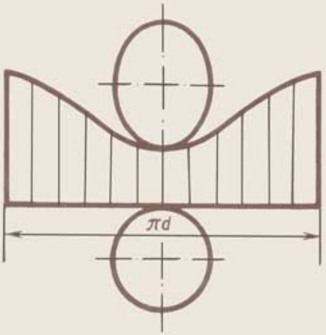
V. O. GORDON
M. A. SEMENTSOV - OGUIYEVSKI

CURSO DE GEOMETRIA DESCRIPTIVA



EDITORIAL MIR
MOSCU

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

В. О. ГОРДОН,
М. А. СЕМЕНЦОВ-ОГИЕВСКИЙ

КУРС НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

V. O. GORDON
M. A. SEMENTSOV-OGUIYEVSKI

CURSO DE GEOMETRIA DESCRIPTIVA

TRADUCCIÓN DEL RUSO

Segunda edición

EDITORIAL MIR MOSCU

На испанском языке

Primera edición 1973
Segunda edición 1980

Impreso en la URSS
1980

INDICE

INTRODUCCIÓN

Entre las disciplinas que constituyen el fundamento de la instrucción de ingenieros se encuentra la *Geometría Descriptiva*.

La Geometría Descriptiva tiene por objeto la exposición y la argumentación de los métodos de construcción de las imágenes de las formas espaciales sobre un plano y los métodos de resolución de problemas de carácter geométrico por las imágenes dadas de estas formas [1].

Las imágenes construidas por las reglas estudiadas en la Geometría Descriptiva permiten darse una idea de la forma de los objetos y de su disposición mutua en el espacio, determinar sus dimensiones, estudiar las propiedades geométricas propias del objeto representado.

La Geometría Descriptiva, provocando un trabajo intensivo de la imaginación espacial, la desarrolla.

Por fin, la Geometría Descriptiva, transmite una serie de sus deducciones a la práctica de ejecución de dibujos técnicos, asegurando su carácter expresivo y su precisión y, por consiguiente, la posibilidad de realización de los objetos representados.

Las reglas de construcción de las imágenes, expuestas en la Geometría Descriptiva, se basan en el *método de proyecciones*.

El estudio del método de proyecciones se inicia con la construcción de las proyecciones del *punto*, puesto que al construir la imágen de cualquier forma espacial se examina una serie de puntos pertenecientes a esta forma.

---

[1] Las formas espaciales pueden ser representadas no sólo sobre un plano, sino también sobre cualquier otra superficie, por ejemplo, cilíndrica o esférica, lo cual se estudia en apartados especiales de la Geometría Descriptiva.

I
CAPÍTULO

FORMACIÓN DE LAS PROYECCIONES

§ 1. PROYECCIONES CENTRALES

Para obtener las *proyecciones centrales* (*proyección central*), deben ser dados el *plano de proyección* y el *centro de proyección*, un punto exterior a este plano (fig. 1: el plano P y el punto S). Tomando cierto punto A y trazando por S y A una línea recta hasta su intersección con el plano P, obtenemos el punto a_p. De la misma manera

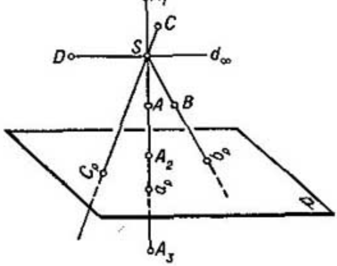


Fig. 1

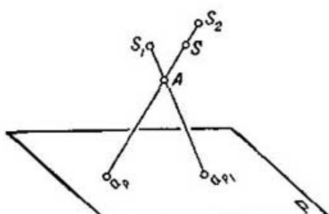


Fig. 2

procedemos, por ejemplo, con los puntos B y C. Los puntos a_p, b_p y c_p son las *proyecciones centrales* de los puntos A, B y C sobre el plano P; éstos se obtienen en la intersección de las *rectas proyectantes* (o, de otra manera, rayos proyectantes) SA, SB y SC con el plano de proyección [1].

[1] Al centro de proyección se le llama también *polo de proyección*, y a la proyección central, *proyección polar*.

Si para cierto punto D (fig. 1) la recta proyectante resulta paralela al plano de proyección, se ha aceptado considerar que éstos se cruzan en un punto infinitamente alejado: el punto D tiene también su proyección, pero infinitamente alejada (d_∞).

Tomando un nuevo centro de proyección S_1 (fig. 2), sin variar la posición del plano P, obtenemos una nueva proyección del punto A, el punto a_{p1}. Si se toma el centro S_2 en la misma recta proyectante SA, la proyección a_p permanece invariable.

Así pues, dados el plano de proyección y el centro de proyección (fig. 1) se puede construir la proyección del punto; pero, disponiendo de la proyección (por ejemplo, a_p) no se puede determinar por ella la posición del propio punto A en el espacio, puesto que cualquier punto de la recta proyectante SA se proyecta en un mismo punto; para una solución única, evidentemente, se necesitan condiciones suplementarias.

La proyección de una línea puede ser construida proyectando una serie de sus puntos (fig. 3). En este caso, las rectas proyectantes forman en su conjunto una superficie cónica [1] o pueden resultar en un mismo plano (por ejemplo, al proyectar una línea recta que no pase por el centro de proyección, o una quebrada y una curva, todos los puntos de las cuales están situados en un plano coincidente con el proyectante).

Evidentemente, la proyección de una línea se obtiene en la intersección del plano proyectante con el plano de proyección (fig. 3).

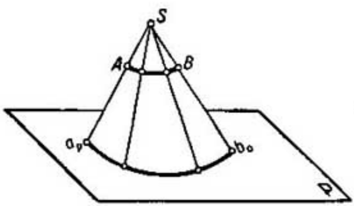


Fig. 3

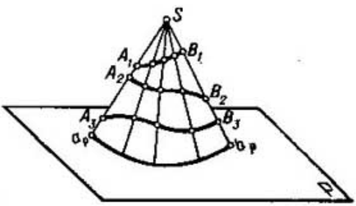


Fig. 4

Pero, como muestra la fig. 4, la proyección de una línea no determina a la línea proyectada, puesto que en la superficie proyectante se pueden disponer toda una serie de líneas que tendrán por proyección una misma línea en el plano de proyección.

De la proyección del punto y la línea se puede pasar a la proyección de una superficie y un cuerpo.

[1] En relación con esto, las proyecciones centrales se llaman también *cónicas*. La noción sobre superficie cónica véase en Estereometría.

§ 2. PROYECCIONES PARALELAS

Examinemos ahora el método de proyección llamado *paralelo*.

Acordemos de considerar a todas las rectas proyectantes paralelas. Para poder trazarlas deberá ser indicada cierta dirección (véase la flecha en la fig. 5). *Las proyecciones así construidas se llaman paralelas.*

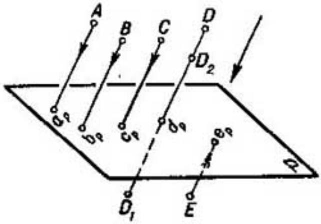


Fig. 5

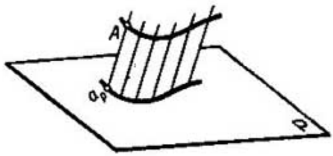


Fig. 6

La proyección paralela puede ser examinada como un caso particular de la central, admitiendo que el centro de proyección está infinitamente alejado.

Por consiguiente, *llamaremos proyección paralela de un punto, al punto de intersección de la recta proyectante, trazada paralelamente a la dirección dada, con el plano de proyección.*

Para obtener la proyección paralela de una línea, se puede construir las proyecciones de una serie de sus puntos y unir estas proyecciones con una línea (fig. 6).

En este caso, las rectas proyectantes forman en su conjunto una superficie cilíndrica; por esta razón, a las proyecciones paralelas se las llama también *cilíndricas* [1].

En las proyecciones paralelas, así como en las centrales:

1) la superficie proyectante para una línea recta, en el caso general, es un plano, por lo cual, la línea recta se proyecta en general en forma de recta;

2) cada punto y línea en el espacio tienen una sola proyección;

3) cada punto en el plano de proyección puede ser la proyección de una infinidad de puntos, si por éstas pasa una recta proyectante común para todos ellos (fig. 5: el punto d_p es la proyección de los puntos D, D_1 y D_2);

4) cada línea en el plano de proyección puede ser la proyección de una multitud de líneas, si éstas están situadas en un plano proyectante común para todas ellas (fig. 7: el segmento a_pb_p es la pro-

[1] La noción de superficie cilíndrica véase en Estereometría.

yección de los segmentos AB y A_1B_1 y del segmento A_2B_2 de una línea curva plana); para obtener una solución única, evidentemente, se necesitan condiciones suplementarias;

5) para construir la proyección de una recta es suficiente proyectar dos de sus puntos y unir las proyecciones obtenidas de estos puntos con una línea recta;

6) si un punto pertenece a una recta, entonces, la proyección del punto pertenece a la proyección de esta recta (fig. 8: el punto K pertenece a una recta, la proyección k_p pertenece a la proyección de esta recta).

Además de las propiedades enumeradas, para las proyecciones paralelas se pueden señalar las siguientes:

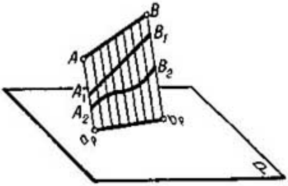


Fig. 7

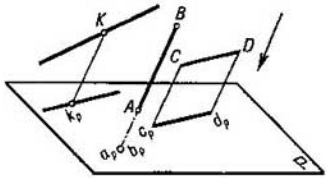


Fig. 8

7) si la recta es paralela a la dirección de proyección (la recta AB en la fig. 8), la proyección de la recta (o de cualquier segmento de ella) es un punto (a_p, o el mismo b_p);

8) el segmento de una línea recta paralela al plano de proyección, se proyecta sobre el plano en su magnitud natural (fig. 8: $CD = c_pd_p$, como segmentos de rectas paralelas entre líneas paralelas).

Más adelante, serán examinadas algunas propiedades más de las proyecciones paralelas, que muestran las relaciones naturales en los objetos examinados que se conservan en las proyecciones de estos objetos.

Aplicando los procedimientos de proyección paralela del punto y la recta, se pueden construir las proyecciones paralelas de una superficie y un cuerpo.

Las proyecciones paralelas se dividen en oblicuángulas y rectangulares. En el primer caso, la dirección de proyección forma con el plano de proyección un ángulo diferente de 90°; en el segundo caso, las rectas proyectantes son perpendiculares al plano de proyección.

Al examinar las proyecciones paralelas, uno debería imaginarse alejado a una distancia infinitamente grande de la imagen. En realidad, los objetos y sus imágenes se examinan desde una distancia finita; además, los rayos que llegan a la vista del espectador forman una superficie cónica y no cilíndrica. Por consiguiente, una imagen más natural se obtiene (observando determinadas condiciones) con ayuda de la proyección central y no de la paralela. Por esta razón, cuando se exige que la imagen dé la misma impresión visual que el propio objeto se emplean las proyecciones en perspectiva, cuya base es la proyección central [1].

Pero, la relativamente gran simplicidad de construcción y las propiedades de las proyecciones paralelas, que aseguran la conservación de las relaciones dimensionales naturales, explican la amplia aplicación de la proyección paralela, a pesar de la condicionalidad indicada más arriba.

§ 3. MÉTODO DE MONGE

Los conocimientos y procedimientos de construcción, condicionados a la necesidad de imágenes planas de las formas espaciales, se acumulaban paulatinamente ya desde tiempos remotos. En el transcurso de un largo período las imágenes planas se ejecutaban principalmente como imágenes demostrativas. Con el desarrollo de la técnica, el problema sobre el empleo del método que asegure la precisión y facilidad de medición de las imágenes, es decir, la posibilidad de establecer con precisión la posición de cada punto de la imagen respecto a otros puntos o planos y con ayuda de simples procedimientos determinar las dimensiones de los segmentos de las líneas y de las figuras, ha adquirido un significado trascendental. Las separadas reglas y procedimientos de construcción de tales imágenes, acumulados poco a poco, fueron reducidos a un sistema y desarrollados en la obra del científico francés *Monge* «Géometrie descriptive» editada en el año 1799.

Gaspar Monge (1746—1818) pasó a la historia como un eminente geómetra francés de fines del siglo XVIII y principios del XIX, ingeniero, hombre público y de estado en la época de la revolución de los años 1789—1794 y gobernación de Napoleón I, uno de los fundadores de la famosa Escuela politécnica de París, participante del trabajo de introducción del sistema métrico de pesos y medidas. Siendo uno de los ministros del gobierno revolucionario de Francia, Monge hizo mucho para su defensa de la intervención extranjera y el triunfo de las tropas revolucionarias. Monge no tuvo la posibilidad de publicar inmediatamente su obra con la exposición del método elaborado por él. Teniendo en cuenta la gran importancia práctica de este método para la ejecución de dibujos de objetivos de significado militar y no deseando que el método de Monge se hiciera conocido fuera de las fronteras de Francia, el gobierno francés prohibió la impresión de este libro. Solamente al final del siglo XVIII fue

---

[1] Las proyecciones en perspectiva no entran en el programa del presente curso.

levantada esta prohibición. Después de la restauración de los Borbones, Gaspar Monge fue objeto de persecución, se vio obligado a ocultarse y dio fin a su vida en la miseria. El método expuesto por Monge, *el método de proyección paralela* (*con la particularidad de que se toman las proyecciones rectangulares sobre dos planos de proyección recíprocamente perpendiculares*), asegurando la fuerza de expresión, la precisión y la facilidad de medición de las imágenes de los objetos sobre el plano, fue y sigue siendo el método principal de ejecución de dibujos técnicos.

La palabra *rectangular* se sustituye frecuentemente por la palabra *ortogonal*, formada por las palabras del idioma griego antiguo, que significan «recto» y «ángulo». Más adelante, el término *proyecciones ortogonales* lo emplearemos para designar el sistema de proyecciones rectangulares sobre planos recíprocamente perpendiculares.

En el presente curso se examinan principalmente las proyecciones rectangulares. En caso de que se empleen las proyecciones paralelas oblicuangulas será cada vez especificado.

PREGUNTAS AL CAPITULO I

1. ¿Cómo se construye la proyección central de un punto?
2. ¿En qué caso la proyección central de una línea recta representa un punto?
3. ¿En qué consiste el método de proyección llamado paralelo?
4. ¿Cómo se construye la proyección paralela de una recta?
5. ¿Puede o no la proyección paralela de una recta representar un punto?
6. ¿Cómo se disponen recíprocamente las proyecciones de un punto y una recta dada si el punto pertenece a dicha recta?
7. ¿En qué caso en la proyección paralela el segmento de una recta se proyecta en su magnitud natural?
8. ¿Qué significa «método de Monge»?
9. ¿Cómo se descifra la palabra «ortogonal»?

II
CAPÍTULO

PUNTO Y RECTA

§ 4. EL PUNTO EN EL SISTEMA V, H

Más arriba (§ 2) se ha dicho que la proyección de un punto no determina la posición del punto en el espacio y para establecer la posición de este punto, conociendo su proyección, se necesitan condiciones suplementarias. Por ejemplo, se conoce la proyección rectangular de un punto sobre el plano horizontal de proyección y se indica con marcación numérica la distancia de este punto al plano; el plano de proyección se considera como «plano de nivel de referencia», y la marcación numérica se cuenta *positiva* si el punto en el espacio se encuentra encima del plano de nivel de referencia y, *negativa*, si el punto se encuentra debajo de este plano.

En esto se basa el *método de proyecciones con marcaciones numéricas* [1].

En la exposición ulterior, la determinación de la posición de los puntos en el espacio se realizará por sus proyecciones rectangulares sobre dos y más planos de proyección.

En la fig. 9 se representan dos planos recíprocamente perpendiculares. Adoptémoslos como planos de proyección. Uno de ellos, el designado con la letra H, es horizontal, el otro, designado con la letra V, es vertical. Este último plano se llama *plano frontal* (*vertical*) *de proyección*, y el plano H, *plano horizontal de proyección*. Los planos V y H forman el sistema V, H.

La línea de intersección de los planos de proyección se llama *eje de proyección* (*línea de tierra*). El eje de proyección divide a cada uno de los planos V y H en dos semiplanos. Para este eje aceptaremos la designación x o la denotación en forma de quebrado V/H. De los

[1] Este método no se incluye en el programa del presente curso.

cuatro ángulos diedros formados por los planos de proyección, se cuenta el primero aquel cuyas caras llevan en la fig. 9 la designación V y H.

En la fig. 10 se muestra la construcción de las proyecciones de cierto punto A en el sistema V, H. Trazando desde A las perpendiculares a V y H, obtenemos las proyecciones del punto A: la *frontal*, designada por a', y la *horizontal*, designada por a.

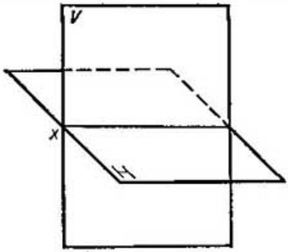


Fig. 9

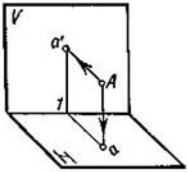


Fig. 10

Las rectas proyectantes, perpendiculares respectivamente a V y H, determinan un plano perpendicular a los planos y al eje de proyección. En la intersección con V y H, este plano forma dos rectas perpendiculares entre sí $a'1$ y $a1$ que se cortan en el punto 1 en el eje de proyección. Por consiguiente, *las proyecciones de cierto punto están situadas sobre rectas perpendiculares al eje de proyección y que cortan a este eje en un mismo punto.*

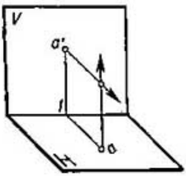


Fig. 11

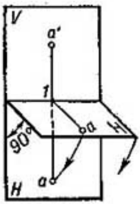


Fig. 12

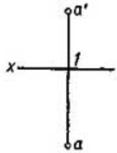


Fig. 13

Si se conocen las proyecciones a' y a de cierto punto A (fig. 11), entonces, levantando las perpendiculares de a' al plano V y de a al plano H, obtendremos en la intersección de estas perpendiculares un punto determinado. Así pues, *dos proyecciones de un punto determinan por completo su posición en el espacio respecto al sistema de planos de proyección dado.*

Girando el plano H a un ángulo de 90° alrededor del eje de proyección (en el sentido indicado por las flechas en la fig. 12) obtenemos un solo plano, el plano del dibujo; las proyecciones a' y a se dispondrán sobre una misma perpendicular al eje de proyección (fig. 13), sobre la *línea de referencia*. Como resultado del abatimiento indicado de los planos V y H se obtiene el dibujo conocido bajo el nombre de *diagrama* (*diagrama de Monge*). Este es un dibujo en el sistema V, H (o en el sistema de dos proyecciones rectangulares).

Al pasar al diagrama, hemos perdido el cuadro espacial de disposición de los planos de proyección y el punto. Pero, como veremos más adelante, el diagrama asegura la precisión y facilidad de medición de las imágenes, siendo considerablemente más simple su construcción. Para hacerse por este diagrama una idea del cuadro espacial es necesario un trabajo de la imaginación: por ejemplo, por la fig. 13 hay que imaginarse el cuadro representado en la fig. 10.

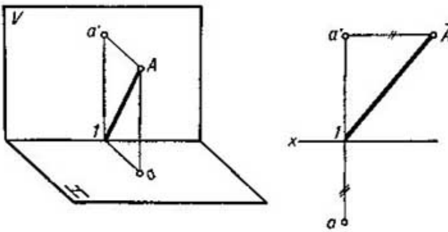


Fig. 14

Puesto que disponiendo del eje de proyección la posición del punto A respecto a los planos de proyección V y H queda determinada, el segmento $a'1$ expresa la distancia del punto A al plano de proyección H (la cota del punto A), y el segmento $a1$, la distancia del punto A al plano de proyección V (el alejamiento del punto A). Del mismo modo se puede determinar la distancia del punto A al eje de proyección. Esta se expresa con la hipotenusa del triángulo construido por los catetos $a'1$ y $a1$ (fig. 14): trazando en el diagrama el segmento $a'\bar{A}$ igual a $a1$ y perpendicular a $a'1$, obtenemos la hipotenusa $\bar{A}1$ que expresa la distancia buscada.

Se debe prestar atención en la necesidad de trazar la *línea de referencia* entre las proyecciones del punto: solamente disponiendo de esta línea, que une mutuamente las proyecciones, se obtiene la posibilidad de establecer la posición del punto que éstas determinan.

Convengamos, a continuación, en llamar al diagrama de Monge, así como a los *dibujos en proyecciones que tienen como base el método* *de Monge* (véase el § 3), *simplemente dibujo, comprendiendo lo dicho solamente en el sentido indicado.* En otros casos, la palabra dibujo irá acompañada de la determinación correspondiente (dibujo en perspectiva, dibujo axonométrico, etc.).

§ 5. EL PUNTO EN EL SISTEMA V, H, W

En toda una serie de construcciones y al resolver problemas resulta imprescindible introducir en el sistema V, H otros planos de proyección. Es sabido, que en la práctica de ejecución de dibujos, por ejemplo, de máquinas y sus piezas, el dibujo contiene principalmente no dos, sino una cantidad mayor de representaciones.

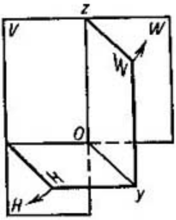


Fig. 15

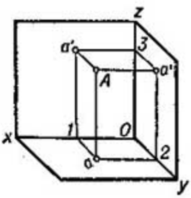


Fig. 16

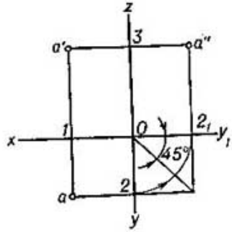


Fig. 17

Examinemos la introducción, en el sistema V, H, de un plano de proyección más (fig. 15): el plano designado con la letra W es perpendicular a V y a H. A este plano se le llama *plano de proyección de perfil*. Lo mismo que el plano V, el plano W es vertical. Además del eje de proyección x aparecen los ejes z e y perpendiculares al eje x. Con la letra O se designa el punto de intersección de los tres ejes de proyección. Puesto que el eje $x \perp W$, el eje $y \perp V$, y el eje $z \perp H$, en el punto O coinciden las proyecciones del eje x sobre el plano W, del eje y sobre el plano V y del eje z sobre el plano H.

En la fig. 15 se muestra el esquema de abatimiento de los planos H, V y W sobre un plano. Para el eje y se dan dos posiciones (fig. 17).

La representación demostrativa en la fig. 16 y el dibujo en la fig. 18 contienen las proyecciones horizontal, frontal y de perfil de cierto punto A.

Las proyecciones horizontal y frontal (a y a') se encuentran en una misma perpendicular al eje x, *en la línea de referencia* $a'a$, las proyecciones frontal y de perfil (a' y a''), sobre una misma perpendicular al eje z, *en la línea de referencia* $a'a''$.

En la fig. 17 se muestra la construcción de la proyección de perfil según las proyecciones frontal y horizontal. Se puede hacer uso o bien del arco de circunferencia trazado desde el punto O, o bien de la bisectriz del ángulo yOy_1.

La distancia del punto A al plano H se mide en el dibujo por el segmento $a'1$ o el segmento $a''2_1$, la distancia al plano V, por el segmento $a1$ o el segmento $a''3$, y la distancia al plano W, por el segmento $a2$ o el segmento $a'3$. Por esta razón, la proyección a'' se puede

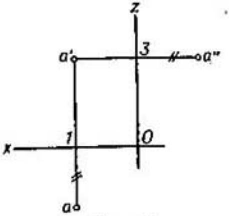


Fig. 18

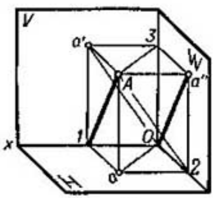


Fig. 19

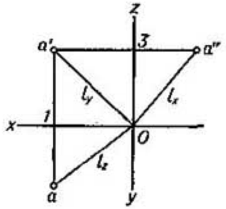


Fig. 20

también construir como se muestra en la fig. 18, es decir, trazando en la línea de referencia de las proyecciones a' y a'' a la derecha del eje z un segmento igual a $a1$. *Tal construcción es más preferible*.

La distancia del punto A al eje x (fig. 19) se mide en el espacio por el segmento $A1$. Pero el segmento $A1$ es igual al segmento $a''O$ (véase la pág. 14, punto 8). Por eso, para determinar la distancia del punto A al eje x en el dibujo (fig. 20) se debe tomar el segmento designado con l_x.

Análogamente, la distancia del punto A al eje y se expresa con el segmento l_y y la distancia del punto A al eje z, con el segmento l_z (fig. 20).

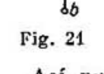


Fig. 21

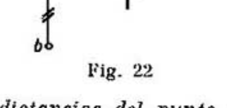


Fig. 22

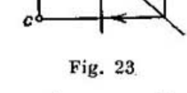


Fig. 23

Así pues, *las distancias del punto a los planos de proyección y a los ejes de proyección pueden ser medidas directamente como segmentos determinados en el dibujo*. En este caso debe tenerse en cuenta su escala.

Examinemos algunos ejemplos de construcción de la tercera proyección de un punto por dos dadas. Supongamos (fig. 21) que el punto B esté dado por sus proyecciones frontal y horizontal. Introduciendo el eje z (fig. 22: la distancia

$O1$ es arbitraria, si no existe alguna condición) y trazando por el punto b' la línea de referencia perpendicular al eje z, trazamos, a la derecha del eje z, el segmento $b''2$ igual a $b1$.

En la fig. 23 se ha construido la proyección c por las proyecciones dadas c' y c'' (la marcha de la construcción está indicada con flechas).

PREGUNTAS A LOS §§ 4 Y 5

1. ¿Qué supone «sistema V, H» y cómo se denominan los planos de proyección V y H?
2. ¿A qué se llama eje de proyección?
3. ¿Cómo se obtiene el dibujo de un punto en el sistema V, H?
4. ¿Qué significa «sistema V, H, W» y cómo se le llama al plano de proyección W?
5. ¿Qué significa «línea de referencia»?
6. ¿Cómo se demuestra que el dibujo que contiene dos proyecciones enlazadas entre sí en forma de puntos expresa cierto punto?
7. ¿Cómo se construye la proyección de perfil de un punto por sus proyecciones frontal y horizontal?

§ 6. PROYECCIONES ORTOGONALES Y SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

El modelo de la posición de un punto en el sistema V, H, W (fig. 16) es análogo al modelo que se puede construir conociendo las coordenadas rectangulares [1] de este punto, es decir, las cifras que expresan sus distancias a tres planos perpendiculares entre sí, *planos de coordenadas*. Las rectas según las cuales se cortan los planos de coordenadas se llaman *ejes de coordenadas*. El punto de intersección de los ejes de coordenadas se llama *origen de coordenadas* y se designa con la letra O [2]. Para los ejes de coordenadas utilizaremos las denotaciones indicadas en la fig. 16.

Los planos de coordenadas forman en su intersección ocho ángulos triédricos dividiendo el espacio en ocho partes llamadas *octantes* [3]. En la fig. 16 está representado uno de los octantes. Se muestra la formación de segmentos que determinan las coordenadas de cierto punto A: del punto A se han trazado las perpendiculares a cada uno de los planos de coordenadas. La primera coordenada del punto A llamada *abscisa* de este punto [4] se expresará con una cifra obtenida de la comparación del segmento Aa'' (o del segmento $O1$ en el eje x, igual a Aa'') con cierto segmento adoptado como unidad de escala. De la misma manera el segmento Aa' (o el $O2$, igual a éste, en el eje y) determinará la segunda coordenada del punto A llamada

[1] Llamadas de otra manera «coordenadas cartesianas». El sistema de coordenadas de Descartes puede ser rectangular y oblicuangular; aquí se examina el sistema rectangular. Descartes (1596—1650), filósofo y geómetra francés.

[2] Primera letra de la palabra latina «origo», origen.

[3] De la palabra latina «octo» que significa ocho.

[4] De la palabra latina «abscissa» que significa cortada, separada.

denada [1]; el segmento Aa (o el $O3$, igual a éste, en el eje z) determinará la tercera coordenada llamada *Z-coordenada*.

En la designación con letras de las coordenadas la abscisa se denota con la letra x, la ordenada, con la letra y, y la *Z-coordenada*, con la letra z.

El paralelepípedo construido en la fig. 16 se llama *paralelepípedo de coordenadas* del punto dado A. La construcción del punto por sus coordenadas dadas se reduce a la construcción de tres aristas del paralelepípedo de coordenadas, que componen una línea quebrada de tres eslabones (fig. 24). Se deben trazar sucesivamente los segmentos

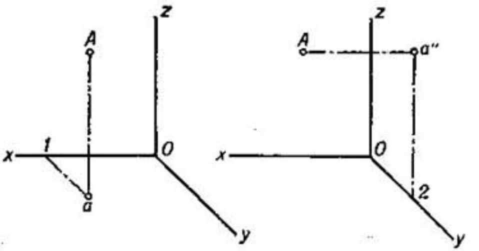


Fig. 24

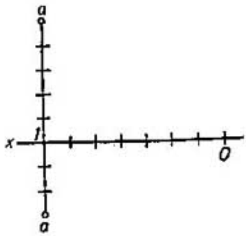


Fig. 25

$O1$, $1a$ y aA o bien $O2$, $a''2$ y $a''A$, etc., es decir, el punto A se puede obtener por seis combinaciones, en cada una de las cuales deben figurar las tres coordenadas.

En la fig. 24, para mayor claridad de representación, se ha tomado la proyección conocida del curso de dibujo lineal de la escuela secundaria, llamada *de gabinete* [2]. En esta proyección los ejes x y z son perpendiculares entre sí y el eje y es la prolongación de la bisectriz del ángulo xOz. En la proyección de gabinete, los segmentos trazados por el eje y o paralelamente a éste se reducen el doble.

La fig. 16 muestra que la construcción de las proyecciones de un punto va acompañada de la construcción de los segmentos que determinan las coordenadas de este punto, si se toman los planos de proyección como planos de coordenadas. Cada proyección del punto A se determina por dos coordenadas de este punto; por ejemplo, la posición de la proyección a se determina por las coordenadas x e y.

Supongamos que sea dado el punto A (7, 3, 5); esta escritura significa que el punto A se determina por las coordenadas $x=7$,

[1] De la palabra latina «ordinata» que a su vez procede de la palabra «ordinatim ducta» que significa trazada consecutivamente.

