito cuando $n \rightarrow \infty$, mientras que el segundo sumando es una constante; por consiguiente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| f(\xi_n^{(1)})\mu X_1 + \sum_{i=2}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu X_i \right| = +\infty.$$

Por eso, para cualquier número $M > 0$ podemos elegir tal número $n_0 = n_0(M)$ que se verifique la desigualdad

$$\left| f(\xi_{n_0}^{(1)})\mu X_1 + \sum_{i=2}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu X_i \right| > M. \quad \square$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Si la función f es integrable en el conjunto X , es decir, si existe el límite

$$\lim_{\delta_r \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu X_i = \int f(x)dX,$$

entonces para todo $\xi > 0$, por ejemplo, para $\xi = 1$, existe tal $\delta_0 > 0$ que cualesquiera que sean las particiones $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i_0}$ del conjunto X de finura $\delta < \delta_0$, no importa cual sea la elección de los puntos $\xi^{(i)} \in X_i \in \tau$ se verifica la desigualdad

$$\left| \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu X_i - \int f(x)dX \right| < 1$$

y, por consiguiente, la desigualdad

$$\int f(x)dX - 1 < \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu X_i < \int f(x)dX + 1. \quad (44.53)$$

En cambio, si la función f satisface las condiciones del corolario, entonces para el conjunto X existe la partición τ de finura $\delta_\tau < \delta_0$, para la cual la función f no está acotada en la unión de todos los elementos de medida positiva de esta partición. En

este caso, conforme al lema 7, la suma $\sum_{i=1}^l f(\xi^{(i)})\mu X_i$ puede hacerse, debido a la elección adecuada de los puntos $\xi^{(i)} \in X_i \in \tau$, tan grande como se quiera en su magnitud absoluta. Por ello, tal función no puede ser integrable, pues para ella no se cumple la condición (44.53). \square

Mostremos ahora que si menospreciamos el conjunto de medida cero, toda función integrable será acotada.

Teorema 6. Si una función f es integrable en el conjunto X , existe tal conjunto de medida cero $X_0 \subset X$: $\mu X_0 = 0$, que la función f esté acotada en $X \setminus X_0$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función f es integrable en X y el conjunto X_0 , citado en el teorema, no existe. Tomemos cualquier $\delta_0 > 0$ y una partición τ del conjunto X de finura $\delta_\tau < \delta_0$. Designemos con X^* la reunión de todos los elementos de medida positiva. El conjunto $X \setminus X^*$ es, pues, la reunión de un número finito de conjuntos $X_i \in \tau$ de medida cero, por lo cual el mismo conjunto tiene medida cero: $\mu(X \setminus X^*) = 0$. Consecuentemente, según la hipótesis aceptada, la función f no está acotada en el conjunto X^* . De aquí, de acuerdo con el corolario del lema 7, llegamos a que la función f no es integrable. \square

Probemos ahora que para una clase importante de los conjuntos abiertos medibles según Jordan el teorema sobre la acotación de las funciones integrables queda enteramente en vigor. Para demostrarlo nos hará falta un lema geométrico.

Lema 8. La intersección no vacía de un cubo cerrado n -dimensional con un conjunto abierto de un espacio n -dimensional tiene la medida inferior de Jordan positiva.

Corolario. Para cualquier conjunto abierto medible según Jordan existen particiones tan pequeñas como se quiera, cuyos elementos tienen todos medida positiva.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Supongamos que Q es un cubo n -dimensional y sea G un conjunto abierto del espacio R^n y $Q \cap G \neq \emptyset$. Cualquiera que sea el punto $x \in Q \cap G$, por ser abierto el conjunto G , existe tal entorno de dicho punto $U(x)$ (por ejemplo, el propio conjunto G) que

$$U(x) \subset G. \quad (44.54)$$

No es difícil convencerse de que en el conjunto $U(x)$ siempre hay un punto interior y del cubo Q . Efectivamente, puede ocurrir que el mismo punto x sea interior para el cubo Q , y en tal caso podemos tomar $y = x$. En cambio, si x es un punto de frontera del cubo Q , será punto de frontera también para el conjunto de los puntos interiores del cubo. Por esta razón su entorno $U(x)$ contiene, a ciencia cierta, el punto interior y del cubo Q (fig. 183). En virtud de la definición de punto interior (véase el p. 18.2), existe tal entorno suyo $V(y)$ que

$$V(y) \subset Q. \quad (44.55)$$

En vista de (44.54) y (44.55), son lícitas las inclusiones

$$U(x) \cap V(y) \subset U(x) \subset G, \quad U(x) \cap V(y) \subset V(y) \subset Q;$$

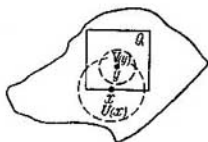


Fig. 183

y por ende

$$U(x) \cap V(y) \subset Q \cap G. \quad (44.56)$$

Dado que $y \in U(x)$ e $y \in V(y)$, la intersección $U(x) \cap V(y)$ no es vacía, pues contiene en todo caso el punto y . Luego, siendo la misma una intersección de dos conjuntos abiertos, es también abierta, razón por la cual (véase el p. 44.1)

$$\mu_*[U(x) \cap V(y)] > 0.$$

En virtud de la propiedad de monotonía de la medida inferior (véase el lema 1 en el p. 44.1), de (44.56) tenemos

$$\mu_*[U(x) \cap V(y)] \leq \mu_*(Q \cap G).$$

De las últimas dos desigualdades se pone de manifiesto que $\mu_*(Q \cap G) > 0$. \square

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Sea G un conjunto medible abierto en R^n . Fijemos una partición del espacio R^n en cubos de cierto rango k . El conjunto de cubos Q de este rango que tienen una intersección no vacía con el conjunto G , es finito, pues el conjunto G está acotado, debido a su mensurabilidad. Numeremos todos los cubos mencionados: Q_1, Q_2, \dots, Q_{i_0} . Los conjuntos $X_i = Q_i \cap G = \emptyset$, $i = 1, 2, \dots, i_0$, son medibles y forman la partición $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i_0} = \{Q_i\}_{i=1}^{i_0}$ del conjunto G . En efecto,

por una parte $X_i = Q_i \cap G \subset G$, por consiguiente, $\bigcup_{i=1}^{i_0} X_i \subset G$, pero, por otra

parte, todo punto $x \in G$, al igual que cualquier otro punto del espacio R^n , pertenece por lo menos a un cubo Q de rango k : $x \in Q \cap G$. En este caso $Q \cap G \in \tau$, es decir,

para cierto i se tiene $Q = Q_i$, por lo cual $x \in Q_i \cap X = X_i \subset \bigcup_{i=1}^{i_0} X_i$. De este modo, $\bigcup_{i=1}^{i_0} X_i = G$.

Luego, $X_i \cap X_j \subset Q_i \cap Q_j$. Si la intersección $Q_i \cap Q_j$ no es vacía, representa un cubo de dimensión inferior a n , y, por consiguiente, es la gráfica de una función continua (incluso lineal) en un compacto. Por esta razón su medida es igual a cero: $\mu(Q_i \cap Q_j) = 0$, de donde también $\mu(X_i \cap X_j) = 0$, $i \neq j$. Por fin, de conformidad con el lema 8, $\mu X_i > 0$.

Existen, evidentemente, las particiones del tipo indicado tan pequeñas como se quiera. En efecto, cualquiera que sea $\delta > 0$, basta elegir tal rango k que sea $10^{-k\sqrt{n}} <$

$< \delta$ ($d(Q) = 10^{-k}\sqrt{n}$ es el diámetro del cubo de rango k) y entonces

$$d(X_i) = d(Q_i \cap G) \leq d(Q_i) = 10^{-k}\sqrt{n} < \delta, \quad i = 1, 2, \dots, i_0,$$

por lo cual $\delta_\tau < \delta$. \square

Teorema 7. Si una función es integrable en un conjunto abierto, está acotada.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función f es integrable en un conjunto medible G . Según la definición de integral, el conjunto G es medible según Jordan y debido al corolario del lema 8, existen particiones, tan pequeñas como se quiera, de dicho conjunto, todos los elementos de las cuales tienen medida positiva. Es evidente que, en virtud del lema 8 para las particiones construidas al demostrar el corolario del lema citado, la reunión de todos sus elementos de medida positiva coincide con el mismo conjunto G . Si la función f fuera no acotada en G , entonces, de acuerdo con el corolario del lema 7, no sería integrable.

OBSERVACIÓN. Según se ve de la demostración aducida del teorema 7, el carácter abierto del conjunto G se ha requerido sólo para mostrar que existen sus particiones, tan pequeñas como se quiera, cuyos elementos tienen todos medida positiva. De este modo, para todos los conjuntos que poseen esta propiedad la integrabilidad de las funciones en ellos conlleva a su carácter acotado.

Podemos convencernos con facilidad de que la clausura G de todo conjunto abierto medible G también tiene particiones, tan pequeñas como se quiera, todos los elementos de las cuales tienen medida positiva. Efectivamente, basta tomar de nuevo todos los cubos Q_i de rango k que hacen con G una intersección no vacía. En este caso con mayor razón tendrán no una intersección vacía con la clausura \bar{G} del conjunto G : $Q_i \cap \bar{G} \supset Q_i \cap G = \emptyset$. Además, como $S_k(G)$ es un conjunto cerrado y $G \subset S_k(G)$, entonces $\bar{G} \subset S_k(G)$. Por lo tanto, si ponemos $X_i = Q_i \cap \bar{G}$, donde $Q_i \cap G \neq \emptyset$, la partición $\tau = \{X_i\}$ forma el recubrimiento de la clausura \bar{G} del conjunto G , pues el poliedro $S_k(G)$ se compone sólo de los cubos indicados Q_i y, según el lema 8,

$$\mu X_i = \mu(Q_i \cap \bar{G}) \geq \mu(Q_i \cap G) > 0.$$

Ejercicio 6. Constrúyase un ejemplo de función no acotada e integrable en un conjunto de medida positiva

Si la función f está acotada en un conjunto medible, se pueden determinar, igual que en el caso unidimensional, las sumas superiores e inferiores de Darboux.

Definición 5. Sea f una función acotada en el conjunto medible según Jordan X , sea $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i_0}$ la partición del conjunto X ,

$$m_i = \inf_{x \in X_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in X_i} f(x), \quad i = 1, 2, \dots, i_0.$$

En tal caso las sumas

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} m_i \mu X_i, \quad S_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} M_i \mu X_i$$

llevan los nombres respectivos de sumas inferiores y superiores de Darboux.

Para las sumas de Darboux y sumas integrales de Riemann son válidas las siguientes desigualdades evidentes

$$s_r \leq \sigma_r \leq S_r.$$

Lo mismo que para la función de una sola variable, para cualesquiera dos particiones τ_1 y τ_2 es lícita la desigualdad

$$s_{\tau_1} \leq S_{\tau_2}.$$

Teorema 8. Para que la función f , acotada en un conjunto medible según Jordan $X \subset R^n$, sea integrable según Riemann en dicho conjunto, es necesario y suficiente que

$$\lim_{\delta_r \rightarrow 0} (S_r - s_r) = 0. \quad (44.57)$$

Si se cumplen estas condiciones, se tiene

$$\lim_{\delta_r \rightarrow 0} S_r = \lim_{\delta_r \rightarrow 0} s_r = \int f(x) dX. \quad (44.58)$$

La condición (44.57) es equivalente a la siguiente

$$\lim_{\delta_r \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{i_0} \omega(f; X_i) \mu X_i = 0, \quad (44.59)$$

donde $\omega(f; X_i)$ es la oscilación de la función f en el conjunto $X_i \in \tau = \{X_i\}$.

La demostración de este teorema es análoga a la que se realiza en el caso unidimensional y se recomienda que esta demostración quede a cargo del propio lector.

Ejercicio 7. Enúnciense las definiciones de los límites (44.57) — (44.59) con ayuda de las sucesiones y empleando el "lenguaje $\varepsilon - \delta$ ".

Teorema 9. Si una función es continua en un compacto medible según Jordan, será integrable en éste.

DEMOSTRACIÓN. Sea X un compacto medible, $X \subset R^n$, y sea f una función continua en dicho compacto. Toda función, continua en un compacto, está acotada (véase el p. 19.6) y es uniformemente continua (véase el p. 19.7) en él. Por ello, aquí también la demostración es la misma que en el caso unidimensional (véase el p. 27.5): se obtiene con facilidad la estimación

$$\sum_{i=1}^{i_0} \omega(f; X_i) \mu X_i \leq \omega(\delta, f) \mu X,$$

donde $\omega(\delta, f)$ es el módulo de continuidad de la función f . De esta estimación se deduce directamente el cumplimiento de la condición (44.59), por lo cual, conforme al teorema 8, tiene lugar también la integrabilidad de la función f . \square

44.5°. SOBRE LA INTEGRABILIDAD DE LAS FUNCIONES DISCONTINUAS

La continuidad de una función no es una condición necesaria de integrabilidad: existen también funciones integrables discontinuas. Una clase bastante amplia de las funciones integrables discontinuas se determina por el siguiente teorema.

Teorema 10. Si una función está acotada en un compacto medible según Jordan y el conjunto de puntos de discontinuidad de la función citada tiene medida de Jordan cero la función es integrable según Riemann.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función está definida y acotada en un compacto, esto es, en un conjunto cerrado acotado $X \subset R^n$, con la particularidad de que el compacto X es medible según Jordan. Siendo f acotada en X , existe tal constante $M > 0$, que para todo $x \in X$ se cumple la desigualdad

$$|f(x)| \leq M. \quad (44.60)$$

Sea X_0 un conjunto de los puntos de discontinuidad de la función f . De conformidad con la hipótesis del teorema, $\mu X_0 = 0$, razón por la cual para todo $\varepsilon > 0$ fijo existe tal rango k que

$$\mu S_k(X_0) < \frac{\varepsilon}{3^n 4M}. \quad (44.61)$$

Esto es una consecuencia de que en el caso dado, con arreglo a la definición de medida, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu S_k(X_0) = 0$. Supongamos que el poliedro $S_k(X_0)$ se compone de los cubos Q_1, Q_2, \dots, Q_l . Denotemos con P_j un cubo que se obtiene de Q_j con ayuda de la transformación de semejanza con centro en el centro del cubo Q_j y la razón de semejanza igual a tres; en este caso

$$\mu P_j = 3^n \mu Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, l. \quad (44.62)$$

Pongamos $P = \bigcup_{j=1}^l P_j$. En virtud de las desigualdades (44.61) y (44.62), tenemos

$$\mu P = \mu \bigcup_{j=1}^l P_j \leq \sum_{j=1}^l \mu P_j = \sum_{j=1}^l 3^n \mu Q_j = 3^n \mu S_k(X_0) < \frac{\varepsilon}{4M}. \quad (44.63)$$

Cabe notar que el conjunto P se obtiene de $S_k(X_0)$, orlando el último con una franja de cubos cuyas aristas son de longitud 10^{-k} , por lo cual todo conjunto A de diámetro $d(A)$ inferior a 10^{-k} , que se corta con el conjunto $S_k(X_0)$, está contenido en P (fig. 184):

$$d(A) < 10^{-k}, \quad A \cap S_k(X_0) = \emptyset \Rightarrow A \subset P. \quad (44.64)$$

Designemos ahora con G el conjunto de puntos interiores del poliedro $S_k(X_0)$. Evidentemente, G es un conjunto abierto y como, según la hipótesis, del teorema, X es cerrado, entonces el conjunto $F = X \setminus G$ es también cerrado y, además por ser X acotado, el conjunto F es también acotado, razón por la cual F es un compacto. Luego, el conjunto X_0 se dispone en el interior del poliedro $S_k(X_0)$, es decir, $X_0 \subset G$ (según se ha observado anteriormente, véase el p. 44.1, esto tiene lugar, en general, para cualquier conjunto X y se deduce de la definición del poliedro $S_k(X)$). De aquí se pone claro que la función f es continua en el compacto F y, como, además, el conjunto F es medible en su calidad de diferencia entre dos conjuntos medibles X y G , entonces, de acuerdo con el teorema 9, la función f es integrable en F .

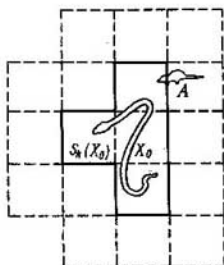


Fig. 184

Por eso, para $\varepsilon > 0$ elegido más arriba, existe tal $\delta > 0$, que para toda partición τ_F del conjunto F de finura $\delta_{\tau_F} < \delta$ se verifica la desigualdad

$$S_{\tau_F} - s_{\tau_F} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (44.65)$$

donde S_{τ_F} y s_{τ_F} son las sumas superiores e inferiores de Darboux de la función f , correspondientes a la partición τ_F del conjunto F .

Sea

$$\delta_0 = \min \{10^{-k}, \delta\}, \quad (44.66)$$

$\tau = \{X_i\}_i = \rho$ una partición del conjunto X de finura $\delta_i = \delta_0$. Es evidente que $\tau_F \stackrel{\text{def}}{=} \{X_i \cap F\}$, donde $X_i \cap F \neq \emptyset$, es una partición del conjunto F de finura $\delta_{\tau_F} \leq \delta_0 < \delta$, y, por esta razón, en virtud de (44.66), para τ_F se verifica la desigualdad (44.65).

Pongamos

$$\begin{aligned} M_i &= \sup_{x \in X_i} f(x), & m_i &= \inf_{x \in X_i} f(x), \\ S_{\tau} &= \sum_{i=1}^{l_0} M_i \mu X_i, & s_{\tau} &= \sum_{i=1}^{l_0} m_i \mu X_i, \\ M'_i &= \sup_{x \in X_i \cap F} f(x), & m'_i &= \inf_{x \in X_i \cap F} f(x), \\ S_{\tau_F} &= \sum_{X_i \cap F \neq \emptyset} M'_i \mu(X_i \cap F), & s_{\tau_F} &= \sum_{X_i \cap F \neq \emptyset} m'_i \mu(X_i \cap F). \end{aligned}$$

Todo conjunto $X_i \in \tau$ se interseca con G o no se interseca. Si no se interseca, es decir, si $X_i \cap G = \emptyset$, se tiene $X_i \subset F$ y para tales índices i tenemos $M_i = M'_i$, $m_i = m'_i$, $X_i \cap F = X_i$.

Dado que $X_i \neq \emptyset$ y $X_i \subset X = F \cup G$, de $X_i \cap G = \emptyset$ se deduce que $X_i \subset F$ y, por consiguiente, $X_i \cap F \neq \emptyset$. Por ello, al observar que en las sumas que vienen

abajo todos los sumandos son no negativos, obtendremos

$$\begin{aligned} \sum_{X_i \cap G = \emptyset} (M_i - m_i) \mu X_i &= \sum_{X_i \cap G = \emptyset} (M_i - m'_i) \mu X_i \leq \sum_{X_i \cap F \neq \emptyset} (M_i - m'_i) \mu (X_i \cap F) = \\ &= S_{\tau_F} - s_{\tau_F} < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (44.67)$$

Si $X_i \cap G \neq \emptyset$, en virtud de (44.64) y (44.66), $X_i \subset P$ y por esta razón para estos índices i (véase, además, (44.63)) tenemos

$$\sum_{X_i \cap G \neq \emptyset} \mu X_i = \mu \bigcup_{X_i \cap G \neq \emptyset} X_i \leq \mu P < \frac{\varepsilon}{4M}. \quad (44.68)$$

Al hacer uso de las desigualdades obvias $|m_i| \leq M$, $|M_i| \leq M$, $i = 1, 2, \dots, i_0$, que se desprenden directamente de (44.60) y al aplicar la desigualdad (44.68), tendremos

$$\sum_{X_i \cap G \neq \emptyset} (M_i - m_i) \mu X_i \leq \sum_{X_i \cap G \neq \emptyset} (|M_i| + |m_i|) \mu X_i \leq 2M \sum_{X_i \cap G \neq \emptyset} \mu X_i < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (44.69)$$

De (44.67) y (44.69) se deduce que

$$\begin{aligned} S_{\tau} - s_{\tau} &= \sum_{i=1}^{i_0} (M_i - m_i) \mu X_i = \\ &= \sum_{X_i \cap G \neq \emptyset} (M_i - m_i) \mu X_i + \sum_{X_i \cap G = \emptyset} (M_i - m_i) \mu X_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

De aquí, de acuerdo con el teorema 8, se deduce la integrabilidad de la función f en el conjunto X . \square

44.6. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL MÚLTIPLE

Consideraremos aquí las propiedades de la integral múltiple análogas a las de la función de una sola variable por un segmento. Recordemos que la integrabilidad de una función (según Riemann) en cierto conjunto presupone la mensurabilidad de éste según Jordan.

1°. Sea X un conjunto medible; en este caso $\int dX = \mu X$.

Efectivamente, el integrando es idénticamente igual a la unidad. Por ello, si $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i_0}$ es cierta partición del conjunto X , entonces (véase (44.41))

$$\int dX = \lim_{\delta_{\tau} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{i_0} \mu X_i = \mu X. \quad \square$$

2°. Sean X y X^* unos conjuntos medibles, $X^* \subset X$ y sea f una función acotada e integrable en X ; será también integrable en X^* .

En efecto, el conjunto $X^{**} = X \setminus X^*$ es también medible, siendo una diferencia entre dos conjuntos medibles. Sean $\tau^* = \{X_i^*\}$ una partición del conjunto X^* de finura δ_{τ^*} y $\tau^{**} = \{X_j^{**}\}$ una partición del conjunto X^{**} de finura $\delta_{\tau^{**}} < \delta_{\tau^*}$. Entonces, $\tau = \{X_i^*, X_j^{**}\}$ será la partición del conjunto X de finura $\delta_\tau = \delta_{\tau^*}$. Si

$$\omega_\tau = \sum_{i^*} \omega(f, X_i^*) \mu X_i^* + \sum_{j^{**}} \omega(f, X_j^{**}) \mu X_j^{**}$$

y

$$\omega_{\tau^*} = \sum_{i^*} \omega(f, X_i^*) \mu X_i^*$$

entonces, evidentemente, $0 \leq \omega_{\tau^*} \leq \omega_\tau$. Pero $\lim_{\delta_{\tau^*} \rightarrow 0} \omega_\tau = 0$, por lo cual

$\lim_{\delta_{\tau^*} \rightarrow 0} \omega_{\tau^*} = 0$, de donde proviene la integrabilidad de la función f en el conjunto X^* (véase (44.59)). \square

3°. **Aditividad de la integral por los conjuntos.** Si X y X'' son unos conjuntos medibles, $X = X' \cup X''$, $X' \cap X'' = \emptyset$, y la función f está acotada y es integrable en el conjunto X , entonces las integrales $\int f(x) dX'$ y $\int f(x) dX''$ existen y

$$\int f(x) dX = \int f(x) dX' + \int f(x) dX'' \quad (44.70)$$

Ya que la existencia de las integrales $\int f(x) dX'$ y $\int f(x) dX''$ proviene de la propiedad 2°, nos queda demostrar sólo la fórmula (44.70). Sean $\tau' = \{X_i'\}$ y

$\tau'' = \{X_j''\}$ las particiones de los conjuntos respectivos X' y X'' . En este caso $\tau = \{X_i', X_j''\}$ es la partición del conjunto X y su finura es igual a la máxima de las finuras de las particiones $\delta_{\tau'}$ y $\delta_{\tau''}$: $\delta_\tau = \max\{\delta_{\tau'}, \delta_{\tau''}\}$.

Sea $\xi^{(i)} \in X_i'$, $\eta^{(j)} \in X_j''$,

$$\delta_{\tau'} = \sum_{i'} f(\xi^{(i)}) \mu X_i', \quad \sigma_{\tau'} = \sum_{i'} f(\xi^{(i)}) \mu X_i',$$

$$\sigma_\tau = \sigma_{\tau'} + \sigma_{\tau''} \quad (44.71)$$

Por ser f integrable en los conjuntos X , X' y X'' , tenemos

$$\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau = \int f(x) dX, \quad \lim_{\delta_{\tau'} \rightarrow 0} \sigma_{\tau'} = \int f(x) dX', \quad \lim_{\delta_{\tau''} \rightarrow 0} \sigma_{\tau''} = \int f(x) dX'',$$

Por ello, pasando al límite en la igualdad (44.71) para $\delta_\tau \rightarrow 0$, obtendremos (44.70). \square

OBSERVACIÓN. Conviene fijar la atención en la siguiente circunstancia: puede suceder que la función f esté definida en el conjunto $X = X' \cup X''$, donde X' y X'' son conjuntos medibles, $X' \cap X'' = \emptyset$, las integrales $\int f(x) dX'$ y $\int f(x) dX''$ existen, mientras que la integral $\int f(x) dX$ no existe.

Aclaremos lo dicho con un ejemplo. Sean (r, φ) las coordenadas polares de un punto en un plano

$$f(r, \varphi) = \begin{cases} 0, & \text{si } r < 1, \\ 1/\varphi, & \text{si } r = 1, 0 < \varphi \leq 2\pi, \end{cases}$$

sea $X' = \{(r, \varphi): r < 1\}$ un círculo abierto y $X'' = \{(r, \varphi): r = 1\}$, una circunferencia. Evidentemente, $\mu X'' = 0$, por lo cual, pese a que la función f no está acotada en X'' , es integrable y $\int (r, \varphi) dX'' = 0$. Existe también la integral $\int f(r, \varphi) dX' = 0$. No obstante, la integral $\int f(r, \varphi) dX$ referida a un círculo cerrado $X = X' \cup X''$ no existe. Efectivamente, el conjunto X representa la clausura de una región, razón por la cual dicho conjunto tiene particiones, tan pequeñas como se quiera, todos los elementos de las cuales cuentan con una medida positiva. Por lo tanto (véase la observación al teorema 7), toda función integrable en X está acotada, en tanto que la función dada f no está acotada y no es, por ende, integrable.

Es importante observar que la situación semejante no puede tener lugar para las funciones acotadas: si la función f está acotada y es integrable en los conjuntos medibles X' y X'' , $X' \cap X'' = \emptyset$, entonces será integrable también en el conjunto $X = X' \cup X''$, con la particularidad de que queda lícita la fórmula (44.70). Esto será demostrado en el p. 44.7*.

Sólo diremos que en el caso cuando uno de los conjuntos, X' o X'' , tiene medida cero, la integrabilidad de la función acotada f en su reunión, si se presupone la integrabilidad de dicha función en cada uno de los conjuntos, se obtiene por repetición textual de los razonamientos aducidos en la demostración del teorema 10. En efecto, sea f integrable y acotada en los conjuntos medibles X' y X'' , $\mu X'' = 0$, $X = X' \cup X''$. En este caso si construimos, al igual que en la demostración aducida, un conjunto $G \supset X'$ (el conjunto X' desempeña aquí el papel del conjunto X_0 del teorema 10) y ponemos $F = X \setminus G$, entonces tendremos $F \subset X''$ y, por lo tanto, en virtud de la propiedad 2° de las integrales, la función f resultará integrable en el conjunto F , de donde se desprende, igual que antes, su integrabilidad en el conjunto X , y, por ende, en virtud de la propiedad 3°, la validez de la fórmula (44.70), donde $\int f(x) dX' = 0$.

Del modo semejante se demuestra la afirmación general, pero el procedimiento para ello resulta ser más complicado.

4°. Linealidad de la integral. Si las funciones f_1 y f_2 son integrables en el conjunto X , para cualesquiera números λ_1 y λ_2 existe la integral $\int [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)] dX$ y se verifica la igualdad

$$\int [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)] dX = \lambda_1 \int f_1(x) dX + \lambda_2 \int f_2(x) dX.$$

5°. Si las funciones f y g son integrables y están acotadas en cierto conjunto, entonces su producto y la razón f/g (para $\inf_X |g| > 0$) son integrables en dicho conjunto.

6°. Integración de las desigualdades. Si las funciones f y g son integrables en el conjunto X y si para todo $x \in X$ se verifica la desigualdad $f(x) \leq g(x)$, entonces $\int f(x) dX \leq \int g(x) dX$.

7°. Si la función f es integrable y está acotada en un conjunto X , el valor absoluto de la función $|f|$ es también integrable en el conjunto, con la particularidad de que $|\int f(x)dX| \leq \int |f(x)|dX$.

La demostración de las propiedades 4°, 5°, 6°, 7° se efectúa por analogía completa con el caso unidimensional (véase el p. 28.1).

8°. **Monotonía de la integral de las funciones no negativas extendida a los conjuntos.** Si X y X^* son unos conjuntos medibles, $X^* \subset X$, y la función f es no negativa, acotada e integrable en X , entonces

$$\int f(x)dX^* \leq \int f(x)dX. \quad (44.72)$$

En efecto, en vista de las propiedades 2° y 3°, las integrales $\int f(x)dX^*$ y $\int f(x)d(X \setminus X^*)$ existen y

$$\int f(x)dX = \int f(x)dX^* + \int f(x)d(X \setminus X^*).$$

Como $f(x) \geq 0$, se tiene, en virtud de la propiedad 6°, $\int f(x)d(X \setminus X^*) \geq 0$, de lo que proviene la desigualdad (44.72). \square

9°. **Supongamos que la función f es integrable y no negativa en un conjunto abierto medible G , $x^{(0)} \in G$ y la función f es continua en el punto $x^{(0)}$, siendo $f(x^{(0)}) > 0$. En este caso**

$$\int f(x)dG > 0. \quad (44.73)$$

En efecto, por ser la función f continua en el punto $x^{(0)}$, para todo $\varepsilon > 0$ existe tal entorno $U = U(x^{(0)})$ de este punto que con cualquiera $x \in U$ se verifica la desigualdad $f(x^{(0)}) - \varepsilon < f(x) < f(x^{(0)}) + \varepsilon$. Además, debido a que el conjunto G es abierto, el entorno U siempre puede elegirse de modo tal que sea $U \subset G$.

Al escoger $\varepsilon = \frac{f(x^{(0)})}{2}$, obtendremos para éste tal entorno U que para cualesquiera x , pertenecientes a este entorno, tendremos $f(x) > \frac{f(x^{(0)})}{2}$. De aquí, aplicando sucesivamente las propiedades 8°, 6° y 1°, llegamos a que

$$\int f(x)dG \geq \int f(x)dU \geq \frac{f(x^{(0)})}{2} \int dU = \frac{f(x^{(0)})}{2} \mu U > 0,$$

pues $\mu U > 0$, como medida de cualquier conjunto abierto. \square

Demos a conocer un corolario directo de la propiedad 9°.

Corolario. Si la función f es continua, integrable y no negativa en un conjunto abierto medible G y no es idénticamente igual a cero, entonces $\int f(x)dG > 0$.

10°. **Aditividad total de la integral extendida a los conjuntos.** Supongamos que la función f está acotada y es integrable en el conjunto X , mientras que $\{X_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, es la sucesión de tales conjuntos medibles $X_k \subset X$, que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu X_k = \mu X. \quad (44.74)$$

En este caso

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int f(x) dX_k = \int f(x) dX. \quad (44.75)$$

Por ser la integral aditiva, tenemos

$$\int f(x) dX - \int f(x) dX_k = \int f(x) d(X \setminus X_k).$$

Como, según la hipótesis, f es una función acotada, es decir, existe tal constante $M > 0$ que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned} \left| \int f(x) dX - \int f(x) dX_k \right| &= \left| \int f(x) d(X \setminus X_k) \right| \leq \\ &\leq \int |f(x)| d(X \setminus X_k) \leq M \int d(X \setminus X_k) = M \mu(X \setminus X_k). \end{aligned}$$

Según la propiedad de aditividad de la medida tenemos $\mu(X \setminus X_k) = \mu X - \mu X_k$, por consiguiente

$$\left| \int f(x) dX - \int f(x) dX_k \right| \leq M(\mu X - \mu X_k).$$

De aquí, en virtud de (44.74) proviene precisamente (44.75). \square

11°. **Teorema del valor medio.** Supongamos que las funciones f y g están acotadas y son integrables en el conjunto X . Si la función g no cambia de signo en X y $m \leq f(x) \leq M$, $x \in X$, entonces existe tal número λ , $m \leq \lambda \leq M$, que

$$\int f(x)g(x)dX = \lambda \int g(x)dX.$$

Corolario. Sea X un conjunto medible linealmente conexo o una clausura de un conjunto linealmente conexo. En este caso, si la función f está acotada, es integrable y continua en X , existe tal punto $\xi \in X$, que $\int f(x)dX = f(\xi)\mu X$.

El teorema sobre el valor medio se demuestra por analogía completa con el caso unidimensional (véase el p. 28.2). Para obtener el corolario, se debe usar el teorema sobre los valores intermedios de la función continua en un conjunto linealmente conexo o en la clausura de éste (véase el p. 19.6).

44.7°. CRITERIOS DE INTEGRABILIDAD DE LAS FUNCIONES DE RIEMANN Y DARBOUX Y LOS COROLARIOS

Supongamos que la función f está definida y acotada en un conjunto medible según Jordan X , $\tau = \{X_i\}_{i=1}^p$ es la partición del conjunto, $m_i = \inf_X f$,

*1) Con las sucesiones de conjuntos medibles, que poseen la propiedad (44.74), ya nos encontramos, véase, por ejemplo, el teorema 2 en el p. 31.2.

$$M_i = \sup_X f, s_r = \sum_{i=1}^{i_0} m_i \mu X_i, S_r = \sum_{i=1}^{i_0} M_i \mu X_i \text{ son las sumas de Darboux,}$$

inferior y superior, correspondiente a la partición τ . Pongamos

$$I_* = \sup_{\tau} s_r, I^* = \inf_{\tau} S_r; \quad (44.76)$$

I_* e I^* se llaman *integrales de Darboux inferior y superior*, respectivamente, de la función f . Resulta que las integrales inferior y superior de Darboux representan no sólo las cotas superior e inferior de las sumas integrales de Darboux, sino también su límite a condición de que la finura de las particiones tiende a cero.

Teorema 11. Si la función f está acotada en un conjunto medible según Jordan X , resulta

$$I_* = \lim_{\delta_{\tau} \rightarrow 0} s_r, I^* = \lim_{\delta_{\tau} \rightarrow 0} S_r.$$

DEMOSTRACIÓN. Demostremos la validez de la primera fórmula (la segunda se demuestra de modo análogo). Supongamos que $|f(x)| \leq M$, $x \in X$, y está dado $\varepsilon > 0$. En vista de la definición (44.76), existe tal partición $\tau^* = \{X_i^*\}$ del conjunto X que

$$s_{\tau^*} > I_* - \frac{\varepsilon}{3}. \quad (44.77)$$

Aquí $s_{\tau^*} = \sum_{i=1}^{i_0} m_i^* \mu X_i^*$, $m_i^* = \inf_{X_i^*} f$, $i = 1, 2, \dots, i_0$. Sea

$$X_0 = \bigcup_{i=1}^{i_0} \partial X_i^*. \quad (44.78)$$

Por cuanto cada conjunto X_i^* es medible, $\mu \partial X_i^* = 0$; por ello $\mu X_0 = 0$. Por consiguiente, existe tal rango $k = k(\varepsilon)$, que

$$\mu S_k(X_0) < \frac{\varepsilon}{3^n + 1} M. \quad (44.79)$$

Problemos que para cualquier partición $\tau = \{X_j\}_j = J_0$ del conjunto X de finura $\delta_{\tau} < 10^{-k}$ se verifica la igualdad

$$I_* - \varepsilon < s_{\tau} \leq I_*. \quad (44.80)$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, esto significa que $\lim_{\delta_{\tau} \rightarrow 0} s_{\tau} = I_*$.

La desigualdad $s_{\tau} \leq I_*$ proviene directamente de la definición de integral inferior I_* (véase (44.76)). Por eso basta sólo demostrar la desigualdad

$$s_{\tau} > I_* - \varepsilon \quad (44.81)$$

a condición de que $\delta_{\tau} < 10^{-k}$.

Supongamos que $S_k = S_k(X_0)$ se compone de los cubos Q_1, \dots, Q_m . Por analogía con lo que se hizo al demostrar el teorema 10, designemos mediante P_j un cubo que se obtiene de Q_j por transformación de semejanza de centro en el centro

del cubo Q_j y la razón de semejanza igual a 3, $j = 1, 2, \dots, m$. Pongamos

$$P = \bigcup_{j=1}^m P_j, \quad G = X \setminus P. \quad (44.82)$$

De las definiciones de los conjuntos P y G se desprende que el conjunto G está separado del poliedro $S_k(X_0)$ por una "franja" de cubos con las aristas de longitud 10^{-k} . Estimemos ante todo la medida μP . De la definición del conjunto P (véase (44.82)) y la desigualdad (44.79) tenemos (compárese con (44.63))

$$\mu P = \mu \bigcup_{j=1}^m P_j \leq \sum_{j=1}^m \mu P_j = 3^n \sum_{j=1}^m \mu Q_j = 3^n \mu S_k(X_0) < \frac{\varepsilon}{3M}. \quad (44.83)$$

Hemos de notar a continuación que para todo conjunto $A \subset X$ de diámetro $d(A) < 10^{-k}$, que se interseca con el conjunto $G: A \cap G \neq \emptyset$, existe y, además, el único conjunto $X_i^* \in \tau^*$ tal que

$$A \subset X_i^* \quad (44.84)$$

En efecto, elijamos un punto $x \in A \cap G$. Puesto que $A \subset X$, entonces $x \in X$, y, por ende, el punto x está contenido en cierto elemento X_i^* de la partición τ^* . Para este elemento se cumple precisamente la inclusión (44.84). Efectivamente, si la inclusión dada no tuviera lugar, existiría un punto $y \in A \setminus X_i^*$. Ya que $x \in A$, $y \in A$ y $d(A) < 10^{-k}$, resulta que $\rho(x, y) < 10^{-k}$. Por consiguiente, el segmento que tiene por sus extremos los puntos x y y , la longitud inferior a 10^{-k} y el extremo x dispuestos en el conjunto G , no se interseca con el conjunto $S_k(X_0)$, pues está separado de G por una franja de ancho 10^{-k} . No obstante, de lo que un extremo del segmento pertenece a cierto conjunto, en el caso dado al conjunto X_i^* y el otro no le pertenece, se infiere (véase el lema 9 en el punto 18.2) que en dicho segmento existe un punto $z \in \partial X_i^*$. Mas (véase (44.78)) $\partial X_i^* \subset X_0 \subset S_k(X_0)$, es decir, $z \in S_k(X_0)$. Por lo tanto, el segmento citado se interseca con el conjunto $S_k(X_0)$. La contradicción obtenida demuestra la inclusión (44.84).

Demostremos la unicidad del conjunto X_i^* que satisface la inclusión (44.84). Supongamos que existe un conjunto más, $X_k^* \in \tau^*$, tal que $A \subset X_k^*$, $k \neq i$. En este caso $A \subset X_i^* \cap X_k^*$. Si la intersección $X_i^* \cap X_k^*$ contuviera por lo menos un punto que fuera al mismo tiempo interior para los conjuntos X_i^* y X_k^* , este punto sería interior también para la intersección $X_i^* \cap X_k^*$ y entonces tendría lugar la desigualdad $\mu(X_i^* \cap X_k^*) > 0$. Esta desigualdad contradice la definición de partición (véase el p. 44.3), en virtud de la cual $\mu(X_i^* \cap X_k^*) = 0$ cuando $i \neq k$. Por consiguiente, todo punto de la intersección $X_i^* \cap X_k^*$, y, por ende, todo punto del conjunto A es un punto de frontera por lo menos para uno de los conjuntos X_i^*, X_k^* . Pero, en tal caso

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{l_0} \partial X_i^* \subset X_0 \subset S_k(X_0). \quad \text{Esto es imposible, puesto que el conjunto } A \text{ se interseca con el conjunto } G \text{ el cual no se corta con } S_k(X_0).$$

La contradicción se ha obtenido de la suposición sobre la existencia del segundo elemento X_k^* de τ^* que contiene el conjunto A . Por consiguiente, tal elemento es único.

Tomemos ahora una partición arbitraria $\tau = \{X_j\}_1^{j_0} = \{I_j\}_0^1$ del conjunto X de finura $\delta_\tau < 10^{-k}$. Dividamos la suma inferior de Darboux

$$s_\tau = \sum_{j=1}^{j_0} m_j \mu X_j, \quad m_j = \inf_{x \in X_j} f(x), \quad j = 1, 2, \dots, j_0.$$

en dos sumandos correspondientes a aquellos X_j que se intersecan con el conjunto G y aquellos que no se intersecan con él y, por lo tanto, se disponen íntegramente en el conjunto P (véase (44.82)):

$$s_\tau = \sum_{X_j \cap G \neq \emptyset} m_j \mu X_j + \sum_{X_j \subset P} m_j \mu X_j. \quad (44.85)$$

Al emplear la desigualdad evidente

$$|m_j| \leq M, \quad j = 1, 2, \dots, j_0. \quad (44.86)$$

donde $|f(x)| \leq M$, $x \in X$, y la estimación (44.83), obtendremos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{X_j \subset P} m_j \mu X_j \right| &\leq \sum_{X_j \subset P} |m_j| \mu X_j \leq \\ &\leq M \sum_{X_j \subset P} \mu X_j \leq M \mu \bigcup_{X_j \subset P} X_j \leq M \mu P < M \frac{\epsilon}{3M} = \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

En particular, $\sum_{X_j \subset P} m_j \mu X_j > -\frac{\epsilon}{3}$. Por esto de (44.85) tenemos

$$s_\tau > \sum_{X_j \cap G \neq \emptyset} m_j \mu X_j - \frac{\epsilon}{3}. \quad (44.87)$$

Diremos ahora que $d(X_j) \leq \delta_\tau < 10^{-k}$, razón por la cual para todo X_j , que se interseca con el conjunto G , existe, en virtud de (44.84) tal $X_i^* \in \tau^*$, que $X_j \subset X_i^*$. Designaremos mediante G_i la reunión de todos aquellos X_j que se intersecan con G y están contenidos en X_i^* .

$$G_i = \bigcup_{X_j \subset X_i^*, X_j \cap G \neq \emptyset} X_j.$$

Agrupando en la suma $\sum_{X_j \cap G \neq \emptyset} m_j \mu X_j$ los sumandos contenidos en un mismo conjunto G_i , escribamos la suma citada en la forma

$$\sum_{X_j \cap G \neq \emptyset} m_j \mu X_j = \sum_{i=1}^{i_0} \sum_{X_j \subset G_i} m_j \mu X_j. \quad (44.88)$$

Con el fin de estimar la suma interior, observemos que para todo $i = 1, 2, \dots, i_0$, de acuerdo con la igualdad obvia

$$X_i^* = (X_i^* \cap G_i) \cup (X_i^* \setminus G_i) = G_i \cup (X_i^* \setminus G_i)$$

(la segunda igualdad proviene de la inclusión $G_i \subset X_i^*$), tenemos

$$\begin{aligned} m_i^* \mu X_i^* &= m_i^* \mu G_i + m_i^* \mu (X_i^* \setminus G_i) = \\ &= m_i^* \mu \bigcup_{X_j \subset G_i} X_j + m_i^* \mu (X_i^* \setminus G_i) = \\ &= m_i^* \sum_{X_j \subset G_i} \mu X_j + m_i^* \mu (X_i^* \setminus G_i). \end{aligned} \quad (44.89)$$

Estimemos el segundo sumando. Todo punto $x \in X_i^* \setminus G_i$ pertenece a cierto conjunto $X_j \in \tau : x \in X_j$. Este conjunto X_j no puede intersectarse con G_i , puesto que todo $X_j \in \tau$, que se intersecta con G_i , está contenido íntegramente en cierto elemento de la partición τ^* (véase (44.84)). Por cuanto la intersección $X_j \cap X_i^*$ no es vacía: $x \in X_j \cap X_i^*$ a título de este elemento en el caso dado puede intervenir sólo el conjunto X_i^* es decir, $X_j \subset X_i^*$. Mas, en vista de la definición del conjunto G_i , tendría lugar en estas circunstancias la inclusión $X_j \subset G_i$, y, por lo tanto, $x \in G_i$. Esto contradice la suposición de que $x \in X_i^* \setminus G_i$. Así pues, el conjunto X_j no se intersecta con G_i y, por ende, $X_j \subset P$. De aquí se deduce, en particular, que $x \in P$. Ya que x es un punto arbitrario del conjunto $X_i^* \setminus G_i$, se tiene $X_i^* \setminus G_i \subset P$, por lo cual $X_i^* \setminus G_i \subset X_i^* \cap P$.

Al hacer uso de dicha inclusión y de la desigualdad (44.86), tenemos

$$m_i^* \mu (X_i^* \setminus G_i) \leq M \mu (X_i^* \cap P).$$

Sustituyendo esta desigualdad en (44.89), tendremos

$$m_i^* \mu X_i^* \leq \sum_{X_j \subset G_i} m_j^* \mu X_j + M \mu (X_i^* \cap P).$$

Ha de notarse ahora que de la inclusión $X_j \subset G_i \subset X_i^*$ proviene la desigualdad $m_i^* \leq m_j$ (la cota inferior de un subconjunto no es menor que la cota inferior del propio conjunto) y obtenemos

$$m_i^* \mu X_i^* \leq \sum_{X_j \subset G_i} m_j \mu X_j + M \mu (X_i^* \cap P),$$

de donde

$$\sum_{X_j \subset G_i} m_j \mu X_j \geq m_i^* \mu X_i^* - M \mu (X_i^* \cap P).$$

Al sumar ambos miembros según i desde 1 hasta i_0 , en virtud de (44.88), tendremos

$$\begin{aligned} \sum_{X_j \cap \emptyset \neq \emptyset} m_j \mu X_j &\geq \sum_{i=1}^{i_0} m_i^* \mu X_i - M \sum_{i=1}^{i_0} \mu (X_i^* \cap P) = s_{r^*} - \\ &\quad - M \sum_{i=1}^{i_0} \mu (X_i^* \cap P). \end{aligned}$$

Puesto que, de acuerdo con (44.83),

$$\sum_{l=1}^{i_0} \mu(X_l^* \cap P) = \mu \bigcup_{l=1}^{i_0} X_l^* \cap P \leq \mu P < \frac{\varepsilon}{3M},$$

resulta

$$\sum_{X_j \cap G \neq \emptyset} m_j \mu X_j > s_{r^*} - \frac{\varepsilon}{3}. \quad (44.90)$$

Al aplicar, ahora, sucesivamente las desigualdades (44.87), (44.90) y (44.77), obtendremos

$$s_r > \sum_{X_j \cap G \neq \emptyset} m_j \mu X_j - \frac{\varepsilon}{3} > s_{r^*} - \frac{2\varepsilon}{3} > I_* - \varepsilon,$$

es decir, la desigualdad (44.81) y, por lo tanto, el teorema 11 se han demostrado. \square

Con ayuda de dicho teorema pueden enunciarse dos criterios de integrabilidad de una función acotada.

Teorema 12 (criterio de Darboux). Una función acotada en un conjunto medible según Jordan es integrable según Riemann cuando, y sólo cuando, sus integrales superior e inferior de Darboux son iguales.

DEMOSTRACIÓN. Sean I_* e I^* las integrales de Darboux, inferior y superior, respectivamente, de la función f que es acotada en un conjunto medible X . Por consiguiente, para cualquier partición τ del conjunto X se verifican las desigualdades (véase (44.76))

$$s_r \leq I_* \leq I^* \leq S_r. \quad (44.91)$$

NECESIDAD DE LA CONDICIÓN $I_* = I^*$. Si la función f es integrable en el conjunto X , se tiene (véase (44.57))

$$\lim_{\delta_n \rightarrow 0} (S_r - s_r) = 0,$$

y dado que $0 \leq I^* - I_* \leq S_r - s_r$, entonces $I_* = I^*$.

SUFICIENCIA DE LA CONDICIÓN $I_* = I^*$. Si $I_* = I^*$, en virtud del teorema 11, tenemos

$$\lim_{\delta_r \rightarrow 0} (S_r - s_r) = \lim_{\delta_r \rightarrow 0} S_r - \lim_{\delta_r \rightarrow 0} s_r = I^* - I_* = 0,$$

y, en tal caso, de acuerdo con el teorema 8 del p. 44.4, la función f es integrable. \square

Teorema 13 (criterio de Riemann). Una función f , acotada en el conjunto medible según Jordan X , es integrable según Riemann cuando, y sólo cuando, para todo $\varepsilon > 0$ existe tal partición τ del conjunto X que

$$S_r - s_r < \varepsilon, \quad (44.92)$$

donde s_r y S_r son las sumas de Darboux inferior y superior de la función f , correspondientes a la partición τ .

DEMOSTRACIÓN. Si la función f es integrable en el conjunto X , para ella se cumple la condición (44.57) (véase el teorema 8 en el p. 44.4). La validez de (44.92) se deduce de la definición de límite de las sumas de Darboux para $\delta_r \rightarrow 0$.

Si, en cambio, se cumple la condición (44.92), entonces, en virtud de (44.91), con cualquier $\varepsilon > 0$ es válida la desigualdad $0 \leq I^* - I_* < \varepsilon$, y, por eso, $I_* = I^*$. De aquí, de conformidad con el teorema 12, se desprende que la función f es integrable en el conjunto X . \square

Así pues, recordando la definición de la integral múltiple, aducida en el p. 44.3, el teorema 8 del p. 44.4 y los teoremas 12 y 13 del punto presente, llegamos a que las cinco afirmaciones que siguen son equivalentes:

1) la función f es integrable en el conjunto X , es decir, existe el límite $\lim_{\delta, \tau \rightarrow 0} \sigma_\tau = \int f(x) dX$;

$$2) \lim_{\delta, \tau \rightarrow 0} (S_\tau - s_\tau) = 0;$$

3) $\lim_{\delta, \tau \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{i_0} \omega(f; X_i) \mu X_i = 0$, $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i_0} = 1$ es la partición del conjunto X ;

4) para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal partición del conjunto X que $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$;

5) $I_* = I^*$.

De este modo, el cumplimiento de cada una de estas condiciones es equivalente a la existencia de la integral $\int f(x) dX$, con la particularidad de que

$$\int f(x) dX = \lim_{\delta, \tau \rightarrow 0} \sigma_\tau = \lim_{\delta, \tau \rightarrow 0} s_\tau = \lim_{\delta, \tau \rightarrow 0} S_\tau.$$

OBSERVACIÓN 1. Los teoremas obtenidos permiten ahora demostrar sin dificultad la aditividad de una integral extendida a los conjuntos medibles para funciones acotadas (véase el p. 44.6) en la forma siguiente: si una función acotada f es integrable en los conjuntos disjuntos X_1 y X_2 , es integrable también en el conjunto $X = X_1 \cup X_2$.

En efecto si la función f está acotada y es integrable en los conjuntos X_1 y X_2 , entonces, en virtud del teorema 13, para todo $\varepsilon > 0$ existen las particiones τ_1 y τ_2 de los conjuntos respectivos X_1 y X_2 de tal índole que

$$S_{\tau_1} - s_{\tau_1} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad S_{\tau_2} - s_{\tau_2} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (44.93)$$

Como $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ es una partición del conjunto $X = X_1 \cup X_2$ y las sumas de Darboux, superior S_τ e inferior s_τ , que corresponden a esta partición, se expresan en términos de las sumas análogas de Darboux correspondientes a la particiones τ_1 y τ_2 según las fórmulas $S_\tau = S_{\tau_1} + S_{\tau_2}$, $s_\tau = s_{\tau_1} + s_{\tau_2}$, entonces, restando de la primera de las igualdades dadas la segunda, obtenemos, en vista de (44.93)

$$S_\tau - s_\tau = (S_{\tau_1} - s_{\tau_1}) + (S_{\tau_2} - s_{\tau_2}) < \varepsilon.$$

Del cumplimiento de esta condición se deduce (también conforme al teorema 13) que la función f es integrable en el conjunto X .

OBSERVACIÓN 2. Como ya se ha dicho en el p. 44.3, para las funciones de una variable, definidas en los segmentos, disponemos de dos definiciones de la integral, a

saber, una, dada en el p. 27.1, con ayuda de las particiones de los segmentos en segmentos y sólo segmentos, y la otra definición del p. 44.3, con ayuda de las particiones de los segmentos en cualesquiera conjuntos medibles según Jordan. Estas dos definiciones son equivalentes.

Demostremoslo. Para ambas definiciones la condición necesaria de integrabilidad consiste en el carácter acotado de la función en consideración: véase el teorema 1 en el p. 27.2 y la observación al teorema 7 en el p. 44.4 (un segmento es la clausura del intervalo, es decir, la clausura de un conjunto abierto). Por ello consideraremos la función f que está acotada en cierto segmento $[a, b]$. Supongamos que para esta

función existe la integral $I = \lim_{\delta_r \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi_i) \mu X_i$ en el sentido del p. 44.3, es decir,

para cualesquiera particiones $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i_0}$ del segmento $[a, b]$ en conjuntos X_i medibles según Jordan. En este caso si nos limitamos sólo a una parte de particiones τ , para las cuales todos los conjuntos X_i son segmentos, entonces para $\delta_r \rightarrow 0$, el límite

de las sumas integrales $\sum_{i=1}^{i_0} f(\xi_i) \mu X_i$ referente a la parte mencionada de parti-

ciones existirá también y será igual al mismo número I . Por consiguiente, si existe una integral en el sentido del p. 44.3, existe la misma también en el sentido del p. 27.1.

Viceversa, supongamos que existe la integral $I = \int_a^b f(x) dx$ en el sentido del p.

27.1. Entonces, de acuerdo con el teorema 2 del p. 27.4, $\lim_{\delta_r \rightarrow 0} (S_r - s_r) = 0$, donde τ es la partición del segmento $[a, b]$ en segmentos. Por consiguiente, para todo $\varepsilon > 0$ existe tal $\delta > 0$ que para cualquier partición τ del segmento $[a, b]$ en segmentos cuyas longitudes no son superiores a δ , resulta lícita la desigualdad $S_r - s_r < \varepsilon$. Pero ya del único hecho consistente en la existencia por lo menos de una partición τ , para la cual se cumple la desigualdad $S_r - s_r < \varepsilon$, proviene, de conformidad con el teorema 13 del presente punto, que la función f es integrable en el sentido del p. 44.3.

Así pues, ambas definiciones de la integral referida a un segmento son realmente equivalentes.

OBSERVACIÓN 3. De lo demostrado se desprende también el siguiente reforzamiento de las condiciones suficientes de integrabilidad de las funciones, demostradas en el teorema 2 del p. 24.4: para que una función f sea integrable en el segmento $[a, b]$ en el sentido de la definición de integral en el p. 27.1, es suficiente que para todo $\varepsilon > 0$ exista por lo menos tal partición τ del segmento $[a, b]$ en segmentos que para las sumas inferiores y superiores de Darboux, correspondientes a dicha partición, se verifique la desigualdad $S_r - s_r < \varepsilon$.

En efecto, en tal caso la función f es integrable en el segmento $[a, b]$ en el sentido del p. 44.3, por lo cual, de acuerdo con lo demostrado, también en el sentido del p. 27.1.

OBSERVACIÓN 4. De la observación antecedente se infiere directamente que la función f , acotada en cierto segmento $[a, b]$ e integrable según Riemann en cual-

quier segmento $[a, \eta]$, $a < \eta < b$, es integrable también en todo el segmento $[a, b]$ (este hecho se ha indicado sin demostración en el p. 33.1). Efectivamente, si $|f(x)| \leq M$, $x \in [a, b]$, y se ha dado $\varepsilon > 0$, entonces elijamos δ , $0 < \delta < b - a$, de modo tal que sea $\delta < \frac{\varepsilon}{4M}$. Por ser la función f integrable en el segmento $[a, b - \delta]$, existe tal partición r de éste, que si s_r y S_r son las sumas inferior y superior de Darboux de la función f para esta partición, se tiene

$$S_r - s_r < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Designemos con τ_0 la partición del segmento $[a, b]$ que se obtiene de la partición r_0 del segmento $[a, b - \delta]$ por adición del punto b : $\tau_0 = r \cup \{b\}$ y sea $m_0 = \inf_{[a, b]} f(x)$, $M_0 = \sup_{[a, b]} f(x)$. Si s_{τ_0} y S_{τ_0} son las sumas inferior y superior de Darboux de la función f para la partición τ_0 , entonces

$$S_{\tau_0} = S_r + M_0\delta, \quad s_{\tau_0} = s_r + m_0\delta.$$

Por esta razón

$$S_{\tau_0} - s_{\tau_0} = S_r - s_r + (M_0 - m_0)\delta < \frac{\varepsilon}{2} + 2M\delta = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

y, por lo tanto, de acuerdo con la observación 3, la función f es integrable según Riemann en el segmento $[a, b]$.

§ 45. REDUCCIÓN DE LA INTEGRAL MÚLTIPLE A UNA REITERADA

Pasemos ahora a las propiedades de la integral múltiple relacionadas con los rasgos específicos que distinguen el caso multidimensional del unidimensional. El empleo de estas propiedades facilita considerablemente con frecuencia el cálculo de las integrales múltiples concretas. Las demostraciones completas se darán sólo para el caso de las funciones de dos variables. El caso general n -dimensional no difiere, teóricamente, del caso plano, no obstante los razonamientos en el caso n -dimensional adoptan una forma más engorrosa y, por lo tanto, difícilmente contemplada.

45.1. REDUCCIÓN DE LA INTEGRAL DOBLE A UNA REITERADA

En el presente párrafo se mostrará que la integración de las funciones de varias variables puede reducirse a la integración sucesiva de las funciones de una sola variable. Comenzaremos por definir el concepto de integral reiterada.

Supongamos que en el segmento $[a, b]$ se han dado las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ tales que $\varphi(x) \leq \psi(x)$, $a \leq x \leq b$, y que en el conjunto (fig. 185)

$$X = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\} \quad (45.1)$$

está definida la función $f(x, y)$.

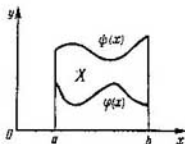


Fig. 185

Si la función $f(x, y)$, como función de la variable y , es integrable en el segmento $[\varphi(x), \psi(x)]$ para todo $x \in [a, b]$ fijo, es decir, si para todo $x \in [a, b]$ existe la in-

tegral $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$ y la función

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \quad (45.2)$$

es integrable en el segmento $[a, b]$, entonces la integral

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right] dx \quad (45.3)$$

se llama *reiterada* y se designa mediante

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy. \quad (45.4)$$

La función $F(x)$, definida por la igualdad (45.2), se denomina *integral dependiente del parámetro x* . De este modo, la integral reiterada (45.4) es una integral de la integral dependiente de parámetro (véanse también §§ 53, 54).

Observemos que el conjunto X , que se define por la fórmula (45.1), es medible en el sentido de la medida plana de Jordan y cerrado. En efecto, de la continuidad de las funciones φ y ψ en el segmento $[a, b]$ proviene su carácter acotado, por lo cual el conjunto X está acotado. Luego, su frontera ∂X se compone de las gráficas de las funciones citadas φ , ψ y también, quizás, de los segmentos de las rectas $x = a$ y $x = b$. Cada uno de los conjuntos mencionados tiene medida cero (véase el teorema 3 en el p. 44.2), razón por la cual la frontera ∂X del conjunto X tiene también medida cero. En fin, el conjunto X se da con ayuda de las desigualdades no estrictas $a \leq x \leq b$, $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$, donde las funciones φ y ψ son continuas, a consecuencia de lo cual dichas desigualdades quedan vigentes también al pasar al límite, de lo que precisamente proviene el carácter cerrado del conjunto X . De este modo, X es un compacto medible.

Las condiciones suficientes para que haya la posibilidad de reducir la integral doble a una reiterada se proporcionan por el siguiente teorema.

Teorema 1. Sea $f(x, y)$ una función continua en el conjunto X dado mediante la fórmula (45.1). En este caso

$$\iint_X f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy. \quad (45.5)$$

A la demostración del teorema antepongamos el lema siguiente.

Lema 1. En las suposiciones del teorema 1 la función (45.2) es continua en el segmento $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Señalemos ante todo que la integral (45.2) existe para todo $x \in [a, b]$. Efectivamente, la función $f(x, y)$, siendo continua por totalidad de las variables x y y , es continua respecto de cada una de ellas. Por esto, la integral citada existe como integral de una función continua respecto de y en el segmento $[\varphi(x), \psi(x)]$.

Al sustituir en esta integral la variable y por t , rigiéndose por la fórmula

$$y = \varphi(x) + [\psi(x) - \varphi(x)]t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (45.6)$$

obtendremos

$$F(x) = \int_0^1 f[x, \varphi(x) + (\psi(x) - \varphi(x))t] (\psi(x) - \varphi(x)) dt. \quad (45.7)$$

Pongamos

$$g(x, t) = f[x, \varphi(x) + (\psi(x) - \varphi(x))t] (\psi(x) - \varphi(x)).$$

Como la función $g(x, t)$ se obtiene con ayuda de una operación aritmética y una composición de las funciones continuas f, φ, ψ y (45.6), entonces, en virtud del teorema sobre funciones continuas (véase el p. 19.5), $g(x, t)$ es continua por totalidad de las variables x, t en el rectángulo

$$\Delta = \{(x, t) : a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq 1\}.$$

De este modo, para la función $F(x)$ (véase (45.2)) tiene lugar, debido a (45.7), una representación más simple

$$F(x) = \int_0^1 g(x, t) dt$$

(más simple porque los límites de integración en ella son constantes).

Sea ahora $x \in [a, b]$, $x + \Delta x \in [a, b]$.

Designemos mediante $\omega(\delta; g)$ el módulo de continuidad (véase el p. 19.7) de la función $g(x, t)$. En este caso

$$\begin{aligned} |F(x + \Delta x) - F(x)| &= \left| \int_0^1 g(x + \Delta x, t) dt - \int_0^1 g(x, t) dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 |g(x + \Delta x, t) - g(x, t)| dt \leq \omega(|\Delta x|; g). \end{aligned} \quad (45.8)$$

La función $g(x, t)$, siendo continua en el conjunto acotado cerrado Δ , es en éste uniformemente continua, por lo cual (véase el p. 19.7), $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta; g) = 0$. De aquí, en virtud de la desigualdad (45.8), tenemos:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [F(x + \Delta x) - F(x)] = 0,$$

lo que precisamente implica la continuidad de la función $F(x)$, definida por la fórmula (45.2). \square

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Ha de notarse ante todo que la integral en el segundo miembro de la igualdad (45.5), es decir,

$$\int_b^a F(x) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

es la integral de una función continua (véase el lema) y por esta razón existe.