[2] La proyección de gabinete se refiere a las oblicuángulas (véase más detalladamente en el § 75)

$y=3$, $z=5$. Si se conoce la escala para la construcción del dibujo, entonces (fig. 25), sobre el eje x se traza, a partir de cierto punto O, el segmento $O1$ igual a 7 unidades, y sobre la perpendicular a este eje, levantada desde el punto 1, se trazan los segmentos $a1=3$ unidades y $a'1=5$ unidades. Se obtienen las proyecciones a y a'. Para dicha construcción es suficiente tomar solamente el eje x.

Tomando el eje de proyección como eje de coordenadas se pueden hallar las coordenadas del punto por sus proyecciones dadas. Por ejemplo, en la fig. 18 el segmento $O1$ expresa la abscisa del punto A, el segmento $a1$, su ordenada, y el segmento $a'1$, su Z-coordenada.

Si se da solamente la abscisa, a esto le corresponde un plano paralelo al plano determinado por los ejes y y z. En efecto, tal plano es el lugar geométrico de los puntos cuyas abscisas son equivalentes a la magnitud dada (fig. 26, el plano P).

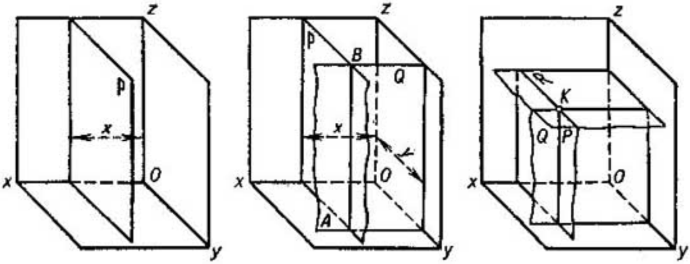


Fig. 26

Si se dan dos coordenadas, con esto se determina una recta paralela al eje de coordenadas correspondiente. Por ejemplo, teniendo dadas la abscisa y la ordenada obtenemos una recta paralela al eje z (en la fig. 26, la recta AB). Esta recta es la línea de intersección de dos planos P y Q, donde Q es el lugar geométrico de los puntos con iguales ordenadas. La recta AB sirve de lugar geométrico de los puntos con iguales abscisas e iguales ordenadas.

Si se dan las tres coordenadas, con esto se determina un punto. En la fig. 26 se muestra el punto K obtenido en la intersección de tres planos, de los cuales P es el lugar geométrico de los puntos por la abscisa dada, Q, por la ordenada dada, y R, por la Z-coordenada dada.

El punto puede encontrarse en cualquiera de los ocho octantes (la numeración de los octantes véase en la fig. 27). Por consiguiente, es necesario conocer no sólo la distancia del punto dado a uno u otro plano de coordenadas, sino también la dirección en la que esta distancia debe trazarse; para esto las coordenadas de los puntos se expresan con números relativos. Para la lectura de las coordenadas emplearemos el sistema de signos señalado en la fig. 27, es decir, emplearemos el sistema de coordenadas llamado «derecho». El sistema derecho se caracteriza por que el giro a 90° del rayo «positivo» Ox (fig. 27) en sentido del rayo «positivo» Oy tiene lugar en sentido contrario a las agujas del reloj (con la condición de que se mira al plano xOy desde arriba).

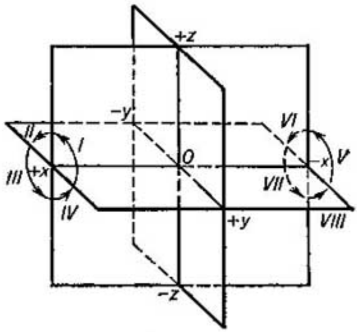


Fig. 27

En el sistema llamado «izquierdo», el rayo «positivo» Ox está dirigido hacia la derecha del punto O.

Al representar los cuerpos, ordinariamente, como planos de coordenadas se toman no los planos de proyección, sino un sistema de tres planos algunos perpendiculares entre sí, enlazados directamente con el cuerpo dado, por ejemplo, las caras de un paralelepípedo rectangular, dos caras y el plano de simetría, etc. A tal sistema de coordenadas se le suele llamar «interior».

§ 7. LOS PUNTOS EN LOS CUADRANTES Y OCTANTES DEL ESPACIO

En el § 4 se dijo que los planos V y H forman cuatro ángulos diedros que dividen al espacio en cuatro regiones llamadas *cuadrantes*. En la fig. 28 se señala el orden adoptado de lectura de los cuadrantes. El eje de proyección divide a cada uno de los planos H y V en «semiplanos», designados convencionalmente con los signos H y

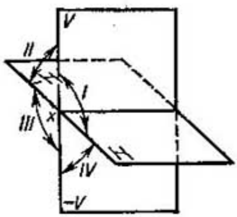


Fig. 28

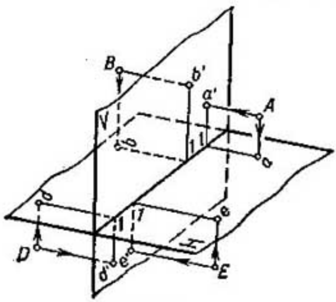


Fig 29

$-H$, V y $-V$. Si, por ejemplo, el punto se encuentra en el segundo cuadrante, su proyección horizontal se encontrará en el semiplano $-H$, y la frontal, en el V. En la exposición a continuación, como base para la construcción del dibujo de un punto en cualquiera de los cuatro cuadrantes, tomaremos el tipo de dibujo representado en la fig. 13 (vease la pag. 18).

El observador se supone siempre situado en el primer cuadrante (convencionalmente, a una distancia infinitamente grande de V

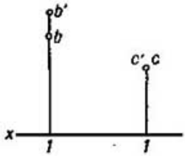


Fig. 30

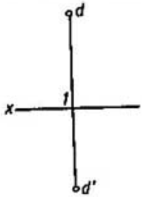


Fig. 31

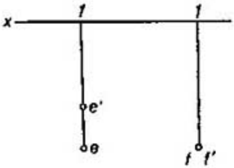


Fig. 32

y de H). Los planos de proyección se consideran opacos; por eso son vistos solamente los puntos situados en el primer cuadrante y en los semiplanos V y H.

En la fig. 13 se da el dibujo para el caso cuando el punto está situado en el primer cuadrante (véase la fig. 29). Si el punto equidista de V y H, entonces $a'1=a1$.

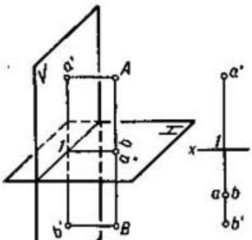


Fig. 33

En la fig. 30 se muestra el punto B situado en el segundo cuadrante, es decir, encima de $-H$ (del semiplano horizontal posterior) y detrás de V (del semiplano vertical superior) (fig. 29). El punto B se encuentra más cerca de V que de $-H$: en el dibujo $b1 < b'1$. En la misma figura se muestra el punto C equidistante de $-H$ y de V: las proyecciones c' y c se confunden.

En la fig. 31 se da el dibujo para el caso cuando el punto D está situado en el tercer cuadrante. La proyección horizontal se halla encima del eje de proyección, y la proyección frontal, debajo del eje de proyección. Puesto que $d1 > d'1$, el punto D se encuentra más lejos de $-V$ (del semiplano vertical inferior) que de $-H$.

En la fig. 32 se dan el punto E y el punto F, situados en el cuarto cuadrante. El punto E se encuentra más cerca de H (del semiplano horizontal anterior) que de $-V$ (fig. 29): $e'1 < e1$. El punto F equidista de $-V$ y de H: $f1=f'1$.

En la fig. 33, en el sistema V, H, están representados los puntos A y B dispuestos simétricamente respecto al plano H. En el dibujo (fig. 33, a la derecha) las proyecciones horizontales de estos puntos coinciden una con otra, mientras que las proyecciones frontales equidistan del eje de proyección: $a'1=b'1$.

En la práctica del dibujo lineal tiene lugar el empleo del primero y tercero cuadrantes del espacio. Más detalladamente véase en el § 41.

En la fig. 27 se mostró que los planos de coordenadas forman en su intersección ocho ángulos triédricos, dividiendo al espacio en ocho octantes. La numeración de los octantes se señala en la fig. 27. Como se ve de la fig. 28, los cuadrantes se numeran como los cuatro primeros (I—IV) octantes.

Empleando para la lectura de las coordenadas del punto el sistema de signos señalado en la fig. 27, obtendremos la siguiente tabla:

Octante	Signos de las coordenadas			Octante	Signos de las coordenadas		
	x	y	z		x	y	z
I	+	+	+	V	−	+	+
II	+	−	+	VI	−	−	+
III	+	−	−	VII	−	−	−
IV	+	+	−	VIII	−	+	−

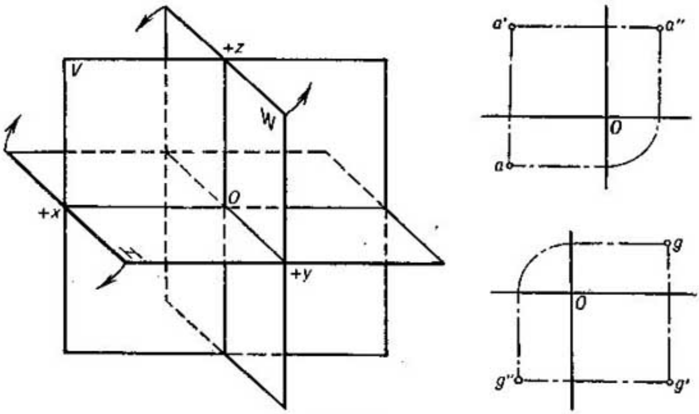


Fig. 34

Por ejemplo, el punto (—20; +15; —18) se encuentra en el octavo octante. El abatimiento de los planos se realiza de acuerdo con la fig. 34, es decir, el plano W se hace girar en sentido contrario a las agujas del reloj, si se mira al plano H en dirección de $+z$ a O.

En la fig. 34 se dan también los dibujos de los puntos: A situado en el primer octante, y G que se encuentra en el séptimo octante; las proyecciones de un mismo punto no pueden superponerse una sobre la otra. Para los demás octantes dos o las tres (para el segundo y octavo octantes) proyecciones de un mismo punto pueden resultar superpuestas una sobre otra.

PREGUNTAS A LOS §§ 6 Y 7

1. ¿Qué significa coordenadas rectangulares cartesianas de un punto?
2. ¿En qué sucesión se escriben las coordenadas en la designación de un punto?
3. ¿Qué significa cuadrante del espacio?
4. ¿Qué significa octante?
5. ¿Qué signos tienen las coordenadas de un punto situado en el séptimo octante?
6. ¿En qué consiste la diferencia entre los sistemas de coordenadas «derecho» e «izquierdo»?
7. ¿En qué se diferencian entre sí los dibujos de dos puntos, uno de los cuales se encuentra en el primer cuadrante y el otro, en el tercero?

§ 8. FORMACION DE SISTEMAS AUXILIARES DE PLANOS DE PROYECCION

Hasta ahora nos hemos encontrado con dos sistemas de planos de proyección, V, H y V, H, W. En caso de necesidad se pueden formar otros sistemas más. Por ejemplo, introduciendo en el sistema V, H cierto plano $S \perp H$ (fig. 35), obtendremos además del sistema V, H con las proyecciones a' y a del punto A, el sistema S, H con las proyecciones a_s y a del mismo punto A.

¿Se formará, en este caso, también el sistema V, S? No: los planos V y S no son perpendiculares uno al otro.

El plano H entra en ambos sistemas V, H y S, H. Por eso, la proyección a del punto A (fig. 35) se refiere también al sistema S, H. Al proyectar el punto A sobre el plano S obtenemos el punto a_s a una distancia a_s2 del plano H, igual a Aa y a $a'1$.

En la fig. 36 los planos V, H y S se muestran abatidos sobre un plano, el plano del dibujo; el dibujo obtenido en este caso se muestra en la fig. 37. Además del eje V/H[1] se ha introducido el eje S/H; este último se elige de acuerdo a las condiciones derivadas de la tarea, como será expuesto más adelante. Del punto a se ha levantado una perpendicular al eje S/H, la línea de referencia sobre la cual se ha trazado el segmento a_s2 igual al segmento $a'1$, es decir, a la distancia en el espacio del punto A al plano H.

[1] Véase esta designación en la pág. 17.

En la fig. 38 se muestra un dibujo, en el que además del sistema V, H se da el sistema V, T, es decir, en el sistema V, H se ha introducido el plano auxiliar T perpendicular a V. Ahora ambos sistemas (V, H y V, T) contienen el plano V. Por esta razón se conserva la distancia del punto A precisamente al plano V y en el dibujo el segmento $a_t 2$ deberá tomarse igual al segmento $a1$.

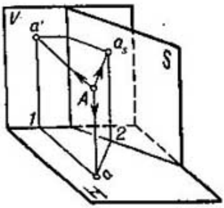


Fig. 35

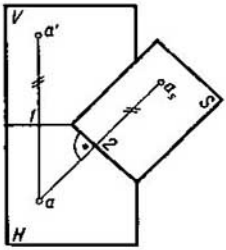


Fig. 36

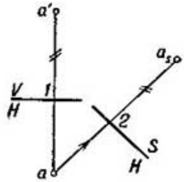


Fig. 37

Es evidente, que el plano W (fig. 15) puede ser interpretado como un plano auxiliar trazado perpendicularmente a V y a H. En este caso, además del sistema V, H se examina habitualmente el sistema V, W. Por analogía con la fig. 38, a la fig. 22 se le podría haber dado

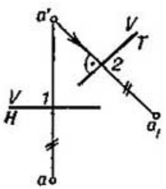


Fig. 38

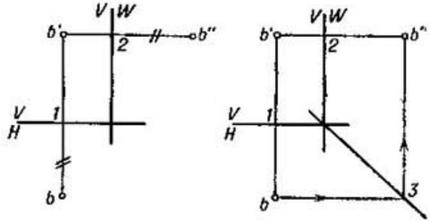


Fig. 39

la forma representada en la fig. 39 a la izquierda, donde $b''2=b1$. Si se hace uso de la recta auxiliar de la fig. 17 (la bisectriz prolongada del ángulo xOz), la construcción adquiere la forma representada en la fig. 39 a la derecha. ¿Se puede proceder del mismo modo al construir, por ejemplo, la proyección a_s (fig. 37) o la a_t (fig. 38)? Sí; esto se muestra en la fig. 40. Pero aquí, claro está, no se obtiene el ángulo de 45° construido en la fig. 17. Como se ve de los dibujos en la fig. 40, es necesario trazar la bisectriz del ángulo formado por los ejes V/H y S/H (fig. 40, a la izquierda) y los ejes V/H y V/T (en la misma figura, a la derecha).

Pero, como se dijo en la pág. 21, son preferibles las construcciones mostradas en la fig. 39, a la izquierda, y en las figs. 37 y 38.

Más adelante (§ 33), nos encontraremos con otros ejemplos más de introducción de planos auxiliares para la formación del sistema requerido de planos de proyección.

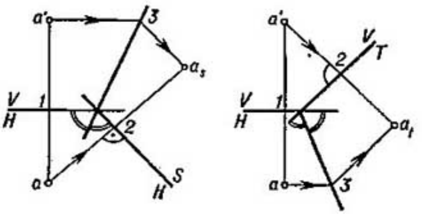


Fig. 40

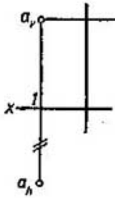


Fig. 41

Para las proyecciones obtenidas en los planos auxiliares de proyección (por ejemplo, en el S o T) hemos empleado la designación con letras como subíndices, por ejemplo, a_s, a_t. En relación con esto sería conveniente emplear también para las proyecciones, por ejemplo, a, a', a'' las designaciones a_h, a_v, a_w (fig. 41). Pero, para las proyecciones sobre los planos H, V y W emplearemos principalmente las designaciones tradicionales, por ejemplo, para el punto A, a, a', a''.

§ 9. DIBUJOS SIN INDICACION DE LOS EJES DE PROYECCION

Más adelante, junto con los dibujos que contienen los ejes de proyección se emplearán los dibujos sin indicación de los ejes.

De la confrontación de los dibujos en la fig. 42 se desprende que en uno de ellos la posición de los planos V y H se ha determinado trazando su línea de intersección y que se ha determinado la distancia del punto A a estos planos. En el segundo dibujo de la fig. 42 la cuestión sobre las distancias del punto A a los planos V y H deja de ser actual, puesto que no existe el eje de proyección; se examina cierto punto A, dado por sus proyecciones, independientemente del lugar en que se encuentran los planos de proyección. En este caso, claro está, tanto mayor importancia adquiere la línea de referencia de las proyecciones, su dirección y trazado correcto.

¿Se puede, teniendo un dibujo sin indicación del eje de proyección, introducir este eje y con ello fijar la distancia del punto a los planos V y H elegidos convencionalmente? Sí, se puede. Al introducir el eje, éste debe ser trazado obligatoriamente de tal manera que sea perpendicular a la línea de referencia, indiferentemente de a cuál punto precisamente de esta línea (si no se señala ninguna condición). En este caso, la posición de las proyecciones no varía. En efecto, trazando el eje de proyección elegimos cierta posición del ángulo diedro VH respecto al punto dado A (fig. 43). El traslado del eje en el dibujo hacia arriba o hacia abajo corresponde al traslado paralelo del ángulo diedro VH en el espacio a una nueva posición (en la fig. 43, la posición V_1H_1) en dirección del plano bisector del ángulo diedro [1], adyacente al ángulo VH.

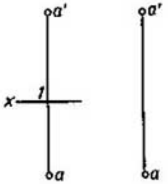


Fig. 42

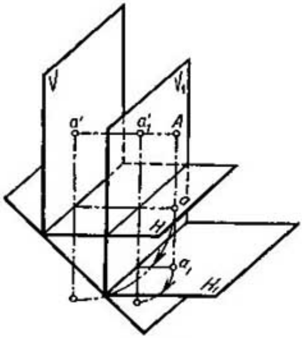


Fig. 43

La introducción del eje de proyección (esto se hace corrientemente de acuerdo a alguna condición) fue mostrada en las figs. 37 y 38: los ejes S/H y V/T. Aquí los ejes eran necesarios para la construcción: a partir de ellos se contaban las dimensiones. En general, los ejes, si se examinan desde el punto de vista del significado inicial de la línea de intersección de los planos de proyección, ayudan a hacerse una idea del cuadro espacial por el dibujo.

Las bases de referencia de las dimensiones son una componente imprescindible de los dibujos técnicos; la elección de la posición de estas bases no es limitada y se determina partiendo de la necesidad y racionalidad.

En la fig. 44a se muestra cómo se establece la diferencia entre las distancias de los puntos A y B a los planos de proyección H, V

---

[1] Se llama *plano bisector de un ángulo diedro* al plano que pasa por el arista del ángulo diedro y que lo divide por la mitad. De la palabra latina «bissektor», que corta por la mitad.

y *W*. El dibujo en la fig. 44b, a la izquierda, se representa con los ejes de proyección, el dibujo a la derecha, sin ellos.

En este ejemplo, la diferencia entre las distancias de los puntos al plano *H* se determina por el segmento *a'5* igual a *a'1—b'2* ó a *a"7*; al plano *V*, por el segmento *b6* igual a *b2—a1* ó a *b"7*; al plano *W*, por el segmento *b'5* igual a *a'3—b'4* ó a *a6*.

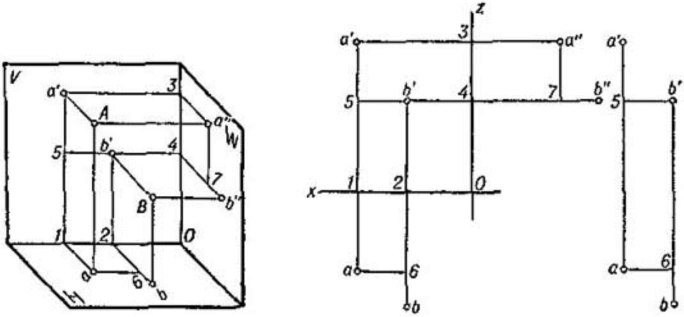


Fig. 44

PREGUNTAS A LOS §§ 8 Y 9

1. ¿Cómo se forman los sistemas de planos de proyección?
2. ¿A cuál condición debe corresponder el plano introducido en el sistema *V*, *H* como plano auxiliar de proyección?
3. ¿Cómo se construye la proyección de un punto, dado en el sistema *V*, *H*, sobre el plano *S* perpendicular al plano *H*?
4. ¿Se establecen o no las distancias de un punto a los planos de proyección si existe el eje de proyección?
5. ¿Cómo debe comprenderse el dibujo de un punto si no existe el eje de proyección?
6. ¿Qué fin tienen los ejes *S/H* y *V/T* en la fig. 40?
7. ¿Cómo se determinan en el dibujo en el sistema *V*, *H* las distancias de un punto a los planos *H* y *V*?

§ 10. PROYECCIÓN DEL SEGMENTO DE UNA LÍNEA RECTA

Supongamos que sean dadas las proyecciones frontal y horizontal de los puntos *A* y *B* (fig. 45). Trazando líneas rectas por las proyecciones homónimas de estos puntos, obtenemos las proyecciones del segmento *AB*, la frontal (*a'b'*) y la horizontal (*ab*) [1].

¿Se puede afirmar que tal dibujo (fig. 45) expresa precisamente el segmento de una línea recta? Sí; si nos imaginamos (fig. 46) que

[1] Véase el punto 5 del § 2.

por $a'b'$ y ab se han trazado los planos proyectantes (es decir, planos perpendiculares a V y a H respectivamente), en la intersección de estos planos se obtiene una recta y su segmento AB. En este caso, el punto dado por sus proyecciones sobre $a'b'$ y sobre ab, pertenece al segmento AB.

En la fig. 47 se da el dibujo de un segmento AB en el sistema V, H, W. Las proyecciones a'' y b'' se han construído de tal manera como fue mostrado en la fig. 18 para un solo punto A.

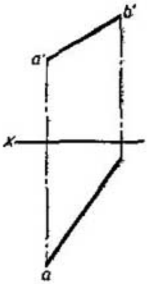


Fig. 45

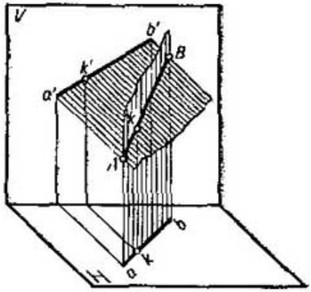


Fig. 46

Los puntos A y B están situados a diferentes distancias de cada uno de los planos V, H y W, es decir, la recta AB no es paralela a ninguno de ellos. Además, ninguna de las proyecciones de la recta es paralela al eje de proyección, ni tampoco perpendicular a éste. Tal recta se llama *recta de posición general*.

Cada una de las proyecciones es menor que el propio segmento: $a'b'<AB$, $ab<AB$, $a''b''<AB$. Designando los ángulos formados por la recta con los planos H, V y W con α, β y γ respectivamente, obtenemos:

$$ab=AB\cos\alpha,\ a'b'=AB\cos\beta,\ a''b''=AB\cos\gamma.$$

Si $ab=a'b'=a''b''$, entonces la recta forma con los planos de proyección ángulos iguales entre sí ($\approx 35°$) [1]; además, cada una de las proyecciones de la recta está situada bajo un ángulo de 45° a los respectivos ejes de proyección o a las líneas de referencia entre las proyecciones.

Es efecto, si (fig. 48) $a'b'=ab$ y $a'b'=a''a''$, la figura $a'b'ba$ es un trapecio isósceles y $b'1=b2$, de donde $b''3=a''3$, es decir, el án-

[1] Véase la deducción en el § 13.

gulo $a''b''3=45°$, y puesto que la figura $a'b'b''a''$ es un paralelogramo, cada uno de los ángulos $b'a'1$ y $ba2$ equivale a 45°.

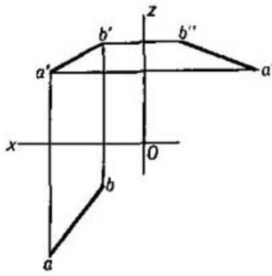


Fig. 47

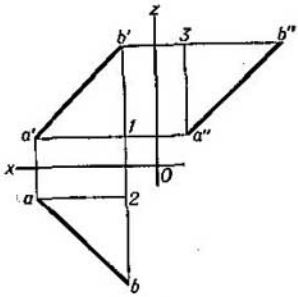


Fig. 48

¿Cómo construir en un dibujo sin ejes de proyección, por ejemplo, la proyección en perfil del segmento de una recta? La construcción se muestra en la fig. 49, donde a la izquierda se da el dibujo original del segmento AB de una recta de posición general, en el centro se muestra el empleo de una recta auxiliar trazada bajo un ángulo de

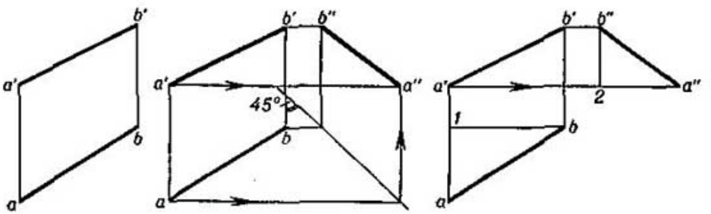


Fig. 49

45° a la dirección de la línea de referencia $b'b$, y a la derecha se da la construcción por la diferencia entre las distancias de los puntos A y B al plano V, o sea, por el segmento $a1$: eligiendo la posición de siquiera la proyección a'' (en la línea de referencia $a'a''$), trazamos $a''2=a1$ y levantando del punto 2 una perpendicular hasta su intersección con la línea de referencia de las proyecciones b' y b'' hallamos la posición de la proyección b''.

§ 11. POSICIONES PARTICULARES DE UNA LINEA RECTA RESPECTO DE LOS PLANOS DE PROYECCION

La línea recta puede ocupar respecto a los planos de proyección posiciones particulares. Examinémoslas según los dos criterios siguientes:

A. La recta es paralela a uno de los planos de proyección.

B. La recta es paralela a dos planos de proyección.

En el primer caso una de las proyecciones del segmento de la recta es igual al propio segmento. En el segundo caso dos proyecciones del segmento son equivalentes a éste[1].

A. La recta es paralela a uno de los planos de proyección

1. La recta es paralela al plano H (fig. 50). En este caso, la proyección frontal de la recta es paralela al eje de proyección y la proyección horizontal del segmento de esta recta es igual al propio segmento: $ab=AB$. Tal recta se llama *horizontal*.

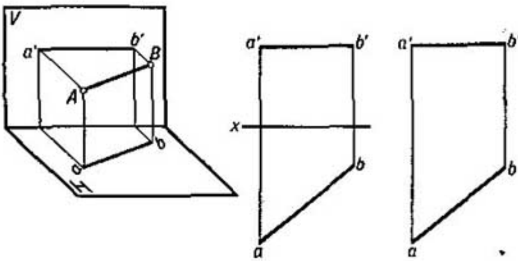


Fig. 50

Si, por ejemplo, la proyección $a'b'$ coincide con el eje de proyección, el segmento AB está situado en el plano H[2].

2. La recta es paralela al plano V (fig. 51). En este caso, su proyección horizontal es paralela al eje de proyección y la proyección frontal del segmento de esta recta es igual al propio segmento: $c'd'=CD$. Tal recta se llama *frontal*.

[1] Todo esto, claro está, teniendo en cuenta la escala del dibujo.

[2] En la fig. 50, a la derecha, se muestra un dibujo sin indicación del eje de proyección. Lo mismo se ha hecho en la fig. 51.

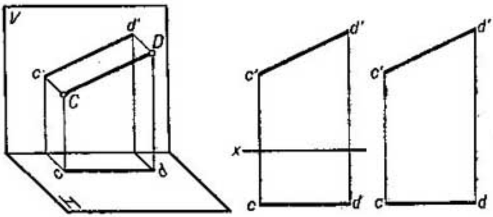


Fig. 51

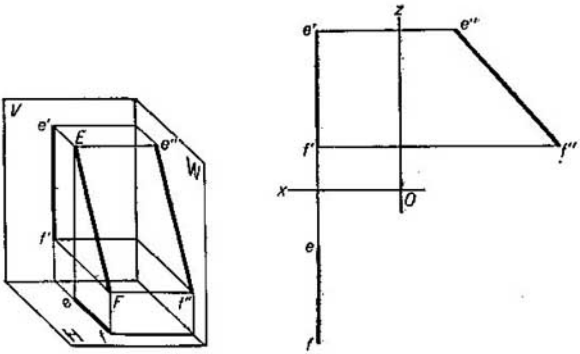


Fig. 52

Si, por ejemplo, la proyección *cd* coincide con el eje de proyección, esto corresponde a la posición del segmento CD en el propio plano V.

3. La recta es paralela al plano W (fig. 52). En este caso, las proyecciones horizontal y frontal de la recta se disponen en una misma perpendicular al eje de proyección Ox y la proyección de perfil de esta recta es igual al propio segmento: $e''f''=EF$. Tal recta se llama *de perfil*.

¿Se puede considerar, que en los dibujos semejantes a los señalados en las figs. 50 y 51, están representados segmentos precisamente de líneas rectas? Sí; la demostración es la misma que para la recta de posición general (fig. 46).

Si en el dibujo, en el sistema V, H, ambas proyecciones son perpendiculares al eje de proyección, entonces, los planos proyectantes trazados por ef y $e'f'$ se confunden y el original puede ser no sólo una línea recta, sino también cierta curva plana (fig. 53).

B. La recta es paralela a dos planos de proyección

1. La recta es paralela a los planos V y H (fig. 54), es decir, es perpendicular al plano W. La proyección sobre el plano W representa un punto.

2. La recta es paralela a los planos H y W (fig. 55), es decir, es perpendicular al plano V. La proyección sobre el plano W representa un segmento de esta recta, igual a cd.

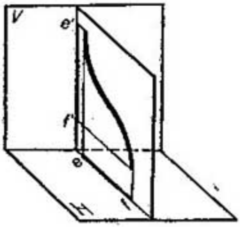


Fig. 53

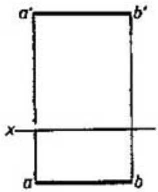


Fig. 54

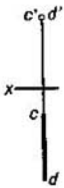


Fig. 55

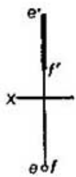


Fig. 56

3. La recta es paralela a los planos V y W (fig. 56), es decir, es perpendicular al plano H. La proyección de esta recta sobre el plano W representa un segmento paralelo e igual a $e'f'$.

En la fig. 57 se da una representación demostrativa de las posiciones de las rectas examinadas[1].

Habitualmente, se construyen las proyecciones de los segmentos de una recta indicando los puntos extremos del segmento. Si por cualesquiera causas se representa cierta parte indefinida de una línea recta, entonces, prácticamente se representa también un segmento de esta recta, pero no se denotan los puntos extremos de este segmento. En este caso, se puede emplear la designación de cada proyección con una sola letra, refiriéndola a cualquier punto de la recta (fig. 58): «la recta que pasa por el punto A».

Prestemos atención en el dibujo representado en la fig. 59 a la derecha. Respecto de la recta representada en este dibujo, se puede decir solamente que ella pasa por el punto L y que es paralela al

[1] Para estas rectas se usa el nombre de «rectas proyectantes».

plano H, pero en lo demás la posición de esta recta no queda definida. Daría claridad la proyección horizontal, es decir, la proyección sobre el plano respecto al cual la recta es paralela.

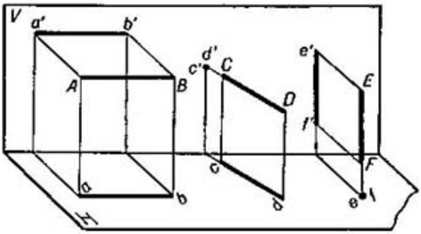


Fig. 57

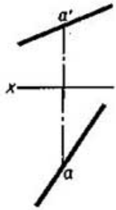


Fig. 58

Si examinamos una recta dada por dos de sus puntos (por ejemplo, el segmento de una recta dado por sus extremos), entonces, se puede hallar exactamente la posición de esta recta, incluso en el caso en que no sea dada su proyección sobre el plano paralelo a esta recta.

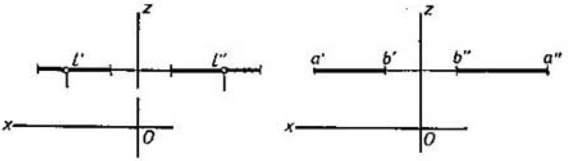


Fig. 59

Así, por ejemplo, si está dado el segmento AB de una recta (fig. 59, a la derecha), podemos establecer no solamente el paralelismo de esta recta con relación al plano H, sino también que el punto A de la recta dada se encuentra más lejos del plano V que el punto B.

§ 12. EL PUNTO SOBRE UNA RECTA. TRAZAS DE UNA RECTA

En la fig. 60 se da el dibujo de una recta de posición general que pasa por el punto A. Si es conocido que el punto B pertenece a esta recta y que la proyección horizontal del punto B se encuentra en el punto b, entonces, la proyección frontal b' se determina como se muestra en la fig. 60.

En la fig. 61 se muestra la construcción de un punto sobre una recta de perfil. Supongamos que sea dada la proyección c' de este punto; hay que hallar su proyección horizontal. La construcción se ha realizado con ayuda de la proyección de perfil $a''b''$ del segmento AB tomado en la recta de perfil. La marcha de la construcción se indica con flechas. Primero se ha determinado la proyección c'' y por ésta la proyección buscada c.

Una de las propiedades de la proyección paralela es que *la relación entre los segmentos de una línea recta es igual a la relación entre sus proyecciones* (fig. 62): $\frac{AC}{CB} = \frac{a_p c_p}{c_p b_p}$, puesto que las rectas Aa_p, Cc_p y Bb_p son paralelas entre sí. Análogamente, la relación entre los segmentos sobre la proyección de una línea recta es igual a la relación

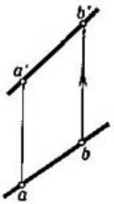


Fig. 60

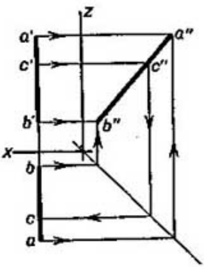


Fig. 61

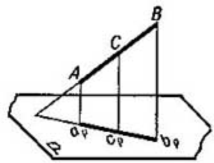


Fig. 62

de los segmentos sobre esta recta. Si un punto dividiera por la mitad al segmento de la recta, entonces, la proyección de este punto dividiría también por la mitad a la proyección del segmento, y viceversa.

De lo dicho se desprende que en la fig. 61, la división de las proyecciones $a'b'$ y ab por los puntos c' y c corresponde a la división del segmento AB en el espacio por el punto C en la misma relación. Esto puede ser utilizado para una construcción más simple del punto sobre la recta de perfil. Si (como en la fig. 61) sobre la proyección $a'b'$ se ha dado la proyección c' (fig. 63), entonces, evidentemente, hay que dividir ab en la misma relación en la que el punto c' divide a la proyección $a'b'$. Trazando desde el punto a una recta auxiliar, trazamos en ella $a1 = a'c'$ y $1-2 = c'b'$. Trazamos la recta $b2$ y paralelamente a ella, por el punto 1, otra recta hasta su intersección con ab en el punto c. Este punto representa la proyección horizontal buscada del punto C perteneciente al segmento AB.

En la fig. 64 se da un ejemplo de la división de un segmento de una línea recta en cierta relación dada.

El segmento CD se ha dividido en la relación de $2:5$. A partir del punto c se ha trazado una recta auxiliar en la que se han señalado siete $(2+5)$ segmentos de longitud arbitraria, pero iguales entre sí. Trazando el segmento $d7$ y paralelamente a éste, por el punto 2, una recta, obtenemos el punto k, además, $ck : kd = 2 : 5$; a continuación hallamos k'. El punto K divide al segmento CD en la relación de 2: 5.

En la fig. 65 se muestran los puntos M y N en los cuales una recta, dada por el segmento AB, corta a los planos de proyección. Estos

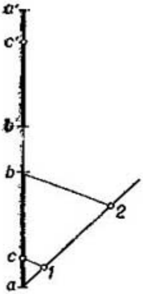


Fig. 63

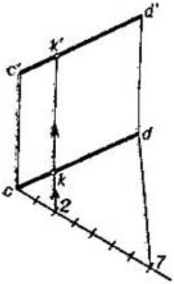


Fig. 64

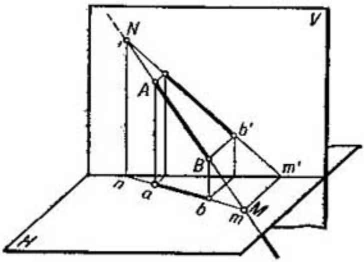


Fig. 65

puntos se llaman *trazas*: el punto M, *traza horizontal de la recta* y el punto N, su *traza frontal*.

La proyección horizontal de la traza horizontal (el punto m) se confunde con la traza, y la proyección frontal de esta traza (el punto m') se encuentra en el eje de proyección. La proyección frontal de la traza frontal (el punto n') coincide con el punto N, y la proyección horizontal (el punto n) se encuentra en el eje de proyección.

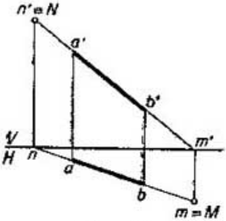


Fig. 66

Por consiguiente, para hallar la traza horizontal, hace falta (fig. 66) prolongar la proyección frontal $a'b'$ hasta su intersección con el eje V/H y trazar por el punto m' (la proyección frontal de la traza horizontal) una perpendicular al eje V/H hasta su intersección con la prolongación de la proyección horizontal ab. El punto m es la proyección horizontal de la traza horizontal; él coincide con la propia traza ($\equiv$es el signo de coincidencia).

Para hallar la traza frontal prolongamos la proyección horizontal ab hasta su intersección con el eje V/H; por el punto n (la proyección horizontal de la traza frontal) trazamos una perpendicular hasta su intersección con la prolongación de la proyección frontal

$a'b'$. El punto n' es la proyección frontal de la traza frontal: este punto se confunde con la traza.

Por la posición de los puntos M y N se puede juzgar sobre a cuáles cuadrantes del espacio está referida la recta dada. En la fig. 65 la recta AB pasa por los cuadrantes IV, I y II.

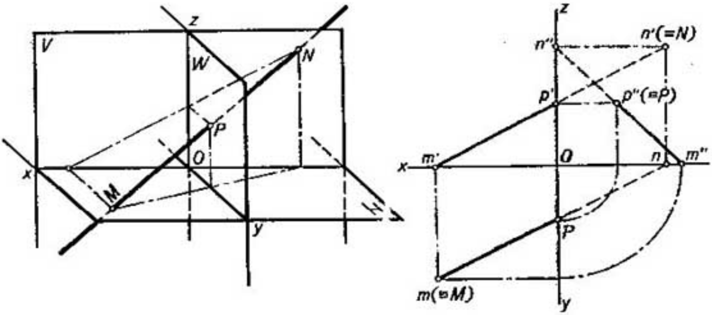


Fig. 67

La recta no tiene traza en el plano de proyección cuando es paralela a este plano.

En la fig. 67 la recta interseca no sólo los planos H y V, sino también el plano W. El punto P es la *traza de perfil* de la recta, es decir, la traza en el plano de proyección de perfil. Esta traza se confunde con su propia proyección sobre el plano W, y sus proyecciones frontal y horizontal se encuentran en los ejes z e y respectivamente.

En este caso la recta pasa tras el punto P a través del quinto octante e intersecando a continuación el plano V sale al sexto octante; del primer octante la recta sale al cuarto octante [1].

El dibujo correspondiente se da en la fig. 67 a la derecha. La recta se muestra en el primer octante (las proyecciones mp, $m'p'$, $m''p''$) y en el quinto octante (las proyecciones pn, $p'n'$, $p''n''$).

Si se toman los planos de proyección como planos de coordenadas, entonces, la coordenada de la traza horizontal de la recta es $z=0$, la de la traza frontal es $y=0$ y la de la traza de perfil es $x=0$.

La construcción de las trazas de la recta de perfil (fig. 68) puede ejecutarse de la manera siguiente (fig. 68, a la derecha):

---

[1] Convengamos en señalar en los dibujos con líneas llenas a las proyecciones que corresponden a la posición de segmento en el primer cuadrante o en el primer octante.

Construimos la proyección de perfil ($a''b''$), determinamos la posición de las proyecciones de perfil de la traza horizontal (m'') y de la traza frontal (n'') y a continuación hallamos la posición de las demás proyecciones de estas trazas (la sucesión de la construcción se muestra en el dibujo con flechas).

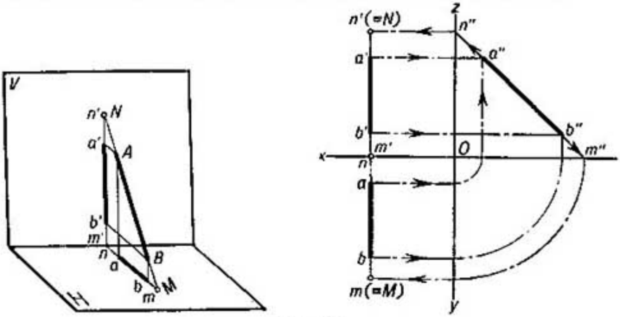


Fig. 68

PREGUNTAS A LOS §§ 10—12

1. ¿Cuál es la posición respecto a los planos de proyección en la que la recta se llama recta de posición general?
2. ¿Cómo se demuestra que el dibujo que contiene dos proyecciones enlazadas entre sí en forma de segmentos de recta, expresa precisamente un segmento de recta?
3. ¿Cómo se expresa la relación entre la proyección del segmento de una recta y el propio segmento?
4. ¿Cómo está situada la recta en el sistema V, H, W, si las tres proyecciones de un segmento de esta recta son iguales entre sí?
5. ¿Cómo construir la proyección de perfil del segmento de una recta de posición general por sus proyecciones frontal y horizontal dadas?
6. ¿Cómo ejecutar la construcción por la pregunta 5 en el dibujo sin ejes de proyección?
7. ¿Cuáles posiciones de una línea recta en el sistema V, H, W se consideran particulares?
8. ¿Cómo se dispone la proyección frontal del segmento de una recta, si su proyección horizontal es igual al propio segmento?
9. ¿Cómo se dispone la proyección horizontal del segmento de una recta, si su proyección frontal es igual al propio segmento?
10. ¿Cuál propiedad de la proyección paralela se refiere a la relación entre los segmentos de una recta?
11. ¿Cómo dividir en el dibujo el segmento de una recta en la relación dada?
12. ¿A qué se le llama traza de una recta en el plano de proyección?
13. ¿Cuál coordenada es igual a cero: a) para la traza frontal de una recta; b) para la traza horizontal de una recta?
14. ¿Dónde se dispone la proyección horizontal de la traza frontal de una recta?
15. ¿Dónde se dispone la proyección frontal de la traza horizontal de una recta?
16. ¿Puede haber el caso cuando una recta en el sistema V, H, W tenga sus trazas en cada uno de estos planos, coincidentes en un punto?

§ 13. CONSTRUCCIÓN DEL SEGMENTO DE UNA RECTA DE POSICIÓN GENERAL Y DE LOS ÁNGULOS DE INCLINACIÓN DE LA RECTA A LOS PLANOS DE PROYECCIÓN *V* Y *H* EN EL DIBUJO DE TAMAÑO NATURAL

Del examen de la parte superior de la fig. 69 se puede deducir que el segmento AB es la hipotenusa del triángulo rectángulo $AB1$, en el cual uno de los catetos es igual a la proyección del segmento ($A1=a_pb_p$) y el otro equivale a la diferencia entre las distancias de los extremos del segmento al plano de proyección P.

Si las coordenadas que definen las distancias de los extremos del segmento al plano de proyección tienen diferentes signos (dibujo inferior de la fig. 69), se debe tener en cuenta la diferencia algebraica:

$B1=Bb_p-(-Aa_p)=Bb_p+Aa_p$.

El ángulo formado por una recta con el plano de proyección se determina como el ángulo formado por esta recta con su proyección sobre este plano. Este ángulo entra en el mismo triángulo rectángulo que se construye para determinar la verdadera magnitud del segmento.

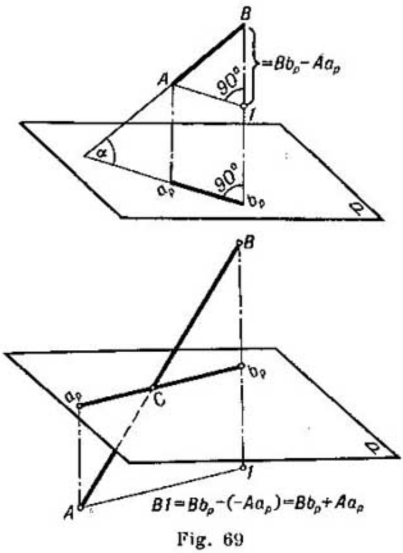


Fig. 69

Evidentemente, conociendo por el dibujo los catetos del triángulo, se puede construir este triángulo en cualquier parte del campo del dibujo. En la fig. 70 se muestra la construcción empleada por G. Monge: a partir del punto 1 se traza el segmento $a_1'1$, igual a la proyección ab, y se construye la hipotenusa $a_1'b'$ que expresa la magnitud verdadera del segmento AB. El ángulo con su vértice en el punto a_1' es igual al ángulo entre AB y el plano H.

En la fig. 71, a la izquierda, la longitud del segmento AB y el ángulo formado por la recta AB con el plano H han sido determinados del triángulo rectángulo construido sobre la proyección ab tomando como segundo cateto $b\overline{B}$ igual a $b'1$. $AB=a\overline{B}$.

En la fig. 71, a la derecha, la longitud del segmento y el ángulo formado por la recta AB con el plano V se han determinado del triángulo rectángulo construido sobre la proyección $a'b'$ ($a'\bar{A}=a2$). $AB=b'\bar{A}$.

¿Están limitados por algo los ángulos α y β para la recta de posición general? Sí, cada uno de estos ángulos puede ser solamente agudo. Pero, además, para la recta de posición general, $\alpha+\beta<90°$.

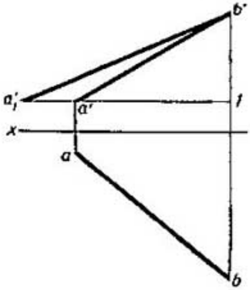


Fig. 70

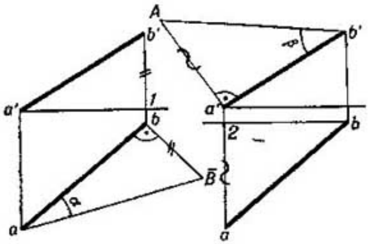


Fig. 71

En efecto, (fig. 72), en el triángulo rectángulo $n'm'm$ la suma de los ángulos $\gamma+\beta=90°$. Pero, en los triángulos $n'm'm$ y $n'nm$, siendo común la hipotenusa $n'm$, el cateto $n'm'$ es mayor que el cateto $n'n$ y, por consiguiente, $\delta>\alpha$. Sustituyendo en $\delta+\beta=90°$ δ por el ángulo α, obtenemos que $\alpha+\beta<90°$.

Examinemos (fig. 71) los triángulos rectángulos $ab\bar{B}$ y $b'a'\bar{A}$. En cada uno de estos triángulos la hipotenusa expresa la magnitud verdadera del segmento, y uno de los catetos es la proyección de este segmento. El otro cateto es igual a la diferencia entre las distancias de los extremos del segmento al correspondiente plano de proyección ($b\bar{B}=b'1=$a la diferencia entre las distancias al plano H, y $a'\bar{A}=a2=$a la diferencia entre las distancias al plano V). Además, en uno de estos triángulos se halla el ángulo formado por el segmento con el plano H (el ángulo α), y en el otro, el ángulo formado por el segmento con el plano V (el ángulo β).

En el caso dado, eran conocidos los catetos y determinabamos la hipotenusa y el ángulo. Pero puede surgir la siguiente posición: son conocidos la hipotenusa y el ángulo, hace falta determinar los catetos (es decir, *se conocen la magnitud verdadera del segmento y los ángulos formados por este segmento con los planos de proyección; hace falta construir las proyecciones de este segmento*).

Supongamos (fig. 73) que sea AB el segmento dado (en la fig. 71 corresponde a las hipotenusas $a\bar{B}$ y $b'\bar{A}$). Describamos con este segmento, como diámetro, una circunferencia. Tomando el punto A como vértice, construimos el ángulo α (es decir, el ángulo dado con el plano H) y el triángulo rectángulo $A1B$. De la comparación de este triángulo con el $ab\bar{B}$ (fig. 71) se desprende que el cateto $A1$

expresa la proyección horizontal del segmento AB, y el cateto $B1$, la diferencia entre las distancias de los extremos del segmento AB al plano H.

Construimos (fig. 73) también el triángulo rectángulo $A2B$ por la misma hipotenusa AB y el ángulo dado β con el plano de proyección V y lo comparamos

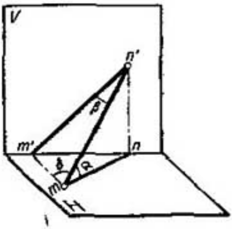


Fig. 72

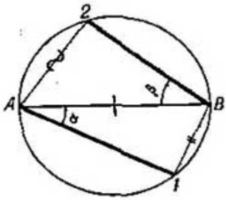


Fig. 73

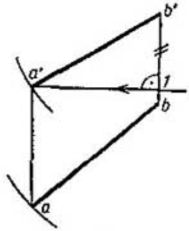


Fig. 74

con el triángulo $b'a'\bar{A}$ en la fig. 71. Es evidente, que el cateto $B2$ expresa la proyección frontal del segmento dado, y el cateto $A2$, la diferencia entre las distancias de los extremos del segmento al plano V.

Ahora construimos el dibujo (fig. 74). Supongamos que el segmento debe ser trazado por el punto B hacia la izquierda y hacia abajo. Llevando sobre la línea de referencia $b'b$, a partir del punto b', el segmento $b'1$ igual a $B1$ (véase la fig. 73), tracemos a continuación por el punto 1 una recta perpendicular a $b'b$. En la intersección de esta recta con el arco trazado desde el punto b' como centro y cuyo radio es igual a la proyección frontal, es decir, al segmento $B2$, obtenemos el punto a'. Para hallar la proyección horizontal a, se puede intersecar la línea de referencia con un arco descrito desde el punto a' y cuyo radio es igual a $A1$ (véase la fig. 73). En este caso, se deberá obtener que $a'a-b1=A2$.

En la fig. 74 se da solamente una posición del segmento. Pero, pueden existir otras siete posiciones más para el punto inicial B. Damos la posibilidad al lector de representar el segmento AB en estas posiciones.

En la fig. 75 se da un ejemplo de la determinación de la distancia desde el punto A hasta el punto O. Primero han sido construi-

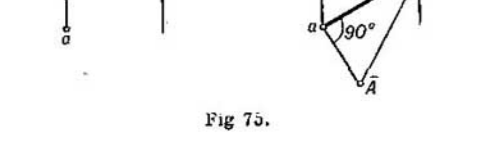


Fig 75.

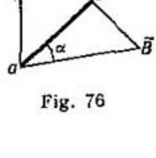


Fig. 76

das las proyecciones del segmento buscado: $a'o'$ y ao (el punto O está expresado por sus proyecciones o' y o). Luego se ha construido el triángulo $o a \bar{A}$, uno de cuyos catetos es la proyección oa, y el otro es el segmento $a\bar{A} = a'1$. La distancia buscada se determina por la hipotenusa $o\bar{A}$.

Ahora podemos determinar el ángulo formado por la recta, de igual inclinación a los planos H, V y W, con estos planos. Sobre este ángulo se habló en el § 10, y se indicó su magnitud ($\approx 35°$). Esta puede ser determinada si se examina, por ejemplo, la fig. 76: las proyecciones $a'b'$ y ab son iguales entre sí, y los ángulos $a'b'1$ y $a'ab$ equivalen cada uno a 45° (véase el § 10).

El ángulo buscado se ha determinado del triángulo rectángulo $ab\bar{B}$, en el que el cateto $b\bar{B} = b'1$. Si se toma $b'1$ igual a la unidad, entonces, $ab = a'b' = \sqrt{2}$ y el ángulo es $\alpha \approx 35°15'$. La misma magnitud tienen los ángulos formados por esta recta con los planos V y W.

Si se emplea lo dicho en el § 8, es decir, se complementa el sistema V, H con el sistema S, H, eligiendo el plano S perpendicular al H y paralelo al segmento de una recta dado en el dibujo, es evidente, que la proyección de este segmento sobre el plano S expresará su magnitud verdadera y el ángulo con el plano H.

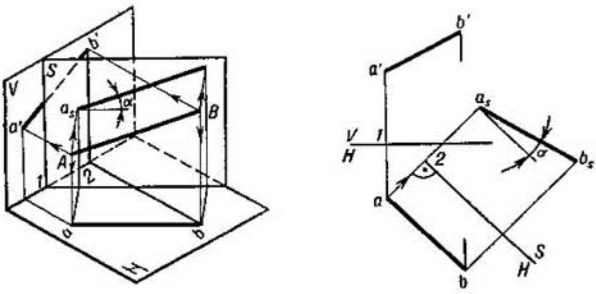


Fig. 77

Supongamos (fig. 77) que se exija determinar el tamaño natural del segmento AB y el ángulo formado por éste con el plano H. En el sistema V, H se ha introducido el plano $S \perp H$ de tal modo que $S \| AB$. Ha surgido un sistema auxiliar S, H. En este sistema $AB \| S$ (el eje $S/H \| ab$); la proyección $a_s b_s$ expresa la magnitud verdadera del segmento AB.

§ 14. POSICIÓN RECÍPROCA DE DOS RECTAS

Rectas paralelas. Al número de propiedades de la proyección paralela se refiere la siguiente: *las proyecciones de dos rectas paralelas son paralelas entre sí*. Si (fig. 78) la recta AB es paralela a la recta CD, los planos proyectantes Q y R son paralelos entre sí y al intersecarse con el plano de proyección P se obtienen las proyecciones paralelas entre sí a_pb_p y c_pd_p.

Sin embargo, a pesar de que $a_pb_p \| c_pd_p$ (fig. 78), las rectas, para las cuales a_pb_p y c_pd_p son sus proyecciones, pueden ser no paralelas entre sí: por ejemplo, la recta AB no es paralela a la recta C_1D_1.

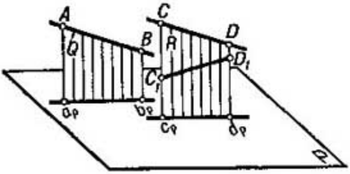


Fig. 78

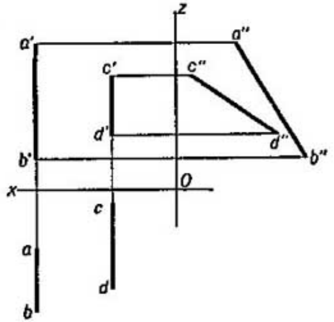


Fig. 79

De la propiedad señalada de la proyección paralela se desprende que *las proyecciones horizontales de rectas paralelas son paralelas entre sí, las proyecciones frontales son paralelas entre sí y las proyecciones de perfil son paralelas entre sí*.

¿Es justa la conclusión inversa, es decir, serán paralelas dos rectas en el espacio, si en el dibujo sus proyecciones homónimas son dos a dos paralelas? Sí, si están dadas las proyecciones paralelas entre sí sobre cada uno de los planos de proyección, H, V y W. Pero, si están dadas las proyecciones paralelas entre sí de las rectas solamente sobre dos planos de proyección, entonces, el paralelismo de las rectas en el espacio se confirma siempre para las rectas de posición general y puede no confirmarse para las rectas paralelas a uno de los planos de proyección.

Un ejemplo se da en la fig. 79. A pesar de que las rectas de perfil AB y CD vienen dadas por las proyecciones ab, $a'b'$ y cd, $c'd'$ paralelas entre sí, las propias rectas no son paralelas, esto se ve de la disposición recíproca de sus proyecciones de perfil construidas por las proyecciones dadas.

Así pues, *la cuestión se resolvió con ayuda de las proyecciones de las rectas sobre el plano de proyección respecto al cual las rectas dadas son paralelas.*

En la fig. 80 está representado el caso cuando se puede establecer que las rectas de perfil AB y CD no son paralelas entre sí, sin recurrir a la construcción de la tercera proyección: basta prestar atención en la permutación de las designaciones.

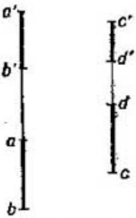


Fig. 80

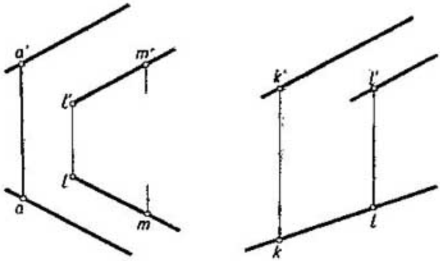


Fig. 81

Si se exige trazar por el punto dado A una recta paralela a la recta dada LM, entonces (fig. 81, a la izquierda), la construcción se reduce al trazado por el punto a' de una recta paralela a $l'm'$, y por el punto a de otra recta paralela a lm.

En el caso representado en la fig. 81 a la derecha, las rectas paralelas están situadas en un plano proyectante común para ellas, perpendicular al plano H. Por esta razón, las proyecciones horizontales de estas rectas se encuentran sobre una misma recta.

Rectas que se cortan. *Si las rectas se cortan, sus proyecciones homónimas se cortan en un punto que es la proyección del punto de intersección de estas rectas.*

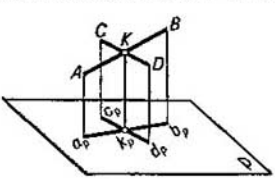


Fig. 82

En efecto (fig. 82), si el punto K pertenece a ambas rectas AB y CD, la proyección de este punto deberá ser el punto de intersección de las proyecciones de las rectas dadas.

La conclusión de que las rectas dadas en el dibujo se cortan, se puede hacer siempre con relación a las *rectas de posición general*, independientemente de si están dadas las proyecciones sobre tres o sobre dos planos de proyección. La condición necesaria y suficiente es que *los puntos de inersección de las proyecciones homónimas se encuentren en una misma perpendicular al correspondiente eje de proyección* (fig. 83) *o que, en el dibujo sin ejes de proyección* (fig. 84) *estos puntos* *se encuentren sobre la línea de referencia de dirección dada.* Pero, si una de estas rectas es paralela a un plano de proyección cualquiera, y en el dibujo no vienen dadas las proyecciones sobre este plano, no se puede afirmar que estas rectas se cortan, aunque se cumpliera la condición indicada más arriba. Por ejemplo, en el caso dado en la fig. 85, las rectas AB y CD, de las cuales la CD es paralela al plano W, no se cortan; esto puede ser confirmado con la construcción

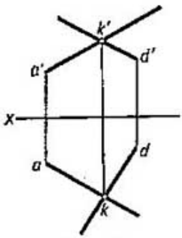


Fig. 83

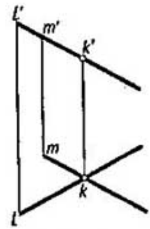


Fig. 84

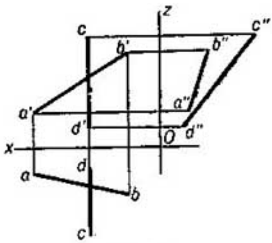


Fig. 85

de las proyecciones de perfil o aplicando las reglas de división de los segmentos en una relación dada.

Las rectas que se cortan representadas en la fig. 84 están contenidas en un plano proyectante común para éstas, perpendicular al plano V. Por esta razón, las proyecciones frontales de estas rectas están situadas sobre una misma recta

Rectas que se cruzan. Las rectas que se cruzan, ni se cortan ni son paralelas. En la fig. 86 están representadas dos rectas que se cruzan de posición general: a pesar de que las proyecciones homónimas se cortan, sus puntos de intersección no pueden ser unidos con la línea de referencia, paralela a las líneas de referencia $l'l$

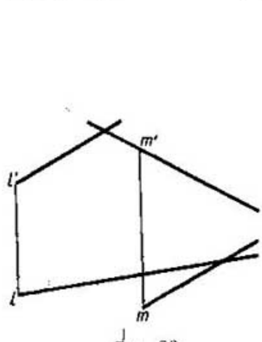


Fig. 86

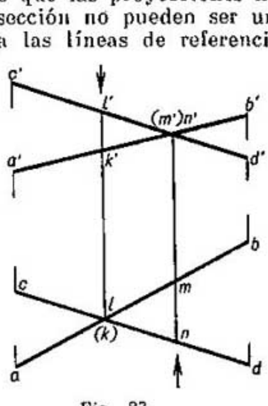


Fig. 87

y $m'm$, es decir, estas rectas no se cortan. Las rectas representadas en la figs. 79, 80 y 85 son también rectas que se cruzan.

¿Cómo debe considerarse el punto de intersección de las proyecciones homónimas de las rectas que se cruzan? Este punto representa las proyecciones de dos puntos, uno de los cuales pertenece a una de las rectas que se cruzan, y el otro, a la otra recta. Por ejemplo, en la fig. 87 el punto con las proyecciones k' y k pertenece a la recta AB, y el punto con las proyecciones l' y l pertenece a la recta CD. Estos puntos equidistan del plano V, pero sus distancias hasta el plano H son diferentes: el punto con las proyecciones l' y l se encuentra más alejado del plano H que el punto con las proyecciones k' y k (véase la fig. 88).