Partiremos ahora el conjunto X en las partes X_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, k$, de la manera siguiente. Consideraremos la partición $\tau_k = \{x_i\}_{i=0}^k$ del segmento $[a, b]$ en k segmentos iguales:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b,$$

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{k}, i = 1, 2, \dots, k,$$

y sea

$$\varphi_0(x) = \varphi(x),$$

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) + \frac{1}{k} [\psi(x) - \varphi(x)],$$

.....

$$\varphi_j(x) = \varphi(x) + \frac{j}{k} [\psi(x) - \varphi(x)],$$

.....

$$\varphi_k(x) = \varphi(x) + \frac{k}{k} [\psi(x) - \varphi(x)] = \psi(x).$$

Pongamos $X_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, \varphi_{j-1}(x) \leq y \leq \varphi_j(x)\}$, y sea $\tau_k^* = \{X_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \dots, k$. Evidentemente, τ_k^* es la partición del conjunto X (fig. 186). Ahora tenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy &= \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy = \\ &= \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \sum_{j=1}^k \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y) dy = \end{aligned}$$

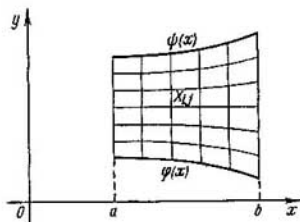


Fig. 186

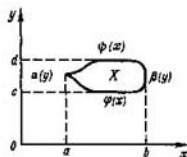


Fig. 187

$$= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y) dy. \quad (45.9)$$

Pongamos

$$m_{ij} = \inf_{X_{ij}} f(x, y) \text{ y } M_{ij} = \sup_{X_{ij}} f(x, y), \quad i, j = 1, 2, \dots, k.$$

Observando que

$$\mu X_{ij} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)] dx,$$

obtendremos

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y) dy &\leq M_{ij} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} dy = \\ &= M_{ij} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)] dx = M_{ij} \mu X_{ij}, \end{aligned} \quad (45.10)$$

y, por analogía,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y) dy \geq m_{ij} \mu X_{ij}. \quad (45.11)$$

Con ayuda de las desigualdades (45.10) y (45.11) para la integral reiterada (45.9) obtenemos la siguiente estimación en términos de las sumas inferiores y superiores de Darboux s_{rk} y S_{rk} de la función $f(x, y)$:

$$\begin{aligned} s_{rk} &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k m_{ij} \mu X_{ij} \leq \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k M_{ij} \mu X_{ij} = S_{rk}. \end{aligned} \quad (45.12)$$

Para la finura $\delta_{r_k}^*$ de la partición r_k^* de la región G tenemos $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_{r_k}^* = 0$. En efecto, como ya se ha indicado, las funciones φ y ψ están acotadas en el segmento $[a, b]$ debido a su continuidad, es decir, existe tal constante $M > 0$ que $|\varphi(x)| \leq M$ y $|\psi(x)| \leq M$, cualesquiera que sean $x \in [a, b]$. Por ello, para el diámetro $d(X_{ij})$ de cada conjunto $X_{ij} \in r_k^*$ tenemos

$$\begin{aligned} dX_{ij} &\leq \sqrt{\left(\frac{b-a}{k}\right)^2 + \left[\max_{\substack{x' \in [x_{j-1}, x_j] \\ x'' \in [x_{j-1}, x_j]}} |\varphi_j(x'') - \varphi_{j-1}(x')|\right]^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{b-a}{k}\right)^2 + \max_{\substack{x' \in [x_{j-1}, x_j] \\ x'' \in [x_{j-1}, x_j]}} \{|\varphi_j(x'') - \varphi_j(x')| + |\varphi_j(x') - \varphi_{j-1}(x')|\}^2}. \end{aligned}$$

Observando que para $x' \in [x_{j-1}, x_j]$, $x'' \in [x_{j-1}, x_j]$, en virtud de la definición de las funciones φ_j , se cumplen las desigualdades

$$\begin{aligned} |\varphi_j(x'') - \varphi_j(x')| &= |\varphi(x'') - \varphi(x')| + \frac{j}{k} |\varphi(x'') - \varphi(x')| + \\ &+ \frac{j}{k} |\psi(x'') - \psi(x')| \leq 2\omega\left(\frac{b-a}{k}, \varphi\right) + \omega\left(\frac{b-a}{k}, \psi\right), \\ j &= 0, 1, \dots, k, \end{aligned}$$

donde $\omega(\delta, \varphi)$ y $\omega(\delta, \psi)$ son los módulos de continuidad de las funciones φ y ψ , respectivamente, así como para todos $x \in [a, b]$ las desigualdades

$$\begin{aligned} |\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)| &= \frac{j}{k} |\psi(x) - \varphi(x)| - \frac{j-1}{k} |\psi(x) - \varphi(x)| = \\ &= \frac{|\psi(x) - \varphi(x)|}{k} \leq \frac{|\psi(x)| + |\varphi(x)|}{k} \leq \frac{2M}{k}, j = 1, 2, \dots, k, \end{aligned}$$

obtendremos

$$\begin{aligned} d(X_{ij}) &\leq \sqrt{\left(\frac{b-a}{k}\right)^2 + \max_{[x_{j-1}, x_j]} \{|\varphi_j(x'') - \varphi_{j-1}(x')|\}^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{b-a}{k}\right)^2 + \left[\omega\left(\frac{b-a}{k}, \psi\right) + 2\omega\left(\frac{b-a}{k}, \varphi\right) + \frac{2M}{k}\right]^2}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $\delta_{r_k}^* = \max_{i,j} d(X_{ij}) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow +\infty$. Por esta razón, siendo la función $f(x, y)$ integrable en X (véase el p. 44.4), tenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{r_k}^* = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{r_k}^* = \iint_G f(x, y) dx dy.$$

Pasando ahora al límite en la desigualdad (45.12) para $k \rightarrow \infty$, obtendremos la fórmula (45.5). \square

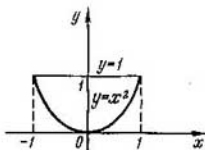


Fig. 188

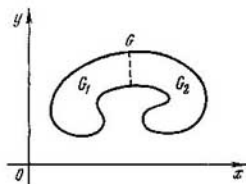


Fig. 189

Si el conjunto X es de tal género que existen las funciones continuas $\alpha(y)$ y $\beta(y)$, $\alpha(y) \leq \beta(y)$, $c \leq y \leq d$ tales que

$$X = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}, \quad (45.13)$$

mientras que la función $f(x, y)$ es, como hasta ahora, continua en \bar{X} , entonces, en virtud de que la variable x no tiene ventaja alguna ante la variable y , del teorema 1 proviene que

$$\iint_X f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx. \quad (45.14)$$

En cambio, si para el conjunto X son justas tanto la igualdad (45.1), como también (45.13) (fig. 187), entonces igualando entre sí los segundos miembros de las igualdades (45.5) y (45.14), para la función $f(x, y)$, continua en el conjunto \bar{X} , obtendremos la fórmula

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx, \quad (45.15)$$

que expresa la regla de cambio del orden de integración en las integrales reiteradas.

Se debe decir que las condiciones, bajo las cuales se han demostrado las fórmulas (45.5), (45.14) y (45.15), pueden ser debilitadas.

Ejemplo. Calculemos la integral de la función $z = x^2y$, extendida a la región finita G que está limitada por una parte de la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$ (fig. 188). Tenemos

$$\begin{aligned} \iint_G x^2y dx dy &= \int_{-1}^1 x^2 dx \int_{x^2}^1 y dy = \\ &= \int_{-1}^1 \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^1 x^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^4)x^2 dx = \frac{4}{21}. \end{aligned}$$

Si se requiere calcular una integral doble referida a un conjunto que no puede darse en la forma (45.1) ó (45.13), entonces con el fin de emplear las fórmulas obtenidas se debe tratar de dividir el conjunto dado en unas partes, cada una de las cuales ya tendrá la forma (45.1) ó (45.13) (fig. 189). Si se logra alcanzarlo, entonces, por ser aditiva la integral en los conjuntos (véase el p. 44.6), el cálculo de la integral dada se reducirá al cálculo de las integrales extendidas a las partes mencionadas; las

últimas integrales pueden ser reducidas, con ayuda de las fórmulas (45.5) y (45.14), a las de multiplicidad unitaria.

Ejercicios. Calcúlense las integrales:

$$1. \iint_X \frac{dx dy}{y}, X = \{(x, y) : x^2 - 6x - 5 < 0; y > 1; 3x - y - 2 > 0, x^2 - y > 0\}.$$

$$2. \iint_X x^2 y^2 dx dy, X = \{(x, y) : y > 0; xy < 1; x^2 - 3xy + 2y^2 < 0\}.$$

$$3. \iint_X x dx dy, X = \{(x, y) : x < 20; y < 20; x - y + 5 > 0, xy > 6\}.$$

$$4. \iint_X x\sqrt{1+xy} dx dy, X = \left\{ (x, y) : xy < 1, x - 1 < \frac{xy}{x+1} \right\}.$$

$$5. \int_0^1 \int_{y/2}^1 e^{x^2} dx dy.$$

$$8. \int_0^1 \int_0^{1-y} e^{-x^2 + 2x} dx dy.$$

$$6. \int_0^1 \int_{2y}^1 \cos(x^2 + 1) dx dy.$$

$$9. \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3/2} dx dy.$$

$$7. \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \operatorname{sen}(x^3 - 1) dx dy.$$

$$10. \int_0^1 \int_{(y-1)/2}^1 \operatorname{tg}(x^2 + x) dx dy.$$

Simplifíquense las expresiones por cambio del orden de integración (la función f es continua en toda la región de integración):

$$11. \int_0^1 dy \int_{y^2/9}^y f(x, y) dx + \int_1^3 dx \int_{y^2/9}^1 f(x, y) dy.$$

$$12. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_0^{1/x} f(x, y) dy.$$

$$13. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{(3-x)/2} f(x, y) dy.$$

14. Demuéstrese la fórmula de Dirichlet

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$$

45.2. GENERALIZACIÓN PARA EL CASO n -DIMENSIONAL

Consideraremos primero el caso tridimensional. Supongamos que $X \subset \mathbb{R}^3$ y la función $f(x, y, z)$ está definida en X . Designemos mediante X_{xy} la proyección del conjunto X sobre el plano coordenado de las variables x e y (fig. 190):

$$X_{xy} = \{(x, y, 0) : \text{existe tal } z \text{ que } (x, y, z) \in X\}.$$

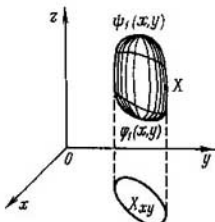


Fig. 190

Si el conjunto X es de la forma

$$X = \{(x, y, z) : (x, y) \in X_{xy}, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \psi_1(x, y)\},$$

donde las funciones $\varphi_1(x, y)$ y $\psi_1(x, y)$ son continuas en el conjunto X_{xy} , el cual es representable, a su vez, en la forma (45.1), y la función $f(x, y, z)$ es continua en el conjunto de partida X , entonces resulta válida la fórmula, análoga a la (45.5),

$$\iiint_X f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\psi_1(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (45.16)$$

Al reunir en el segundo miembro dos integrales exteriores, podemos escribir (45.16) en la forma

$$\iiint_X f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{X_{xy}} dx dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\psi_1(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (45.17)$$

Designemos ahora con $X(x)$ las secciones del conjunto X mediante los planos perpendiculares al eje de coordenadas Ox

$$X(x_0) = X \cap \{(x, y, z) : x = x_0\}.$$

Al reunir en el segundo miembro de la fórmula (45.16) dos integrales interiores, obtendremos:

$$\iiint_X f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{X(x)} f(x, y, z) dy dz. \quad (45.18)$$

De este modo, las fórmulas (45.17) y (45.18) muestran que en el caso tridimensional existen dos métodos de reducción de la integral tridimensional a una reiterada que contiene integrales de menor multiplicidad.

En el caso particular, cuando $f(x, y, z) \equiv 1$, tenemos (véase la propiedad 1ª de las integrales múltiples en el p. 44.6) $\iiint_X dx dy dz = \mu X$, (μX es el volumen del

conjunto X), $\iint_{X(x)} dy dz = \mu X(x)$, ($\mu X(x)$ es el área de la sección $X(x)$).

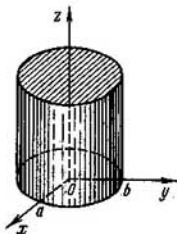


Fig. 191

De este modo

$$\mu X = \int_a^b \mu X(x) dx, \quad (45.19)$$

es decir, el volumen de un cuerpo es igual a la integral del área variable de la sección $X(x)$.

Ejemplo. Hallemos el volumen de un cilindro elíptico de altura h , de cuya base sirve una elipse de semiejes a y b . Al tomar como plano de coordenadas xy el plano de una de las bases del cilindro y como eje z , el eje de simetría del cilindro, perpendicular a las bases (fig. 191), obtendremos, de acuerdo con la fórmula (45.19),

$$\mu X = \int_0^h \mu X(z) dz. \text{ Mas } X(z) \text{ es una elipse cuyos ejes son } a \text{ y } b, \text{ por lo cual (véase el ejemplo 4 en el p. 32.1) } \mu X(z) = \pi ab, \text{ y, por consiguiente, } \mu X = \pi ab \int_0^h dz = \pi abh.$$

Por analogía con el caso tridimensional, las integrales múltiples de una función de cualquier número de variables $n > 3$ pueden reducirse a las integrales reiteradas. Supongamos que R^n es un espacio n -dimensional, R^{n-1} un hiperplano $x_n = 0$, $X \subset R^n$ y $X_{x_1 \dots x_{n-1}}$, la proyección del conjunto X sobre el hiperplano de las variables x_1, \dots, x_{n-1} , es decir, sobre R^{n-1} .

$$X_{x_1 \dots x_{n-1}} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0): \text{ existe tal } x_n \text{ que } (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in X\}.$$

Supongamos, además, que existen tales funciones $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$ y $\psi(x_1, \dots, x_{n-1})$, continuas en $X_{x_1 \dots x_{n-1}}$, que el conjunto X se compone de los puntos $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$, para los cuales

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \in X_{x_1, \dots, x_{n-1}}, \quad \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq \psi(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Sea el conjunto $X_{x_1 \dots x_{n-1}}$ medible, en el sentido de la medida $(n-1)$ -dimensional de Jordan, y cerrado. Entonces, por analogía con el caso bidimensional (véase el p. 45.1), se demuestra que X es también medible, pero ya en el sentido de la medida n -dimensional, y está cerrado, razón por la cual es un compacto.

Si la función $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ es continua en el compacto X , es lícita la fórmula

$$\begin{aligned} \int_X \dots \int_X f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n &= \\ &= \int_{X_{x_1 \dots x_{n-1}}} \dots \int_{x_{n-1}}^{x_{n-1}} dx_1 \dots dx_{n-1} \int_{\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\psi(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_{n-1}) dx_n, \quad (45.20) \end{aligned}$$

la cual reduce la integración de la función de n variables a la integración sucesiva de la función de una sola variable y de otra función de $n - 1$ variables.

Si la proyección $X_{x_1 \dots x_{n-1}}$ del conjunto X sobre el hiperplano R^{n-1} puede, a su vez, representarse en una forma análoga a la del conjunto X , entonces la integral $(n - 1)$ -múltiple, obtenida en el segundo miembro de la igualdad (45.20), puede ser reducida a una integral $(n - 2)$ -múltiple. Continuando este proceso, si esto es, por supuesto, posible, llegaremos a continuación a una fórmula del tipo

$$\begin{aligned} \int_X \dots \int_X f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n &= \\ &= \int_a^b dx_1 \int_{\varphi_1(x_1)}^{\psi_1(x_1)} dx_2 \int_{\varphi_2(x_1, x_2)}^{\psi_2(x_1, x_2)} dx_3 \dots \\ &\quad \int_{\varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\psi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) dx_n. \quad (45.21) \end{aligned}$$

De este modo, en el caso que se considera la integración de la función de n variables se reduce a la integración sucesiva n veces de las funciones de una variable.

Designemos ahora con $X_{x_1 \dots x_m}$ la proyección del conjunto X al espacio $R_{x_1 \dots x_m}^m$ y con $X(x_1, \dots, x_m)$ la sección del conjunto X mediante los hiperplanos de dimensión $n - m$ que pasan por el punto $(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ y son ortogonales al subespacio $R_{x_1 \dots x_m}^m$. Al reunir en la fórmula (45.21) las m primeras y $n - m$ últimas integraciones, obtendremos

$$\begin{aligned} \int_X \dots \int_X f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n &= \\ &= \int_{X_{x_1 \dots x_m}} \dots \int_{x_m} dx_1 \dots dx_m \int_{X(x_1 \dots x_m)} \dots \int_X f(x_1, \dots, \\ &\quad \dots, x_n) dx_{m+1} \dots dx_n. \quad (45.22) \end{aligned}$$

Si $f(x_1, \dots, x_n) \equiv 1$ en X , entonces, de esta fórmula obtenemos por analogía con (45.19)

$$\mu X = \int_{X_{x_1 \dots x_m}} \dots \int_{x_m} \mu X(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m. \quad (45.23)$$

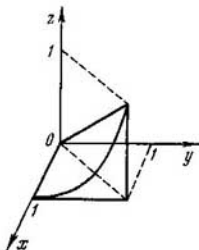


Fig. 192

Ejemplo. Calculemos la integral de la función $f(x, y, z) = xy^2z^3$, extendida a una región finita G , limitada por las superficies $z = xy$, $y = x$, $x = 1$ y $z = 0$ (fig. 192). Al aplicar la fórmula (45.16), tendremos

$$\begin{aligned} \iiint_G xy^2z^3 dx dy dz &= \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 dy \int_0^{xy} z^3 dz = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 x^5 dx \int_0^x y^6 dy = \frac{1}{28} \int_0^1 x^{12} dx = \frac{1}{364}. \end{aligned}$$

Ejercicios. Calcúlense las integrales:

- $\iiint_X z dx dy dz$, $X = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^2\}$.
- $\iiint_X (x + y + z)x^2y^2z^2 dx dy dz$, $X = \{(x, y, z) : x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0; x + y + z \leq 1\}$.
- $\iiint_X (4x - y + z) dx dy dz$; la región X está acotada por las partes de las superficies $x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 1, z = 2 - x^2$.
- $\iiint_X z^2 dx dy dz$; la región X es la parte común de las bolas $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$.

45.3*. DESIGUALDAD INTEGRAL GENERALIZADA DE MINKOWSKI

Como otro ejemplo de aplicación de la regla de cambio del orden de integración, demos una desigualdad integral de uso frecuente.

Supongamos que la función $f(x, y)$ es continua en el rectángulo $\Delta = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Evidentemente, para cualquier $y \in [c, d]$ fijo es continua respecto de x en el segmento $[a, b]$, y para cualquier $x \in [a, b]$ fijo es continua

respecto de y en el segmento $[c, d]$.

Para todo $p > 1$ resulta válida la *desigualdad generalizada de Minkowski*

$$\left\{ \int_c^d \left[\int_a^b |f(x, y)| dx \right]^p dy \right\}^{1/p} \leq \int_a^b dx \left[\int_c^d |f(x, y)|^p dy \right]^{1/p} \quad (45.24)$$

Pongamos

$$F(y) = \int_a^b |f(x, y)| dx. \quad (45.25)$$

La función F es continua (véase el lema 1 en el p. 45.1) y no negativa en el segmento $[c, d]$. Por ello, su p -ésima potencia es también integrable y no negativa en este segmento, y $0 \leq \int_c^d F^p(y) dy < +\infty$.

Si $\int_c^d F^p(y) dy = 0$, entonces, en virtud de la continuidad de la función F ,

tendremos (véase la propiedad 9 en el p. 28.1): $F(y) = 0$ en $[c, d]$. Por eso de la fórmula (45.25), debido a la misma propiedad, se deduce que para cualquier $y \in [c, d]$ tiene lugar $f(x, y) = 0$ en $[a, b]$, es decir, $f(x, y) = 0$ en Δ . En este caso la desigualdad (45.24) es, evidentemente, válida.

Sea $\int_c^d F^p(y) dy > 0$. Al cambiar el orden de integración y al aplicar la desigualdad de Hölder (28.48), obtendremos, en virtud de (45.25),

$$\begin{aligned} \int_c^d F^p(y) dy &= \int_c^d F^{p-1}(y) \left[\int_a^b |f(x, y)| dx \right] dy = \\ &= \int_a^b dx \int_c^d |f(x, y)| F^{p-1}(y) dy \leq \\ &\leq \int_a^b \left[\int_c^d |f(x, y)|^p dy \right]^{1/p} \left[\int_c^d F^{q(p-1)}(y) dy \right]^{1/q} dx, \quad (45.26) \end{aligned}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y, por lo tanto, $q(p-1) = p$. Al reducir ambos miembros de la igualdad (45.26) por el factor $\left(\int_c^d F^p(y) dy \right)^{1/q} \neq 0$, tendremos

$$\left(\int_c^d F^p(y) dy \right)^{1/p} \leq \int_a^b \left[\int_c^d |f(x, y)|^p dy \right]^{1/p} dx.$$

Sustituyendo aquí (45.25), obtenemos la desigualdad (45.24). \square

La condición de continuidad de la función f no es esencial para que la desigualdad (45.24) sea válida y puede ser debilitada. Con el fin de simplificar la demostración, a título de dominio de definición de la función f se ha empleado un rectángulo. Para las suposiciones más generales, la demostración de la desigualdad de Minkowski, basada sobre la misma idea, puede encontrarse en la monografía "Desigualdades" por Hardy G. H.; Littlewood D. E., Polya G. (Hardy G. H., Littlewood D. E., Polya, Inequalities, 1934).

§ 46. CAMBIO DE VARIABLES EN UNA INTEGRAL MÚLTIPLE

46.1. SENTIDO GEOMÉTRICO DEL MÓDULO DE JACOBIANO EN EL CASO BIDIMENSIONAL

Supongamos que G es un conjunto abierto en el plano R_{uv}^2 y G^* , un conjunto abierto en el plano R_{xy}^2 , F es la aplicación de G sobre G^* y

$$M = (u, v) \in G, \quad M^* = (x, y) \in G^*, \quad F(M) = M^*.$$

La aplicación F se da mediante un par de funciones

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v). \quad (46.1)$$

Supondremos que F satisface las siguientes condiciones:

- 1) aplica biunívocamente G sobre G^* ;
- 2) es continuamente derivable en G ;
- 3) el jacobiano $J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ no se reduce a cero en G .

Observemos que la aplicación F^{-1} , inversa de F , es también una aplicación biunívoca continuamente derivable provista de un jacobiano distinto de cero en G^* (véase el p. 41.7). Es por eso, en particular, que F es una aplicación difeomorfa del conjunto abierto G (véase la definición 11 en el p. 41.7) sobre G^* .

Si γ es un contorno sencillo cerrado dispuesto en G , entonces, en vista de que la aplicación F es biunívoca, su imagen $\gamma^* = F(\gamma)$ es también un contorno sencillo cerrado.

Lema 1. Sea Γ un conjunto acotado abierto y $\bar{\Gamma} \subset G$. En este caso $\Gamma^* = F(\Gamma)$ es también un conjunto acotado abierto y

$$\partial F(\Gamma) = F(\partial\Gamma). \quad (46.2)$$

DEMOSTRACIÓN. Como F y F^{-1} son aplicaciones homeomorfas, los conjuntos abiertos en estas mismas se aplican en conjuntos abiertos. Por consiguiente, los puntos interiores de un conjunto cualquiera, Γ , por ejemplo, o Γ^* , respectivamente, pasan a los puntos interiores de su imagen y los puntos de frontera, a los de frontera.

En efecto, sea, por ejemplo, M un punto interior del conjunto Γ , es decir, existe un entorno del punto $U = U(M)$ dispuesto en Γ : $U \subset \Gamma$. Entonces, el entorno

$U^* = F(U)$ del punto $M^* = F(M)$ se dispone en Γ^* : $U^* \subset \Gamma^*$, es decir, M^* es un punto interior del conjunto Γ^* ¹⁾.

Sea ahora M un punto de frontera del conjunto Γ , $M^* = F(M)$ y U^* es un entorno del punto M^* . Por ser homeomorfa la aplicación F , el conjunto $U = F^{-1}(U^*)$ es el entorno del punto M , y como $M \in \partial\Gamma$, entonces en el entorno U se tienen tanto los puntos que pertenecen al conjunto Γ , como los que no le pertenecen. Por consiguiente, en el entorno U^* del punto $M^* = F(M)$ (teniendo en cuenta que este entorno es la imagen del entorno $U = U(M)$ del punto M cuando se realiza la aplicación F) hay también tanto puntos pertenecientes al conjunto Γ^* como aquellos que no le pertenecen, es decir, los puntos de frontera realmente se aplican en puntos de frontera:

$$F(\partial\Gamma) \subset \partial\Gamma^*. \quad (46.3)$$

Ya que los razonamientos análogos son lícitos también para la aplicación inversa, en la fórmula (46.3) podemos sustituir el signo de inclusión por el de igualdad, es decir, se cumple la condición (46.2). Además, de lo que el conjunto Γ es abierto se deduce, en virtud de lo demostrado, el carácter abierto del conjunto Γ^* . Luego, dado que Γ es un conjunto acotado, lo será también el conjunto cerrado $\bar{\Gamma}$. Por ello, de acuerdo con el lema 3 del p. 41.4., el conjunto $F(\bar{\Gamma})$ está acotado. Del carácter acotado del conjunto $F(\bar{\Gamma})$ se desprende que el conjunto $\Gamma^* = F(\Gamma)$ es también acotado, pues $F(\Gamma) \subset F(\bar{\Gamma})$. \square

Corolario. Si la frontera $\partial\Gamma$ en las suposiciones del lema 1 se compone de un número finito de las curvas derivables continuamente a trozos, los conjuntos abiertos Γ y Γ^* son cuadrables.

DEMOSTRACIÓN. Si γ es una curva continuamente derivable dispuesta en G y $u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \leq t \leq b$, es una representación de dicha curva, las funciones $u(t)$ y $v(t)$ son continuamente derivables en el segmento $[a, b]$. En la aplicación F la curva γ pasará en la curva $\gamma^* = F(\gamma)$ cuya representación será

$$x(t) = x(u(t), v(t)), \quad y(t) = y(u(t), v(t)), \quad a \leq t \leq b,$$

donde, en virtud de las fórmulas de derivación de una función compuesta (véase el p. 20.3) y del teorema sobre la continuidad de la composición de funciones continuas (véase el p. 19.5), las funciones $x(t)$ e $y(t)$ tienen también derivadas continuas en el segmento $[a, b]$. Por consiguiente, la curva γ^* es también continuamente derivable. De aquí se infiere inmediatamente que si γ es una curva derivable continuamente a trozos, es decir, es una reunión de un número finito de curvas continuamente derivables (véase el p. 16.3), entonces γ^* es también una curva derivable continuamente a trozos.

Ahora, si la frontera $\partial\Gamma$ de un conjunto abierto $\Gamma \subset G$ se compone de un número finito de las curvas derivables continuamente a trozos, la frontera $\partial\Gamma^*$ del conjunto abierto $\Gamma^* \subset G^*$ consta también, en virtud de lo dicho anteriormente, de un

¹⁾ Hemos obtenido esta afirmación sólo como una consecuencia directa del homeomorfismo de la aplicación F . Desde luego, en el caso dado esto se deduce directamente de las suposiciones más fuertes admitidas más arriba (véase el corolario del teorema 7 en el p. 41.8).

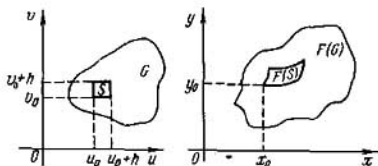


Fig. 193

número finito de curvas derivables continuamente a trozos. Por consiguiente, tanto $\partial\Gamma$, como $\partial\Gamma^*$ son rectificables (véase el teorema 1 en el p. 16.5), a consecuencia de lo cual tienen medida cero (véase el teorema 4 en el p. 44.2). Por ello, en el caso considerado los conjuntos abiertos Γ y Γ^* son cuadrables, pues tienen las fronteras de medida cero. \square

Supongamos ahora que $(u_0, v_0) \in G$ y h es cierto número. Examinemos un cuadrado cerrado S (fig. 193) cuyos vértices están dispuestos en los puntos

$$(u_0, v_0), (u_0 + h, v_0), (u_0 + h, v_0 + h), (u_0, v_0 + h). \quad (46.4)$$

Sea $S \subset G$ (para h suficientemente pequeño esta inclusión siempre se cumple; ¿por qué?). La frontera ∂S del cuadrado S compuesta de sus cuatro lados es, obviamente, un contorno cerrado sencillo suave a trozos. En virtud del corolario del lema 2, el conjunto $S^* = F(S)$ (véase fig. 193) representa una *región cuadrable cerrada* (que S^* es una *región cerrada* se desprende del principio de conservación de la región, véase el p. 41.8).

Veamos cómo se porta la razón

$$\mu F(S) / \mu S^* \quad (46.5)$$

cuando h tiende a cero.

Introduzcamos las designaciones:

$$x(u_0, v_0) = x_0, \quad y(u_0, v_0) = y_0,$$

$$\frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial u} = a_{11}, \quad \frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial v} = a_{12}, \quad \frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial u} = a_{21}, \quad \frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial v} = a_{22},$$

$$u - u_0 = \Delta u, \quad v - v_0 = \Delta v, \quad r = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}.$$

Por ser derivables las funciones (46.1), son válidas las siguientes fórmulas

$$x = x(u, v) = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) + \varepsilon_1 r, \quad (46.6)$$

$$y = y(u, v) = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) + \varepsilon_2 r,$$

donde las funciones $\varepsilon_i = \varepsilon_i(u_0, v_0, \Delta u, \Delta v)$, $i = 1, 2$ tienden a cero cuando $r \rightarrow 0$.

* Aquí, como siempre, μX denota la medida (el área, en el caso dado) del conjunto X .

A la par con la aplicación F , consideraremos una aplicación lineal \tilde{F} del plano R_{uv}^2 sobre el plano R_{xy}^2 , definida por las fórmulas

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0), \\ \tilde{y} &= y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0), \end{aligned} \quad (46.7)$$

Por el curso de geometría analítica se sabe que, realizándose una aplicación lineal, la imagen de todo paralelogramo y, en particular, de un cuadrado es un paralelogramo, con la particularidad de que la razón entre el área del último y el área del paralelogramo que se aplica es igual al valor absoluto del determinante de la aplicación el cual, en el caso de la aplicación \tilde{F} , coincide con el jacobiano $J(u, v)$ de la aplicación F en el punto (u_0, v_0) . De este modo, en el caso dado, para la aplicación (46.7) tenemos

$$\frac{\mu\tilde{F}(S)}{\mu S} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |J(u_0, v_0)|. \quad (46.8)$$

La aplicación continuamente derivable F en el entorno del punto (u_0, v_0) difiere de la aplicación lineal \tilde{F} en una función infinitamente pequeña de orden superior que el incremento de los argumentos (véase (46.6)). Probemos que de aquí se infiere la validez de la igualdad

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu F(S)}{\mu S} = |J(u_0, v_0)|. \quad (46.9)$$

Más aún, mostremos que la razón en esta igualdad tiende a su límite uniformemente en cualquier compacto dispuesto en el conjunto abierto G . Enunciemos este resultado como un teorema.

Teorema 1. *Supongamos que la aplicación F de un conjunto abierto $G \subset R_{uv}^2$ sobre otro conjunto abierto $G^* \subset R_{xy}^2$ es biunívoca y continuamente derivable en G y supongamos también que el jacobiano $J(u, v)$ no se reduce a cero en G . Entonces, si S es un cuadrado cuyos vértices coinciden con los puntos (46.4), se tiene*

$$\frac{\mu F(S)}{\mu S} = |J(u_0, v_0)| + \varepsilon(u_0, v_0, h), \quad (46.10)$$

donde la función $\varepsilon = \varepsilon(u_0, v_0, h)$, para $h \rightarrow 0$, tiende a cero uniformemente respecto a (u_0, v_0) en cualquier compacto $A \subset G^*$.

Corolario. *Para todo punto (u_0, v_0) de un conjunto abierto G se verifica la igualdad (46.9).*

DEMOSTRACIÓN. Probemos que el área de la imagen del cuadrado S , realizándose la aplicación F , se diferencia del área de la imagen de este cuadrado, cuando se realiza la aplicación \tilde{F} , en un infinitésimo de orden más elevado que el área h^2 del mismo cuadrado S y esta estimación es uniforme en cualquier compacto $A \subset G$, es decir, que

$$\mu F(S) = \mu\tilde{F}(S) + \varepsilon h^2, \quad (46.11)$$

*) De este modo, $A \ni (u_0, v_0)$.

donde ε tiende a cero uniformemente en el conjunto A , cuando la longitud h del lado del cuadrado S tiende a cero (véase en el p. 39.4. la definición que muestra cómo una función tiende al límite). Por cuanto (véase (46.8))

$$\mu \tilde{F}(S) = |J(u_0, v_0)| \mu S \quad (46.12)$$

y

$$\mu(S) = h^2,$$

de (46.11) se desprende directamente la afirmación del teorema, es decir, la fórmula (46.10).

Pasando a la demostración de la fórmula (46.11), fijemos, ante todo, el conjunto A . Ya que A es un compacto y $A \subset G$, las funciones $\varepsilon_i = \varepsilon_i(u_0, v_0, \Delta u, \Delta v)$, $i = 1, 2$, (véase (46.6)) tienden uniformemente hacia cero en el conjunto A para $r \rightarrow 0$ (véase la observación al teorema 4 en el p. 20.2, como también el p. 39.4). Los conjuntos A y $X_{uv}^2 \setminus G$ no se intersecan y son cerrados, siendo A , además, acotado, a consecuencia de lo cual (véase el lema 7 en el p. 18.2) $\eta = \rho(A, X_{uv}^2 \setminus G) > 0$.

En adelante escogeremos h de modo tal que sea $|h| < \frac{\eta}{\sqrt{2}}$. En este caso de lo que $(u_0, v_0) \in A$ proviene que $S \subset G$.

Estimemos la distancia entre las imágenes de un mismo punto del cuadrado S en las aplicaciones F y \tilde{F} . Sea

$$M = (u, v) \in S, F(M) = (x, y) \quad \text{y} \quad \tilde{F}(M) = (\tilde{x}, \tilde{y}).$$

De (46.6) y (46.7) obtenemos $x = \tilde{x} + \varepsilon_1 r$, $y = \tilde{y} + \varepsilon_2 r$, y por ende,

$$\rho(F(M), \tilde{F}(M)) = \sqrt{(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2} = r \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}.$$

Como r es la distancia entre el vértice (u_0, v_0) del cuadrado S y el punto $M \in S$, y $|h|\sqrt{2}$ es la longitud de la diagonal del cuadrado S , entonces, evidentemente, se verifica la desigualdad $r \leq |h|\sqrt{2}$ y por esta razón se tiene

$$d = \sup_{M \in S} \rho(F(M), \tilde{F}(M)) \leq |h| \varepsilon_3(u_0, v_0, h), \quad (46.13)$$

donde $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(u_0, v_0, h) = \sup_{M \in S} \sqrt{2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)}$ tiende a cero uniformemente en el conjunto A , para $h \rightarrow 0$.

Construyamos los paralelogramos cerrado S_e^* y abierto S_i^{**} cuyos lados sean paralelos a los del paralelogramo $S = \tilde{F}(S)$ y disten a la magnitud d de los lados correspondientes suyos (fig. 194) de modo tal que sea

$$S_i \subset S = \tilde{F}(S) \subset S_e. \quad (46.14)$$

Probemos ante todo que, siendo h suficientemente pequeños, el conjunto S_i no es vacío. Más aún, mostremos que el paralelogramo S_i contiene en sí un círculo abierto de radio d cuyo centro se ubica en el centro del paralelogramo S .

*) "e" es la letra inicial de la palabra exterior.

**) "i" es la letra inicial de la palabra interior.

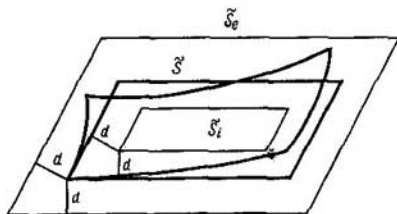


Fig. 194

Designemos mediante a y b las longitudes de los lados del paralelogramo S y mediante H_a y H_b , las longitudes de sus alturas tiradas en los lados de longitud a y b , respectivamente (fig. 195). Para demostrar que, siendo h suficientemente pequeños, el círculo de radio d y centro ubicado en el centro del paralelogramo S está contenido en S_i , basta, obviamente, establecer la validez, para h suficientemente pequeños, de las desigualdades

$$4d < H_a \quad 4d < H_b. \quad (46.15)$$

Demostremoslo. Supongamos, para concretar, que el lado del paralelogramo S de longitud a une los vértices que en la aplicación F constituyen las imágenes de los vértices (u_0, v_0) y $(u_0 + h, v_0)$ del cuadrado S , es decir, une los puntos (x_0, y_0) y $(x_0 + a_{11}h, y_0 + a_{21}h)$. En este caso

$$a = \sqrt{a_{11}^2 h^2 + a_{21}^2 h^2} = |h| \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}. \quad (46.16)$$

Análogamente,

$$b = |h| \sqrt{a_{12}^2 + a_{22}^2}. \quad (46.17)$$

Las funciones $a_{ij} = a_{ij}(u_0, v_0)$, $i, j = 1, 2$, son valores de las derivadas parciales correspondientes de las funciones $x(u, v)$ e $y(u, v)$ en los puntos (u_0, v_0) del compacto A . En virtud de la continuidad supuesta de estas derivadas parciales, ellas

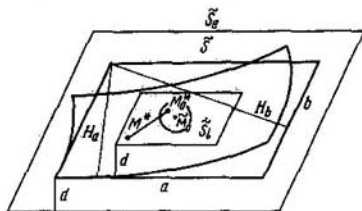


Fig. 195

están acotadas en el conjunto A , es decir, existe tal constante $c_1 > 0$, que en A se verifican las desigualdades $|a_{ij}| \leq c_1$, $i, j = 1, 2$.

De aquí y de las fórmulas (46.16) y (46.17) se deduce que

$$|a| \leq c_1 \sqrt{2} |h|, \quad (46.18)$$

$$|b| \leq c_1 \sqrt{2} |h|. \quad (46.19)$$

Luego, por hipótesis, el jacobiano $J(u, v)$ de la aplicación F , que representa una función continua, no se reduce a cero en el conjunto G y, por consiguiente, tampoco en el compacto A . Por esta razón existe (¿por qué?) una constante $c_2 > 0$ tal que en el conjunto A se verifica la desigualdad

$$|J(u, v)| \geq c_2. \quad (46.20)$$

Al notar que $\mu^S = aH_a = bH_b = |J(u_0, v_0)| h^2$, obtendremos (véanse (46.18), (46.19) y (46.20)):

$$h^2 = \frac{aH_a}{|J(u_0, v_0)|} \leq \frac{1}{c_2} c_1 \sqrt{2} |h| H_a,$$

$$h^2 = \frac{bH_b}{|J(u_0, v_0)|} \leq \frac{1}{c_2} c_1 \sqrt{2} |h| H_b,$$

es decir,

$$|h| \leq \frac{c_1 \sqrt{2}}{c_2} H_a, \quad (46.21)$$

$$|h| \leq \frac{c_1 \sqrt{2}}{c_2} H_b. \quad (46.22)$$

Disponiendo de estas estimaciones, es fácil demostrar la validez de las desigualdades (46.15). En efecto, al hacer uso de las desigualdades (46.13), (46.21) y (46.22), obtendremos

$$4d \leq 4\varepsilon_3 |h| \leq \frac{4\sqrt{2}c_1\varepsilon_3}{c_2} H_a, \quad (46.23)$$

$$4d \leq \frac{4\sqrt{2}c_1\varepsilon_3}{c_2} H_b. \quad (46.24)$$

Elijamos ahora tal $\delta > 0$ que para $|h| < \delta$ y $(u_0, v_0) \in A$ se cumpla la condición

$$\frac{4\sqrt{2}c_1\varepsilon_3}{c_2} < 1. \quad (46.25)$$

Esto es siempre factible debido a que la función $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(u_0, v_0, h)$ (véase (46.13)) tiende a cero uniformemente en el compacto A cuando $h \rightarrow 0$. De (46.23), (46.24) y (46.25) se desprende que para $|h| < \delta$ se verifican las desigualdades (46.15), de donde, en particular, se deduce que el conjunto S_i no es vacío. En lo que sigue supondremos siempre, durante la demostración, que $|h| < \delta$.

El conjunto $\bar{S}_e \setminus S_i$ se denominará *cuadro* y se denotará con \bar{R} :

$$\bar{R} = \bar{S}_e \setminus S_i.$$

El cuadro \bar{R} es un conjunto cerrado, pues \bar{S}_e es un paralelogramo cerrado y S_i , abierto. Representa una reunión de cuatro trapecios, privados de puntos interiores comunes, cuyas alturas miden $2d$ y las líneas medias coinciden con los lados correspondientes del paralelogramo S . Por ello, $\mu\bar{R} = 4d(a + b)$.

Observemos que si el conjunto S_i fuera vacío, el cálculo del área del cuadro \bar{R} se realizaría de otro modo: los trapecios mencionados se transformarían en unos triángulos en los cuales los lados del paralelogramo ya no serían, por regla general, las líneas medias.

De la expresión obtenida para el área $\mu\bar{R}$ del cuadro \bar{R} se deduce, en virtud de las desigualdades (46.13), (46.18) y (46.19), que $\mu\bar{R} \leq 8\sqrt{2}c_1\varepsilon_3h^2$. Al poner $\varepsilon_4 = 8\sqrt{2}c_1\varepsilon_3$, tendremos en definitiva

$$\mu\bar{R} \leq \varepsilon_4h^2, \quad (46.26)$$

donde la función ε_4 tiende uniformemente hacia cero en el compacto A cuando $h \rightarrow 0$.

Mostremos ahora que el área del conjunto $F(S)$ se diferencia del área del paralelogramo $\sqrt{S} = \bar{F}(S)$ en una magnitud no superior al área del cuadro \bar{R} . Para ello establezcamos ante todo que

$$S_i \subset F(S) \subset \bar{S}_e. \quad (46.27)$$

En efecto, si $M \in S$, entonces $\bar{F}(M) \in S_i$ y, de conformidad con (46.13), $\rho(F(M), \bar{F}(M)) \leq d$.

Luego, el conjunto \bar{S}_e contiene, por construcción, todos los puntos del plano que distan del paralelogramo S a una magnitud no superior a d . Por esta razón $F(M) \in \bar{S}_e$ y la inclusión $F(S) \subset \bar{S}_e$ queda demostrada. Resta demostrar que $S_i \subset F(S)$. Hemos de notar, ante todo, que

$$F(\partial S) \subset \bar{R}. \quad (46.28)$$

En efecto, si $M \in \partial S$, se tiene $F(M) \in \partial S$ y, de acuerdo con (46.13), $\rho(F(M), \bar{F}(M)) \leq d$. Pero el cuadro \bar{R} contiene, por construcción, todos los puntos del plano que distan de la frontera ∂S del paralelogramo S a una magnitud no superior a d , por lo cual $F(M) \in \bar{R}$ y la inclusión (46.28) queda demostrada. Como, bajo las suposiciones asumidas, la frontera $\partial F(S)$ de la imagen $F(S)$ del cuadrado S coincide con la imagen $F(\partial S)$ de la frontera ∂S del cuadrado S (véase el lema 1), la inclusión (46.28) puede escribirse en la forma

$$\partial F(S) \subset \bar{R}. \quad (46.29)$$

Sea ahora M_0 el centro del cuadrado S . En la aplicación F éste pasa al centro $\bar{M}_0 = \bar{F}(M_0)$ del paralelogramo S . Sea Q un círculo cerrado de radio d con centro en el punto \bar{M}_0 (la magnitud d se determina por la fórmula (46.13)). Hemos demostrado anteriormente que $Q \subset S_i$. Si $M_0^* = F(M_0)$, entonces, de acuerdo con (46.13), $\rho(M_0^*, \bar{M}_0) \leq d$, y, por lo tanto, $M_0^* \in Q$, por lo cual también $M_0^* \in S_i$. De este modo, la clausura \bar{S}_i contiene, a ciencia cierta, un punto de $F(S)$, a saber, la imagen M_0^* del centro M_0 del cuadrado S en la aplicación F .

Probemos ahora que todos los puntos S_i también pertenecen a $F(S)$. Admitamos lo contrario; supongamos que existe un punto $M^* \in S_i$ tal que $M^* \notin F(S)$ (véase la fig. 195). Todo segmento es, obviamente, un conjunto linealmente conexo, por lo cual, de acuerdo con el lema 9 del p. 18.2, en el segmento $M_0^* M^*$ con sus extremos en los puntos M_0^* y M^* hay un punto de la frontera $\partial F(S)$ del conjunto $F(S)$. De este punto no puede servir M_0^* , puesto que M_0^* es un punto interior del conjunto S y para la aplicación F los puntos interiores pasan a interiores, por eso el punto $M_0^* = F(M_0)$ es interior y no de frontera del conjunto $F(S)$. Debido a esto el punto de intersección del conjunto $\partial F(S)$ con el segmento $M_0^* M^*$ es un punto del paralelogramo abierto S_i , lo que contradice la inclusión (46.29).

De este modo, no existe un punto $M^* \in S_i$, para el cual sea, a la vez, $M^* \notin F(S)$, por lo cual $S_i \subset F(S)$. La fórmula (46.27) se ha demostrado.

De (46.14) y (46.27) proviene que

$$\mu S_i \leq \mu \tilde{F}(S) \leq \mu S_e, \quad \mu S_i \leq \mu F(S) \leq \mu S_e,$$

y, por lo tanto,

$$|\mu F(S) - \mu \tilde{F}(S)| \leq \mu S_e - \mu S_i = \mu \tilde{R}.$$

Por esta razón, en vista de (46.26)

$$|\mu F(S) - \mu \tilde{F}(S)| \leq \varepsilon_4 h^2, \quad (46.30)$$

donde ε_4 tiende hacia cero uniformemente en el compacto A cuando $h \rightarrow 0$.

Pongamos

$$\varepsilon(u_0, v_0, h) = \frac{\mu F(S) - \mu \tilde{F}(S)}{h^2}, \quad (46.31)$$

entonces de (46.30) se infiere que $|\varepsilon| \leq |\varepsilon_4|$ y, por ende, en el conjunto A ε tiende a cero uniformemente cuando $h \rightarrow 0$. De (46.31) tenemos

$$\mu F(S) = \mu \tilde{F}(S) + \varepsilon h^2,$$

es decir, se ha obtenido, la fórmula (46.11), de donde, como ya se ha señalado, se deduce directamente (46.10). \square

46.2. CAMBIO DE VARIABLES EN UNA INTEGRAL DOBLE

Dejamos intactas al principio las designaciones y suposiciones asumidas en el punto antecedente, en particular, supondremos que F es una aplicación biunívoca continuamente derivable del conjunto abierto $G \subset R_{uv}^2$ sobre otro conjunto abierto $G^* \subset R_{xy}^2$, provisto de un jacobiano distinto de cero en G . Sean Γ y Γ^* unos conjuntos abiertos cuadrables (y por eso acotados), $\bar{\Gamma} \subset G$, $\bar{\Gamma}^* \subset G^*$, y supongamos que, al realizarse la aplicación F , el conjunto $\bar{\Gamma}$ se aplica sobre $\bar{\Gamma}^*$. En este caso $\bar{\Gamma}$ y $\bar{\Gamma}^*$ son unos compactos, los puntos interiores de $\bar{\Gamma}$ pasan a puntos interiores, mientras que la frontera de $\bar{\Gamma}$ se aplica sobre la de $\bar{\Gamma}^*$.

Teorema 2 (fórmula de cambio de las variables en una integral doble). Sea $f(x, y)$ una función definida y continua en $\bar{\Gamma}^*$. En este caso

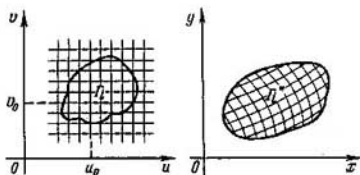


Fig. 196

$$\iint_{\Gamma^*} f(x, y) dx dy = \iint_{\Gamma} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv. \quad (46.32)$$

DEMOSTRACIÓN. Observemos que las integrales que figuran en (46.32) existen como integrales de las funciones continuas en la clausura de las regiones cuadrables. Efectivamente, por hipótesis, la función $f(x, y)$ es continua en Γ^* y el jacobiano $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, en $\bar{\Gamma}$, mientras que la función $f[x(u, v), y(u, v)]$ es continua en $\bar{\Gamma}$ como composición de las funciones continuas.

Tomemos una partición de rango k del plano R_{uv} en cuadrados. Elijamos el rango k tan grande que todo cuadrado de este rango que se interseca con $\bar{\Gamma}$ se contenga íntegramente en G (¿por qué tal rango existe?). Designemos con Γ_i , $i = 1, 2, \dots, i_k$ toda clase de intersecciones no vacías de los interiores (los conjuntos de puntos interiores) de los cuadrados de rango k con el conjunto Γ . Los conjuntos Γ_i son cuadrables y abiertos, pues sus fronteras tienen medida cero, puesto que se componen, en el caso general, de una parte de la frontera del cuadrado correspondiente de rango k y una parte de la frontera del conjunto Γ . La totalidad $\tau_k = \{\Gamma_i\}_{i=1}^{i_k}$ forma la partición del conjunto Γ , con la particularidad de que, evidentemente,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_{\tau_k} = 0. \quad (46.33)$$

Sea ahora $\Gamma_i^* = F(\Gamma_i)$; la frontera de Γ_i se aplica sobre la frontera de Γ_i^* , razón por la cual la frontera de Γ_i^* se compone, en el caso general, de una parte de la frontera del conjunto Γ^* (al admitir que el conjunto Γ^* es cuadrable, convenimos en que esta frontera tiene medida cero) y una parte de una curva suave a trozos que es la imagen de la frontera del cuadrado correspondiente y tiene también, debido a esta circunstancia, medida cero. De lo dicho proviene que Γ_i^* es un conjunto abierto cuadrable. De lo que la aplicación F es biunívoca se deduce que la totalidad $\tau_k^* = \{\Gamma_i^*\}_{i=1}^{i_k}$ forma la partición del conjunto Γ^* (fig. 196).

Estimemos la finura de la partición τ_k^* . Sea δ_k el diámetro del cuadrado de rango k (evidentemente, $\delta_k = \frac{\sqrt{2}}{10^k}$) y $M_1^* = (x_1, y_1) \in \Gamma_1^*$, $M_2^* = (x_2, y_2) \in \Gamma_1^*$. En este caso

existen tales $M_1 \in \Gamma_1$ y $M_2 \in \Gamma_2$ que $F(M_1) = M_1^*$, $F(M_2) = M_2^*$, con la particularidad de que $\rho(M_1, M_2) < \delta_k$. Por consiguiente,

$$\rho(M_1^*, M_2^*) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq \sqrt{\omega^2(\delta_k; x) + \omega^2(\delta_k; y)}, \quad (46.34)$$

donde $\omega(\delta; x)$ y $\omega(\delta; y)$ son los módulos de continuidad de las funciones $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ en el compacto $\bar{\Gamma}$. Siendo estas funciones continuas en $\bar{\Gamma}$, son uniformemente continuas, por lo cual (véase el p. 19.7)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega(\delta_k; x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega(\delta_k; y) = 0. \quad (46.35)$$

De (46.34) para el diámetro $d(\Gamma^*)$ obtenemos

$$d(\Gamma^*) = \sup_{\substack{M_1^* \in \Gamma_1^* \\ M_2^* \in \Gamma_2^*}} \rho(M_1^*, M_2^*) \leq \sqrt{\omega^2(\delta_k; x) + \omega^2(\delta_k; y)},$$

y, por consiguiente,

$$\delta_{r_k} = \sup_{\Gamma \in \tau_k} d(\Gamma^*) \leq \sqrt{\omega^2(\delta_k; x) + \omega^2(\delta_k; y)},$$

por lo cual, en virtud de (46.35),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_{r_k} = 0^*. \quad (46.36)$$

Tomemos ahora sólo aquellos elementos de las particiones τ_k y τ_k^* , cuyas clausuras no se intersecan con las fronteras $\partial\Gamma$ y $\partial\Gamma^*$ de los conjuntos Γ y Γ^* . Designémoslos mediante $\tau_k(\partial\Gamma)$ y $\tau_k^*(\partial\Gamma^*)$, respectivamente:

$$\begin{aligned} \tau_k(\partial\Gamma) &= \{\Gamma_i : \Gamma_i \in \tau_k, \bar{\Gamma}_i \cap \partial\Gamma = \emptyset\}, \\ \tau_k^*(\partial\Gamma^*) &= \{\Gamma_i^* : \Gamma_i^* \in \tau_k^*, \bar{\Gamma}_i^* \cap \partial\Gamma^* = \emptyset\}. \end{aligned}$$

En virtud de las suposiciones asumidas, $\Gamma_i^* \in \tau_k^*(\partial\Gamma^*)$ cuando, y sólo cuando, $\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)$; en este caso $\tau_k(\partial\Gamma)$ consta de aquellos, y sólo aquellos elementos $\Gamma_i \in \tau_k$ que representan los cuadrados íntegros contenidos junto con sus fronteras en el conjunto Γ .

Formemos las sumas integrales incompletas $\sigma_{\tau_k(\partial\Gamma^*)}$ (véase el p. 44.3) para la función $f(x, y)$, tomando a título de puntos $(\xi_i, \eta_i) \in \bar{\Gamma}_i \in \tau_k^*(\partial\Gamma^*)$ las imágenes de los vértices cualesquiera (u_i, v_i) de los cuadrados correspondientes Γ_i :

$$\xi_i = x(u_i, v_i) \quad \eta_i = y(u_i, v_i). \quad (46.37)$$

En otras palabras, consideraremos las sumas de la forma

$$\sigma_{\tau_k(\partial\Gamma^*)} = \sum_{\Gamma \in \tau_k(\partial\Gamma^*)} f(\xi_i, \eta_i) \mu \Gamma_i^*. \quad (46.38)$$

* No es difícil convencerse de que la igualdad (46.36) puede obtenerse inmediatamente de la continuidad uniforme de la aplicación continua del compacto (véase el lema 4 en el p. 41.4).

Como se sabe (véase el teorema 5 en el p. 44.3), debido a que la condición (46.36) se cumple, tenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{r_k}(\partial\Gamma^*) = \iint_{\Gamma^*} f(x, y) dx dy. \quad (46.39)$$

Por otra parte, para $\Gamma_i^* = F(\Gamma_i)$, para los cuales Γ_i es un cuadrado, y, por lo tanto, para $\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)$, de acuerdo con el teorema 1 del punto anterior, tenemos

$$\mu\Gamma_i^* = |J(u_i, v_i)| \mu\Gamma_i + \varepsilon \mu\Gamma_i, \quad (46.40)$$

donde $\varepsilon = \varepsilon(u_i, v_i, \delta_{r_k})$ tiende uniformemente en el compacto $\bar{\Gamma}$ hacia cero cuando $k \rightarrow 0$. Sustituyendo (46.37) y (46.40) en (46.38), obtendremos

$$\begin{aligned} \sigma_{r_k}(\partial\Gamma^*) = & \sum_{\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)} \int [x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)] |J(u_i, v_i)| \mu\Gamma_i + \\ & + \sum_{\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)} \varepsilon [x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)] \mu\Gamma_i. \end{aligned} \quad (46.41)$$

La sumación en estas sumas está extendida a todos los índices i , para los cuales $\bar{\Gamma}_i$ no se interseca con la frontera de Γ . Para la primera suma que figura en el segundo miembro de la igualdad (46.41), se tiene, en virtud de la condición (46.33) (véase el teorema 5 en el p. 44.3)

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)} \int [x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)] |J(u_i, v_i)| \mu\Gamma_i = \\ = \iint_{\Gamma} [x(u, v), y(u, v)] |J(u, v)| du dv. \end{aligned}$$

En cuanto a la segunda suma en la igualdad (46.41), ésta tiende a cero cuando $k \rightarrow \infty$. En efecto, por ser continua la función $[x(u, v), y(u, v)]$ en el compacto $\bar{\Gamma}$, es acotada en él, es decir, existe tal constante $C > 0$, que

$$|[x(u, v), y(u, v)]| \leq C, \quad (u, v) \in \bar{\Gamma}.$$

Siendo fijado $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario, en virtud de que en $\bar{\Gamma}$ ε tiende a cero uniformemente para $k \rightarrow \infty$, podemos escoger k_0 de modo tal que para $k \geq k_0$ se verifique la

desigualdad $|\varepsilon| < \frac{\varepsilon_0}{C \mu\Gamma}$, cualesquiera que sean $(u_i, v_i) \in \bar{\Gamma}_i$, $\bar{\Gamma}_i \subset \bar{\Gamma}$; entonces

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)} \varepsilon [x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)] \mu\Gamma_i \right| \leq \\ \leq \sum_{\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)} |\varepsilon| [x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)] \mu\Gamma_i < \frac{\varepsilon_0}{\mu\Gamma} \sum_i \mu\Gamma_i \leq \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{r_k}(\partial\Gamma) = \iint_{\Gamma} [x(u, v), y(u, v)] |J(u, v)| du dv. \quad (46.42)$$

Precisamente de (46.39) y (46.42) proviene directamente la fórmula (46.32). \square

El teorema demostrado se generaliza con facilidad también a un caso algo más general, cuando el jacobiano de la aplicación (46.1) puede reducirse a cero en la frontera de la región de integración, mientras que la propia aplicación falla de ser biunívoca en esta frontera. Con más precisión, es válido el siguiente teorema.

Teorema 2'. Sean G y G^* unos conjuntos cuadrables abiertos: $G \subset R_{uv}^2$, $G^* \subset R_{xy}^2$, y supongamos que

$$x = x(u, v),$$

$$y = y(u, v),$$

es una aplicación continua de \bar{G} sobre \bar{G}^* que aplica G sobre G^* de manera biunívoca y continuamente derivable, con la particularidad de que el jacobiano $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ de dicha aplicación no se reduce a cero en G y es continuamente prolongable a G . En este caso, si la función $f(x, y)$ es continua en el conjunto G^* , se tiene

$$\iint_{G^*} f(x, y) dx dy = \iint_G f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea Γ_k , $k = 1, 2, \dots$ una sucesión de conjuntos abiertos cuadrables acotados cuya frontera se compone de un número finito de curvas suaves a trozos, y

$$\bar{\Gamma}_k \subset G, \quad \Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k = G.$$

En calidad de Γ_k puede tomarse, por ejemplo, una totalidad de todos los puntos interiores del conjunto $S_k(G)$ (véase el p. 44.1). Supongamos que $\Gamma_k^* = F(\Gamma_k)$; entonces Γ_k^* será también un conjunto cuadrable abierto acotado y

$$\bar{\Gamma}_k^* = F(\bar{\Gamma}_k) \subset G^*, \quad \Gamma_k^* \subset \Gamma_{k+1}^*, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^* = G^*.$$

Del cumplimiento de estas condiciones se deduce que (véase el teorema 2, p. 31.2)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu \Gamma_k = \mu G, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu \Gamma_k^* = \mu G^*. \quad (46.43)$$

Para cada uno de los conjuntos Γ_k , $k = 1, 2, \dots$, se cumplen todas las condiciones del teorema 2, razón por la cual

$$\iint_{\Gamma_k^*} f(x, y) dx dy = \iint_{\Gamma_k} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv. \quad (46.44)$$

La función $f(x, y)$ es continua en \bar{G}^* y por esta razón es integrable en G^* , mientras que la función $f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ es integrable por la misma

razón ^{*)} en G . Por ello, como las condiciones (46.43) quedan cumplidas, obtenemos (véase la propiedad 10^o en el p. 44.6):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{G_k} f(x, y) dx dy = \iint_{G^*} f(x, y) dx dy,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{G_k} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv =$$

$$= \iint_G f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv. \quad (46.45)$$

Pasando al límite para $k \rightarrow \infty$, en la igualdad (46.44) obtendremos, en virtud de la fórmula (46.45), la fórmula buscada para el cambio de las variables en la integral. \square

El cambio de las variables en una integral múltiple simplifica a menudo considerablemente la investigación y el cálculo de la integral. Además, a diferencia de una integral sencilla, el objetivo del cambio de variable consiste frecuentemente no en la simplificación de la función subintegral, sino en el paso a una región de integración más simple, incluso a cuenta de la complicación determinada de la función subintegral.

Ejemplo. Calculemos la integral $\iint_{x^2+y^2 < 1} \cos \pi \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$.

Con este fin introduzcamos las coordenadas nuevas r, φ (coordenadas polares), rigiéndonos por las fórmulas

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (46.46)$$

En este caso $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$. La aplicación (46.46) aplica el rectángulo $G = \{(r, \varphi) : 0 < r < 1, -\pi < \varphi < \pi\}$ (aquí r y φ se consideran como las coordenadas cartesianas en el plano r, φ), de manera biunívoca, continuamente derivable y con el jacobiano distinto de cero, sobre el círculo $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$, del cual se ha excluido el radio dispuesto en la parte negativa del eje Ox , es decir, sobre el conjunto (fig. 197) $G^* = K \setminus \{(x, y) : x \leq 0, y = 0\}$.

Entre tanto, el rectángulo cerrado \bar{G} pasa, realizándose la aplicación (46.46), a un círculo cerrado $\bar{G}^* = \bar{K}$; con la particularidad de que en la frontera de \bar{G} esta aplicación ya no es biunívoca. El jacobiano de la aplicación (46.46) es continuo en \bar{G} y, además, en un punto de la frontera, a saber, en el origen de coordenadas, se reduce a cero. Todas las condiciones que se imponen sobre la aplicación (46.1) en el teorema 2' de este punto se cumplen para la aplicación (46.46), por lo cual puede aplicarse la fórmula del cambio de variable en la integral

^{*)} Recordemos que, en virtud de las condiciones del teorema, dicha función es continuamente prolongable del conjunto G a \bar{G} , con la particularidad de que los valores de la función prolongada en la frontera del conjunto G no influyen en los valores de la integral (véase el p. 44.3).

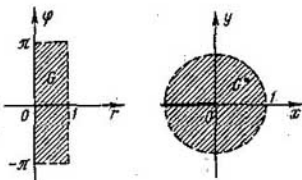


Fig. 197

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 < 1} \cos \pi \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_{\substack{0 < r < 1 \\ -\pi < \varphi < \pi}} r \cos \pi r dr d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \cos \pi r dr = 2\pi \left[\frac{r \sin \pi r}{\pi} \Big|_0^1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin \pi r dr \right] = -\frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

La fórmula (46.32) de cambio de variables en la integral doble puede ser demostrada también para el caso más general, en particular, cuando el jacobiano de la aplicación se reduce a cero en la región de integración, mientras que la función subintegral tiene discontinuidades. Si los conjuntos de los puntos indicados tienen medida cero y se aplican también en los conjuntos de medida cero, con la particularidad de que los conjuntos citados dividen las regiones de integración G y G^* en un número finito de conjuntos abiertos, en cada uno de los cuales la función subintegral resulta prolongable de modo que se obtenga una función continua hasta la misma frontera, entonces la fórmula (46.32) se deduce directamente de lo demostrado más arriba.

Ejercicios. Sea $f(x, y) = 2\pi(x^2 - y^2) \sin \pi(x - y)^2$ y sea X un cuadrado cuyos vértices son $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. Calcúlese la integral $\iint_X f(x, y) dx dy$, sirviéndose del cambio de variables $u = x + y$, $v = x - y$.