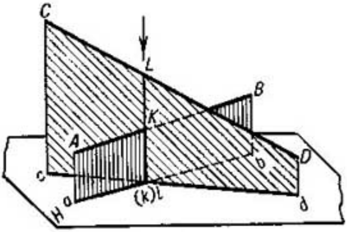


Fig. 88

Los puntos con las proyecciones m', m y n', n equidistan del plano H, pero se encuentran a distintas distancias del plano V.

El punto con las proyecciones l' y l, perteneciente a la recta CD, tapa al punto con las proyecciones k' y k de la recta AB respecto al plano H; la dirección correspondiente de la vista está indicada con una flecha al lado de la proyección l'. Respecto al plano V, el punto con las proyecciones n' y n de la recta CD tapa al punto con las proyecciones m' y m de la recta AB; la dirección de la vista está indicada con una flecha al lado de la proyección n.

Las designaciones de las proyecciones de los puntos «tapados» se dan entre paréntesis[1].

§ 15. SOBRE LAS PROYECCIONES DE ÁNGULOS PLANOS

1. *Si el plano, en el que está situado cierto ángulo, es perpendicular al plano de proyección, este ángulo se proyecta sobre este plano de proyección en forma de una recta.*

2. *Si el plano de un ángulo recto no es perpendicular al plano de proyección y por lo menos uno de sus lados es paralelo a este plano, el ángulo recto se proyecta sobre él en forma de ángulo recto.*

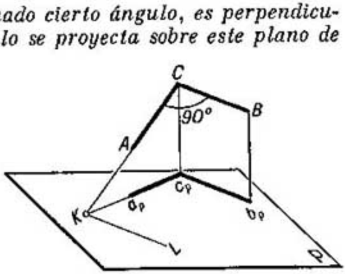


Fig. 89

[1] A los puntos pertenecientes a rectas que se cruzan y situados en una misma recta proyectante se los suele llamar puntos «concurrentes».

Supongamos que el lado CB del ángulo recto ACB (fig. 89) es paralelo al plano de proyección. En tal caso, la recta CB es paralela a c_pb_p. Sea que el segundo lado (AC) del ángulo recto corta a su proyección a_pc_p en el punto K. Trazamos en el plano de proyección por el punto K una recta paralela a c_pb_p. La recta KL también es paralela a CB, y el ángulo CKL se obtiene recto. Por el teorema de las tres perpendiculares, el ángulo c_pKL también es recto[1]. Por tanto, también es recto el ángulo $a_pc_pb_p$.

A este teorema sobre la proyección de un ángulo recto le corresponden dos inversos (puntos 3 y 4).

3. *Si la proyección de un ángulo plano representa un ángulo recto, el ángulo proyectado será recto solamente con la condición de que por lo menos uno de sus lados sea paralelo al plano de proyección.*

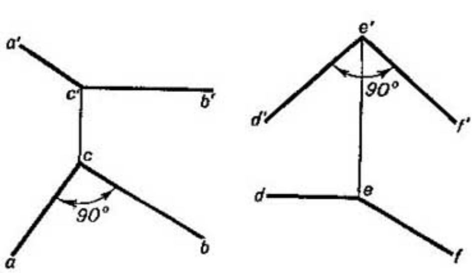


Fig. 90

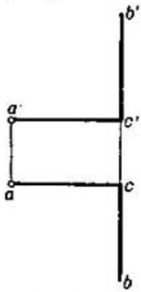


Fig. 91

4. *Si la proyección de cierto ángulo, uno de cuyos lados es paralelo al plano de proyección, representa un ángulo recto, entonces, el ángulo proyectado también es recto.*

Basándose en lo expuesto se puede establecer que los ángulos representados en la fig. 90, en el espacio son rectos.

¿En qué caso las proyecciones de un ángulo recto sobre dos planos de proyección representan ángulos rectos? Esto sucede cuando uno de los lados del ángulo recto es perpendicular al tercer plano de proyección (en este caso, el otro lado es paralelo a este plano). Un ejemplo de este caso está representado en la fig. 91: el lado AC es perpendicular a W y el lado BC es paralelo a este plano.

Empleando los conocimientos sobre la proyección de un ángulo recto, sobre la adición del sistema S, H al sistema V, H (§ 8) y sobre la disposición de las proyecciones de una recta paralela a uno de los planos de proyección (§ 11),

[1] De acuerdo con el teorema directo de las tres perpendiculares: si $KL \perp c_pK$, entonces, $KL \perp CK$. De acuerdo con el teorema inverso: si $KL \perp CK$, entonces, $KL \perp c_pK$.

podemos cumplir las siguientes construcciones: trazar por cierto punto A una recta de modo que corte a la recta dada bajo un ángulo de 90°. La resolución se muestra en la fig. 92, donde, a la izquierda, se da la posición inicial, en el centro se muestra la formación de un sistema más S, H, además del sistema V, H, con la particularidad de que $S \parallel BC$, y a la derecha se ha cumplido la construcción de la recta $AK \perp BC$.

Por ser el plano $S \parallel BC$, lo que se asegura trazando el eje S/H paralelamente a bc, el ángulo recto AKB (o el AKC) se proyecta sobre el plano S en forma del ángulo recto $a_s k_s b_s$. Una vez construidas las proyecciones del punto A y de la recta BC sobre el plano S, trazamos $a_s k_s \perp b_s c_s$, y a continuación obtenemos las proyecciones k y k' y las proyecciones ak y $a'k'$ (la marcha de la construcción está indicada con flechas).

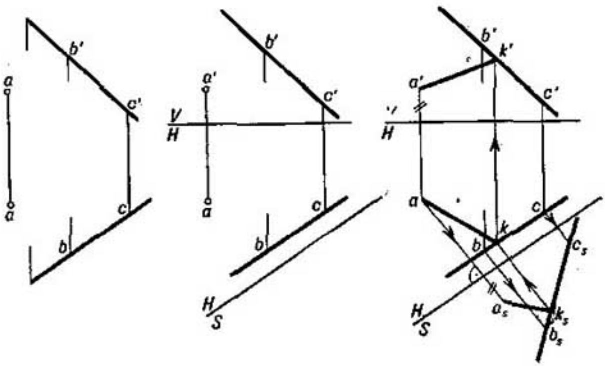


Fig. 92

¿Se puede considerar que, una vez construida la perpendicular AK a la recta BC, hemos determinado la distancia de A a BC? No, sólo hemos construido las proyecciones del segmento AK; ninguna de ellas determina la magnitud de la distancia. Si hay que determinar la magnitud del segmento AK, es decir, la distancia de A a BC, se debe continuar la construcción, empleando, por ejemplo, el procedimiento expuesto en el § 13.

5. *Si el plano de un ángulo obtuso o agudo no es perpendicular al plano de proyección y por lo menos uno de los lados del ángulo es paralelo al plano de proyección, entonces, la proyección de un ángulo obtuso sobre este plano representa un ángulo obtuso; y la proyección de un ángulo agudo, un ángulo agudo.*

Supongamos que la recta CB (fig. 93) sea paralela al plano de proyección. Examinemos el ángulo obtuso KCB o el ángulo agudo MCB y tracemos en el plano de este ángulo una recta $CL \perp CB$. Por ser el ángulo LCB recto, su proyección, el ángulo $Lc_p b_p$, representa un ángulo recto. Este ángulo está comprendido dentro del ángulo $Kc_p b_p$

y comprende a su vez al ángulo Mc_pb_p, por tanto, el ángulo Kc_pb_p es obtuso y el Mc_pb_p es agudo.

Así pues, la proyección de un ángulo representa un ángulo del mismo nombre (recto, obtuso o agudo) que el propio ángulo, si por lo menos uno de los lados del ángulo es paralelo al plano de proyección.

En general, la proyección de cualquier ángulo, puede representar un ángulo recto, obtuso o agudo, según la posición del ángulo respecto al plano de proyección.

6. *Si ambos lados de un ángulo cualquiera son paralelos al plano de proyección, su proyección es de igual magnitud que el ángulo proyectado.*

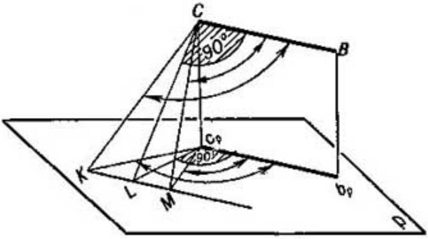


Fig. 93

Esto se desprende de la igualdad de los ángulos con lados paralelos y del mismo sentido.

Por eso, por ejemplo, el ángulo formado por la recta AB (fig. 50, pág. 35) con el plano V es fácil de determinar: es el ángulo entre la proyección ab y el eje x; de la misma manera el ángulo formado por la recta CD con el plano H (fig. 51) se determinará como el ángulo formado por la proyección $c'd'$ con el eje x, y el ángulo entre EF (fig. 52) y el plano V, como el ángulo formado por la proyección $e''f''$ con el eje z.

Para el ángulo recto, la igualdad de su proyección al propio ángulo tiene lugar en el caso en que sólo uno de los lados del ángulo recto es paralelo al plano de proyección.

Pero, para el ángulo agudo u obtuso, uno de cuyos lados es paralelo al plano de proyección, la proyección del ángulo no puede ser igual al ángulo proyectado. En este caso, la proyección de un ángulo *agudo* es menor que el ángulo proyectado, y la proyección de un ángulo *obtuso* es mayor que el ángulo proyectado.

Supongamos (fig. 94) que el ángulo A_1BC sea agudo y que su lado CB sea paralelo al plano P; $c_pb_p \| CB$. El plano S, trazado por el punto C perpendicularmente a CB, es perpendicular al plano P e interseca a este último según la recta S_p, que pasa por el punto c_p y es perpendicular a c_pb_p. Si se traza por el punto B diferentes rectas bajo un mismo ángulo agudo a la recta CB, todas estas rectas intersecarán al plano S en puntos cuyas proyecciones se situarán sobre la recta S_p. Supongamos que las rectas AB y A_1B formen con la recta CB ángulos iguales entre sí: $\angle ABC=\angle A_1BC$. Si en este caso AB es paralelo al plano P, entonces, $\angle a_pb_pc_p=\angle ABC$. Si el lado A_1B no es paralelo al plano P, la proyección del punto A_1 se encontrará en la recta S_p más cerca del punto c_p que la proyección del punto A. Por consiguiente, la proyección del ángulo A_1BC representa un ángulo *menor* que el $a_pb_pc_p$, o sea, $\angle a_{1p}b_pc_p<\angle A_1BC$.

7. *Si los lados de un ángulo son paralelos al plano de proyección o están inclinados a una misma magnitud respecto a este plano, la división de la proyección de este ángulo sobre dicho plano por la mitad corresponde a la división por la mitad del propio ángulo en el espacio.*

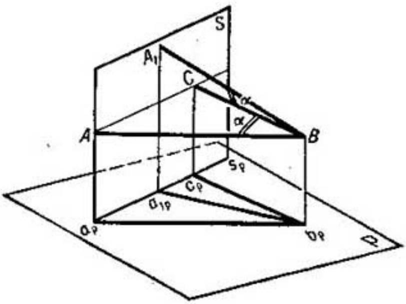


Fig. 94

8. *La división de un ángulo en el espacio por la mitad corresponde a la división de su proyección por la mitad sólo con la condición de que los lados del ángulo forman con el plano de proyección ángulos iguales.*

9. *Si los lados de un ángulo están inclinados a una misma magnitud respecto al plano de proyección, la proyección de este ángulo no puede ser igual al ángulo proyectado.*

Esto (fig. 95) se puede establecer mediante el abatimiento del ángulo MKN sobre el plano P, haciéndolo girar alrededor de la recta MN. En este caso, el ángulo Mk_pN se encontrará dentro del ángulo MK_1N, y los vértices K_1 y k_p estarán situados en la perpendicular común a MN.

10. *Las proyecciones de los ángulos agudo y obtuso pueden ser iguales al ángulo proyectado no solamente en el caso de paralelismo de los lados del ángulo al plano de proyección.*

En la fig. 96 se ve que todos los ángulos, por ejemplo, el ángulo agudo MKN y el obtuso MKN_1, cuyos lados están situados respectivamente en los planos proyectantes P y Q, tienen como proyección

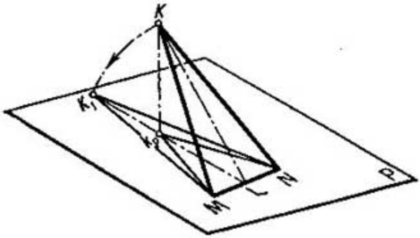


Fig. 95

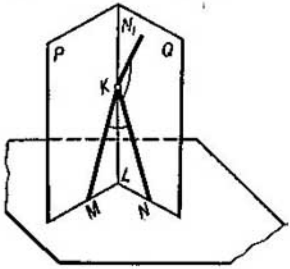


Fig. 96

un ángulo igual al MLN, con la particularidad de que estos ángulos pueden adquirir los valores entre 0° y 180°. Evidentemente, entre estos ángulos puede hallarse un ángulo igual a su proyección.

Un ejemplo de la construcción de tal ángulo se da en el § 38.

PREGUNTAS A LOS §§ 13—15

1. ¿Cómo construir en el dibujo los triángulos rectángulos para determinar la longitud del segmento de una recta de posición general y los ángulos formados por ésta con los planos de proyección V y H?
2. ¿A qué condiciones deben corresponder los ángulos formados por una recta de posición general con los planos de proyección V y H?
3. ¿Cuál propiedad de la proyección paralela se refiere a las rectas paralelas?
4. ¿Se puede determinar por el dibujo de dos rectas de perfil en el sistema V, H, si son estas rectas paralelas entre sí?
5. ¿Cómo se representan en el sistema V, H dos rectas que se cortan?
6. ¿Cómo debe interpretarse el punto de intersección de las proyecciones de dos rectas que se cruzan?
7. ¿En qué caso el ángulo recto se proyecta en forma de ángulo recto?
8. ¿En qué caso la proyección de un ángulo obtuso o agudo es obligatoriamente un ángulo del mismo nombre (obtuso o agudo)?
9. ¿Puede ser la proyección de un ángulo agudo u obtuso, uno de cuyos lados es paralelo al plano de proyección, igual al propio ángulo en el espacio?
10. ¿En qué caso la división de la proyección de un ángulo por la mitad corresponde a la misma división del propio ángulo en el espacio?
11. ¿Puede ser la proyección de un ángulo sobre cierto plano de proyección, igual al ángulo proyectado cuyos lados forman con este plano ángulos iguales?
12. ¿Puede ser un ángulo agudo u obtuso, cuyos lados no son paralelos al plano de proyección, igual a su proyección sobre este plano?

III
CAPITULO

EL PLANO

§ 16. DIFERENTES MÉTODOS DE REPRESENTACIÓN DE UN PLANO EN EL DIBUJO

La posición de un plano en el espacio queda determinada:
a) por tres puntos no alineados;
b) por una recta y un punto exterior a esta recta;
c) por dos rectas que se cortan;
d) por dos rectas paralelas.
En concordancia con esto, en el dibujo el plano puede estar dado:

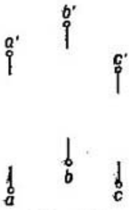


Fig. 97

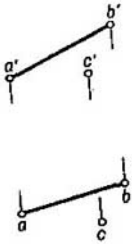


Fig. 98

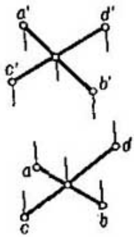


Fig. 99

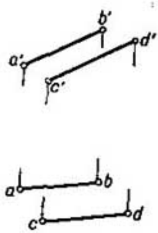


Fig. 100

a) por las proyecciones de tres puntos no alineados (fig. 97);
b) por las proyecciones de una recta y un punto exterior a esta recta (fig. 98);
c) por las proyecciones de dos rectas que se cortan (fig. 99);
d) por las proyecciones de dos rectas paralelas (fig. 100).

Cada una de las representaciones expuestas en las figs. 97—100 puede ser transformada en otra de ellas. Por ejemplo, trazando por los puntos A y B (fig. 97) una recta, obtendremos la representación del plano dada en la fig. 98; de ella podemos pasar a la fig. 100, si por el punto C trazamos una recta paralela a la recta AB. El plano puede ser representado en el dibujo por las proyecciones de cualquier figura plana (triángulo, cuadrado, círculo, etc.). Supongamos que cierto plano P viene determinado por los puntos A, B y C (fig. 101). Trazando líneas rectas por las proyecciones homónimas de estos puntos, obtendremos las proyecciones del triángulo ABC. El punto D, tomado sobre la recta AB, pertenece al mismo tiempo al plano P; trazando una recta por el punto D y otro punto perteneciente al plano P (por ejemplo, por el punto C), obtenemos una recta más en el plano P.

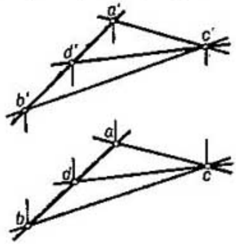


Fig. 101

Análogamente, pueden ser construidas las rectas y, por tanto, los puntos pertenecientes al plano dado por cualquier de los métodos expuestos.

Más adelante veremos que *el plano perpendicular al plano de proyección, puede ser dado por la recta según la cual estos planos se intersecan.*

§ 17. TRAZAS DE UN PLANO

El plano puede ser representado con mayor claridad con ayuda de las rectas según las cuales este plano interseca a los planos de proyección. En la fig. 102 se da un ejemplo de la construcción de tales rectas para el caso en que cierto plano Q viene dado por dos rectas que se cortan AB y CB.

Para construir la recta según la cual el plano Q interseca al plano H, basta construir dos puntos pertenecientes al mismo tiempo a los planos Q y H.

Como tales puntos sirven las trazas de las rectas AB y CD en el plano H, es decir, los puntos de intersección de estas rectas con el plano H. Una vez construidas las proyecciones de estas trazas, trazando una recta por los puntos m_1 y m_2, obtendremos la proyección horizontal de la línea de intersección de los planos Q y H.

La línea de intersección de los planos Q y V queda determinada por las trazas frontales de las rectas AB y CD.

Las rectas, según las cuales cierto plano interseca a los planos de proyección, se llaman trazas de este plano en los planos de proyección, o, abreviadamente, *trazas del plano.*

En la fig. 103 viene representado un plano P que interseca al plano horizontal de proyección según la recta designada por P_h y al plano frontal, según la recta P_v. La recta P_h se llama traza horizontal del plano, y la recta P_v, traza frontal del plano.

Si un plano interseca al eje de proyección, en este eje se obtiene el punto de intersección de las trazas del plano[1]. Así, por ejemplo, en la fig. 103 las trazas P_v y P_h se intersecan sobre el eje x en el punto designado con P_x.

La traza de un plano en el plano de proyección se confunde con su proyección sobre este plano. La traza P_h (fig. 103) se confunde con su proyección horizontal; la proyección frontal de esta traza

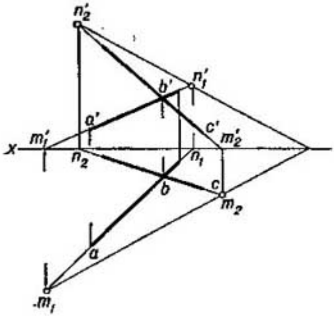


Fig. 102

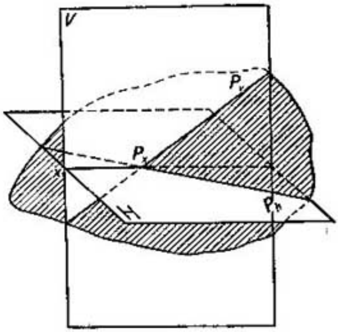


Fig. 103

está situada en el eje de proyección. La traza P_v se confunde con su proyección frontal; la proyección horizontal de esta traza está situada en el eje de proyección.

En el dibujo, el plano puede ser dado por las proyecciones de sus trazas. Podemos limitarnos a designar solamente las propias trazas (fig. 104). Tal dibujo es claro y cómodo al ejecutar ciertas construcciones.

Al construir las trazas de un plano, el punto de su intersección puede ser utilizado para verificar la construcción: ambas trazas deben intersecarse en un punto sobre el eje de proyección (véase la fig. 102).

El ángulo entre las trazas en el dibujo no es igual al ángulo formado por las trazas del plano en el espacio. En efecto, en la intersección de las trazas se encuentra el vértice de un ángulo triédrico, dos de cuyas caras coinciden con los planos de proyección (fig. 103). Pero, la suma de los ángulos planos de un ángulo triédrico es mayor que el tercer ángulo plano. Por esta razón, el ángulo formado por las trazas P_v y P_h en el dibujo (fig. 104), siempre es mayor que el ángulo entre estas trazas en el espacio.

Si se examina un plano en el sistema V, H, W, entonces, en el caso general, el plano intersecará cada uno de los ejes de proyección

---

[1] A este punto se le suele llamar «punto de concurrencia de las trazas»

(fig. 105: el plano P intersecará a los ejes x, y y z). A tal plano se le llama *plano de posición general*. La traza P_w se llama *traza de perfil del plano*.

Puesto que los puntos P_x, P_y y P_z están situados sobre los ejes x, y y z respectivamente, para construir el dibujo del plano en el sistema V, H, W es suficiente tener dados los segmentos OP_x, OP_y y OP_z, es decir, conocer las coordenadas de los puntos P_x, P_y y P_z

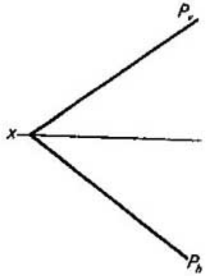


Fig. 104

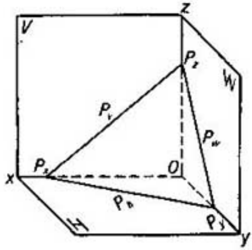


Fig. 105

en el sistema de ejes x, y, z. El problema se reduce solamente a una coordenada para cada uno de estos puntos, ya que las otras dos coordenadas son iguales a cero. Por ejemplo, para la construcción del punto P_z basta conocer su Z-coordenada: la abscisa y la ordenada de este punto son iguales a cero.

§ 18. LA RECTA Y EL PUNTO EN EL PLANO. RECTAS DE POSICION PARTICULAR

¿Cómo construir en el dibujo una línea recta situada en un plano dado? Esta construcción se basa en dos hipótesis conocidas de la Geometría.

1) *Una recta pertenece a un plano, si pasa por dos puntos pertenecientes a este plano.*

2) *Una recta pertenece a un plano, si pasa por un punto perteneciente a este plano, y es paralela a una recta situada en este plano o paralela a él.*

Supongamos que el plano Q_1 (fig. 106) esté determinado por dos rectas que se cortan AB y CB, y el plano Q_2, por dos rectas paralelas DE y FG. De acuerdo con la primera hipótesis, la recta que corta a dos rectas que determinan a un plano, se encuentra sobre este plano.

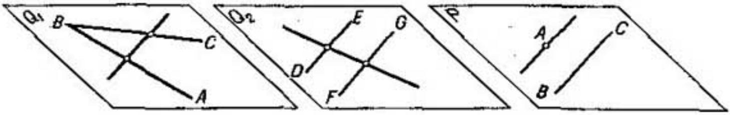


Fig. 106

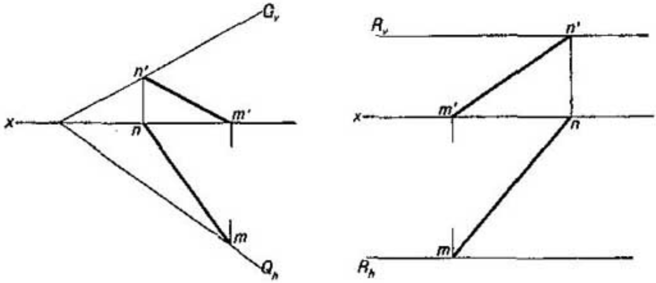


Fig. 107

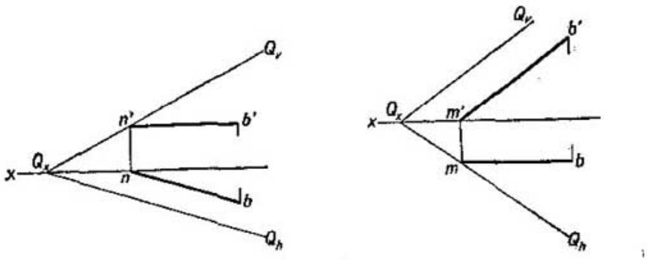


Fig. 108

De aquí se deriva que si el plano está dado por sus trazas, entonces, *la recta pertenece al plano, si las trazas de esta recta se encuentran en las trazas del plano del mismo nombre que éstas* (fig. 107).

Supongamos que el plano P (fig. 106) esté determinado por el punto A y la recta BC. De acuerdo con la segunda hipótesis, la recta trazada por el punto A paralelamente a la recta BC, pertenece al plano P. De aquí que: *la recta pertenece al plano, si es paralela a una de las trazas de este plano y tiene un punto común con la otra traza* (fig. 108).

Los ejemplos de construcción expuestos en las figs. 107 y 108 no deben ser interpretados en el sentido de que para la construción de una recta sobre un plano es necesario previamente construir las trazas de este plano. Claro está, que esto no es obligatorio.

Por ejemplo, en la fig. 109 se da la construcción de la recta AM en el plano dado por el punto A y una recta que pasa por el punto L. Supongamos que la recta AM deba ser paralela al plano H. La construcción se ha iniciado trazando

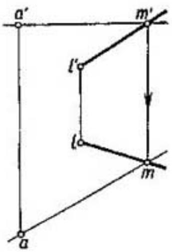


Fig. 109

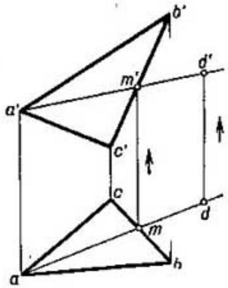


Fig. 110

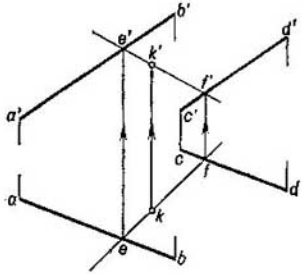


Fig. 111

las proyecciones $a'm'$ perpendicularmente a la línea de referencia $a'a$. Con ayuda del punto m' se ha hallado el punto m y, a continuación, ha sido trazada la proyección am. La recta AM corresponde a la condición: es paralela al plano H y está situada en el plano dado, por pasar por dos puntos (A y M) pertenecientes a ciencia cierta, a este plano.

¿Cómo construir en el dibujo un punto perteneciente a un plano dado? Para hacer esto, *se construye previamente una recta situada en el plano dado, y sobre esta recta se toma un punto.*

Por ejemplo, se exige hallar la proyección frontal del punto D, si está dada su proyección horizontal d y se conoce que el punto D debe pertenecer al plano determinado por el triángulo ABC (fig. 110).

Primero se construye la proyección horizontal de cierta recta de modo que el punto D pueda encontrarse sobre esta recta, y esta última esté situada sobre el plano dado. Para ello se traza una recta por los puntos a y d y se marca el punto m, en el cual la recta ad interseca al segmento bc. Una vez construida la proyección frontal m' sobre $b'c'$, se obtiene la recta AM situada en el plano dado: esta recta pasa por el punto A y el punto M, el primero de los cuales es notoriamente un punto de este plano y el segundo está construido en éste.

La proyección frontal buscada d' del punto D deberá encontrarse sobre la proyección frontal de la recta AM.

En la fig. 111 se da otro ejemplo. En el plano Q, dado por dos rectas paralelas AB y CD, debe encontrarse el punto K, dado solamente por su proyección horizontal k. Por el punto k se ha trazado cierta recta tomada como proyección horizontal de la recta sobre el plano dado. Con ayuda de los puntos e y f construimos e' sobre $a'b'$ y f' sobre $c'd'$. La recta construida EF pertenece al plano Q por pasar por los puntos E y F pertenecientes notoriamente al plano. Si se toma el punto k' sobre $e'f'$, el punto K se encontrará en el plano Q.

Al número de rectas que ocupan una posición particular en el plano se referirán: las *horizontales*, *frontales*[1] *y líneas de máxima inclinación a los planos de proyección*. A la línea de máxima inclinación al plano H la llamaremos *línea de pendiente del plano*[2]. *Se llaman horizontales del plano a las rectas situadas en este plano y paralelas al plano horizontal de proyección.*

Construyamos la horizontal del plano, dado por el triángulo ABC. Es necesario trazar la horizontal por el vértice A (fig. 112).

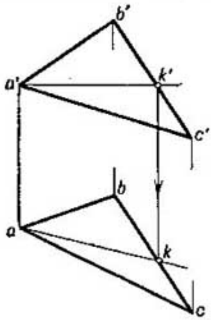


Fig. 112

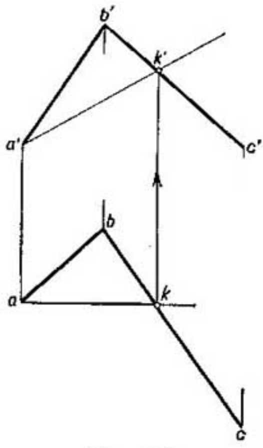


Fig. 113

Puesto que la horizontal del plano es una recta paralela al plano H, la proyección frontal de esta recta se obtendrá trazando $a'k' \perp a'a$. Para construir la proyección horizontal de esta horizontal construimos el punto k y trazamos una recta por los puntos a y k.

---

[1] Simultáneamente con las horizontales y las frontales del plano se pueden examinar sus líneas de perfil, es decir, las rectas situadas en este plano y paralelas al plano W. A las horizontales, frontales y rectas de perfil se les suele llamar líneas de nivel. Sin embargo, tal denominación corresponde a la idea corriente sólo de horizontalidad.

[2] Para las líneas de pendiente del plano está difundido el nombre de «líneas de máxima pendiente», pero la noción «pendiente» respecto al plano no exige la adición «máxima».

La recta construida AK es, en efecto, la horizontal del plano dado: esta recta está situada en el plano, por pasar por dos puntos pertenecientes notoriamente a este plano, y es paralela al plano de proyección H.

Ahora examinemos la construcción de la horizontal de un plano, dado por sus trazas.

La traza horizontal de un plano es una de sus horizontales (la horizontal «nula»). Por esta razón, la construcción de una horizontal cualquiera de un plano se reduce a la construcción en este plano de una recta paralela a la traza horizontal del plano (fig. 108, a la izquierda). La proyección horizontal de la horizontal es paralela a la traza horizontal del plano; la proyección frontal de la horizontal es paralela al eje de proyección.

Se llaman frontales de un plano a las rectas situadas en este plano y paralelas al plano de proyección V.