2. Pasando a las coordenadas polares, calcúlese la integral $\iint_X f(x, y) dx dy$, donde

a) $f(x, y) = y$, $X = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 2x, 0 < x < y\}$;

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $X = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, x < y < \sqrt{3}x\}$.

46.3. COORDENADAS CURVILÍNEAS

Las fórmulas

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad (46.47)$$

pueden considerarse no sólo como aplicación, sino también como el paso de un sistema de coordenadas al otro, en el caso general, curvilíneo. Aclaremos, ante todo, la noción de sistema de coordenadas curvilíneas.

Sea G un conjunto abierto en el plano R_{xy}^2 y a todo punto $M = (x, y) \in G$, y, por consiguiente, a todo par ordenado de números (x, y) , que representan las coordenadas del punto M en el sistema elegido de coordenadas rectangulares, se le ha puesto en correspondencia un par de números (u, v) de un modo tal que a los puntos diferentes M_1 y M_2 corresponden diferentes pares (u_1, v_1) y (u_2, v_2) . En este caso suele decirse que en el conjunto G se ha dado el sistema de coordenadas u, v . Si al punto M le corresponde el par (u, v) se escribe $M = (u, v)$. Cualquier par (u, v) es una función del punto $M \in G$, razón por la cual cada uno de sus elementos, u y v , es también una función del punto M : $u = u(M)$, $v = v(M)$, o bien, que es lo mismo, de sus coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y). \end{aligned} \quad (46.48)$$

Viceversa, a todo par (u, v) del conjunto de pares en consideración corresponde un punto $M \in G$, es decir, dicho punto M es una función de los pares (u, v) : $M = M(u, v)$, por lo cual sus coordenadas cartesianas x e y son también funciones de los pares citados (u, v) . En otras palabras, resultan válidas las fórmulas (46.47) que predeterminan una aplicación, inversa de la aplicación (46.48).

Los conjuntos de puntos $(x, y) \in G$ que satisfacen la condición $u(x, y) = u_0$, y , por consiguiente, $v(x, y) = v_0$, donde u_0 y v_0 son ciertas constantes fijadas, se llaman *líneas coordenadas* en el sistema de coordenadas u, v .

Haciendo uso de la fórmula (46.47), las líneas coordenadas pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned} x &= x(u_0, v), \\ y &= y(u_0, v), \end{aligned} \quad (46.49)$$

y, correspondientemente, en la forma

$$\begin{aligned} x &= x(u, v_0), \\ y &= y(u, v_0). \end{aligned} \quad (46.50)$$

En el caso de las coordenadas cartesianas las líneas coordenadas son rectas; en el caso general, ciertas curvas que se definen por las representaciones (46.49) y (46.50). A esto precisamente se debe la denominación "coordenadas curvilíneas" (fig. 198).

Supondremos que las funciones (46.47) satisfacen en G todas las condiciones, bajo las cuales se ha deducido la fórmula (46.32) de cambio de variable en la integral, en particular, dichas funciones son continuamente derivables y el jacobiano

$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ es distinto de cero en G . Debido a esto, las líneas coordenadas en el entorno de todo punto perteneciente a G son unas curvas continuamente derivables.

Investiguemos qué sentido tendrá en este caso el módulo del jacobiano. Fijemos algunos valores $u_0, \Delta u, v_0, \Delta v$. Supongamos que $M_0 = (u_0, v_0)$, Γ es el conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas curvilíneas, u, v satisfacen las desigualdades $u_0 < u < u_0 + \Delta u$, $v_0 < v < v_0 + \Delta v$, y sea $\bar{\Gamma} \subset G$. El conjunto Γ se denomina

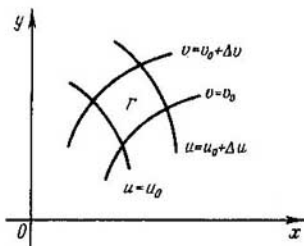


Fig. 198

paralelogramo coordenado (curvilíneo). El conjunto Γ está abierto (¿por qué?) y su frontera representa un contorno suave a trozos (se compone de las curvas del tipo $x = x(u_0, v)$, $y = y(u_0, v)$, donde $v_0 \leq v \leq v_0 + \Delta v$, etc.) y por eso Γ es una región cuadrable. Calculemos su área (véase la fig. 198). Al aplicar la fórmula de cambio de variable en la integral y el teorema integral del valor medio (véase el p. 44.6), obtendremos

$$\begin{aligned} \mu \Gamma &= \iint_{\Gamma} dx dy = \iint_{\substack{u_0 < u < u_0 + \Delta u \\ v_0 < v < v_0 + \Delta v}} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \\ &= \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_M \int_{u_0}^{u_0 + \Delta u} du \int_{v_0}^{v_0 + \Delta v} dv = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_M \Delta u \Delta v, \quad M \in \bar{\Gamma}. \end{aligned}$$

Por ser continuamente derivables las funciones (46.47),

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_M = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{M_0} + \varepsilon,$$

donde $\lim_{\Delta u^2 + \Delta v^2 \rightarrow 0} \varepsilon = 0$. De este modo

$$\mu \Gamma = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{M_0} \Delta u \Delta v + \varepsilon \Delta u \Delta v. \quad (46.51)$$

La fórmula (46.51) señala que el módulo del jacobiano en el punto (u_0, v_0) representa el coeficiente de la parte principal del área del paralelogramo coordenado con vértice en el punto (u_0, v_0) respecto del producto $\Delta u \Delta v$ para $\Delta u^2 + \Delta v^2 \rightarrow 0$. Esta observación se utiliza a menudo en la práctica al calcular el jacobiano de la transformación de las coordenadas curvilíneas en las cartesianas. Mostrémoslo en el ejemplo de las coordenadas polares r, φ . Fijemos ciertos valores $r, r + \Delta r, \varphi$ y

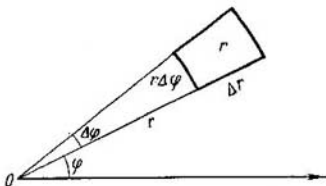


Fig. 199

$\varphi + \Delta\varphi$, y examinemos un paralelogramo coordenado Γ (fig. 199), formado por las líneas coordenadas $r, r + \Delta r, \varphi$ y $\varphi + \Delta\varphi$. Las longitudes de sus dos lados son iguales a Δr , y $r\Delta\varphi$, respectivamente. Al calcular el área de este paralelogramo, como si fuera éste un rectángulo ordinario, tendremos

$$\mu\Gamma = r\Delta r\Delta\varphi.$$

De este modo, el coeficiente del producto $\Delta r\Delta\varphi$ resultó ser igual a r , de donde es natural esperar que $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = r$. Efectivamente, es así (véase el ejemplo en el p. 46.2), lo que se debe a que en nuestros cálculos inexactos del área de Γ se ha admitido un error cuyo orden de infinitud es superior que el producto $\Delta r\Delta\varphi$ para $\Delta r^2 + \Delta\varphi^2 \rightarrow 0$. Efectivamente, al calcular $\mu\Gamma$ como una diferencia de las áreas de dos sectores, obtendremos

$$\mu\Gamma = \frac{\Delta\varphi}{2n} \pi(r + \Delta r)^2 - \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \pi r^2 = r\Delta r\Delta\varphi + \frac{1}{2} \Delta r^2 \Delta\varphi.$$

46.4. CAMBIO DE VARIABLES EN UNA INTEGRAL n -MÚLTIPLE

Todo lo expuesto en los puntos anteriores de este párrafo, junto con la demostración, se extiende al caso n -dimensional, por lo cual nos limitaremos sólo a la enunciaci3n de los teoremas correspondientes.

Teorema 3. Supongamos que $G_x \subset R_x^n$ y $G_t \subset R_t^n$ son unos conjuntos abiertos, $x = F(t) = \{x_i = x_i(t_1, \dots, t_n), i = 1, 2, \dots, n\}$ es la aplicaci3n biunívoca continuamente derivable de G_t sobre G_x , cuyo jacobiano $J(t) = \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(t_1, \dots, t_n)}$ es distinto de cero en G_t . Sea, adem3s, S un cubo n -dimensional:

$$S = \{t : t_i^{(0)} \leq t_i \leq t_i^{(0)} + h, i = 1, 2, \dots, n\} \subset G_t, t^{(0)} = (t_1^{(0)}, \dots, t_n^{(0)}).$$

Entonces $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu F(S)}{\mu S} = |J(t^{(0)})|$; con lo cual, si

$$\frac{\mu F(S)}{\mu S} = |J(t^{(0)})| + \varepsilon(t^{(0)}, h),$$

para cualquier compacto $A \subset G_t$, la funci3n $\varepsilon(t^{(0)}, h)$, $t^{(0)} \in A$, tiende uniformemente hacia cero en A , cuando $h \rightarrow 0$.

Teorema 4. Sean:

1) G_x y G_t unos conjuntos abiertos medibles $G_x \subset \mathbb{R}^n$, $G_t \subset \mathbb{R}^n$;

2) $x = F(t)$, la aplicación continua de \bar{G}_t sobre \bar{G}_x que aplica G_t sobre G_x de una manera biunívoca y continuamente derivable;

3) el jacobiano $J(t) = \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(t_1, \dots, t_n)}$ de esta aplicación no se reduce a cero en G_t

y es continuamente prolongable a \bar{G}_t .

En este caso, si la función $f(x)$ es continua en \bar{G}_x , se tiene

$$\int f(x) dG_x = \int f(x(t)) |J(t)| dG_t.$$

Ejercicios. Escribanse las fórmulas del cambio de variables en las integrales triples para la transformación de coordenadas:

3. $x = r \cos \psi \cos \varphi$, $y = r \cos \psi \sin \varphi$, $z = r \sin \psi$, $0 \leq r < +\infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$,

$-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ (coordenadas esféricas).

4. $x = r \cos \psi$, $y = r \sin \psi$, $z = z$, $0 \leq r < +\infty$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$ (coordenadas cilíndricas).

OBSERVACIÓN. Siendo vigente la fórmula del cambio de variable para cualquier conjunto medible $G \subset \mathbb{R}^n$ y cualesquiera coordenadas curvilíneas u_1, \dots, u_n , resulta lícita la siguiente fórmula

$$\int \dots \int_G dx_1 \dots dx_n = \int \dots \int_G \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \right| du_1 \dots du_n.$$

En particular, si

$$\left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \right| = 1, \quad (46.52)$$

entonces

$$\int \dots \int_G dx_1 \dots dx_n = \int \dots \int_G du_1 \dots du_n. \quad (46.53)$$

La condición (46.52) se cumple a ciencia cierta, si u_1, \dots, u_n son también las coordenadas cartesianas en el espacio \mathbb{R}^n y, por tanto, se expresan mediante x_1, \dots, x_n con ayuda de una transformación lineal cuyo determinante es igual a ± 1 ;

$$x_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} u_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \det \|c_{ij}\| = \pm 1.$$

El primer miembro de la fórmula (46.53) es igual a la medida μG del conjunto G "en las coordenadas x_1, \dots, x_n " (véase la propiedad 1° de la integral múltiple en el p. 44.6) y el segundo miembro de la misma, cuando u_1, \dots, u_n son las coordenadas cartesianas, es igual, correspondientemente, a la medida del conjunto G "en las coordenadas u_1, \dots, u_n ". De este modo, la fórmula (46.53) indica que la medida de un conjunto abierto medible no depende de cómo se elige el sistema de coordenadas cartesianas.

A decir verdad, debemos observar que al demostrar la fórmula del cambio de variables en la integral múltiple, nos hemos servido de aquel hecho demostrado en la geometría que, realizándose las aplicaciones afines (es decir, aplicaciones lineales regulares), el valor absoluto del determinante de la transformación, es igual a la razón entre el volumen del paralelepípedo, que es la imagen de cierto cubo, y el volumen del último.

Ejercicios. 5. Sea $G = \{(x, y, z) : 1 < x < 2; 1 < x + y < 3;$

$1 < x + y + z < 5\}$. Calcúlese la integral $\iiint_G \frac{dx dy dz}{(x+y)(x+y+z)}$, pasando

do a las variables u, v, w que están ligadas con x, y, z mediante las correlaciones $x + y + z = u, x + y = uv, x = uvw$.

6. Sea $G = \{(x, y, z) : x < yz < 2x; y < zx < 2y; z < xy < 2z\}$. Calcúlese la integral $\iiint_G xyz dx dy dz$, pasando a las variables u, v, w que están ligadas con x, y, z por

las correlaciones $ux = yz, vy = zx, wz = xy$.

§ 47. INTEGRALES CURVILÍNEAS

47.1. INTEGRALES CURVILÍNEAS DE PRIMERA ESPECIE

Sea dada en el espacio tridimensional R^3 una curva $\gamma = [r(t); a \leq t \leq b]$ (véase § 16). Consideraremos las funciones unívocas F definidas en los puntos $r(t)$ de esta curva: $F = F(r(t))$. Si $\rho(t), \alpha \leq t \leq \beta$, es alguna otra representación de la misma curva γ y si $t = t(\tau), \alpha \leq \tau \leq \beta$, es la aplicación del segmento $[\alpha, \beta]$ sobre el segmento $[a, b]$ que realiza la equivalencia de dichas representaciones (es decir, si $t = t(\tau), \alpha \leq \tau \leq \beta$, es la transformación admisible del parámetro, véase el p. 16.1), entonces, como el valor de la función F se determina sólo por un punto de la curva, tendremos

$$F(\rho(\tau)) = F(r(t)), \quad t = t(\tau), \quad \alpha \leq \tau \leq \beta.$$

Las funciones en consideración F admiten, en el caso general, diferentes valores en los puntos de la curva, correspondientes a los valores distintos del parámetro, pero coincidentes como puntos de un espacio (véanse los puntos múltiples en el p. 16.1). Este punto de vista corresponde a la interpretación física de la curva γ , por ejemplo, cuando ésta representa una trayectoria que sigue un punto material en movimiento, y a la de la función F , cuando F interviene como una fuerza que actúa contra dicho punto y que depende no sólo de la posición del punto en el espacio, sino también del instante en que este punto se encuentra en el lugar dado. Además, semejante enfoque proporciona también algunas ventajas matemáticas que se pondrán de manifiesto en lo que sigue.

De lo expuesto se desprende que las funciones citadas, definidas en una curva, no pueden considerarse como funciones prefijadas en cierto conjunto del espacio R^3 , por lo cual, en palabras estrictas, no pueden designarse mediante $F(x, y, z)$, donde x, y, z son las coordenadas cartesianas de los puntos espaciales. No obstante

en los problemas que se considerarán abajo tal designación lleva un carácter tradicional y por esta razón se empleará en nuestros razonamientos. Si se recuerda siempre que en dichos problemas se trata de las funciones, definidas en los puntos de las curvas, la designación citada no nos llevará a las equivocaciones.

Supongamos ahora que está dada una curva orientada rectificable γ , con la particularidad de que $r(s) = [x(s), y(s), z(s); 0 \leq s \leq S]$ es su representación en la cual a título de parámetro interviene la longitud variable del arco s , y sean $A = r(0)$ y $B = r(S)$ los puntos inicial y final de esta curva. En este caso escribiremos $\gamma = \widehat{AB}$. La curva de orientación opuesta se designará con \widehat{BA} .

Definición 1. Supongamos que en los puntos $r(s)$ de la curva γ se ha dado cierta función F . La expresión $\int_{\widehat{AB}} F(x, y, z) ds$ que se determina según la fórmula

$$\int_{\widehat{AB}} F(x, y, z) ds = \int_0^S F(x(s), y(s), z(s)) ds, \quad (47.1)$$

se denomina integral curvilínea de primera especie de la función F a lo largo de la curva \widehat{AB} .

Dicha integral se designa también mediante los símbolos

$$\int_{\widehat{AB}} F[r(s)] ds \quad \text{y} \quad \int_{\gamma} F[r(s)] ds, \quad \text{o bien, más brevemente,} \quad \int_{\gamma} F ds.$$

De este modo, aunque la definición de integral curvilínea de primera especie está relacionada con el concepto de curva, es decir, con una imagen geométrica, ella se reduce a una integral ordinaria por un segmento, por lo cual a la integral curvilínea se extienden todas las propiedades de la integral ordinaria.

Demos a conocer algunas propiedades específicas de la integral (47.1).

$$1^\circ. \quad \int_{\widehat{AB}} ds = S.$$

Esto es obvio.

2°. Si la función F es continua en los puntos de la curva γ como función del parámetro s , es decir, si es continua la función $F[r(s)]$, $0 \leq s \leq S$, entonces $\int_{\gamma} F ds$ existe.

En efecto, de acuerdo con la definición (47.1), la integral $\int_{\gamma} F ds$ se reduce a la integral $\int_0^S F(x(s), y(s), z(s)) ds$ de una función continua por un segmento que, como se sabe, existe.

3°. Una integral curvilínea de primera especie no depende de la orientación de la curva:

$$\int_{\widehat{AB}} F(x, y, z) ds = \int_{\widehat{BA}} F(x, y, z) ds.$$

Efectivamente, supongamos que $M = r(s)$ es un punto de la curva \widehat{AB} , y s es la longitud del arco \widehat{AM} . Si $\sigma = S - s$, entonces σ es igual a la longitud del arco \widehat{BM}

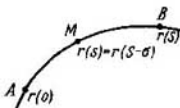


Fig. 200

(fig. 200). La función $r = r(S - \sigma)$; $0 \leq \sigma \leq S$, es la representación de la curva BA , por lo cual, al realizar en la integral (47.1) el cambio de variable $s = S - \sigma$, y al notar que $ds = -d\sigma$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\overline{AB}} F(x, y, z) ds &= \int_0^S F[x(s), y(s), z(s)] ds = \\ &= - \int_S^0 F[x(S - \sigma), y(S - \sigma), z(S - \sigma)] d\sigma = \\ &= \int_0^S F[x(S - \sigma), y(S - \sigma), z(S - \sigma)] d\sigma = \int_{\overline{BA}} F(x, y, z) d\sigma. \end{aligned}$$

Esta propiedad de la integral curvilínea de primera especie se debe a que la longitud del arco de una curva, de acuerdo con la definición, se considera positiva, independientemente del extremo a partir del cual dicha longitud se calcula.

Antes de pasar a la siguiente propiedad, hemos de notar que $\int_{\gamma} F ds$, al igual que cualquier otra integral, es un límite de las sumas integrales correspondientes; la peculiaridad del caso dado consiste sólo en que estas sumas pueden ser descritas en términos geométricos ligados con la curva γ , a lo largo de la cual se realiza la integración. He aquí una formulación más precisa.

4°. Sea $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i_0}$ la partición del segmento $[0, S]$, $\xi_i \in [s_{i-1}, s_i]$; $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$, la longitud del arco de la curva γ entre los puntos $r(s_{i-1})$ y $r(s_i)$, $i = 1, 2, \dots, i_0$, mientras que $\sigma_{\tau} = \sum_{i=1}^{i_0} F[r(\xi_i)] \Delta s_i$. Entonces, si la función $F[r(s)]$ es integrable según Riemann en el segmento $[0, S]$, se tiene

$$\lim_{\sigma_{\tau} \rightarrow 0} \sigma_{\tau} = \int_{\gamma} F ds. \quad (47.2)$$

Efectivamente, σ_{τ} es, evidentemente, la suma integral de Riemann de la integral $\int_0^S F[r(s)] ds$, y, por ende, la fórmula (47.2) proviene directamente de la (47.1).

La fórmula (47.1) es muy cómoda en el estudio de las propiedades de la integral $\int_{\gamma} F ds$, no obstante, no es así ni mucho menos en el cálculo de la misma, puesto

que suele ser muy difícil o incluso prácticamente imposible encontrar una representación de la curva dada, en la que por parámetro se toma la longitud variable del arco. Por esta razón indiquemos la fórmula de la integral $\int_{\gamma} F ds$ para cualquier representación paramétrica de la curva γ .

5º. Supongamos que γ es una curva suave (véase la definición 16 en el p. 16.4), $r(t) = [\varphi(t), \psi(t), \chi(t); a \leq t \leq b]$ es su representación continuamente derivable y , por consiguiente, $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t) > 0$, $a \leq t \leq b$.*

Sea la función F continua en la curva γ (en aquel sentido que la función $F[r(t)]$ es continua en el segmento $[a, b]$). En este caso

$$\int_{\gamma} F(x, y, z) ds = \int_a^b F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt. \quad (47.3)$$

En efecto, bajo las suposiciones asumidas, la curva γ es rectificable y la longitud variable del arco $s = s(t)$ puede tomarse como parámetro (véase el corolario 2 del teorema 2 en el p. 16.5), a consecuencia de lo cual la integral $\int_{\gamma} F ds$ tiene sentido.

Al realizar el cambio de variable $s = s(t)$ en el segundo miembro de la igualdad (47.1) y recordar que (véase el p. 16.5),

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

obtendremos la fórmula (47.3).

De (47.3) se infiere que para la curva dada el valor de la integral que figura en el segundo miembro de la igualdad (47.3) no depende de cómo se elige el parámetro en la curva, pues, cualquiera que sea la elección del parámetro, dicha integral es igual a la integral que figura en el primer miembro de esta igualdad.

47.2. INTEGRALES CURVILÍNEAS DE SEGUNDA ESPECIE

Existe una serie de problemas matemáticos y aplicados que conducen a las integrales curvilíneas de otro género. Por ejemplo, si $r = r(t)$ es el radio vector de un punto material en movimiento y $F = F(t)$ es la fuerza que actúa contra este punto, entonces sería natural determinar el trabajo de la fuerza F a lo largo de la trayectoria

Γ del punto como una integral $\int_{\Gamma} F dr$, o bien, siempre que $F = (P, Q, R)$, y $dr = (dx, dy, dz)$, en la inscripción de coordenadas como una integral

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz. \quad (47.4)$$

* Recordemos que esta condición es indicio de que la curva está privada de puntos singulares (véase la definición 15 en el p. 16.4).

Recordando que (véase el p. 16.5)

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma, \quad (47.5)$$

donde $t = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ es el vector unidad tangente, la integral (47.4) puede ser representada formalmente en la forma

$$\int_{\Gamma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) ds.$$

Enunciemos ahora la definición estricta de las integrales del tipo (47.4). Sea $\gamma = \overline{AB}$ una curva orientada suave, es decir, una curva orientada continuamente derivable, privada de puntos singulares. En este caso existe su representación continuamente derivable

$$r(t) = [x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t); a \leq t \leq b], \quad A = r(a), \quad B = r(b),$$

tal que

$$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t) > 0, \quad a \leq t \leq b.$$

Sea $s = s(t)$ la longitud variable del arco, $0 \leq s \leq S$, S es la longitud de toda la curva γ , calculada a partir del extremo A , $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ es el vector unidad tangente a la curva, $\alpha = \alpha(s)$, $\beta = \beta(s)$, $\gamma = \gamma(s)$, $0 \leq s \leq S$, y supongamos que la función F , al igual que en el punto anterior, está definida en el conjunto $\{r(t), a \leq t \leq b\}$ de todos los puntos de la curva γ .

Definición 2. La integral $\int_{\overline{AB}} F(x, y, z) dx$ se determina según la fórmula

$$\int_{\overline{AB}} F(x, y, z) dx = \int_{\overline{AB}} F(x, y, z) \cos\alpha ds. \quad (47.6)$$

Análogamente, según la definición, debe ser

$$\begin{aligned} \int_{\overline{AB}} F(x, y, z) dy &= \int_{\overline{AB}} F(x, y, z) \cos\beta ds, \\ \int_{\overline{AB}} F(x, y, z) dz &= \int_{\overline{AB}} F(x, y, z) \cos\gamma ds, \end{aligned} \quad (47.7)$$

Las integrales del tipo (47.6) y (47.7) se llaman integrales curvilíneas de segunda especie de la función F a lo largo de la curva \overline{AB} .

El carácter natural de estas definiciones se ve de las fórmulas (47.5).

Demos a conocer algunas propiedades de las integrales curvilíneas de segunda especie, limitándonos, para brevedad, sólo al caso de la integral (47.6).

1°. Si la función F es continua en la curva γ , es decir, si es continua la función $F[r(t)]$, $a \leq t \leq b$, la integral (47.6) existe.

En efecto, admitidas las suposiciones respecto de la curva γ , la función $t = t(s)$ (t es el parámetro en la curva γ , y s es la longitud variable del arco) es continuamente derivable en el segmento $[0, S]$, por lo cual la función $\cos\alpha = \frac{dx}{ds} \frac{dt}{ds}$ es continua

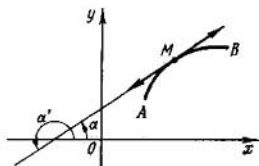


Fig. 201

en este segmento y, por lo tanto, en virtud de la propiedad 2° de las integrales curvilineas de primera especie (véase el p. 47.1), la integral (47.6) existe. \square

En lo que sigue en este punto supondremos, para simplificar, que la función F es continua en la curva γ . En este caso todas las integrales que van abajo existen a ciencia cierta.

2°. Una integral curvilinea de segunda especie cambia de signo cuando la curva varía su orientación, es decir,

$$\int_{AB} F(x, y, z) dx = - \int_{BA} F(x, y, z) dx.$$

En efecto, si α es el ángulo formado por el sentido positivo de una tangente a la curva AB y el eje Ox , y α' , el ángulo formado por el sentido positivo de la tangente a la curva BA y el eje Ox , entonces para los puntos correspondientes tendremos $\alpha' = \alpha + \pi$ (fig. 201), y, por lo tanto, $\cos \alpha' = -\cos \alpha$.

Ahora, haciendo uso de la propiedad de independencia de una integral curvilinea de primera especie de la orientación de la curva (véase el p. 47.1), obtendremos

$$\begin{aligned} \int_{BA} F(x, y, z) dx &= \int_{BA} F(x, y, z) \cos \alpha' ds = - \int_{BA} F(x, y, z) \cos \alpha ds = \\ &= - \int_{AB} F(x, y, z) \cos \alpha ds = - \int_{AB} F(x, y, z) dx. \end{aligned}$$

De este modo, dicha propiedad que posee la integral curvilinea de segunda especie se desprende del hecho de que las integrales curvilineas

$$\int_{AB} F(x, y, z) dx \quad \text{y} \quad \int_{BA} F(x, y, z) dx$$

son iguales a las integrales curvilineas correspondientes de primera especie, cuyas expresiones subintegrales se diferencian sólo en signo. \square

3°. Si F es una función continua en la curva γ , para la integral (47.6) será válida la fórmula

$$\int_{AB} F(x, y, z) dx = \int_a^b F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (47.8)$$

En efecto, de acuerdo con la definición (47.6),

$$\int_{AB} F(x, y, z) ds = \int_0^s F[x(s), y(s), z(s)] \cos \alpha(s) ds.$$

Al realizar el cambio de la variable $s = s(t)$ en la integral que figura en el segundo miembro de esta igualdad y notar que (véase (47.5)) $\cos \alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{x'_t}{s'_t}$, obtendremos

$$\begin{aligned} \int_0^s F[x(s), y(s), z(s)] \cos \alpha(s) ds &= \\ &= \int_a^b F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \frac{x'_t}{s'_t} s'_t dt = \\ &= \int_a^b F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \varphi'_t(t) dt \quad \square \end{aligned}$$

Ha de notarse que hemos demostrado a la vez que la integral en el segundo miembro de esta fórmula no depende de la elección del parámetro en la curva el que conserva la orientación de ésta.

En el caso particular cuando como parámetro t puede tomarse la variable x , es decir, cuando la curva γ posee la representación $y = y(x)$, $z = z(x)$, $a \leq x \leq b$, y , por lo tanto, está privada de puntos múltiples, la función F será función unívoca no sólo de los puntos de la curva, sino también de los puntos correspondientes del espacio (en este caso a diferentes puntos de la curva les corresponden puntos distintos del espacio y viceversa).

La fórmula (47.8) admite en este caso la siguiente forma

$$\int_{\gamma} F[x, y, z] dx = \int_a^b F[x, y(x), z(x)] dx. \quad (47.9)$$

4°. La integral $\int_{AB} F(x, y, z) dx$ es el límite de las sumas integrales correspondientes que se describen en los términos ligados con la curva γ , con más precisión: sea $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i_0}$ la partición del segmento $[a, b]$, y δ_τ , su finura, $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \dots, i_0$, y

$$\bar{\sigma}_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} F[r(\xi_i)] \Delta x_i,$$

donde $\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1})$, entonces

$$\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \bar{\sigma}_\tau = \int_{AB} F(x, y, z) dx. \quad (47.10)$$

En efecto, según la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange, $\Delta x_i = \varphi'(\eta_i) \Delta t_i$, donde

$$\eta_i \in [t_{i-1}, t_i], \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, i_0,$$

por lo cual

$$\bar{\sigma}_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} F[r(\xi_i)] \varphi'(\eta_i) \Delta t_i.$$

Pongamos

$$\sigma_r = \sum_{j=1}^{l_0} F[r(\xi_j)]\varphi'(\xi_j)\Delta t_j.$$

La suma σ_r es, para la función $F[r(t)]\varphi(t)$, una suma integral de Riemann, razón por la cual

$$\lim_{\delta_r \rightarrow 0} \sigma_r = \int_a^b F[r(t)]\varphi'(t) dt. \quad (47.11)$$

Por otra parte,

$$|\tilde{\sigma}_r - \sigma_r| \leq \sum_{j=1}^{l_0} |F[r(\xi_j)]| |\varphi'(\eta_j) - \varphi'(\xi_j)| \Delta t_j \leq \omega(\delta_r; \varphi')(b-a) \sup_{a < t < b} |F[r(t)]|,$$

donde $\omega(\delta; \varphi')$ es el módulo de continuidad de la función φ' . Se sabe que de la continuidad de la función $F[r(t)]$ en el segmento $[a, b]$ proviene que $\sup_{a < t < b} |F[r(t)]| < \infty$, y de la continuidad de la función φ' en el mismo segmento se deduce que $\lim_{\delta_r \rightarrow 0} \omega(\delta_r; \varphi') = 0$, por esta razón se tiene $\lim_{\delta_r \rightarrow 0} (\tilde{\sigma}_r - \sigma_r) = 0$. Teniéndolo en cuenta, en virtud de (47.11), obtenemos

$$\lim_{\delta_r \rightarrow 0} \sigma_r = \int_a^b F[r(t)]\varphi'(t) dt.$$

De aquí, de acuerdo con la propiedad 3°, se deduce la fórmula (47.10). \square

Hemos indicado sólo aquellas propiedades de las integrales curvilíneas que están ligadas con el carácter específico de su definición y con la curva a lo largo de la cual se realiza la integración. Es natural, pues, que, por cuanto las integrales en consideración se reducen a las integrales ordinarias en un segmento, a las primeras se extienden también las diversas propiedades propias para las segundas (linealidad respecto de las funciones a integrar, teorema integral del valor medio, etc.).

47.3. AMPLIACIÓN DE LA CLASE DE TRANSFORMACIONES ADMISIBLES DEL PARÁMETRO DE UNA CURVA

Una curva orientada continuamente derivable y privada de puntos singulares se ha definido (véase el p. 16.1 y 16.2*) como aquella que dispone de tales representaciones vectoriales continuamente derivables $r(t)$, $a \leq t \leq b$ que $r'(t) \neq 0$ en el segmento $[a, b]$. A título de transformaciones admisibles del parámetro se consideraban las funciones siguientes

$$t = t(\tau), \quad \alpha \leq \tau \leq \beta, \quad t(\alpha) = a, \quad t(\beta) = b,$$

que eran continuamente derivables y tenían derivada positiva en el segmento $[a, b]$. No obstante, este requisito resulta, a veces, demasiado pesado. Por ejemplo, para un arco γ de la circunferencia unidad con centro en el origen de coordenadas las representaciones

$$y = \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \text{y} \quad x = \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{cost}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

resultan ser no equivalentes en este sentido. Además, la misma representación $y = \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1$, no determina en nuestro sentido la curva continuamente derivable, puesto que para $x = 1$ ella no tiene derivada. Es por eso que sería natural ampliar la clase de transformaciones admisibles de los parámetros y de representaciones admisibles de las curvas continuamente derivables. Podemos hacerlo del modo siguiente.

Consideraremos una totalidad de las representaciones vectoriales $r = r(t)$, $a \leq t \leq b$, continuas en el segmento $[a, b]$ y continuamente derivables en el intervalo (a, b) . Se llamará *transformación admisible del parámetro* toda función $t = t(\tau)$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$, $t(\alpha) = a$, $t(\beta) = b$, continua en el segmento $[\alpha, \beta]$, continuamente derivable y que tiene en el intervalo (α, β) una derivada positiva. Como hasta ahora, dos representaciones se llamarán *equivalentes*, si se puede pasar de una a la otra con ayuda de una transformación admisible del parámetro.

Definición 3. Una clase de representaciones equivalentes del tipo indicado prefiija una curva continuamente derivable, si en la clase citada existe por lo menos una representación $r = r(t)$, $a \leq t \leq b$, que es continuamente derivable en todo el segmento $[a, b]$.

Definición 4. Una curva continuamente derivable lleva el nombre de curva sin puntos singulares o, en la forma más breve, curva suave, si para cierta representación suya $r(t)$, $a \leq t \leq b$ (y, por lo tanto, para todas las representaciones suyas) se cumple la condición $r'(t) \neq 0$, $a < t < b$.

En el sentido de esta definición dos representaciones citadas del arco de una circunferencia resultan ser equivalentes y definen una curva suave.

Quedan en vigor también todas las definiciones aducidas anteriormente de las integrales curvilíneas y sus propiedades, si se toma, por supuesto, en consideración el hecho de que para ciertas representaciones de las curvas puede obtenerse una integral impropia.

Cabe subrayar que la ampliación de la clase de representaciones de una curva permite calcular la integral curvilínea para las más diversas representaciones de la curva. Por ejemplo, la integral $\int_{\gamma} P(x, y) dy$, donde γ es el arco de la circunferencia unidad considerado más arriba y P , una función continua en γ , puede calcularse sirviéndose de ambas representaciones mencionadas:

$$\int_{\gamma} P(x, y) dy = - \int_0^1 P(x, \sqrt{1-x^2}) \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int_{\gamma} P(x, y) dy = - \int_0^{\pi/2} P(\operatorname{sen} t, \operatorname{cost}) \operatorname{sen} t dt.$$

En el primer caso aquí puede obtenerse una integral impropia.

Además de esto, *al demostrar* los teoremas pueden elegirse las "representaciones buenas", es decir, aquellas que son continuamente derivables hasta los extremos del segmento, y los razonamientos realizados resultarán válidos también para el concepto ampliado de curva.

Ejercicio 1. Demuéstrese que para la nueva definición de la curva continuamente derivable $\gamma = \{x(t), y(t), z(t)\}$ su longitud se expresa mediante la fórmula $\int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$, donde la integral escrita es, en el caso general, impropia.

47.4. INTEGRALES CURVILÍNEAS A LO LARGO DE LAS CURVAS SUAVES A TROZOS

Definición 5. Si la curva γ es suave a trozos, es decir, puede ser representada como reunión de un número finito de las curvas suaves $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$, y la función $F(x, y, z)$ está definida, como antes, en los puntos de la curva γ , entonces, por definición, pongamos

$$\int_{\gamma} F(x, y, z) dx = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} F(x, y, z) dx.$$

Si γ es una curva suave a trozos y $x = x(t), y = y(t), z = z(t), a \leq t \leq b$, es su representación suave a trozos, se escribirá también

$$\int_{\gamma} F(x, y, z) dx = \int_a^b F[x(t), y(t), z(t)] x'(t) dt$$

(aquí la derivada $x'(t)$ puede ser no definida en el número finito de los puntos del segmento $[a, b]$), con la particularidad de que la integral que figura en el segundo miembro de la igualdad se entiende, por regla general, en el sentido impropio.

Las definiciones análogas tienen lugar también para las integrales del tipo (47.7). En adelante tropezaremos con las sumas de las integrales del tipo (47.6) y (47.7), es decir, con las integrales del tipo (47.4), donde P, Q y R son ciertas funciones definidas en los puntos de la curva γ . De acuerdo con las definiciones (47.6) y (47.7), es lícita la fórmula

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = \int_{\gamma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds.$$

OBSERVACIÓN 1. Si Γ denota una totalidad finita de curvas orientadas suaves a trozos $\gamma_i, i = 1, 2, \dots, k$, entonces, según la definición,

$$\int_{\Gamma} F ds = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} F ds, \quad \int_{\Gamma} F dx = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} F dx', \text{ etc.}$$

OBSERVACIÓN 2. Hemos definido las integrales curvilíneas para las curvas dispuestas en el espacio tridimensional R^3 . De un modo enteramente análogo se definen dichas integrales también para las curvas que se disponen en cualquier espacio n -dimensional R^n , $n = 2, 3, 4, \dots$. Las integrales curvilíneas en un espacio n -dimensional poseen las propiedades que son análogas a las consideradas en el caso tridimensional y sus demostraciones son también las mismas que se han realizado anteriormente. Por eso no nos detendremos en las formulaciones ni tampoco en las demostraciones de las afirmaciones correspondientes.

Ejercicio 2. Demuéstrese que las definiciones, aducidas en el presente punto, de las integrales curvilíneas a lo largo de las curvas suaves a trozos no dependen de cómo se dividen dichas curvas en arcos suaves.

3. Calcúlese la integral curvilínea $\int_{\Gamma} \sqrt{x+2y} dx + \sqrt{x+y} dy$, donde Γ es un contorno triangular cuyos vértices son $O(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(2; 4)$.

4. Calcúlese la integral curvilínea $\int_{\Gamma} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{3/3} + y^{3/3}}$, donde Γ es el arco de una astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, limitada con los puntos $(a, 0)$ y $(0, a)$.

47.5. FÓRMULA DE GREEN

Definición 6. Supongamos que un contorno sencillo cerrado γ es la frontera de la región plana y acotada G . Si la orientación del contorno es tal que durante el recorrido del contorno γ , correspondiente al crecimiento del parámetro, la región G queda a la izquierda (tal recorrido se llama corrientemente recorrido del contorno en dirección contraria al movimiento de las agujas de un reloj), dicha orientación se denomina positiva; en el caso contrario (es decir, cuando el recorrido del contorno se realiza en el sentido de las agujas de un reloj), se denomina negativa (fig. 202).

Un contorno orientado positivo se designará γ^+ , y un contorno orientado negativo, γ^- . Estas nociones están definidas no de modo estricto y no en términos matemáticos exactos. No obstante, nos abstengamos de dar aquí las definiciones precisas, ya que, por una parte, esto no podría hacerse sucintamente y, por otra parte, en lo que sigue la orientación se indicará cada vez concretamente. De este modo, nuestra definición "general" de la orientación positiva y negativa de un contorno sencillo cerrado nos servirá sólo para los fines de la claridad geométrica de los problemas que se considerarán más abajo.

En adelante la región plana G , cuya clausura puede representarse en la forma (45.1) y (45.13) simultáneamente (véase la fig. 168), se llamará, para abreviar, *región elemental*.

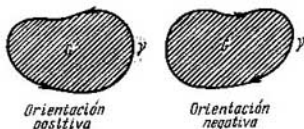


Fig. 202

Teorema 1 (fórmula de Green ^{*}). Sea G una región plana y supongamos que su frontera γ es un contorno suave a trozos. Supongamos también que la región G puede ser partida en un número finito de las regiones elementales G_i^{**} que tienen fronteras suaves a trozos γ_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Luego, sean dadas en la región cerrada \bar{G} las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ que son continuas en \bar{G} junto con sus derivadas parciales $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$. ^{***} Bajo las condiciones mencionadas resulta válida la fórmula

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\gamma^+} P dx + Q dy. \quad (47.12)$$

DEMOSTRACIÓN. Al principio supongamos que la región G es elemental de por sí y, por consiguiente, su frontera puede ser representada como reunión de las gráficas de dos funciones continuamente derivables a trozos $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, $\varphi(x) \leq \psi(x)$, $a \leq x \leq b$, y, quizás, de los segmentos de las rectas $x = a$ y $x = b$, y también como reunión de dos gráficas de las funciones continuamente derivables a trozos $\alpha(y)$ y $\beta(y)$, $\alpha(y) \leq \beta(y)$, $c \leq y \leq d$, y, quizás, de los segmentos de las rectas $y = c$ y $y = d$ (fig. 203).

En este caso, al aplicar la regla de reducción de la integral doble a una reiterada, el teorema de Newton — Leibniz (p. 29.3) y la fórmula (47.9), tenemos

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx = \int_a^b [P[x, \psi(x)] - P[x, \varphi(x)]] dx = \\ &= \int_a^b P[x, \psi(x)] dx - \int_a^b P[x, \varphi(x)] dx = \int_{\overline{DC}} P(x, y) dx - \\ &- \int_{\overline{AB}} P(x, y) dx = - \int_{\overline{CD}} P(x, y) dx - \int_{\overline{AB}} P(x, y) dx. \end{aligned} \quad (47.13)$$

^{*} G. Green (1793 — 1841), matemático inglés.

^{**} Esto significa que $\{\bar{G}_i\}_{i=1}^k$ es la partición de la región cerrada \bar{G} (véase el p. 44.3).

^{***} La continuidad de las derivadas parciales en \bar{G} se entiende como su continuidad en el conjunto abierto G y su proiongabilidad continua a la frontera de G (véase el p. 39.3).

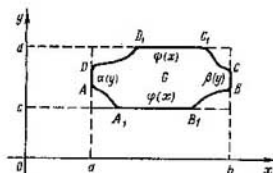


Fig. 203

Al notar que para los segmentos \overline{BC} y \overline{DA}

$$\int_{\overline{BC}} P(x, y) dx = \int_{\overline{DA}} P(x, y) dx = 0 \quad (47.14)$$

(esto proviene en seguida, por ejemplo, de la fórmula (47.6), pues aquí $x = \text{const}$ y, por ello, $\cos \alpha = 0$) y al sumar las igualdades (47.13) y (47.14), obtendremos

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= - \int_{\overline{AB}} P dx - \int_{\overline{BC}} P dx - \int_{\overline{CD}} P dx - \\ &\int_{\overline{DA}} P dx = - \int_{\gamma^+} P dx. \end{aligned} \quad (47.15)$$

Se ha obtenido tal orientación del contorno de frontera γ que los puntos A, B, C, D siguen uno tras otro sucesivamente. Esta orientación es positiva (véase la definición 6) y se designa mediante γ^+

De modo análogo, a partir de que la región G es elemental, se deduce la fórmula

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{\gamma^+} Q dy. \quad (47.16)$$

Al sumar (47.15) y (47.16), obtendremos la fórmula de Green (47.12) para el caso que se considera.

Examinemos el caso general. Supongamos que la región G está dividida en las regiones G_i , $i = 1, 2, \dots, k$, del tipo citado en las condiciones del teorema. En virtud de lo demostrado, para todo $i = 1, 2, \dots, k$

$$\iint_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\gamma_i^+} P dx + Q dy.$$

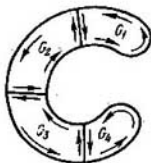


Fig. 204

Al sumar estas igualdades, obtendremos

$$\sum_{i=1}^k \iint_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i^+} P dx + Q dy. \quad (47.17)$$

Ya que la integral doble es aditiva respecto de los conjuntos (véase el p. 44.6), tendremos

$$\sum_{i=1}^k \iint_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (47.18)$$

En la suma que figura en el segundo miembro de la igualdad (47.17) las integrales curvilíneas se toman dos veces a lo largo de todas las partes interiores de las fronteras γ_i de las regiones G_i , es decir, a lo largo de tales arcos de las curvas γ_i que forman parte de las fronteras de dos regiones G_i , $i = 1, 2, \dots, k$, y, por consiguiente, no integran la frontera de la región G ; además, las orientaciones de estos arcos de las curvas γ_i son opuestas (fig. 204). Puesto que una integral curvilínea de segunda especie cambia de signo cuando varía la orientación de la curva, la suma de dos integrales curvilíneas a lo largo de las partes indicadas de las curvas γ_i es nula. Por eso, en la suma derecha de la fórmula (47.17) quedarán sólo las integrales a lo largo de las partes orientadas positivas de la frontera γ de la región G , que dan en suma

$\int_{\gamma^+} P dx + Q dy$. De este modo,

$$\sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i^+} P dx + Q dy = \int_{\gamma^+} P dx + Q dy. \quad (47.18')$$

De (47.17), (47.18) y (47.18') se deduce la fórmula (47.12) para el caso general. \square

Sea G una región acotada en el plano R^2 y supongamos que su frontera consta de un número finito de contornos sencillos que se llamarán *contornos de frontera*. Si un contorno de frontera es, a la vez, la frontera de una región no acotada disjunta en $R^2 \setminus \bar{G}$, se denominará *exterior*; en cambio, si es, a la vez, la frontera de

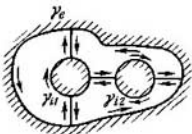


Fig. 205

una región acotada dispuesta en $R^2 \setminus \bar{G}$, se llamará *interior*. En la figura 205, γ_e es el contorno exterior, mientras que γ_{i1} y γ_{i2} son contornos interiores.

Si la frontera de la región G se compone del contorno exterior γ_e y los contornos interiores $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{im}$ y si la región G puede ser dividida en un número finito de regiones, elementales respecto de ambos ejes de coordenadas, que tengan fronteras suaves a trozos, entonces resulta válida la fórmula

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\gamma_e^+} P dx + Q dy + \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_{ij}^-} P dx + Q dy. \quad (47.19)$$

Como hasta ahora, las funciones P y Q se suponen continuas, junto con sus derivadas $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$, en la región cerrada \bar{G} .

Esta fórmula se demuestra igual que la (47.12), siempre que se toma en consideración que en la suma que figura en el segundo miembro de la igualdad (47.17) quedarán las integrales curvilineas a lo largo de las partes orientadas positivas del contorno exterior y a lo largo de las partes orientadas negativas de los contornos interiores (véase la fig. 205).

Indiquemos, además, que en la fórmula (47.19) todos los contornos (tanto exteriores, como interiores) están orientados de una manera tal que durante su recorrido la región de integración queda a la izquierda.

Definición 7. Supongamos que la frontera ∂G de una región plana acotada G se compone de un número finito de contornos sencillos suaves a trozos. La totalidad de estos contornos orientados de manera tal que, al recorrer cada uno de ellos, la región G queda a la izquierda (a la derecha), se llama *orientación positiva (negativa)* de la frontera de G y se designa ∂G ($-\partial G$, respectivamente).

La fórmula de Green puede ser extendida a una clase de regiones más amplia. Con este fin diremos que en virtud de lo demostrado, la fórmula de Green es válida para un triángulo y, por ende, para cualquier polígono. Por eso, mediante un paso límite, aproximando la frontera de la región con unas quebradas compuestas de un número finito de lados, podemos obtener la fórmula de Green para cualquier región (e , incluso, para un conjunto abierto), cuya frontera se compone de un número finito de curvas suaves a trozos. Sin embargo, no nos detendremos en la demostración de este hecho y sólo nos limitaremos a su enunciación. Con ello, haciendo uso de la definición 7, escribiremos la fórmula (47.19) en una forma más compacta.

Teorema 1. Supongamos que la frontera de una región plana acotada G se compone de un número finito de curvas suaves a trozos. Si las funciones P , Q , $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$ son continuas en \bar{G} , entonces

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial G} P dx + Q dy,$$

donde ∂G es la frontera orientada positiva de la región G .

La fórmula de Green para las integrales múltiples sirve como análogo de la fórmula de Newton — Leibniz para integrales de multiplicidad unitaria; en ambas fórmulas las integrales de las derivadas extendidas a una región da integración se expresan a través de los valores de la función en la frontera de la región mencionada (en el caso de la fórmula de Green dichos valores se siguen integrando).

Ejercicios. Sirviéndose de la fórmula de Green, calcúense las siguientes integrales curvilíneas, donde Γ es un contorno sencillo cerrado compuesto de las partes de las curvas cuyas ecuaciones están indicadas para cada integral (el sentido del recorrido del contorno es positivo).

$$5. \int_{\Gamma} (x^2 y + x - y) dx + (y^2 + 2x) dy; y = 2, y = x^2 + 1.$$

$$6. \int \frac{y}{x} dx + 2 \ln x dy; 2x + y = 4, x = 1, y = 0.$$

$$7. \int \frac{dx}{y^2} - \frac{dy}{x}; y = x, x = 2, y = 1.$$

47.6. CÁLCULO DE LAS ÁREAS MEDIANTE INTEGRALES CURVILÍNEAS

Al poner en la fórmula de Green $Q = x$, $P = 0$, obtendremos $\iint_G dx dy =$

$= \int_{\gamma^+} x dy$, y, por lo tanto,

$$\mu G = \int_{\gamma^+} x dy. \quad (47.20)$$

Por analogía, al poner $P = -y$, $Q = 0$, obtendremos

$$\mu G = - \int_{\gamma^+} y dx. \quad (47.21)$$

Sumando las fórmulas (47.20) y (47.21), tendremos

$$\mu G = \frac{1}{2} \int_{\gamma^+} x dy - y dx. \quad (47.22)$$

Ejemplos. 1. Hallemos, con ayuda de la fórmula (47.22), el área limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Hagamos uso de su representación paramétrica: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$. Al aplicar la fórmula (47.22), obtendremos el área buscada:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\gamma^+} x dy - y dx = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi ab.$$

Comparando este método de cálculo del área limitada por una elipse con el citado anteriormente (véase el ejemplo 4 en el p. 32.1), podemos cerciorarnos con facilidad cuán menos es aquí el volumen de cálculos.

2. Hallemos el área limitada por la astroide (véase en el tomo 1, fig. 84) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Teniendo en cuenta que en este caso el crecimiento del parámetro t corresponde a la orientación positiva del contorno, tenemos:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{\gamma^+} x dy - y dx = \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t) dt = \\ &= \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3a^2}{16} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt = \frac{3\pi a^2}{8} \end{aligned}$$

Ejercicios. Calcúlese, con ayuda de la integral curvilínea, el área de una figura limitada por las líneas:

$$8. x = t^2, y = t^3, x = 1, y = 0.$$

$$9. y^2 = 4 - x, x = 1, y = 1 \text{ (en el primer cuadrante).}$$

47.7. SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DEL SIGNO DEL JACOBIANO DE LA APLICACIÓN DE UNA REGIÓN PLANA

Sea F una aplicación biunívoca y continuamente derivable de la región plana $G \subset R_{uv}^2$ en el plano R_{xy}^2 con un jacobiano distinto de cero en todo punto de G . En este caso, en virtud del principio de conservación de la región, el conjunto $G^* = F(G)$ es también una región (véase el p. 41.8), mientras que el jacobiano, siendo continuo, mantiene invariable su signo en G (véase el teorema 4 en el p. 19:6), es decir, o bien es G positivo en todo punto, o bien es negativo en todo punto.

Supongamos que en la inscripción de coordenadas la aplicación F se da mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v). \end{aligned} \tag{47.23}$$

Lema 1. Si γ es una curva suave a trozos dispuesta en G , su imagen $\gamma^* = F(\gamma)$ será, realizándose la aplicación F , también una curva suave a trozos.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos al principio que γ es una curva suave, es decir, una curva continuamente derivable privada de puntos singulares (véase las definiciones 15 y 16 en el p. 16.4) y sea

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad a \leq t \leq b,$$

una representación suya. Entonces, en el segmento $[a, b]$ las funciones $u(t)$ y $v(t)$ son continuamente derivables y

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 > 0.$$

Como representación de la curva $\gamma^* = F(\gamma)$ servirá un par de funciones

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad a \leq t \leq b,$$

las cuales, en virtud de las propiedades de la composición de funciones continuamente derivables (véanse los pp. 19.3 y 20.3), serán también continuamente derivables. Mostremos que la curva γ^* no tendrá puntos singulares. Efectivamente, como

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \end{aligned}$$

entonces, tomando estas igualdades por un sistema de ecuaciones lineales respecto de $\frac{du}{dt}$ y $\frac{dv}{dt}$, vemos que si en cierto punto $t \in [a, b]$ se cumplieran las igualdades

$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$, entonces, debido a que el jacobiano

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

no se reduce a cero, el sistema citado tendría la única solución, a saber, la solución nula, es decir, en el mismo punto t se verificarían las igualdades $\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = 0$, y, de este modo, el punto correspondiente de la curva γ sería singular lo que, por hipótesis, no es posible.

Así pues, si la curva γ es suave, la curva $\gamma^* = F(\gamma)$ es también suave. De aquí proviene en seguida que la imagen de una curva suave a trozos en la aplicación que se considera es también una curva suave a trozos, pues tal curva suave a trozos (véase la definición 16 en el p. 16.4) representa una reunión de un número finito de curvas suaves. \square

Sea, ahora, $\Gamma \subset G$, donde Γ es una región limitada y su frontera $\partial\Gamma$ está constituida por el contorno sencillo suave a trozos (las fronteras de este tipo se llaman *suaves a trozos*). Supongamos, además, $\Gamma^* = F(\Gamma)$. Entonces, en virtud del principio de conservación de región, el conjunto Γ^* será también una región y, más aún, su frontera $\partial\Gamma^*$ es la imagen de la frontera $\partial\Gamma$ de la región Γ (véase el lema 1 en el p. 46.1), es decir, $\partial\Gamma^* = F(\partial\Gamma)$. Por eso la frontera $\partial\Gamma^*$ es también el contorno γ^* sencillo (debido al carácter biunívoco de la aplicación F) y suave a trozos (de acuerdo con el lema 1 de este punto). Por consiguiente, a lo largo de los contornos $\gamma = \partial\Gamma$ y $\gamma^* = \partial\Gamma^*$ pueden calcularse integrales curvilíneas. Supongamos que las regiones Γ y Γ^* son de tal índole que admiten el uso de la fórmula de Green, por ejemplo, satisfacen las condiciones que se imponen sobre la región en el teorema 1 del p. 47.5. (Según se ha señalado, la fórmula de Green, en realidad, es siempre aplicable bajo las suposiciones admitidas, pero esto no fue demostrado).

Designemos, como siempre, por γ^+ el contorno γ orientado positivo (véase el p. 47.5). Sea

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad a \leq t \leq b,$$

la representación del contorno γ^+ y, por lo tanto,

$$x = x[u(t), v(t)], \quad y = y[u(t), v(t)], \quad a \leq t \leq b, \quad (47.24)$$

es una representación del contorno γ^* .

Supondremos, además, que existen derivadas mixtas $\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}$ y $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$ y que éstas son continuas, por lo cual son iguales entre sí en todos los puntos de la región G .

De acuerdo con la fórmula (47.20),

$$\mu\Gamma^* = \varepsilon \int_{\gamma^*} x dy, \quad (47.25)$$

donde $\varepsilon = +1$, si la orientación del contorno γ^* es positiva y $\varepsilon = -1$, en el caso contrario. En otras palabras, $\varepsilon = +1$ ($\varepsilon = -1$, respectivamente), siempre que al recorrido positivo del contorno dado γ corresponde en la aplicación (47.23) el recorrido también positivo (negativo, respectivamente) del contorno $\gamma^* = F(\gamma)$.

Al transformar la integral (47.25) según la fórmula (47.8) y hacer uso de la representación (47.24) del contorno γ^* , tendremos

$$\mu\Gamma^* = \varepsilon \int_a^b xy'_i dt = \varepsilon \int_a^b x \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) dt = \varepsilon \int_{\gamma^+} x \frac{\partial y}{\partial u} du + x \frac{\partial y}{\partial v} dv.$$

Aplicemos a la integral obtenida la fórmula de Green (véase el teorema 1 en el p. 47.5). Al poner $P = x \frac{\partial y}{\partial u}$, $Q = x \frac{\partial y}{\partial v}$ y observar que en este caso

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + x \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} + x \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}$$

(aquí se utiliza la condición de existencia de las segundas derivadas parciales $\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}$

y $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$, requerida anteriormente), obtendremos

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

de donde

$$\mu \Gamma^* = \varepsilon \int_{\gamma^+} P du + Q dv = \varepsilon \iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du dv = \varepsilon \iint_{\Gamma} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv.$$

El primer miembro de esta igualdad es superior a cero, por lo tanto, el segundo miembro es también positivo y, como el jacobiano de la aplicación (47.23) no cambia de signo, esto es posible sólo en el caso en que $\varepsilon \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} > 0$, es decir, cuando el

número ε es del mismo signo que el jacobiano $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ y, en este caso,

$\varepsilon \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$. De este modo, el signo de ε no depende de la elección del contorno γ , sino que se determina por el signo del jacobiano el cual es el mismo en todos los puntos de la región G .

Queda demostrado, pues, el siguiente teorema.

Teorema 2. Si las suposiciones asumidas anteriormente están cumplidas, resulta válida la fórmula

$$\mu \Gamma^* = \iint_{\Gamma} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv. \quad (47.26)$$

Además, si $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} > 0$ en Γ , entonces $\varepsilon = +1$; en otras palabras, si el jacobiano de la aplicación F es positivo, entonces al recorrido positivo de todo contorno $\gamma \subset G$, que sirve de frontera para la región limitada $\Gamma \subset G$, le corresponde, en la aplicación F , el recorrido positivo del contorno $\gamma^* = F(\gamma)$ que sirve de frontera de la región limitada $\Gamma^* = F(\Gamma)$. En cambio, si el jacobiano $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} < 0$ en Γ , entonces $\varepsilon = -1$, es decir, al recorrido positivo de todo contorno γ del tipo indicado le corresponde, en la aplicación F , un recorrido negativo del contorno $\gamma^* = F(\gamma)$.

De este modo, el significado geométrico del signo de un jacobiano consiste en que, siendo positivo el jacobiano, la orientación del contorno se mantiene invariable durante la aplicación y sí cambia, cuando el jacobiano es negativo.

Con ayuda de la fórmula de Green (47.19) la fórmula (47.26) se generaliza fácilmente para el caso cuando la frontera de la región Γ se compone de un número finito de contornos cerrados suaves a trozos.

Diremos, además, que mediante la fórmula (47.26) puede obtenerse sin dificultad alguna la demostración más fácil del teorema 1, citado en el p. 46.I, sobre el significado geométrico del módulo del jacobiano. En efecto, sea $M_0 \in \Gamma$, $d(\Gamma)$ es el

diámetro de la región Γ , y supongamos que la región Γ se contrae de tal o cual modo hacia el punto M_0 , y, por consiguiente, $d(\Gamma) \rightarrow 0$. Según el teorema del valor medio (véase el p. 44.6),

$$\mu\Gamma^* = \iint_{\Gamma} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_M \mu\Gamma, \quad M \in \Gamma,$$

por lo cual

$$\frac{\mu\Gamma^*}{\mu\Gamma} = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_M.$$

Ya que el jacobiano es continuo, tenemos

$$\lim_{d(\Gamma) \rightarrow 0} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_M = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{M_0}$$

y, por lo tanto,

$$\lim_{d(\Gamma) \rightarrow 0} \frac{\mu\Gamma^*}{\mu\Gamma} = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{M_0}, \quad (47.27)$$

es decir, hemos demostrado la fórmula (46.9) y lo hicimos, en cierto sentido, de modo más general; así, por ejemplo, aquí Γ no es necesariamente un cuadrado (aunque, hemos impuesto sobre la aplicación F las condiciones un tanto más fuertes, al exigir que sean continuas las derivadas parciales $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$ y $\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}$, y, además, que se pueda aplicar la fórmula de Green para la región Γ^*). No es difícil convencerse de que la razón en el primer miembro de la fórmula (47.27) tiende a su límite uniformemente en el sentido indicado en el teorema 1 del p. 46.1.

Pese a que la deducción de la fórmula (47.27) resulta más fácil, lo que se ha conseguido a cuenta de las suposiciones más fuertes, cabe señalar que la demostración del teorema 1, aducida en el p. 46.1, es preferible desde el punto de vista del sentido matemático, puesto que revela mejor la misma esencia del problema vinculada con el hecho de que una aplicación derivable localmente se aproxima bastante bien por la aplicación lineal.

47.8. CONDICIONES DE INDEPENDENCIA DE UNA INTEGRAL CURVILÍNEA DEL CAMINO DE INTEGRACIÓN

Todas las curvas (los contornos) que se consideran en este punto se supondrán suaves a trozos lo que, para abreviar, no se especificará cada vez especialmente. Indiquemos, además, que en toda región G dos de sus puntos cualesquiera se pueden siempre unir con una curva suave a trozos, por ejemplo, con una quebrada (véase el lema 5 en el p. 41.4) dispuesta íntegramente en G .

Sea dada una región G y sean definidas en ésta las funciones continuas $P = P(x, y)$ y $Q = Q(x, y)$. Examinemos la cuestión concerniente a las condiciones que deben cumplirse para que la integral curvilínea $\int_{AB} P dx + Q dy$ (los puntos

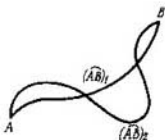


Fig. 206

$A \in G$ y $B \in G$ son arbitrariamente fijados) no depende de la elección de la curva \widehat{AB} que une A y B y que se dispone en G .

Lema 2. La condición de independencia de la integral curvilínea en consideración del camino indicado de integración es equivalente a que sea nula la integral a lo largo de cualquier contorno cerrado dispuesto en la región G .

DEMOSTRACIÓN. 1. En efecto, supongamos que para cualquier contorno cerrado $\gamma \subset G$ tiene lugar la igualdad

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = 0$$

y sean dadas dos curvas $(\widehat{AB})_1$ y $(\widehat{AB})_2$ que unen en G los puntos A y B (véase la fig. 206). Designemos mediante $(\widehat{BA})_2$ una curva que se obtiene de $(\widehat{AB})_2$ al cambiar en ésta su orientación por la opuesta. La reunión $(\widehat{AB})_1 \cup (\widehat{BA})_2$ de las curvas $(\widehat{AB})_1$ y $(\widehat{BA})_2$ es un contorno cerrado, razón por la cual

$$\int_{(\widehat{AB})_1 \cup (\widehat{BA})_2} Pdx + Qdy = 0; \quad (47.28)$$

pero

$$\begin{aligned} \int_{(\widehat{AB})_1 \cup (\widehat{BA})_2} Pdx + Qdy &= \int_{(\widehat{AB})_1} Pdx + Qdy + \\ + \int_{(\widehat{BA})_2} Pdx + Qdy &= \int_{(\widehat{AB})_1} Pdx + Qdy - \int_{(\widehat{AB})_2} Pdx + Qdy. \end{aligned} \quad (47.29)$$

De (47.28) y (47.29) proviene que

$$\int_{(\widehat{AB})_1} Pdx + Qdy = \int_{(\widehat{AB})_2} Pdx + Qdy,$$

es decir, la integral curvilínea $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$ no depende del camino de integración $\widehat{AB} \subset G$, cuando $A \in G$ y $B \in G$ están fijados.

2. Viceversa, supongamos que la integral $\int Pdx + Qdy$ no depende del camino de integración en el sentido mencionado y sea dado un contorno cerrado γ dis-

puesto en G . Elijamos en éste dos puntos A y $B \neq A$; entonces $\gamma = \widehat{AB} \cup \widehat{BA}$ y

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int_{\widehat{AB}} + \int_{\widehat{BA}} = \int_{\widehat{AB}} - \int_{(\widehat{AB})_1} = 0,$$

donde $(\widehat{AB})_1$ denota la curva que se obtiene de la curva \widehat{BA} , al cambiar en ésta su orientación por la opuesta. \square

Enunciemos el criterio de independencia de una integral del camino de integración.