En la fig. 113 se da un ejemplo de la construcción de la frontal de un plano. La construcción se ha realizado de manera análoga a la construcción de la horizontal (véase la fig. 112).

Supongamos que la frontal pase por el punto A (fig. 113). Comenzamos la construcción trazando la proyección horizontal de la frontal, o sea, la recta ak, por ser conocida la dirección de esta proyección: $ak \perp a'a$. Luego construimos la proyección frontal de la frontal, es decir, la recta $a'k'$.

La recta construida es, en efecto, la frontal del plano dado: esta recta está situada en el plano, por pasar por dos puntos pertenecientes notoriamente a este plano, y es paralela al plano V.

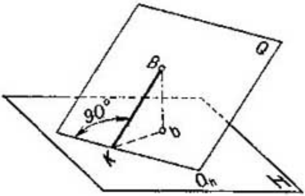
Construyamos ahora la frontal de un plano, dado por sus trazas.

Al examinar la fig. 108, a la derecha, en la que están representados el plano Q y la recta MB, establecemos que esta recta es la frontal del plano. En efecto, ella es paralela a la traza frontal (a la frontal «nula») del plano. La proyección horizontal de la frontal es paralela al eje x, la proyección frontal de la frontal es paralela a la traza frontal del plano.

Se llaman líneas de máxima inclinación del plano a los planos H, V y W, a las rectas situadas en este plano y perpendiculares a las horizontales del plano, a sus frontales o a sus rectas de perfil. En el primer caso se determina la inclinación al plano H, en el segundo, al plano V, y en el tercero, al plano W. Para trazar las líneas de máxima inclinación del plano se puede, claro está, tomar correspondientemente sus trazas.

Como se dijo más arriba, la línea de máxima inclinación del plano al plano H se llama *línea de pendiente del plano.*

De acuerdo con las reglas de proyección de un ángulo plano (véase el § 15), la proyección horizontal de la línea de pendiente de un plano es perpendicular a la proyección horizontal de la horizontal del plano o a su traza horizontal. La proyección frontal de la línea de pendiente se construye después de la horizontal y puede ocupar diferentes posiciones en dependencia de cómo esté dado el plano. En la fig. 114 está representada la línea de pendiente del plano Q: $BK \perp Q_h$. Por ser bK también perpendicular a Q_h, el $\angle BKb$ es el ángulo lineal del diedro formado por los planos Q y H. Por consiguiente, *la línea de pendiente de un plano puede servir para determinar el ángulo de inclinación de este plano al plano de proyección H.*



Fgi. 114

Análogamente, la línea de máxima inclinación de un plano al plano de proyección V sirve para determinar el ángulo formado por este plano con el plano V, y la línea de máxima inclinación al plano W, para determinar el ángulo con el plano W.

En la fig. 115 están construidas las líneas de pendiente en los planos dados. El ángulo formado por el plano P con el plano H está expresado por sus proyecciones, la frontal en forma del ángulo $b'k'b$ y la horizontal en forma del segmento kb. Se puede determinar la magnitud de este ángulo construyendo un triángulo rectángulo por los catetos, iguales a kb y $b'b$.

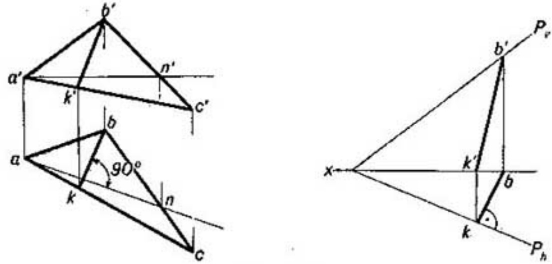


Fig. 115

Evidentemente, la línea de máxima inclinación del plano define la posición de este plano. Por ejemplo, si (fig. 115) está dada la línea de pendiente KB, entonces, trazando perpendicularmente a ella la recta horizontal AN o fijando el eje de proyección x y trazando $P_h \perp kb$, quedará determinado por completo el plano para el cual KB es la línea de pendiente.

Las rectas de posición particular en el plano examinadas por nosotros, principalmente las horizontales y las frontales, se emplean frecuentemente en diferentes construcciones y al resolver problemas. Esto se explica por la sencillez de la construcción de las rectas indicadas; por esta razón es cómodo emplearlas en calidad de rectas auxiliares.

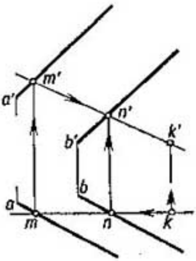


Fig. 116

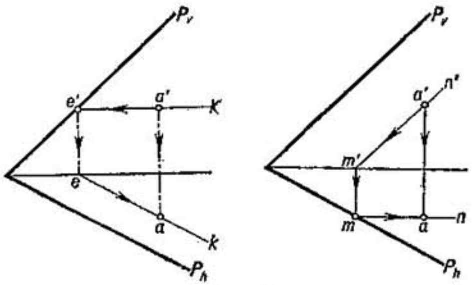


Fig. 117

En la fig. 116 fue dada la proyección horizontal k del punto K. Se exigía hallar la proyección frontal k', si el punto K debía estar en el plano, dado por dos rectas paralelas trazadas a partir de los puntos A y B.

Primero fue trazada cierta recta que pasaba por el punto K y perteneciente al plano dado. En calidad de tal recta se eligió la frontal MN: su proyección horizontal fue trazada por la proyección dada k. A continuación fueron construidos los puntos m' y n', que determinan la proyección frontal de la frontal.

La proyección buscada k' deberá estar sobre la recta $m'n'$.

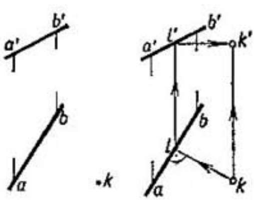


Fig. 118

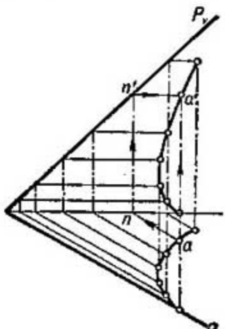


Fig. 119

En la fig. 117, a la izquierda, por la proyección frontal dada a' del punto A, perteneciente al plano P, se ha hallado su proyección horizontal (a); la construcción se ha cumplido con ayuda de la horizontal EK.

En la fig. 117, a la derecha, un problema similar ha sido resuelto con ayuda de la frontal MN.

En la fig. 118 se da un ejemplo más de la construcción de la proyección que falta del punto perteneciente a un plano. A la izquierda se muestran los datos conocidos: la línea de pendiente del plano (AB) y la proyección horizontal del punto (k). A la derecha se da la construcción: por el punto k ha sido trazada (perpendicularmente a ab) la proyección horizontal de la horizontal, sobre la cual deberá estar situado el punto K, con ayuda del punto l' se ha hallado la proyección frontal de esta horizontal y sobre ella, la proyección buscada k'.

En la fig. 119 se da un ejemplo de la construcción de la segunda proyección de una curva plana, si se conoce una de sus proyecciones (la horizontal) y el plano P, en el que esta curva está situada. Tomando sobre la proyección horizontal de la curva una serie de puntos, hallamos, con ayuda de las horizontales, los puntos para la construcción de la proyección frontal de la curva.

Las flechas indican la marcha de la construcción de la proyección frontal a' con ayuda de la proyección horizontal a.

PREGUNTAS A LOS §§ 16—18

1. ¿Cómo se da el plano en el dibujo?
2. ¿Qué significa traza de un plano en el plano de proyección?
3. ¿Dónde se sitúan la proyección frontal de la traza horizontal y la proyección horizontal de la traza frontal de un plano?
4. ¿Cómo se determina en el dibujo, pertenece o no una recta al plano dado?
5. ¿Cómo construir en el dibujo un punto perteneciente al plano dado?
6. ¿A qué se le llama frontal, horizontal y línea de pendiente de un plano?
7. ¿Puede servir la línea de pendiente de un plano para determinar el ángulo de inclinación de este plano al plano de proyección H?
8. ¿Define una recta a un plano, para el cual esta recta es la línea de pendiente?

§ 19. POSICIÓN DE UN PLANO RESPECTO A LOS PLANOS DE PROYECCIÓN

Son posibles las siguientes posiciones de un plano respecto a los planos de proyección V, H, W:

1) *el plano no es perpendicular a ninguno de los planos de proyección;*

2) *el plano es perpendicular solamente a uno de ellos;*

3) *el plano es perpendicular a dos planos de proyección.*

Los planos de la segunda y tercera posiciones llevan el nombre común de «planos proyectantes».

1. *El plano no perpendicular a ninguno de los planos de proyección es un plano de posición general* (véase la fig. 105).

Examinemos, por ejemplo, el plano representado en la fig. 112. Este plano no es perpendicular ni al plano V, ni al H, ni al W. El hecho de que este plano no es perpendicular ni al plano V, ni al H, se confirma con la forma de las proyecciones $a'b'c'$ y abc: si el plano, definido por el triángulo ABC, fuera perpendicular por lo menos al plano H, entonces (fig. 120) la proyección abc representaría el segmento de una recta.

Así pues, el plano examinado no es perpendicular ni al plano V, ni al H. ¿Pero, puede ser que este plano sea perpendicular al plano W? No, la horizontal de este plano AK no es perpendicular a W (compárese con la fig. 54, donde se muestra una recta perpendicular a W) y, por consiguiente, el plano ABC no es perpendicular a W.

Así pues, en la fig. 112 se expone un ejemplo de cómo se da el plano de posición general en el sistema V, H.

En calidad de otros ejemplos de cómo se da el plano de posición general sirven las figs. 109, 110, 111, 113, 116, así como las figs. 102, 104, 107, a la izquierda, 108, 115, a la derecha, 117, 119, en las que los planos están expresados por sus trazas. *El plano de posición general* (fig. 105) *interseca a cada uno de los ejes* x, y, z. *Las trazas del plano de posición general nunca son perpendiculares a estos ejes de proyección.*

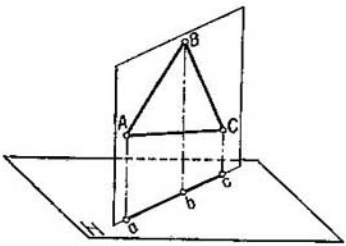


Fig. 120

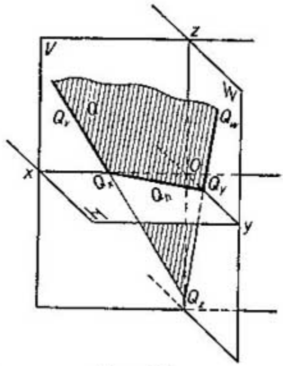


Fig. 121

Si las trazas P_h y P_v del plano de posición general forman con el eje x ángulos iguales, esto significa que los ángulos formados por el plano P con los planos H y V son iguales entre sí. En efecto, si los ángulos planos de un ángulo triédrico son iguales entre sí, serán también iguales los ángulos diedros opuestos; los ángulos formados por las trazas P_h y P_v con el eje x (véase la fig. 105), representan ángulos planos frente a los cuales se encuentran respectivamente los ángulos diedros formados por el plano P con los planos de proyección V y H.

Si el plano de posición general debe tener la misma inclinación a los planos H, V y W, entonces (véase la fig. 105), evidentemente, $OP_x = OP_y = OP_z$, es decir, las trazas de este plano forman con los ejes de proyección ángulos de 45°.

Examinando el plano de posición general en el espacio en los límites del primer cuadrante o del primer octante, observamos que

El plano Q representado en la fig. 121, pasa por todos los octantes, excepto el sexto.

el ángulo entre las trazas horizontal y frontal puede ser agudo (véase la fig. 105) u obtuso (fig. 121).

Si el dibujo del plano de posición general se construye por las coordenadas de los puntos de intersección de las trazas, entonces, evidentemente, en la fig. 121 deben ser dadas las abscisas positivas y la ordenada de los puntos Q_x y Q_y y la Z-coordenada negativa del punto Q_z.

En la fig. 122 está representado un caso particular del plano de posición general; sus trazas P_h y P_v se encuentran en el dibujo sobre una misma recta. Recordando el esquema de abatimiento de los planos de proyección (fig. 15 en la pág. 20), observaremos que las trazas P_h y P_v forman iguales ángulos con el eje x no sólo en el dibujo, sino también en el espacio. Como se muestra en la fig. 122 a la derecha, de la igualdad de los triángulos rectángulos k_0kP_x y $k'kP_x$ se desprende que el ángulo k_0P_xk es igual al kP_xk', es decir, la traza P_v forma con el eje x el mismo ángulo que la traza P_h.

Por tanto, el plano P forma ángulos iguales con los planos H y V. La parte del plano P, que se encuentra en el primer cuadrante, contiene el ángulo verdadero entre P_h y P_v (en nuestro ejemplo es obtuso).

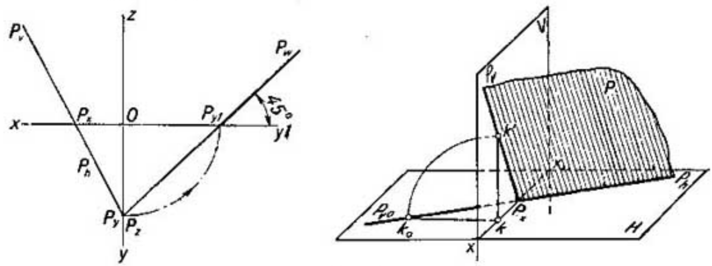


Fig. 122

En la fig. 122 se muestra también la construcción de la tercera traza del plano (P_w) por dos trazas dadas P_h y P_v. Por estar las trazas P_h y P_v situadas sobre una misma recta, el punto P_z se confunde con el P_y, y, por consiguiente, el punto P_{y1} se encuentra a la misma distancia del punto O que el punto P_z; por eso la traza P_w está inclinada al eje y (y al eje z) bajo un ángulo de 45°; precisamente tal ángulo de inclinación de la traza de perfil se obtendrá en todos los casos de construcción del plano, cuyas trazas horizontal y frontal están situadas en el dibujo sobre una recta que corta al eje x bajo un ángulo agudo.

Tal plano pasa por la perpendicular al eje x, que forma con el plano V (o con el H) un ángulo igual a 45°. Y, puesto que esta perpendicular es la perpendicular al plano bisector de los ángulos diedros adyacentes al ángulo VH, el plano examinado puede ser definido como un plano perpendicular al plano bisector del segundo y cuarto cuadrantes.

2. Si el plano es perpendicular solamente a uno de los planos de proyección, son posibles tres casos de posiciones particulares.

a) *El plano es perpendicular al plano horizontal de proyección. A tales planos se les llama planos proyectantes horizontales.*

Un ejemplo de este caso se da en la fig. 123: el plano está dado por las proyecciones del triángulo ABC. La proyección horizontal representa el segmento de una recta. El ángulo β es igual al ángulo formado por el plano dado con el plano de proyección V.

En la fig. 124 se da un ejemplo de la representación de un plano proyectante horizontal por sus trazas: a la izquierda una representación demostrativa; en el centro, el dibujo en el sistema V, H con indicación del eje x y las trazas S_v y S_h, a la derecha, sin la indicación del eje x, y por consiguiente, sin la traza S_v.

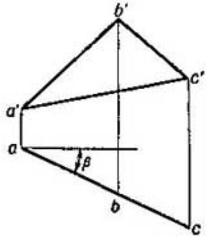


Fig. 123

La traza frontal es perpendicular al plano H y al eje de proyección x. La traza horizontal puede formar con el eje de proyección cualquier ángulo; este ángulo sirve de ángulo lineal del ángulo diedro entre el plano proyectante horizontal y el plano de proyección V

El ángulo entre S_h y S_v, así como el ángulo entre S_h y S_w en el espacio es igual a 90°.

Si en el plano proyectante horizontal está situado un punto, su proyección horizontal deberá estar en la traza horizontal del plano. Esto se refiere también a cualquier sistema de puntos situados en el plano proyectante horizontal, sean líneas rectas, o curvas y figuras planas.

La traza S_h puede ser examinada como proyección horizontal del plano.

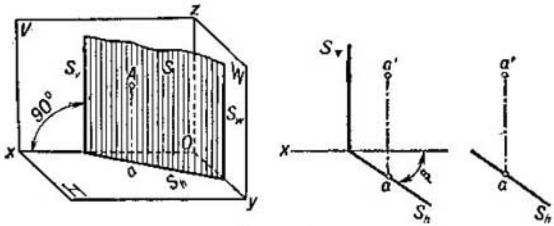


Fig. 124

b) *El plano es perpendicular al plano frontal de proyección. A tales planos se les llama planos proyectantes frontales.*

Un ejemplo de este caso se da en la fig. 125: el plano está dado por las proyecciones del triángulo DEF. La proyección frontal representa el segmento de una recta. El ángulo α es igual al ángulo formado por DEF con el plano H.

En la fig. 126 a la izquierda se da la representación demostrativa; en el centro, el dibujo en el sistema V, H con indicación del eje de proyección; a la derecha, sin indicación del eje de proyección. La traza horizontal es perpendicular al plano V y al eje de proyección. La traza frontal puede formar con el eje de proyección cualquier ángulo; este ángulo sirve de ángulo lineal del diedro entre el plano proyectante frontal y el plano V.

El ángulo entre T_v y T_h en el espacio es igual a 90°.

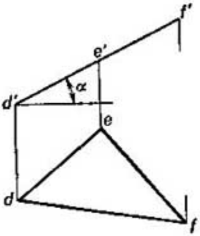


Fig. 125

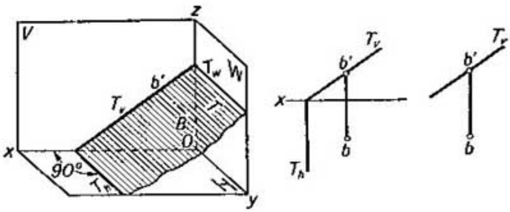


Fig. 126

Si en el plano proyectante frontal está situado un punto, su proyección frontal deberá encontrarse sobre la traza frontal del plano. Esto se refiere también a cualquier sistema de puntos. La traza T_v (fig. 126) puede ser examinada como proyección frontal del plano T.

c) *El plano es perpendicular al plano de perfil de proyección. A tales planos se les llama planos proyectantes de perfil.*

En la fig. 127 se da un ejemplo del plano proyectante de perfil: el plano viene dado por las proyecciones del triángulo ABC. La horizontal de este plano es perpendicular al plano W: las proyecciones $a'd'$ y ad son paralelas. Esto demuestra que el plano examinado es un plano proyectante de perfil, y no un plano de posición general (compárese con la fig. 112).

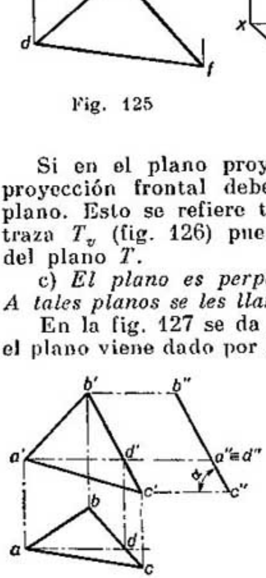


Fig. 127

La proyección de perfil del triángulo ABC representa el segmento de una recta. El ángulo α formado por este segmento con la línea de referencia $c'c''$ es igual al ángulo de inclinación del plano del triángulo al plano H, y el ángulo de inclinación del plano del triángulo al plano V es igual a $90° - \alpha$.

En la fig. 128 se da un ejemplo de la representación de un plano proyectante de perfil por sus trazas.

Las trazas horizontal y frontal de este plano son paralelas al eje x y, por consiguiente, son paralelas entre sí.

El plano representado en la fig. 107 a la derecha, también es un plano proyectante de perfil.

El plano perpendicular a uno de los planos de proyección (plano proyectante horizontal, frontal o de perfil) puede, en particular, pasar por el eje de proyección. A tal plano se le llama complementariamente plano axial.

Examinemos, por ejemplo, un plano proyectante de perfil axial (fig. 129). Sus trazas R_v y R_h se confunden con el eje x; en este caso es necesario tener su

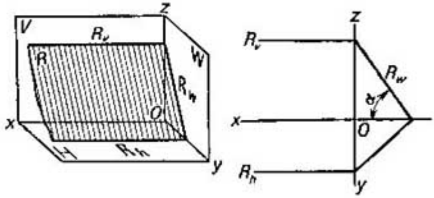


Fig. 128

tercera traza R_w o por lo menos la posición de un punto perteneciente a este plano y no situado sobre el eje x.

El plano axial puede ser *bisector*; esto significa que el plano axial divide al ángulo diedro formado por los planos de proyección por la mitad.

¿Cómo se puede representar el plano proyectante de perfil en el dibujo sin ejes de proyección? Así como se representa en la fig. 127. Otro ejemplo se da en la fig. 130: el plano viene dado por dos rectas que se cortan, una de las cuales (AB) es perpendicular al plano W, y la otra ocupa una posición arbitraria.

3. Si el plano es perpendicular a dos planos de proyección, también son posibles tres casos de posiciones particulares.

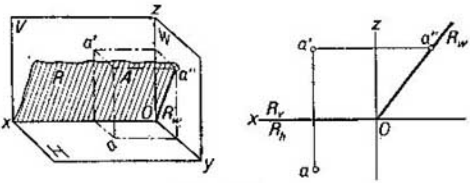


Fig. 129

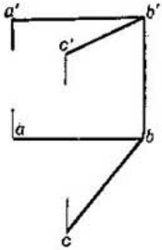


Fig. 130

a) *El plano es perpendicular a los planos V y W, es decir, es paralelo al plano H. A tales planos se les llama horizontales.*

En la fig. 131 se da un ejemplo del plano horizontal dado por las proyecciones del triángulo ABC. En la fig. 132 a la derecha, está representado un plano horizontal en el sistema V, H con ayuda de la traza frontal. La traza (T_v) puede ser considerada como proyección frontal del plano.

b) *El plano es perpendicular a los planos de proyección H y W, es decir, es paralelo al plano de proyección V. A tales planos se les llama frontales.*

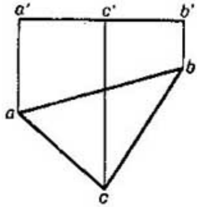


Fig. 131

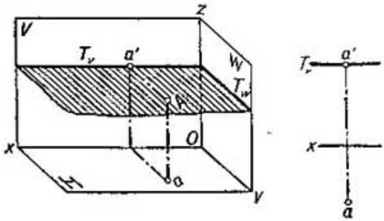


Fig. 132

En la fig. 133 se da un ejemplo del plano frontal representado por las proyecciones del triángulo *CDE*.

En la fig. 134 a la derecha se da un ejemplo de la representación del plano frontal en el sistema *V*, *H* con ayuda de la traza S_h que puede ser considerada como proyección de este plano sobre el plano *H*.

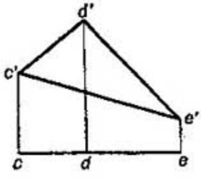


Fig. 133

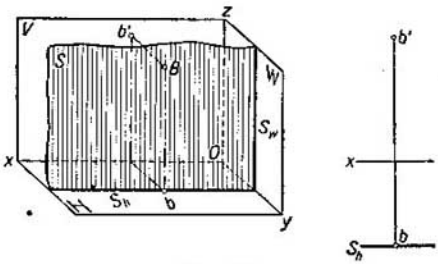


Fig. 134

c) *El plano es perpendicular a los planos de proyección H y V, es decir, es paralelo al plano W. A tales planos se les llama de perfil.*

En la fig. 135 se da un ejemplo de la representación de tal plano en el sistema *V*, *W*: el plano está dado por las proyecciones del triángulo *EFG*.

En la fig. 136 se da un ejemplo de la representación de tal plano en el sistema *V*, *H* con ayuda de sus trazas. Cada una de estas trazas puede ser considerada como la proyección del plano P sobre el correspondiente plano de proyección. El plano de perfil reúne las propiedades de los planos proyectantes horizontal y frontal.

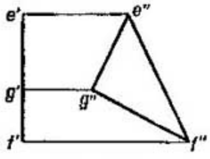


Fig. 135

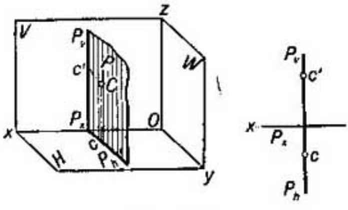


Fig. 136

PREGUNTAS AL § 19

1. ¿Cómo se sitúan en el sistema V, H, W el plano de posición general y los planos llamados proyectantes?

2. ¿Qué significa plano proyectante frontal, plano proyectante horizontal y plano proyectante de perfil?

3. ¿Cómo determinar si el plano dado en el sistema V, H por rectas que se cortan o paralelas es un plano de posición general o un plano proyectante de perfil?

4. ¿Qué representa la proyección horizontal de un plano proyectante horizontal y de un plano frontal?

5. ¿Qué representa la proyección frontal de un plano proyectante frontal y de un plano horizontal?

6. ¿Dónde se encuentra la proyección horizontal de cualquier sistema de puntos, situado en el plano proyectante horizontal o en el plano frontal?

7. ¿Dónde se encuentra la proyección frontal de cualquier sistema de puntos, situado en el plano horizontal o en el plano proyectante frontal?

8. ¿A qué es igual en el espacio el ángulo entre las trazas frontal y horizontal de los planos proyectantes horizontal y frontal?

§ 20. TRAZADO DEL PLANO PROYECTANTE POR UNA LINEA RECTA

Más adelante nos encontraremos con la necesidad de trazar un plano proyectante por una línea recta de acuerdo con alguna condición. Por la línea recta de posición general se puede trazar cualquiera de tales planos. En la fig. 137 se dan algunos ejemplos. Por una recta dada en el sistema V, H y que pasa por el punto K, se han trazado: el plano proyectante frontal expresado por su traza frontal T_v; el plano proyectante horizontal expresado por su traza horizontal S_h; y el plano proyectante de perfil determinado, además de por la recta dada AK, por la recta AB perpendicular al plano W.

En la fig. 138, los planos, trazados por la recta dada, están expresados por sus trazas. La posición del eje x, puede ser dada o puede ser elegida.

Pero, *por la recta de posición general no se puede trazar ni el plano frontal, ni el horizontal, ni el de perfil.* Estos planos pueden ser trazados solamente por rectas dispuestas correspondientemente: por

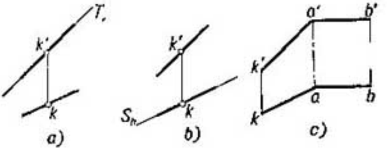


Fig. 137

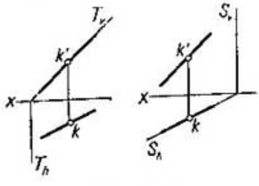


Fig. 138

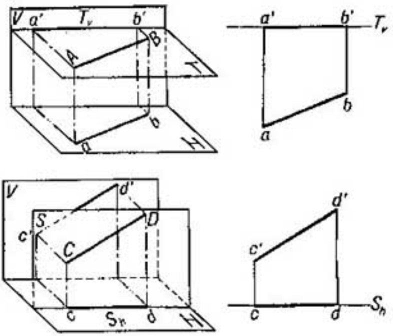


Fig. 139

una recta horizontal trazar el plano horizontal; por una recta frontal, el plano frontal; y por una recta de perfil, el plano de perfil. En la fig. 139 están representados el plano horizontal T que pasa por la recta horizontal AB, y el plano frontal S que pasa por la recta frontal CD.

§ 21. CONSTRUCCION DE LAS PROYECCIONES DE FIGURAS PLANAS

La construcción de las proyecciones de figuras planas (es decir, las figuras, todos los puntos de las cuales están situados en un mismo plano, por ejemplo, el cuadrado, el círculo, la elipse, etc.) se reduce a la construcción de las proyecciones de una serie de puntos, de segmentos de rectas y de líneas curvas que forman los contornos de las proyecciones de las figuras. Conociendo las coordenadas de los vértices, por ejemplo, de un triángulo, se puede construir las proyecciones de estos puntos, y luego las proyecciones de los lados, obteniendo de tal modo las proyecciones de la figura.

Más arriba ya aparecieron dibujos con las proyecciones de un triángulo (por ejemplo, las figs. 110, 112 y otras). Si se comparan las figs. 110 y 112, se puede observar que en la fig. 110 una de las proyecciones, supongamos la frontal, representa la «cara» del triángulo, y la horizontal, su «reverso». En la figura 112 cada una de las proyecciones representa al triángulo visto desde un mismo lado. Como índice puede servir el orden de recorrido de los vértices: en la fig. 110, para la proyección frontal, en sentido de las agujas del reloj (contando de a' a c'), y para la proyección horizontal, en sentido contrario a las agujas del reloj; en la fig. 112, para ambas proyecciones el recorrido es en una misma dirección, en el caso dado, en sentido de las agujas del reloj.

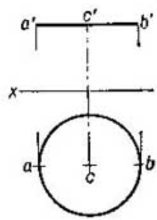


Fig. 140

En el caso general, las proyecciones de un polígono cualquiera en el sistema V, H, W también representan polígonos con la misma cantidad de lados; en este caso, el plano de este polígono es un plano de posición general. Pero, si ambas proyecciones por ejemplo, de un triángulo, representan en el sistema V, H un triángulo, entonces, el plano de este triángulo puede ser un plano de posición general o un plano proyectante de perfil: en la fig. 112 es un plano de posición general, y en la fig. 127, un plano proyectante de perfil. Como determinante sirve, como se dijo en la pág. 70 en la aclaración de la fig. 127, la horizontal (o la frontal): si sus proyecciones sobre los planos V y H son paralelas, el plano es proyectante de perfil (fig. 127); si no son paralelas, entonces es un plano de posición general (por ejemplo, las figs. 112 y 115, a la izquierda).

Si la proyección de un polígono sobre el plano V o sobre el H representa el segmento de una recta, el plano de este polígono es perpendicular a V o a H respectivamente. Por ejemplo, en la fig. 123 el plano del triángulo es un plano proyectante horizontal, y en la fig. 125, un plano proyectante frontal.

La figura dispuesta paralelamente al plano de proyección, se proyecta sobre éste en su verdadera magnitud. Por ejemplo, todos los elementos del triángulo CDE representado en la fig. 133, se proyectan sobre el plano V en verdadera magnitud; el círculo, representado en la fig. 140, se proyecta sobre el plano H en verdadera magnitud.