Teorema 3. *Supongamos que las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son continuas en la región plana G . Para que la integral curvilínea $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$, con los puntos fi-*

jados $A \in G$ y $B \in G$, no dependa del camino de integración $AB \subset G$, es necesario y suficiente que la expresión $Pdx + Qdy$ sea la diferencial total de cierta función $u = u(x, y)$, definida en la región G :

$$du = Pdx + Qdy \quad (47.30)$$

(esto es equivalente a que $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, $(x, y) \in G$).

Si esta condición se cumple para cualesquiera dos puntos $A = (x_0, y_0) \in G$ y $B = (x_1, y_1) \in G$ y toda curva \widehat{AB} que une dichos puntos en G : $\widehat{AB} \subset G$, se verifica la identidad

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0). \quad (47.31)$$

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD DE LA CONDICIÓN (47.30). Admitamos que la integral en consideración no depende del camino de integración dispuesto en la región G , sino que sólo depende de los puntos inicial y final del camino. Supongamos que $M_0 = (x_0, y_0) \in G$, $M = (x, y) \in G$ y $\widehat{M_0M}$ es una curva suave a trozos que une en G los puntos M_0 y M (una curva de tal género, incluso una quebrada, siempre existe, véase el lema 5 del p. 41.4). Pongamos

$$u(M) = u(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\widehat{M_0M}} Pdx + Qdy.$$

La función $u(x, y)$ es unívoca, puesto que el valor $u(M) = u(x, y)$ no depende de la elección de la curva que une en G los puntos M_0 y M . Probemos que

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y).$$

Fijemos el punto $M = (x, y)$ y elijamos el punto $M_h = (x + h, y) \in G$, $h \neq 0$, de una manera tal que el segmento MM_h que une M y M_h (el cual, evidentemente,

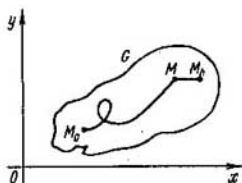


Fig. 207

es paralelo al eje Ox y tiene la longitud igual a $|h|$, se contenga en G (fig. 207). Para todos los números h , suficientemente pequeños, tal elección es siempre posible (¿por qué?). En este caso tenemos

$$u = (x + h, y) - u(x, y) = \int_{M_0 M_h} P dx + Q dy - \int_{M_0 M} P dx + Q dy = \int_{MM_h} P dx + Q dy.$$

A lo largo del segmento MM_h la coordenada y se mantiene constante, por lo cual $\int_{MM_h} Q dy = 0$, y , por consiguiente, $u(x + h, y) - u(x, y) = \int_{MM_h} P dx = \int_x^{x+h} P(t, y) dt$. Al aplicar el teorema integral del valor medio, obtendremos

$$u(x + h, y) - u(x, y) = P(x + \theta h, y)h, \quad 0 < \theta < 1,$$

de donde

$$\frac{u(x + h, y) - u(x, y)}{h} = P(x + \theta h, y), \quad 0 < \theta < 1. \quad (47.32)$$

El segundo miembro de esta igualdad tiene un límite para $h \rightarrow 0$, puesto que la función $P(x, y)$ es continua, y por consiguiente el primer miembro también tiene un límite cuando $h \rightarrow 0$. Pasando al límite en (47.32), tendremos $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y)$.

De un modo completamente análogo se demuestra también la igualdad $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$.

Así pues, la existencia de la función $u(x, y)$, para la cual se verifica la correlación (47.30), queda demostrada.

Supongamos ahora que $A \in G$, $B \in G$, \widehat{AB} es una curva que une en G los puntos A y B , y sea $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, una representación suya y, por lo tanto

to, $A = (x(a), y(a))$, $B = (x(b), y(b))$. En este caso

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy &= \int_a^b [P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)]dt = \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right] dt = \\ &= \int_a^b u_t(x(t), y(t))dt = u[x(b), y(b)] - u[x(a), y(a)] = u(B) - u(A), \end{aligned}$$

es decir, la fórmula (47.31) queda también demostrada.

LA DEMOSTRACIÓN DE SUFICIENCIA de la condición (47.30) referente a la independencia de una integral curvilínea del camino de integración se deduce directamente de la fórmula (47.31). Efectivamente, el punto inicial de cualquier contorno cerrado γ coincide con el final, por lo cual, en virtud de (47.31), se tiene

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = u(A) - u(A) = 0.$$

De conformidad con el lema 2, esto precisamente significa que la integral curvilínea correspondiente no depende del trayecto de integración. \square

Observemos que, aunque el teorema demostrado nos proporciona las condiciones necesarias y suficientes referentes a la independencia de una integral curvilínea de: camino de integración, dichas condiciones se comprueban con dificultad.

Al hacer más estrecha la clase de las regiones en consideración podemos obtener un criterio considerablemente más simple y efectivo. Introduzcamos la siguiente definición.

Definición 8. Una región plana G se llama simplemente conexa, si, cualquiera que sea el contorno sencillo $\gamma \subset G$, la región limitada Γ , cuya frontera está constituida por γ , se contiene en G .

Hablando metafóricamente, el hecho de que una región es simplemente conexa significa que ella no tiene "agujeros". Un círculo nos da el ejemplo de una región simplemente conexa, un anillo circular representa una región no simplemente conexa (fig. 208).

Antes de enunciar el otro criterio que caracteriza la independencia de la integral curvilínea del camino de integración, demostremos un lema que nos hará falta al demostrar dicho criterio.

Lema 3. Supongamos que las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son continuas en la región G ; γ es una curva suave dispuesta en G ; $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, es su representación, $\tau = \{t_i\}_{i=0}^n$ es la partición del segmento $[a, b]$, y λ_r , una quebrada cuyos vértices se ubican en los puntos $(x(t_i), y(t_i))$, $i = 0, 1, \dots, i_0$ (véase el p. 16.5). En este caso

$$\lim_{\delta_r \rightarrow 0} \int_{\lambda_r} Pdx + Qdy = \int_{\gamma} Pdx + Qdy. \quad (47.33)$$



Fig. 208

Cabe señalar que como las funciones $x(t)$ e $y(t)$ son uniformemente continuas en el segmento $[a, b]$, las longitudes de los lados de la quebrada λ_τ , es decir, las de los segmentos cuyos vértices se encuentran en los puntos $(x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))$ y $(x(t_i), y(t_i))$ tienden también a cero cuando $\delta_\tau \rightarrow 0$.

DEMOSTRACIÓN. La curva γ es un compacto; ya que este compacto no se interseca con el conjunto cerrado $R_{xy}^2 \setminus G$, la distancia entre ellos es superior a cero (véase el lema 7 del p. 18.2). Sea η un número cualquiera tal que $\rho(\gamma, R_{xy}^2 \setminus G) > \eta > 0$. Designemos mediante γ_η la totalidad de todos los puntos del plano que distan de γ a una magnitud no superior a η . El conjunto γ_η está acotado, cerrado (véase el p. 18.3, lema 11) y $\gamma_\eta \subset G$.

Dado que las funciones $x(t)$ e $y(t)$ son uniformemente continuas en el segmento $[a, b]$, existe tal número $\delta_0 > 0$, que para cualesquiera dos puntos $t' \in [a, b]$ y $t'' \in [a, b]$, que satisfacen la condición $|t' - t''| < \delta_0$, se cumple la desigualdad

$$\rho(M', M'') = \sqrt{[x(t'') - x(t')]^2 + [y(t'') - y(t')]^2} < \eta,$$

donde $M' = (x(t'), y(t'))$, $M'' = (x(t''), y(t''))$ (compárese con el lema 4 en el p. 41.4). Es evidente que todos los puntos del segmento cuyos extremos se ubican en los puntos M' y M'' se hallan alejados del punto M' a una distancia no superior a η , razón por la cual se disponen en el conjunto γ_η , y, por consiguiente, en G . Esto significa que si la finura δ_τ de la partición τ del segmento $[a, b]$ es tal que $\delta_\tau < \delta_0$, todos los puntos de la quebrada λ_τ se disponen en G y para las particiones de este género τ tiene sentido la integral $\int_{\lambda_\tau} P dx + Q dy$.

Examinemos las integrales $\int_\gamma P dx$ y $\int_{\lambda_\tau} P dx$. Pongamos

$$x_i = x(t_i), \quad y_i = y(t_i), \quad P_i = P(x_i, y_i),$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, i_0, \quad \sigma_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} P_i \Delta x_i.$$

Según se sabe (véase el p. 47.2, la propiedad 4^o),

$$\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau = \int_\gamma P dx. \quad (47.34)$$

Sean, luego, $M_i = (x_i, y_i)$ los vértices de la quebrada λ_τ ; en este caso

$$\int_{\lambda_\tau} P dx = \sum_{i=1}^{i_0} \int_{M_{i-1} M_i} P dx. \quad (47.35)$$

Por otra parte, indiquemos que (haciendo uso de las designaciones adoptadas en el p. 47.2)

$$\int_{M_{i-1}M_i} dx = \int_{M_{i-1}M_i} \cos \alpha ds = |M_{i-1}M_i| \cos \alpha = \Delta x_i,$$

por lo cual

$$\sigma_r = \sum_i P_i \Delta x_i = \sum_i P_i \int_{M_{i-1}M_i} dx = \sum_i \int_{M_{i-1}M_i} P_i dx. \quad (47.36)$$

Al designar con L_r la longitud de la quebrada λ_r ; con S , la longitud de la curva γ y con $\omega(\delta; P)$, el módulo de continuidad de la función $P(x, y)$ en el compacto γ_n , y teniendo presente que en virtud de la definición de la curva: $L_r \leq S$, obtendremos, a partir de (47.35) y (47.36):

$$\begin{aligned} \left| \int_{\lambda_r} P dx - \sigma_r \right| &\leq \sum_i \left| \int_{M_{i-1}M_i} |P - P_i| dx \right| \leq \\ &\leq \omega(\delta_r; P) \sum_i |\Delta x_i| \leq \omega(\delta_r; P) L_r \leq \omega(\delta_r; P) S. \end{aligned}$$

De aquí, en virtud de que la función $P(x, y)$ es uniformemente continua en el conjunto γ_n , tenemos $\lim_{\delta_r \rightarrow 0} \left(\int_{\lambda_r} P dx - \sigma_r \right) = 0$, y, por ende, de conformidad con (47.34),

$$\lim_{\delta_r \rightarrow 0} \int_{\lambda_r} P dx = \int_{\gamma} P dx. \quad (47.37)$$

Análogamente se demuestra también la igualdad

$$\lim_{\delta_r \rightarrow 0} \int_{\lambda_r} Q dy = \int_{\gamma} Q dy. \quad (47.38)$$

De (47.37) y (47.38) se deduce directamente la afirmación del lema, es decir, la fórmula (47.33). \square

OBSERVACIÓN. Una afirmación, análoga al lema, es lícita también para las integrales curvilineas en un espacio, con la particularidad de que la demostración del caso espacial se realiza siguiendo el mismo esquema que se usa en el caso plano.

Teorema 4. *Supongamos que las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son continuas junto con sus derivadas parciales $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$ en una región plana G . Para que la integral curvilinea $\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy$ no dependa del camino de integración $\widehat{AB} \subset G$, siendo fijados arbitrariamente los puntos $A \in G$ y $B \in G$, es necesario y suficiente (siempre que la región G es simplemente conexa) que en todos los puntos de la región G se cumpla la igualdad $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.*

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Supongamos que la integral en consideración no depende del camino de integración dispuesto en la región G , sino sólo de la posición de los puntos inicial y final. De acuerdo con el teorema 3, existe una función

$u = u(x, y)$ tal que $du = Pdx + Qdy$, es decir, tal que $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$. Como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ y, por hipótesis del teorema, las derivadas $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$ y, por lo tanto, las derivadas mixtas $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ son continuas, entonces

(véase el p. 21.1), son, además, iguales, es decir, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Supongamos ahora que la región G es simplemente conexa y en todos los puntos suyos se verifica $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Si γ es un contorno cerrado sencillo y suave a trozos, dispuesto en G , y si D es una región limitada cuya frontera es γ , entonces, al aplicar la fórmula de Green (utilizamos aquí el hecho de que la región G es simplemente conexa), obtendremos

$$\int_{\gamma^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Si la curva γ , dispuesta en G , tiene un número finito de puntos múltiples, entonces para cada uno de sus "bucles" γ_k , $k = 1, 2, \dots, k_0$, que representa ya un contorno cerrado sencillo, tenemos sucesivamente, en virtud de lo demostrado, $\int_{\gamma_k} Pdx + Qdy = 0$, de donde se infiere que para toda la curva γ también

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = 0. \quad (47.39)$$

Pasando al caso general, fijemos nuestra atención en que mediante el procedimiento considerado la igualdad (47.39) se demuestra también en el caso cuando γ sea una quebrada cerrada de un número finito de lados. Desde el punto de vista geométrico, la diferencia sólo consiste en que la autointersección de una quebrada de un número finito de lados puede componerse no sólo del número finito de puntos, sino también del número finito de segmentos lo que complica los razonamientos de un modo insignificante. La posibilidad de aplicar la fórmula de Green a una región finita, limitada por una quebrada del número finito de lados, proviene de que la región citada puede ser dividida en triángulos, los cuales son, evidentemente, regiones elementales respecto a ambos ejes de coordenadas. Por consiguiente, en este caso se cumplen las premisas del teorema 1 en el p. 47.3.

Entre tanto, cualquier curva cerrada suave a trozos γ , dispuesta en G , puede ser aproximada, con cualquier grado deseado de precisión, mediante unas quebradas cerradas de un número finito de lados, a consecuencia de lo cual, pasando al límite, podemos obtener la igualdad (47.39) para toda curva cerrada de G . Hagámoslo.

Supongamos que γ es una curva cerrada suave a trozos en la región G ; la citada curva está dada mediante la representación $r(t)$, $a \leq t \leq b$, y es una reunión de las

curvas suaves $\gamma_1, \dots, \gamma_k$. Inscribamos la quebrada λ_j dentro de toda curva γ_j , $j = 1, 2, \dots, k$. La reunión de todas las quebradas λ_j , $j = 1, 2, \dots, k$, forma una línea quebrada cerrada λ , correspondiente a cierta partición τ del segmento $[a, b]$. En virtud de lo demostrado, tenemos

$$\int_{\lambda} P dx + Q dy = 0.$$

Pero, de acuerdo con el lema,

$$\lim_{\delta_j \rightarrow 0} \int_{\lambda_j} P dx + Q dy = \int_{\gamma_j} P dx + Q dy, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

y, por lo tanto,

$$\lim_{\delta_j \rightarrow 0} \int_{\lambda} P dx + Q dy = \int_{\gamma} P dx + Q dy,$$

por lo cual

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = 0. \quad \square$$

La condición $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ se denomina, a veces, *criterio de la diferencial total en una región simplemente conexa*, puesto que, de acuerdo con los teoremas 3 y 4, dicha condición es necesaria y suficiente para que la expresión $P dx + Q dy$ en la región G sea una diferencial de cierta función $u(x, y)$, $(x, y) \in G$.

Como conclusión de este punto hemos de notar que al demostrar la suficiencia de las condiciones del teorema 4 para que la integral curvilínea sea independiente del camino de integración, resulta muy esencial la exigencia de que la región en consideración sea simplemente conexa y esta exigencia no puede ser menospreciada. Confirmemos esto con un ejemplo.

Ejemplo. Sea $P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

Es fácil comprobar que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (47.40)$$

para todos los puntos del plano, excepto el origen de coordenadas $(0, 0)$. Esto proviene, por ejemplo, de que

$$d\left(\arctg \frac{y}{x}\right) = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 > 0. \quad (47.41)$$

De este modo, en el caso dado por la región G puede tomarse todo el plano con el origen de coordenadas "punzado": $G = R^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Es evidente que la región G no es simplemente conexa. A título de contorno cerrado elijamos la circunferencia unidad

$$\gamma_0 = \{x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi\}.$$

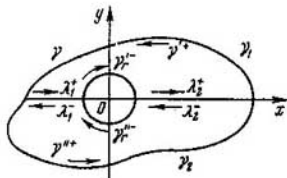


Fig. 209

entonces

$$\int_{\gamma_0} Pdx + Qdy = \int_{\gamma_0} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Por consiguiente, en este caso las condiciones (47.40) quedan cumplidas y existe un contorno cerrado γ_0 , a lo largo del cual la integral no es nula. No es difícil convencerse de que, en general,

$$\int_{\gamma_r} Pdx + Qdy = 2\pi \quad (47.42)$$

a lo largo de cualquier circunferencia γ_r de radio r y con centro en el origen de coordenadas.

Luego, cualquiera que sea el contorno sencillo suave a trozos γ que constituya la frontera de una región limitada en la que está contenido el origen de coordenadas (en este caso suele decirse que el contorno γ contiene en su interior el origen de coordenadas), para este contorno se verifica también

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = 2\pi. \quad (47.43)$$

Para demostrarlo elijamos una circunferencia γ_r de tal radio r que sea $\gamma_r \subset \Gamma$; en este caso γ y γ_r no se intersecan. Al unir los contornos γ y γ_r por medio de los segmentos λ_1 y λ_2 , como lo muestra fig. 209, obtendremos dos contornos cerrados γ_1 y γ_2 que no contienen en su interior el origen de coordenadas y que se componen de los arcos γ_r^+ y γ_r^- de la circunferencia γ_r , las partes γ^+ y γ^- del contorno γ y los segmentos λ_1 y λ_2 .

En virtud de la condición (47.40), para estos contornos se verifican las igualdades

$$\int_{\gamma_1} Pdx + Qdy = 0, \quad \int_{\gamma_2} Pdx + Qdy = 0.$$

Al sumar estas igualdades y omitir, para abreviar, las expresiones subintegrales, obtendremos (fig. 209):

$$0 = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = \int_{\gamma^+} + \int_{\lambda_1^+} + \int_{\gamma_r^+} + \int_{\lambda_2^+} + \int_{\gamma^-} + \int_{\lambda_2^-} + \int_{\gamma_r^-} + \int_{\lambda_1^-} =$$

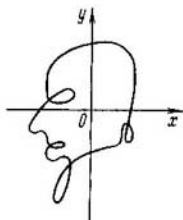


Fig. 210

$$= \int_{\gamma^+} + \int_{\gamma^-} - \int_{\gamma_r^+} - \int_{\gamma_r^-} = \int_{\gamma^+} - \int_{\gamma_r^+}$$

De aquí, debido a (47.42), proviene precisamente (47.43). Más aún, esta igualdad se verifica también en el caso, cuando el contorno γ , al recorrer "una vez" alrededor del origen de coordenadas, forma un número finito de "bucles" que no cercan el origen de coordenadas (fig. 210), pues la integral a lo largo de estos bucles es nula.

Si M_0 es un punto fijo de la región en consideración G , $M_0 \in G$, $M \in G$, y $\widehat{M_0 M}$ es una curva que une en G los puntos M_0 y M , entonces $u(M) = \int_{\widehat{M_0 M}} Pdx + Qdy$

ya será una función multiforme cuyos valores se determinan por la elección de distintos trayectos que unen los puntos M_0 y M . Si γ_0 es una curva fija cualquiera que une M_0 y M , entonces todos los valores de la función u en el punto M se dan mediante la fórmula

$$u(M) = \int_{\gamma_0} Pdx + Qdy + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

esto es, cada recorrido en torno al origen de coordenadas cambia el valor de la función $u(M)$ en la magnitud $\pm 2\pi$, según sea el sentido del recorrido.

En el caso dado podemos convencernos de esto inmediatamente: de la fórmula (47.41) se deduce que

$$\int_{\gamma_0} Pdx + Qdy = \int_{\gamma_0} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \left(\text{Arctg} \frac{y}{x} \right)_0,$$

donde $\left(\text{Arctg} \frac{y}{x} \right)_0$ es un cierto valor fijo de $\text{Arctg} \frac{y}{x}$; por esto

$$u(M) = \text{Arctg} \frac{y}{x}.$$

Un lector reflexivo se dará cuenta de que muchos razonamientos aducidos en este ejemplo no dependen de la forma concreta de las funciones P y Q y son verificados siempre cuando nos enfrentemos con un "punto singular" aislado, es decir, un punto en el que se perturba la condición (47.40). Por supuesto, "recorrido" tal punto singular una sola vez, se obtendrá no 2π , sino, en el caso general, algún otro número.

singular una sólo vez, se obtendrá no 2π , sino, en el caso general, algún otro número.

El resultado análogo al teorema 4 tiene lugar también cuando γ es una curva espacial (véase el p. 52.6).

Ejercicios. 10. Demuéstrese la fórmula

$$\iint_G v \Delta u dx dy = - \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\gamma^+} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds,$$

donde G es una región plana, para la cual es válida la fórmula de Green, γ es el contorno que la limita, ν es la normal exterior unidad al contorno γ , y Δ , el operador de Laplace (véase el p. 41.10).

11. Calcúlese la integral $\int_{\Gamma} 2(x + y^2)dx + (4xy + \cos y)dy$, donde Γ es una curva arbitraria suave a trozos que une los puntos $(1, 0)$ y (ξ, η) .

12. Sea Γ un contorno cerrado sencillo suave a trozos, arbitrariamente elegido, que limita una región en la que está contenido el origen de coordenadas. Calcúlese la integral

$$\int_{\Gamma} \frac{e^x}{x^2 + y^2} [(x \operatorname{sen} y - y \operatorname{cos} y)dx + (x \operatorname{cos} y + y \operatorname{sen} y)dy]$$

para el sentido positivo del recorrido del contorno Γ

§ 48. INTEGRALES MÚLTIPLES IMPROPIAS

48.1. DEFINICIONES FUNDAMENTALES

Al igual que en el caso de integrales ordinarias, introduzcamos el concepto de integral múltiple impropia, es decir, de integral múltiple de las funciones que o bien no están acotadas o bien están definidas en una región no limitada. La definición de la integral múltiple impropia la enunciemos de modo tal que se abarquen ambos casos mencionados (compárese con el p. 33.1).

Definición 1. Sea G un conjunto abierto (acotado o no acotado) en el espacio n -dimensional R^n . Una sucesión de conjuntos abiertos G_k , $k = 1, 2, \dots$, se llamará sucesión que agota de modo monótono el conjunto abierto G , si

$$1) \bar{G}_k \subset G_{k+1}, k = 1, 2, \dots;$$

$$2) \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G.$$

Aquí \bar{G} significa, como siempre, la clausura (véase el p. 18.2) del conjunto G .

Definición 2. Sea dada en un conjunto abierto G la función f (acotada o no acotada) integrable según Riemann en cualquier conjunto abierto D , medible según Jordan, de tal género que $\bar{D} \subset G$. La función f se denomina integrable en el sentido impropio en el conjunto abierto G , siempre que para toda sucesión de conjuntos

medibles abiertos G_k , $k = 1, 2, \dots$, que agota de modo monótono el conjunto G , existe el límite $\lim_{k \rightarrow \infty} \int f dG_k$ que no depende de la elección de la sucesión citada G_k , $k = 1, 2, \dots$.

Este límite recibe el nombre de integral impropia de la función f extendida al conjunto abierto G y se designa por $\int f dG$, o, en la forma desarrollada

$$\iiint_G \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

De este modo,

$$\int f dG = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f dG_k. \quad (48.1)$$

Si la integral $\int f dG$ existe, suele decirse que ella converge, de lo contrario, la integral diverge.

Cabe notar que en el caso de $n = 1$, la definición citada de la integral impropia no es equivalente a la definición de integral impropia de la función de una sola variable, dada en el § 33. Esto se debe a que en el párrafo indicado a título de conjuntos G_k se han tomado sólo los intervalos, es decir, conjuntos abiertos medibles unidimensionales del tipo muy especial. Por esta razón, el concepto de integral impropia (48.1), introducido en este párrafo, lo emplearemos sólo en el caso de $n \geq 2$, conservando intacto para el caso de $n = 1$ la noción anterior de la integral impropia.

Si el conjunto abierto G es medible según Jordan y la función f es integrable en G , la integral impropia de la función f coincide con la integral habitual de Riemann, lo que resulta de la aditividad completa de la integral de Riemann (véase el p. 44.6).

La definición (48.1) permite extender a las integrales impropias toda una serie de las propiedades de integrales propias: aditividad de la integral en los conjuntos, linealidad de la integral, integración de las desigualdades, reducción de la integral múltiple a una reiterada, fórmula de cambio de variable, etc.

Por ejemplo, si $x = F(u)$ es una aplicación biunívoca continuamente derivable del conjunto abierto $D \subset R_u^n$ sobre otro conjunto abierto $G \subset R_x^n$, y si el jacobiano $J(u)$ de dicha aplicación nunca se reduce a cero en D , entonces para toda función f , continua en G , queda válida la fórmula del cambio de variable en la integral:

$$\int f(x) dG = \int f[F(u)] |J(u)| dD.$$

La demostración de esta afirmación es la misma que la usada para el teorema 2 en el p. 46.2; conviene sólo usar la definición (48.1) en lugar de la aditividad completa de la integral.

Haciendo uso de la aditividad de la integral múltiple impropia, podemos escribir la definición (48.1) en otra forma equivalente. Teniendo presente que para un conjunto abierto medible $\Gamma \subset G$ es válida la igualdad

$$\int f dG - \int f d\Gamma = \int f d(G \setminus \Gamma), \quad (48.2)$$

podemos decir que la integral $\int f dG$ converge cuando, y sólo cuando, para cual-

quier sucesión de conjuntos abiertos medibles G_k , $k = 1, 2, \dots$, que agota de modo monótono el conjunto G , existan las integrales $\int f d(G \setminus \bar{G}_k)$ y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f d(G \setminus \bar{G}_k) = 0.$$

Ejercicio 1. Demuéstrase la fórmula (48.2); en particular, pruébese que las integrales $\int f dG$ y $\int f d(G \setminus \bar{\Gamma})$ convergen o divergen simultáneamente.

48.2. INTEGRALES IMPROPIAS DE LAS FUNCIONES NO NEGATIVAS

Teorema 1. Sea f una función no negativa en el conjunto abierto $G \subset R^n$. Cualquiera que sea la sucesión $\{G_k\}$ de conjuntos abiertos medibles según Jordan G_k , que agota de modo monótono el conjunto G , el límite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f(x) dG_k, \quad (48.3)$$

sea finito o igual a $+\infty$, siempre existe.

Si dicho límite es finito, la integral $\int f(x) dG$ existe y, por lo tanto, el límite (48.3) es igual a esta integral; si, en cambio, el límite (48.3) es infinito, la integral $\int f(x) dG$ no existe.

En este último caso se escribe $\int f(x) dG = +\infty$. Esto se justifica por lo que, en virtud del teorema enunciado, para cualquier otra sucesión $\{D_k\}$ de conjuntos abiertos medibles D_k , que agota de modo monótono G , tenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f(x) dD_k = +\infty.$$

DEMOSTRACIÓN. Es evidente que el teorema quedará demostrado, si probamos que bajo el supuesto de que en el conjunto abierto G la función f es no negativa, para cualquier sucesión de conjuntos medibles G_k , $k = 1, 2, \dots$, que agota de modo monótono la región G , existe un límite finito o infinito

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f dG_k$$

y este límite no depende de la elección de la sucesión citada.

Sea G_k , $k = 1, 2, \dots$, una sucesión de conjuntos medibles que agota de modo monótono el conjunto abierto G . Entonces conforme a la definición de tal sucesión, $G_k \subset G_{k+1}$, y, como $f \geq 0$, se tiene $\int f dG_k \leq \int f dG_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, y, por ende, siempre existe un límite finito o infinito

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f dG_k = I_1.$$

Sea ahora D_k , $k = 1, 2, \dots$, alguna otra sucesión de conjuntos medibles que agota de modo monótono el conjunto abierto G . En virtud de lo demostrado más arriba, existe un límite finito o infinito

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f dD_k = I_2.$$

Mostremos que

$$I_1 = I_2. \quad (48.4)$$

Para todo elemento fijado G_k de la primera sucesión existe un número $k_0 = k_0(k)$ tal que

$$\bar{G}_k \subset D_{k_0}. \quad (48.5)$$

Efectivamente, si no se encontrara el número indicado k_0 , para todo $m = 1, 2, \dots$ natural existiría un punto $x^{(m)} \in \bar{G}_k \setminus D_m$. El conjunto abierto G_k , siendo medible según Jordan, es acotado, razón por la cual su clausura \bar{G}_k representa un conjunto acotado cerrado, esto es, un compacto. Por ser acotado el conjunto, la sucesión $\{x^{(m)}\}$ es también acotada y, por ende, de acuerdo con el teorema de Bolzano—Weierstrass (véase el p. 18.1, teorema 2), se puede separar de ella una subsucesión convergente $\{x^{(m_r)}\}$. Si $x^{(0)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} x^{(m_r)}$, entonces, debido a que el

conjunto \bar{G}_k es cerrado, tenemos $x^{(0)} \in \bar{G}_k$, y por eso $x_0 \in G$. Mas, en este caso, debido a la propiedad 2 de las sucesiones que agotan de modo monótono un conjunto (véase la definición 1), se encontrará un número m_0 tal que $D_{m_0} \ni x^{(0)}$. Dado que D_{m_0} es un conjunto abierto, será un entorno del punto $x^{(0)}$ y, por consiguiente, contiene casi todos los puntos de la sucesión $\{x^{(m_r)}\}$ que converge hacia $x^{(0)}$. Designemos mediante ν_0 un número cualquiera tal que sea $m_{\nu_0} \geq m_0$ y $x^{(m_{\nu_0})} \in D_{m_0}$. En virtud de la propiedad 1 de las sucesiones que agotan de modo monótono un conjunto, $x^{(m_{\nu_0})} \in D_{m_{\nu_0}}$, pero, como $x^{(m_{\nu_0})} \in \bar{G}_k$, esto contradice a la elección de la sucesión $\{x^{(m)}\}$.

De este modo queda demostrada la existencia del número k_0 , mencionado anteriormente (véase (48.5)) (además, su existencia proviene también directamente del lema de Heine — Borel, véase el p. 18.3, puesto que el sistema $\{D_k\}$ forma un recubrimiento abierto del compacto \bar{G}_k).

Demos a conocer ahora que en virtud de la condición $f \geq 0$, de la inclusión (48.5) se desprende que $\int f dG_k \leq \int f dD_{k_0}$. Pero, evidentemente, $\int f dD_{k_0} \leq I_2$, por lo cual, para todo $k = 1, 2, \dots$

$$\int f dG_k \leq I_2.$$

Pasando al límite en esta igualdad, para $k \rightarrow \infty$, obtendremos $I_1 \leq I_2$.

Del mismo modo se demuestra también la desigualdad $I_1 \geq I_2$. \square

Ejemplo. Examinemos la integral $I = \iint_{R^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$. Pongamos $G_k =$

$= \{(x, y) : x^2 + y^2 < k^2, k = 1, 2, \dots\}$. Ésta es una sucesión de conjuntos abiertos cuadrables (en el caso dado, simplemente una sucesión de círculos) que agota de modo monótono todo el plano R^2 .

Sea $I_k = \iint_{G_k} e^{-x^2-y^2} dx dy$. Pasemos a las coordenadas polares:

$$I_k = \iint_{G_k} e^{-r^2} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^k -e^{-r^2} r dr = 2\pi \frac{e^{-r^2}}{2} \Big|_0^k = \pi(1 - e^{-k^2}).$$

De aquí, de acuerdo con la definición (48.1),

$$I = \lim_{k \rightarrow \infty} I_k = \pi. \quad (48.6)$$

La fórmula (48.6) permite hallar el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

llamada *integral de Poisson*^{*)} que se encuentra a menudo en diferentes aplicaciones. En efecto, designando con D_k el cuadrado $|x| \leq k$, $|y| \leq k$, $k = 1, 2, \dots$, y aplicando a la integral, extendida a D_k , de la función $e^{-x^2-y^2}$ la fórmula de reducción de la integral múltiple a una reiterada (véase el p. 45.1), obtendremos

$$\begin{aligned} I &= \iint_{R^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{D_k} e^{-x^2-y^2} dx dy = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^k dx \int_{-k}^k e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^k \left(\int_{-k}^k e^{-x^2} dx \right) e^{-y^2} dy = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{-k}^k e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

Por esto de (48.6) se infiere inmediatamente que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Teorema 2 (criterio de comparación). *Supongamos que en el conjunto abierto G se verifican las desigualdades $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in G$. En este caso la convergencia de la integral $\int f(x) dG$ se deduce de la convergencia de la integral $\int g(x) dG$, y la divergencia de la integral $\int g(x) dG$ se deduce de la divergencia de la integral $\int f(x) dG$.*

El teorema citado se demuestra por analogía con el teorema semejante para el caso unidimensional (véase el p. 33.3).

A título de ejemplos y patrones para la comparación con otras integrales consideraremos las siguientes

$$\int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1} \dots \int \frac{dx_1 \dots dx_n}{(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2})^\alpha}, \quad (48.7)$$

^{*)} S. D. Poisson (1781—1840), matemático y físico francés.

$$G_k = \{x = (\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) : 1 + \frac{1}{k} < \rho < k\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Pasemos a las coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \int_{G_k} \dots \int \frac{dx_1 \dots dx_n}{(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2})^\alpha} &= \int_{1 + \frac{1}{k}}^k \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dots \\ &\dots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^{n-1-\alpha} \Phi(\varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) d\rho d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1} = c \int_{1 + \frac{1}{k}}^k \rho^{n-1-\alpha} d\rho. \end{aligned}$$

De este modo, el problema de convergencia de la integral (48.7) se ha reducido a la convergencia de la integral $\int_1^\infty \rho^{n-1-\alpha} d\rho$, la cual, como se sabe (véase el p. 33.3) converge cuando $n - 1 - \alpha < -1$, es decir, cuando $\alpha > n$, y diverge para $\alpha \leq n$. Así pues, queda demostrado el lema.

Lema 1. *La integral (48.7) converge, si α es superior a la dimensión del espacio y diverge en el caso contrario.*

Consideraremos ahora la integral (48.8). Al poner

$$G_k = \left\{x = (\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) : \frac{1}{k} < \rho < 1 - \frac{1}{k}\right\}, \quad k = 3, 4, \dots,$$

obtendremos

$$\begin{aligned} \int_{G_k} \dots \int \frac{dx_1 \dots dx_n}{(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2})^\alpha} &= \int_{\frac{1}{k}}^{1 - \frac{1}{k}} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \dots \\ &\dots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^{n-1-\alpha} \Phi(\varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) d\rho d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1} = c \int_{\frac{1}{k}}^{1 - \frac{1}{k}} \rho^{n-1-\alpha} d\rho. \end{aligned}$$

De este modo, el problema de convergencia de la integral (48.8) se ha reducido a la convergencia de la integral $\int_0^1 \rho^{n-1-\alpha} d\rho$. Esta integral, como se sabe, converge, si $n - 1 - \alpha > -1$, es decir, si $\alpha < n$, y diverge en el caso contrario. El resultado obtenido enunciemos nuevamente en forma de un lema.

Lema 2. *La integral (48.8) converge, si α es inferior a la dimensión del espacio y diverge en el caso contrario.*

Al igual que en el caso unidimensional (véase el p. 33.3), sirviéndonos de las integrales (48.7) y (48.8), podemos enunciar los criterios de convergencia de las integrales múltiples impropias, sin embargo aquí no nos detendremos en esto detalladamente.

48.3. INTEGRALES IMPROPIAS DE LAS FUNCIONES QUE CAMBIAN DE SIGNO

Definición 3. La integral impropia $\int f dG$ se llama absolutamente convergente, si converge la integral $\int |f| dG$.

Para estudiar la convergencia absoluta de una integral de la función $f(x)$, nos serán útiles las funciones

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{si } f(x) < 0 \end{cases} \quad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{si } f(x) \leq 0, \\ 0, & \text{si } f(x) > 0 \end{cases}$$

Es fácil ver que

$$f_+ = \frac{|f| + f}{2}, \quad f_- = \frac{|f| - f}{2}, \quad (48.10)$$

$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)|, \quad 0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|, \quad (48.11)$$

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x). \quad (48.12)$$

De las fórmulas (48.10) se deduce que si la función f es integrable según Riemann en cierta región medible según Jorgan, las funciones f_+ y f_- serán también integrables según Riemann en dicha región; de la primera fórmula (48.12) proviene la afirmación recíproca. Por ello, de (48.10) — (48.12) se infiere que la integral $\int f dG$ converge absolutamente cuando, y sólo cuando, convergen las integrales

$$\int f_+ dG \quad \text{y} \quad \int f_- dG.$$

Al igual que en el caso de integrales impropias de la función de una sola variable, de la convergencia absoluta de una integral múltiple proviene la convergencia de la misma (siempre que, por supuesto, se consideran sólo unas funciones que son integrables en cada conjunto medible abierto, contenido junto con su clausura en un conjunto abierto por el cual se realiza la integración). Esto proviene en seguida de las fórmulas (48.11), la primera fórmula (48.12) y del teorema 2 del presente párrafo (véase el p. 48.2). No obstante, para las integrales múltiples propias es válido también el teorema recíproco.

Teorema 3. Si una integral múltiple $\int f dG$ ($n \geq 2$) converge, converge absolutamente.

Este teorema, algo sorprendente a primera vista, está relacionado con la diferencia en la definición de las integrales impropias de la función de una variable y de n variables ($n > 1$), citadas al principio de este párrafo *).

* Hemos de notar, sin embargo, que en el caso n -dimensional también podríamos obtener la misma relación entre la convergencia y la convergencia absoluta de una integral que existe en el caso unidimensional, siempre que se introduzca del modo correspondiente la defi-

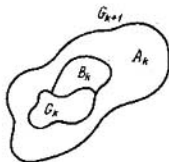


Fig. 211

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Supongamos que la integral $\int -fdG$ diverge absolutamente, es decir, para cierta sucesión (y, por lo tanto, para cualquier sucesión véase el teorema 1 en el p. 48.2) de conjuntos abiertos medibles según Jordan G_k , $k = 1, 2, \dots$, que agota de modo monótono el conjunto abierto G , se tiene $\lim_{k \rightarrow \infty} \int |f| dG_k = +\infty$. Sin restringir la generalidad de razonamientos (pasando, si es necesario, a una subsucesión) podemos suponer que

$$\int |f| dG_{k+1} > 3 \int |f| dG_k + 2k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (48.13)$$

Sea $A_k = G_{k+1} \setminus \bar{G}_k$; en este caso A_k es un conjunto medible abierto y, como $\bar{G}_k \subset G_{k+1}$, entonces (fig. 211) $G_{k+1} = A_k \cup \bar{G}_k$, y, por consiguiente,

$$\int |f| dG_{k+1} = \int |f| dA_k + \int |f| d\bar{G}_k.$$

De aquí, en vista de la desigualdad (48.13), $\int |f| dA_k > 2 \int |f| dG_k + 2k$. Haciendo uso de la segunda fórmula (48.12), obtendremos

$$\int f_+ dA_k + \int f_- dA_k > 2 \int |f| dG_k + 2k.$$

Sea, para concretar, $\int f_+ dA_k \geq \int f_- dA_k$; en este caso

$$2 \int f_+ dA_k \geq \int f_+ dA_k + \int f_- dA_k > 2 \int |f| dG_k + 2k,$$

y, por lo tanto,

$$\int f_+ dA_k > \int |f| dG_k + k. \quad (48.14)$$

Nuestro objetivo es obtener una desigualdad del tipo semejante no para la función f_+ , sino para la función f . Con este fin parece que podríamos omitir simplemente todos los puntos, donde la función f_+ se anula; entonces en el conjunto que

nición de la integral n -múltiple impropia. Por ejemplo, en el caso de las integrales extendidas a todo el espacio, resulta suficiente para ello que en la definición de la integral a título de elementos de la sucesión, que agota de modo monótono un conjunto, se tomen sólo las bolas n -dimensionales con centro en el origen de coordenadas. Por otra parte, aplicando a una integral unidimensional la definición de integral impropia citada en el p. 48.1 y entendiendo la integral unidimensional de Riemann en el sentido del §. 44, el teorema 3 y su demostración tienen también para $n = 1$.

queda tendríamos $f = f_+$. No obstante, el conjunto obtenido puede, en el caso general, resultar no medible, razón por la cual recurriremos al rodeo.

De la desigualdad (48.14) proviene que realizada cualquier partición suficientemente menuda $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i_0}$ del conjunto A_k (véase el p. 44.3), para cualquier suma integral de Riemann tenemos

$$\sum_{i=1}^{i_0} f_+(\xi_i) \mu X_i > \int |f| dG_k + k, \quad \xi_i \in X_i, \quad i = 1, 2, \dots, i_0.$$

Eljamos la partición mencionada τ del conjunto medible abierto A_k de una manera tal que todos los elementos X_i de dicha partición sean también conjuntos abiertos medibles según Jordan, lo que es siempre posible (véase el p. 44.4). Designemos con X_i^* aquellos conjuntos $X_i \in \tau$, para los cuales $f_+(\xi) > 0$ en todos los puntos $\xi \in X_i$; en este caso, al elegir $\xi_i \in X_i \neq X_i^*$ de tal modo que sea $f(\xi_i) = 0$, obtendremos

$$\sum_i' f_+(\xi_i) \mu X_i^* > \int |f| dG_k + k, \quad (48.15)$$

donde (como también en lo sucesivo) la "virgulilla" de la suma significa que la sumación se extiende sólo a aquellos índices i , para los cuales $X_i = X_i^*$. Pongamos $B_k = \bigcup_i' X_i^*$ (véase fig. 211). Es obvio que B_k es un conjunto abierto medible

dispuesto dentro del conjunto A_k , y $\tau^* = \{X_i^*\}$ constituye su partición. En la clausura de este conjunto $f_+ > 0$, y, por consiguiente, $f_+ = f$. De la desigualdad (48.15) se deduce que para la suma inferior de Darboux s_{τ^*} de la función f en el conjunto B_k se verifica la desigualdad $s_{\tau^*} \geq \int f dG_k + k$. De aquí se desprende, evidentemente, que

$$\int f dB_k \geq \int |f| dG_k + k. \quad (48.16)$$

Observemos que $f \geq -|f|$, y, por ende,

$$\int f dG_k \geq - \int |f| dG_k. \quad (48.17)$$

Al sumar las desigualdades (48.16) y (48.17), obtendremos:

$$\int f dB_k + \int f dG_k \geq k. \quad (48.18)$$

Sea $D_k = B_k \cup G_k$, $k = 1, 2, \dots$. Es evidente que D_k es un conjunto abierto medible y

$$G_k \subset D_k \subset G_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (48.19)$$

En vista de que los conjuntos B_k y G_k no se intersecan (puesto que no se intersecan los conjuntos A_k y G_k), de (48.18) tenemos

$$\int f dD_k \geq k,$$

de donde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f dD_k = +\infty. \quad (48.20)$$

De la inclusión (48.19) se infiere que los conjuntos D_k , $k = 1, 2, \dots$, forman una sucesión de conjuntos abiertos medibles, que agota de modo monótono el conjunto abierto G , pues tal era la sucesión dada G_k , $k = 1, 2, \dots$, por lo cual la igualdad (48.20) significa que la integral $\int f dG$ diverge. \square

Así pues, para las integrales múltiples, la convergencia de la integral impropia $\int f dG$ es equivalente a la convergencia absoluta de ésta. \ast

Ejercicio 2. Al sustituir en la definición de la integral múltiple impropia los conjuntos abiertos en todos los puntos por unas regiones (en particular, considerando solamente las sucesiones, compuestas sólo de las regiones medibles, que agotan de modo monótono la región dada) muéstrase que aún para tal definición "más estrecha" de la integral múltiple impropia queda en vigor el teorema 3.

§ 49. ALGUNAS APLICACIONES GEOMÉTRICAS Y FÍSICAS DE LAS INTEGRALES MÚLTIPLES

49.1. CÁLCULO DE ÁREAS Y DE VOLÚMENES

Sea X un conjunto medible en R^n . Como se sabe (véase el p. 44.6):

$$\mu X = \int dX. \quad (49.1)$$

De este modo, con ayuda de la integral n -múltiple podemos calcular la medida de los conjuntos medibles en un espacio n -dimensional (un área en el espacio bidimensional, un volumen, en el espacio tridimensional). Si la integral n -múltiple (49.1) puede reducirse a la reiterada (véase § 45), el cálculo de la medida del conjunto medible X de un espacio n -dimensional se reducirá al cálculo de una integral $(n-1)$ -múltiple.

Sea, por ejemplo, D un conjunto abierto medible en el espacio $(n-1)$ -dimensional $R_{x_1}^{n-1}, \dots, x_{n-1}$, siendo $x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$ una función no negativa definida y continua en la clausura \bar{D} del conjunto D , y

$$G = \{x = (x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in D, \quad 0 < x_n < f(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

(de este modo, G representa un análogo n -dimensional del trapecio plano curvilíneo examinado en el p. 32.1). En este caso

$$\mu G = \int dG = \int dD \int_0^{f(x_1, \dots, x_{n-1})} dx_n = \int f(x_1, \dots, x_{n-1}) dD,$$

es decir,

$$\mu G = \int_D \dots \int_D f(x_1, \dots, x_{n-1}) dx_1 \dots dx_{n-1}.$$

La medida de los conjuntos abiertos del espacio R^n , $n \geq 2$, arbitrarios (no forzadamente medibles según Jordan) y, en particular, no acotados, si ella se entiende en el sentido de la definición del p. 31.1 y 31.2, es decir, como una medida inferior de

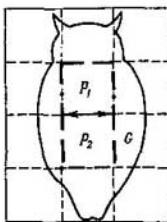


Fig. 212

Jordan, puede ser calculada mediante las integrales impropias. En efecto, sea G un conjunto abierto arbitrario en R^n y sea G_k , $k = 1, 2, \dots$, una sucesión de conjuntos abiertos medibles que agota de modo monótono el conjunto G (véase el p. 48.1). Entonces, como se sabe, (véase el p. 31.2), $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu G_k = \mu G$. Mas, en virtud de

$$(49.1), \mu G_k = \int dG_k, \text{ por lo cual } \mu G = \lim_{k \rightarrow \infty} \int dG_k.$$

Según la definición de la integral múltiple impropia, $\lim_{k \rightarrow \infty} \int dG_k = \int dG$.

De este modo, $\mu G = \int f dG$, donde la integral en el segundo miembro se entiende, en el caso general (a saber, si a ciencia cierta G no es una región medible) como impropia.

Queda sólo mostrar que para cualquier conjunto abierto G existe siempre una sucesión de conjuntos medibles G_k , $k = 1, 2, \dots$, que agotan de modo monótono el conjunto dado G . Demostremoslo.

Consideraremos la sucesión T_k , $k = 1, 2, \dots$, de particiones del espacio R^n en cubos (véase el p. 44.1) y designemos mediante Q_k un cubo abierto n -dimensional, determinado de la manera siguiente.

$$Q_k = \{(x_1, \dots, x_n) : |x_i| < \kappa, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

El número de los cubos de rango dado k (véase el p. 44.1), contenidos en Q_k , y, por consiguiente, con la mayor razón, en la intersección $G \cap Q_k$, es finito. Designemos estos cubos cerrados P_1, \dots, P_{j_k} :

$$P_j \in T_k; P_j \subset G \cap Q_k, \quad j = 1, 2, \dots, j_k.$$

Con G_k se designará el conjunto de puntos interiores del conjunto $\bigcup_{j=1}^{j_k} P_j$. Por

ejemplo, en el caso que se expone en la fig. 212, el conjunto G_k se compone de los puntos interiores de dos cuadrados, P_1 y P_2 , y un intervalo que se obtiene extrayendo los vértices de estos cuadrados de su arista común.

Precisamente los conjuntos G_k , $k = 1, 2, \dots$, son conjuntos abiertos medibles que forman la sucesión que agota de modo monótono el conjunto abierto dado G .

Recordemos que para calcular los volúmenes de los cuerpos resulta, a menudo, cómodo el método de secciones: véase la fórmula (45.23).

Ejercicio 1. Demuéstrase que la sucesión construida de conjuntos G_k , $k = 1, 2, \dots$, forma realmente una sucesión de conjuntos medibles que agota de modo monótono el conjunto dado G .

49.2. APLICACIONES FÍSICAS DE LAS INTEGRALES MÚLTIPLES

Con ayuda de las integrales múltiples se pueden calcular diferentes magnitudes físicas: masa y carga de un cuerpo, centro de gravedad, momento de inercia, flujo de líquido, potencial de un cuerpo, etc.

Hallemos, como un ejemplo, el centro de gravedad de una figura plana. Supongamos que en una cierta región cuadrable G está distribuida cierta masa cuya densidad superficial $\rho(x, y)$ es, en el caso general, variable, es decir, en la clausura \bar{G} de la región G está definida una función continua y no negativa $\rho(x, y)$. La región G con la masa distribuida en ella se llamará *figura S* , y la magnitud

$$M = \iint_G \rho(x, y) dx dy \quad (49.2)$$

la *masa* de dicha figura. Si $\rho(x, y)$ no es cero idéntico, $M > 0$.

Determinemos y hallemos el centro de gravedad de la figura S . Sea $\tau = \{G_i\}$, $i = 1, 2, \dots, k$, una partición de la región G (véase el p. 44.3). Se denominará figura S_i un conjunto G_i con la masa distribuida en él de densidad $\rho(x, y)$, $(x, y) \in G_i$. Elijamos para cada i el punto correspondiente $(\xi_i, \eta_i) \in \bar{G}_i$. La magnitud $m_i = \rho(\xi_i, \eta_i) \mu G_i$ se llamará valor aproximado de la masa de la figura S_i (tal denominación es natural según (49.2)). Entre tanto, las magnitudes $m_i \xi_i$ y $m_i \eta_i$ se denominarán valores aproximados de los momentos estáticos de la figura S_i , $i = 1, 2, \dots, k$, respecto de los ejes coordenados Oy y Ox , respectivamente (es natural llamarlas así, porque las magnitudes m y $m x$ (véase el p. 32.6) llevan el nombre de momentos estáticos de un punto material de masa m con coordenadas (x, y) respecto de los ejes Ox y Oy). Por fin, las magnitudes

$$\begin{aligned} S_x(\tau) &= \sum_{i=1}^k \eta_i m_i = \sum_{i=1}^k \eta_i \rho(\xi_i, \eta_i) \mu G_i, \\ S_y(\tau) &= \sum_{i=1}^k \xi_i m_i = \sum_{i=1}^k \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i) \mu G_i, \end{aligned} \quad (49.3)$$

se llamarán τ -momentos aproximados de la figura S con respecto a los ejes Ox y Oy , mientras que sus límites, para $\delta_\tau \rightarrow 0$,

$$\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} S_x(\tau) = S_x, \quad \lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} S_y(\tau) = S_y,$$

momentos estáticos de la figura S respecto de los ejes Ox y Oy . Bajo las suposiciones asumidas, estos límites existen. Efectivamente, de las fórmulas (49.3) se ve que $S_x(\tau)$ y $S_y(\tau)$ son las sumas integrales de Riemann para las funciones $\rho(x, y)$ y

$x\rho(x, y)$ y por esta razón

$$S_x = \iint_G y\rho(x, y)dxdy, \quad S_y = \iint_G x\rho(x, y)dxdy. \quad (49.4)$$

Definición 1. El punto (x_0, y_0) se denomina centro de gravedad (centro de masa, centro de inercia) de la figura S , si los momentos estáticos respecto de los ejes de coordenadas del punto material de masa M , que equivale a la masa de toda la figura S y que se encuentra en el punto (x_0, y_0) , son iguales a los momentos estáticos correspondientes de la figura S , es decir, si

$$Mx_0 = S_y, \quad My_0 = S_x.$$

De las fórmulas (49.2) y (49.3) obtenemos

$$x_0 = \frac{\iint_G x\rho(x, y)dxdy}{\iint_G \rho(x, y)dxdy}, \quad y_0 = \frac{\iint_G y\rho(x, y)dxdy}{\iint_G \rho(x, y)dxdy}.$$

Ejercicio 2. Demuéstrese que el centro de gravedad de una figura no depende de cómo se escoge el sistema de coordenadas.

A título de ejemplo consideraremos un "trapecio curvilíneo" G engendrado por las gráficas de las funciones continuas no negativas $f(x)$ y $g(x)$, $0 \leq g(x) \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$:

$$G = \{(x, y) : a < x < b, \quad g(x) < y < f(x)\}.$$

Sea $\rho(x, y) = 1$. Dado que $\iint_G dxdy = \mu G$, se tiene

$$x_0 = \frac{1}{\mu G} \iint_G x dxdy = \frac{1}{\mu G} \int_a^b x dx \int_{g(x)}^{f(x)} dy = \frac{1}{\mu G} \int_a^b [f(x) - g(x)] x dx,$$

$$y_0 = \frac{1}{\mu G} \iint_G y dxdy = \frac{1}{\mu G} \int_a^b dx \int_{g(x)}^{f(x)} y dy = \frac{1}{2\mu G} \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx;$$

de aquí

$$2\pi y_0 \mu G = \pi \int_a^b f^2(x) dx - \pi \int_a^b g^2(x) dx.$$

Aquí en el segundo miembro interviene el volumen de un cuerpo obtenido por revolución del trapecio curvilíneo G en torno al eje de x , es decir, hemos llegado al *segundo teorema de Guldin*.

Teorema (de Guldin). El volumen de un cuerpo de revolución de una figura plana alrededor de un eje que no la corta es igual al producto del área de esta figura por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de gravedad de la misma.

Ejemplo. Sirviéndose del segundo teorema de Guldin, calcúlese el volumen μQ del toro Q , obtenido por revolución del círculo $(x-a)^2 + y^2 \leq r^2$, $0 < r \leq a$, alrededor del eje Oy :

$$\mu Q = 2\pi a \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 a r^2.$$

Ejercicios. Hállese la masa de una figura plana limitada por las líneas:

3. $y^2 = 2x$, $x + y = 4$, $y \geq 1$; $\rho(x, y) = x + y$.

4. $y = 2x$, $y = -2$, $y = 4x - 2$; $\rho(x, y) = 2|x| + |y|$.

Hállense los momentos estáticos respecto de los ejes de coordenadas de la figura plana homogénea ($\rho = \rho_0 = \text{const}$), limitada por las líneas dadas:

5. $y^2 = 4x$, $x + y = 3$, $x = 0$.

6. $y = x^3$, $x + y = 2$, $x = 0$.

Hállense las coordenadas del centro de masas de una figura plana limitada por las líneas indicadas:

7. $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$; $\rho = \rho_0 = \text{const}$.

8. $y^2 = 4x$, $y = 2$, $x = 0$; $\rho(x, y) = x$.

9. $r = \sqrt{2}$, $r = 2 \sin \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$, $r \geq \sqrt{2}$), $\rho = \rho_0 = \text{const}$ (r, φ son las coordenadas polares).

10. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $y = 0$ ($0 \leq t \leq \pi$), $\rho = \rho_0 = \text{const}$.

§ 50. ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE SUPERFICIES

50.1. CONCEPTO DE SUPERFICIE

Sea dado en el espacio R^3 un sistema fijo de coordenadas rectangulares cartesianas x, y, z . Las coordenadas cartesianas en los planos, donde se disponen las regiones que se aplican, se designarán con las letras u, v ; las propias regiones, con la letra D y las aplicaciones de éstas que han de ser examinadas, con letras f, r, ρ (quizás, acompañadas de tales o cuales índices). Como hasta ahora, con \bar{D} se denotará la clausura de la región D (recordemos que \bar{D} se denomina región cerrada) y mediante ∂D , la frontera de D (véase el p. 18.2). Para las imágenes de los puntos $M = (u, v) \in \bar{D}$ se emplearán, en las aplicaciones mencionadas, tanto la inscripción del tipo $f(M)$, como la del tipo $f(u, v)$.

Se denomina *superficie continua* S todo conjunto de puntos del espacio tridimensional R^3 dado como una imagen continua de cierta región plana cerrada \bar{D} . La propia aplicación continua $r(u, v)$ de la región cerrada \bar{D} sobre el conjunto S se llama *representación de la superficie* (o, más detalladamente, *representación paramétrica*) y se escribe

$$S = \{r(u, v) : (u, v) \in \bar{D}\}.$$

Las variables u, v llevan el nombre de *coordenadas o parámetros* de la superficie continua S .

Para la superficie continua $S = \{r = r(u, v) : (u, v) \in \bar{D}\}$ el conjunto de puntos del espacio R^3 , dado como una imagen de la frontera ∂D de la región D en la aplicación $r(u, v)$, se denomina *borde de la superficie* S y se designa por ∂S :

$$\partial S = \{r(u, v) : (u, v) \in \partial D\}.$$

Por analogía con la definición de una curva podemos introducir el concepto de aplicaciones equivalentes, pero esta vez no de los segmentos, sino de las regiones planas cerradas en el espacio tridimensional R^3 y considerar, según la definición, que dos aplicaciones continuas equivalentes prefijan una misma superficie continua (véase el p. 50.2*). Las aplicaciones que realizan la equivalencia de dos representaciones de una misma superficie se denominan *transformaciones admisibles de los parámetros*.

Dada la representación $r(u, v)$, $(u, v) \in D$, de cierta superficie continua y fijados los valores de los parámetros u, v , resulta natural que mediante $r(u, v)$ se designe un punto de dicha superficie en el que se aplica, para la representación en consideración, el punto $(u, v) \in \bar{D}$.

Subrayemos que la representación de una superficie continua no es forzosamente la aplicación biunívoca. Un punto de la superficie continua $S = \{r(u, v); (u, v) \in \bar{D}\}$, en el que, realizándose la aplicación dada $r(u, v)$, se aplican por lo menos dos puntos diferentes de la región cerrada \bar{D} , se llama *punto múltiple* de dicha superficie.

De este modo, si el punto M de una superficie continua es el punto múltiple de la misma, entonces, dada la representación $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, de esta superficie, existen por lo menos dos puntos $(u_1, v_1) \in \bar{D}$ y $(u_2, v_2) \in \bar{D}$ tales que $r(u_1, v_1) = r(u_2, v_2) = M$.

La aplicación $r(u, v)$ puede ser definida en la forma coordenada:

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

y en la vectorial:

$$r = r(u, v),$$

donde $r(u, v)$ es el radio vector con extremo en el punto $r(u, v) \in R^3$.

En lo que sigue se estudiarán, ante todo, las propiedades diferenciales de las superficies de ciertas clases que se componen de superficies "suficientemente suaves", es decir, de aquellas superficies que son derivables (continuamente) un número suficiente de veces. Demos a conocer, por ejemplo, la noción de superficie continuamente derivable.

Se denomina *superficie continuamente derivable* un conjunto S del espacio R^3 dado como una imagen continuamente derivable de cierta región plana cerrada.

La propia aplicación continuamente derivable de la región cerrada \bar{D} sobre el conjunto S se llama, como hasta ahora, representación de esta superficie, con la particularidad de que se considera, según la definición, que dos aplicaciones continuamente derivables de las regiones planas cerradas determinan una misma superficie continuamente derivable, siempre que son equivalentes respecto de las aplicaciones continuamente derivables (véase el p. 50.2*).

Del modo análogo se determinan también otras clases especiales de las superficies continuas: las superficies dos veces continuamente derivables y, en general, las superficies n veces continuamente derivables.

Si en una de las representaciones de una superficie continua podemos escoger como parámetros dos coordenadas cualesquiera del espacio R^3 (por ejemplo, si existen una región cerrada D en el plano xy y una función $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}$,

que es la representación de la superficie continua en consideración), entonces tal representación se llama explícita.

Evidentemente, si una superficie continua admite la representación explícita, está privada de puntos múltiples.

En adelante una superficie continua se llamará simplemente superficie, siempre que esto no nos lleve a una equivocación.

Ejemplo. La superficie determinada por la representación

$$x = r \cos \psi \cos \varphi, \quad y = r \cos \psi \sin \varphi, \quad z = r \sin \psi,$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

es una esfera con centro en el origen de coordenadas y radio r , todo el meridiano de dicha esfera se compone de puntos múltiples.

En el punto que sigue daremos otra definición de la superficie que sera, en cierto sentido, más detallada. Es conveniente, obviamente, omitir dicho punto en el transcurso de la primera lectura y volver a leerlo cuando se sienta la necesidad intrínseca.

50.2*. APLICACIONES EQUIVALENTES. SUPERFICIES DADAS EN FORMA PARAMÉTRICA

Para definir estrictamente una superficie es preciso, ante todo, introducir la noción de aplicaciones equivalentes de las regiones planas cerradas.

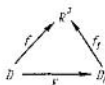
Definición 1. Una aplicación continua f de la clausura \bar{D} de cierta región plana D en el espacio tridimensional R^3 se denomina equivalente a la aplicación continua f_1 de la clausura \bar{D}_1 de la región plana D_1 en el mismo espacio R^3 , si existe tal aplicación homeomorfa (véase la definición 5 en el p. 41.4) F de la región cerrada \bar{D} sobre otra región cerrada \bar{D}_1 que, cuando se realiza dicha aplicación, los puntos interiores pasan a puntos interiores y los límites, también a puntos límites (es decir, D se aplica sobre D_1 y ∂D , sobre ∂D_1) y para todo punto $M \in D$ se verifica la igualdad

$$f(M) = f_1[F(M)], \quad (50.1)$$

es decir, $f = f_1 \circ F$.

En este caso F recibe el nombre de aplicación que realiza la equivalencia de las aplicaciones f y f_1 . Si f es equivalente a la aplicación f_1 , se escribe $f \sim f_1$.

La definición de las aplicaciones equivalentes puede ser expresada en forma esquemática mediante un diagrama, donde las flechas significan las aplicaciones en consideración y el resultado de las aplicaciones no depende de la elección del trayecto en el diagrama:



Es obvio que:

1) toda aplicación es equivalente a sí misma: $f \sim f$ (aquí, la aplicación que realiza la equivalencia es aplicación idéntica).

Es fácil convencerse de que

2) si $f \sim f_1$, entonces $f_1 \sim f$.

3) si $f \sim f_1$ y $f_1 \sim f_2$, entonces $f \sim f_2$.

Si f y f_1 son las aplicaciones continuas equivalentes de las regiones cerradas respectivas \bar{D} y \bar{D}_1 , entonces de (50.1) proviene que las imágenes de los conjuntos \bar{D} y \bar{D}_1 en las aplicaciones f y f_1 coinciden:

$$f(\bar{D}) = f_1(\bar{D}_1). \quad (50.2)$$

Diremos, además, que las condiciones impuestas sobre las aplicaciones equivalentes en la definición 1 son independientes. A saber, de lo que F es una aplicación homeomorfa de la región cerrada D sobre otra región cerrada \bar{D}_1 no se infiere que transforma los puntos interiores en interiores. Por ejemplo, si $D = \{(u, v) : u^2 + v^2 < 1\}$ es un círculo y $D_1 = \{(u, v) : 0 < u^2 + v^2 < 1\}$ es un círculo con centro "punzado", entonces la aplicación idéntica (que es, evidentemente, homeomorfa) de \bar{D} sobre \bar{D}_1 hace pasar el punto interior $(0, 0)$ de la región D al punto límite $(0, 0)$ de la región D_1 .

Demos ahora la definición de superficie.

Definición 2. *Cualquier conjunto de toda clase de aplicaciones continuas $r(u, v)$, equivalentes entre sí (véase la definición 1), de las regiones planas cerradas \bar{D} en el espacio tridimensional R^3 se denomina superficie S dada en forma paramétrica y se designa*

$$S = \{r(u, v) : (u, v) \in \bar{D}\}, \quad (50.3)$$

y cada una de las aplicaciones continuas equivalentes citadas $r(u, v)$ lleva el nombre de representación de la superficie S dada en forma paramétrica.

Si $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, es una representación de la superficie S dada en forma paramétrica y si $r(u, v)$ es el radio vector con extremo en el punto $r(u, v)$, entonces $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, se llama *representación vectorial* de la superficie citada S y se escribe

$$S = \{r(u, v), (u, v) \in \bar{D}\}. \quad (50.4)$$

Si $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, las funciones

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

llevan el nombre de *representación coordenada* de la superficie S dada en forma paramétrica y se escribe en este caso

$$S = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v); (u, v) \in \bar{D}\}. \quad (50.5)$$

Es evidente que una superficie dada en forma paramétrica se determina unívocamente por cada una de sus representaciones. Esto permite concebir (lo que a menudo resulta más conveniente) el segundo miembro de cada una de las igualdades (50.3), (50.4) y (50.5) no como una totalidad de todas las representaciones de tipo determinado de la superficie en consideración S , sino como su representación correspondiente bien determinada.

Definición 3. *Sean $r(M)$, $M \in \bar{D}$, y $\rho(M_1)$, $M_1 \in \bar{D}_1$, dos representaciones de cierta superficie S dada en forma paramétrica y sea F la aplicación de \bar{D} sobre \bar{D}_1 que realiza su equivalencia (véase la definición 1).*

Si $M_1 = F(M)$, $M \in \bar{D}$, $M_1 \in \bar{D}_1$ (el punto M , y , por ende, el punto M_1 también están fijos) y , por consiguiente, $r(M) = \rho(M_1) = P \in R^3$, entonces los pares (P, M) y (P, M_1) se llaman equivalentes y se escribe en este caso

$$(P, M) \sim (P, M_1).$$

Es fácil comprobar que

1) $(P, M) \sim (P, M)$;

2) si $(P, M) \sim (P, M_1)$, entonces $(P, M_1) \sim (P, M)$;

3) si $(P, M) \sim (P, M_1)$, y $(P, M_1) \sim (P, M_2)$, entonces $(P, M) \sim (P, M_2)$.

Si $(P, M) \sim (P, M_1)$ y M es un punto interior (límite) de la región cerrada \bar{D} , entonces, de acuerdo con la definición 1, M_1 será también un punto interior (límite) de la región cerrada \bar{D}_1 .

Definición 4. Sea S una superficie dada en forma paramétrica. Cualquier totalidad $\{(P, M)\}$, $M \in \bar{D}$, de todos los pares equivalentes entre sí (P, M) (el punto $P \in R^3$ está fijo) se denomina punto de la superficie dada S y el punto P , su portador.

Un punto $\{(P, M)\}$, $M \in D$, de la superficie S se llama interior (de contorno), si cada punto M es interior (de frontera) para la región cerrada correspondiente \bar{D} .

Todo punto $\{(P, M)\}$, $M \in \bar{D}$, de una superficie $S = \{r(M), M \in \bar{D}\}$, dada paramétricamente se determina unívocamente por cada par $(P, M) \in \{(P, M)\}$, y , como en este par $P = r(M)$, cualquier punto de la superficie S , definida en forma paramétrica, para cierta representación dada $r(M)$, $M \in \bar{D}$, de esta superficie, se determina unívocamente por el punto M , con la particularidad de que el punto $P = r(M)$ es el portador del punto considerado de la superficie. Por esta razón, para abreviar, los puntos de una superficie dada en forma paramétrica se designarán, por regla general, no mediante el símbolo $\{(P, M)\}$, sino simplemente $r(M)$, o bien, lo que es igual, $r(u, v)$, donde $M = (u, v)$. En virtud de lo expuesto, esta designación posee el significado unívoco.

Definición 5. Una totalidad de todos los portadores de todos los puntos de la superficie S dada en forma paramétrica se denomina portador de dicha superficie.

En vista de la condición (50.2), el portador de una superficie dada en forma paramétrica (el que representa, evidentemente, cierto conjunto de puntos en el espacio R^3) se determina unívocamente por cualquiera de sus representaciones.

Definición 6. El punto $P \in R^3$ que sirve de portador de dos puntos distintos de la superficie S dada paraméricamente se llama punto múltiple del portador de la superficie dada en forma paramétrica.

Volviendo a la definición de superficie, proporcionada en el p. 50.1, vemos que lo que se ha denominado en aquella circunstancia "superficie continua" se llama en términos nuevos "portador de una superficie dada en forma paramétrica". La tentativa de introducir la noción de "punto de la superficie" para las superficies provistas de puntos múltiples conduce en tal o cual forma a las definiciones 4 y 6. Recalquemos que la noción de superficie dada en forma paramétrica con puntos múltiples resulta muy cómoda para considerar toda una serie de problemas que se analizan en los párrafos que siguen.

En adelante, siempre que no surjan equivocaciones, la "superficie continua" (véase el p. 50.1) o bien, que es lo mismo, el "portador de una superficie dada para-

métricamente" (véase la definición 5), como también la "superficie dada paramétricamente" (véase la definición 2) se llamarán simplemente superficie.

Definamos ahora el concepto de una parte de la superficie.

Definición 7. Supongamos que S representa una superficie dada paramétricamente; $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, es cierta representación de dicha superficie; D' , una región contenida en D : $D' \subset D$. La superficie S' dada paramétricamente que se determina por la representación $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}'$, se denomina parte de la superficie S .

Como ya se ha indicado (véase el p. 50.1), el concepto de aplicaciones equivalentes de las regiones planas cerradas puede introducirse no sólo para las aplicaciones continuas, sino también para otras clases de aplicaciones, por ejemplo, para aquellas que son continuamente derivables. En el caso de las superficies dadas paramétricamente esto conduce a las superficies continuamente derivables. La definición de las últimas está basada sobre el concepto de aplicaciones equivalentes respecto de las transformaciones continuamente derivables.

Demos a conocer este concepto. Por función continuamente derivable en la clausura de cierta región se entenderá, como antes (véase el p. 39.3), aquella que tiene derivadas continuas en la propia región las cuales pueden ser prolongadas a la frontera de la misma.

Una aplicación de cierta región cerrada se denomina *continuamente derivable*, si toda función coordenada que determinada dicha aplicación (véase el p. 41.4), es continuamente derivable en la región cerrada que se considera. Las funciones prolongadas en estos casos se denotan mediante los mismos símbolos que se usan para designar funciones prolongables de partida.

Si cierta aplicación $u_1 = \varphi(u, v)$, $v_1 = \psi(u, v)$ es continuamente derivable en la clausura \bar{D} de la región D , entonces, en virtud del convenio adoptado, esto es testimonio de que, en particular, el jacobiano $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$ de esta aplicación es continuamente prolongable de la región D a su clausura \bar{D} y la prolongación del jacobiano, que se designa por el mismo símbolo $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$, se llamará también jacobiano.

Ante todo es necesario enunciar qué se entenderá por aplicaciones equivalentes continuamente derivables; con este fin introduzcamos el concepto de aplicaciones regulares.

Definición 8. Una aplicación homeomorfa F de la clausura \bar{D} de una región plana D sobre la clausura \bar{D}_1 de otra región plana D_1 que hace pasar los puntos interiores a los interiores y los puntos de frontera a los de frontera, lleva el nombre de aplicación regular de la región cerrada \bar{D} sobre otra región cerrada \bar{D}_1 , si tanto la propia aplicación F , como la aplicación F^{-1} , inversa de F , son continuamente derivables en las regiones cerradas \bar{D} y \bar{D}_1 , respectivamente.

Observemos que toda aplicación regular F de una región cerrada \bar{D} tiene en todos los puntos de D un jacobiano distinto de cero. En efecto, de acuerdo con la definición 8, en la aplicación F la imagen de cada punto interior es un punto interior. Por cuanto en estos puntos las aplicaciones directa y, correspondientemente, inversa son continuamente derivables, sus jacobianos no pueden reducirse a cero, pues el producto de éstos es igual a uno (véase el p. 41.7).

De aquí se deduce que el jacobiano de una aplicación regular F tampoco es nulo en la región cerrada \bar{D} . Efectivamente, en virtud de que los jacobianos de las aplicaciones, tanto directa, como inversa, son continuamente prolongables a las clausuras respectivas \bar{D} y $\bar{F(D)}$ de las regiones D y $F(D)$, el producto de dichos jacobianos es también igual a uno para todos los puntos de la región cerrada \bar{D} .

Ya nos encontramos con las aplicaciones regulares de regiones planas cerradas del tipo especial, por ejemplo, en el p. 46.1.

Definición 9. Supongamos que f y f_1 son las aplicaciones continuas de las clausuras \bar{D} y \bar{D}_1 de las regiones planas D y D_1 en el espacio R^3 y sean dichas aplicaciones continuamente derivables en las regiones cerradas \bar{D} y \bar{D}_1 . Las aplicaciones f y f_1 se llaman equivalentes respecto de las aplicaciones continuamente derivables, si existe tal aplicación regular F de la región cerrada \bar{D} sobre otra región cerrada \bar{D}_1 que para todo punto $M \in \bar{D}$ se cumple la condición (50.1).

Ahora podemos definir la superficie continuamente derivable.

Definición 10. Cualquier conjunto de aplicaciones $r(u, v)$ de las regiones planas cerradas \bar{D} en el espacio tridimensional R^3 , siendo dichas aplicaciones continuamente derivables y equivalentes respecto de las transformaciones continuamente derivables, lleva el nombre de superficie continuamente derivable S , dada en forma paramétrica, y cada una de las aplicaciones mencionadas $r(u, v)$ se denomina representación de esta superficie

$$S = \{r(u, v); (u, v) \in \bar{D}\}.$$

Subrayemos que si la superficie $S = \{r(u, v); (u, v) \in D\}$ es continuamente derivable, esto significa, en particular, que cualquier su representación vectorial $r = r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, tiene derivadas parciales r_u y r_v^* que son continuas en la región D y pueden ser continuamente prolongadas a la frontera de ésta. Como, de acuerdo con el convenio adoptado, las funciones prolongadas se designan mediante los mismos símbolos que las prolongables **, se puede considerar que las funciones r_u y r_v son continuas en la región cerrada \bar{D} .

De modo semejante podemos definir también otras clases de las superficies dadas paramétricamente, por ejemplo, las superficies dadas en forma paramétrica que

* Los conceptos de tal género como son, por ejemplo, continuidad, límite, derivabilidad se extienden de modo natural a las funciones vectoriales de varias variables. Así, la función $r(u, v)$, definida en la región G , se llama continua en el punto $(u_0, v_0) \in G$, si

$\lim_{(u,v) \rightarrow (u_0, v_0)} r(u, v) = r(u_0, v_0)$. La derivada $\frac{\partial r}{\partial u}(u_0, v_0)$ se determina por la igualdad

$$\frac{\partial r(u_0, v_0)}{\partial u} = \left. \frac{dr(u, v_0)}{du} \right|_{u=u_0}$$

** Con más precisión, este convenio se ha adoptado (véase el p. 39.3) para las funciones escalares y, por lo tanto, para las coordenadas de las funciones vectoriales, razón por la cual es natural adoptarlo para las mismas funciones vectoriales.

son dos veces continuamente derivables o, en general, n veces continuamente derivables, como también el concepto de su punto, portador y su parte.

Al resumir, podemos decir en definitiva que se llama *superficie de tal o cual clase, dada en forma paramétrica, cierta totalidad de aplicaciones* $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, *equivalentes entre sí en determinado sentido, llamadas representaciones de la citada totalidad.*

El concepto de equivalencia se determina en dependencia de la clase que se elige.

Definición 11. *Las transformaciones de los parámetros las cuales realizan el paso de una representación de la superficie a otra, equivalente a la primera, se denominan admisibles.*

De este modo, si $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, y $\rho(u_1, v_1)$, $(u_1, v_1) \in \bar{D}_1$, son dos representaciones de una misma superficie de cierta clase, dada paraméricamente, y la aplicación

$$\begin{aligned}u_1 &= \varphi(u, v), \\v_1 &= \psi(u, v)\end{aligned}$$

de la región cerrada \bar{D} sobre otra región cerrada \bar{D}_1 es la transformación admisible de los parámetros, entonces para todos los puntos $(u, v) \in \bar{D}$ se verifica la correlación (véase (50.1))

$$r(u, v) = \rho[\varphi(u, v), \psi(u, v)].$$

Una superficie dada en forma paramétrica se determina unívocamente, para la clase prefijada de transformaciones admisibles, por cualquiera de sus representaciones, razón por la cual con el fin de definir tal superficie basta fijar sólo una de sus representaciones.

50.3. SUPERFICIES DADAS IMPLÍCITAMENTE

Demos a conocer un enfoque más al concepto de superficie. Si $F(x, y, z)$ es una función continua en cierta región tridimensional, la totalidad de los puntos (x, y, z) tales que

$$F(x, y, z) = 0, \quad (50.6)$$

se denomina *superficie dada implícitamente*. Sin detenernos detalladamente en el análisis del enfoque mencionado al concepto de superficie, diremos sólo que en el caso cuando la función F satisfaga en cierto punto (x_0, y_0, z_0) las condiciones del teorema sobre funciones implícitas (véase el p. 41.1), una parte de la superficie (50.6) en cierto entorno del punto citado (es decir, la intersección de este entorno con la superficie dada) admite una representación explícita y podemos decir que en tales condiciones una superficie, dada implícitamente, se reduce localmente a la superficie que se determina mediante una representación explícita (véase el p. 50.1). Precisamente sólo con este tipo de superficies dadas implícitamente se chocará en lo que sigue, por lo cual no nos detendremos especialmente en la explicación de tales o cuales conceptos para las superficies dadas en forma implícita.

A título de ejemplo más sencillo de una superficie dada implícitamente indiquemos la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Los puntos cuyas coordenadas satisfacen esta ecuación forman la superficie de una bola de radio unidad, con centro en el origen de coordenadas.

En adelante se estudiarán, principalmente, sólo las superficies continuas, dadas mediante representaciones paramétricas y provistas, en el caso general, de puntos múltiples. Se denominarán, como ya se ha indicado, simplemente "superficies"; si el concepto de superficie debe entenderse en otro sentido, esto se especificará especialmente.

50.4. PLANO TANGENTE Y NORMAL A LA SUPERFICIE

Sea

$$S = \{r(u, v); (u, v) \in \bar{D}\} \quad (50.7)$$

una superficie continuamente derivable. Examinemos cierta representación vectorial cuya $r = r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$. Al igual que cualquiera de sus representaciones vectoriales, es una función vectorial continuamente derivable en la región plana cerrada \bar{D} .

Convenimos en considerar, para simplificar, que la intersección de cada recta $u = u_0$ o $v = v_0$ con la región cerrada \bar{D} consta de un segmento (que, quizás, se degenera en un punto) o es vacía. Supongamos, por ejemplo, que la intersección de \bar{D} con la recta $v = v_0$ es no vacía, entonces

$$r = r(u, v_0), \quad (u, v_0) \in \bar{D}$$

(v_0 es fijo) es la representación de cierta curva continuamente derivable que se llama *línea coordenada (u-línea)*. El vector

$$r_u = \frac{\partial r}{\partial u} = (x_u, y_u, z_u)$$

será su vector tangente. Análogamente se determinan otras líneas coordenadas (*v-líneas*) con ayuda de la representación

$$r = r(u_0, v), \quad (u_0, v) \in \bar{D}$$

(u_0 es fijo) y los vectores, tangentes a ellas,

$$r_v = \frac{\partial r}{\partial v} = (x_v, y_v, z_v).$$

Definición 12. Un punto $r(u, v)$ de la superficie (50.7), para el cual los vectores r_u y r_v no son colineales (linealmente independientes) se denomina no singular para la representación dada de esta superficie. En el caso contrario, es decir, cuando los vectores r_u y r_v son colineales en el punto dado, se denomina punto singular de la superficie para la representación dada de ésta.

Si un punto de la superficie no es singular, en él, en particular, $r_u \neq 0$, $r_v \neq 0$. Evidentemente, un punto de la superficie es no singular, para la representación dada de la misma, cuando, y sólo cuando, en este punto $r_u \times r_v \neq 0$.

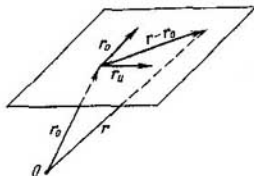


Fig. 213

Ejercicio 1. Demuéstrase que si $r(u_0, v_0)$ es un punto interior no singular de la superficie S , para la representación dada $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, es decir, para este punto $(u_0, v_0) \in D$ y $r_u \times r_v \neq 0$, entonces cierta parte de la superficie S , para la cual el punto $r(u_0, v_0)$ es también interior, cuenta con una representación explícita respecto de uno de los ejes de coordenadas.

Consideraremos una curva en la superficie (50.7). Supongamos que esta curva viene dada por las funciones continuamente derivables

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad (u(t), v(t)) \in D, \quad a \leq t \leq b,$$

es decir, por la representación

$$r = r[u(t), v(t)], \quad (u(t), v(t)) \in D, \quad a \leq t \leq b, \quad (50.8)$$

con la particularidad de que $u'^2(t) + v'^2(t) > 0$ en $[a, b]$.

Al derivar la igualdad (50.8), obtendremos

$$dr = r_u du + r_v dv, \quad (50.9)$$

donde $du = u'(t)dt$, $dv = v'(t)dt$. Si el punto de la superficie, en el que se considera la igualdad (50.9), no es singular, el vector dr es tangente a la curva (50.8). La igualdad (50.9) muestra que en el punto dado $r(u_0, v_0)$ de la superficie (50.7) la tangente a cualquier curva (50.8) en dicha superficie que pasa por el punto $r(u_0, v_0)$ se dispone en el plano de los vectores $r_u(u_0, v_0)$ y $r_v(u_0, v_0)$.

Definición 13. Un plano que contiene el punto $r(u_0, v_0)$ de la superficie (50.7) y en el que se disponen todas las tangentes a las curvas (50.8) que pasan por el punto citado, se denomina plano tangente a la superficie en el punto dado, llamado punto de tangencia.

Ejercicio 2. Demuéstrase que para todo vector v , dispuesto en el plano tangente a la superficie S en un punto no singular, existe en la superficie S una curva que pasa por el punto dado, y para la cual el vector v es una tangente.

Si el punto dado de la superficie (50.7) no es singular, en él siempre existe un plano tangente y, además, es único: a saber, en virtud de (50.9), de éste último sirve el plano que pasa por $r(u_0, v_0)$ siendo paralelo a los vectores $r_u(u_0, v_0)$ y $r_v(u_0, v_0)$. De aquí resulta fácil escribir su ecuación en la forma vectorial. Al designar con r_0 el radio vector del punto de tangencia y con r , el radio vector corriente de los puntos en el plano tangente, obtendremos (fig. 213):

$$(r - r_0)r_u r_v = 0$$

(en el primer miembro de la igualdad figura un producto mixto de los vectores mencionados).

Si $r = (x, y, z)$, $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $r_u = (x_u, y_u, z_u)$ y $r_v = (x_v, y_v, z_v)$, la ecuación del plano tangente en la forma coordenada se escribirá del modo siguiente:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0.$$

En el caso de que la superficie sea dada explícitamente

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad (50.10)$$

tendremos $u = x$, $v = y$, por lo cual

$$\begin{aligned} x_u &= 1, & y_u &= 0, & z_u &= f_x, \\ x_v &= 0, & y_v &= 1, & z_v &= f_y; \end{aligned} \quad (50.11)$$

por consiguiente, la ecuación del plano tangente en este caso tendrá por expresión

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = 0,$$

de donde

$$z - z_0 = (x - x_0)f_x + (y - y_0)f_y, \quad (50.12)$$

donde con f_x y f_y están designadas, para abreviar, las derivadas parciales $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) .

De esta fórmula se deduce que las dos definiciones del plano tangente para una superficie representada explícitamente en la forma (50.10), dadas en el presente punto y en el p. 20.5, son equivalentes. En efecto, ambas definiciones conducen a una misma ecuación (50.12).

Definición 14. Una recta que pasa por el punto de tangencia de una superficie con el plano tangente y que es perpendicular a este plano, se denomina recta normal a la superficie en el punto citado.

Su ecuación, en el caso general, tiene por expresión en un punto no singular de la superficie

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}.$$

En el caso de la representación explícita (50.10) estas ecuaciones asumen la forma

$$\frac{x - x_0}{f_x} = \frac{y - y_0}{f_y} = -(z - z_0). \quad (50.13)$$

Definición 15. *Todo vector no nulo, colineal con una recta normal, que pasa por el punto dado de una superficie, se denomina normal a dicha superficie en el punto citado.*

Como ejemplo de normal en un punto no singular de una superficie sirve el producto escalar

$$n = r_u \times r_v,$$

calculado en el punto mencionado.

De acuerdo con la definición aducida, en todo punto no singular (para la representación dada) $r(u, v)$ de la superficie en consideración existe, siendo fijados los valores de los parámetros u y v , una recta normal y dicha recta es, además, única. Se debe tener en cuenta que si el punto P de un espacio es un punto múltiple de la superficie, es decir, si existen por lo menos dos pares de parámetros (para la representación dada) (u_1, v_1) y (u_2, v_2) tales que $P = r(u_1, v_2) = r(u_2, v_2)$, entonces puede, naturalmente, ocurrir que a estos pares de parámetros les correspondan diferentes rectas normales, a consecuencia de lo cual en el punto citado P la recta normal no será única.

Para una superficie dada implícitamente por la ecuación

$$F(x, y, z) = 0,$$

donde $F(x, y, z)$ es una función continuamente derivable en el entorno del punto (x_0, y_0, z_0) , $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, y en este punto $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0$, la ecuación del plano tangente en el punto (x_0, y_0, z_0) tiene por expresión

$$(x - x_0)F_x + (y - y_0)F_y + (z - z_0)F_z = 0,$$

donde F_x, F_y y F_z representan los valores de las derivadas parciales correspondientes tomadas en el punto (x_0, y_0, z_0) .

Al recordar que un vector de coordenadas F_x, F_y, F_z , es decir, el vector $\nabla F = (F_x, F_y, F_z)$ lleva el nombre de *gradiente de la función F* (véase el p. 20.6), vemos que el gradiente de la función en el punto dado de la superficie $F(x, y, z) = 0$ es perpendicular al plano tangente en este punto, es decir, es colineal con la recta normal.

Por ello la ecuación de la recta normal a la superficie tiene por expresión

$$\frac{x - x_0}{F_x} = \frac{y - y_0}{F_y} = \frac{z - z_0}{F_z}.$$

Todas estas fórmulas se infieren inmediatamente de (50.12) y (50.13). En efecto, si, por ejemplo, $F_z \neq 0$ y $z = f(x, y)$ es una función definida por la ecuación

$F = 0$ en el entorno del punto (x_0, y_0, z_0) , entonces basta notar que $f_x = -\frac{F_x}{F_z}$,

$f_y = -\frac{F_y}{F_z}$ (véase el p. 41.1).

Si la función dada $F(x, y, z)$ es continuamente derivable en la región G , para cualquier punto de una superficie dada implícitamente por la ecuación $F(x, y, z) = c$ (c es una constante), obtendremos la ecuación del plano tangente y de la recta normal de la misma forma que en el caso $F = 0$, siempre que en dicho punto $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0$. Un conjunto de los puntos $(x, y, z) \in G$, para los cuales $F = c$, se denomina, como ya sabemos, superficie de nivel de la función F (véase el p. 19.1).

De este modo, el gradiente $\nabla F = (F_x, F_y, F_z)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) de la superficie de nivel $F(x, y, z) = c$ está orientado a lo largo de la recta normal a dicha superficie en el punto (x_0, y_0, z_0) . En otras palabras, el gradiente de la función es ortogonal a la superficie de nivel (es decir, es perpendicular al plano tangente a la superficie de nivel en el punto que se considera).

Hemos demostrado la existencia del plano tangente en un punto no singular perteneciente a una superficie continuamente derivable cuando esté fijada la representación de la misma. Surge una cuestión: ¿qué será, si pasamos a otra representación de esta superficie? Ante todo, ¿seguirá siendo no singular un punto no singular, y, un punto singular, singular? Resulta que sí.

Demostremoslo. Sean $r(u, v), (u, v) \in \bar{D}, y \rho(u_1, v_1), (u_1, v_1) \in \bar{D}_1$, dos representaciones de una misma superficie continuamente derivable. Por cuanto el paso de cualquier representación de una superficie continuamente derivable a otra representación suya se realiza por medio de la aplicación regular, existe tal aplicación regular

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi(u, v), \\ v_1 &= \psi(u, v) \end{aligned} \quad (50.14)$$

de la región cerrada \bar{D} sobre otra región cerrada \bar{D}_1 que para todos los puntos $(u, v) \in \bar{D}$ resulta ser válida la igualdad

$$r(u, v) = \rho[\varphi(u, v), \psi(u, v)]. \quad (50.15)$$

En este caso según lo demostrado más arriba, el jacobiano de la aplicación (50.14) nunca se reduce a cero en la región cerrada \bar{D} :

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u, v) \in \bar{D}.$$

Al derivar la identidad (50.15), obtendremos

$$\begin{aligned} r_u &= \varphi_u \rho_{u_1} + \psi_u \rho_{v_1}, \\ r_v &= \varphi_v \rho_{u_1} + \psi_v \rho_{v_1}. \end{aligned} \quad (50.16)$$

Por consiguiente, un par de vectores ρ_{u_1}, ρ_{v_1} se transforma en otro par de vectores r_u, r_v con ayuda de una matriz regular

$$\begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix}.$$

Por ello, para el punto dado (u, v) los vectores r_u, r_v serán linealmente independien-

tes, si, y sólo si, son linealmente independientes los vectores ρ_{u_1}, ρ_{v_1} en el punto (u_1, v_1) obtenido del punto (u, v) con ayuda de la aplicación (50.14), con la particularidad de que en el caso de su independencia lineal el plano de los vectores r_u y r_v coincide con el de los vectores ρ_{u_1} y ρ_{v_1} .

Así pues, un punto (para la representación dada) no singular (singular) de una superficie continuamente derivable será también no singular (singular) para otra representación de la superficie citada, y un plano, tangente a la superficie en un punto no singular para una representación de la superficie, será tangente también para otra representación de la misma.

Definición 16. Una superficie continuamente derivable privada de puntos singulares, se llama superficie suave.

De acuerdo con lo demostrado más arriba, para comprobar que la superficie dada es suave, basta convencerse de que la misma cuenta con una representación continuamente derivable y para esta última no hay puntos singulares.

Conviene fijar la atención en que las funciones vectoriales r_u y r_v de la superficie suave $S = \{r(u, v), (u, v) \in \bar{D}\}$ no sólo son continuas en la clausura de la región D , sino, de conformidad con la definición, no son colineales en esta clausura \bar{D} . En otras palabras, para la superficie suave (50.7) en todo punto de la región cerrada \bar{D} se cumple la desigualdad

$$r_u \times r_v \neq 0.$$

OBSERVACIÓN. De las fórmulas (50.16) proviene que

$$\begin{aligned} r_u \times r_v &= (\varphi_u \rho_{u_1} + \psi_u \rho_{v_1}) \times (\varphi_v \rho_{u_1} + \psi_v \rho_{v_1}) = \\ &= \varphi_u \psi_v (\rho_{u_1} \times \rho_{v_1}) + \psi_u \varphi_v (\rho_{v_1} \times \rho_{u_1}) = \\ &= \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} (\rho_{u_1} \times \rho_{v_1}). \end{aligned}$$

Por cuanto, para las transformaciones admisibles de los parámetros (50.14), el jacobiano $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$ nunca se reduce a cero en \bar{D} , de la fórmula obtenida se deduce

que los productos vectoriales $r_u \times r_v$ y $\rho_{u_1} \times \rho_{v_1}$ en el punto dado de la superficie pueden reducirse a cero, si sólo se reducen simultáneamente. Pero, se ha notado que la condición necesaria y suficiente para que el punto dado de la superficie, para la representación dada de la superficie $r(u, v)$, sea no singular es que el producto vectorial $r_u \times r_v$ en dicho punto sea distinto de cero. De este modo hemos demostrado una vez más que un punto no singular (singular) de la superficie será el mismo tanto para una representación de la superficie, como para la otra.

Ejercicios. 3. Fórmense las ecuaciones de un plano tangente y de una normal a la superficie $x = 2u - v, y = u^2 + v^2, z = u^3 - v^3$ en el punto $M(3; 5; 7)$.

4. Trácese a la superficie $xyz = 1$ un plano tangente que sea paralelo al plano $x + y + z - a = 0$ ($a = \text{const.}$).

5. Demuéstrase que todos los planos tangentes de la superficie $z = x f\left(\frac{y}{x}\right)$ (f es una función derivable arbitraria) pasan por el origen de coordenadas.

6. Demuéstrase, que todos los planos tangentes, trazados a la superficie $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = au + f(v)$ ($a = \text{const}$, f es una función derivable arbitraria) en todo punto de su línea coordenada $v = c$ ($c = \text{const}$), pasan a través de la recta fija.

50.5. PRIMERA FORMA CUADRÁTICA DE UNA SUPERFICIE

Fijemos una representación $r = r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, de la superficie suave dada y analicemos un plano tangente a la superficie en alguno de sus puntos. Según hemos visto, los vectores r_u y r_v forman en dicho plano una base. Los vectores, dispuestos en el plano tangente, los designaremos por el símbolo dr , y sus coordenadas respecto de la base r_u y r_v , por du y dv ^{*)}. De este modo,

$$dr = r_u du + r_v dv.$$

Halleemos el cuadrado de la longitud de un vector, dispuesto en el plano tangente, expresándolo en términos de las coordenadas de la base natural r_u y r_v (en el álgebra lineal esta expresión se denomina, comúnmente, *forma métrica principal* del espacio en consideración, en el caso dado, de un plano)

$$|dr|^2 = (r_u du + r_v dv)^2 = r_u^2 du^2 + 2r_u r_v du dv + r_v^2 dv^2.$$

Introduzcamos las designaciones

$$E = r_u^2, \quad F = r_u r_v, \quad G = r_v^2; \quad (50.17)$$

entonces

$$|dr|^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2. \quad (50.18)$$

Definición 17. Una forma cuadrática $E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ se denomina *primera forma cuadrática de la superficie* ^{**)}.

Veamos cómo varía pasando a la otra representación de la superficie (véanse las fórmulas (50.14)). Como se sabe (véase (50.16)) en este caso las bases en el plano que se considera se transforman con ayuda de una matriz

$$\begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix}.$$

Por consiguiente, las coordenadas de los vectores se transforman con ayuda de una matriz transpuesta, es decir, de la matriz de Jacobi

$$J = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}.$$

^{*)} Esta designación es bien natural, pues si un vector en el plano tangente es tangente a cierta curva (50.8) en la superficie, entonces, al elegir adecuadamente el parámetro, el vector dr será una diferencial del vector (50.8) y, por lo tanto, para él se verificará la igualdad (50.9):

^{**)} El hecho de que la forma cuadrática en consideración se denomina primera se debe a que existen también otras formas cuadráticas relacionadas con la superficie. El estudio de éstas sale de los márgenes de este libro.

Al designar mediante A la matriz de la primera forma cuadrática (50.18) para la representación de la superficie $r = r(u, v)$, y mediante A_1 , para la representación $\rho = \rho(u_1, v_1)$, es decir,

$$A = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}, \quad E = r_u^2, \quad F = r_u r_v, \quad G = r_v^2,$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix}, \quad E_1 = \rho_{u_1}^2, \quad F_1 = \rho_{u_1} \rho_{v_1}, \quad G_1 = \rho_{v_1}^2,$$

entonces, según se sabe por el curso del álgebra lineal, para la primera forma cuadrática de la superficie, al igual que, en general, para cualquier forma cuadrática,

$$A = J^* A_1 J,$$

donde con J^* está designada la matriz transpuesta respecto de la matriz de Jacobi J .

De aquí, para los determinantes correspondientes

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}^2,$$

o bien

$$EG - F^2 = (E_1 G_1 - F_1^2) \left| \frac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(u, v)} \right|^2. \quad (50.19)$$

Ha de notarse que en virtud de la propia definición, la primera forma cuadrática es definida positiva (en efecto, si $du^2 + dv^2 > 0$, es decir, si $dr \neq 0$, entonces $|dr|^2 > 0$) y por esta razón su discriminante es positivo: $EG - F^2 > 0$. Estando ausentes los puntos singulares, se verifican las desigualdades $r_u \neq 0$, $r_v \neq 0$, por lo cual, de la definición de coeficientes E y G (50.17), proviene inmediatamente que $E > 0$ y $G > 0$.

Si se conoce la primera forma cuadrática de una superficie, podemos resolver (sin disponer de la ecuación de la superficie y sin conocer las formas de la misma), toda una serie de problemas concernientes a ella, por ejemplo, hallar las longitudes de las curvas dispuestas en la superficie, como también los ángulos entre ellas, calcular el área de las partes de la superficie. La variedad de todas las propiedades de la superficie que pueden establecerse, partiendo sólo de la primera forma cuadrática, se denomina *geometría interior* de la superficie. Pasemos precisamente a la consideración de los problemas similares.

Ejercicios. 7. ¿Cuál de las siguientes formas cuadráticas puede servir de primera forma cuadrática de cierta superficie: a) $du^2 + 3dudv + dv^2$; b) $du^2 + 6dudv + 9dv^2$; c) $du^2 - 6dudv + 13dv^2$; d) $du^2 + 2dudv - dv^2$.

8. Hállese la primera forma cuadrática de un *helicoides* (superficie helicoidal) $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av + f(u)$ ($a = \text{const}$, f es una función derivable arbitraria).

9. Demuéstrese que la primera forma cuadrática de una superficie de revolución es reducible a la forma $du^2 + G(u)dv^2$.

50.6. CURVAS EN UNA SUPERFICIE. CÁLCULO DE SUS LONGITUDES Y DE ÁNGULOS ENTRE ELLAS

Examinemos una curva continuamente derivable (50.8) dispuesta en la superficie dada (50.7). Supongamos que las longitudes de los arcos $s = s(t)$ en la superficie se calculan en el sentido de crecimiento del parámetro, es decir, que $\frac{ds}{dt} > 0$. Según se sabe (véase el p. 16.5), $\frac{ds}{dt} = \left| \frac{dr}{dt} \right|$, de donde $ds = |dr|$, por consiguiente, véase (50.18),

$$ds^2 = |dr|^2 = dr^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

por eso

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2}.$$

De este modo, para la longitud L de la curva (50.8) obtenemos la fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt.$$

Pasemos ahora al cálculo de los ángulos entre las curvas en una superficie.

Definición 18. Si dos curvas se cortan en cierto punto, el ángulo entre ellas en el punto citado será aquel que está formado por sus tangentes en el punto mencionado (si es que existen).

Supongamos que dos curvas suaves, dispuestas en la superficie en consideración, se cortan en cierto punto. Designemos las diferenciales de sus representaciones en dicho punto mediante dr y δr , respectivamente, y los coeficientes de las descomposiciones según los vectores r_u y r_v , mediante du , dv y δu , δv , respectivamente; en este caso

$$dr = r_u du + r_v dv,$$

$$\delta r = r_u \delta u + r_v \delta v.$$

Por eso, si φ es el ángulo buscado entre las curvas, es decir, el formado por los vectores dr y δr , entonces

$$\cos \varphi = \frac{dr \delta r}{|dr| |\delta r|} = \frac{E du \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}}.$$

Ejercicios. 10. Demuéstrese que para que las u -líneas y v -líneas coordenadas en una superficie sean ortogonales, es necesario y suficiente que en todo punto de la superficie se verifique la igualdad $F = 0$.

11. Hállese el ángulo entre las curvas $v = 2u$, $v = -2u$ en una superficie con la primera forma cuadrática $du^2 + dv^2$.

50.7. AREA DE UNA SUPERFICIE

Supongamos que la representación continuamente derivable $r(u, v)$ de la superficie suave en consideración S se ha definido en la clausura \bar{D} de la región cuadrable D . Examinemos la partición T_k del plano de variables u y v en cuadrados de cierto rango k . Por cuanto del carácter cuadrable de la región proviene el carácter acotado de ésta, la región cerrada \bar{D} resultará cubierta por un número finito de cuadrados de rango k . Numeremos de uno u otro modo todas las intersecciones no vacías de estos cuadrados con la región cerrada \bar{D} y designémoslas mediante $X_i, i = 1, 2, \dots, i_0$. Entonces

$$\tau = \{X_i : X_i = Q \cap \bar{D} \neq \phi, Q \in T_k\}$$

forma la partición de la región cerrada \bar{D} (véase la definición de la partición en el p. 44.3).

Examinemos los conjuntos X_i que representan en sí cuadrados cerrados completos dispuestos en la región D (siendo suficientemente menuda la finura de la partición τ , tales conjuntos no vacíos X_i siempre existen; ¿por qué?). Denotemos con $\tau(\partial D)$ la totalidad de todos los conjuntos mencionados X_i (compárese con el p. 44.4).

Elijamos un cuadrado cualquiera $X_i \in \tau(\partial D)$ (fig. 214). Sea h la longitud de su lado y sea P_i uno de sus vértices. Entonces, al pasar del vértice P_i a los vértices vecinos, el radio vector $r(u, v)$ adquirirá (con exactitud de hasta los infinitesimos de orden superior que h) los incrementos iguales en valor absoluto a los números $|r_u h|$ y $|r_v h|$, respectivamente, pues

$$r(u+h, v) - r(u, v) = r_u h + o(h),$$

$$r(u, v+h) - r(u, v) = r_v h + o(h).$$

Al determinar el área de la superficie, sustituyamos las imágenes de los cuadrados $X_i \in \tau(\partial D)$ por los paralelogramos rectilíneos construidos a partir de los vectores $r_u h$ y $r_v h$ (fig. 215). Hallemos el área de tal paralelogramo. Al designarla con $\Delta\sigma_i$, obtendremos

$$\Delta\sigma_i = |r_u h \times r_v h|_{P_i} = |r_u \times r_v|_{P_i} h^2 = |r_u \times r_v|_{P_i} \mu X_i.$$

Las funciones r_u y r_v son continuas en la región cerrada cuadrable \bar{D} , por lo cual

$$\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sum_{X_i \in \tau(\partial D)} \Delta\sigma_i = \iint_D |r_u \times r_v| du dv, \quad (50.20)$$

donde δ_τ significa, como siempre, la finura de la partición τ . Evidentemente, la condición de que la finura de la partición δ_τ tiende a cero es equivalente a que los rangos k de las particiones del plano en cuadrados, de las cuales hemos partido, tienden hacia el infinito.

Para demostrar la validez de la igualdad (50.20), basta observar que, siendo elegidos arbitrariamente los puntos $P_i \in X_i \in \tau, i = 1, 2, \dots$, se verifica la igualdad

$$\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sum_{X_i \in \tau(\partial D)} \Delta\sigma_i = \lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{i_0} |r_u \times r_v|_{P_i} \mu X_i = \iint_D |r_u \times r_v| du dv.$$

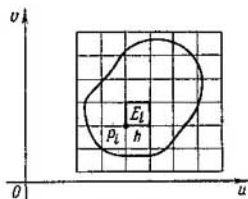


Fig. 214

Efectivamente, en primer lugar, el límite de las sumas integrales de una función integrable no depende de la elección, en el caso dado, de los puntos $P_i \in X_i \in \tau$, y , en segundo lugar, la omisión en las sumas integrales de los sumandos, correspondientes a los conjuntos $X_i \in \tau$ que no figuran en $\tau(\partial D)$, no influye, como se sabe (véase el p. 44.3), en la magnitud del límite de sumas integrales, en nuestro caso, en la magnitud del límite (50.20).

Definición 19. El límite (50.20) lleva el nombre de área o medida μS de la superficie S :

$$\mu S = \lim_{\sigma, -0} \sum_{X_i \in \tau(\partial D)} \Delta \sigma_i.$$

Para calcular el área de la superficie, de (50.20) se obtiene inmediatamente la fórmula

$$\mu S = \iint_D |r_u \times r_v| du dv. \quad (50.21)$$

Escribámosla en otra forma, expresando el integrando en términos de los coeficientes de la primera forma cuadrática. Diremos, ante todo, que para cualesquiera vectores a y b son lícitas las fórmulas

$$\begin{aligned} |a \times b| &= |a| |b| \operatorname{sen} \widehat{ab}, \\ ab &= |a| |b| \cos \widehat{ab}, \end{aligned}$$

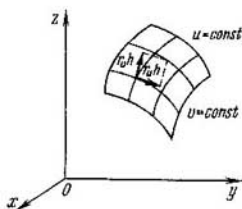


Fig. 215

donde \widehat{ab} es el ángulo formado por los vectores a y b . Elevemos al cuadrado y sumemos estas fórmulas:

$$|a \times b|^2 + |ab|^2 = a^2 b^2.$$

De aquí se deduce que

$$|r_u \times r_v|^2 = r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2 = EG - F^2, \quad (50.22)$$

por lo cual la fórmula (50.21) puede escribirse también así:

$$\mu S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, dudv. \quad (50.23)$$

A veces, para abreviar la notación, la expresión $\sqrt{EG - F^2} \, dudv$ se designa por el símbolo dS :

$$dS = \sqrt{EG - F^2} \, dudv; \quad (50.24)$$

y se llama *elemento del área*. Aplicando esta designación, podemos escribir la fórmula (50.23) en la forma

$$\mu S = \iint_D dS.$$

Mostremos que la magnitud del área de una superficie no depende de la elección de su representación (en este caso se consideran sólo las representaciones dadas en las regiones cerradas cuadrables). Pasemos a otra representación $\rho = \rho(u_1, v_1)$ de la superficie continuamente derivable dada, la cual viene dada en la clausura \bar{D}_1 de la región cuadrable D_1 y, por consiguiente, para la cual la transformación (50.14) de los parámetros u, v en los u_1, v_1 es una aplicación regular de D sobre \bar{D}_1 .

En el nuevo sistema de coordenadas consideraremos la integral

$$\mu S = \iint_{D_1} \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \, du_1 dv_1.$$

Para compararla con la integral (50.23), realicemos el cambio de variables (50.14), lo que es posible, puesto que todas las premisas del teorema 2' del p. 46.2 están en este caso cumplidas. Al utilizar (50.19), obtendremos

$$\begin{aligned} \mu S_1 &= \iint_{D_1} \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \, du_1 dv_1 = \\ &= \iint_D \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| \, dudv = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, dudv = \mu S. \end{aligned}$$

De este modo, efectivamente, la magnitud del área de una superficie no depende de cómo se elige su representación.

Hallemos la expresión para el área de una superficie que tiene representación explícita $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}$. En este caso $u = x$, $v = y$, $r = (x, y, f(x, y))$ y, por lo tanto (véanse las fórmulas (50.11)),

$$\begin{aligned} r_u &= (1, 0, f_x), & r_v &= (0, 1, f_y), \\ E = r_u^2 &= 1 + f_x^2, & F = r_u r_v &= f_x f_y. \end{aligned} \quad (50.25)$$

$$G = r_v^2 = 1 + f_y^2, EG - F^2 = (1 + f_x^2)(1 + f_y^2) - f_x^2 f_y^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2; \mu S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy. \quad (50.25)$$

Ejercicios. 12. Demuéstrase que el área de una superficie de revolución, definida en el p. 32.4, coincide con el área de esta superficie, definida en el punto presente.

13. Hállense el perímetro y los ángulos interiores de un triángulo curvilíneo dispuesto en la superficie con la primera forma cuadrática $du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$ y limitado por los arcos de las curvas $u = \frac{1}{2}av^2$, $u = -\frac{1}{2}av^2$, $v = 1$ ($a = \text{const} > 0$).

14. Hállese el área de un cuadrilátero curvilíneo dispuesto en el helicoides $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = au$ ($a = \text{const}$) y limitado por los arcos de las curvas $u = 0$, $u = a$, $v = 0$, $v = 1$.

15. En una superficie con la primera forma cuadrática $du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$ está dispuesto un triángulo curvilíneo limitado por los arcos de las curvas $u = av$, $u = -av$, $v = 1$. Hállese el área de este triángulo.

50.8. ORIENTACIÓN DE LA SUPERFICIE SUAVE

En este párrafo se supondrá que en un espacio siempre se elige el sistema directo de coordenadas rectangulares cartesianas. Esto significa lo siguiente. Sean i , j y k los versores de los ejes coordenados. Mirando desde el extremo del vector k en la dirección del plano xOy , concluimos que con el fin de hacer coincidir el vector i con el j se debe girar el primero al ángulo $\frac{\pi}{2}$ en el sentido contrahorario. En este caso suele decirse también que la terna ordenada de vectores i , j , k está concordada según la "regla de sacacorchos". Analíticamente esto significa que en el espacio de puntos (x, y, z) se consideran sólo tales bases ordenadas e_1, e_2, e_3 que se obtienen de la base ordenada $i = (1; 0; 0)$, $j = (0; 1; 0)$, $k = (0; 0; 1)$ con ayuda de las matrices que tienen determinante positivo (con más precisión, igual a +1). De esta forma, si

$$e_m = c_{m1}i + c_{m2}j + c_{m3}k, \quad m = 1, 2, 3,$$

es una base que define el sistema directo de coordenadas, entonces

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = +1.$$

Todas las definiciones y nociones que se introducen más abajo en este párrafo y que están relacionadas con las coordenadas vienen dadas con arreglo a los sistemas directos de coordenadas.

Sea S una superficie suave (véase la definición 16). Cualquier su representación vectorial $r = r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, es continuamente derivable y $r_u \times r_v \neq 0$ en la región cerrada \bar{D} .

Por consiguiente, en todo punto de la superficie S está definido el vector unidad normal

$$v = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}, \quad (50.26)$$

que es una función continua en \bar{D} . Esta circunstancia se expresa brevemente diciendo que en la superficie S existe una normal unitaria continua.

Definición 20. Toda normal unitaria continua $\nu = \nu(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, de una superficie suave $S = \{r(u, v); (u, v) \in \bar{D}\}$ lleva el nombre de orientación de la superficie S .

Evidentemente, si el vector ν es una orientación de la superficie S , $-\nu$ será también orientación de la misma superficie y es fácil mostrar que otras orientaciones no existen.

Ejercicio 16. Demuéstrese que una superficie puede tener sólo dos orientaciones.

Una de las dos orientaciones, ν ó $-\nu$ (elegida arbitrariamente) se llama *positiva* y la otra, *negativa*.

De este modo, el concepto de orientación positiva o negativa en este sentido no se determina unívocamente por la propia superficie, sino depende de la elección de su representación. Las orientaciones positiva y negativa de una superficie se llaman orientaciones *opuestas* de la misma.

En lo que sigue, para concretar, como orientación positiva, para una superficie suave dada mediante la representación vectorial fija $r = r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, se tomará siempre el vector (50.26).

Subrayemos que la continuidad de la normal ν se considera respecto de las variables u, v , y no respecto de las variables espaciales x, y, z . Si la superficie cuenta con puntos múltiples, puede ocurrir que en el punto de un espacio, portador de distintos puntos de la superficie, pueden haber varias normales distintas.

Cuando se requiere que, en la transformación regular de los parámetros u, v , la superficie conserve la orientación, se debe exigir adicionalmente que el jacobiano de tal transformación sea positivo. En efecto, para la transformación de los parámetros

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi(u, v), \\ v_1 &= \psi(u, v) \end{aligned}$$

de las fórmulas (50.16), según lo hemos visto (véase la observación al final del p. 50.4), se deduce que

$$r_u \times r_v = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} (\rho_{u_1} \times \rho_{v_1})$$

y, por consiguiente, si el jacobiano $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$ es positivo, los vectores $r_u \times r_v$ y $\rho_{u_1} \times \rho_{v_1}$ están dirigidos hacia un mismo lado, y si es negativo, hacia los lados opuestos.

De este modo, para las superficies con la orientación elegida, como transformaciones admisibles se considerarán aquellas transformaciones continuamente derivables cuyo jacobiano es positivo.

La superficie S con una orientación positiva se designará mediante S^+ , y con una orientación negativa, mediante S^- .

Subrayemos que cualquier superficie suave dada paramétricamente es siempre orientable, es decir, siempre tiene su orientación.

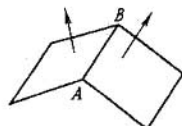


Fig. 216

Definición 21. Una superficie que tiene fija una de sus orientaciones se denomina *orientada*.

La definición de orientación, aducida anteriormente, no puede ser extendida, por supuesto, a las superficies no suaves. Como ejemplo de superficie no derivable en un punto, en la que ya no puede elegirse una normal continua, sirve el cono

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq a^2. \quad (50.27)$$

En este caso la representación vectorial tiene por expresión:

$$r(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}),$$

por consiguiente

$$r_x = \left(1; 0; \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad r_y = \left(0; 1; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right);$$

$$r_x \times r_y = \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; 1\right); \quad |r_x \times r_y| = \sqrt{2}.$$

Por cuanto los límites $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ no existen (¿por qué?), entonces la normal unitaria

$$n = \frac{r_x \times r_y}{|r_x \times r_y|} = \left(-\frac{y}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}; \frac{x}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

tampoco tiene límite para $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Por ello, en el cono (50.27) no se puede elegir una normal continua en $\bar{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

Como ejemplo de superficie no suave S , en la que existe toda una línea a lo largo de la cual las normales, cualquier que sea su elección, sufren discontinuidad, sirve una parte del ángulo diedro expuesta en la fig. 216. La línea mencionada en esta superficie es el segmento AB .

50.9. PEGAMIENTO DE LAS SUPERFICIES

La definición, aducida más arriba, de la superficie continua dada en la forma paramétrica no abarca todo lo que interviene intuitivamente en el concepto de superficie. Así, por ejemplo, podemos mostrar que la superficie de una bola no es portadora de ninguna superficie continua dada paramétricamente sin puntos múltiples. Por

otra parte, sería una complicación no justificada considerar que la superficie de una bola está provista de puntos múltiples. Existen varios procedimientos para vencer este inconveniente. Elegimos un procedimiento basado en el pegamiento de un número finito de superficies. El pegamiento de las superficies surge de un modo natural en la resolución de los más sencillos problemas. Por ejemplo, es natural considerar la superficie lateral de un cilindro como resultado de pegar los lados opuestos de un rectángulo; la superficie total de un cilindro, como resultado de pegar su superficie lateral y dos bases; la superficie de un cono, como resultado de pegar la superficie lateral de éste con su base, etc.

Pasemos a las definiciones precisas. Diremos que el borde (véase el p. 50.1) de la superficie $S = \{r = r(u, v); (u, v) \in \bar{D}\}$ es una curva, si la frontera ∂D de la región D es también una curva (con más precisión, portadora de una curva):

$$\partial D = \{u(t), v(t); a \leq t \leq b\}.$$

En este caso el borde ∂S de la superficie S puede considerarse como una curva:

$$\partial S = \{r(u(t), v(t)); a \leq t \leq b\}.$$

Definamos la operación de pegado de las superficies para aquellas superficies cuyos bordes son curvas.

Sean dadas las superficies $S_i = \{r_i(u_i, v_i); (u_i, v_i) \in \bar{D}_i\}$ cuyos bordes ∂S_i son unas curvas, es decir, lo son las fronteras ∂D_i de las regiones D_i :

$$u_i = u_i(t_i), \quad v_i = v_i(t_i), \quad a_i \leq t_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Entonces los bordes ∂S_i de las superficies serán las curvas

$$\gamma_i = \{r_i(u_i(t_i), v_i(t_i)); a_i \leq t_i \leq b_i\}.$$

Supongamos que para algunos pares (i, j) , $i, j = 1, 2, \dots, m$, $i \neq j$, se han dado un número finito de los segmentos $[a_{ij}^k, b_{ij}^k] \subset [a_i, b_i]$, $a_{ij}^k \leq b_{ij}^k$, y de los segmentos $[a_{ji}^k, b_{ji}^k] \subset [a_j, b_j]$, $a_{ji}^k \leq b_{ji}^k$, $k = 1, 2, \dots, n_{ij} = n_{ji}$, con la particularidad de que tanto los segmentos $[a_{ij}^k, b_{ij}^k]$, como también los $[a_{ji}^k, b_{ji}^k]$ no tienen dos a dos puntos interiores comunes ni tampoco homeomorfismos $\varphi_{ij}^k: [a_{ij}^k, b_{ij}^k] \rightarrow [a_{ji}^k, b_{ji}^k]$, llamados *homeomorfismos de pegamiento*. Además, en este caso, para cualquier $i \in [a_{ij}^k, b_{ij}^k]$ tiene lugar el "pegado"

$$r_i(u_i(t_i), v_i(t_i)) = r_j(u_j(\varphi_{ij}^k(t_i)), v_j(\varphi_{ij}^k(t_i))). \quad (50.28)$$

Designemos mediante γ_{ij}^k una curva cuya representación es

$$r_i(u_i(t_i), v_i(t_i)), \quad t_i \in [a_{ij}^k, b_{ij}^k].$$

Las curvas γ_{ij}^k se llaman *curvas de pegamiento* o *curvas a lo largo de las cuales se realiza el pegamiento*.

Es evidente que, en virtud de (50.28), la aplicación

$$r = r_j(u_j(t_j), v_j(t_j)), \quad t_j \in [a_{ji}^k, b_{ji}^k],$$

es también la representación de la curva γ_{ij}^k , pues los homeomorfismos φ_{ij}^k representan en sí una transformación admisible del parámetro para la curva γ_{ij}^k .

Supondremos, además, que para $j' \neq j$ los segmentos

$$[a_{ij}^k, b_{ij}^k] \text{ y } [a_{i'j'}^l, b_{i'j'}^l], \quad k = 1, 2, \dots, n_{ij}, \quad l = 1, 2, \dots, n_{i'j'}$$

no tienen puntos interiores comunes y, por consiguiente, todo extremo del segmento $[a_{ij}^k, b_{ij}^k]$ puede pertenecer, además, a lo sumo a un segmento $[a_{i'j'}^l, b_{i'j'}^l]$. Esta condición significa que toda curva de pegamiento γ_{ij}^k es una parte sólo de dos curvas, γ_i y γ_j , que forman los bordes de las superficies S_i y S_j .

Las superficies S_i y S_j se llaman adyacentes, si se pegan por lo menos a lo largo de una curva γ_{ij}^k . El sistema de homeomorfismos de pegamiento φ_{ij}^k se denomina *conexo*, si para cualesquiera superficies S_p y S_q del sistema en consideración existen en él tales superficies $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_r}$, que $S_{i_1} = S_p$, $S_{i_r} = S_q$ y cada superficie S_{i_v} es adyacente respecto de $S_{i_{v+1}}$, es decir, se ha pegado con ésta a lo largo de una o varias curvas con ayuda de los homeomorfismos de pegamiento correspondientes $\varphi_{i_v i_{v+1}}, v = 1, 2, \dots, r - 1$.

Definición 22. Un sistema de superficies S_1, S_2, \dots, S_m con el sistema conexo de homeomorfismos de pegamiento φ_{ij}^k se llama *superficie pegada de las superficies* S_1, \dots, S_m a lo largo de las curvas γ_{ij}^k y se designa mediante $S = \{S_i\}$.

Esta definición, a pesar de ser formalmente engorrosa, tiene, evidentemente, un significado geométrico muy simple. Hablando metafóricamente, la superficie pegada $S = \{S_i\}$ representa en sí las superficies S_1, \dots, S_m , ciertos pares de las cuales S_i, S_j tienen identificados (pegados) los puntos que se disponen en las curvas γ_{ij}^k y se aplican uno en el otro en los homeomorfismos φ_{ij}^k , en lo que precisamente consiste la condición de pegamiento (50.28). Indudablemente, como ya se ha indicado, se supone, además, que de cada superficie S_i se puede pasar, realizados un número finito de pasos, a otra superficie cualquiera S_j , cada vez pasando de una cierta superficie a otra adyacente.

Si $S = \{S_i\}$ es una superficie pegada, la totalidad de todos los arcos, que representan tales partes de las curvas ∂S_i que ningunos puntos de las partes indicadas, a excepción, quizás, de los extremales, se pegan con los puntos de otras curvas ∂S_i , se denomina *borde* ∂S de la superficie pegada S .

Se puede mostrar que reuniendo de modo adecuado las partes citadas de las curvas ∂S_i , pertenecientes al borde ∂S de la superficie $S = \{S_i\}$, podemos obtener un número finito de curvas cerradas (contornos). En otras palabras, el borde de una superficie pegada consta de un número finito de contornos cerrados.

Como ejemplo de pegamiento de las superficies puede servir el pegamiento, para obtener una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, de dos semiesferas $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$, a lo largo de su borde, es decir, a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. Al definir la ecuación de esta circunferencia en la forma paramétrica

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

a título de homeomorfismo de pegamiento $\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ podemos tomar la aplicación idéntica del segmento $[0, 2\pi]$ sobre sí mismo.

Con ayuda del pegamiento de las superficies suaves se puede dar la noción de superficie suave a trozos.

Definición 23. Una superficie $S = \{S_i\}$, obtenida pegando las superficies suaves S_1, \dots, S_m , se llama superficie suave a trozos.

Como ejemplos de superficies suaves a trozos pueden servir la superficie de un cilindro circular, la de un paralelepípedo. Entre tanto, un cono recto circular (50.27) no puede ser dividido en un número finito de partes suaves pegadas, razón por la cual no es una superficie suave a trozos en el sentido de la definición 23. La operación de pegamiento de las superficies puede generalizarse de un modo tal que, conservándose intacta la definición de superficies suaves a trozos para tal operación generalizada de pegamiento, en la clase de las superficies suaves a trozos ya se incluirán también las superficies cónicas. No nos detendremos en esto dejando a cargo del propio lector de hacerlo, en caso de necesidad.

50.10. SUPERFICIES ORIENTABLES Y NO ORIENTABLES

Nuestra tarea inmediata consiste en dar la definición de orientación para las superficies, pegadas de unas superficies que se dan en la forma paramétrica.

La definición de la orientación eligiendo una normal unitaria continua en la superficie resulta en el caso dado incómoda, incluso cuando los puntos múltiples estén ausentes y la continuidad de la normal se entienda como si dependiese continuamente de los puntos del espacio (y no de los parámetros de las superficies que se pegan). Esto se debe a la perturbación eventual de la suavidad de la superficie en aquellas curvas a lo largo de las cuales se realiza el pegamiento.

Por ejemplo, una parte de la superficie del ángulo diedro expuesta en la fig. 216, puede considerarse como resultado de pegar dos rectángulos iguales. Al tender por distintas caras hacia el mismo punto en la arista de dicho ángulo, obtendremos distintos límites de las normales unitarias correspondientes. Más abajo se dará tal definición de una superficie orientable, en términos de la cual la superficie citada será orientable.

Observemos que incluso cuando el "procedimiento suave" se use para pegar las superficies (es decir, cuando para toda curva, a lo largo de la cual se realiza el pegamiento, podemos elegir, en cualquiera de sus puntos, una normal unitaria de modo tal que fuera ésta el límite para las normales unitarias, elegidas de modo adecuado en el entorno del punto citado, de dos superficies que se pegan) las superficies pegadas pueden adquirir nuevas peculiaridades cualitativas: a diferencia de las superficies dadas en la forma paramétrica, en el caso dado no siempre en toda la superficie puede elegirse una normal unitaria continua. Como ejemplo de tal superficie sirve la así llamada cinta o banda de Möbius^{*)}, la cual puede obtenerse de una tira rectangular de papel $ABCD$ que se tuerce una vez alrededor de su eje de simetría MN , paralela a los lados BC y AD , después de lo cual se pegan las aristas AB y CD (fig. 217). Verdad es que, empleado tal procedimiento, la cinta de Möbius se obtiene como resultado de pegar la superficie con sí misma. No obstante, no es difícil obtenerla también pegando, de conformidad con la definición 22, dos rectángulos $ABEF$ y $FECD$ (véase la fig. 217).

^{*)} A. F. Möbius (1790—1868), matemático y astrónomo alemán.

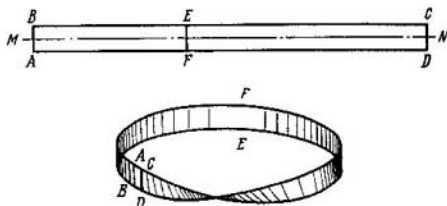


Fig. 217

Una de las peculiaridades características de la cinta de Möbius consiste en que ella tiene sólo una "cara": es imposible, como, por ejemplo, en el caso de la superficie lateral de un cilindro, pintarla de rojo un lado y de azul, otro lado. Además, en la cinta de Möbius no puede elegirse una normal unitaria que fuera una función continua de un punto del espacio.

Todos los razonamientos aducidos hacen naturales las tentativas de ofrecer tal definición de orientación de una superficie, para la cual las superficies del tipo, por ejemplo, de la superficie de un paralelepípedo resultarían orientadas, y las superficies del tipo de la cinta de Möbius, no orientadas.

Prestemos atención a que la cinta de Möbius puede ser un pordador de una superficie suave, dada paramétricamente, con puntos múltiples y esta superficie, al igual que cualquier otra superficie suave dada paramétricamente, será orientada. Por supuesto, esto no tiene nada que ver con el carácter no orientado de la propia cinta de Möbius.

50.11. SEGUNDO ENFOQUE DEL CONCEPTO DE ORIENTACIÓN DE UNA SUPERFICIE

Pasemos ahora a la descripción de otro enfoque del concepto de orientación que se basa en el pegamiento de las superficies cuyos bordes son unas curvas. Sea $S = \{r = r(u, v); (u, v) \in \bar{D}\}$ una superficie suave cuyo borde está constituido por una curva. La orientación positiva de la curva $\partial D = \{u(t), v(t); a \leq t \leq b\}$ (es decir, la orientación contrahoraria en el plano u, v con el sistema directo de coordenadas) engendra, en virtud de la aplicación $r(u(t), v(t))$, $a \leq t \leq b$, una orientación bien determinada del borde ∂S de la superficie S . Esta orientación del borde ∂S de la superficie S se llama concordada con la orientación

$$\nu = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$$

(véase la definición 20) de la superficie S .

El carácter natural de dicha definición puede aclararse del modo siguiente. Consideremos una superficie dada explícitamente $S: z = f(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}$. Para ella

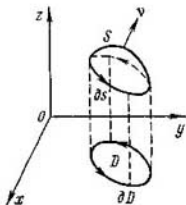


Fig. 218

(véase (50.10), (50.11) y (50.26))

$$\nu = \left(-\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, -\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \right).$$

Por consiguiente, $\cos(\hat{\nu}, k) = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} > 0$, es decir, el vector de la normal

ν forma con el eje Oz un ángulo agudo y, por eso, está concordado con la orientación positiva del borde ∂S de la superficie S según la regla de sacacorchos: la orientación del contorno ∂S corresponde al sentido de rotación de la manija del sacacorchos y la dirección de la normal ν , al movimiento del propio sacacorchos (véase la fig. 218).