Si el plano de la figura no es paralelo al plano de proyección, entonces, para determinar la forma verdadera (es decir, sin deformación) de esta figura se emplean los procedimientos expuestos a continuación en el capítulo V. Claro está, que también ahora, sin conocer todavía estos procedimientos, se podría construir, por ejemplo la forma verdadera del triángulo representado en la fig. 112, determinando la longitud de cada uno de sus lados como la longitud de un segmento (véase el § 13) y luego construyendo el triángulo por los segmentos hallados. Al mismo tiempo se determinarían los ángulos del triángulo dado. Así se procede, por ejemplo, al construir

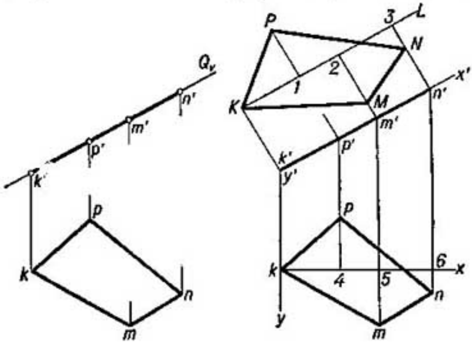


Fig. 141

el desarrollo de la superficie lateral de una pirámide, un prisma, y otras figuras (véase más adelante, el § 44). Si el polígono está situado en el plano proyectante, su forma verdadera puede ser construida tal como se muestra en la fig. 141.

Supongamos que se exige determinar la forma verdadera del cuadrilátero $KPNM$ situado en el plano proyectante de perfil Q. Entonces, como se muestra en la fig. 141, a la derecha, se pueden tomar en el plano de la figura dos ejes de coordenadas rectangulares con origen aunque sea en el punto K: el eje de las abscisas ($k'x'$, kx) es paralelo al plano V, y el eje de ordenadas es perpendicular a V (las proyecciones de este eje son $k'y'$, ky), trazar una recta KL (esto se puede hacer, por ejemplo, paralelamente a $k'x'$) y marcar en ella $K1=k'p'$, $K2=k'm'$, $K3=k'n'$. A continuación, sobre las perpendiculares a la recta KL desde los puntos 1, 2 y 3 tracemos los segmentos $P1=p4$, $M2=m5$ y $N3=n6$. El cuadrilátero $KMNP$ construido de tal modo representa la forma verdadera del dado.

Durante la resolución de muchos problemas es de suma importancia la posición que ocupa una figura plana respecto a los planos de proyección. Examinemos como ejemplo el problema de la construcción de los cuatro puntos notables del triángulo.

Puesto que la división del segmento de una recta en el espacio por la mitad corresponde a la misma división de las proyecciones de esto segmento (véase el § 12), la construcción del punto de intersección de las medianas del triángulo[1] puede ser cumplida en el dibujo directamente, en todos los casos que se presenten. Basta (fig. 142) trazar las medianas en cada una de las proyecciones del triángulo, y el punto de intersección de sus medianas quedará determinado. En este caso, podemos limitarnos a la construcción de las dos proyecciones de una de las medianas (por ejemplo, *ad* y *a'd'*) y una de las proyecciones de la segunda mediana (por ejemplo, la *b'e'*); en la intersección de *a'd'* y *b'e'* obtenemos el punto *m'*, y por este punto hallamos sobre *ad* el punto *m*.

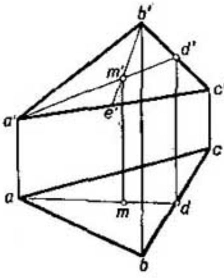


Fig. 142

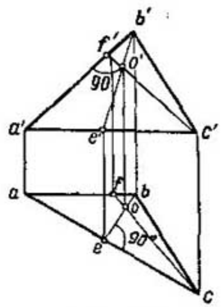


Fig. 143

Se podría también, construyendo solamente una de las medianas del triángulo, hallar sobre ella el punto M a base de la propiedad de este punto, conocida de la Geometría (este punto divide a cada una de las medianas en la relación de 2 : 1).

La construcción del punto de intersección de las tres alturas del triángulo[2] *y el punto de intersección de las perpendiculares a los lados del triángulo, trazadas desde sus puntos medios*[3], *está relacionado con el trazado de rectas perpendiculares entre sí.*

En el § 15 fueron señaladas las condiciones, para las cuales los segmentos perpendiculares en el espacio tienen como proyecciones también segmentos perpendiculares. Si el plano del triángulo es paralelo al plano de proyección (por ejemplo, el triángulo CDE en la fig. 133), entonces, bajando desde los puntos c', d' y e' perpendiculares a los lados opuestos, obtenemos las proyecciones de las alturas del triángulo. Pero, en el triángulo de posición general no se puede proceder de este modo.

En el caso particular, cuando uno de los lados del triángulo es paralelo al plano H, y otro es paralelo al plano V (fig. 143), trazando $c'f'$ perpendicularmente a $a'b'$ y be perpendicularmente a ac, obtenemos en el espacio $CF \perp AB$ y $BE \perp AC$; el punto de intersección de las alturas ha sido construido sin hacer uso de ningún procedimiento particular.

[1] El punto de intersección de las medianas es el centro de gravedad del triángulo.
[2] Ortocentro del triángulo.
[3] Centro de la circunferencia circunscrita.

En el propio caso general, para trazar en el dibujo de proyecciones líneas perpendiculares hay que recurrir a procedimientos especiales, que serán expuestos más adelante.

La construcción del *punto de intersección de las bisectrices del triángulo*[1] también puede ser ejecutada directamente solamente en los casos particulares de disposición del triángulo respecto a los planos de proyección. Esto se explica por que la división por la mitad de la proyección de un ángulo cualquiera corresponde a su división por la mitad en el espacio solamente en el caso en que los lados de este ángulo estén inclinados a una misma magnitud al plano de proyección en el que se divide por la mitad la proyección del ángulo (véase el § 15).

Al construir las proyecciones de un polígono cualquiera es necesario prestar atención a que no se incumpla la condición de que todos los puntos de la figura dada se encuentren en un mismo plano.

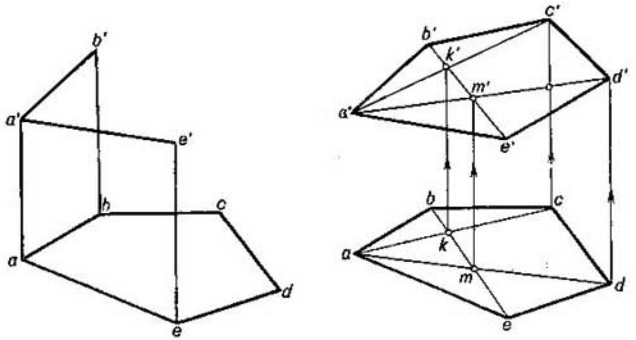


Fig. 144

En la fig. 144 se da completamente la proyección horizontal de un pentágono $ABCDE$ y las proyecciones frontales de solamente tres de sus vértices: a', b' y e'. En la fig. 144, a la derecha, se muestra la construcción de las proyecciones de los dos vértices restantes c' y d' del pentágono. Para que los puntos C y D se encuentren en el plano determinado por los tres puntos A, B y E, es necesario que se encuentren sobre rectas situadas en este plano. Tales rectas son las diagonales AC, AD y BE, cuyas proyecciones horizontales se pueden construir. En la proyección frontal del pentágono podemos trazar solamente $b'e'$. Pero, en el plano del pentágono se encuentran los puntos de intersección de las diagonales K y M, cuyas proyecciones horizontales (k y m) son conocidas, y las proyecciones frontales se obtienen en seguida, puesto que deben encontrarse sobre $b'e'$. Por dos puntos se construyen las proyecciones frontales $a'k'$ y $a'm'$ de

[1] Centro de la circunferencia inscrita.

las dos diagonales restantes; sobre ellas deben encontrarse los puntos c' y d' que se determinan por sus proyecciones horizontales.

El círculo cuyo plano es paralelo a un plano cualquiera de proyección, se proyecta sobre este plano en tamaño natural (véase la fig. 140, donde el círculo ha sido tomado en el plano horizontal). Si el plano del círculo está situado perpendicularmente al plano de proyección, sobre este plano el círculo se proyecta en forma del segmento de una recta igual al diámetro del círculo.

Pero, si el círculo está situado en un plano que forma con el plano de proyección un ángulo agudo α, *la proyección del círculo es una figura llamada elipse.*

Se llama también elipse a la curva que cierra la elipse figura: si la elipse figura es la proyección de un círculo, la elipse línea es la proyección de una circunferencia. Más adelante, al hablar de elipse tendremos en cuenta la proyección de una circunferencia.

La elipse se refiere a las curvas llamadas de segundo orden. Las ecuaciones de tales curvas en las coordenadas cartesianas representan ecuaciones de segundo orden. La curva de segundo orden se interseca con una línea recta en dos puntos. Más adelante nos encontraremos con la parábola y la hipérbola, también curvas de segundo orden.

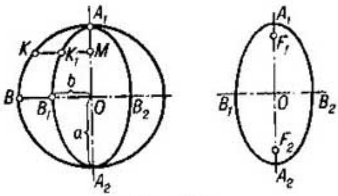


Fig. 145

La elipse puede considerarse como una circunferencia «comprimida». Esto se muestra en la fig. 145, a la izquierda. Supongamos que sobre el radio OB se ha trazado el segmento OB_1 de longitud b, con la particularidad de que $b<a$ (es decir, es menor que el radio de la circunferencia). Si tomamos ahora sobre la circunferencia un punto cualquiera K y, trazando desde el punto K una perpendicular A_1,A_2, marcamos sobre KM el punto K_1 de modo que $MK_1 : MK = b : a$, entonces, este punto K_1 pertenecerá a la elipse. Así se puede transformar cada punto de la circunferencia en un punto de la elipse, conservando una misma relación $b : a$. La circunferencia como si se comprimiera regularmente: la línea en la que en este caso se transforma la circunferencia es una elipse. La relación $b : a$ se llama coeficiente de compresión de la elipse. Si b se aproxima a a, la elipse se ensancha, y cuando $b=a$ se transforma en una circunferencia.

Hacemos recordar (del curso de dibujo lineal de la escuela secundaria) que:

1) el segmento $A_1A_2=2a$ se llama *eje mayor* de la elipse,

2) el segmento $B_1B_2=2b$ se llama *eje menor* de la elipse,

3) los ejes mayor y menor son perpendiculares entre sí,

4) el punto de intersección de los ejes se llama *centro* de la elipse,

5) el segmento de una recta comprendido entre dos puntos de la elipse y que pasa por su centro se llama *diámetro* de la elipse,

6) los puntos A_1, A_2, B_1, B_2 se llaman *vértices* de la elipse,
7) la elipse es simétrica respecto a sus ejes y a su centro,
8) la elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a otros dos fijos F_1 y F_2 (fig. 145, a la derecha) es constante e igual a $2a$ (a la longitud del eje mayor).

Del examen de la fig. 146 se deriva que al girar la circunferencia alrededor del diámetro A_1A_2 un ángulo α, este diámetro, paralelo al plano H, conserva en su proyección horizontal su tamaño natural y se hace el eje mayor de la elipse (véase la fig. 146, a la derecha). El diametro B_1B_2 girado un ángulo α respecto al plano H, se proyecta sobre éste reducido : $b_1b_2=b_1'b_2' \cos\alpha$. Esto corresponde a la relación de los ejes de la elipse, es decir, a su coeficiente de compresión.

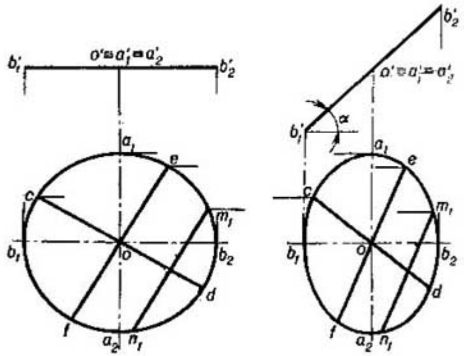


Fig. 146

Si en una circunferencia se trazan dos diámetros cualesquiera perpendiculares entre sí, entonces, en la proyección, que representa una elipse (fig. 146, a la derecha), las proyecciones de estos diámetros de la circunferencia serán los diámetros de la elipse, llamados *conjugados*. Si en una circunferencia (fig. 146, a la izquierda) se traza, por ejemplo, la cuerda m_1n_1 paralela al diámetro ef, entonces el diámetro cd dividirá a esta cuerda (y a todas las cuerdas paralelas a ésta) por la mitad. Es evidente, que también en la elipse se conservará esta propiedad (véase la fig. 146, a la derecha): el diámetro cd divide a la cuerda m_1n_1, paralela al diámetro ef conjugado con el cd, por la mitad. Pero precisamente *tales dos diámetros de la elipse, cada uno de los cuales divide por la mitad a las cuerdas paralelas al otro, son conjugados.*

Los diámetros conjugados de la elipse no son perpendiculares uno al otro; hacen una excepción los ejes de la elipse, que también son diámetros conjugados.

Hacemos recordar cómo se realiza la construcción de una elipse conociendo sus ejes (fig. 147, a la izquierda). Este trazado se cumple con ayuda de dos circunferencias concéntricas descritas con los radios a (el semieje mayor) y b (el semieje menor). Si se traza un radio cualquiera Om_1 y las rectas m_1m_0 y em paralelas a los ejes menor y mayor de la elipse, en la intersección de estas rectas se obtiene el punto m perteneciente a la elipse. En efecto,

$$\frac{mm_0}{m_1m_0}=\frac{Oe}{Om_1}=\frac{b}{a}.$$

Trazando una serie de radios y repitiendo la construcción indicada, obtenemos una serie de puntos de la elipse.

Una vez construido un punto cualquiera de la elipse, se pueden construir tres más dispuestos simétricamente al hallado respecto a los ejes de la elipse o a su centro.

En la fig. 147 a la derecha, se muestra la construcción de los focos de la elipse: trazando un arco de centro B_1 y radio igual al semieje mayor OA_1, en las intersecciones de este arco con el eje mayor, obtenemos los puntos F_1 y F_2 que son

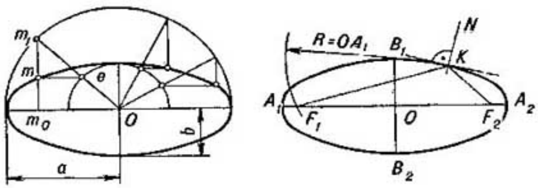


Fig. 147

los focos de la elipse. Trazando el ángulo F_1KF_2, donde K es un punto cualquiera de la elipse, trazamos su bisectriz y perpendicularmente a ésta, desde el punto K, una tangente a la elipse. La recta KN, perpendicular a la tangente, es la normal a la elipse en el punto K.

¿Cómo construir los ejes de la elipse si se conocen sus diámetros conjugados?

Supongamos que se hallan obtenido los semidiámetros conjugados Ca y Cb (fig. 148). Para construir los ejes de la elipse:

1) uno de los semidiámetros conjugados, por ejemplo, el Cb, se hace girar un ángulo de 90° en sentido del otro (hasta la posición Cb_2);

2) trazamos el segmento ab_2 y lo dividimos por la mitad;

3) desde el punto k trazamos una circunferencia de radio kC;

4) la recta determinada por el segmento ab_2, la prolongamos hasta su intersección con la circunferencia en los puntos D y E;

5) trazamos la recta DC y obtenemos la dirección del eje mayor de la elipse;

6) trazamos la recta EC, que nos da la dirección del eje menor de la elipse;

7) trazamos $C1=aE$, el semieje mayor;

8) trazamos $C3=aD$, el semieje menor;

9) trazamos $C2=C1$, $C4=C3$, $C5=Ca$, $C6=Cb$.

La elipse puede ser trazada por ocho puntos: *1*, *a*, *3*, *b*, *2*, *5*, *4* y *6*, o por los ejes mayor y menor, como se muestra en la fig. 147.

Así pues, trazando las rectas CD y CE, hemos obtenido las direcciones de los ejes mayor y menor de la elipse; el punto a, perteneciente a la elipse, divide

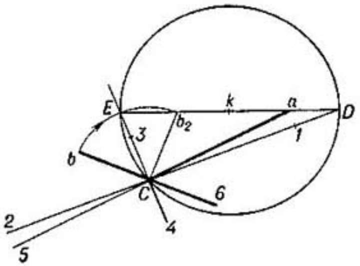


Fig. 148

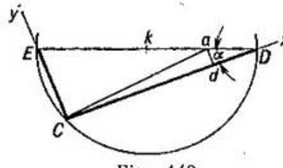


Fig. 149

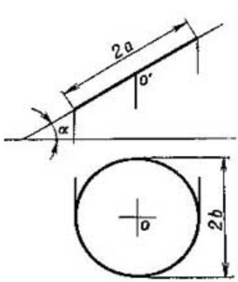


Fig. 150

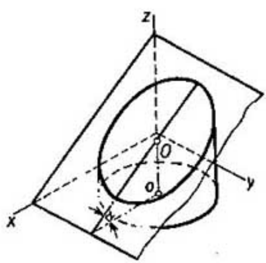


Fig. 151

al diámetro ED en dos segmentos, uno de los cuales (el aE) es igual al semieje mayor de la elipse, y el otro (el aD), al semieje menor. Si (fig. 149) tomamos los ejes de coordenadas x e y por las rectas CD y CE respectivamente, y desde el punto a levantamos la perpendicular ad a la recta CD, entonces, las coordenadas del punto a pueden ser expresadas de la manera siguiente:

$$x_a = aE \cos \alpha, \qquad y_a = aD \operatorname{sen} \alpha.$$

De aquí que:

$$\frac{x_a^2}{(aE)^2} + \frac{y_a^2}{(aD)^2} = \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1.$$

Esta es la ecuación de la elipse, en la que aE es el semieje mayor, y aD, el semieje menor.

En la fig. 146 se mostró la construcción de la proyección horizontal de una circunferencia situada en el plano proyectante frontal inclinado respecto al plano H. Supongamos ahora que en este plano está situada una elipse cuyos semiejes son a y b. Su proyección puede, a veces, ser una circunferencia de diámetro igual al eje menor de la elipse; esto sucederá cuando el ángulo formado por el plano al que pertenece la elipse, con el plano de proyección H corresponda a la relación $\cos\alpha = \frac{a}{b}$ (fig. 150). La circunferencia obtenida servirá de proyección de toda una serie de elipses, si se cambia el ángulo α y la dimensión a, conservando b invariable. Imaginémonos un cilindro circular recto con eje vertical (fig. 151); las secciones inclinadas de este cilindro serán elipses, el eje menor de las cuales es igual al diámetro del cilindro.

PREGUNTAS A LOS §§ 20 Y 21

1) ¿Cómo se representa en el dibujo un plano proyectante frontal trazado por una recta de posición general?

2) ¿Cómo construir las proyecciones del centro de gravedad en el dibujo dado del triángulo?

3) ¿Qué pueden representar las proyecciones de una circunferencia en dependencia de la posición de su plano respecto al plano de proyección?

4) ¿Se puede considerar la elipse como una circunferencia «comprimida»?

5) ¿Qué significa coeficiente de compresión de la elipse?

6) ¿Tiene la elipse: a) ejes de simetría, b) centro de simetría?

7) ¿Cuáles diámetros de la elipse se llaman: a) ejes, b) diámetros conjugados?

8) ¿Cómo construir los ejes de una elipse por sus diámetros conjugados dados?

IV
CAPÍTULO

POSICIÓN RECÍPROCA DE DOS PLANOS, DE UNA LÍNEA RECTA Y UN PLANO

§ 22. EXAMEN DE LAS POSICIONES RECÍPROCAS DE DOS PLANOS, DE UNA LÍNEA RECTA Y UN PLANO

Dos planos pueden ser paralelos entre sí o intersecarse uno con el otro.

Examinemos el caso de dos planos paralelos entre sí. *Si los planos P y Q son paralelos* (fig. 152), *entonces, en cada uno de ellos siempre se puede construir dos rectas que se cortan de modo tal, que las rectas de un plano sean respectivamente paralelas a las dos rectas del otro plano.*

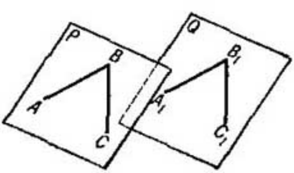


Fig. 152

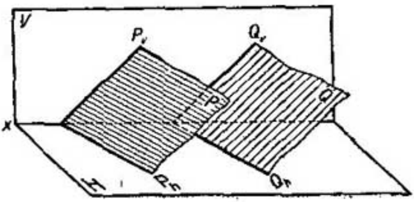


Fig. 153

Esto es el índice fundamental para determinar si son los planos paralelos entre sí o no lo son. Como tales rectas pueden servir, por ejemplo, las trazas de ambos planos: *si dos trazas que se cortan de un plano son paralelas a sus trazas homónimas de otro plano, ambos planos son paralelos entre sí* (fig. 153, donde $P_h \| Q_h$, $P_v \| Q_v$).

En la fig. 154 se muestran dos planos proyectantes frontales paralelos entre sí, dados por los triángulos ABC y DEF. El paralelismo de estos planos queda determinado por el paralelismo de las proyecciones frontales $a'b'c'$ y $d'f'e'$. Si estos planos se expresaran por sus trazas sobre los planos de proyección V y H, entonces, lo mismo que en la fig. 153, sus trazas frontales serían paralelas entre sí,

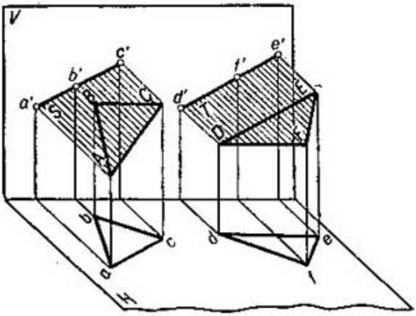


Fig. 154

y sus trazas horizontales también serían paralelas entre sí. Evidentemente, si se sabe que los planos paralelos entre sí son planos proyectantes frontales, entonces, en algunos casos, en el dibujo puede uno limitarse solamente a la reducción de sus trazas frontales así como se muestra a continuación en la fig. 166 ($T_{1v} \| Y_{2v}$). Para los planos proyectantes horizontales (si se conoce que éstos son paralelos entre sí) en los casos análogos es suficiente trazar sus trazas horizontales paralelamente una a la otra.

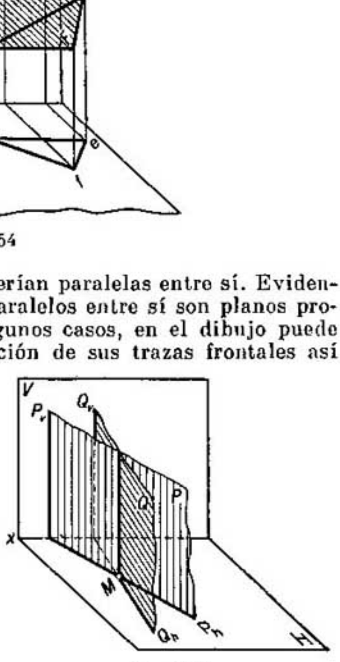


Fig. 155

Examinemos el caso de intersección de dos planos entre sí. En el caso en que los planos estén dados por sus trazas, será fácil establecer que estos planos se intersecan: *si por lo menos un par de trazas homónimas se intersecan, entonces, los planos también se intersecan.* Así, por ejemplo, en la fig. 155 $P_v \| Q_v$ pero, P_h y Q_h se cortan: los planos P y Q se intersecan uno al otro.

Lo expuesto se refiere a los planos dados por sus *trazas que se cortan.* Si ambos planos tienen sus trazas sobre H y V paralelas al eje x, entonces, estos planos pueden o bien intersecarse, o bien ser paralelos. Para resolver el problema sobre la posición recíproca de tales planos, se puede trazar la tercera traza: si las trazas de ambos planos sobre el tercer plano de proyección también son paralelas una a la otra, los planos son paralelos (fig. 156: $Q_h \| R_h$, $Q_v \| R_v$ y $Q_w \| R_w$); si las terceras trazas se cortan, los planos se cortan (fig. 157)[1].

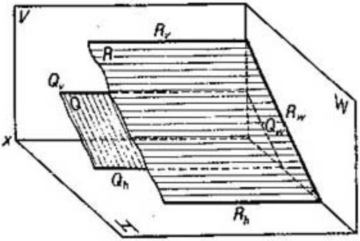


Fig. 156

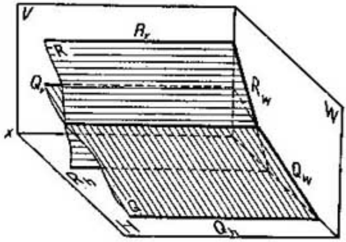


Fig. 157

Así se resuelve el problema sobre la posición recíproca de dos planos *dados por sus trazas. Si los planos vienen dados no por sus trazas*, sino por otro método cualquiera y hay que hallar si se cortan o no estos planos, entonces, *se debe recurrir a ciertas construcciones auxiliares*. Más adelante se darán ejemplos de tales construcciones.

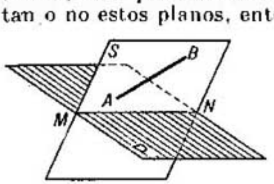


Fig. 158

Examinemos casos de la posición recíproca de una línea recta y un plano. *La posición recíproca de una recta y un plano en el espacio* puede ser la siguiente: a) la recta está situada en el plano, b) la recta interseca al plano, c) la recta es paralela al plano.

Si en el dibujo no se puede establecer directamente la posición recíproca de la recta y el plano, se recurre a ciertas construcciones auxiliares, como resultado de las cuales del problema sobre la posición recíproca de la recta y el plano se pasa al problema sobre la posición recíproca de la recta dada y cierta recta auxiliar. Para esto (fig. 158) se traza por la recta dada AB un plano auxiliar S y se examina la posición recíproca de la recta MN de intersección de los planos P y S y la recta AB.

En este caso son posibles tres posiciones:

---

[1] Evidentemente, para tal orden en la disposición de las trazas paralelas al eje x: R_v, Q_v, R_h, Q_h, los planos no pueden ser paralelos y no es necesario construir las trazas R_w y Q_w.

1) La recta MN se confunde con la recta AB; esto corresponde a que la recta AB pertenece al plano P.

2) La recta MN interseca a la recta AB; esto corresponde a que la recta AB interseca al plano P.

3) La recta MN es paralela a la recta AB; esto corresponde a que la recta AB es paralela al plano P.

Así pues, *el procedimiento indicado de determinación de la posición recíproca de una recta y un plano consiste en lo siguiente:*

1) *por la recta dada se traza un plano auxiliar y se construye la línea de intersección de este plano con el plano dado;*

2) *se establece la posición recíproca de la recta dada y la línea de intersección de los planos; la posición hallada define la posición recíproca de la recta y el plano dados.*

Para resolver el problema sobre la posición recíproca de un plano y una recta hemos empleado el *método de planos auxiliares*, usado frecuentemente en las construcciones relacionadas con la posición recíproca de distintas superficies y de líneas y superficies.

La elección de los planos auxiliares ordinariamente se realiza teniendo en cuenta que las construcciones sean lo más simples posible. Puede ocurrir, por ejemplo, que los planos horizontales, frontales, proyectantes horizontales y proyectantes frontales, en general, bastante cómodos como planos auxiliares, no puedan ser empleados por completo o su empleo haga más complicadas las construcciones incluso en comparación con los planos de posición general, tomados en calidad de auxiliares. Al resolver uno u otro problema con ayuda de planos auxiliares, es necesario elegir estos planos de modo que las construcciones que surgen en este caso sean, en lo posible, lo más simples, y que la cantidad de estas construcciones sea cuanto menos.

§ 23. INTERSECCIÓN DE UNA LÍNEA RECTA CON UN PLANO PERPENDICULAR A UNO O A DOS PLANOS DE PROYECCIÓN

El plano perpendicular al plano de proyección se proyecta sobre este plano en forma de una recta. Sobre esta recta (la proyección del plano) debe encontrarse la proyección correspondiente del punto en el que una recta corta a este plano[1].

En la fig. 159 la proyección frontal k' del punto de intersección de la recta AB con el triángulo CDE queda determinada en la intersección de las proyecciones $a'b'$ y $c'e'$, puesto que el triángulo se proyecta sobre el plano V en forma de recta. Hallando el punto k' determinamos la posición de la proyección k. Puesto que la recta AB

[1] Al punto de intersección de una recta con un plano también se le llama *punto de colisión* de la recta con el plano.

en la dirección de K a B se encuentra bajo el triángulo, en el dibujo una parte de la proyección horizontal de la recta se ha trazado con línea de trazos.

En la fig. 160 la traza frontal del plano T es su proyección frontal. La proyección k' queda determinada en la intersección de la proyección $a'b'$ con la traza T_v.

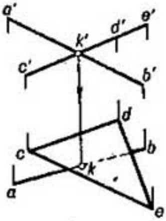


Fig. 159

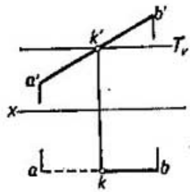


Fig. 160

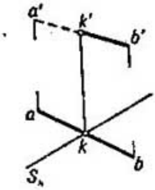


Fig. 161

En la fig. 161 se da un ejemplo de la construcción de las proyecciones del punto de intersección de una recta con un plano proyectante horizontal.

Para mayor evidencia, unos representan las proyecciones de los segmentos de una recta que corta al plano con líneas plenas, y otros con líneas de trazos, guiándose por los razonamientos siguientes.

1. Se considera convencionalmente que el plano dado es intransparente, y los puntos y líneas que se encuentran aunque sea en el primer cuadrante, pero situados para el observador tras el plano, estarán *ocultos*; serán *vistos* los puntos y líneas situados a un mismo lado del plano con el observador, que, como consideraremos, se encuentra en el primer octante infinitamente alejado del correspondiente plano de proyección.

2. Los segmentos vistos se dibujan con líneas plenas, y los ocultos, con líneas de trazos.

3. Al intersecarse una recta con un plano, parte de esta recta está para el observador oculta; el punto de intersección de la recta con el plano sirve de frontera de visibilidad de la línea.

4. El problema sobre la visibilidad de la línea siempre se puede reducir al problema de visibilidad de los puntos. En este caso, no solamente el plano puede tapar a un punto, sino un punto puede tapar a otro (véase la fig. 87, pág. 49).

5. *Si unos cuantos puntos están situados en una recta proyectante común para ellos, solamente uno de estos puntos será visible*:

a) respecto del plano H, el punto más alejado de H;

b) respecto del plano V, el punto más alejado de V;

c) respecto del plano W, el punto más alejado de W.

6. Si el dibujo tiene ejes de proyección, para la determinación de la visibilidad de los puntos situados en una recta proyectante común para ellos, sirven las distancias de sus correspondientes proyecciones hasta el eje de proyección:

a) respecto al plano H es visible el punto cuya proyección frontal se encuentra más lejos del eje x;

b) respecto al plano V es visible el punto cuya proyección horizontal se encuentra más lejos del eje x;

c) respecto al plano W es visible el punto cuya proyección horizontal se encuentra más lejos del eje y.