Evidentemente, si la orientación ν de la superficie suave en consideración S está concordada con la de su borde ∂S , entonces la orientación $-\nu$ queda concordada con la orientación opuesta de la curva ∂S . De este modo, la definición de la orientación ν de una superficie suave es equivalente a la definición de la orientación de la curva ∂S que es el borde de la superficie. Por eso el borde orientado ∂S de la superficie suave S lo llamaremos, al igual que la normal unitaria continua ν , *orientación de la superficie S* .

Para una superficie no suave, dada paraméricamente, cuyo borde está constituido por un contorno, su orientación puede considerarse como la definición de partida para la orientación de la propia superficie. Sean S_1 y S_2 dos superficies suaves cuyos bordes son unas curvas y supongamos que estas dos superficies están pegadas (en el sentido de la definición 22) a lo largo de las curvas $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, que constituyen las partes de los bordes de las superficies S_1 y S_2 . Las orientaciones ∂S_1 y ∂S_2 de las superficies S_1 y S_2 se denominan *concordadas*, siempre que cada una de ellas engendra en las curvas $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ que se pegan las orientaciones opuestas.

Definición 24. Una superficie S , pegada de las superficies S_1, \dots, S_m , se denomina *orientable*, si existen tales orientaciones $\partial S_1, \dots, \partial S_m$ de los contornos de las superficies S_1, \dots, S_m que para cualesquiera dos superficies adyacentes S_i y S_j sus orientaciones ∂S_i y ∂S_j están concordadas.

La totalidad de tales orientaciones, si es que existe, se llama *orientación de la superficie S* .

Si la totalidad mencionada de orientaciones ∂S_i no existe, la superficie S se llama *no orientable*.

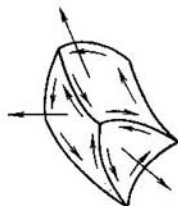


Fig. 219

Si $\partial S_1, \dots, \partial S_m$ es la orientación de la superficie $S = \{S_j\}$, la totalidad de orientaciones opuestas es también una orientación de la superficie S , llamada *orientación opuesta respecto de la dada*.

Se puede mostrar que si la superficie S es orientable, ella no tiene ningunas orientaciones a excepción de las dos orientaciones mencionadas. Una de las dos orientaciones existentes (no importa cuál sea) se llama, comúnmente, positiva, y la otra, negativa.

Por analogía, con el caso examinado antes en el p. 50.8, una superficie orientable que tiene fija una de sus orientaciones se denomina *orientada*. Además, aquella de las superficies orientadas, cuya orientación se ha llamado positiva, se designa con S^+ , y la superficie de orientación opuesta, con S^- .

El borde de una superficie pegada orientada $S = \{S_j\}$, como todo borde de la superficie pegada, se compone, de acuerdo con lo dicho anteriormente, de un número finito de contornos cerrados. Cada uno de estos contornos, a su vez, representa una reunión del número finito de curvas, cada una de las cuales forma parte de uno de los contornos ∂S_j , a saber, una parte tal que todos los puntos suyos, a excepción, quizás, de los extremos, no se pegan con los puntos de los otros bordes ∂S_j . Por esta razón, la orientación concordada dada de la superficie orientable pegada $S = \{S_j\}$ engendra determinadas orientaciones (es decir, los órdenes de los puntos) en las curvas mencionadas. Se puede mostrar que dichas orientaciones, tomadas juntas, constituyen las orientaciones de todos los contornos que integran el borde ∂S de la superficie pegada S . La totalidad de estas orientaciones de los contornos que componen el borde ∂S de la superficie S lleva el nombre de *orientación de dicho borde* engendrada por la orientación dada de la superficie S , o, que es lo mismo, concordada con ella.

Prestemos atención en que en la definición 24 de la orientación de una superficie ni siquiera se suponía la derivabilidad de las superficies a pegar S_1, \dots, S_m .

Si la superficie S está pegada de las superficies suaves S_1, \dots, S_m , entonces, para fijar su orientación, se pueden elegir en cada superficie S_1, \dots, S_m las normales unitarias continuas de una manera tal que las orientaciones ∂S_j de los bordes de las superficies S_j , concordadas con dichas normales, sean concordadas entre sí en el sentido de la definición 24, es decir, que representen la orientación de la superficie S (véase la fig. 219).

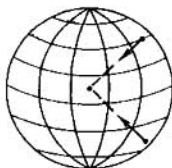


Fig. 220

Para enterarse, con tal modo de dar la orientación, de si coinciden o no dos orientaciones, es suficiente recurrir tan sólo a un punto arbitrario; si las normales coinciden en dicho punto, coinciden en todo punto, siempre que, naturalmente, existen; si en el punto mencionado las normales no coinciden, es decir, son opuestas, serán opuestas en todo punto, pues, como lo hemos indicado más arriba, existen sólo dos orientaciones de la superficie dada.

Sin embargo, en el caso de una superficie suave a trozos ya no podemos introducir la noción de orientación positiva, haciendo uso de las representaciones dadas de las superficies suaves a pegar y tomando en éstas normales unitarias según la fórmula (50.26), puesto que estas orientaciones pueden ser no concordadas. Por ello, cuando se trata de las superficies suaves a trozos, se debe especificar cada vez qué precisamente se sobreentiende en el caso concreto por superficies orientadas S^+ y S^- de la superficie dada S .

Se puede mostrar que cualquier superficie suave a trozos que constituye la frontera de cierta región del espacio tridimensional es orientable. En este caso una de las orientaciones se compone de las normales unitarias dirigidas de la superficie al interior de la región (las así llamadas *normales interiores*), y la otra se compone de las normales unitarias dirigidas de la superficie al exterior de la región (las así llamadas *normales exteriores*). Como ejemplo de tal superficie interviene una esfera. En calidad de su orientación pueden tomarse, por ejemplo, las normales unitarias dirigidas a lo largo del radio desde un punto de la esfera hacia el centro (fig. 220).

• Como ejemplo de superficie no orientable (en el sentido de la definición 24) sirve la cinta de Möbius..

A veces las superficies orientables suaves a trozos se llaman, además, *superficies bilaterales*: tienen dos "caras" correspondientes a dos elecciones de las normales unitarias que prefijan dos orientaciones suyas. Correspondientemente, las superficies no orientables se denominan *unilaterales*. El empleo de este término se ha explicado con el ejemplo de cinta de Möbius en el p. 50.10.

No nos detendremos aquí en los razonamientos matemáticos concernientes a la demostración de las afirmaciones enunciadas. Esto requeriría el empleo de métodos cuyo estudio sale de los márgenes de este curso. Las afirmaciones generales enunciadas más arriba sin demostración no se usan, en esencia, en la exposición ulterior. Cuando, en lo sucesivo, se trate de un caso concreto, se puede indicar siempre cuál precisamente orientación se considera.

Ejercicios. 17. Demuéstrase que el cilindro recto circular representa una superficie suave a trozos sin borde.

18. Sean dados el vector τ y la curva $\gamma = \{\rho(u), a \leq u \leq b\}$.

Una superficie, dada mediante la representación de la forma

$$r = r(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(u) + v\tau, \quad a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d,$$

lleva el nombre de *superficie cilíndrica* S con la generatriz γ y una directriz paralela al vector τ .

Demuéstrase que si la curva γ es suave a trozos, la superficie S será también suave a trozos.

§ 51. INTEGRALES DE SUPERFICIE

En este párrafo y en los que siguen se considerarán sólo las superficies definidas por las representaciones paramétricas y, además, aquellas que son suaves (véase la definición 16 en el § 50) y suaves a trozos (véase la definición 23, en el § 50).

51.1. DEFINICIONES Y PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DE SUPERFICIE

Sea dada una superficie suave S , con la particularidad de que

$$\begin{aligned} r = r(u, v) &= \{x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \\ &z = z(u, v); (u, v) \in \bar{D}\} \end{aligned} \quad (51.1)$$

es su representación, con más precisión, representación continuamente derivable sin puntos singulares, D es una región plana cuadrable y, como siempre, E , G y F son los coeficientes de la primera forma cuadrática de la superficie S . Supongamos, luego, que en el conjunto de puntos $r(u, v)$ de la superficie S está definida la función Φ , es decir, la función $\Phi(r(u, v)) = \Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. A veces la función Φ se denotará también mediante $\Phi(x, y, z)$ (compárese con el p. 47.1).

Definición 1. Una integral $\iint_S \Phi(x, y, z) dS$ se determina por la igualdad (véase (50.24))

$$\iint_S \Phi(x, y, z) dS = \iint_D \Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} dudv. \quad (51.2)$$

Ésta se llama *integral de superficie de primera especie*.

Con ciertas restricciones impuestas en la función Φ la integral (51.2) existe. Así, por ejemplo, existe para toda función Φ , continua en la superficie suave $S = \{r(u, v), (u, v) \in \bar{D}\}$, es decir, para la función $\Phi(r(u, v))$, continua en la región cerrada cuadrable \bar{D} . Efectivamente, en este caso, de acuerdo con la definición 1, la integral

$$\iint_S \Phi(x, y, z) dS$$

se reduce a una integral de la función continua en \bar{D} , la cual, como se sabe (véase el p. 44.4), existe. Las condiciones más generales de existencia de la integral de superficie de primera especie pueden obtenerse de las condiciones correspondientes de

existencia de las integrales múltiples (véase el p. 44.4), aplicadas a la integral que figura en el segundo miembro de la igualdad (51.2).

Supongamos, para simplificar, que la función Φ es continua en la superficie suave S y sea $\rho = \rho(u_1, v_1) = (\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1), \chi(u_1, v_1))$ otra representación de esta superficie; dicha representación viene dada en la clausura \bar{D}_1 de la región cuadrable D_1 y para ella la transformación (50.14) de los parámetros u, v en u_1, v_1 es biunívoca y continuamente derivable en \bar{D} , y, además, su jacobiano en \bar{D} es distinto de cero. Si E_1, F_1 y G_1 son coeficientes de la primera forma cuadrática, correspondientes a dicha representación, entonces

$$\begin{aligned} \iint_D \Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv &= \\ = \iint_{D_1} \Phi(\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1), \chi(u_1, v_1)) \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} du_1 dv_1. \end{aligned} \quad (51.3)$$

Para convencerse de esto, es suficiente realizar el cambio de variables (50.14) en la integral que figura en el segundo miembro de esta igualdad y hacer uso de la fórmula (50.19). De este modo, la integral de superficie de primera especie no depende de cómo se elige la representación de la superficie. Las integrales de superficie de primera especie se encuentran en varios problemas de las matemáticas y sus aplicaciones. Por ejemplo, el área de una superficie (véase el p. 50.7) se expresa con ayuda de una integral de superficie de primera especie: si la función $\Phi(x, y, z)$ es idénticamente igual a la unidad en la superficie S , la fórmula (51.2) se convierte en una que sirve para determinar el área μS de la superficie S (véase (50.23)):

$$\mu S = \iint_D \sqrt{XG - F^2} du dv = \iint_S dS.$$

Si $\Phi(x, y, z)$ es la densidad de cierta masa distribuida por la superficie S , entonces la integral (51.2) proporciona la magnitud de la masa de toda la superficie.

Sean ahora, como siempre, i, j y k los vectores unidad coordenados,

$$n = r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} i + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} j + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} k \quad (51.4)$$

y

$$v = n / |n|, \quad (51.5)$$

con la particularidad de que, con arreglo a nuestras suposiciones, la normal v es continuamente prolongable a la frontera de la región D .

La superficie S en la que se ha elegido la normal unitaria v se designará con S^+ , y la misma superficie con la normal elegida $-v$, con S^- (evidentemente, v y $-v$ son dos orientaciones de la superficie S). Subrayemos que S^+ y S^- se determinan por la propia superficie "con la exactitud hasta la orientación" y dependen de la elección de la representación de la superficie.

Definición 2. Las integrales de superficie

$$\iint_{S^+} \Phi(x, y, z) dx dy \quad \text{y} \quad \iint_{S^-} \Phi(x, y, z) dx dy, \quad (51.6)$$

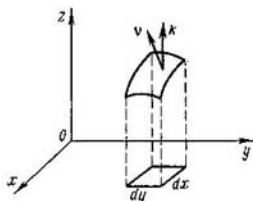


Fig. 221

llamadas *integrales de superficie de segunda especie* (para la representación dada de la superficie) se determinan según las fórmulas

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} \Phi(x, y, z) dx dy &= \iint_S \Phi(x, y, z) \cos(\widehat{\nu, k}) dS, \\ \iint_{S^-} \Phi(x, y, z) dx dy &= \iint_S \Phi(x, y, z) \cos(-\widehat{\nu, k}) dS, \end{aligned} \quad (51.7)$$

donde (ν, k) y $(-\nu, k)$ son los ángulos entre los vectores ν, k y entre $-\nu, k$, respectivamente.

Como base de esta definición se ha tomado un razonamiento intuitivo de que el elemento del área dS de la superficie dada (véase (50.24)), multiplicado por el coseno del ángulo que este elemento "forma" con el plano xOy , es igual aproximadamente al elemento del área $dx dy$ de este plano (fig. 221), como si se tratase de las áreas de una figura plana y sus proyecciones.

Las integrales (51.6) se designarán mediante el símbolo común

$$\iint_S \Phi(x, y, z) dx dy. \quad (51.8)$$

Dado que $(\widehat{\nu, k}) + (-\widehat{\nu, k}) = \pi$, y, por lo tanto, $\cos(-\widehat{\nu, k}) = -\cos(\widehat{\nu, k})$ de (51.7) obtenemos

$$\iint_{S^-} \Phi(x, y, z) dx dy = - \iint_{S^+} \Phi(x, y, z) dx dy. \quad (51.9)$$

Por analogía, con las integrales de superficie de primera especie, las integrales de superficie de segunda especie existen a ciencia cierta, si la función Φ es continua en la superficie S .

Por cuanto las integrales de superficie de primera especie no dependen de la representación de la superficie, las integrales de superficie de segunda especie (51.6) no dependen de cómo se elige la representación de la superficie orientada (en otras palabras, no dependen de cómo se elige la representación de una superficie que conserva su orientación dada), pero, por supuesto, las integrales (51.8) dependen en el caso general, para la superficie S y la función Φ dadas, de la elección de la normal

continua ν en la superficie, es decir, de la elección de la orientación de la superficie (véase 51.9).

Obtengamos las fórmulas que sean cómodas para calcular las integrales de superficie de segunda especie. Demos a conocer previamente que de (51.4), (51.5) y (50.22) proviene que

$$\cos(\widehat{\nu}, \widehat{k}) = \nu k = \frac{nk}{|n|} = \frac{(r_u \times r_v)k}{|r_u \times r_v|} = \frac{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}{|r_u \times r_v|} = \frac{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

razón por la cual $\sqrt{EG - F^2} \cos(\widehat{\nu}, \widehat{k}) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \iint_S \Phi(x, y, z) dx dy &= \iint_S \Phi(x, y, z) \cos(\widehat{\nu}, \widehat{k}) dS = \\ &= \iint_D \Phi[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \cos(\widehat{\nu}, \widehat{k}) \sqrt{EG - F^2} du dv = \\ &= \iint_D \Phi[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv. \end{aligned}$$

De este modo, omitiendo las designaciones de los argumentos de la función, tenemos

$$\iint_{S^+} \Phi dx dy = \iint_D \Phi \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv \quad (51.10)$$

y, de conformidad con (51.9),

$$\iint_{S^-} \Phi dx dy = - \iint_D \Phi \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv = \iint_D \Phi \frac{\partial(y, x)}{\partial(u, v)} du dv. \quad (51.11)$$

A veces la integral $\iint_{S^+} \Phi dx dy$ se designa como $\iint_S \Phi dx dy$; en este caso la integral

integral $\iint_{S^-} \Phi dx dy$ se escribe en la forma $\iint_S \Phi dy dx$.

De este modo,

$$\iint_S \Phi dx dy = \iint_D \Phi \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv,$$

$$\iint_S \Phi dy dx = \iint_D \Phi \frac{\partial(y, x)}{\partial(u, v)} du dv.$$

Si la superficie S está dada explícitamente por la función continuamente derivable $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}$, entonces la fórmula (51.2) adquiere la forma (véase (50.25))

$$\iint_S \Phi(x, y, z) dS = \iint_D \Phi(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy,$$

mientras que las fórmulas (51.10) y (51.11) tendrán por expresión

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} \Phi(x, y, z) dx dy &= \iint_D \Phi(x, y, f(x, y)) dx dy, \\ \iint_{S^-} \Phi(x, y, z) dx dy &= - \iint_D \Phi(x, y, f(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Aquí S^+ se llama "cara superior de la superficie S " (corresponde a la orientación positiva ν de la superficie S para la representación dada de ésta: $z = f(x, y)$), y S^- , "cara inferior de la superficie S " (corresponde a la orientación negativa $-\nu$). Estas denominaciones se deben a la circunstancia de que en el caso de definición explícita de la superficie

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x i + f_y j + k,$$

y, por consiguiente,

$$\nu = \left(-\frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, -\frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right),$$

y por ello, como ya se ha observado antes,

$$\cos(\widehat{\nu, k}) = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} > 0.$$

De aquí se ve que el ángulo entre los vectores ν y k es agudo, es decir, el vector ν está dirigido "hacia arriba" de la superficie en consideración (véase fig. 221).

Por analogía con la definición (51.7) se determinan también otras integrales de superficie de segunda especie:

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} \Phi(x, y, z) dy dz &= \iint_S \Phi(x, y, z) \cos(\widehat{\nu, i}) dS, \\ \iint_{S^-} \Phi(x, y, z) dy dz &= \iint_S \Phi(x, y, z) \cos(-\widehat{\nu, i}) dS, \\ \iint_{S^+} \Phi(x, y, z) dz dx &= \iint_S \Phi(x, y, z) \cos(\widehat{\nu, j}) dS, \\ \iint_{S^-} \Phi(x, y, z) dz dx &= \iint_S \Phi(x, y, z) \cos(-\widehat{\nu, j}) dS. \end{aligned} \tag{51.12}$$

Para estas integrales, por analogía con lo hecho anteriormente, obtendremos

$$\iint_{S^-} \Phi dy dz = - \iint_{S^+} \Phi dy dz,$$

$$\begin{aligned} \iint_{S^-} \Phi dz dx &= - \iint_{S^+} \Phi dz dx, \\ \iint_{S^+} \Phi dy dz &= \iint_D \Phi \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du dv, \\ \iint_{S^+} \Phi dz dx &= \iint_D \Phi \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} du dv. \end{aligned} \quad (51.13)$$

Los diversos problemas que conducen al concepto de integral de superficie de segunda especie serán considerados en el § 52.

51.2. INTEGRALES DE SUPERFICIE COMO LÍMITES DE LAS SUMAS INTEGRALES

Las integrales de superficie se pueden obtener también como límites de las sumas integrales correspondientes. Supongamos que S es una superficie suave, $r = r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, la representación de dicha superficie y D , una región cuadrable. Supondremos, para simplificar, que en D existen particiones tan menudas como se quiera y los elementos de éstas son regiones cuadrables. Solamente las particiones de este género se considerarán en el presente punto. Tomemos cualquiera de las particiones mencionadas $\tau = \{D_i\}_{i=1}^{i_0}$ de la región D . Designemos mediante S_i , $i = 1, \dots, i_0$, una superficie que se da por la representación $r = r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}_i$. Es evidente que todas las S_i son también superficies suaves (el sistema $\tau_S = \{S_i\}_{i=1}^{i_0}$ lleva el nombre de *partición de la superficie S*). Supongamos que la función $\Phi(r(u, v)) = \Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ es continua en \bar{D} y $(u_i, v_i) \in \bar{D}_i$, $\Phi_i = \Phi(r(u_i, v_i))$. Denotemos con $\cos_i(\widehat{\nu, k})$ el coseno del ángulo formado por la normal ν y el versor k en el punto $r(u_i, v_i)$ de la superficie dada y pongamos

$$\sigma_\tau^{(1)} = \sum_{i=1}^{i_0} \Phi_i \mu S_i, \quad \sigma_\tau^{(2)} = \sum_{i=1}^{i_0} \Phi_i \cos_i(\widehat{\nu, k}) \mu S_i;$$

entonces

$$\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau^{(1)} = \iint_S \Phi(x, y, z) dS, \quad (51.14)$$

$$\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau^{(2)} = \iint_S \Phi(x, y, z) dx dy, \quad (51.15)$$

donde, como siempre, δ_τ es la finura de la partición τ . En efecto,

$$\begin{aligned} \iint_S \Phi(x, y, z) dS &= \iint_D \Phi(r(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv = \\ &= \sum_{i=1}^{i_0} \iint_{D_i} \Phi(r(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv; \end{aligned}$$

por cuanto $\mu S_i = \iint_{D_i} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$, entonces

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= \sum_{i=1}^{i_0} \Phi_i \iint_{D_i} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = \\ &= \sum_{i=1}^{i_0} \iint_{D_i} \Phi(r(u_i, v_i)) \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv. \end{aligned}$$

Al designar ahora con $\omega(\delta; \Phi)$ el módulo de continuidad de la función Φ en la región cerrada \bar{D} , tendremos

$$\begin{aligned} \left| \iint_S \Phi(x, y, z) \, dS - \sigma_r^{(1)} \right| &\leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{i_0} \iint_{D_i} |\Phi(r(u, v)) - \Phi(r(u_i, v_i))| \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv \leq \\ &\leq \omega(\delta_r, \Phi) \sum_{i=1}^{i_0} \mu S_i = \omega(\delta_r; \Phi) \mu S. \end{aligned}$$

Al pasar en esta desigualdad al límite, para $\delta_r \rightarrow 0$, y observar que $\lim_{\delta_r \rightarrow 0} \omega(\delta_r; \Phi) = 0$, obtendremos la fórmula (51.14).

Análogamente se demuestra la fórmula (5.15) (el producto $\Phi \cos(\nu, k)$ es continuo y, por ende, continuo uniformemente en \bar{D}). Los razonamientos similares son lícitos también para las integrales de segunda especie de otros tipos (15.12).

Ejercicio 1. Demuéstrese la fórmula (51.15).

51.3. INTEGRALES DE SUPERFICIE EXTENDIDAS A LAS SUPERFICIES SUAVES A TROZOS

Definamos las integrales de superficie extendidas a las superficies suaves a trozos.

Definición 3. Supongamos que $S = \{S_i\}_{i=1}^k$ es una superficie suave a trozos (véase la definición 23 en el p. 50.9) y $\Phi(x, y, z)$, una función definida en el conjunto de puntos de la superficie S . Entonces, según la definición.

$$\iint_S \Phi \, dS = \sum_{i=1}^k \iint_{S_i} \Phi \, dS_i. \quad (51.16)$$

Definición 4. Si la superficie suave a trozos $S = \{S_i\}_{i=1}^k$ es orientable y $S^+ = \{S_i^+\}_{i=1}^k$ es una de las superficies orientadas que corresponde a S (véanse las designaciones en el p. 50.11), entonces, por definición,

$$\iint_{S^+} \Phi \, dx \, dy = \sum_{i=1}^k \iint_{S_i^+} \Phi \, dx \, dy,$$

$$\iint_{S^+} \Phi dydz = \sum_{i=1}^k \iint_{S_i^+} \Phi dydz,$$

$$\iint_{S^+} \Phi dzdx = \sum_{i=1}^k \iint_{S_i^+} \Phi dzdx. \quad (51.17)$$

Por supuesto, esta definición tiene sentido sólo en el caso en que las integrales en los segundos miembros de las igualdades existen. Para esto es necesario, ante todo, que las representaciones de las superficies S_i sean dadas en las regiones cuadrables.

Análogamente en este caso se definen también las integrales extendidas a la superficie $S^- = \{S_i^-\}_{i=1}^k$.

Nos hemos detenido sólo en aquellas propiedades de las integrales de superficie que están ligadas con el carácter específico de su definición y con la superficie a la que, como suele decirse, se extiende la integración. Es natural que por cuanto las integrales de superficie se reducen a las integrales múltiples ordinarias, para ellas son propias también las diferentes propiedades de las últimas (linealidad, teorema integral del valor medio, etc.).

OBSERVACIÓN. Las condiciones, enunciadas anteriormente (véanse las definiciones 10 en el p. 50.2 y 16 en el p. 50.4), que se imponen sobre las aplicaciones que realizan las transformaciones admisibles de los parámetros para las superficies suaves, resultan ser a menudo demasiado rígidas (compárese con la circunstancia similar para las curvas en el p. 47.3). Por ejemplo, adoptado tal procedimiento, las representaciones de la parte de una bola de radio unidad con centro en el origen de coordenadas, dispuesta en el primer octante:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \text{ donde } x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

y

$$x = r \cos \psi \cos \varphi, \quad y = r \cos \psi \sin \varphi, \quad z = r \sin \psi,$$

donde $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$, no son equivalentes. Más aún, la primera representación no define, en el sentido indicado, una superficie continuamente derivable, por cuanto las derivadas parciales de la función $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ no están acotadas en la región $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$ y no pueden ser continuamente prolongadas a su clausura \bar{D} . Resulta, pues, conveniente ampliar la definición de superficie continuamente derivable. Hagámoslo del modo siguiente.

Examinemos una totalidad de representaciones $r = r(u, v)$ ($u, v \in \bar{D}$), continuas en \bar{D} y continuamente derivables en D . Llamaremos transformaciones admisibles de los parámetros $u = \varphi(u_1, v_1), v = \psi(u_1, v_1), (u_1, v_1) \in \bar{D}_1$, a toda aplicación continua y biunívoca de la clausura \bar{D}_1 de la región plana D_1 sobre \bar{D} que hace pasar puntos interiores a los interiores, puntos de frontera a los de frontera, con la particularidad de que dicha aplicación debe ser continuamente derivable y tener en D un jacobiano distinto de cero. Como siempre, dos representaciones se denominarán equivalentes, si se puede pasar de una de ellas a la otra con ayuda de una transformación admisible de los parámetros.

Diremos que la clase de representaciones equivalentes del tipo mencionado define una superficie continuamente derivable, siempre que en esta clase existe por lo menos una representación $r = r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, que es continuamente derivable hasta la frontera de la región \bar{D} , es decir, definida en la clausura \bar{D} de la región D .

Una superficie continuamente derivable se llama suave, si $r_u \times r_v \neq 0$ en \bar{D} para cierta representación suya $r = r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$. El área de la superficie continuamente derivable representada por $r = r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, se determina como valor de la integral

$$\iint_D |r_u \times r_v| \, du \, dv,$$

la cual es, quizás, impropia. Para convencerse de su existencia, basta realizar el cambio de variable con ayuda de una transformación admisible que convierte la representación dada en alguna otra que sea continuamente derivable hasta la frontera de la región.

De un modo semejante se debilitan los requisitos impuestos sobre las transformaciones admisibles del parámetro para el caso de las superficies orientadas.

Con estas definiciones quedan en vigor todas las definiciones aducidas anteriormente para las integrales de superficie, como también las propiedades de éstas, habida cuenta, naturalmente, de que en tal caso podemos obtener, para ciertas representaciones de las superficies, integrales impropias. Siguen siendo vigentes, además todos los teoremas concernientes a las integrales de superficie que se demuestran en el párrafo que sigue; no obstante, no nos detendremos en este caso especialmente.

Ejercicios. 2. Sea S una superficie suave en el nuevo sentido ampliado y sea Φ una función continua en S . Demuéstrese que existen las integrales

$$\int_S \Phi(x, y, z) \, dx \, dy, \quad \int_S \Phi(x, y, z) \, dz \, dx, \quad \int_S \Phi(x, y, z) \, dy \, dz.$$

Calcúlense las siguientes integrales de superficie de primera especie:

$$3. \iint_S x^2 y^2 \, dS; S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}.$$

$$4. \iint_S \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2}; S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq z \leq H\}.$$

$$5. \iint_S \frac{dS}{r}; S \text{ es una porción de la superficie del paraboloido } z = xy, \text{ obtenida al cor-}$$

tarla por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, y r es la distancia del punto corriente de la superficie S hasta el eje Oz .

Calcúlense las siguientes integrales de superficie de segunda especie:

$$6. \iint_S z \, dx \, dy, \text{ donde } S \text{ es el lado exterior del elipsoide } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$7. \iint_S yz \, dx \, dy + zx \, dy \, dz + xy \, dz \, dx, \text{ donde } S \text{ es el lado exterior de una superficie}$$

compuesta por una porción de la superficie lateral del cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ y las partes de los planos

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad z = H, \quad \text{siendo } x, \quad y, \quad z \geq 0.$$

§ 52. CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

52.1. DEFINICIONES

En lugar de los términos “función numérica de un punto”, “función vectorial de un punto” se usan también términos equivalentes: *campo escalar*, *campo vectorial*. Esta terminología recalca que los valores de las funciones en consideración dependen precisamente de los puntos de un espacio (en los que dichas funciones están definidas) y no dependen de las coordenadas suyas, siendo elegido uno u otro sistema de coordenadas.

Empleando esta terminología, podemos decir, por ejemplo, que todo campo escalar $u = u(M)$, definido y derivable en cierta región G , engendra el campo vectorial de sus gradientes (véanse el p. 20.6 y el p. 50.5, pág 248): $a(M) = \text{grad } u$.

Definición 1. *Supongamos que en la región G ^{a)} está dado un campo vectorial $a = a(M)$ y existe una función $u = u(M)$, definida en G , tal que $a(M) = \text{grad } u(M)$. Entonces la función $u(M)$ lleva el nombre de función potencial o potencial del campo vectorial dado ^{**}.*

Introduciendo el símbolo nabla, $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$ (véase el p. 20.7), podemos escribir:

$$\text{grad } u = \nabla u,$$

donde en el segundo miembro figura el “producto” del vector simbólico nabla por una función numérica u .

Sea, por ejemplo, $E(M)$ la intensidad de un campo eléctrico creado por una carga unidad negativa que se ubica en el origen de coordenadas. Entonces en el punto $M(x, y, z)$ el vector $E(M)$ tiene, según lo sabemos por el curso de la física, la longitud $1/r^2$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, y está dirigido del punto M hacia el origen de coordenadas. De aquí se obtiene que

$$E(M) = \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3} \right).$$

El potencial eléctrico del campo en consideración, es decir, la función $u(M) = 1/r$, es también potencial en el sentido indicado arriba, pues $\text{grad } u(M) = E(M)$.

Consideraremos de nuevo un campo vectorial $a = a(M)$, definido en cierta región G . Fijemos un sistema de coordenadas y en este caso podemos considerar la función vectorial $a(M)$ como función de tres variables, esto es, las coordenadas x, y, z del punto M : $a = a(x, y, z)$.

^{a)} En este párrafo, para simplificar, se considerarán sólo regiones planas o tridimensionales G .

^{**} A veces, en las aplicaciones, el potencial u se determina por la fórmula $a = -\text{grad } u$.

Supongamos que $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in G$ y está dado un vector unidad $e = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. Tracemos por el punto M_0 una recta en la dirección de e :

$$\begin{aligned}x &= x_0 + t \cos \alpha, & y &= y_0 + t \cos \beta, \\z &= z_0 + t \cos \gamma, & -\infty < t < +\infty.\end{aligned}$$

Definición 2. La derivada de la función vectorial

$$a(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma)$$

respecto de t para $t = 0$ (si es que existe) recibe el nombre de derivada de la función vectorial $a(M)$ según la dirección de e en el punto M_0 y se denota $\frac{\partial a}{\partial e}$:

$$\frac{\partial a(M_0)}{\partial e} = \left. \frac{d}{dt} a(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) \right|_{t=0}.$$

Según la regla de derivación de una función compuesta, omitiendo, para simplificar, las designaciones del argumento, obtenemos

$$\frac{\partial a}{\partial e} = \frac{\partial a}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial a}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial a}{\partial z} \cos \gamma. \quad (52.1)$$

Suponiendo $e \nabla = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial}{\partial z}$ ("producto escalar del vector e por el vector simbólico ∇), escribamos la fórmula (52.1) en la forma

$$\frac{\partial a}{\partial e} = (e \nabla) a.$$

Definición 3. Si $b = (b_x, b_y, b_z)$ es un vector fijo arbitrario (no obligatoriamente un vector unidad), entonces el vector

$$(b \nabla) a = b_x \frac{\partial a}{\partial x} + b_y \frac{\partial a}{\partial y} + b_z \frac{\partial a}{\partial z}$$

se llama gradiente del vector a respecto del vector b .

Si $b = b b_0$, donde $|b_0| = 1$, por medio de una "transformación formal" obtenemos

$$(b \nabla) a = (b b_0 \nabla) a = b (b_0 \nabla) a = b \frac{\partial a}{\partial b_0}.$$

Pasando a la notación en coordenadas, es fácil convencerse de que la fórmula obtenida es justa y mostrar que el símbolo ∇ se puede tratar en los cálculos como un vector auténtico sin olvidar, por supuesto, que ∇ significa, además, una operación de la derivación bien determinada. No nos detendremos aquí en la argumentación de legitimidad de tales "transformaciones formales con el símbolo ∇ ". Cualquier fórmula, obtenida de modo semejante, la podemos deducir, por supuesto, sin recurrir al símbolo ∇ , sirviéndose de los razonamientos habituales argumentados en un sistema de coordenadas. Se debe tener en cuenta, sin embargo, que el empleo del símbolo ∇ en muchos casos facilita considerablemente los cálculos.

Volvamos otra vez al campo vectorial de partida $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ en la región G .

Definición 4. Sea $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$ un campo derivable en cierto punto. El número $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$ se denomina divergencia del campo en el punto dado y se denota mediante $\text{div } \mathbf{a}$, es decir,

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (52.2)$$

Simbólicamente $\text{div } \mathbf{a}$ puede ser escrita como producto escalar del símbolo ∇ por el vector \mathbf{a} :

$$\text{div } \mathbf{a} = \nabla \mathbf{a}.$$

Definición 5. Un vector cuyas coordenadas son

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \quad (52.3)$$

lleva el nombre de rotor del campo vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ y se designa $\text{rot } \mathbf{a}$.

Con ayuda del símbolo ∇ el rotor puede escribirse en forma del siguiente producto vectorial:

$$\text{rot } \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \quad (52.4)$$

El significado físico y geométrico de $\text{div } \mathbf{a}$ y $\text{rot } \mathbf{a}$ se aclarará en lo que sigue más abajo.

He aquí un ejemplo de las transformaciones formales con el símbolo ∇ . Si el símbolo ∇ está seguido por varios términos y uno de los últimos se encuentra bajo la acción del símbolo en su calidad de operador de derivación, mientras que los otros términos están libres de la acción mencionada, el término accionado se denotará con una flecha vertical. Expliquemos esto con un ejemplo.

Sea f un campo escalar y \mathbf{a} , un campo vectorial, entonces

$$\begin{aligned} \text{rot } f \mathbf{a} &= \nabla \times f \mathbf{a} = \nabla \times f \mathbf{a} + \nabla \times f \mathbf{a} = \\ &= f(\nabla \times \mathbf{a}) + (\nabla f \times \mathbf{a}) = f \text{rot } \mathbf{a} + \text{grad } f \times \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Introduzcamos unas definiciones más, ligadas con el campo vectorial $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ en la región G .

Definición 6. Sea γ una curva cerrada suave a trozos en la región G . La integral

$$\int_{\gamma} a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

se denomina circulación del campo vectorial $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ a lo largo de la curva γ y se designa $\int_{\gamma} \mathbf{a} d\mathbf{r}$, donde $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$.

Si γ es una curva suave orientada; $\mathbf{t} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ es su vector tangente unidad; s , la longitud variable del arco y pr, a , la magnitud de la proyección del vec-

tor \mathbf{a} sobre la tangente, entonces

$$\int_{\gamma} \mathbf{a} \, dr = \int_{\gamma} \text{pr}_t \mathbf{a} \, ds.$$

Efectivamente,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{a} \, dr &= \int_{\gamma} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \\ &= \int_{\gamma} (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) ds = \int_{\gamma} a \, ds = \\ &= \int_{\gamma} \text{pr}_t \mathbf{a} \, ds. \end{aligned}$$

Definición 7. Un campo cuya circulación a lo largo de cualquier curva cerrada suave a trozos, dispuesta en la región G , es nula, se denomina potencial.

Recordemos que en el p. 47.8 se ha mostrado (véase el lema 2) que la condición, bajo la cual la integral $\int_{\gamma} P dx + Q dy$ es nula a lo largo de cualquier contorno

cerrado $\gamma \subset G$, es equivalente a que $\int_{AB} P dx + Q dy$ no depende del trayecto de

integración entre los puntos A y B . En la demostración de esta afirmación no se especificaba en ninguna circunstancia que la curva γ se dispone en una región plana. Por ello, la demostración del lema 2, aducida en el p. 47.8, queda vigente también para las integrales curvilíneas a lo largo de las curvas espaciales. De este modo, pues, la circulación $\int_{\gamma} \mathbf{a} \, dr = \int_{\gamma} a_x dx + a_y dy + a_z dz$ es nula a lo largo de

cualquier contorno cerrado suave a trozos $\gamma \subset G$ cuando, y sólo cuando, la integral $\int_{AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz$ no dependa del trayecto de integración, es decir, de la curva con su origen en el punto A y extremo en el punto B y que está dispuesta íntegramente en la región G .

Consideremos a título de ejemplo un campo vectorial plano, es decir, el campo $\mathbf{a} = (P, Q)$ dado en la región plana $G: P = P(x, y), Q = Q(x, y)$. El rotor de este campo tiene por expresión

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = k \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

En los términos nuevos el teorema 4 del p. 47.8 puede ser parafraseado de la manera siguiente. Para una región plana simplemente conexa G son equivalentes la noción de carácter potencial del campo, la existencia de una función potencial y la condición de que el rotor del campo es nulo en todos los puntos.

Definición 8. Sea S una superficie orientada dispuesta en la región G , sea \mathbf{v} un vector unidad de la normal a la superficie que determina la orientación de la última,

y sea S^+ la superficie S de orientación indicada. La integral

$$\iint_{S^+} a \nu dS$$

se llama flujo del campo vectorial a través de la superficie S y se designa

$$\iint_S a dS,$$

donde

$$dS = \nu dS \text{ (o bien } \iint_S a dS^+, dS^+ = \nu dS).$$

Es obvio que $a\nu = \text{pr}_\nu a$, razón por la cual $\iint_S a dS = \iint_S \text{pr}_\nu a dS$.

En el flujo $\iint_{S^+} a \nu dS$ se omite corrientemente el índice de orientación y se escribe simplemente $\iint_S a \nu dS$, considerando que a título de orientación se ha tomado la normal ν que figura en la expresión subintegral.

En los puntos ulteriores de este párrafo se estudiarán algunas propiedades de los campos vectoriales, en particular, en el caso tridimensional se establecerán las condiciones necesarias y suficientes para que un campo sea potencial. Se demostrarán previamente los teoremas sobre las integrales, relacionados con los conceptos que se han introducido en el presente punto.

Ejercicio. 1. Demuéstranse las siguientes fórmulas:

a) $\text{rot grad } u = 0$;

b) $\text{div rot } a = 0$;

c) $\text{div grad } u = \Delta u$,

donde $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$;

d) $\text{rot rot } a = \text{grad div } a - \Delta a$, donde $\Delta a = (\Delta a_x, \Delta a_y, \Delta a_z)$, $a = (a_x, a_y, a_z)$;

e) $\text{div}(fa) = f \text{div } a + \text{grad } f a$;

f) $\text{div } a \times b = b \text{ rot } a - a \text{ rot } b$.

2. Hállese el flujo del campo vectorial $a = (x - 2z)i + (x + 3y + z)j + (5x + y)k$ a través de una plazoleta triangular con vértices $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ y de orientación, determinada por una normal dirigida en el sentido opuesto al origen de coordenadas.

3. Hállese el flujo del campo vectorial $a = y^2 i + zk$ a través de la superficie $S: \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 2\}$, si se conoce que la normal unitaria a la superficie citada está dirigida en el sentido opuesto al eje Oz .

4. Hállese el flujo del campo vectorial $a = xi + yj + \sqrt{x^2 + y^2} - 1 k$ a través de la porción de un hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $0 \leq z \leq \sqrt{3}$, opuesta al origen de coordenadas.

5. Hállese el flujo del campo vectorial $a = (xy - y^3)i + (-x^2 + xy + 2x)j + zk$ a través de un lado, opuesto al origen de coordenadas, de la parte de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$, que se obtiene al cortarla por el cono $z^2 = \frac{1}{2}x^2 + y^2$.

6. Hállese $\text{div } a$, si

$$a = (6x^2 y^2 - z^3 + yz - 5)i + (4x^3 y + xz + 2)j + (xy - 3xz^2 - 3)k.$$

Supongamos que $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |r|$, f es una función numérica derivable en todo punto de R_+ , \mathbf{c} , un vector constante. Hállense:

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 7. $\text{div}(f(r)r)$. | 10. $\text{div}(r^2\mathbf{c})$. |
| 8. $\text{rot}(r\mathbf{c})$. | 11. $\text{div}(f(r)\mathbf{c})$. |
| 9. $\text{div}(\text{grad } f(r))$. | 12. $\text{div}(\mathbf{c} \times r)$. |
| | 13. Hállese $\text{rot } a$, si |

$$a = xyz\mathbf{i} + (2x + 3y - z)\mathbf{j} + (x^2 + z^2)\mathbf{k}.$$

Hállense:

- | | |
|---|------------------------------------|
| 14. $\text{rot}(\mathbf{c} \times r)$. | 16. $\text{rot}(f(r)r)$. |
| 15. $\text{rot}((cr)r)$. | 17. $\text{rot}(f(r)\mathbf{c})$. |

18. Hállese la circulación del campo vectorial $\mathbf{a} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ ($c = \text{const}$) a lo largo de la circunferencia $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, dispuesta en el plano Oxy .

19. Hállese la circulación del campo vectorial $\mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ a lo largo de una línea cerrada que se forma por el arco de la astroide $x = R \cos^3 t$, $y = R \sin^3 t$, ($0 \leq t \leq \pi/2$) y los segmentos de los ejes de coordenadas que se obtienen al cortarlos por la citada astroide.

52.2. SOBRE LA INVARIACIÓN DE LOS CONCEPTOS DE GRADIENTE, DIVERGENCIA Y ROTOR

Diremos en primer lugar que al transformar ortogonalmente las coordenadas cartesianas, el vector simbólico ∇ se transforma según las reglas de transformación de los vectores corrientes. En efecto, sea dada la transformación ortogonal de las coordenadas

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z.\end{aligned}\tag{52.5}$$

En el caso de las transformaciones ortogonales la matriz de una transformación inversa coincide con la matriz transpuesta, por lo cual

$$\begin{aligned}x &= a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z' \\y &= a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}z', \\z &= a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z'.\end{aligned}\tag{52.6}$$

Con ello, como es bien conocido, a partir de las fórmulas (52.5) y (52.6) se transforman tanto las coordenadas de los puntos, como las de los vectores.

Haciendo uso de las fórmulas (52.5) y la regla de derivación de una función compuesta, obtendremos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} = \\&= a_{11} \frac{\partial}{\partial x'} + a_{21} \frac{\partial}{\partial y'} + a_{31} \frac{\partial}{\partial z'},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial y} = \\ &= a_{12} \frac{\partial}{\partial x'} + a_{22} \frac{\partial}{\partial y'} + a_{32} \frac{\partial}{\partial z'}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} = \\ &= a_{13} \frac{\partial}{\partial x'} + a_{23} \frac{\partial}{\partial y'} + a_{33} \frac{\partial}{\partial z'}.\end{aligned}\quad (52.7)$$

Correspondientemente, las fórmulas inversas que expresan derivadas respecto de las variables x' , y' , z' en términos de las derivadas respecto de x , y , z , tendrán por expresión

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x'} &= a_{11} \frac{\partial}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial}{\partial y} + a_{13} \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= a_{21} \frac{\partial}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial}{\partial y} + a_{23} \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z'} &= a_{31} \frac{\partial}{\partial x} + a_{32} \frac{\partial}{\partial y} + a_{33} \frac{\partial}{\partial z}.\end{aligned}\quad (52.8)$$

Las fórmulas (52.5) — (52.8) muestran precisamente que las coordenadas de los vectores ordinarios y las “coordenadas” del vector simbólico ∇ se transforman en las transformaciones ortogonales de coordenadas cartesianas, según una misma regla. En particular, de (52.8) se deduce que el gradiente de la función u en el sistema de coordenadas x , y , z , es decir, el vector de coordenadas $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$

el sistema x' , y' , z' las coordenadas $\frac{\partial u}{\partial x'}$, $\frac{\partial u}{\partial y'}$, $\frac{\partial u}{\partial z'}$, es decir, sigue siendo gradiente también en este último sistema de coordenadas. De este modo, queda demostrado una vez más (véase el p. 20.7) que el gradiente de una función no depende de la elección del sistema de coordenadas cartesianas. Por cuanto el vector ∇ se transforma igual que los vectores ordinarios, es natural esperar que el producto escalar ∇a tampoco depende de la elección del sistema mencionado de coordenadas.

Supongamos que el vector a en el sistema x , y , z tiene las coordenadas a_x , a_y , a_z y en el sistema x' , y' , z' , las $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$. En virtud de las fórmulas (52.7), tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} &= a_{11} \frac{\partial a_x}{\partial x'} + a_{21} \frac{\partial a_x}{\partial y'} + a_{31} \frac{\partial a_x}{\partial z'} + \\ &+ a_{12} \frac{\partial a_y}{\partial x'} + a_{22} \frac{\partial a_y}{\partial y'} + a_{32} \frac{\partial a_y}{\partial z'} + a_{13} \frac{\partial a_z}{\partial x'} + a_{23} \frac{\partial a_z}{\partial y'} + \\ &+ a_{33} \frac{\partial a_z}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial x'} (a_{11} a_x + a_{12} a_y + a_{13} a_z) +\end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y'} (a_{21}a_x + a_{22}a_y + a_{23}a_z) + \frac{\partial}{\partial z'} (a_{31}a_x + a_{32}a_y + a_{33}a_z). \quad (52.9)$$

Aplicando las fórmulas (52.5) al vector $a = (a_x, a_y, a_z)$, (es decir, sustituyendo en dichas fórmulas x, y, z por a_x, a_y, a_z , y x', y', z' , por a_x', a_y', a_z'), llegamos a que las expresiones entre paréntesis en el segundo miembro de la igualdad (52.9) son iguales sucesivamente a a_x', a_y', a_z' , y, por consiguiente,

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial a_x'}{\partial x'} + \frac{\partial a_y'}{\partial y'} + \frac{\partial a_z'}{\partial z'}.$$

Esta igualdad muestra precisamente que la divergencia de un campo vectorial en todo punto se determina unívocamente por el propio campo vectorial y no depende de cómo se elige el sistema de coordenadas, lo que al principio podría parecer proveniente de la fórmula (52.2).

Un producto vectorial de los vectores ordinarios no depende, en virtud de su significado geométrico, de la elección de los sistemas cartesianos de coordenadas con la misma orientación (por ejemplo, el producto vectorial de dos vectores no cambiará, si se pasa de un sistema derecho de coordenadas cartesianas (véase el p. 50.8) a otro sistema de la misma orientación. Es por eso que resulta natural esperar que la misma propiedad la posee también el "producto vectorial simbólico" $\text{rot } a = \nabla \times a$.

Efectivamente, si designamos los vectores coordenados unidad del sistema de coordenadas x', y', z' mediante i', j', k' , respectivamente, entonces, como se sabe, los vectores coordenados unidad i, j, k del sistema de coordenadas x, y, z se expresarán en términos de i', j', k' mediante una matriz transpuesta respecto de la matriz de la transformación (52.5), es decir, mediante la matriz de la transformación (52.6):

$$\begin{aligned} i &= a_{11}i' + a_{21}j' + a_{31}k', \\ j &= a_{12}i' + a_{22}j' + a_{32}k', \\ k &= a_{13}i' + a_{23}j' + a_{33}k'. \end{aligned} \quad (52.10)$$

Haciendo uso de las fórmulas (52.6), (52.7) y (52.10), obtenemos

$$\text{rot } a = \nabla \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{l} a_{11}i' + a_{21}j' + a_{31}k' \quad a_{12}i' + a_{22}j' + a_{32}k' \quad a_{13}i' + a_{23}j' + a_{33}k' \\ a_{11} \frac{\partial}{\partial x'} + a_{21} \frac{\partial}{\partial y'} + a_{31} \frac{\partial}{\partial z'} \quad a_{12} \frac{\partial}{\partial x'} + a_{22} \frac{\partial}{\partial y'} + a_{32} \frac{\partial}{\partial z'} \\ a_{13} \frac{\partial}{\partial x'} + a_{23} \frac{\partial}{\partial y'} + a_{33} \frac{\partial}{\partial z'} \\ a_{11}a_x + a_{21}a_y + a_{31}a_z, a_{12}a_x + a_{22}a_y + a_{32}a_z, a_{13}a_x + a_{23}a_y + a_{33}a_z \end{array} \right| = \\
 & = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ \frac{\partial}{\partial x'} & \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial z'} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \quad (52.11)
 \end{aligned}$$

La última igualdad se demuestra igual que en el caso de las matrices numéricas ordinarias se demuestra el hecho de que el determinante de un producto de dos matrices cuadradas de un mismo orden es igual al producto de sus determinantes. Con el fin de demostrar dicha igualdad, basta convencerse de que en sus ambos miembros figuran las sumas algebraicas iguales de los mismos sumandos.

El determinante de la transformación ortogonal es igual a $+1$ ó -1 , con la particularidad de que si dicha transformación conserva su orientación, entonces a $+1$. Por ello, si en el caso que se considera los sistemas elegidos de coordenadas x, y, z y x', y', z' están igualmente orientados, tendremos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$$

y, por consiguiente, de (52.11) se tiene

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ \frac{\partial}{\partial x'} & \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial z'} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Esta igualdad significa precisamente que el rotor del campo vectorial no depende de cómo se elige el sistema de coordenadas cartesianas con la misma orientación que tiene el sistema dado. Indiquemos, sin embargo, si se pasa de un sistema de coordenadas al otro sistema de otra orientación, por ejemplo, de un sistema de coordenadas derecho a un sistema izquierdo, entonces todo rotor (al igual que un producto vectorial ordinario) se sustituirá por un vector opuesto. Esto se deduce de la fórmula (52.11), puesto que el determinante de la transformación ortogonal, que cambia la orientación, es igual a -1 .

De este modo, el rotor de un campo vectorial se determina unívocamente, "salvo el signo", por el propio campo vectorial, y si no limitamos únicamente a los sistemas derechos de coordenadas cartesianas, no depende de la elección de los mismos.

52.3. FÓRMULA DE OSTROGRADSKI — GAUSS. DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE LA DIVERGENCIA

Sea G una región en el espacio R^3_{xyz} . Supongamos que en el plano R^2_{xy} existe tal dominio cuadrable Γ que la frontera de la región G se compone de dos superficies S_1 y S_2 , definidas mediante las representaciones explícitas $z = \varphi(x, y)$ y $z = \psi(x, y)$, respectivamente (donde las funciones $\varphi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ son continuas en la región cerrada $\bar{\Gamma}$, $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y)$, $(x, y) \in \bar{\Gamma}$), y, quizás, de una parte S_0 del cilindro cuya base está formada por la frontera $\partial\Gamma$ de la región Γ (véase el p. 44.1). Supongamos, además, que S_0 , S_1 y S_2 son superficies suaves a trozos (fig. 222). En este caso toda la frontera S de la región G será asimismo una superficie suave a trozos y, además, orientable, como cualquier superficie suave a trozos que sirve de frontera de una región. Las normales exteriores ν de la superficie S en sus partes suaves constituyen las orientaciones de las mismas. Debido a estas orientaciones, las partes suaves de la superficie S están orientadas de manera concordante (véase el p. 50.11) y, por consiguiente, generan la orientación de toda la superficie S . Esta orientación se logra, si para cada parte suave de la superficie se elige la orientación de su borde, concordada con la normal exterior ν en la parte respectiva según la regla del sacacorchos.

Designemos la superficie S y, correspondientemente, las superficies S_0 , S_1 y S_2 de orientación elegida (la que se llamará positiva) mediante S^+ y, correspondientemente, S_0^+ , S_1^+ , S_2^+ . Observemos que aquí de orientación positiva sirve para la superficie S_1 su "cara inferior", y para la superficie S_2 , la "cara superior" de ella (véase 51.1).

La elección de la normal ν en el caso que se considera se describe también de una manera fácil y directa, es decir, sin que se recurra al concepto de normal "exterior": en los puntos de la superficie S_1 , en los que la normal existe, se debe elegir una normal que forma el ángulo obtuso con el eje Oz , y en los puntos de la superficie S_2 , un ángulo agudo. Entre tanto, en los puntos de la superficie S_0 la elección de la normal

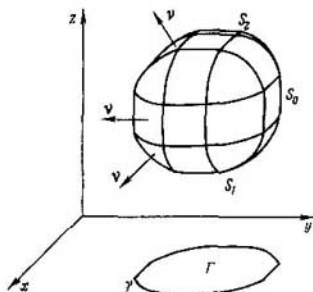


Fig. 222

para nuestros objetivos no nos importa (lo que se pondrá claro en adelante): calculemos las integrales del tipo (51.7) extendidas a la superficie S , las cuales, siendo extendidas a la superficie S_0 , son nulas, cualquiera que sea la elección de las normales, puesto que las últimas son siempre perpendiculares al eje Oz .

Supondremos que la región G posee las propiedades, análogas a las citadas, respecto de todos los ejes coordenados. Tales regiones se llamarán *elementales* (compárese con el p. 47.5). Un ejemplo de región elemental se expone en la fig. 222.

Designemos con $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ los cosenos directores de la normal exterior unitaria ν de la superficie S :

$$\nu = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

Teorema 1 (de Ostrogradski — Gauss ^{*)}. *Supongamos que en la clausura \bar{G} de la región G , del tipo mencionado más arriba, vienen dadas las funciones $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ y $R = R(x, y, z)$ continuas en \bar{G} , lo mismo que todas las derivadas parciales suyas $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$. En este caso*

$$\begin{aligned} \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz &= \\ &= \iint_{S^+} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS. \end{aligned} \quad (52.12)$$

Esta fórmula, al suponer $a = (P, Q, R)$, puede ser escrita en la forma

$$\iiint_G \operatorname{div} a dx dy dz = \iint_S a dS^+, \quad (52.13)$$

es decir, la integral de la divergencia de un campo vectorial, extendida a cierta región, es igual al flujo de este campo a través de la superficie que limita dicha región.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos, por ejemplo, la integral

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz.$$

Al emplear las designaciones introducidas al principio de este punto, obtendremos

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\Gamma^+} \left[\int_{\nu(\alpha, \gamma)}^{\nu(\alpha, \gamma)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right] dx dy =$$

^{*)} M. V. Ostrogradski (1801—1861), matemático ruso; K. F. Gauss (1777—1855), matemático alemán.

^{**)} La continuidad de las derivadas parciales en una frontera se entiende como su prolongabilidad continua a la frontera de la región.

$$\begin{aligned}
 &= \iint_{\Gamma} [R[x, y, \psi(x, y)] - R[x, y, \varphi(x, y)]] dx dy = \\
 &= \iint_{S_2^+} R(x, y, z) dx dy + \iint_{S_1^+} R(x, y, z) dx dy. \quad (52.14)
 \end{aligned}$$

Al observar luego que en la superficie S_0 tiene lugar la igualdad $\cos \gamma = 0$, tendremos (véase (51.7))

$$\iint_{S_0^+} R(x, y, z) dx dy = \iint_{S_0^+} P(x, y, z) \cos \gamma dS = 0.$$

Por eso la fórmula (52.14) puede ser escrita así:

$$\begin{aligned}
 &\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \\
 &= \iint_{S_2^+} R dx dy + \iint_{S_1^+} R dx dy + \iint_{S_0^+} R dx dy = \iint_{S^+} R dx dy. \quad (52.15)
 \end{aligned}$$

De un modo sumamente análogo se demuestran las fórmulas

$$\begin{aligned}
 &\iiint_G \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_{S^+} P dy dz, \\
 &\iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_{S^+} Q dz dx. \quad (52.16)
 \end{aligned}$$

Sumando (52.15) y (52.16), obtendremos precisamente, en virtud de las definiciones (51.7) y (51.12), la fórmula (52.12), llamada *fórmula de Ostrogradski — Gauss*. \square

A veces resulta más conveniente utilizar la fórmula (52.12) en la forma

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{S^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

La validez de tal notación se deduce directamente de la definición de la integral de superficie de segunda especie: véase (51.7) y (51.12).

La fórmula de Ostrogradski — Gauss (52.12) puede demostrarse también para las regiones G de la forma más general en comparación con las mencionadas, a saber, para aquellas que admiten la partición finita en las regiones G_i , $i = 1, 2, \dots, i_0$, del tipo considerado más arriba. Con este fin es suficiente escribir la fórmula de Ostrogradski para cualquiera de las regiones G_i y sumar los resultados; de resultas se obtiene la fórmula buscada para la región G . Efectivamente, en el primer miembro de la igualdad se obtendrá, en virtud de que la integral es aditiva, una in-

tegral correspondiente extendida a la región G , mientras que en el segundo miembro las integrales de superficie calculadas a lo largo de las partes correspondientes de las fronteras de las regiones G_i darán en suma cero, porque las normales exteriores en los puntos de fronteras de las regiones G_i , pertenecientes a las fronteras de dos regiones de este género, están dirigidas en las direcciones opuestas; quedarán, pues, sólo las integrales a lo largo de aquellas partes de las fronteras de G_i que forman en su totalidad la frontera de la región G (compárese con el p. 47.5). Los planos paralelos a los planos coordenados suelen ser más cómodos para obtener las particiones citadas de la región G .

Observemos que entre las regiones de este género hay también aquellas cuya frontera se compone de unos cuantos "trozos", es decir, puede ser representada como suma de un número finito de superficies disjuntas suaves a trozos (compárese con las generalizaciones correspondientes de la fórmula de Green en el p. 47.5).

Se puede mostrar que la fórmula de Ostrogradski — Gauss es válida para cualquier región limitada cuya frontera se compone de un número finito de las superficies suaves a trozos. Sin embargo, esto sería un trabajo muy voluminoso y no nos detendremos en dicho problema, limitándonos solamente a la formulación del teorema.

Teorema 1 (de Ostrogradski — Gauss). *Supongamos que la frontera ∂G de una región limitada G se compone de un número finito de superficies suaves a trozos y que el vector $a = (P, Q, R)$, como también las derivadas parciales $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ y $\frac{\partial R}{\partial z}$ son continuas en \bar{G} , entonces*

$$\iiint_G \operatorname{div} a \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial G} a \, dS.$$

Como orientación en las partes suaves de la frontera ∂G está elegida aquí la normal exterior.

Por ejemplo, si $G = \{(x, y, z) : 0 < a < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < b\}$ es un anillo esférico y, por lo tanto, su frontera se compone de dos esferas

$$S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\} \quad y$$

$$S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = b^2\},$$

entonces, en la esfera interior S_1 se debe tomar una normal dirigida hacia el centro de la bola G y en la esfera exterior S_2 , en la dirección contraria.

La fórmula de Ostrogradski — Gauss permite hallar la expresión para el volumen de una región mediante la integral correspondiente de superficie. Efectivamente, poniendo en (52.12), $P(x, y, z) = x$, $Q(x, y, z) = y$, $R(x, y, z) = z$, y observando que $\iiint_G dx \, dy \, dz = \mu G$, obtendremos

$$\mu G = \frac{1}{3} \iint_{\partial G} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) \, dS,$$

o bien

$$\mu G = \frac{1}{3} \iint_{\partial G} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy.$$

La fórmula de Ostrogradski — Gauss ofrece la posibilidad de establecer un enfoque geométrico al concepto de divergencia.

Teorema 2. *Supongamos que en una región tridimensional G^* está definido el campo vectorial continuamente derivable $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$. Sea $M_0 \in G$ y sea D tal región con la frontera suave a trozos S que $M_0 \in D$, $\bar{D} \subset G$ y para el dominio D es válida la fórmula de Ostrogradski — Gauss**).*

Designemos con S^+ la superficie S , orientada con ayuda de la elección de la normal exterior, y con $d(D)$, el diámetro del dominio D . Entonces

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M_0) = \lim_{d(D) \rightarrow 0} \frac{\iint_S \mathbf{a} dS^+}{\mu D}, \quad (52.17)$$

DEMOSTRACIÓN. Según la fórmula (52.13) tenemos

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{a} dx dy dz = \iint_S \mathbf{a} dS^+. \quad (52.18)$$

Mas según el teorema integral del valor medio (p. 44.6),

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{a} dx dy dz = \operatorname{div} \mathbf{a}(M) \mu D, \quad M \in D. \quad (52.19)$$

Al sustituir (52.19) en (52.18), obtenemos

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \frac{\iint_S \mathbf{a} dS^+}{\mu D}. \quad (52.20)$$

Pasando al límite en la fórmula (52.20) para $d(D) \rightarrow 0$, obtendremos, por ser continua la función $\operatorname{div} \mathbf{a}(M)$ en el punto M_0 , la fórmula (52.17). \square .

Se puede probar que las magnitudes en el segundo miembro de la igualdad (52.27) no dependen de la elección del sistema de coordenadas (en el segundo miembro figuran la integral doble de un producto escalar de los vectores y el volumen de la región), por lo cual de aquí se deduce una vez más que la divergencia del campo vectorial no depende de la elección del sistema de coordenadas.

De la igualdad (52.17) se infiere que el segundo miembro de esta igualdad puede considerarse como la definición de la divergencia del campo dado.

Los puntos del campo vectorial \mathbf{a} , en los que $\operatorname{div} \mathbf{a} \neq 0$, reciben el nombre de "fuentes" del campo vectorial. El carácter natural de este término se explica intuitivamente por aquella circunstancia que si el punto es una "fuente", entonces, como se deduce de la fórmula (52.17), para todas las regiones D , cuyos diámetros son suficientemente pequeños y que contienen el punto M_0 , tendremos $\iint_S \mathbf{a} dS^+ \neq 0$, es

decir, el flujo a través de cualquier superficie, suficientemente pequeña, que rodea la fuente, no es igual a cero.

*¹) Aquí no se imponen ningunas restricciones sobre la estructura de la región G .

**²) Las regiones D de esta índole siempre existen, por ejemplo, entre ellas figuran todas las bolas de radio suficientemente pequeño con centro en el punto M_0 , o bien los cubos de dimensiones suficientemente pequeñas con centro en el punto M_0 .

52.4. FÓRMULA DE STOKES. DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DEL ROTOR

Supongamos que S es una superficie en el espacio R^3_{xyz} dos veces continuamente derivable privada de puntos singulares; $r = r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$ es su representación y D , una región limitada plana, para la cual es válida la fórmula de Green. Admitamos que la frontera de la región D se compone de un contorno sencillo suave a trozos. Designemos con γ_0 el contorno orientado positivo que limita el dominio D , y con $u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \leq t \leq b$, la representación de este contorno. Sea

$$\nu = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$$

la orientación en la superficie S (véase la definición 20 en el p. 50.8), $\nu = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. Bajo las suposiciones asumidas la normal ν es continua en \bar{D} .

Designemos mediante S^+ la superficie S con la normal ν elegida en S . Sea Γ un contorno que tiene la representación $r = r(u(t), v(t))$, $a \leq t \leq b$. Diremos que el contorno Γ limita la superficie S y también que la superficie S está tendida sobre el contorno Γ .

Supongamos, por fin, que G es una región en el espacio R^3_{xyz} y $S \subset G$. Cumplidas estas suposiciones, resulta válido el siguiente teorema.

Teorema 3 (de Stokes ^{a)}). *Supongamos que las funciones P , Q y R son continuas en la región G , al igual que sus primeras derivadas parciales, y sea $a = (P, Q, R)$. En este caso*

$$\int_{\Gamma} a dr = \iint_S \operatorname{rot} a dS^+, \quad (52.21)$$

es decir, la circulación de un campo vectorial a lo largo del contorno Γ es igual al flujo del rotor de este campo a través de la superficie S , limitada por el contorno Γ . En la forma coordenada esta fórmula tiene por expresión

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

o bien

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS. \quad (52.22)$$

DEMOSTRACIÓN. Examinemos, por, ejemplo, la integral $\int_{\Gamma} P dx$. Al observar

que a lo largo de las curvas Γ_0 y Γ las variables u y v son funciones de t , y al hacer uso de las designaciones introducidas al principio de este punto, obtendremos

^{a)} G. Stokes (1819—1903), matemático y mecánico inglés.

$$\int_{\Gamma} P(x, y, z) dx = \int_a^b P[x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))] x'_i(u(t), v(t)) dt = \int_{\Gamma_0} P[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \left[\frac{\partial x(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} dv \right].$$

Hemos aprovechado aquí la fórmula

$$x'_i(u(t), v(t)) = \frac{\partial x(u(t), v(t))}{\partial u} \frac{\partial u}{dt} + \frac{\partial x(u(t), v(t))}{\partial v} \frac{\partial v}{dt}.$$

Al aplicar la fórmula de Green a la integral obtenida tendremos:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} P dx &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right] du dv = \\ &= \iint_D \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + P \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} - P \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \right] du dv = \\ &= \iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du dv = \\ &= \iint_{S^+} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \iint_{S^+} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) dS. \quad (52.23) \end{aligned}$$

Aquí se han tomado en consideración las fórmulas (51.7), (51.10) y (51.13). Análogamente se demuestra que

$$\int_{\Gamma} Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos \gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \alpha \right) dS, \quad (52.24)$$

$$\int_{\Gamma} R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos \beta \right) dS. \quad (52.25)$$

Sumando las fórmulas (52.23), (52.24) y (52.25), obtendremos, precisamente la fórmula (52.22) que lleva el nombre de Stokes. \square

Para imaginarse de la manera más ilustrativa la relación que existe entre la elección de la normal ν en la superficie S y la orientación del contorno Γ , que la limita, consideraremos una superficie S que tiene la representación explícita $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}$.

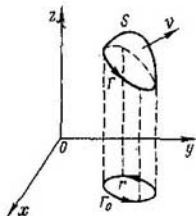


Fig. 223

Sea Γ_0 un contorno orientado positivo en el plano xOy que es al mismo tiempo la frontera de D , y sea $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, la representación de dicho contorno. La orientación de la curva Γ la definamos, como hasta ahora, mediante la representación

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = f[x(t), y(t)], \quad a \leq t \leq b. \quad (52.26)$$

En el caso dado el contorno Γ_0 es la proyección de la curva Γ . Entre tanto, la normal ν , como ya se ha mostrado, forma con el eje Oz (cuando la superficie se representa de manera explícita) un ángulo agudo (véase el p. 51.1), por lo cual si la superficie S se observa desde la dirección positiva del eje Oz , el contorno Γ quedará orientado en el sentido contrahorario, es decir, la orientación de la curva Γ está concordada con la normal ν ("según la regla del sacacorchos") (fig. 223). Esto es equivalente a que un observador, que recorre la superficie S a lo largo del contorno orientado Γ y que la mira desde el extremo de la normal ν , ve la superficie S dispuesta a la izquierda. Esta interpretación evidente de concordancia entre la orientación de la normal ν y la del contorno Γ tiene la ventaja de que no está relacionada con la elección del sistema de coordenadas y queda válida para cualquier superficie S , considerada en relación con el teorema de Stokes, y no sólo para una superficie dada explícitamente. Por supuesto, todos semejantes razonamientos no representan demostraciones matemáticas, sino que sólo explican de modo palpable la fórmula de Stokes.

Cabe observar que la fórmula de Stokes queda válida, si consideramos en ella la orientación opuesta del contorno y las normales opuestas $-\nu$; en este caso ambos miembros de la igualdad (52.21) cambian el signo por el contrario (las orientaciones del contorno y de la superficie quedan concordadas según la "regla del sacacorchos").

La fórmula de Stokes puede ser demostrada también para las superficies orientables suaves a trozos $S = \{S_j\}_{j=1}^{i_0}$, a saber, en el caso cuando las superficies S_j , $j = 1, 2, \dots, i_0$, satisfacen las condiciones del teorema demostrado 3. En este último caso el borde de la superficie ∂S (véase el p. 50.11) puede ser de un número finito de los contornos cerrados Γ_j , $j = 1, 2, \dots, j_0$.

Para demostrarlo, basta escribir las fórmulas de Stokes para cada superficie S_j , $j = 1, 2, \dots, i_0$, y sumarlas (compárese con las generalizaciones de la fórmula de

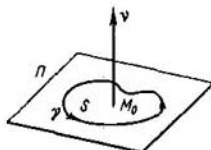


Fig. 224

Green en el p. 47.5 y del teorema de Ostrogradski — Gauss en el n.º 52.3).

Indiquemos, además, que la condición de que la superficie S sea *dos veces* continuamente derivable fue impuesta en el teorema 3 sólo con el objeto de simplificar la demostración (la última se hace *esencialmente* más simple). La fórmula de Stokes (52.21) queda en vigor también, si se supone sólo la suavidad de la superficie S (conservándose las demás condiciones del teorema). La demostración de esta afirmación sale de los márgenes de nuestro curso.

De lo dicho proviene que la fórmula de Stokes sigue siendo lícita también para las superficies $S = \{S_j\}_{j=1}^{j_0}$ que son simplemente orientadas y suaves a trozos (es decir, sin la suposición de que las superficies S_j hayan de ser *dos veces* continuamente derivables).

Enunciemos ahora el teorema para este caso.

Teorema 3' (de Stokes). *Supongamos que la función vectorial a es continuamente derivable en la región G y sea $S = \{S_j\}_{j=1}^{j_0}$ una superficie orientada suave a trozos cuyo borde ∂S tiene orientación engendrada por la orientación dada de la superficie S (véase el p. 50.11). Entonces*

$$\int_{\partial S} a \, dr = \iint_S \operatorname{rot} a \, dS.$$

La concordancia de las orientaciones de los contornos Γ_j , de los que se compone el borde ∂S de la superficie S , con la orientación de dicha superficie y, por lo tanto, con la de ν de las superficies S_j , significa con evidencia que un observador, que se mueve a lo largo del contorno Γ_j , $j = 1, 2, \dots, j_0$, y mira a la superficie S desde la punta de la normal ν , ve la superficie S dispuesta a la izquierda.

El teorema de Stokes ofrece la posibilidad de establecer un enfoque geométrico al concepto de rotor de un campo vectorial.

Teorema 4. *Supongamos que en la región tridimensional G está definido un campo vectorial continuamente derivable $a = a(M)$; M_0 es un punto fijo, $M_0 \in G$, ν es un vector unidad constante arbitrariamente elegido y Π , un plano que es perpendicular a ν y pasa por el punto M_0 ; S es una región limitada en el plano Π cuya frontera está representada por el contorno suave a trozos Γ , $d(S)$ es el diámetro de la región S ; supongamos también que el contorno Γ está orientado, de modo con-*

cordado, con la normal ν^* , $M_0 \in S$ y $S \subset G^{**}$ (fig. 224). En este caso **)

$$\operatorname{rot}_\nu a(M_0) = \lim_{d(S) \rightarrow 0} \left(\frac{\int_\Gamma a dr}{\mu S} \right), \quad (52.27)$$

DEMOSTRACIÓN. Según la fórmula de Stokes,

$$\int_\Gamma a dr = \iint_S \operatorname{rot}_\nu a dS,$$

mas, conforme al teorema integral del valor medio,

$$\iint_S \operatorname{rot}_\nu a dS = \operatorname{rot}_\nu a(M) \mu S, \quad M \in S.$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{rot}_\nu a(M) = \frac{\int_\Gamma a dS}{\mu S}. \quad (52.28)$$

Observemos que cuando $d(S) \rightarrow 0$, también $M \rightarrow M_0$. En vista de que la función $\operatorname{rot}_\nu a(M)$ es continua en el punto M_0 , pasando al límite en (52.28) para $d(S) \rightarrow 0$, obtendremos la fórmula (52.27). \square

De (52.27) se deduce que el segundo miembro de esta igualdad puede considerarse como la definición de la proyección del rotor del campo dado sobre el vector unidad ν , arbitrariamente elegido pero fijo. Esto nos lleva también a la nueva definición del propio vector, puesto que será suficiente, por ejemplo, elegir arbitrariamente tres vectores ortogonales unidad ν_1, ν_2, ν_3 , las proyecciones sobre los cuales, como es sabido, determinan unívocamente cualquier vector.

Se puede mostrar que las magnitudes que figuran en el segundo miembro de la igualdad (52.27) no dependen de la elección del sistema de coordenadas, no obstante la concordancia de las orientaciones del vector ν y contorno Γ sí depende de la orientación del sistema de coordenadas: al pasar del sistema de coordenadas derecho al izquierdo, la concordancia de las orientaciones de ν y Γ según "la regla del sacacorchos" se sustituye por la concordancia según la regla inversa, de acuerdo con la cual; siendo fijada la orientación del vector ν , la del contorno Γ se cambia en opuesta. De este modo, la integral $\int_\Gamma a dr$ cambia de signo, cuando varía la orienta-

ción del sistema de coordenadas, por lo cual, en virtud de la fórmula (52.27), cambia de signo también $\operatorname{rot}_\nu a$.

De lo dicho proviene que la fórmula de Stokes (52.22) es lícita no sólo para el sistema de coordenadas derecho, sino también para el izquierdo, puesto que, al variar

*) Como en el teorema 3 (según la "regla del sacacorchos").

***) Es evidente que las regiones citadas S siempre existen (¿por qué?).

****) Mediante $\operatorname{rot}_\nu a$ está designada la proyección del vector $\operatorname{rot} a$ sobre el vector ν , es decir, $\operatorname{rot}_\nu a = \nu \operatorname{pr} \operatorname{rot} a$.

la orientación del sistema de coordenadas, tanto el miembro izquierdo, como el derecho de la igualdad (52.22) cambian de signo: siendo fijada la orientación del vector ν de la superficie S , cambian de signo tanto $\text{rot } a$ como también el contorno Γ , si varía la orientación del sistema de coordenadas.

52.5. CAMPOS VECTORIALES SOLENOIDALES

Una región limitada para la cual se cumple el teorema de Ostrogradski — Gauss (véase el p. 52.3) se llamará en este punto *admisibile*. Se denominará *admisibile* la totalidad de superficies, si es la frontera de una región admisibile.

Se ha observado en el p. 52.3 que el teorema de Ostrogradski — Gauss es válido para cualquiera región acotada cuya frontera se compone de un número finito de las superficies suaves a trozos. Por ello, cualquiera de tales regiones es admisibile. Es justa, evidentemente, la afirmación recíproca: toda región admisibile tiene frontera compuesta de un número finito de las superficies suaves a trozos, pues, de lo contrario no se podría ni siquiera hablar sobre las integrales de superficie a lo largo de la frontera.

El lector que prefiere utilizar tan sólo hechos demostrados, puede tomar en calidad de regiones y superficies admisibles aquellas, para las cuales fue demostrado en el presente curso el teorema de Ostrogradski — Gauss.

Definición 9. Un campo vectorial $a = a(x, y, z)$, continuamente derivable en la región G , se denomina *solenoidal* en la misma, si el flujo del campo a través de la frontera orientada de cualquier región admisibile D , cuya clausura \bar{D} se dispone en G : $\bar{D} \subset G$, es igual a cero:

$$\iint_{\partial D} a dS = 0. \quad (52.29)$$

La frontera ∂D de la región admisibile D tiene dos orientaciones, generadas por las normales interior y exterior, respectivamente. Es evidente que si la condición (52.29) se cumple con una orientación, se cumplirá también con la otra, puesto que las integrales correspondientes pueden diferenciarse sólo en el signo.

Explicuemos la definición del campo solenoidal con un ejemplo. Sea G un anillo esférico: una parte del espacio comprendida entre dos esferas S_r y S_R que tienen el centro común O y los radios r y R , $r < R$, y sea a el campo vectorial solenoidal en G . Entonces, su flujo será nulo, por ejemplo, a través de cualquier esfera S que se dispone en G y limita una bola, también dispuesta en G .

Sin embargo, el flujo del campo vectorial a a través de la esfera S_ρ de radio ρ , $r < \rho < R$, y centro en el punto O no ha de ser nulo, puesto que la bola, limitada por dicha esfera, no se contiene en la región G (fig. 225).

Por otro lado, será nula la suma de los flujos del campo vectorial a través de dos esferas S_{ρ_1} y S_{ρ_2} de radios ρ_1 y ρ_2 , $r < \rho_1 < \rho_2 < R$, y del mismo centro, si orientamos una de éstas eligiendo una normal que va al centro y la otra, en la dirección opuesta. Efectivamente, las esferas mencionadas limitan un anillo esférico, íntegramente dispuesto en la región G , mientras que su orientación elegida es la orientación de la frontera que corresponde a la normal exterior o interior. Por esto, según la definición del campo solenoidal, el flujo de éste a través de la frontera orientada que se considera será igual a cero.

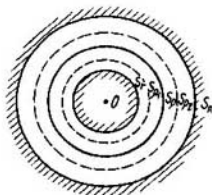


Fig. 225

Teorema 5. Para que un campo vectorial continuamente derivable en la región G sea solenoidal en ella, es necesario y suficiente que su divergencia sea nula en todos los puntos de la región G :

$$\operatorname{div} a(M) = 0, \quad M \in G.$$

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sea a un campo vectorial solenoidal en la región G y $M_0 \in G$. Designemos con Q_r una bola abierta de radio $r > 0$ y centro en el punto M_0 , y con S_r , la esfera que limita dicha bola. Por cuanto todos los puntos $M \in G$, incluido también el punto M_0 , son interiores para G , entonces existe tal $r_0 > 0$ que para $r < r_0$ todas las bolas de radio r , junto con las esferas que las limitan, se contendrán dentro de G .

Ha de notarse ahora que el límite (52.17), igual al valor de la divergencia del campo vectorial a en el punto M_0 , existe para las regiones admisibles arbitrarias D , $D \subset \bar{D} \subset G$, cuyos diámetros tienden a cero. Por esta razón él existe también cuando $D = Q_r$, $r < r_0$ se elige especialmente:

$$\operatorname{div} a(M_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\iint_{S_r} a dS}{\mu Q_r}.$$

En vista de la definición del campo solenoidal, para todo $r < r_0$ tiene lugar la igualdad

$$\iint_{S_r} a dS = 0,$$

por lo cual $\operatorname{div} a(M_0) = 0$.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Sea a un campo vectorial, continuamente derivable en la región G , con la divergencia igual a cero en todos los puntos de la región G . Si D es una región admisible arbitraria de tal género que $D \subset \bar{D} \subset G$, entonces, en virtud del teorema de Ostrogradski — Gauss

$$\iint_D a dS = \iiint_D \operatorname{div} a dx dy dz = 0,$$

es decir, el campo a es solenoidal. \square

De ejemplo tipo de campo solenoidal interviene un campo vectorial que representa en sí en cierta región el campo de rotadores de un campo vectorial dos veces continuamente derivable en la región citada.

En efecto, si a es un campo dos veces continuamente derivable en la región G , entonces $\text{rot } a$ es un campo solenoidal en G , ya que $\text{div rot } a = 0$.

No es difícil ofrecer un razonamiento verosímil que afirma la validez de esta correlación. Con este fin basta pasar al vector simbólico ∇ ; entonces la igualdad en consideración tomará la forma $\nabla(\nabla \times a) = 0$.

Un producto mixto de los vectores ordinarios en el caso en que dos factores son coincidentes, es nulo, puesto que en este caso un paralelepípedo tendido sobre dichos vectores degenera en un paralelogramo y, por ende, su volumen es igual a cero. Por esta razón es natural esperar que la igualdad mencionada es verdadera también para el vector ∇ . Este razonamiento verosímil puede convertirse en el argumentado matemáticamente que tenga una fuerza probatoria, si demostramos que el vector simbólico ∇ posee, de hecho, las propiedades, ya utilizadas por nosotros, análogas a las propiedades correspondientes de los vectores ordinarios. Lo último puede hacerse con ayuda de una simple comprobación, pasando, por ejemplo, a una notación coordenada (véanse (52.2) y (52.4)).

52.6. CAMPOS VECTORIALES POTENCIALES

En este punto la superficie S , para la cual es válido el teorema de Stokes, se llamará admisible.

Definición 10. La región tridimensional G se denomina simplemente conexa, si, cualquiera que sea una quebrada cerrada γ , dispuesta en G , existe la superficie admisible S que se dispone también en G y está tendida sobre la quebrada γ (véase el punto 52.4).

A veces las regiones simplemente conexas se llaman *conexas simple y superficialmente*.

Si la región en consideración G es cóncava, existe un método muy simple para tender las superficies sobre el contorno. La superficie buscada siempre puede tomarse en este caso en forma de un cono con vértice en el punto arbitrariamente fijado $M_0 \in G$, para el cual la curva dada γ sirve como directriz. Si

$$\rho = \rho(u), \quad 0 \leq u \leq 2\pi,$$

es la representación de esta curva y r_0 es el radio vector del punto M_0 , entonces el cono buscado S , tendido sobre el contorno dado, se da mediante la representación

$$r = r_0 + v[\rho(u) - r_0], \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 1. \quad (52.30)$$

Considerando u y v como coordenadas polares, vemos que la "representación" del cono viene dada en un círculo unitario, con la particularidad de que la circunferencia unitaria $\gamma_0 = \{(u, v) : v = 1\}$ pasa al contorno dado γ , y su centro, al vértice del cono (fig. 226).

La palabra "representación" viene entre comillas, puesto que el concepto de representación de una superficie se ha introducido más arriba sólo para el caso en que los parámetros u y v eran coordenadas cartesianas. El cono (52.30) tendrá, en el

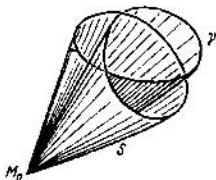


Fig. 226

caso general, puntos múltiples y no será una superficie suave a trozos incluso en el caso cuando γ sea una curva suficientemente suave, es decir, si γ es una curva sin puntos singulares continuamente derivable un número suficiente de veces. En el cono (52.30) habrá, en general, puntos singulares distintos del vértice. Precisamente para eliminar este inconveniente de un modo más sencillo, nos hemos limitado, definiendo la región simplemente conexa, a considerar los contornos en forma de las quebradas cerradas. En este último caso el vértice del cono M_0 puede siempre elegirse de un modo tal que el cono citado sea una superficie suave a trozos. Efectivamente, cualquiera que sea la elección del vértice del cono en el caso en que una cierta quebrada γ sirva de su directriz, el cono se descompone en un número finito de triángulos S_i , $i = 1, 2, \dots, k$, los cuales, en verdad, serán, quizás, degenerados, es decir se convertirán en un segmento o un punto. Uno de los vértices de dichos triángulos será precisamente el vértice M_0 del cono, mientras que el lado opuesto lo constituirá uno de los lados de la quebrada γ . Cada uno de estos triángulos puede considerarse como una superficie continuamente derivable cualquier número de veces y prefijarse mediante una representación realizada por las funciones lineales (véanse el p. 16.5 y (52.30)). Si el triángulo es degenerado, todos los puntos de él serán singulares. No obstante, mediante un desplazamiento, tan pequeño como se quiera, del vértice del cono podemos conseguir que el vértice esté en una posición general con todos los lados de la quebrada γ , es decir, no se disponga en ninguna de las rectas que pasen por un lado cualquiera de la quebrada γ . De resultas, todos los triángulos S_i , $i = 1, 2, \dots, k$, serán regulares y, por lo tanto, podrán considerarse como superficies suaves privadas de puntos singulares. En cuanto al propio cono S , éste resultará ser, de tal modo, una superficie suave a trozos $S = \{S_i\}_{i=1}^k$. Además, por cuanto todo punto de una región, cualquiera que sea su desplazamiento tan pequeño como se quiera, queda dentro de la región, el vértice M_0 del cono S puede siempre elegirse en la misma, a consecuencia de lo cual, por ser convexa la región, todo el cono se dispondrá dentro de ella. Al cono suave a trozos S , que se ha obtenido, se le puede aplicar el teorema de Stokes, en otras palabras, dicho cono es una superficie admisible en este punto. Hemos demostrado pues que toda *región convexa es simplemente conexa*.

Como ejemplo de región no simplemente conexa puede servir un toro, es decir, una región formada por la rotación de un círculo en torno del eje que no lo interseca (fig. 227).

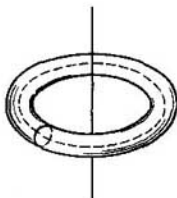


Fig. 227

Recordemos que un campo se llama potencial, si su circulación $\int_{\gamma} \mathbf{a} \, dr$ es nula a lo largo de cualquier contorno cerrado $\gamma \subset G$, o bien, que es lo mismo, si la integral $\int_{AB} \mathbf{a} \, dr$ no depende del camino de integración que une en la región G los puntos A y B .

Los razonamientos más detallados sobre esto se encuentran en el p. 52.1. Resulta que en una región simplemente conexa un campo vectorial será potencial, si, y sólo si, es irrotacional. Esta afirmación está contenida y se demuestra en el teorema 6 que sigue abajo.

Teorema 6. Sea dado en la región simplemente conexa G un campo vectorial continuamente derivable $\mathbf{a} = (P, Q, R)$. Para este caso son equivalentes las siguientes tres propiedades:

1. El campo vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ es potencial en la región G .

2. Existe una función $u = u(M)$, potencial en G , es decir, tal función $u(M)$ que $\mathbf{a} = \text{grad } u$, o bien, que es lo mismo, $du = P \, dx + Q \, dy + R \, dz$. En este caso para cualesquiera dos puntos $A \in G$ y $B \in G$ y toda curva suave a trozos AB , que en G une dichos puntos, se verifica la igualdad

$$\int_{AB} \mathbf{a} \, dr = u(B) - u(A).$$

3. El campo vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ es irrotacional: $\text{rot } \mathbf{a} = 0$ en la región G , es decir,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Subrayemos que del teorema 6 se deduce, en particular, que el campo vectorial \mathbf{a} , continuamente derivable en una región simplemente conexa, es potencial cuando, y sólo cuando, sea un campo de gradientes de cierta función escalar u :

$$\mathbf{a} = \nabla u.$$

DEMOSTRACIÓN. Se realizarán los razonamientos según el siguiente esquema.



Paso primero: $1 \Rightarrow 2$. Esta afirmación, es decir, la existencia de la función potencial, se demuestra por analogía completa con el caso de una región plana considerado anteriormente (véase el teorema 3 en el p. 47.8) y por esta razón nos abstengamos de su demostración.

Paso segundo: $2 \Rightarrow 3$. La afirmación $2 \Rightarrow 3$ también se demuestra igual que en el caso plano: significa simplemente que las correspondientes segundas derivadas mixtas de una función potencial son iguales.

Las afirmaciones $1 = 2$ y $2 = 3$ son justas también sin que se suponga que G es una región simplemente conexa.

Paso tercero: $3 \Rightarrow 1$. Sea en G $\text{rot } a = 0$. Admitamos primero que γ es una curva cerrada, dos veces continuamente derivable a trozos, dispuesta en G . Si existe una superficie admisible S , contenida en G y limitada por el contorno γ , entonces, del teorema de Stokes obtenemos inmediatamente

$$\int_{\gamma} a dr = \iint_S \text{rot } a dS = 0.$$

Ya que la región G es simplemente conexa (véase la definición 10), esta igualdad se verifica, en particular, para cualquier quebrada que tiene un número finito de lados. Por eso, si γ es una curva cerrada suave a trozos, dispuesta en G , entonces, eligiendo una sucesión de quebradas λ_n , inscritas en γ con los lados que tienden a cero para $n \rightarrow \infty$, de acuerdo con el lema 3 del p. 47.8, obtendremos

$$\int_{\gamma} a dr = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\lambda_n} a dr = 0. \quad \square$$

Como conclusión observemos que aunque los campos vectoriales potenciales y solenoidales no abarcan todos los campos vectoriales posibles, permiten, sin embargo, describir una clase bastante amplia de los campos vectoriales. A saber, asumidas ciertas suposiciones suficientemente generales, cualquier campo vectorial a representa una suma de los campos vectoriales potencial y solenoidal. Con más precisión, existen una función escalar u y un campo vectorial b tales que $a = \nabla u + \text{rot } b$. Por cuanto $\text{rot } \nabla u = 0$ y $\text{div rot } b = 0$, entonces el primer sumando es un campo potencial y el segundo, solenoidal.

Esta suposición se llama también teorema de Helmholtz^{*)} (su demostración se puede hallar en el libro "Métodos de la física teórica" que se debe a la pluma de P. M. Morse y G. Feshbach (P. Morse, G. Feshbach, *Methods of theoretical physics*, New York-Toronto-London, 1953).

Ejercicios. 20. Demuéstrese que el flujo de un rotor de un campo vectorial continuamente derivable en cierta región a través de una esfera cualquiera dispuesta en la región mencionada es igual a cero.

21. Demuéstrese que

$$\iiint_G \text{grad } \varphi \text{ rot } a \, dx \, dy \, dz = \iint_S (a \times \text{grad } \varphi \, dS).$$

^{*)} H. Helmholtz (1821—1894), físico y fisiólogo alemán.

Aquí se supone que para la región G , limitada por la superficie S , queda aplicable el teorema de Ostrogradski — Gauss.

22. Hállense la divergencia y el rotor para los campos vectoriales $a = r/|r|^3$ y $b = r/|r|$. ¿Serán estos campos potenciales, solenoidales? Calcúlese el flujo de los campos vectoriales a y b a través de esfera $S_R = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.

23. Calcúlese el flujo del campo vectorial $a = \frac{r}{|r|^3}$ a través de la esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 2$.

24. Sean a, b y c los campos vectoriales derivables y sea u una función escalar, dos veces derivable, en la región $G \subset R^3$, $b = \text{grad } u$, $a = b + c$. Demuéstrase que para que sea $\text{div } c = 0$, es necesario y suficiente que la función u satisfaga en G la ecuación $\Delta u = \text{div } a$ (de este modo la demostración del teorema de Helmholtz se reduce a la resolución en la región G de la ecuación del tipo $\Delta u = f(x, y, z)$).

Haciendo uso del teorema de Ostrogradski — Gauss, calcúlese el flujo del campo vectorial a a través de la superficie cerrada S , si:

$$25. a = (1 + 2x)i + yj + zk, S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 4\},$$

$$26. a = 2xi - yj + zk, S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4, 3z = x^2 + y^2\}.$$

Establézcase cuáles de los siguientes campos vectoriales son solenoidales:

$$27. a = x(z^2 - y^2)i + y(x^2 - z^2)j + z(y^2 + x^2)k.$$

$$28. a = (1 + 2xy)i - y^2zj + (x^2y - 2yz + 1)k.$$

Haciendo uso del teorema de Stokes, hállese la circulación del vector a a lo largo del contorno γ , si

$$29. a = yi - xj + zk; \gamma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}.$$

$$30. a = y^2i + z^2j; \gamma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 9, 3y + 4z = 5\}.$$

§ 53. INTEGRALES PROPIAS DEPENDIENTES DE UN PARÁMETRO

53.1. DEFINICIÓN DE LAS INTEGRALES DEPENDIENTES DE UN PARÁMETRO; SU CONTINUIDAD E INTEGRABILIDAD SEGÚN EL PARÁMETRO

Supongamos que Y es un conjunto de números reales, $\varphi(y)$ y $\psi(y)$ son dos funciones definidas en Y , $\varphi(y) \leq \psi(y)$ y la función $f(x, y)$ está definida en el conjunto

$$\{(x, y) : y \in Y, x \in [\varphi(y); \psi(y)]\}. \quad (53.1)$$

Las integrales de la forma

$$\Phi(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \quad (53.2)$$

se denominan *integrales dependientes de un parámetro*, y la variable y se llama, corrientemente, *parámetro*.

Se encuentra a menudo el caso particular de tal tipo de integrales, cuando las funciones φ y ψ son constantes, es decir, las integrales de la forma

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx. \quad (53.3)$$

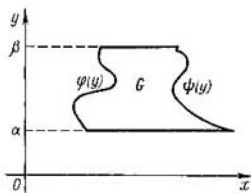


Fig. 228

Si Y es un conjunto de todos los números naturales, $Y = N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$, entonces, suponiendo $f(x, n) = f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, la integral (53.3) puede escribirse en la forma

$$\int_a^b f_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Se ha obtenido de este modo una sucesión numérica formada por las integrales de las funciones de cierta sucesión funcional.

Examinemos un caso en que el conjunto Y representa en sí un segmento $[\alpha, \beta]$, las funciones $\varphi(y)$ y $\psi(y)$ son continuas en dicho segmento y $\varphi(y) \leq \psi(y)$, $y \in [\alpha, \beta]$. Supongamos que las gráficas de las funciones $\varphi(y)$ y $\psi(y)$ y, quizás, los segmentos de las rectas $y = \alpha$ e $y = \beta$ forman la frontera de la región limitada G (fig. 228). Esta región es, evidentemente, cuadrable (véase el p. 44.1). En este caso el conjunto (53.1), sobre el cual viene definida la función $f(x, y)$, es la clausura \bar{G} de la región mencionada G :

$$\bar{G} = \{(x, y); \alpha \leq y \leq \beta, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}. \quad (53.4)$$

En lo sucesivo estudiaremos las propiedades de la función $\Phi(y)$ (su continuidad, las reglas de su derivación e integración) en dependencia de las propiedades de las funciones $f(x, y)$, $\varphi(y)$, $\psi(y)$. Algunas de dichas propiedades se han obtenido antes, al estudiar la integral múltiple. Así por ejemplo, el lema demostrado en el p. 45.1 ofrece las condiciones, bajo las cuales una integral dependiente de un parámetro es una función continua de este parámetro. Enunciemos este lema en forma de un teorema, aplicando las designaciones del presente párrafo.

Teorema 1. Si la función $f(x, y)$ es continua en la clausura \bar{G} de la región G (véase (53.4)), la función $\Phi(y)$, definida por la fórmula (53.2), es continua en el segmento $[\alpha, \beta]$.

A la afirmación de este teorema se le puede comunicar la siguiente expresión:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx = \int_{\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y)}^{\lim_{y \rightarrow y_0} \psi(y)} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx. \quad (53.5)$$

En efecto, del teorema 1 se deduce que el límite en el primer miembro de la igualdad (53.5) es igual a $\Phi(y_0)$, y, en virtud de la continuidad de las funciones φ , ψ y f , el segundo miembro de la igualdad es también igual a

$$\int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x, y_0) dx = \Phi(y_0).$$

En particular, para la integral (53.3) tenemos

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx,$$

es decir, en este caso resulta posible el paso límite bajo el signo de integral.

En el teorema sobre el paso límite bajo el signo de integral se pueden debilitar las exigencias impuestas sobre la función $f(x, y)$, al requerir solamente, en lugar de su continuidad respecto de la totalidad de variables, que sea continua respecto de una sola variable y que tienda uniformemente al límite, respecto de la otra.

Teorema 2. Supongamos que la función $f(x, y)$ está definida para todo $x \in [a, b]$, $y \in Y$ y es continua respecto de x en $[a, b]$ para cualquier y fijo, $y \in Y$. Entonces, si para $y \rightarrow y_0$ *) la función $f(x, y)$ tiende uniformemente en el segmento $[a, b]$ hacia la función $\varphi(x)$ (véase el p. 39.4), se tiene

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos una sucesión $y_n \in Y$, $n = 1, 2, \dots$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$. Entonces (véase el ejercicio 5 en el p. 39.4) la sucesión $\varphi_n(x) = f(x, y_n)$ tenderá uniformemente en el segmento $[a, b]$ hacia la función $\varphi(x)$. De aquí se deduce (véase el p. 36.4) en primer lugar que $\varphi(x)$ es continua y, por ende, integrable en el segmento $[a, b]$, y, en el segundo lugar, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x, y_n) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx,$$

y, como esto es cierto para cualquier sucesión indicada $\{y_n\}$, el teorema queda demostrado. \square

Pasemos al problema de integrabilidad de las integrales (53.2) que dependen de un parámetro.

Teorema 3. Supongamos que la región G es elemental respecto de ambos ejes de coordenadas, es decir,

$$G = \{(x, y) : \alpha < y < \beta, \varphi(y) < x < \psi(y)\} = \\ = \{(x, y) : a < x < b, \varphi_1(x) < y < \psi_1(x)\},$$

*) Aquí y_0 es un número o uno de los infinitos: ∞ , $+\infty$ ó $-\infty$.

donde las funciones φ y ψ son continuas en el segmento $[\alpha, \beta]$, mientras que las funciones φ_1 y ψ_1 lo son en el segmento $[a, b]$. Entonces, si la función $f(x, y)$ es continua en la clausura \bar{G} de la región G , se tiene

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Phi(y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} f(x, y) dy \right] dx = \iint_G f(x, y) dx dy. \quad (53.6)$$

Es evidente que el teorema 3 hace paráfrasis del teorema correspondiente sobre la reducción de la integral múltiple a una reiterada (véase el p. 45.1).

53.2. DERIVACIÓN DE LAS INTEGRALES DEPENDIENTES DE UN PARÁMETRO

Al estudiar las propiedades diferenciales de las integrales que dependen de un parámetro, consideraremos al principio las integrales de la forma (53.3).

Teorema 4 (regla de Leibniz). Si la función $f(x, y)$ y su derivada parcial $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ son continuas en un rectángulo cerrado $P = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \alpha \leq y \leq \beta\}$,

entonces la función $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ es derivable en el segmento $[\alpha, \beta]$ y

$$\frac{d\Phi(y)}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$

Así pues, para derivar, bajo las suposiciones asumidas, una integral que depende de parámetro, es suficiente derivar la expresión subintegral, dejando intactos los límites de integración.

DEMOSTRACIÓN. Sea $y \in [\alpha, \beta]$ e $y + \Delta y \in [\alpha, \beta]$; entonces

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(y + \Delta y) - \Phi(y)}{\Delta y} &= \frac{1}{\Delta y} \int_a^b [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] dx = \\ &= \int_a^b \frac{\partial f(x, y + \theta \Delta y)}{\partial y} dx, \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

Se ha aplicado aquí la fórmula de incrementos finitos de Lagrange.

Al designar ahora con $\omega \left(\delta; \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ el módulo de continuidad de la función $\frac{\partial f}{\partial y}$, obtendremos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Phi(y + \Delta y) - \Phi(y)}{\Delta y} - \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx \right| &\leq \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{\partial f(x, y + \theta \Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| dx \leq \int_a^b \omega \left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \leq \end{aligned}$$

$$\leq \omega \left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y} \right) (b - a). \quad (53.7)$$

Dado que la función $\frac{\partial f}{\partial y}$ es uniformemente continua en el rectángulo cerrado P , resulta que $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \omega \left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0$; por eso, de (53.7) obtenemos

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Phi(y + \Delta y) - \Phi(y)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx. \quad \square$$

El teorema 4 se generaliza con facilidad para el caso de una integral de la forma general (53.2) que depende de un parámetro.

Teorema 4'. *Supongamos que:*

1) *la función $f(x, y)$ y su derivada parcial $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ son continuas en el rectángulo*

cerrado

$$P = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \alpha \leq y \leq \beta\},$$

2) $\bar{G} \subset P$ (véase (53.4));

3) *las funciones $\varphi(y)$ y $\psi(y)$ tienen derivadas continuas en el segmento $[\alpha, \beta]$.*

Bajo estas condiciones la integral (53.2), dependiente de un parámetro, tiene también una derivada en el segmento $[\alpha, \beta]$, con la particularidad de que

$$\frac{d\Phi}{dy} = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx - f[\varphi(y), y] \frac{d\varphi(y)}{dy} + f[\psi(y), y] \frac{d\psi(y)}{dy}. \quad (53.8)$$

DEMOSTRACIÓN. Examinemos una función

$$F(y, u, v) = \int_u^v f(x, y) dx, \quad a \leq u \leq b, \quad a \leq v \leq b, \quad \alpha \leq y \leq \beta.$$

No es difícil comprobar directamente que las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$ de la función F existen y son continuas en totalidad de las variables y, u, v . Comprobemos primero la existencia y continuidad de la derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial y}$. Su existencia se desprende inmediatamente del teorema 4, con la particularidad de que

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_u^v \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx. \quad (53.9)$$

Demostremos su continuidad. Sea $a \leq u \leq b$, $a \leq v \leq b$, $\alpha \leq y \leq \beta$, $a \leq u + \Delta u \leq b$, $a \leq v + \Delta v \leq b$, $\alpha \leq y + \Delta y \leq \beta$; al poner

$$\Delta \frac{\partial F(y, u, v)}{\partial y} = \frac{\partial F(y + \Delta y, u + \Delta u, v + \Delta v)}{\partial y} - \frac{\partial F(y, u, v)}{\partial y},$$

obtendremos:

$$\begin{aligned} \left| \Delta \frac{\partial F(y, u, v)}{\partial y} \right| &= \left| \int_{u+\Delta u}^{v+\Delta v} \frac{\partial f(x, y + \Delta y)}{\partial y} dx - \int_u^v \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_u^v \left[\frac{\partial f(x, y + \Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right] dx \right| + \\ &+ \left| \int_{u+\Delta u}^u \frac{\partial f(x, y + \Delta y)}{\partial y} dx \right| + \left| \int_v^{v+\Delta v} \frac{\partial f(x, y + \Delta y)}{\partial y} dx \right|. \end{aligned} \quad (53.10)$$

Por cuanto la función $\frac{\partial f}{\partial y}$ está definida en el rectángulo P , todas las integrales escritas tienen sentido en virtud de la elección indicada anteriormente de valores de los argumentos y

$$|v - u| \leq b - a. \quad (53.11)$$

Luego, de la continuidad de la función $\frac{\partial f}{\partial y}$ en el rectángulo P proviene que esta función está acotada en él, es decir, existe tal constante $M > 0$ que para todo punto $(x, y) \in P$ se verifica la desigualdad

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq M. \quad (53.12)$$

Al designar, como hasta ahora, con $\omega\left(\delta; \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ el módulo de continuidad de la función $\frac{\partial f}{\partial y}$ en el rectángulo P y hacer uso de las desigualdades (53.11) y (53.12), de (53.10) obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \Delta \frac{\partial F(y, u, v)}{\partial y} \right| &\leq \omega\left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y}\right) \left| \int_u^v dx \right| + M \left| \int_{u+\Delta u}^u dx \right| + \\ &+ M \left| \int_v^{v+\Delta v} dx \right| \leq (b-a)\omega\left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y}\right) + M|\Delta u| + M|\Delta v|. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que $\lim_{\sqrt{\Delta y^2 + \Delta u^2 + \Delta v^2} \rightarrow 0} \Delta \frac{\partial F(y, u, v)}{\partial y} = 0$. Esto significa precisamente la continuidad de la derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial y}$ en el conjunto $\{(y, u, v) : c \leq y \leq d, a \leq u \leq b, a \leq v \leq b\}$.

La continuidad en este conjunto de las derivadas parciales

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -f(u, v), \quad \frac{\partial F}{\partial v} = f(u, v) \quad (53.13)$$

es obvia.

La relación entre las funciones Φ y F se establece por medio de la fórmula

$$\Phi(y) = F(y, \varphi(y), \psi(y)).$$

Debido a lo demostrado anteriormente, la función Φ puede derivarse según la regla para derivar las funciones compuestas:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{du}{dy} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{dv}{dy}.$$

Sustituyendo aquí las expresiones para las derivadas parciales

$$\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial u} \text{ y } \frac{\partial F}{\partial v}$$

(véase (53.9) y (53.13)) y suponiendo $u = \varphi(y)$ y $v = \psi(y)$, obtendremos la fórmula (53.8). \square

§ 54. INTEGRALES IMPROPIAS DEPENDIENTES DE UN PARÁMETRO

54.1. DEFINICIONES FUNDAMENTALES.

CONVERGENCIA UNIFORME DE LAS INTEGRALES DEPENDIENTES DE UN PARÁMETRO

Consideraremos las integrales del tipo

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad (54.1)$$

donde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, la variable y pertenece a cierto conjunto Y y la integral (54.1) es, para ciertos valores de y (en particular para todo y), impropia.

Definición 1. Si, para todo $y_0 \in Y$, la integral

$$\Phi(y_0) = \int_a^b f(x, y_0) dx$$

converge, la integral (54.1) se llama *convergente en el conjunto Y* .

En lo sucesivo, si no se especifica alguna otra circunstancia, consideraremos sólo el caso en que se cumplen las condiciones:

1) $-\infty < a < b \leq +\infty$;

2) cualquiera que sea $y \in Y$, la función $f(x, y)$ es integrable según Riemann respecto de la variable x en todo segmento $[a, \eta]$, donde η es tal que $a < \eta < b$.

En este caso la convergencia de la integral (54.1) en el conjunto Y significa que para cualquier $y \in Y$ existe un límite

$$\lim_{\eta \rightarrow b-0} \int_a^{\eta} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y) dx$$

(si es que $b = +\infty$, entonces $b - 0 = +\infty$). Por cuanto

$$\int_a^b f(x, y) dx - \int_a^{\eta} f(x, y) dx = \int_{\eta}^b f(x, y) dx,$$

de lo dicho obtendremos, para todo $y \in Y$ fijo:

$$\lim_{\eta \rightarrow b-0} \int_{\eta}^b f(x, y) dx = 0.$$

De este modo, si la integral (54.1) converge en el conjunto Y , entonces para todo $y \in Y$ fijo, cualquiera que sea el número $\varepsilon > 0$, existe tal $\eta_{\varepsilon} = \eta_{\varepsilon}(y) < b$, que si $\eta_{\varepsilon} \leq \eta < b$, se tiene

$$\left| \int_{\eta}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon. \quad (54.2)$$

Las condiciones, bajo las cuales para las integrales impropias dependientes de un parámetro resultan válidos los teoremas, análogos a los demostrados en el párrafo anterior para integrales propias, están basadas sobre el concepto de la así llamada convergencia uniforme de la integral.

Se supondrá, según lo observado más arriba, que la integral (54.1) satisface las condiciones citadas 1) y 2).

Definición 2. La integral $\int_a^b f(x, y) dx$, convergente en el conjunto Y , se llama convergente uniformemente en dicho conjunto, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal $\eta_{\varepsilon} < b$ que para todo $y \in Y$ y todos los η tales que $\eta_{\varepsilon} < \eta < b$, se verifica la desigualdad

$$\left| \int_{\eta}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

Recordemos que en nuestro caso b puede ser tanto finito, o sea, un número, como infinito, o sea, igual a $+\infty$. De este modo, la definición de convergencia uniforme en la forma aducida es válida simultáneamente tanto para el caso en que la integración se realiza por el segmento finito $[a, b]$, mientras que la integral impropia surja a cuenta de que el integrando no está acotado, como para el caso en que la integral impropia aparece a cuenta de que no está acotado el intervalo de integración $[a, +\infty]$.

Las definiciones aducidas de la convergencia y convergencia uniforme de una integral recuerdan las definiciones correspondientes para las series (véanse los pp. 36.1 y 36.3). Entre estas definiciones realmente existe una cierta relación.

Sea $\{\eta_n\}$ una sucesión tal que

$$\eta_1 = a, \eta_n \in [a, b), \quad n = 1, 2, \dots, \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = b.$$

A la par con la integral (54.1) consideraremos la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} f(x, y) dx. \quad (54.3)$$

Sea

$$S_n(y) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} f(x, y) dx = \int_a^{\eta_n} f(x, y) dx$$

su suma parcial. En este caso, si la integral (54.1) converge (converge uniformemente) sobre el conjunto Y , será, evidentemente, convergente (uniformemente convergente) sobre el conjunto Y también la serie (54.3); con ello

$$\int_a^b f(x, y) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{\eta_n} f(x, y) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(y),$$

es decir, la integral en consideración es igual a la suma de la serie (54.3).

La definición de la convergencia uniforme puede parafrasearse además de la manera siguiente.

Definición 2'. La integral (54.1), convergente sobre el conjunto Y , se llama uniformemente convergente sobre dicho conjunto, si

$$\lim_{\eta \rightarrow b-0} \sup_{y \in Y} \left| \int_{\eta}^b f(x, y) dx \right| = 0. \quad (54.4)$$

En efecto, si la integral (54.1) converge uniformemente sobre el conjunto Y en el sentido de la definición 2, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe tal $\eta_\varepsilon < b$ que se cumple la desigualdad (54.2) siendo $y \in Y$ e $\eta_\varepsilon \leq \eta < b$, y por consiguiente,

$$\sup_{y \in Y} \left| \int_{\eta}^b f(x, y) dx \right| \leq \varepsilon, \quad \eta_\varepsilon \leq \eta < b,$$

de donde proviene precisamente (54.4). Viceversa, si la integral en consideración converge uniformemente sobre el conjunto Y en el sentido de la definición 2', entonces de la condición (54.4) se infiere, para cualquier $\varepsilon > 0$, la existencia de tal número η_ε que con $y \in Y$ y $\eta_\varepsilon \leq \eta < b$ se verifica la desigualdad (54.2). \square

Si consideramos la integral

$$F(y, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\eta}^b f(x, y) dx,$$

llegaremos a que, evidentemente, la condición (54.4) implica que esta integral tiende uniformemente sobre Y hacia cero para $\eta \rightarrow b - 0$ (en la terminología del p. 39.4, el parámetro aquí no es y , como lo fue en el punto mencionado, sino la variable η).

La convergencia uniforme sobre el conjunto Y de la integral (54.1) significa también que en este conjunto la función

$$\Phi(y, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^{\eta} f(x, y) dx \quad (54.5)$$

tiende uniformemente, para $\eta \rightarrow b - 0$, hacia la función (54.1).

Efectivamente, lo último significa (véase el p. 39.4) que para todo $\varepsilon > 0$ existe tal $\eta_\varepsilon < b$, que para cualquier η que satisface la condición $\eta_\varepsilon \leq \eta < b$, y cualquier $y \in Y$ se verifica la desigualdad

$$|\Phi(y) - \Phi(y, \eta)| < \varepsilon.$$

Pero

$$\Phi(y) - \Phi(y, \eta) = \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^{\eta} f(x, y) dx = \int_{\eta}^b f(x, y) dx.$$

Por eso

$$\left| \int_a^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

De este modo, la condición $\Phi(y, \eta) \xrightarrow{y} \Phi(y)$ para $\eta \rightarrow b - 0$ es equivalente al cumplimiento de las condiciones de la definición 2, es decir, a la convergencia uniforme sobre el conjunto Y de la integral (54.1).

Ejemplo. Consideremos una integral $\Phi(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx$. A título de conjunto Y tomemos el semieje $y \geq 0$ (para cualquier $y < 0$ esta integral diverge). Es fácil convencerse de que la integral en consideración converge sobre Y . Para cualquier $\alpha > 0$ converge uniformemente en el intervalo $[\alpha, +\infty)$. Efectivamente, en este caso se comprueba con facilidad, por ejemplo, el cumplimiento de la condición (54.4):

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \sup_{y > \alpha} \left| \int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx \right| = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \sup_{y > \alpha} e^{-\eta y} = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} e^{-\alpha \eta} = 0.$$

Mientras tanto, la convergencia uniforme no subsiste en todo el semieje. En efecto,

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \sup_{y > 0} \left| \int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx \right| = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \sup_{y > 0} e^{-\eta y} = 1,$$

es decir, en el conjunto Y la condición (54.4) no se cumple.

Teorema 1 (criterio de Weierstrass). Si existe una función no negativa $\varphi(x)$, definida en el intervalo $[a, b)$ e integrable según Riemann en todo segmento $[a, \eta]$, donde $a < \eta < b$, de tal índole que:

1) $|f(x, y)| \leq \varphi(x)$, donde $a \leq x < b$, $y \in Y$;

2) la integral $\int_a^b \varphi(x) dx$ converge,

entonces la integral (54.1) converge uniformemente sobre el conjunto Y .

DEMOSTRACIÓN. Ante todo, en virtud del criterio de comparación (véase el p. 33.3), la integral (54.1) converge absolutamente y, por lo tanto, es simplemente

convergente, cualquiera que sea $y \in Y$. Luego, por lo que la integral $\int_a^b \varphi(x) dx$ es

convergente, para todo $\varepsilon > 0$ existe tal $\eta_\varepsilon < b$, que si $\eta_\varepsilon \leq \eta < b$, entonces

$\int_a^b \varphi(x) dx < \varepsilon$. En tal caso, en virtud de la condición 1 del teorema

$$\left| \int_a^b f(x, y) dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y)| dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx < \varepsilon, \quad \eta_\varepsilon \leq \eta < b, \quad y \in Y,$$

lo que significa precisamente la convergencia uniforme de la integral $\int_a^b f(x, y) dx$ sobre el conjunto Y . \square

Con ayuda del criterio de Weierstrass se establece, por ejemplo, que la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+y^2} \text{ converge uniformemente sobre todo el eje real } -\infty < y < +\infty.$$

En efecto, la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ converge, y para cualesquiera x e y se

$$\text{verifica la desigualdad } \frac{1}{1+x^2+y^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Del criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de las funciones según un parámetro (véase el p. 39.4) se obtienen directamente las condiciones necesarias y suficientes (que también se llaman criterio de Cauchy) para la convergencia uniforme de las integrales.

Teorema 2. (criterio de Cauchy de la convergencia uniforme de las integrales). Para que la integral (54.1) converja uniformemente sobre el conjunto Y , es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista tal $\eta < b$, que cualesquiera que sean $\eta' > \eta''$, que satisfagan las condiciones $\eta < \eta' < b$, $\eta < \eta'' < b$, y todo $y \in Y$, se verifique la desigualdad

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon. \quad (54.6)$$

Efectivamente, como ya se ha observado, la convergencia uniforme de la integral (54.1) es equivalente a que la función $\Phi(y, \eta)$ tienda uniformemente al límite (véase (54.5)), mientras que la desigualdad (54.6) puede escribirse, en las designaciones de (54.5), en la forma

$$|\Phi(y, \eta'') - \Phi(y, \eta')| < \varepsilon.$$

Por eso el teorema 2 no es otra cosa que simplemente una paráfrasis del teorema 4 del punto 39.4 para el caso que ahora se considera.

Ejercicios. Investiguense la convergencia y la convergencia uniforme de las integrales para todos los valores del parámetro α , indiquense las regiones de variación del parámetro α , en las que tiene lugar la convergencia uniforme de las integrales:

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \alpha^2}, \quad 4. \int_0^1 \frac{dx}{x + \alpha\sqrt{x}}.$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + (x - \alpha)^2}, \quad 5. \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}.$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx.$$

6. Investíguese la convergencia uniforme de la integral $\int_0^{-\infty} \frac{dx}{(x-a)^p + b^p}$ cuando $a \in \mathbb{R}$, $b \geq b_0 > 0$ (cuando $b > 0$, respectivamente), $p > 1$.

54.2*. CRITERIO DE LA CONVERGENCIA UNIFORME DE LAS INTEGRALES

En este punto se demostrará el criterio para la convergencia uniforme de las integrales, análogo al criterio correspondiente para la convergencia uniforme de las series (véase el p. 36.3).

Teorema 3. *Supongamos que las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ están definidas para $a \leq x < +\infty$, $e, y \in Y$ (a es finito, Y es un conjunto numérico), con la particularidad de que la función $f(x, y)$ es continua respecto de la variable x , mientras que $g(x, y)$ tiene la derivada $\frac{\partial g}{\partial x}$ continua respecto de x . Si*

1) *la función $g(x, y)$ es monótona respecto de x para cada $y \in Y$, y en el conjunto Y tiende uniformemente hacia cero cuando $x \rightarrow \infty$;*

2) *la integral $\int_a^{\eta} f(x, y) dx$ está acotada como una función de las variables $\eta \in [a, +\infty)$ e $y \in Y$ en el conjunto $[a, +\infty) \times Y$;*

entonces la integral

$$\int_a^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx \quad (54.7)$$

converge uniformemente sobre el conjunto Y .

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo con el segundo teorema del valor medio para las integrales (véase el p. 30.3*), para cualesquiera $\eta' < \eta''$, $a < \eta' < \eta''$, se verifica la igualdad

$$\int_{\eta'}^{\eta''} g(x, y) f(x, y) dx = g(\eta', y) \int_{\eta'}^{\xi} f(x, y) dx + g(\eta'', y) \int_{\xi}^{\eta''} f(x, y) dx, \quad (54.8)$$

donde $\eta' < \xi < \eta''$. En vista de la condición 2) del teorema, existe tal constante $M > 0$ que para cualesquiera $(\eta, y) \in [a, +\infty) \times Y$ tiene lugar la desigualdad

$$\left| \int_a^{\eta} f(x, y) dx \right| \leq M. \text{ Por eso}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x, y) dx \right| &= \left| \int_a^{\eta'} f(x, y) dx + \int_a^{\eta''} f(x, y) dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_a^{\eta'} f(x, y) dx \right| + \left| \int_a^{\eta''} f(x, y) dx \right| = 2M; \quad (54.9) \end{aligned}$$

análogamente,

$$\left| \int_{\xi}^{\eta'} f(x, y) dx \right| \leq 2M. \quad (54.10)$$

Fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. En virtud de que la función $g(x, y)$ tiende uniformemente a cero en el conjunto Y , cuando $x \rightarrow +\infty$, existe tal $\eta_\varepsilon > a$ que, cualesquiera que sean $x > \eta_\varepsilon$ e $y \in Y$, se verifica la desigualdad

$$|g(x, y)| < \frac{\varepsilon}{4M}. \quad (54.11)$$

Con ayuda de las desigualdades (54.9), (54.10) y (54.11), de (54.8) se deduce que para cualesquiera $\eta' > \eta_\varepsilon$ y $\eta'' > \eta_\varepsilon$ tiene lugar la estimación

$$\begin{aligned} \left| \int_{\eta'}^{\eta''} g(x, y) f(x, y) dx \right| &\leq \\ &\leq |g(\eta', y)| \left| \int_{\eta'}^{\xi} f(x, y) dx \right| + |g(\eta'', y)| \left| \int_{\xi}^{\eta''} f(x, y) dx \right| < \\ &< 2M \frac{\varepsilon}{4M} + 2M \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

De este modo, la condición de Cauchy (véase el p. 54.1) referente a la convergencia uniforme de la integral (54.7) queda cumplida. \square

OBSERVACIÓN. Se podría estimar la integral en el primer miembro de la igualdad sin recurrir al segundo teorema del valor medio, sino procediendo de manera análoga a la que se ha usado en la demostración del criterio de Dirichlet en el p. 33.6, integrarla por partes. Esto, no obstante, haría, más engorrosa la demostración sin que se eviten, en esencia, los razonamientos repetidos, propios para la demostración del segundo teorema del valor medio.

El hecho de que la función $g(x, y)$ tiene derivada continua respecto de x no es esencial y se debe sólo a que el segundo teorema del valor medio en el p. 28.3* se ha demostrado bajo las condiciones de tal suposición.

Ejemplo. La integral $\int_1^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} xy}{1+x^2} dx$ converge uniformemente para $y \geq y_0 > 0$. En efecto, la función $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x}{1+x^2}$ va decreciendo para $x \geq 1$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, con la particularidad de que, por cuanto $g(x)$ no depende de y , dicha función tiende a cero uniformemente (cuando $x \rightarrow +\infty$) respecto de y ; además

$$\left| \int_0^{\eta} \operatorname{sen} xy dx \right| = \frac{1 - \cos \eta y}{y} \leq \frac{2}{y_0}.$$

De este modo, ambas condiciones del teorema 3 están cumplidas.

Problema 32. Demuéstrese que si las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ están definidas para $-\infty < a \leq x < +\infty$ e $y \in Y$, siendo la integral $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ uniformemente convergente sobre Y , mientras que la función $g(x, y)$ es monótona respecto de x y está acotada en el conjunto $[a, +\infty) \times Y$, entonces la integral $\int_a^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx$ converge uniformemente sobre Y .

Ejercicios. 7. Supongamos que las funciones $f(x)$ y $g(x, y)$ son continuas respecto de x ; además, cuando $x \rightarrow +\infty$, la función $g(x, y)$ tiende, de manera monótona y uniforme respecto de $y \in Y$, hacia cero y tiene derivada continua $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$, $x \geq a$, $y \in Y$, mientras que la integral $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ es convergente. En este caso la integral $\int_a^{+\infty} f(x) g(x, y) dx$ es uniformemente convergente sobre el conjunto Y .

Investiguese la convergencia uniforme de las integrales:

$$8. \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin^p x}{x^q} dx \text{ para } \alpha \geq 0, p \geq 0, q \geq 0.$$

$$9. \int_1^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x^q} dx \text{ para } p \geq 0, q \geq 0.$$

54.3. PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES IMPROPIAS DEPENDIENTES DE UN PARÁMETRO

Al estudiar las propiedades de las integrales impropias dependientes de un parámetro, nos encontraremos a menudo con la permutación de los pasos límites relativos a diferentes variables. Por eso demostraremos, ante todo, un lema concerniente al problema en consideración.

Lema 1. Sean X e Y dos conjuntos de números; la función $f(x, y)$ viene definida en su producto $X \times Y$ (véase el p. 41.2): $x \in X, y \in Y, x_0$ e y_0 son unos números o infinitos cualesquiera $\infty, +\infty, -\infty$, y existen los límites

$$\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y), \quad x \in X, \quad \psi(y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y), \quad y \in Y.$$

Si la función f tiende uniformemente por lo menos hacia uno de los límites citados, existen y son iguales entre sí ambos límites reiterados:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y).$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, por ejemplo, que la función $f(x, y)$ tiende uniformemente en X hacia $\varphi(x)$ cuando $y \rightarrow y_0$. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ fijo existe

un entorno $U(y_0)$ tal que, cualesquiera que sean $y \in \hat{U}(y_0) \cap Y^*$ y $x \in X$, se verifica la desigualdad

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (54.12)$$

Si $y_1 \in \hat{U}(y_0) \cap Y$ e $y_2 \in \hat{U}(y_0) \cap Y$, entonces

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq |f(x, y_1) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - f(x, y_2)| < \varepsilon.$$

Pasando aquí al límite para $x \rightarrow x_0$, obtendremos

$$|\psi(y_1) - \psi(y_2)| \leq \varepsilon. \quad (54.13)$$

Conforme al criterio de Cauchy para la existencia del límite de una función (véase el p. 4.11), de (54.13) se deduce que existe un límite finito

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \psi(y) = A.$$

Se ha demostrado pues la existencia del límite reiterado

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = A.$$

Fijemos ahora $y_1 \in \hat{U}(y_0) \cap Y$. En este caso de (54.12), para $y = y_1$, y de (54.13), para $y_2 \rightarrow y_0$, obtendremos, respectivamente

$$|f(x, y_1) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\psi(y_1) - A| \leq \varepsilon. \quad (54.14)$$

Para todo $y \in Y$ existe el límite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \psi(y)$. Por ello, siendo fijo

$y_1 \in \hat{U}(y_0) \cap Y$, para $\varepsilon > 0$ dado se encontrará tal entorno $U(x_0)$ que para cualquier $x \in \hat{U}(x_0) \cap X$ tendremos

$$|f(x, y_1) - \psi(y_1)| < \varepsilon. \quad (54.15)$$

De las desigualdades (54.14) y (54.15) para todo $x \in \hat{U}(x_0) \cap X$ se tiene $|\varphi(x) - A| \leq |\varphi(x) - f(x, y_1)| + |f(x, y_1) - \psi(y_1)| + |\psi(y_1) - A| < 3\varepsilon$,

lo que significa precisamente la existencia del límite reiterado

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y). \quad \square$$

Teorema 4. Sea $-\infty < a < b \leq +\infty$ y supongamos que la función $f(x, y)$ está definida para todo $x \in [a, b)$, $y \in Y$, y en $[a, b)$ es continua respecto de x para cualquier $y \in Y$. Entonces, si con $\eta \in [a, b)$ cualquiera la función $f(x, y)$ tiende, uniformemente en el segmento $[a, \eta]$ hacia la función $\varphi(x)$ cuando $y \rightarrow y_0^{**}$, y la in-

* Mediante \hat{U} se denota, como siempre, un entorno reducido.

** Aquel y_0 es un número o bien uno de los infinitos $\infty, +\infty, -\infty$.

tegral

$$\int_a^b f(x, y) dx \quad (54.16)$$

es uniformemente convergente sobre el conjunto Y , entonces

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (54.17)$$

DEMOSTRACIÓN. Si $a < \eta < b$, de acuerdo con el teorema 2 del p. 53.1, tenemos

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{\eta} f(x, y) dx = \int_a^{\eta} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^{\eta} \varphi(x) dx. \quad (54.18)$$

Por eso, según la definición de la integral impropia, la igualdad (54.17) se puede escribir en otra forma:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{\eta \rightarrow b-0} \int_a^{\eta} f(x, y) dx = \lim_{\eta \rightarrow b-0} \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{\eta} f(x, y) dx. \quad (54.19)$$

De este modo, resta demostrar la posibilidad de permutar el orden de los pasos límites respecto a las variables y y η para la función

$$\Phi(y, \eta) = \int_a^{\eta} f(x, y) dx.$$

Esto proviene del lema demostrado más arriba. En efecto, de acuerdo con (54.18), existe el límite $\lim_{y \rightarrow y_0} \Phi(y, \eta)$. Por otra parte existe también el límite

$$\lim_{\eta \rightarrow b-0} \Phi(y, \eta) = \lim_{\eta \rightarrow b-0} \int_a^{\eta} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y) dx,$$

con la particularidad de que, por hipótesis del teorema, la función tiende a su límite uniformemente en el conjunto Y . Por consiguiente, la validez de la igualdad (54.19) se desprende directamente de la afirmación del lema. \square

Teorema 5. Supongamos que la función $f(x, y)$ está definida y es continua (como función de dos variables) en un "rectángulo" semabierto

$$\{(x, y) : a \leq x < b, c \leq y \leq d\}, \quad -\infty < a < b \leq +\infty \\ -\infty < c < d < +\infty.$$

En este caso, si la integral $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ converge uniformemente en $[c, d]$,

será una función continua en dicho segmento.