¿Cómo hay que proceder en el caso cuando el dibujo no tiene ejes de proyección? Examinemos la fig. 162. Los puntos *1* y *2* de dos rectas que se cruzan están situados en una recta proyectante común para ellos, perpendicular al plano V, y los puntos 3 y *4*, sobre una recta proyectante perpendicular al plano H.

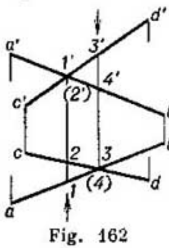


Fig. 162

El punto de intersección de las proyecciones horizontales de las rectas dadas representa las proyecciones confundidas de dos puntos, uno de los cuales, el punto *4*, pertenece a la recta AB, y el otro, el punto *3*, a la recta CD. Puesto que $3'3 > 4'4$, respecto al plano H será visible el punto *3* perteneciente a la recta CD, y el punto 4 está tapado por el punto *3*.

Del mismo modo el punto de intersección de las proyecciones frontales de las rectas AB y CD representa las proyecciones confundidas de dos puntos 1 y *2*, de los cuales el punto *1* pertenece a la recta AB, y el *2*, a la recta CD. Puesto que $11' > 22'$, respecto al plano V es visible el punto *1*, que tapa al punto *2*.

Este es el procedimiento general: así se puede proceder también en los dibujos con ejes de proyección.

§ 24. CONSTRUCCIÓN DE LA LÍNEA DE INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS

La línea recta obtenida como resultado de la intersección de dos planos queda determinada por completo por dos puntos, cada uno de los cuales pertenece a ambos planos. Así, por ejemplo, la recta K_1K_2 (fig. 163), según la cual se intersecan el plano dado por el triángulo ABC y el plano Q dado por las rectas DE y DF, pasa por los puntos K_1 y K_2; pero, en estos puntos las rectas AB y AC del primer plano cortan al plano Q, es decir, los puntos K_1 y K_2 pertenecen a ambos planos.

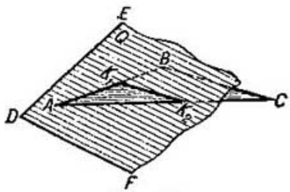


Fig. 163

Por consiguiente, *en el caso general, para la construcción de la línea de intersección de dos planos hay que hallar dos puntos cualesquiera, cada uno de los cuales pertenece a ambos planos; estos puntos determinan la línea de intersección de los planos.*

Para hallar cada uno de tales dos puntos corrientemente hay que cumplir construcciones especiales. Pero, si por lo menos uno de los planos que se cortan es perpendicular al plano de proyección, la construcción de las proyecciones de la línea de intersección se simplifica. Empecemos con este caso.

En la fig. 164 se muestra la intersección de dos planos, uno de los cuales (el dado por el triángulo EF) está situado perpendicularmente al plano V. Puesto que el triangulo DEF se proyecta sobre el plano V en forma de una línea recta ($d'f'$), la proyección frontal del segmento, según el cual se cortan ambos triángulos, representa el segmento $k_1'k_2'$ sobre la proyección $d'f'$. La construcción ulterior está clara del dibujo.

Otro ejemplo se da en la fig. 165. El plano proyectante horizontal S corta al plano del triángulo ABC. La proyección horizontal de la

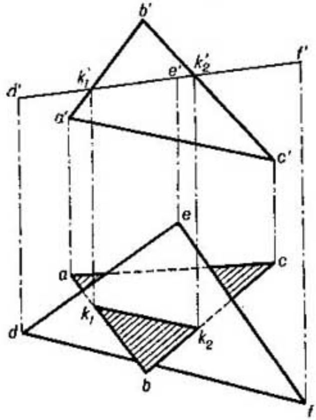


Fig. 164

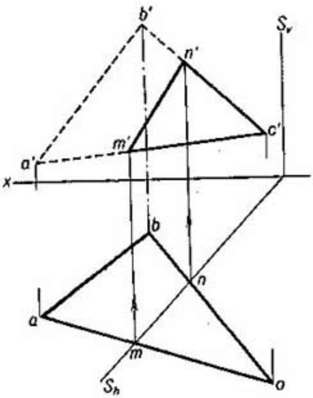


Fig. 165

línea de intersección de estos planos, el segmento mn, se determina en la traza S_h.

Ahora examinemos *el caso general de construcción de la línea de intersección de dos planos.* Supongamos que uno de los planos, el P, esté dado por dos rectas que se cortan, y el otro, el Q, por dos, rectas paralelas. La construcción se muestra en la fig. 166. Como resultado de la intersección de los planos P y Q se ha obtenido la recta K_1K_2. Expresemos esto con la escritura: $P\times Q=K_1K_2$.

Para determinar la posición de los puntos K_1 y K_2 tomamos dos planos proyectantes frontales auxiliares (T_1 y T_2) que cortan a cada uno de los planos P y Q. Como resultado de la intersección del plano T_1 con los planos P y Q obtenemos las rectas con las proyecciones $1'2'$, $1-2$ y $3'4'$, $3-4$. Estas rectas, situadas en el plano T_1, en su intersección determinan el primer punto, el K_1, de la línea de intersección de los planos P y Q.

Introduciendo, a continuación, el plano T_2, en su intersección con P y Q obtenemos las rectas con las proyecciones $5'6'$, $5-6$ y $7'8'$, $7-8$. Estas rectas, situadas en el plano T_2, en su intersección determinan el segundo punto, el K_2, común para P y Q.

Una vez obtenidas las proyecciones k_1 y k_2 hallamos sobre las trazas T_{1v} y T_{2v} las proyecciones k'_1 y k'_2. Con esto quedan determinadas las proyecciones k_1k_2 y $k'_1k'_2$ de la recta de intersección de los planos P y Q buscada (las proyecciones se han trazado con líneas de puntos y rayas).

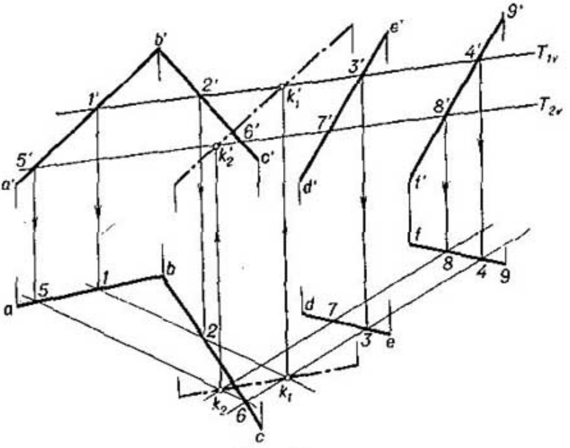


Fig. 166

Al efectuar la construcción se puede tener en cuenta lo siguiente: puesto que los planos secantes auxiliares T_1 y T_2 son paralelos entre sí, entonces, una vez construidas las proyecciones $1-2$ y $3-4$, para las proyeccio es $5-6$ y $7-8$ debe tomarse un solo punto para cada una, por ejemplo, el 5 y el 8, ya que $5-6 \| 1-2$ y $7-8 \| 3-4$.

En la construcción examinada, en calidad de planos auxiliares se tomaron dos planos proyectantes frontales. Claro está, se podría haber tomado otros planos, por ejemplo, dos planos horizontales o uno horizontal y otro frontal, etc. La esencia de la construcción en este caso no varía. Sin embargo, tal caso puede encontrarse. Supongamos que en calidad de auxiliares fueron tomados dos planos horizontales y en la intersección de éstos con los planos P y Q se obtuvieron horizontales paralelas entre sí. Pero, en la fig. 167 se ve que, a pesar de que sus horizontales son paralelas, los planos P y Q se cortan. Por consiguiente, si las proyecciones horizontales de las horizontales AB y CD se han obtenido paralelas, sabiendo que los planos en este caso pueden tanto ser paralelos como cortarse (por la horizontal común a éstos), los planos P y Q deben ser examinados auxiliándose, por ejemplo, de un plano proyectante horizontal (véase la fig. 167): si las rectas según las cuales este plano auxiliar S corta a los planos P y Q fueran también paralelas entre sí, esto significaría que los planos P y Q no se cortan, sino que son paralelos entre sí. En la fig. 167 estas rectas se cortan en el punto K, por el cual pasa precisamente la línea de intersección de los planos P y Q paralelamente a las rectas BA y CD.

Si los planos están dados por sus trazas en los planos de proyección, es natural buscar los puntos que determinan la recta de intersección de los planos, en los puntos de intersección de las trazas homónimas

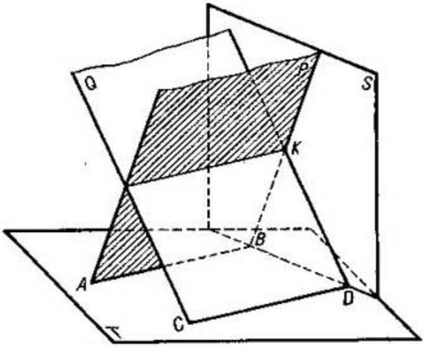


Fig. 167

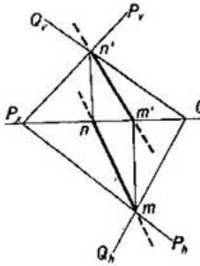


Fig. 168

de los planos (fig. 168): *la recta que pasa por estos puntos es común para ambos planos, es decir, es su línea de intersección.*

El esquema de la construcción de la línea de intersección de dos planos (véase la fig. 166) puede, claro está, difundirse para el caso cuando los planos están dados por sus trazas. Aquí el papel de planos secantes auxiliares lo cumplen los propios planos de proyección:

$$P \times H = P_h; \quad Q \times H = Q_h; \quad P_h \times Q_h = M;$$
$$P \times V = P_v; \quad Q \times V = Q_v; \quad P_v \times Q_v = N.$$

Los puntos de interseccion de las trazas homónimas de los planos son las trazas de la línea de intersección de estos planos. Por esta razón, para construir las proyecciones de la línea de intersección de los planos P y Q (fig. 168) es necesario: 1) hallar el punto m en la intersección de las trazas P_h y Q_h y el punto n' en la intersección de P_v y Q_v, y por ellos hallar las proyecciones m' y n; 2) trazar las rectas $m'n'$ y mn.

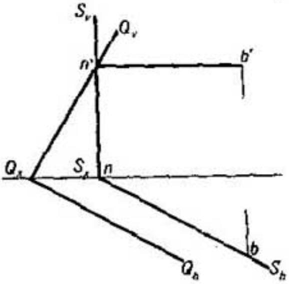


Fig. 169

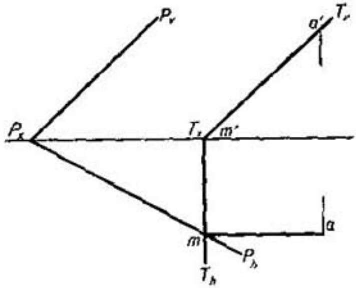


Fig. 170

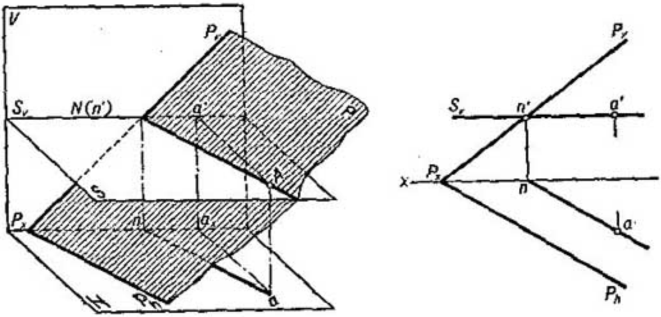


Fig. 171

En las figs. 169—171 se muestran los casos cuando se conoce la dirección de la línea de intersección. Por eso, es suficiente tener solamente un punto de *la intersección de las trazas* y luego trazar por este punto una recta partiendo de la posición de los planos y sus trazas.

PREGUNTAS A LOS §§ 22—24

1. ¿Qué posición recíproca pueden ocupar dos planos?
2. ¿Cuál es el índice de paralelismo de dos planos?
3. ¿Cómo se sitúan una respecto a la otra las trazas frontales de dos planos proyectantes frontales paralelos entre sí?
4. ¿Cómo se sitúan una respecto a la otra las trazas horizontales de dos planos proyectantes horizontales paralelos entre sí?
5. ¿Cómo se sitúan una respecto a *la otra las trazas homónimas de dos* planos paralelos entre sí?

6. ¿Sirve de índice de intersección mutua de dos planos la intersección de aunque sea dos de sus trazas homónimas?

7. ¿Cómo establecer la posición recíproca de una recta y un plano?

8. ¿Cómo se construye el punto de intersección de una recta con un plano perpendicular a uno o dos planos de proyección?

9. ¿Cuál de los puntos situados sobre la perpendicular común al a) plano H, b) plano V se considera visible en los planos H y V respectivamente?

10. ¿Cómo se construye la línea de intersección de dos planos, uno de los cuales, por lo menos, es perpendicular al plano H o al plano V?

11. ¿En qué consiste el procedimiento general de construcción de la línea de intersección de dos planos?

§ 25. INTERSECCIÓN DE UNA LÍNEA RECTA CON UN PLANO DE POSICIÓN GENERAL

Para construir el punto de intersección de una recta con un plano de posición general es necesario cumplir lo siguiente (fig. 158):

1) *trazar por la recta dada* (AB) *cierto plano auxiliar* (S);

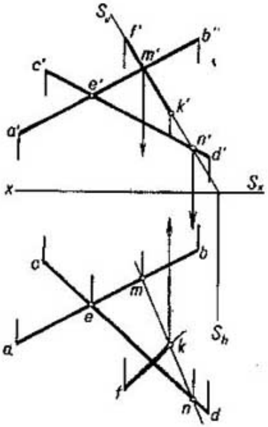


Fig. 172

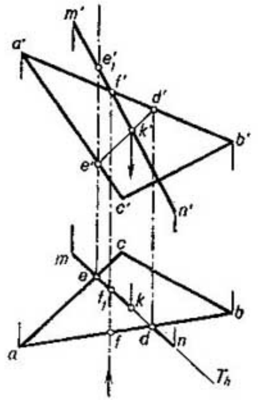


Fig. 173

2) *construir la recta* (MN) *de intersección de los planos dado* (P) *y auxiliar* (S);

3) *determinar la posición del punto* (K) *de intersección de las rectas dada* (AB) *y la construida* (MN).

En la fig. 172 se muestra la construcción del punto de intersección de la recta FK con el plano de posición general dado por dos rectas que se cortan AB y CD.

Por la recta FK se ha trazado el plano proyectante frontal auxiliar S. La elección del plano proyectante frontal se explica por la comodidad de la construcción de los puntos de intersección de su traza frontal con las proyecciones $a'b'$ y $c'd'$. Por los puntos m' y n' se han hallado las proyecciones horizontales m y n, con lo cual ha quedado determinada la recta MN según la cual el plano auxiliar S corta al plano dado P. Luego se ha hallado el punto k en el cual la proyección horizontal de la recta corta, directamente o al ser prolongada, a la proyección mn. Después de esto queda hallar la proyección frontal del punto de intersección (del punto k').

En la fig. 173 se muestra la construcción del punto de intersección de la recta MN con el plano dado por el triángulo ABC. La marcha de la construcción no se diferencia en nada de la examinada en la fig. 172. Pero, el plano auxiliar (ahora el plano proyectante horizontal) en este caso está señalado solamente por su traza T_h que pasa por la proyección mn. El plano T corta al triángulo ABC según la recta DE. Pero, podemos prescindir de la traza T_h: imaginándonos mentalmente que el plano proyectante horizontal auxiliar pasa por la recta MN, expresamos el segmento ED, según el cual el plano proyectante horizontal trazado por MN corta al triángulo, por sus proyecciones ed y $e'd'$.

Considerando que en el espacio están dados una recta y un triángulo intransparente, hallamos las partes vistas y ocultas de la recta MN respecto a los planos H y V.

En el punto e del plano H se confunden las proyecciones horizontales de dos puntos, uno de los cuales pertenece a la recta MN (la proyección frontal e_1') y el otro, al lado del triángulo AC (la proyección frontal e').

De la disposición de las proyecciones frontales e_1' y e' se deriva que en el tramo KM la recta se encuentra sobre el triángulo y, por consiguiente, en la proyección horizontal, todo el segmento mk es visible, y el segmento kd está oculto.

En la proyección frontal, en el punto f' se confunden las proyecciones frontales de dos puntos, uno de los cuales pertenece a la recta MN, y el otro, al lado AB del triángulo. Según la disposición de las proyecciones horizontales f y f_1 deducimos que la recta MN, en el tramo MK, se encuentra tras el triángulo y, por consiguiente, en la proyección frontal el segmento $f'k'$ está oculto, y el segmento $k'n'$ es visible.

En las figs. 174—176 se dan unos ejemplos de la construcción del punto de intersección de una recta con el plano de posición general expresado por sus trazas. En el primer ejemplo, por la recta AB se ha trazado el plano proyectante horizontal S, y en el segundo (fig. 175), un plano horizontal, lo cual ha sido posible efectuar por ser en este ejemplo la recta AB horizontal.

La recta representada en la fig. 176 es perpendicular al plano H. Las proyecciones horizontales de todos los puntos de esta recta se confunden en un punto.

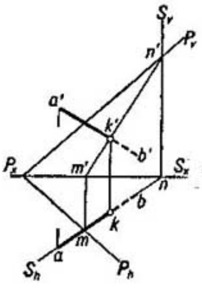


Fig. 174

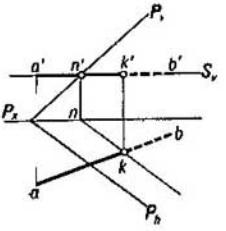


Fig. 175

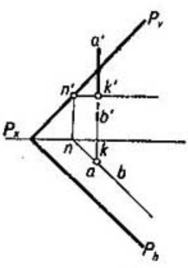


Fig. 176

Por consiguiente, la posición de la proyección k del punto buscado de intersección de la recta AB con el plano P es conocida. La posición de la proyección k' se ha determinado con ayuda de la horizontal.

§ 26. CONSTRUCCIÓN DE LA LÍNEA DE INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS POR LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN DE LAS LÍNEAS RECTAS CON EL PLANO

En el § 24 se expuso el procedimiento general de construcción de la línea de intersección de dos planos, a saber: el empleo de planos secantes auxiliares (véase la fig. 166). Examinemos ahora otro procedimiento de construcción aplicado a los planos de posición general. *Este procedimiento consiste en que se hallan los puntos de intersección de dos rectas, pertenecientes a uno de los planos, con el otro plano.* Por tanto, hay que saber construir el punto de intersección de una recta con el plano de posición general, lo cual fue expuesto en el § 25.

En la fig. 177 se muestra la intersección del triángulo ABC por un plano dado por dos rectas paralelas ($DE \parallel FG$). La construcción se redujo a la construcción de los puntos K_1 y K_2 en los que las rectas DE y FG cortan al plano del triángulo, y a trazar por estos puntos el segmento de una recta. Imaginándonos que por DE y FG se han trazado planos proyectantes frontales, hallamos las rectas paralelas según las cuales estos planos cortan al triángulo. Una de ellas está expresada por las proyecciones $1—2$ y $1'2'$; para la otra se muestra un punto $3'$, 3, por la proyección horizontal del cual se ha trazado una recta paralelamente a la proyección $1—2$.

Una vez determinada la posición de las proyecciones k_1 y k_2, hallamos las proyecciones k_1' y k_2' y la proyección del segmento k_1k_2.

Claro está, que también en el caso examinado es aplicable el método general (véase la fig. 166), pero hubiéramos tenido que trazar más líneas que en la fig. 177. En la fig. 178 se da la construcción de la línea de intersección de dos triángulos ABC y DEF, señalando las partes vistas y ocultas de estos triángulos.

La recta K_1K_2 ha sido construida por los puntos de intersección de los lados AC y BC del triángulo ABC con el plano del triángulo DEF. El plano proyectante frontal auxiliar trazado por AC (en el dibujo esto plano no se denota especialmente) corta al triángulo

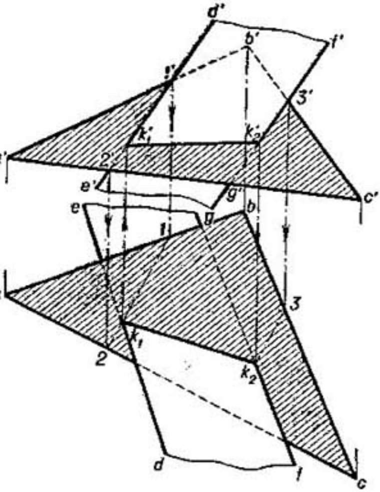


Fig. 177

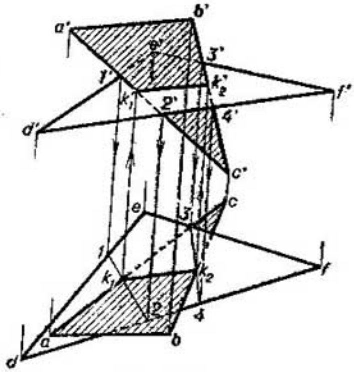


Fig. 178

DEF según la recta con proyecciones $1'2'$ y $1—2$; en la intersección de las proyecciones ac y $1—2$ se ha obtenido la proyección horizontal del punto K_1 de intersección de la recta AC con el triángulo DEF, a continuación se ha construido la proyección frontal k'_1. De la misma manera se ha hallado el punto K_2.

En los ejemplos de las figs. 177 y 178 nos hemos encontrado con el problema de división de las figuras planas en partes vistas y ocultas para el observador, ya que los planos se consideran intransparentes. En los dibujos esto se muestra rayando las partes correspondientes de los triángulos ABC. La visibilidad se ha determinado a base de los mismos razonamientos que en el ejemplo examinado en la fig. 173.

En la fig. 179 se expone un ejemplo más de la construcción de la línea de intersección de dos triángulos. En el caso dado, por la misma razón se puede considerar que el triángulo ABC entra en el corte del triángulo DEF o que el triángulo DEF entra en el corte del triángulo ABC; solamente hay que convenir en cuál de los triángulos considerar este corte por la recta K_1K_2. En cambio, en el caso expuesto en la fig. 178, el corte se encuentra sólo en el triángulo DEF y el triángulo ABC entra en él.

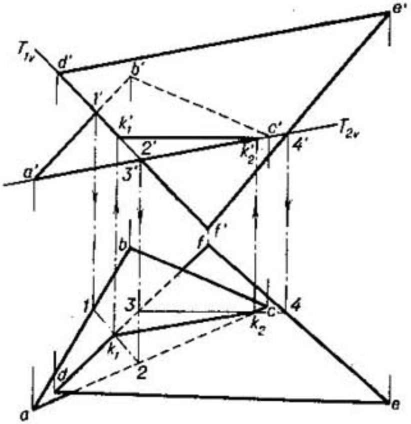


Fig. 179

La propia construcción en la fig. 179 se reduce a hallar los puntos K_1 y K_2 con ayuda de los planos proyectantes frontales P_1 y P_2.

Hay que prestar atención una vez más a que el empleo de líneas de trazos en vez de plenas, por ejemplo, en las figs. 159, 161, 164, 165, 173—179, está dictado por el deseo de hacer las representaciones más demostrativas. Si se partiera de la noción de proyección como imagen geométrica, la cuestión sobre «transparencia» u «opacidad», sobre «visibilidad» e «invisibilidad» desaparecería: todo se debería representar con líneas plenas. Pero para dar a los dibujos mayor claridad se han introducido ciertas condicionalidades, entre ellas las líneas de trazos.

PREGUNTAS A LOS §§ 25 Y 26

1. ¿En qué consiste, en el caso general, el método de construcción del punto de intersección de una recta con un plano?
2. ¿Qué operaciones y en qué sucesión hay que cumplir para la construcción de este punto (véase la pregunta 1)?
3. ¿Cómo determinar la «visibilidad» al intersecarse una recta con un plano?
4. ¿Cómo se puede construir la recta de intersección de dos planos, si no se emplea el método general expuesto en el § 24?
5. ¿Cómo determinar la «visibilidad» en el caso de intersección mutua de dos planos?
6. ¿En qué se diferencian los casos examinados en las figs. 178 y 179?

§ 27. CONSTRUCCION DE UNA LINEA RECTA Y UN PLANO PARALELOS ENTRE SI

La construcción de *una recta paralela a un plano dado*, se basa en la siguiente tesis conocida por la Geometría: *una recta es paralela a un plano, si esta recta es paralela a una recta cualquiera de dicho plano.*

Por un punto dado en el espacio se pueden trazar infinitas rectas paralelas al plano dado. Para obtener una solución única se necesitan algunas condiciones complementarias. Por ejemplo, por el punto M (fig. 180) se exige trazar una recta paralela al plano dado por el triángulo ABC, y al plano de proyección H (condición complementaria).

Evidentemente, la recta buscada deberá ser paralela a la línea de intersección de ambos planos, es decir, deberá ser paralela a la traza horizontal del plano dado por el triángulo ABC. Para terminar la dirección de esta traza se puede hacer uso de la horizontal del plano dado por el triángulo ABC. En la fig. 180 se ha trazado la horizontal DC y luego, por el punto M, se ha trazado una recta paralela a esta horizontal.

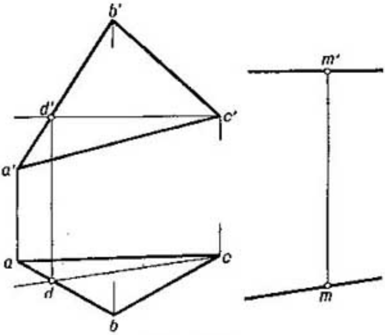


Fig. 180

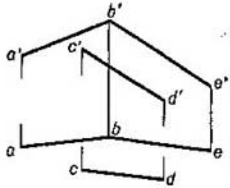


Fig. 181

Planteemos el problema inverso: *por un punto dado trazar un plano paralelo a una recta dada.* Los planos que pasan por cierto punto A paralelamente a cierta recta BC, forman un haz de planos cuyo eje es una recta que pasa por el punto A paralelamente a la recta BC. Para obtener una solución única se necesita una condición complementaria.

Por ejemplo, hay que trazar un plano, paralelo a la recta CD, no por un punto, sino por la recta AB (fig. 181). Las rectas AB y CD se cruzan. Si por una de dos rectas que se cruzan se exige trazar un plano paralelo a la otra, el problema tiene una sola solución. Por el punto B se ha trazado una recta paralela a la recta CD; las rectas AB y BE determinan el plano paralelo a la recta CD.

¿Cómo establecer si es paralela, o no, la recta dada al plano dado?

Se puede intentar trazar sobre este plano una recta paralela a la recta dada. Si no se logra trazar tal recta en el plano, entonces, la recta y el plano dados no son paralelos entre sí.

Se puede hacer la prueba de hallar también el punto de intersección de la recta dada con el plano dado. Si tal punto no puede ser hallado, la recta y el plano dados son paralelos entre sí.

§ 28. CONSTRUCCION DE PLANOS RECIPROCAMENTE PARALELOS

Supongamos que se da el punto K por el que hay que trazar un plano paralelo a cierto plano dado por las rectas que se cortan AF y BF (fig. 182).

Es evidente, que si por el punto K se trazan las rectas CK y DK, paralelas respectivamente a las rectas AF y BF, entonces, el plano determinado por las rectas CK y DK será paralelo al plano dado.

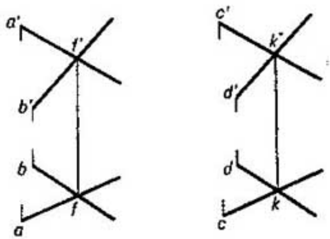


Fig. 182

Otro ejemplo de construcción se da en la fig. 183, a la derecha. Por el punto A se ha trazado el plano Q paralelamente al plano P. Primeramente por el punto A se ha trazado una recta notoriamente paralela al plano P. Esta recta es la horizontal con las proyecciones $a'n'$ y an, además, $an \| P_h$. Por ser el punto N la traza frontal de la horizontal AN, por él pasará la traza $Q_v \| P_v$, y por Q_x, la treza $Q_h \| P_h$. Los planos Q y P son paralelos entre sí, por ser paralalas entre sí sus trazas homónimas que se cortan.

En la fig. 184 se representan dos planos paralelos entre sí, uno de los cuales está dado por el triángulo ABC, y el otro, por las rectas

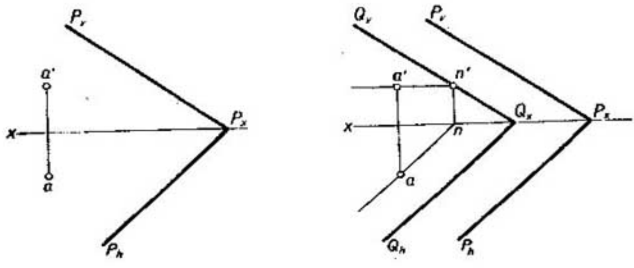


Fig. 183

paralelas DE y FG. ¿Por qué se establece el paralelismo de estos planos? Por el hecho de que en el plano dado por las rectas DE y FG ha sido posible trazar dos rectas que se cortan KM y KN paralelas respectivamente a las rectas que se cortan AC y BC del otro plano.

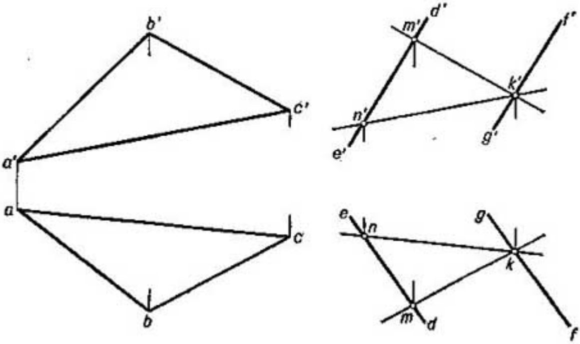


Fig. 184

Claro que se podría intentar hallar el punto de intersección de, por ejemplo, la recta DE con el plano del triángulo ABC. El fracaso confirmaría el paralelismo de los planos.

PREGUNTAS A LOS §§ 27 Y 28

1. ¿En qué se basa la construcción de una recta que debe ser paralela a cierto plano?
2. ¿Cómo trazar un plano por una recta paralelamente a la recta dada?
3. ¿Por qué se establece el paralelismo recíproco de dos planos?
4. ¿Cómo trazar por un punto un plano paralelo a otro dado?
5. ¿Cómo comprobar en el dibujo si son paralelos entre sí dos planos dados?

§ 29. CONSTRUCCION DE UNA RECTA Y UN PLANO RECIPROCAMENTE PERPENDICULARES

De todas las posiciones posibles de una recta que corta a un plano, señalemos el caso cuando la recta es perpendicular al plano y examinemos las propiedades de las proyecciones de tal recta.