DEMOSTRACIÓN. Cualquiera que sea $y_0 \in [c, d]$, la función $f(x, y)$ tiende uniformemente, para $y \rightarrow y_0$, hacia la función $f(x, y_0)$ en todo segmento $[a, \eta]$, $a < \eta < b$ (véase el p. 39.4). Por ello, de acuerdo con el teorema antecedente (véase (54.17)),

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \Phi(y) = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx = \Phi(y_0). \quad \square$$

Teorema 6. Cumplidas las suposiciones del teorema 5, se tiene

$$\int_c^d \Phi(y) dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy. \quad (54.20)$$

DEMOSTRACIÓN. Si $a < \eta < b$, entonces, según el teorema 3 del p. 53.1, tenemos

$$\int_c^d dy \int_a^{\eta} f(x, y) dx = \int_a^{\eta} dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (54.21)$$

La función $\Phi(y, \eta) = \int_a^{\eta} f(x, y) dx$ es continua respecto de y , y cuando $\eta \rightarrow b - 0$,

tiende a su límite $\Phi(y)$ uniformemente en el segmento $[c, d]$. Por eso, de conformidad con el teorema 2, el p. 53.1, en el primer miembro de la igualdad (54.21) podemos pasar al límite bajo el signo de la integral para $\eta \rightarrow b - 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow b-0} \int_c^d dy \int_a^{\eta} f(x, y) dx &= \lim_{\eta \rightarrow b-0} \int_c^d \Phi(y, \eta) dy = \\ &= \int_c^d \lim_{\eta \rightarrow b-0} \Phi(y, \eta) dy = \int_c^d \Phi(y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx; \end{aligned}$$

y en este caso el límite obtenido es finito. Por consiguiente, cuando $\eta \rightarrow b - 0$, el segundo miembro de la igualdad (54.21) tiene también el mismo límite el cual, por definición de la integral impropia, es igual a

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad \square$$

Demostremos un teorema sobre la permutación del orden de integración para el caso en que ambas integrales son impropias.

Teorema 7. Supongamos que la función $f(x, y)$ está definida y es continua en el rectángulo semiabierto

$$\{(x, y) : a \leq x < b, c \leq y < d\},$$

$$-\infty < a < b \leq +\infty, \quad -\infty < c < d \leq +\infty.$$

Si la integral

$$\int_a^b f(x, y) dx \quad (54.22)$$

es uniformemente convergente en cualquier segmento $[c, \eta]$, $c < \eta < d$, y la integral

$$\int_c^d f(x, y) dy \quad (54.23)$$

es uniformemente convergente en cualquier segmento $[a, \xi]$, $a < \xi < b$, y existe, además, una de las dos integrales reiteradas

$$\int_c^d dy \int_a^b |f(x, y)| dx, \quad \int_a^b dx \int_c^d |f(x, y)| dy,$$

existen y son iguales entre sí ambas integrales reiteradas

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy,$$

es decir,

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (54.24)$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, por ejemplo, que existe una integral

$$\int_a^b dx \int_c^d |f(x, y)| dy \quad (54.25)$$

y sea $c < \eta < d$. En virtud de que la integral (54.22) es uniformemente convergente en el segmento $[c, \eta]$, de acuerdo con el teorema 6, tenemos

$$\int_c^{\eta} dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^{\eta} f(x, y) dy. \quad (54.26)$$

El límite del primer miembro de esta igualdad para $\eta \rightarrow d - 0$ es, obviamente, igual a

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

Probemos que el límite del segundo miembro de la igualdad (54.26) es igual a

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy,$$

es decir, en este caso resulta posible el paso límite, para $\eta \rightarrow d - 0$, bajo el signo de integral. Comprobemos si se cumplen las premisas del teorema 4 de este punto. La

función $\Phi(x, \eta) = \int_c^{\eta} f(x, y) dy$ es continua respecto de x (véase el teorema 1 del

p. 53.1) y, por hipótesis del teorema, en cualquier segmento $[a, \xi]$, $a < \xi < b$, tiende uniformemente a la integral (54.23) cuando $\eta \rightarrow d - 0$, es decir, hacia la

función $F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$. Por fin, la integral

$$\int_a^b \Phi(x, \eta) dx = \int_a^b dx \int_c^{\eta} f(x, y) dy$$

converge uniformemente respecto de η , $c < \eta < d$, pues

$$|\Phi(x, \eta)| \leq \int_c^d |f(x, y)| dy,$$

mientras que la integral (54.25) converge por suposición.

Por consiguiente, las condiciones del teorema 4 para el segundo miembro de la igualdad (54.26) quedan cumplidas, por lo cual

$$\lim_{\eta \rightarrow d-0} \int_a^b \Phi(x, \eta) dx = \int_a^b \lim_{\eta \rightarrow d-0} \Phi(x, \eta) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Así pues, la igualdad (54.24), que se demuestra, se obtiene de (54.26) pasando al límite para $\eta \rightarrow d-0$. \square

Pasemos ahora a considerar la derivabilidad de las integrales impropias dependientes de un parámetro.

Teorema 8. *Supongamos que las funciones $f(x, y)$ y $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ están definidas y son continuas en el rectángulo semiabierto*

$$\Delta = \{a \leq x < b, c \leq y \leq d\},$$

$$-\infty < a < b \leq +\infty, \quad -\infty < c < d < +\infty.$$

Si la integral $\int_a^b f(x, y) dx$ converge y la integral $\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$ converge uniformemente en el segmento $[c, d]$, entonces la función $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ es continuamente derivable en dicho segmento y

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$

DEMOSTRACIÓN. Representemos la función $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ en forma de una serie convergente en el segmento $[c, d]$:

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} f(x, y) dx, \quad (54.27)$$

donde η_n , $n = 1, 2, \dots$, es una sucesión fija tal que

$\eta_n \in [a, b)$, $\eta_1 = a$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = b$, y la función $\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$ se representará

en forma en una serie convergente en el segmento $[c, d]$

$$\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx. \quad (54.28)$$

De acuerdo con el teorema 4 del p. 53.2, todo término de la serie (54.28) es una derivada, respecto de la variable y , del término correspondiente de la serie (54.27), por lo cual, en virtud del teorema sobre la derivación de las series (véase el p. 36.4), la suma de la serie (54.28) es la derivada de la suma de la serie (54.27). \square

Como ya se ha observado, todas las formulaciones y demostraciones anteriores se refieren a las integrales impropias dependientes de un parámetro que satisfacen las condiciones 1) y 2), enunciadas al principio del p. 54.1. De manera sumamente análoga se consideran también los casos más generales, por ejemplo, si

$$1') -\infty \leq a < b \leq +\infty.$$

2') para todo $y \in Y$ la función $f(x, y)$ respecto de la variable x es integrable según Riemann en cualquier segmento $[\xi, \eta]$, donde $a < \xi < \eta < b$.

La teoría construida de las integrales dependientes de un parámetro se extiende de modo natural al caso en que una integral depende de dos o, en general, de cierto número finito de parámetros y_1, \dots, y_n . Con ello, muchas de las formulaciones de las definiciones y los teoremas, al igual que las demostraciones, quedan invariables, siempre que se da a las designaciones usadas el sentido nuevo. Esto atañe, por ejemplo, a la definición de la convergencia uniforme y al teorema del paso al límite bajo el signo de integral, sólo conviene considerar que $y = (y_1, \dots, y_n)$, y_0 es un punto del mismo espacio o el infinito, mientras que $y \rightarrow y_0$ se entiende en el sentido de límite en dicho espacio.

54.4. APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE INTEGRALES DEPENDIENTES DE UN PARÁMETRO AL CÁLCULO DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

Hasta ahora hemos conocido dos métodos para calcular integrales definidas. El primero de ellos parte de la definición de la integral como un límite de las sumas integrales y es de amplio uso en los procedimientos numéricos de los cálculos. Se estudiará más detalladamente en el p. 60.4. El segundo método, que ya ha sido empleado constantemente, se basa sobre la búsqueda de la función subintegral primitiva y la aplicación de la fórmula de Newton — Leibniz. Resulta que a veces se logra obtener los valores exactos de las integrales definidas, utilizando la teoría de integrales dependientes de un parámetro. La ventaja de este método consiste en que en algunos casos se calculan, con ayuda de este método, las integrales de unas funciones cuyas primitivas no son funciones elementales, debido a lo cual el procedimiento usual en el que se emplea la fórmula de Newton — Leibniz resulta no aplicable.

Ejemplo 1. Supongamos que se pide calcular la integral

$$J = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x \sqrt{1-x^2}} dx. \quad (54.29)$$

Demos a conocer los métodos de su cálculo basados sobre la sustitución de la integral dada por alguna otra que dependa de un parámetro y para la cual (54.29) sirva de valor particular.

Consideremos una función $f(x, y) = \frac{\operatorname{arctg} xy}{x \sqrt{1-x^2}}$ y la integral

$$J(y) = \int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^1 \frac{\arctg xy}{x\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (54.30)$$

Es evidente que la integral (54.29) se obtiene de aquí cuando $y = 1$. Puesto que $\frac{\arctg xy}{x\sqrt{1-x^2}} = 0(1)$ para $x \rightarrow 0$ y $\frac{\arctg xy}{x\sqrt{1-x^2}} = 0\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ para $x \rightarrow 1$ y cualquier y fijo, entonces la integral (54.30) converge con todo y .

$$\text{De la desigualdad } \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| = \left| \frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

y de la convergencia de la integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ se deduce que la integral

$$\int_0^1 \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx \quad (54.31)$$

converge uniformemente sobre todo el eje real y , de conformidad con el teorema 8 del p. 54.3, es igual a $J'(y)$.

Al realizar sucesivamente los cambios de la variable de integración $x = \cos \varphi$ y $t = \operatorname{tg} \varphi$, obtendremos

$$\begin{aligned} J'(y) &= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{1+y^2 \cos^2 \varphi} = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+y^2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \arctg \frac{t}{\sqrt{1+y^2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}. \end{aligned}$$

De aquí, por definición de la integral indefinida, se infiere que

$$J(y) = \int J'(y) dy = \frac{\pi}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\pi}{2} \ln(y + \sqrt{1+y^2}) + C.$$

Pero, de (54.30) se deduce que $J(0) = 0$, por lo cual $C = 0$ y

$$J(y) = \frac{\pi}{2} \ln(y + \sqrt{1+y^2}).$$

Sustituyendo aquí $y = 1$, obtenemos el valor de la integral buscada (54.29)

$$J = J(1) = \frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

La integral (54.29) puede calcularse también aplicando la integración respecto de un parámetro. Al notar que $\frac{\arctg x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$, obtendremos para J la expresi-

sión

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}. \quad (54.32)$$

La integral $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}$ converge uniformemente respecto de y , pues $\frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, mientras que la integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ converge.

Por esta razón podemos cambiar en (54.32) el orden de integración (véase el teorema 6 del p. 54.3). Entonces (haciendo uso del valor, obtenido directamente más arriba, de la integral respecto de x), encontramos

$$J = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi}{2} \ln(1+\sqrt{2}).$$

Ejemplo 2. Calculemos el valor de la integral

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x} dx. \quad (54.33)$$

Se puede mostrar que la correspondiente integral indefinida no se expresa, para $\alpha \neq 0$, en términos de las funciones elementales, a consecuencia de lo cual la integral dada no se calcula por el procedimiento habitual con ayuda de la fórmula de Newton — Leibniz.

La integral (54.33) es convergente para todo valor de α . En efecto, si $\alpha = 0$, entonces, evidentemente, $I(0) = 0$. Si, en cambio, $\alpha \neq 0$, entonces, al realizar el cambio de la variable $t = \alpha x$, se obtendrá

$$I(\alpha) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt = I(1), & \text{si } \alpha > 0 \\ \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt = -I(1), & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

Por cuanto la integral $I(1)$ es convergente (véase el p. 33.5), convergerá también la integral $I(\alpha)$.

Con el fin de calcular la integral (54.33), examinemos una integral más general

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x} dx.$$

Al derivar formalmente respecto de α bajo el signo de integral, obtendremos una integral $\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x dx$, la cual converge uniformemente respecto del parámetro α , $-\infty < \alpha < +\infty$, cualquiera que sea $\beta > 0$ fijo. Por consiguiente, para $\beta > 0$ (véase el tomo 1, p. 26.4) se tiene

$$\frac{\partial I(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

de donde

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{\alpha} \frac{\beta dt}{t^2 + \beta^2} + C(\beta) = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} + C(\beta).$$

Pero $I(0, \beta) = 0$, por lo tanto, $C(\beta) = 0$. Así pues,

$$I(\alpha, \beta) = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta}, \quad \beta > 0.$$

Nos interesa, sin embargo, el valor de la integral $I(\alpha, \beta)$ para $\beta = 0$. Resulta más simple tratar de argumentar la posibilidad de pasar al límite bajo el signo de la integral $I(\alpha, \beta)$ cuando $\beta \rightarrow +0$. Fijemos un número $b \geq 0$ y mostremos que la integral $I(\alpha, \beta)$ converge uniformemente respecto del parámetro β en el segmento $[0, b]$, cualquiera que sea $\alpha \neq 0$ fijo. Efectivamente, integrando por partes (véase el p. 26.4 del tomo 1), obtendremos

$$\int_{\eta}^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x} dx = \frac{1}{x} e^{-\beta x} \frac{\alpha \cos \alpha x + \beta \operatorname{sen} \alpha x}{\alpha^2 + \beta^2} \Big|_{\eta}^{+\infty} + \int_{\eta}^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\alpha \cos \alpha x + \beta \operatorname{sen} \alpha x}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{dx}{x^2}.$$

Elijamos η_ε de modo tal que para $\eta \geq \eta_\varepsilon$ se cumplan las desigualdades

$$\left| \frac{1}{\eta} e^{-\eta\beta} \frac{\alpha \cos \alpha \eta + \beta \operatorname{sen} \alpha \eta}{\alpha^2 + \beta^2} \right| \leq \frac{|\alpha| + b}{\alpha^2} \frac{1}{\eta} < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left| \int_{\eta}^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\alpha \cos \alpha x + \beta \operatorname{sen} \alpha x}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{dx}{x^2} \right| \leq \frac{|\alpha| + b}{\alpha^2} \int_{\eta}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En tal caso para $\eta \geq \eta_\varepsilon$ obtendremos $\left| \int_{\eta}^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x} dx \right| < \varepsilon$, lo que preci-

samente demuestra la convergencia uniforme de la integral $I(\alpha, \beta)$ respecto del parámetro β en cualquier segmento $[0, b]$. Ahora, en virtud del teorema 4 del p. 54.3,

se tiene

$$I(\alpha) = I(\alpha, 0) = \lim_{\beta \rightarrow +0} I(\alpha, \beta) = \lim_{\beta \rightarrow +0} \arctg \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha;$$

así pues,

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x} dx = \begin{cases} \pi/2, & \text{si } \alpha > 0, \\ 0, & \text{si } \alpha = 0, \\ -\pi/2, & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

Cabe fijar la atención en que la derivación respecto de α en (54.33) llevaría a una integral divergente $\int_0^{\infty} \cos \alpha x dx$. La derivación se hizo posible, en $I(\alpha, \beta)$, gracias a la presencia del factor $e^{-\beta x}$, $\beta > 0$, llamado "factor de convergencia". Se denomina "método de introducción del factor de convergencia" el procedimiento por cuyo intermedio se calcula la integral de la forma $\int_0^{\infty} f(x) dx$, pasando a la integral $\int_0^{\infty} e^{-\beta x} f(x) dx$, derivando respecto de β , buscando la integral obtenida y pasando al límite cuando $\beta \rightarrow 0$.

Conociendo el valor de $I(\alpha)$ es posible hallar con facilidad también los valores de varias integrales semejantes. Por ejemplo, podemos mostrar fácilmente (de lo que haremos uso en adelante) que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} dx = |\alpha| \pi. \quad (54.34)$$

Efectivamente, integrando por partes, encontraremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} dx = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x} dx = 2\alpha \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x} dx = |\alpha| \pi.$$

Ejercicios. Cálculense las integrales

$$10. \int_0^a \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2} dx \quad (a > 0).$$

$$11. \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+a \cos x)}{\cos x} dx \quad (|a| < 1).$$

$$12. \int_0^{\infty} \frac{\arctg ax}{x(1+b^2x^2)} dx.$$

$$13. \int_0^{\pi} \frac{\cos ax + \cos bx - 2}{x^2} dx \quad (a, b \neq 0).$$

$$14. \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin^2 bx}{x^2} dx.$$

54.5. INTEGRALES DE EULER

Examinemos las integrales

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad (54.35)$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \quad (54.36)$$

llamadas *integrales de Euler de primera y segunda especie*, respectivamente, la integral (54.35) lleva el nombre de *función beta* y la (54.36), *función gamma*.

Aclaremos, ante todo, para qué valores de los parámetros p , q y s tienen sentido los segundos miembros de las fórmulas (54.35) y (54.36). Consideremos al principio la integral (54.35). En el caso general la función subintegral tiene dos peculiaridades: cuando $x = 0$ y cuando $x = 1$, por lo cual representemos la integral en la forma

$$B(p, q) = \int_0^{1/2} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx.$$

Al comparar la primera integral en el segundo miembro con la integral $\int_0^{1/2} x^{p-1} dx$, y la segunda integral, con $\int_{1/2}^1 (1-x)^{q-1} dx$, que son convergentes para $p > 0$ y $q > 0$, respectivamente, y divergentes para $p \leq 0$ y $q \leq 0$, respectivamente, (véase el p. 33.3), llegamos a que el dominio de definición de la función beta (54.35) en el plano p, q será el ángulo recto $p > 0, q > 0$.

Luego, la integral $B(p, q)$ converge uniformemente en cada ángulo recto $p \geq p_0, q \geq q_0$, cualesquiera que sean $p_0 > 0$ y $q_0 > 0$. En efecto, de acuerdo con el criterio de Weierstrass, esto se desprende (véase el p. 54.1) de la desigualdad

$$x^{p_0-1} (1-x)^{q_0-1} \leq x^{p-1} (1-x)^{q-1}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

y de la convergencia, demostrada más arriba, de la integral

$$B(p_0, q_0) = \int_0^1 x^{p_0-1} (1-x)^{q_0-1} dx, \quad p_0 > 0, \quad q_0 > 0.$$

Por cuanto todo punto (p, q) , $p > 0, q > 0$, pertenece a cierto ángulo $p > p_0, q > q_0$, siendo elegidos de modo adecuado los números $p_0 > 0$ y $q_0 > 0$, entonces, en virtud del teorema 5 del p. 54.3, la función $B(p, q)$ es continua en todo su dominio de definición.

Con el fin de encontrar el dominio de definición de la función gamma (54.36), representémosla en la forma

$$\Gamma(s) = \int_0^1 x^{s-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx. \quad (54.37)$$

Al comparar el primer sumando en el segundo miembro con la integral $\int_0^1 x^{s-1} dx$, la cual converge para $s > 0$ y diverge para $s \leq 0$, llegamos a que la integral $\int_0^1 x^{s-1} \times e^{-x} dx$ converge y diverge para los mismos valores del parámetro s . En lo que

se refiere a la segunda integral en el miembro derecho de la igualdad (54.37), converge para cualquier valor de s . Esto proviene, por ejemplo, de la validez, para todo s , de la igualdad $x^{s-1} e^{-x} = o(e^{-x/2})$ cuando $x \rightarrow +\infty$, y de la convergencia de la integral $\int_1^{+\infty} e^{-x/2} dx = 2e^{-1/2}$. De este modo, la integral (54.36) converge para todo $s > 0$ y diverge cuando $s \leq 0$.

Probemos ahora que la integral (54.36) converge uniformemente en todo segmento $[s_1, s_2]$, donde $0 < s_1 < s_2 < +\infty$. En efecto, sea $s_1 \leq s \leq s_2$; entonces, si $0 \leq x \leq 1$, se tiene

$$x^{s-1} e^{-x} \leq x^{s_1-1} e^{-x},$$

y si $x \geq 1$, se tiene

$$x^{s-1} e^{-x} \leq x^{s_2-1} e^{-x}$$

y como las integrales $\int_0^1 x^{s_1-1} e^{-x} dx$ y $\int_1^{+\infty} x^{s_2-1} e^{-x} dx$ convergen, de la fórmula

(54.37) se deduce, en virtud del criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme de integrales (véase el p. 54.1), la convergencia uniforme de la integral $\Gamma(s)$ en el segmento $[s_1, s_2]$. De aquí proviene, en vista del teorema 5 del p. 54.3, que la función $\Gamma(s)$ es continua en todo su dominio de definición.

Ejercicio 15. Demuéstrase que las funciones $B(p, q)$ y $\Gamma(s)$ son infinitamente derivables.

Problema 33. Demuéstrase que $B(p, q)$ y $\Gamma(s)$ son las funciones analíticas.

Demos a conocer algunas propiedades de las integrales $\Gamma(s)$ y $B(p, q)$. Ante todo, de la fórmula (54.36) se obtiene directamente

$$\Gamma(s) > 0 \quad (s > 0), \quad (54.38)$$

en particular, la función gamma no tiene ceros. Luego, al integrar por partes, obtenemos

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-x} dx = -x^s e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = s\Gamma(s). \quad (54.39)$$

De este modo, si $s > n$ ($n = 1, 2, \dots$), entonces

$$\Gamma(s) = (s-1)(s-2)\dots(s-n)\Gamma(s-n). \quad (54.40)$$

Para cualquier $s > 0$ puede elegirse un número entero no negativo n de modo tal que sea $0 < s-n \leq 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), y en este caso $\Gamma(s)$ se expresará, mediante la fórmula (54.40), en términos del valor de la función gamma en cierto punto del intervalo $(0, 1]$. En otras palabras, si se conoce el valor de la función gamma en el intervalo $(0, 1]$, se puede hallar su valor en cualquier punto.

Hemos de notar, además, que $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$, y, por lo tanto, en virtud de la fórmula (54.40),

$$\Gamma(n+1) = n!$$

De aquí se ve que la función gamma $\Gamma(s+1)$ es una prolongación de la función $s!$, definida sólo para $s = 0, 1, 2, \dots$ enteros, a todo el semieje $s > -1$ de números reales.

Mostraremos las siguientes propiedades de la función beta $B(p, q)$.

1. Para cualesquiera $p > 0$ y $q > 0$

$$B(p, q) = B(q, p). \quad (54.41)$$

Para convencerse de esto, basta efectuar el cambio de la variable $t = 1-x$ en la integral (54.35).

2. Para cualesquiera $p > 0$ y $q > 1$

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1). \quad (54.42)$$

Análogamente, en virtud de la simetría (véase (54.41)), para cualesquiera $q > 0$ y $p > 1$

$$B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q). \quad (54.43)$$

En efecto, al integrar por partes (54.35) y observar que $x^p(1-x)^{q-2} = x^{p-1}(1-x)^{q-2} - x^{p-1}(1-x)^{q-1}$, obtendremos $B(p, q) =$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 (1-x)^{q-1} d\frac{x^p}{p} = \frac{x^p(1-x)^{q-1}}{p} \Big|_0^1 + \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^p(1-x)^{q-2} dx = \\ &= \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2} dx - \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \\ &= \frac{q-1}{p} B(p, q-1) - \frac{q-1}{p} B(p, q), \end{aligned}$$

de donde se desprende (54.42), y, en virtud de la simetría, también (54.43).

3. Para cualesquiera $p > 0$

$$B(p, n) = B(n, p) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{p(p+1)\dots(p+n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Esta fórmula se obtiene como resultado de la aplicación sucesiva de la correlación

(54.42), si se toma en consideración que $B(p, 1) = \int_0^1 x^{p-1} dx = \frac{1}{p}$. Si $p = m$ es también un número natural, entonces $B(m, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$.

Entre las funciones $B(p, q)$ y $\Gamma(s)$ existe una correlación que se establece mediante la fórmula de Euler

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p > 0, \quad q > 0. \quad (54.44)$$

Demostremosla, siguiendo el método de Dirichlet. Realicemos en la fórmula (54.36) el cambio de la variable $x = (1+t)y$, $t > 0$:

$$\frac{\Gamma(s)}{(1+t)^s} = \int_0^{+\infty} y^{s-1} e^{-(1+t)y} dy$$

y pongamos $s = p + q$, $p > 0$, $q > 0$; entonces

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy.$$

Multipliquemos ambos miembros de esta igualdad por t^{p-1} e integremos respecto de t entre 0 y $+\infty$:

$$\Gamma(p+q) \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt = \int_0^{+\infty} t^{p-1} dt \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy. \quad (54.45)$$

Realicemos el cambio de variable $t = \frac{x}{1-x}$ en la integral que figura en el primer miembro de la igualdad (54.45):

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = B(p, q). \quad (54.46)$$

Para calcular el segundo miembro de la igualdad observemos que

$$\int_0^{+\infty} t^{p-1} dt \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy =$$

$$= \lim_{\xi \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} t^{p-1} dt \int_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy. \quad (54.47)$$

En efecto, designando $\Phi(t, \xi) = \int_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy$, de la estimación

$$0 \leq \Phi(t, 0) - \Phi(t, \xi) \leq \int_0^{\xi} y^{p+q-1} e^{-y} dy,$$

$$\int_0^{+\infty} t^{p-1} \Phi(t, \xi) dt \leq \int_0^{+\infty} t^{p-1} \Phi(t, 0) dt$$

concluimos que para $\xi \rightarrow +0$ la función $\Phi(t, \xi)$ tiende hacia $\Phi(t, 0)$ uniformemente respecto de $t \in (0, +\infty)$ y que la integral $\int_0^{+\infty} t^{p-1} \Phi(t, \xi) dt$ converge uniformemente respecto de ξ , pues converge la integral (54.45). Por consiguiente, en el segundo miembro de (54.47) podemos pasar al límite bajo el signo de la integral exterior.

Luego,

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} t^{p-1} dt \int_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy = \\ & = \int_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-y} dy \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-ty} dt, \quad \xi > 0, \quad p \geq 1, \quad q \geq 1. \quad (54.48) \end{aligned}$$

La permutación del orden de integración es posible aquí, porque, primero, la integral $t^{p-1} \int_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy$ es uniformemente convergente respecto de t en cualquier segmento $[0, a]$, lo que se deduce de la estimación uniforme de la función subintegral

$$t^{p-1} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} \leq a^{p-1} y^{p+q-1} e^{-y}, \quad 0 \leq t \leq a,$$

y de la convergencia de la integral $\int_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-y} dy$, segundo, la integral

$$y^{p+q-1} e^{-y} \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-ty} dt$$

converge uniformemente respecto de y en cualquier segmento $[\xi, b]$, $\xi > 0$, lo que se deduce de la estimación uniforme de la función subintegral

$$y^{p+q-1} e^{-y} t^{p-1} e^{-ty} \leq b^{p+q-1} t^{p-1} e^{-\xi t}$$

y de la convergencia de la integral $\int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} dt$; tercero, la integral que figura

en el segundo miembro de la igualdad (54.48) existe. De este modo, la legitimidad del cambio del orden de integración en (54.48) se infiere del teorema 7, p. 54.3 (observemos que en este caso la función subintegral es no negativa).

Al realizar el cambio de variable $ty = u$, obtendremos

$$\int_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-y} dy \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} dt = \Gamma(p) \int_{\xi}^{+\infty} y^{q-1} e^{-y} dy. \quad (54.49)$$

Por fin,

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} \int_{\xi}^{+\infty} y^{q-1} e^{-y} dy = \Gamma(q). \quad (54.50)$$

De (54.45)—(54.50) obtenemos la fórmula (54.44) para $p \geq 1, q \geq 1$. Si ahora $p > 0$ y $q > 0$, entonces, según lo demostrado, se tiene

$$B(p+1, q+1) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}.$$

Aplicando las correlaciones (54.39), (54.42) y (54.43), obtendremos la fórmula (54.44) bajo el supuesto de que $p > 0, q > 0$. \square

54.6. FUNCIONES DE VALORES COMPLEJOS DE UN ARGUMENTO REAL

En lo que sigue se considerarán sistemáticamente las funciones de valores complejos $w(t) = u(t) + iv(t)$ del argumento real t (las funciones $u(t)$ y $v(t)$ adquieren valores reales). Ya nos encontramos con los conceptos de límite y continuidad de las funciones similares. La derivada de la función $w(t)$ se determina según la fórmula

$$w'(t) \stackrel{\text{def}}{=} u'(t) + iv'(t).$$

Mostremos, por ejemplo, que, de acuerdo con dicha regla, $(e^{i\alpha t})' = i\alpha e^{i\alpha t}$. En efecto,

$$\begin{aligned} (e^{i\alpha t})' &= (\cos \alpha t + i \sin \alpha t)' = -\alpha \sin \alpha t + i\alpha \cos \alpha t = \\ &= i\alpha(\cos \alpha t + i \sin \alpha t) = i\alpha e^{i\alpha t} \end{aligned}$$

Análogamente se determina también la integral (propia o impropia) de la función $w = u + iv$:

$$\int_a^b w(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt, \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty.$$

La integral $\int_a^b (u(x) + iv(x)) dx$ se denomina impropia, si lo es por lo menos una

de las integrales $\int_a^b u(x)dx$ y $\int_a^b v(x)dx$. Además, la integral impropia $\int_a^b (u(x) + iv(x))dx$ se llama *convergente*, si convergen tanto $\int_a^b u(x)dx$, como también $\int_a^b v(x)dx$.

En este caso

$$\int_a^b (u(x) + iv(x))dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b u(x)dx + i \int_a^b v(x)dx.$$

La función w se denomina *absolutamente integrable*, si lo son las funciones u y v .

Es evidente que toda una serie de las propiedades de las integrales de las funciones reales (linealidad de la integral, aditividad de ésta según los conjuntos, etc.) se extienden automáticamente a las funciones de valores complejos. Observemos, por ejemplo, que si $w(x) = u(x) + iv(x)$, donde $u(x)$ y $v(x)$ son funciones reales integrables según Riemann en el segmento $[a, b]$, entonces la integral $\int_a^b w(x)dx$ es

también el límite de las sumas integrales $\sigma_k = \sum_{i=1}^k w(\xi_i) \Delta x_i$ ($\tau = \{x_i\}_{i=0}^k$ es la

partición del segmento $[a, b]$, $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$). De aquí, al igual que para las funciones reales, se desprende que en este caso la función $|w(x)|$ es también integrable según Riemann y que se verifica la desigualdad

$$\left| \int_a^b w(x)dx \right| \leq \int_a^b |w(x)|dx.$$

Esta desigualdad es válida también para las funciones de valores complejos absolutamente integrables en el sentido impropio, lo que se establece por medio de un paso límite.

Mas, en el caso de las funciones que toman valores complejos se debe tener cuidado al recurrir a los análogos de los teoremas demostrados para las funciones reales. La razón para ello es que no todas las afirmaciones válidas para las funciones del argumento real, que toman sólo valores reales, se extienden a las funciones de valores complejos. Con una situación semejante ya nos hemos encontrado al estudiar las funciones vectoriales (véase el p. 15.2 y también 37.9*). Por ejemplo, las afirmaciones, semejantes al teorema de Rolle y, por lo tanto, al de Lagrange de valores medios no son válidas para las funciones de valores complejos. Esto lo demuestra el ejemplo, aducido en el p. 15.2, si se escribe en términos de los valores complejos.

A saber, consideremos una función $f(t) = \cos t + i \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$; para ella se verifica $f(0) = f(2\pi) = 1$, $f'(t) = -\sin t + i \cos t$. Por cuanto $|f'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$, no existe tal punto $\xi \in [0, 2\pi]$, que se verifique $f'(\xi) = 0$. Por consiguiente, el análogo del teorema de Rolle no tiene lugar en el caso dado.

Tampoco resulta cierta la regla de L'Hospital cuya demostración se ha basado sobre el teorema del valor medio. Probemos esto con un ejemplo ^{*)}.

Sea $f(t) = t$, $g(t) = t + t^2 e^{-\frac{1}{t^2}}$, $0 < t < 1$. Por cuanto, de acuerdo con la fórmula de Euler, $e^{i/t^2} = \cos \frac{1}{t^2} + i \operatorname{sen} \frac{1}{t^2}$, entonces

$$|e^{i/t^2}| = \sqrt{\cos^2 \frac{1}{t^2} + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{t^2}} = 1.$$

Por eso, $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0$, y

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t e^{i/t^2}) = 1. \quad (54.51)$$

Teniendo presente que

$$g'(t) = 1 + \left(2t - \frac{2i}{t}\right) e^{i/t^2}, \quad 0 < t < 1,$$

obtenemos

$$|g'(t)| \geq \left| \frac{2i}{t} - 2t \right| - 1 \geq \frac{2}{t} - 2t - 1 \geq \frac{2}{t} - 1 = \frac{2-t}{t}.$$

Por consiguiente, $\left| \frac{f'(t)}{g'(t)} \right| = \frac{1}{|g'(t)|} \leq \frac{t}{2-t}$, a consecuencia de lo cual

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(t)}{g'(t)} = 0. \quad (54.52)$$

Comparando (54.51) y (54.52), nos convencemos de que en el caso dado la regla de L'Hospital no es aplicable.

54.7*. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LA FUNCIÓN GAMMA

Mostremos que el comportamiento asintótico de la función gamma

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s dx, \quad s > -1, \quad (54.53)$$

puede ser descrito, para valores suficientemente grandes de la variable independiente s , mediante una fórmula bastante sencilla que contiene sólo funciones elementales.

^{*)} Este ejemplo se ha tomado del libro de W. Rudin "Fundamentos del análisis matemático". (W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 2nd ed., New York-Toronto-London, 1964).

Es fácil ver que la función subintegral en la integral (54.53) toma su valor máximo cuando $x = s$. Realicemos en esta integral el cambio de la variable de integración, trasladando el punto $x = s$ al nuevo origen de coordenadas: $x = s + y$, y realizando, a continuación, la transformación de semejanza con un coeficiente igual a s : $y = st$, es decir, pongamos $x = s(1 + t)$. Obtendremos

$$\Gamma(s + 1) = e^{-s} s^{s+1} \int_{-0}^{+\infty} [e^{-t(1+t)}]^s dt. \quad (54.54)$$

Examinemos la función

$$\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-t}(1+t), \quad -\infty < t < +\infty. \quad (54.55)$$

Por cuanto $\varphi'(t) = -te^{-t}$, la función φ decrece cuando $t < 0$ y crece cuando $t > 0$; en el punto $t = 0$ la función alcanza su valor máximo $\varphi(0) = 1$. Luego, al poner

$$h(t) \stackrel{\text{def}}{=} -t + \ln(1+t), \quad -1 < t < +\infty \quad (54.56)$$

obtendremos

$$\varphi(t) = e^{h(t)}, \quad -1 < t < +\infty, \quad (54.57)$$

donde para $|t| < 1$

$$h(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots$$

y por eso

$$h(t) = -\frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad t \rightarrow 0. \quad (54.58)$$

Así pues, la función gamma puede ser representada en la forma (véanse (54.54), (54.55) y (54.57))

$$\Gamma(s + 1) = e^{-s} s^{s+1} \int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)} dt, \quad (54.59)$$

donde el comportamiento de la función $h(t)$ para $t \rightarrow 0$ se describe por la correlación (54.58).

Antes de pasar a la deducción de la fórmula asintótica para $\Gamma(s + 1)$ con $s \rightarrow +\infty$, aclaremos el método de su obtención con ayuda de unos razonamientos que no son muy rigurosos, pero verosímiles. La gráfica de la función $\varphi(t)$ es de la forma expuesta en la fig. 229. A medida que crece el parámetro s , la gráfica de la función $[\varphi(t)]^s$ irá "apretándose" contra el eje de la variable t y el segmento unidad del eje de ordenadas. Está claro por eso que la integral

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)} dt, \quad (54.60)$$

en el segundo miembro de la fórmula (54.59) se aproximará perfectamente bien para

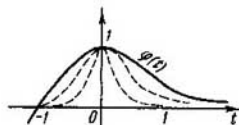


Fig. 229

grandes valores de s , mediante la integral

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{sh(t)} dt, \quad (54.61)$$

donde $\delta > 0$ es arbitrario, pero fijo, con la particularidad de que, con una exactitud tanto mayor cuanto mayor sea el valor del parámetro s . En otras palabras, si s es suficientemente grande, entonces tanto para $-1 < t < -\delta$, como para $t > \delta$, los valores de la función $e^{sh(t)}$ son tan pequeños que cada una de las integrales

$$\int_{-1}^{-\delta} e^{sh(t)} dt \text{ y } \int_{\delta}^{\infty} e^{sh(t)} dt \text{ puede ser despreciada con alto grado de precisión. Es natural}$$

esperar que, siendo fijado $\delta > 0$, el error relativo que se obtiene como resultado de aproximar la integral (54.60) con ayuda de las integrales del tipo (54.61), también puede hacerse tan pequeño como se quiera, a cuenta de la elección del parámetro s lo suficientemente grande.

En virtud de (54.58), al tomar $\delta > 0$ suficientemente pequeño, podemos aproximar con éxito la integral (54.61) por medio de la integral

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{st^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{2}{s}} \int_{-\delta\sqrt{\frac{s}{2}}}{\delta\sqrt{\frac{s}{2}}} e^{-u^2} du. \quad (54.62)$$

Si $\delta > 0$, el segundo miembro de esta igualdad tiende, para $s \rightarrow +\infty$, hacia la integral de Poisson (véase el p. 48.2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}. \quad (54.63)$$

De resulta, para los valores grandes de s la integral (54.60) resulta ser, en cierto sentido, bien aproximada por la expresión $\sqrt{2\pi/s}$ (véanse (54.62) y (54.63)). Por esta razón es natural tratar de demostrar una igualdad asintótica

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)} dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{s}}, \quad s \rightarrow +\infty.$$

Mostremos que esta igualdad realmente tiene lugar. Elijamos arbitrariamente ε , $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. En virtud de (54.58), existe tal δ , $0 < \delta < 1$, que para cualesquiera $t \in [-\delta, \delta]$ se cumple la desigualdad

$$\left| h(t) + \frac{t^2}{2} \right| < \varepsilon t^2,$$

es decir,

$$-\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)t^2 < h(t) < -\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)t^2.$$

Consecuentemente (por ser monótona la función e^x), para cualesquiera $s > 0$ se verifica la desigualdad

$$e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}} < e^{sh(t)} < e^{-\frac{(1-2\varepsilon)st^2}{2}}.$$

Integrándola en el segmento $[-\delta, \delta]$, obtendremos

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}} dt \leq \int_{-\delta}^{\delta} e^{sh(t)} dt \leq \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{(1-2\varepsilon)st^2}{2}} dt. \quad (54.64)$$

Estimemos ahora en cuánto la integral (54.61), que figura en el medio de esta desigualdad, se diferencia de la integral (54.60) que nos interesa. Recordando que la función $\varphi(t) = e^{sh(t)} = e^{-t(1+t)}$ (véanse (54.55) y (54.57)) crece en el intervalo $[-1, -\delta]$ y decrece en $[\delta, +\infty)$, obtenemos para todos los $s > 1$:

$$\begin{aligned} 0 < \int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)} dt - \int_{-\delta}^{\delta} e^{sh(t)} dt &= \\ &= \int_{-1}^{-\delta} e^{(s-1)h(t)} e^{h(t)} dt + \int_{\delta}^{+\infty} e^{(s-1)h(t)} e^{h(t)} dt \leq \\ &\leq e^{(s-1)h(-\delta)} \int_{-1}^{-\delta} e^{h(t)} dt + e^{(s-1)h(\delta)} \int_{\delta}^{+\infty} e^{h(t)} dt \leq \\ &\leq [e^{(s-1)h(-\delta)} + e^{(s-1)h(\delta)}] \int_{-1}^{+\infty} e^{h(t)} dt \leq C_1 e^{-\alpha_1 s}, \end{aligned} \quad (54.65)$$

donde

$$\alpha_1 = -\max\{h(-\delta), h(\delta)\} > 0,$$

$$C_1 = (e^{-h(-\delta)} + e^{-h(\delta)}) \int_{-1}^{+\infty} e^{h(t)} dt < +\infty.$$

Observemos que la función $h(t)$ (véase (54.56)) alcanza un máximo estricto en el punto $t = 0$, con la particularidad de que $h(0) = 0$; por ello, $h(-\delta) < 0$ y $h(\delta) < 0$.

De la manera semejante se estiman también las integrales extremas en la desigualdad (54.64). Al realizar el cambio de la variable de integración

$u = t \sqrt{\frac{(1+2\varepsilon)s}{2}}$, obtendremos (véase (54.63))

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{2}{(1+2\varepsilon)s}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{2\pi}{(1+2\varepsilon)s}}.$$

Ahora, por analogía con (54.65), tendremos

$$\begin{aligned} 0 &< \sqrt{\frac{2\pi}{(1+2\varepsilon)s}} - \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}} dt - \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{-\delta} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)t^2}{2}} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)t^2}{2}} dt + \\ &\quad + \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)t^2}{2}} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)t^2}{2}} dt \leq \\ &\leq e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)\delta^2}{2}} \left(\int_{-\infty}^{-\delta} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)t^2}{2}} dt + \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)t^2}{2}} dt \right) = \\ &= e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)\delta^2}{2}} \sqrt{\frac{2}{1+2\varepsilon}} \left(\int_{-\infty}^{-\delta\sqrt{\frac{1+2\varepsilon}{2}}} e^{-u^2} du + \int_{\delta\sqrt{\frac{1+2\varepsilon}{2}}}^{+\infty} e^{-u^2} du \right) \leq \\ &\leq e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)\delta^2}{2}} \sqrt{\frac{2}{1+2\varepsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du \leq \\ &\leq e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)\delta^2}{2}} \sqrt{2\pi} \leq C_2 e^{-\alpha_2 s}, \quad (54.66) \end{aligned}$$

$$\text{donde } \alpha_2 = \frac{(1+2\varepsilon)\delta^2}{2} > 0, C_2 = e^{\frac{(1+2\varepsilon)\delta^2}{2}\sqrt{2\pi}}.$$

Del mismo modo se obtiene también la estimación

$$0 < \sqrt{\frac{2}{(1-2\varepsilon)s}} - \int_{-s}^s e^{-\frac{(1-2\varepsilon)t^2}{2}} dt \leq C_3 e^{-\alpha_3 s}, \quad (54.67)$$

$$\text{donde } \alpha_3 = \frac{(1-2\varepsilon)\delta^2}{2} > 0, C_3 = e^{\frac{(1-2\varepsilon)\delta^2}{2}\sqrt{2\pi}}.$$

Al poner $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ y sustituir (54.65), (54.66) y (54.67) en (54.64), obtendremos, para las constantes correspondientes $C_4 > 0$ y $C_5 > 0$ (dependientes de ε):

$$\sqrt{\frac{2\pi}{(1+2\varepsilon)s}} + C_4 e^{-\alpha s} \leq \int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)} dt \leq \sqrt{\frac{2\pi}{(1-2\varepsilon)s}} + C_5 e^{-\alpha s}.$$

Dividamos la desigualdad obtenida por $\sqrt{2\pi/s}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon}} + C_4 e^{-\alpha s} \sqrt{\frac{s}{2\pi}} &\leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{s}}} \int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)} dt \leq \frac{1}{\sqrt{1-2\varepsilon}} + C_5 e^{-\alpha s} \sqrt{\frac{s}{2\pi}}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, pasando al límite para $s \rightarrow +\infty$, tendremos, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon}} \leq \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{s}}} \int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)} dt \leq \frac{1}{\sqrt{1-2\varepsilon}}.$$

Al hacer tender aquí ε hacia cero, obtendremos

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{s}}} \int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)} dt = 1,$$

o, que es lo mismo, la igualdad asintótica buscada

$$\int_{-1}^{+\infty} [e^{-t}(1+t)]^s dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{s}}, \quad s \rightarrow +\infty.$$

Al multiplicar ambos miembros de la igualdad por $e^{-s} s^{s+1}$, en virtud de (54.54), obtendremos la fórmula asintótica

$$\Gamma(s+1) \sim \sqrt{2\pi} e^{-s} s^{s+\frac{1}{2}}, \quad s \rightarrow +\infty, \quad (54.68)$$

llamada *fórmula de Stirling para la función gamma*. Esta fórmula es, evidentemente, una generalización de la fórmula de Stirling para el factorial de números naturales (véase el p. 37.8), que se obtiene de (54.68), si ponemos en ésta $s = n$, pues $\Gamma(n+1) = n!$ (véase el p. 54.5).

54.8*. SERIES ASINTÓTICAS

En el p. 37.10* estudiábamos los desarrollos de las funciones en series de potencias asintóticas cuando $x \rightarrow +\infty$. Recordemos que la serie

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \dots$$

se denomina *desarrollo asintótico de la función f* para $x \rightarrow +\infty$, si las sumas parciales de dicha serie

$$S_n(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}$$

satisfacen la condición

$$f(x) - S_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

El concepto de desarrollo asintótico de una función se generaliza del modo natural a las series según los sistemas de funciones que forman las así llamadas *sucesiones asintóticas*.

Definición 3. Una sucesión de funciones $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, definidas en cierto entorno reducido del punto a (finito o infinito) lleva el nombre de *sucesión asintótica para $x \rightarrow a$* , si para cualquier $n = 0, 1, 2, \dots$, tiene lugar la correlación

$$\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x)), \quad x \rightarrow a. \quad (54.69)$$

Son ejemplos de sucesiones asintóticas para $x \rightarrow a$ las expresiones $\varphi_n(x) = (x-a)^n$, si a es un punto finito, y $\varphi_n(x) = x^{-n}$, si $a = +\infty$ o bien $a = -\infty$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Definición 4. Sea $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, una sucesión asintótica para $x \rightarrow a$. La serie

$$a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x) + \dots \quad (54.70)$$

se llama *serie asintótica (o desarrollo asintótico) para $x \rightarrow a$ de la función dada f* , definida en cierto entorno reducido del punto a , si sus sumas parciales

$$S_n(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x) \quad (54.71)$$

satisfacen la condición: para cualquier $n = 0, 1, 2, \dots$ se verifica la igualdad asintótica

$$f(x) - S_n(x) = o(\varphi_n(x)), \quad x \rightarrow a. \quad (54.72)$$

Lema 2. Sea $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, una sucesión asintótica para $x \rightarrow a$. Para que la serie (54.70) sea un desarrollo asintótico de la función f para $x \rightarrow a$, es necesario y suficiente que se verifique

$$f(x) - \bar{S}_n(x) = O(\varphi_{n+1}(x)), \quad x \rightarrow a, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (54.73)$$

En otras palabras, la serie (54.70) es un desarrollo asintótico de la función f para $x \rightarrow a$ cuando, y sólo cuando, su suma parcial $S_n(x)$ sirva de valor aproximado de la función $f(x)$ con la exactitud de hasta $O(\varphi_{n+1}(x))$ para $x \rightarrow a$, es decir, el orden del error no supere el orden del primer término que se desecha.

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD DE LA CONDICIÓN (54.73). La correlación (54.72) para $n = 1, 2, \dots$ puede escribirse en la forma

$$f(x) - S_{n-1}(x) - a_n \varphi_n(x) = o(\varphi_n(x)), \quad x \rightarrow a,$$

de donde

$$f(x) - S_{n-1}(x) = a_n \varphi_n(x) + o(\varphi_n(x)) = O(\varphi_n(x)), \quad x \rightarrow a, \quad n = 1, 2, \dots$$

es decir, se cumple la condición (54.73). \square

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA DE LA CONDICIÓN (54.73). En virtud de (54.73) y (54.69), tenemos

$$\begin{aligned} f(x) - S_n(x) &= O(\varphi_{n+1}(x)) = O(o(\varphi_n(x))) = o(\varphi_n(x)), \quad x \rightarrow a, \\ &n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

lo que coincide con (54.72). \square

Resulta curioso notar que si para cualquier $n = 0, 1, 2, \dots$, se cumple la condición

$$f(x) - S_n(x) = O(\varphi_n(x)), \quad x \rightarrow a, \quad (54.74)$$

más débil comparada con la (54.72), se deduce de ella, en virtud de (54.69), la igualdad asintótica (54.72). En otras palabras, el cumplimiento de la condición (54.74) para todo $n = 0, 1, 2, \dots$ significa que la serie (54.70) es un desarrollo asintótico de la función f para $x \rightarrow a$. En efecto, de (54.74) tenemos para $n = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} f(x) - S_{n-1}(x) &= a_n \varphi_n(x) + O(\varphi_n(x)) = O(\varphi_n(x)) = \\ &= O(o(\varphi_{n-1}(x))) = o(\varphi_{n-1}(x)), \quad x \rightarrow a, \end{aligned}$$

es decir, la condición (54.72).

Si la sucesión asintótica $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, es de tal indole que existe un entorno reducido del punto a , en el que para todo $n = 0, 1, 2, \dots$ tiene lugar la desigualdad $\varphi_n(x) \neq 0$, entonces por analogía con el caso de las series asintóticas de potencias de las funciones obtenemos:

si una función f se desarrolla para $x \rightarrow a$ en la serie asintótica (54.70), este desarrollo es único y sus coeficientes se determinan sucesivamente según las fórmulas

$$a_0 = \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad a_n = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\varphi_n(x)} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k(x) \right],$$

$n = 1, 2, \dots$

No obstante, para la búsqueda práctica de los desarrollos asintóticos de las funciones dadas dicha fórmula no es siempre cómoda. Resulta más fácil a menudo obtener el desarrollo necesario por otro medio, en particular, en el caso de las integrales, integrando por partes. En este último caso la sucesión asintótica $\{\varphi_n(x)\}$ no se predetermina, por regla general, de antemano, sino que se construye, partiendo de las propiedades de la función dada en el entorno del punto a .

Ejemplo. Desarrollemos en serie asintótica, para $x \rightarrow +\infty$, la función

$$F(x, \alpha) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt, \quad x > 0, \quad (54.75)$$

($\alpha > 0$ es un parámetro), eligiendo la sucesión asintótica correspondiente. Por cuanto

$$F(x, \alpha) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} dt + i \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt,$$

entonces, de acuerdo con el criterio de Dirichlet (véase el p. 33.6), las partes imaginaria y real de la función $F(x, \alpha)$ representan en sí, para $x > 0$, las integrales convergentes. Por eso converge también la integral (54.75). Ha de notarse que las partes real e imaginaria de la integral $\frac{1}{2} F\left(x^2, \frac{1}{2}\right)$ las constituyen las integrales incompletas de Fresnel (véase § 34)

$$\int_x^{+\infty} \cos \theta^2 d\theta, \quad \int_x^{+\infty} \sin \theta^2 d\theta.$$

Con el fin de convencerse de esto, basta realizar el cambio de la variable de integración $t = \theta^2$ en la integral $\frac{1}{2} F\left(x^2, \frac{1}{2}\right)$.

Integrando por partes (54.75), obtendremos

$$F(x, \alpha) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt = \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - i\alpha \int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}} dt = \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - i\alpha F(x, \alpha + 1).$$

Aplicando sucesivamente esta fórmula a los valores de la función F , que se obtienen en el segundo miembro, tendremos

$$F(x, \alpha) = \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - i\alpha F(x, \alpha + 1) = \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - i\alpha \left[\frac{ie^{ix}}{x^{\alpha+1}} - i(\alpha + 1)F(x, \alpha + 2) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - \frac{\alpha i^2 e^{ix}}{x^{\alpha+1}} + \frac{\alpha(\alpha+1)i^3 e^{ix}}{x^{\alpha+2}} + \dots + \frac{(-1)^n \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1) i^{n+1} e^{ix}}{x^{\alpha+n}} + \\
&\quad + (-i)^{n+1} \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n) F(x, \alpha+n+1) = \\
&= \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+k-1)}{(ix)^k} + \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n)}{i^{n+1}} \times \\
&\quad \times F(x, \alpha+n+1). \quad (54.76)
\end{aligned}$$

La serie

$$\frac{ie^{ix}}{x^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)}{(ix)^n} \quad (54.77)$$

es un desarrollo asintótico de la función $F(x, \alpha)$ para $x \rightarrow +\infty$. En efecto, la sucesión de funciones $\varphi_n(x) = e^{ix} x^{-n-\alpha}$, $n = 0, 1, \dots$, es, como es fácil de comprobar, asintótica, y para las sumas parciales $S_n(x, \alpha)$ de la serie (54.77) tenemos, en virtud de (54.76):

$$\begin{aligned}
|F(x, \alpha) - S_n(x, \alpha)| &= \left| \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n)}{i^{n+1}} F(x, \alpha+n+1) \right| = \\
&= \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n) \left| \int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^{\alpha+n+1}} dt \right| \leq \\
&\leq \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n) \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+n+1}} = \\
&= \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)}{x^{\alpha+n}} = O\left(\frac{e^{ix}}{x^{\alpha+n}}\right), \quad x \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

es decir, se cumple la condición (54.74), y, por tanto, la serie (54.77) es, de hecho, un desarrollo asintótico de la función $F(x, \alpha)$ para $x \rightarrow +\infty$.

54.9°. DESARROLLO ASINTÓTICO DE LA FUNCIÓN GAMMA INCOMPLETA

Cualquiera que sea $x > 0$, para la función gamma $\Gamma(s)$ se tiene

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt = \int_0^x t^{s-1} e^{-t} dt + \int_x^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt.$$

La función

$$\Gamma(s, x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_x^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt, \quad x > 0, \quad (54.78)$$

se denomina función gamma incompleta. Está definida para todos los valores reales del parámetro s . Hallemos su desarrollo asintótico para $x \rightarrow +\infty$. Realizando en el segundo miembro de (54.78) la integración por partes, obtendremos

$$\begin{aligned} \Gamma(s, x) &= \int_x^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt = \\ &= x^{s-1} e^{-x} + (s-1) \int_x^{+\infty} t^{s-2} e^{-t} dt = x^{s-1} e^{-x} + (s-1) \Gamma(s-1, x). \end{aligned}$$

Aplicando sucesivamente esta fórmula a los valores de la función gamma incompleta, que se obtienen en el segundo miembro, tendremos

$$\begin{aligned} \Gamma(s, x) &= x^{s-1} e^{-x} + (s-1)x^{s-2} e^{-x} + \dots \\ &\dots + (s-1)(s-2) \dots (s-n+1)x^{s-n} e^{-x} + (s-1)(s-2) \dots \\ &\dots (s-n)\Gamma(s-n, x) = e^{-x} x^s \sum_{k=0}^n \frac{(s-1)(s-2) \dots (s-k+1)}{x^k} + \\ &\dots + (s-1)(s-2) \dots (s-n)\Gamma(s-n, x). \end{aligned}$$

De aquí, para $n > s-1$ tenemos

$$\begin{aligned} \left| \Gamma(s, x) - e^{-x} x^s \sum_{k=0}^n \frac{(s-1)(s-2) \dots (s-k+1)}{x^k} \right| &= \\ &= |(s-1)(s-2) \dots (s-n)\Gamma(s-n, x)| \leq \\ &\leq |(s-1) \dots (s-n)| \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n-s+1}} dt \leq \\ &\leq |(s-1)(s-2) \dots (s-n)| \frac{1}{x^{n-s-1}} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \\ &= |(s-1) \dots (s-n)| \frac{e^{-x}}{x^{n-s-1}} = O\left(\frac{e^{-x}}{x^{n-s-1}}\right), \quad x \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

es decir, para las sumas parciales de la serie

$$e^{-x}x^s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)}{x^n} \quad (54.79)$$

y para la sucesión $\varphi_n(x) = x^{-n+s+1}e^{-x}$, que es asintótica (lo que se comprueba con facilidad), la condición (54.73) se cumple cuando $x \rightarrow +\infty$. De este modo, la serie (54.79) es un desarrollo asintótico de la función gamma incompleta $\Gamma(s, x)$ para $x \rightarrow +\infty$.

En el p. 54.7° se ha encontrado el primer término del desarrollo asintótico de la función gamma $\Gamma(s+1)$ para $s \rightarrow +\infty$. Se pueden hallar también los términos siguientes, es decir, desarrollar la función gamma en una serie asintótica. Esta serie tendrá la siguiente forma

$$\Gamma(s+1) \sim (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-s} s^{s+\frac{1}{2}} \left(1 + 3c_3 \frac{2!}{112^2} \frac{2}{s} + 5c_5 \frac{4!}{2!2^4} \left(\frac{2}{s}\right)^2 + \dots \right), \quad s \rightarrow +\infty. \quad (54.80)$$

Aquí $\{c_k\}$ es una sucesión de coeficientes del desarrollo en una serie de potencias (en el entorno de cero) de la función $t = t(z)$ definida mediante la igualdad

$$\frac{1}{2}z^2 = -h(t), \quad \text{donde } h(t) \text{ viene dada por la fórmula (54.56).}$$

Puede obtenerse también el desarrollo asintótico para el logaritmo natural de la función gamma. El desarrollo citado tiene por expresión

$$\ln \Gamma(s) \sim \left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - s + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n(2n-1)s^{2n-1}}, \quad s \rightarrow +\infty \quad (54.81)$$

y se denomina *serie de Stirling*. Aquí, B_{2n} son los así llamados *números de Bernoulli* que se definen mediante la igualdad

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n C_{n+1}^j B_j m^{n+1-j}$$

(todos los números de Bernoulli impares, salvo $B_1 = -\frac{1}{2}$, son nulos).

De la fórmula (54.81) podemos obtener (por potenciación) el desarrollo asintótico para la función gamma en el que los coeficientes serán expresados en forma explícita. El desarrollo tiene por expresión

$$\Gamma(s) \sim (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-s} s^{s-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{12s} + \frac{1}{288s^2} - \frac{139}{51840s^3} + \dots \right\}, \quad s \rightarrow +\infty.$$

La demostración de las fórmulas (54.80) y (54.81) sale de los márgenes de este libro. La descripción de los métodos por cuyo intermedio se obtienen los desarrollos semejantes se dan en el libro de M. V. Fedoriuk "Método del punto de ensilladura" M., 1977.

54.10. OBSERVACIONES SOBRE LAS INTEGRALES MÚLTIPLES DEPENDIENTES DE UN PARÁMETRO

Hemos considerado más arriba las integrales "unidimensionales" dependientes de un parámetro, es decir, el caso en que tanto la variable de integración como el parámetro eran variables numéricas. Esta teoría se generaliza para el caso de las integrales múltiples que dependen de un parámetro "unidimensional" o "multidimensional", es decir, de las integrales de la forma

$$F(y) = \int f(x, y) dG. \quad (54.82)$$

Aquí la función $f(x, y)$ está definida respecto de la variable x en el conjunto abierto $G \subset R^n$ y es integrable según Riemann en cualquier conjunto D abierto y medible según Jordan de tal género que $\bar{D} \subset G$. El parámetro y recorre cierto conjunto Y , el cual puede representarse, por ejemplo, por un subconjunto del espacio m -dimensional R^m , mientras que la integral (54.82) se entiende, en el caso general, en el sentido impropio.

La integral (54.82) se denomina *convergente*, si para todo $y_0 \in Y$ fijo converge la integral

$$\int f(x, y_0) dG.$$

Cuando $n \geq 2$, esto, como se sabe (véase el p. 48.3), es equivalente a la condición de convergencia de la integral

$$\int |f(x, y_0)| dG.$$

A la integral convergente (54.82) (como también a toda sucesión de conjuntos abiertos medibles según Jordan G_k , $k = 1, 2, \dots$, que agota de manera monótona el conjunto G) se le confronta del modo natural una serie de cuya suma sirve la misma:

$$\int f(x, y) dG = \int f(x, y) dG_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \int f(x, y) d(G_{k+1} \setminus \bar{G}_k). \quad (54.83)$$

Por analogía con el caso unidimensional se define también la integral uniformemente convergente.

Definición 5. La integral convergente (54.82) se llama *uniformemente convergente*, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un compacto $A \subset G$ tal que para cualquier conjunto D , abierto y medible según Jordan, para el cual $A \subset D \subset \bar{D} \subset G$ se verifica la desigualdad

$$\left| \int f(x, y) d(G \setminus \bar{A}) \right| < \varepsilon.$$

Esta definición es equivalente a la siguiente:

Definición 5'. La integral convergente (54.82) se llama *uniformemente convergente*, si, cualquiera que sea la sucesión de conjuntos abiertos y medibles según Jordan G_k , $k = 1, 2, \dots$, que agota de manera monótona el conjunto abierto G , y el número $\varepsilon > 0$, existe un número k_ε , dependiente de la sucesión dada y del número ε , tal que para todo número $k \geq k_\varepsilon$ y todos los $y \in Y$ se verifica la desigualdad

$$\left| \int f(x, y) d(G \setminus \bar{G}_k) \right| < \varepsilon.$$

Si la integral (54.82) converge uniformemente en el conjunto G con relación al parámetro $y \in Y$, entonces la serie (54.83) es también uniformemente convergente en G .

Para las integrales múltiples dependientes de un parámetro quedan vigentes los teoremas sobre su continuidad, derivabilidad e integrabilidad, análogos a los demostrados anteriormente. Esta afirmación se comprueba con facilidad y no será el objeto de nuestra consideración detallada.

Se encuentran integrales que dependen de un parámetro de un modo más complejo: en las integrales citadas no sólo la función subintegral f depende de un parámetro, sino también el conjunto G , según el cual se realiza la integración, es decir, $G = G(y)$:

$$F(y) = \int_{G(y)} f(x, y) dx. \quad (54.84)$$

A título de ejemplo de tal integral en el caso unidimensional sirve la integral

$$F(y) = \int_a^b \frac{dx}{|x - y|^\alpha}, \quad a \leq y \leq b.$$

Aquí $G(y)$ se compone de dos (salvo el caso $y = a$ e $y = b$) intervalos (a, y) y (y, b) que varían con el cambio del parámetro y .

Examinemos un ejemplo análogo en el espacio n -dimensional. Sea G un conjunto abierto en R^n , y supongamos que $\mu = \mu(x)$ es continua en G , $\rho = \rho(x, y)$ constituye la distancia entre los puntos x e y , $x \in G$, $y \in R^n$, y α es un cierto número. Las integrales de la forma

$$u(y) = \int \frac{\mu(x) dG}{\rho^\alpha} \quad (54.85)$$

se llaman *potenciales* y se relacionan al tipo (54.84), puesto que en calidad de conjunto, según el cual se realiza la integración, sirve en dichas integrales el conjunto $G \setminus \{y\}$, dependiente de y (el dominio de integración en la fórmula (54.85) se ha denotado, como lo hacemos siempre, simplemente con G). Si $\alpha = 1$ y $n = 3$, la función (54.85) recibe el nombre de *potencial newtoniano*.

Problema 34. Demuéstrese que si G es un conjunto abierto medible según Jordan y la función $\mu = \mu(x)$ es continua en su clausura \bar{G} , entonces la integral (54.85) será, para $\alpha < n$, continua en todo el espacio.