En la fig. 185 se da un plano determinado por dos rectas que se cortan AN y AM, con la particularidad de que AN es la horizontal y AM, la frontal de este plano. La recta AB, representada en el mismo dibujo, es perpendicular a las rectas AN y AM y, por consiguiente, es perpendicular al plano que éstas determinan.

La perpendicular a un plano es perpendicular a cualquier recta trazada en este plano. Pero para que en este caso la proyección de la perpendicular al plano de posición general sea perpendicular a la proyección homónima de una recta cualquiera de este plano, dicha recta deberá ser la horizontal, la frontal o la recta de perfil del plano. Por esta razón, al desear construir la perpendicular al plano, en el caso general, se toman dos de estas rectas (por ejemplo, la horizontal y la frontal, como se muestra en la fig. 185).

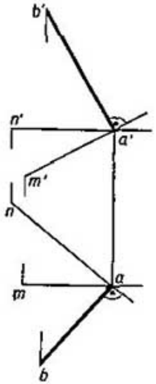


Fig. 185

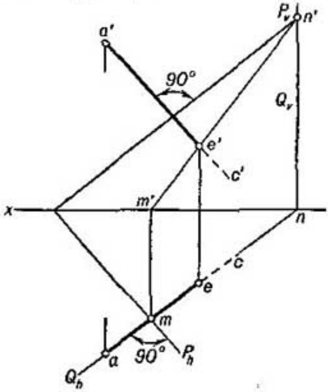


Fig. 186

Así pues, *la proyección horizontal de la perpendicular a un plano es perpendicular a la proyección horizontal de la horizontal, su proyección frontal es perpendicular a la proyección frontal de la frontal y la proyección de perfil es perpendicular a la proyección de perfil de la recta de perfil de este plano.*

Es evidente, que en el caso cuando el plano está expresado por sus trazas (fig. 186), obtenemos la siguiente deducción: *si una recta es perpendicular a un plano, la proyección horizontal de esta recta es perpendicular a la traza horizontal del plano, y su proyección frontal es perpendicular a la traza frontal del plano.*

Ahora bien, si en el sistema V, H la proyección horizontal de una recta es perpendicular a la traza horizontal de un plano y la proyección frontal de dicha recta es perpendicular a la traza frontal de dicho plano, entonces, *en el caso de planos de posición general* (fig. 186) *y de planos proyectantes horizontales y frontales, la recta es perpendicular al plano.* Pero para el plano proyectante de perfil puede resultar que la recta no es perpendicular a este plano, aun siendo las proyecciones de la recta respectivamente perpendiculares a las trazas horizontal y frontal del plano. Por esta razón, en el caso de un plano proyectante de perfil, se debe examinar también la posición recíproca de la proyección de perfil de la recta y la traza de perfil del plano dado y solamente después de esto establecer si serán perpendiculares entre sí la recta y el plano dados.

Evidentemente (fig. 187), la proyección horizontal de la perpendicular al plano se confunde con la proyección horizontal de la línea de pendiente trazada en el plano por el pie de la perpendicular.

En la fig. 186 desde el punto A se ha trazado la perpendicular al plano P ($a'c' \perp P_v$, $ac \perp P_h$) y se muestra la construcción del punto E, en el cual la perpendicular AC corta al plano P. La construcción se ha efectuado con ayuda del plano proyectante horizontal Q trazado por la perpendicular AE.

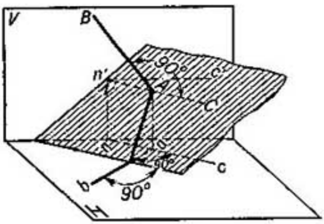


Fig. 187

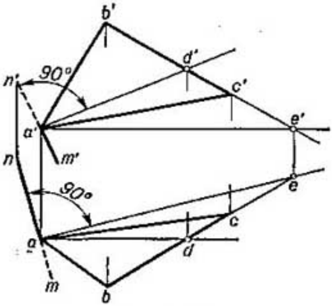


Fig. 188

En la fig. 188 se muestra la construcción de la perpendicular al plano determinado por el triángulo ABC. La perpendicular se ha trazado por el punto A.

Puesto que la proyección frontal de la perpendicular al plano debe ser perpendicular a la proyección frontal de la frontal del plano, y su proyección horizontal, perpendicular a la proyección horizontal de la horizontal, en el plano, por el punto A se han trazado la frontal con las proyecciones $a'd'$ y ad y la horizontal con las proyecciones $a'e'$ y ae. Claro está, que no es obligatorio trazar estas rectas precisamente por el punto A.

Luego se han trazado las proyecciones de la perpendicular: $m'n' \perp a'd'$, $mn \perp ae$. ¿Por qué las proyecciones en la fig. 188 en las zonas $a'n'$ y am se muestran con líneas de trazos? Porque aquí se examina no sólo el triángulo ABC, sino también el plano determinado por este triángulo: parte de la perpendicular se halla delante del plano y parte detrás del mismo.

En las figs. 189 y 190 se muestra la construcción de un plano que pasa por el punto A perpendicularmente a la recta BC. En la fig. 189 el plano está expresado por sus trazas. La construcción se ha iniciado con el trazado por el punto A de la horizontal del plano buscado:

puesto que la traza horizontal del plano debe ser perpendicular a bc, también la proyección horizontal de la horizontal deberá ser perpendicular a bc. Por eso $an \perp bc$. La proyección $a'n' \parallel$ al eje x, como esto debe suceder con la horizontal. Luego trazamos por el punto n' (n' es la proyección frontal de la traza frontal de la horizontal AN) la traza $P_v \perp b'c'$, se ha obtenido el punto P_x y trazado la traza $P_h \parallel an$ ($P_h \perp bc$).

En la fig. 190 el plano está determinado por su frontal AM y su horizontal AN. Estas rectas son perpendiculares a BC ($a'm' \perp \perp b'c'$, $an \perp bc$); el plano determinado por estas rectas es perpendicular a BC.

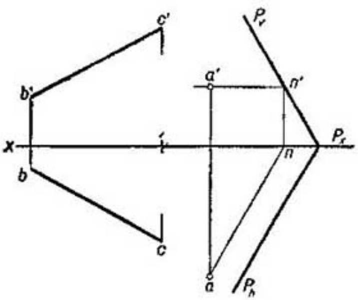


Fig. 189

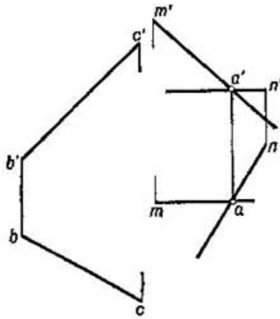


Fig. 190

Dado que la perpendicular a un plano es perpendicular a cualquier recta trazada en este plano, al aprender a trazar un plano perpendicularmente a una recta, se puede hacer uso de esto para trazar una perpendicular desde cierto punto A a una recta de posición general BC. Está claro que se puede fijar el siguiente plan de construcción de las proyecciones de la recta buscada:

1) por el punto A trazar un plano (llamémoslo Q) perpendicular a BC;

2) hallar el punto K de intersección de la recta BC con el plano Q;

3) unir los puntos A y K con el segmento de una recta.

Las rectas AK y BC son perpendiculares entre sí.

Un ejemplo de construcción se da en la fig. 191. Por el punto A se ha trazado el plano (Q) perpendicular a BC. Esto se ha hecho con auxilio de la frontal cuya proyección frontal $a'f'$ se ha trazado perpendicularmente a la proyección frontal $b'c'$, y de la horizontal cuya proyección horizontal es perpendicular a bc.

Luego se ha hallado el punto K de intersección de la recta BC con el plano Q. Para ello, por la recta BC se ha trazado el plano proyectante horizontal S (en el dibujo este plano está dado solamente por la traza horizontal S_h). El plano S corta al plano Q según la recta cuyas proyecciones son $1'2'$ y $1—2$. En la intersección de esta recta con la recta BC se obtiene el punto K. La recta AK es la perpendicular buscada a BC. En efecto, la recta AK corta a la recta BC y está contenida en el plano Q, perpendicular a la recta BC; por consiguiente, $AK \perp BC$.

En el § 15 se mostró (fig. 92) cómo se puede trazar una perpendicular desde un punto a una recta. Pero allí esto se realizó introduciendo un plano

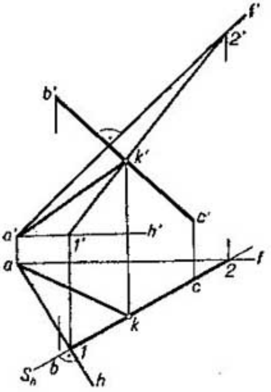


Fig. 191

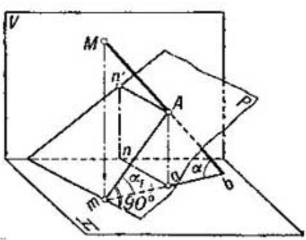


Fig. 192

auxiliar en el sistema V, H y formando, de tal modo, el sistema S, H, en el que el plano S se traza paralelamente a la recta dada. Recomendamos comparar las construcciones dadas en las figs. 92 y 191.

En la fig. 192 están representados el plano de posición general P que pasa por el punto A, y la perpendicular AM a este plano, prolongada hasta su intersección con el plano H en el punto b.

El ángulo α_1 entre los planos P y H y el ángulo α formado por la recta AM con el plano H son ángulos agudos del triángulo rectángulo bAm y, por consiguiente, $\alpha_1+\alpha=90°$. De forma análoga, si el plano P forma con el plano V un ángulo β_1, y la recta AM es perpendicular a P y forma con el plano V un ángulo β, entonces, $\beta_1+\beta=90°$. De aquí, ante todo, se desprende que el plano de posición general, que deberá formar con el plano H un ángulo α_1 y con el plano V un ángulo β_1 puede ser construido solamente si $180°>\alpha_1+\beta_1>90°$.

En efecto, sumando miembro a miembro $\alpha_1+\alpha=90°$ y $\beta_1+\beta=90°$, obtenemos: $\alpha_1+\beta_1+\alpha+\beta=180°$, es decir, $\alpha_1+\beta_1<180°$, y dado que $\alpha+\beta<90°$ (véase la pág. 44), entonces, $\alpha_1+\beta_1>90°$. Si se toma $\alpha_1+\beta_1=90°$ se obtendrá un plano proyectante de perfil y si se toma $\alpha_1+\beta_1=180°$ se obtendrá un plano de perfil, es decir, en ambos casos el plano no es de posición general, sino de posición particular.

§ 30. CONSTRUCCIÓN DE PLANOS RECÍPROCAMENTE PERPENDICULARES

La construcción de un plano Q perpendicular a un plano P puede efectuarse por dos vías:

1) el plano Q se traza por una recta perpendicular al plano P;
2) el plano Q se traza perpendicularmente a una recta contenida en el plano P o paralela a este plano. Para obtener una solución única se necesitan condiciones complementarias.

En la fig. 193 se muestra la construcción de un plano perpendicular a otro representado por el triángulo CDE. La condición complementaria aquí radica en que el plano buscado debe pasar por la recta AB. Por consiguiente, el plano buscado quedará determinado por la recta AB y la perpendicular al plano del triángulo.

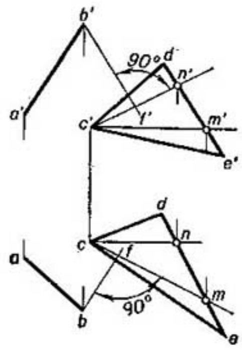


Fig. 193

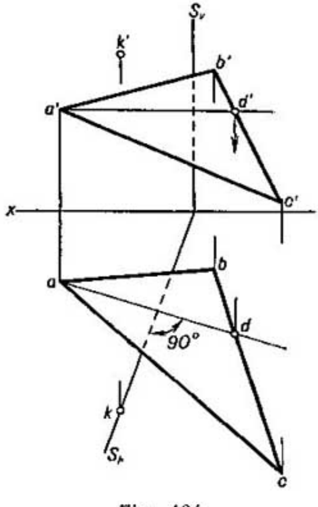


Fig. 194

Para trazar esta perpendicular al plano CDE, en éste se han tomado la frontal CN y la horizontal CM: si $b'f' \perp c'n'$ y $bf \perp cm$, entonces, $BF \perp$ al plano CDE.

El plano formado por las rectas que se cortan AB y BF es perpendicular al plano CDE, por pasar por la perpendicular a este plano. En la fig. 194 el plano proyectante horizontal S pasa por el punto K perpendicularmente al plano dado por el triángulo ABC. Aquí la condición complementaria era la perpendicularidad del plano buscado a dos planos al mismo tiempo: a los planos ABC y H. Por esta razón, como respuesta tenemos un plano proyectante horizontal. Dado que éste está trazado perpendicularmente a la horizontal AD, o sea, a una recta perteneciente al plano ABC, el plano S es perpendicular al plano ABC.

¿Puede servir la perpendicularidad de las trazas homónimas de los planos de índice de perpendicularidad de los propios planos?

A los casos evidentes, cuando esto es así, se refiere la perpendicularidad recíproca de dos planos proyectantes horizontales cuyas trazas horizontales son perpendiculares entre sí. También esto es justo para dos planos proyectantes frontales cuyas trazas frontales son perpendiculares entre sí; estos planos son perpendiculares entre sí.

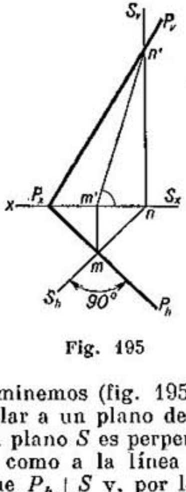


Fig. 195

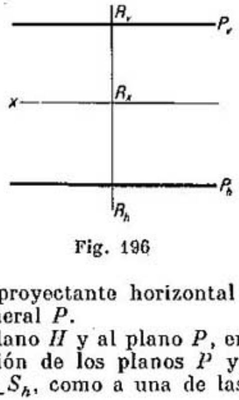


Fig. 196

Examinemos (fig. 195) un plano proyectante horizontal S perpendicular a un plano de posición general P.

Si el plano S es perpendicular al plano H y al plano P, entonces, $S \perp P_h$, como a la línea de intersección de los planos P y H. De aquí que $P_h \perp S$ y, por lo tanto, $P_h \perp S_h$, como a una de las rectas pertenecientes al plano S.

Así pues, la perpendicularidad de las trazas horizontales de un plano de posición general y de un plano proyectante horizontal corresponde a la perpendicularidad recíproca de estos planos.

Evidentemente, la perpendicularidad de las trazas frontales de un plano proyectante frontal y un plano de posición general también corresponde a la perpendicularidad recíproca de estos planos.

Pero, *si las trazas homónimas de dos planos de posición general son perpendiculares entre sí, los propios planos no son recíprocamente* *perpendiculares*, puesto que en este caso no se observa ninguna de las condiciones expuestas al principio de este parágrafo.

En conclusión, examinemos la fig. 196. Aquí se tiene el caso de perpendicularidad recíproca de los dos pares de trazas homónimas y la perpendicularidad de los propios planos: ambos planos son de posición particular, el plano R es de perfil y el P es un plano proyectante de perfil,

§ 31. CONSTRUCCIÓN DE LAS PROYECCIONES DEL ÁNGULO FORMADO POR UNA RECTA Y UN PLANO Y POR DOS PLANOS

Si una recta no es perpendicular a un plano, *el ángulo formado por esta recta con su proyección sobre este plano se llama ángulo entre la recta y el plano.*

Sobre los ángulos formados por una recta con los planos de proyección véase el § 13.

En la fig. 197 se representa una recta AB que corta al plano P en el punto D; el ángulo α está formado por el segmento BD de la recta dada con la proyección B_pD de este segmento sobre el plano P.

La construcción de la proyección del ángulo formado por una recta AB con cierto plano P se muestra en la fig. 198. El plano P viene dado por su horizontal (las proyecciones $p'h'$ y ph) y su frontal (las proyecciones $p'f'$ y pf).

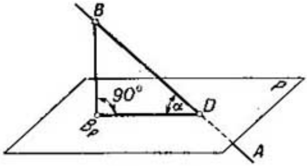


Fig. 197

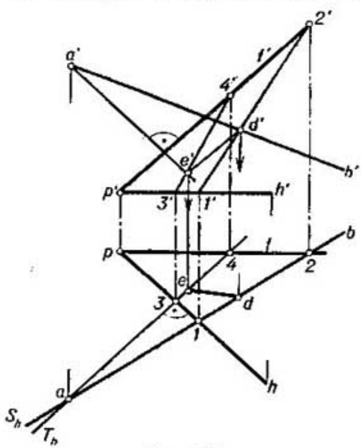


Fig. 198

La construcción se ha cumplido en el siguiente orden:

a) se ha hallado el punto D de intersección de la recta AB con el plano P, para lo cual por AB se ha trazado el plano proyectante horizontal S;

b) desde el punto A se ha trazado la perpendicular al plano P;

c) se ha hallado el punto E de intersección de esta perpendicular con el plano P, para lo cual se ha trazado el plano proyectante horizontal T;

d) por los puntos d' y e', d y e se han trazado rectas, con lo cual quedan determinadas *las proyecciones de la recta* AB *sobre el plano* P.

El ángulo $a'd'e'$ representa la proyección frontal del ángulo entre AB y el plano P, y el ángulo ade, la proyección horizontal de este mismo ángulo.

La construcción de las proyecciones del ángulo formado por una recta con un plano se simplifica considerablemente si el plano no es de posición general, puesto que en semejantes casos el punto de intersección de la recta dada con el plano se halla sin necesidad de construcciones complementarias.

Dos planos que se cortan forman cuatro ángulos diedros. Limitándonos al examen del ángulo entre P y Q, mostrado en la fig. 199, construimos su ángulo lineal, para lo cual cortamos la arista MN del ángulo diedro con el plano S perpendicular a MN.

La construcción de las proyecciones del ángulo lineal se muestra en la fig. 200. El plano P viene dado por el triángulo AMN, el plano Q, por el triángulo BMN.

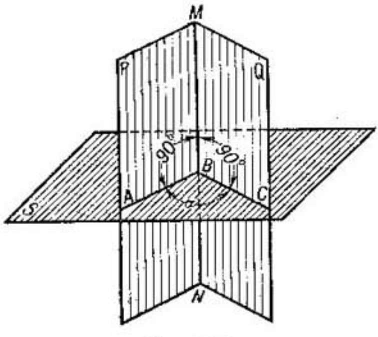


Fig. 199

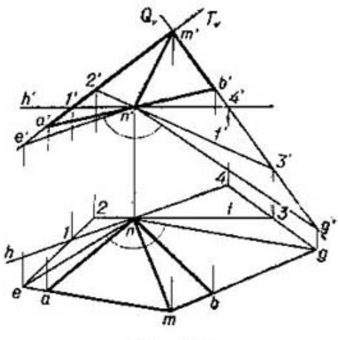


Fig. 200

a) Se ha construido el plano $S \perp MN$, que pasa por el punto N (el plano S viene dado por su frontal NF y su horizontal NH);

b) se ha construido la línea de intersección de los planos P y S (la recta EN); puesto que el plano S ha sido trazado por el punto N del plano P, es necesario hallar solamente el punto E, para lo cual se ha tomado el plano auxiliar T;

c) se ha hallado la línea de intersección de los planos Q y S (la recta NG); aquí también fue necesario hallar solamente el punto G (plano auxiliar Q).

El punto N es el vértice del ángulo lineal buscado, el ángulo eng representa la proyección horizontal de este ángulo, y el ángulo $e'n'g'$, su proyección frontal.

En la fig. 195 están construidas las proyecciones del ángulo lineal que mide el ángulo diedro formado por el plano P con el plano de proyección H. Puesto que para obtener el ángulo lineal hay que trazar un plano perpendicular a la arista del ángulo diedro, entonces, para obtener el ángulo de inclinación del plano P al plano H se ha trazado el plano S perpendicular a la traza P_h. Análogamente, para obtener el ángulo entre el plano P y el plano V hubiera sido necesario trazar un plano perpendicularmente a la traza P_v.

En la fig. 195 la proyección frontal del ángulo buscado es el ángulo $n'm'n$, y la proyección horizontal se confunde con la traza S_h. La magnitud del ángulo puede ser determinada construyendo el triángulo rectángulo por los catetos $n'n$ y mn.

PREGUNTAS A LOS §§ 29—31

1. ¿Cómo se sitúan las proyecciones de la perpendicular a un plano?
2. ¿Cómo se disponen mutuamente las proyecciones horizontales de la perpendicular a un plano y su línea de pendiente, trazada por el punto de intersección de la perpendicular con el plano?
3. ¿Cómo trazar un plano perpendicular a una recta dada (por un punto de la recta y por un punto exterior a esta recta)?
4. ¿Cómo trazar la perpendicular desde un punto a una recta de posición general (con ayuda de un plano perpendicular a la recta, y con auxilio de la introducción en el sistema V, H de un plano de proyección auxiliar)?
5. ¿Cómo trazar dos planos recíprocamente perpendiculares?
6. ¿En cuáles casos la perpendicularidad recíproca de un par de trazas homónimas de dos planos corresponde a la perpendicularidad recíproca de los propios planos?
7. ¿En cuál caso en el sistema V, H la perpendicularidad recíproca de dos planos se expresa por la perpendicularidad recíproca de sus trazas frontales? ¿En cuál caso en el sistema V, H la perpendicularidad recíproca de dos planos se expresa por la perpendicularidad recíproca de sus trazas horizontales?
8. ¿Son perpendiculares entre sí dos planos de posición general si son perpendiculares entre sí sus trazas homónimas?
9. ¿A qué se le llama ángulo entre una recta y un plano y que operaciones hay que efectuar para la construcción en el dibujo de las proyecciones de este ángulo?
10. ¿Cuáles operaciones hay que cumplir para construir en el dibujo las proyecciones del ángulo lineal para el ángulo diedro dado?

V
CAPÍTULO

MÉTODOS DE CAMBIO DE LOS PLANOS DE PROYECCIÓN Y DE GIRO

§ 32. REDUCCIÓN DE LAS LÍNEAS RECTAS Y LAS FIGURAS PLANAS A LAS POSICIONES PARTICULARES RESPECTO A LOS PLANOS DE PROYECCIÓN

La representación de las líneas rectas y las figuras planas en sus posiciones particulares respecto de los planos de proyección (véanse los §§ 11 y 19) simplifica considerablemente la construcción y la resolución de problemas, y a veces permite obtener la respuesta o bien directamente del dibujo, o bien con auxilio de construcciones simples.

Por ejemplo, la determinación de la distancia del punto A al plano proyectante horizontal (fig. 201) dado por el triángulo BCD, se reduce al trazado de al perpendicular desde la proyección a a la proyección expresada por el segmento bd. La distancia buscada se determina por el segmento ak.

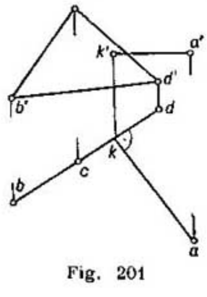


Fig. 201

Los procedimientos expuestos en el presente capítulo dan la posibilidad de pasar de las posiciones generales de las líneas rectas y las figuras planas en el sistema V, H a las posiciones particulares en el mismo sistema o en un sistema auxiliar.

Se consigue lo dicho:

1) introduciendo planos auxiliares de proyección de manera tal, que la recta o la figura plana, sin variar su posición en el espacio, resulte en una posición particular cualquiera en el nuevo sistema de planos de proyección (*método de cambio de los planos de proyección*);

2) variando la posición de la recta o la figura plana mediante su giro alrededor de cierto eje de modo que la recta o la figura resulte en una posición particular respecto del sistema de planos de proyec-

ción invariante (*método de giro y un caso particular de éste, el método de abatimiento*).

La introducción de planos de proyección auxiliares en el sistema V, H ya se examinó en el § 8, y en los §§ 13 y 15 se dieron ejemplos de construcción en los sistemas auxiliares. Ahora examinemos este procedimiento más detalladamente.

§ 33. MÉTODO DE CAMBIO DE LOS PLANOS DE PROYECCIÓN[1]

Conocimientos generales. La esencia del método de cambio de planos de proyección[2] consiste en que la posición de los puntos, líneas, figuras planas y superficies en el espacio permanecen invariables, mientras que al sistema V, H se le añaden planos auxiliares que forman con V o con H, o entre sí sistemas de dos planos perpendiculares entre sí, aceptados como planos de proyección.

Cada nuevo sistema se elige de manera tal, que se obtenga la posición más adecuada para efectuar las construcciones necesarias.

En una serie de casos, para obtener el sistema de planos de proyección que resuelva el problema, es suficiente introducir un solo plano, por ejemplo, $S \perp H$ o $T \perp V$; en este caso el plano S será un plano proyectante horizontal y el plano T, un plano proyectante frontal. Si la introducción de un solo plano, S o T, no permite resolver el problema, se recurre a completar sucesivamente el sistema primitivo de planos de proyección con nuevos: por ejemplo, se introduce el plano $S \perp H$, obteniéndose el primer sistema nuevo S, H, y a continuación, de este sistema se pasa al segundo sistema nuevo, introduciendo cierto plano $T \perp S$. En este caso, el plano T será un plano de posición general en el sistema básico V, H. De esta manera se realiza el paso consecutivo del sistema V, H al sistema S, T pasando por el sistema intermedio S, H.

Si los planos S y T no resuelven totalmente el problema, se puede pasar a un tercer sistema nuevo, introduciendo un plano más perpendicular al T.

Al efectuar las construcciones en el nuevo sistema de planos de proyección se observan las mismas condiciones respecto a la posición del observador, establecidas para el sistema de planos V, H (véase el § 7).

---

[1] Empleamos la denominación difundida de «cambio de planos de proyección», pero en realidad los planos de proyección V y H se conservan, y solamente se introducen planos auxiliares de proyección.

[2] En el idioma ruso, el método de cambio de los planos de proyección se expuso por primera vez por I. I. Sómov en su libro «Geometría descriptiva», en 1862. Luego este problema fue aclarado más detallada y profundamente en las obras de N. I. Makárov y V. I. Kurdiúmov.

El eje de proyección (la línea de tierra) lo anotaremos en la escritura en forma de quebrado, considerando que la línea del quebrado se encuentra en dicho eje; la denotación de los planos representan el numerador y denominador del quebrado, con la particularidad de que cada letra se coloca hacia el lado del eje en el que deberán situarse las proyecciones respectivas.

Introducción en el sistema V, H de un plano auxiliar de proyección. En la mayoría de los casos el plano auxiliar, introducido en el sistema V, H en calidad de plano de proyección, se elige de acuerdo con alguna condición que responde a la finalidad de la construcción. Como ejemplo puede servir el plano S representado en la fig. 77: puesto que se exigía hallar la magnitud verdadera del segmento AB y el ángulo formado por AB con el plano H, el plano S fue situado perpendicularmente al plano H (se formó el sistema S, H) y paralelamente al segmento AB.

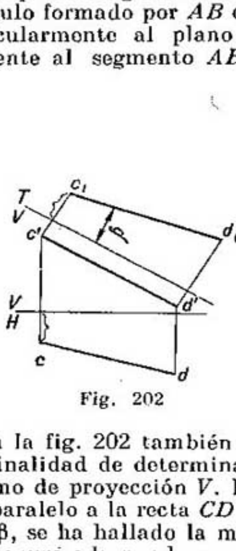


Fig. 202

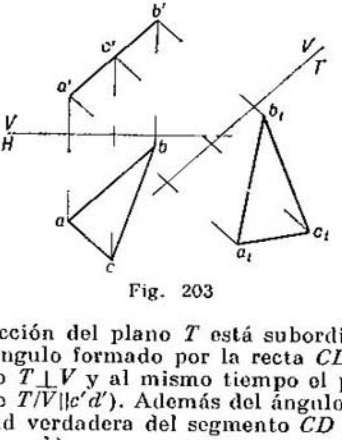


Fig. 203

En la fig. 202 también la elección del plano T está subordinada a la finalidad de determinar el ángulo formado por la recta CD con el plano de proyección V. Por eso $T \perp V$ y al mismo tiempo el plano T es paralelo a la recta CD (el eje $T/V \parallel c'd'$). Además del ángulo buscado β, se ha hallado la magnitud verdadera del segmento CD (ésta viene expresada por la proyección c_1d_1).

En el caso representado en la fig. 203, la elección del plano T depende completamente de la tarea: determinar la forma verdadera del triángulo ABC. Puesto que en el caso en cuestión el plano determinado por el triángulo es perpendicular al plano V, para representarlo sin deformaciones hay que introducir en el sistema V, H un plano auxiliar que responda a dos condiciones: $T \perp V$ (para formar el sistema V, T) y $T \parallel ABC$ (lo que da la posibilidad de representar al $\triangle ABC$ sin desfiguraciones). El nuevo eje V/T ha sido trazado paralelamente a la proyección $a'c'b'$. Para construir la proyección $a_1b_1c_1$ a partir del nuevo eje se han trazado segmentos iguales a las distancias de los puntos a, b y c al eje V/H. La forma verdadera del $\triangle ABC$ se expresa por su nueva proyección $a_1b_1c_1$.

Un ejemplo de construcción en la que la elección del plano auxiliar Q no se ha precisado y puede ser cualquier plano proyectante horizontal, frontal o de perfil, con tal de que sea cómodo construir sobre él las proyecciones, sirve la fig. 204. La finalidad de la construcción es obtener las proyecciones del punto de intersección de dos rectas de perfil AB y CD pertenecientes a un mismo plano de perfil[1]. En la fig, 204 se muestra un plano proyectante horizontal Q en calidad de plano de proyección auxilar.

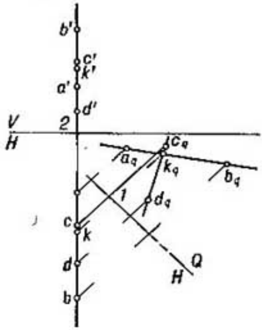


Fig. 204

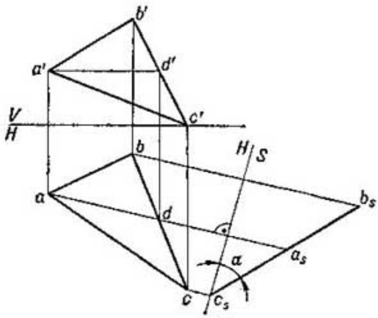


Fig. 205

La posición mutua de las nuevas proyecciones $a_q b_q$ y $c_q d_q$ determina la posición recíproca de las rectas dadas: en este caso, las rectas se cortan. La proyección del punto de intersección sobre el plano Q es el punto k_q; por esta proyección se hallan las proyecciones k y k'.

La introducción de un plano auxiliar de proyección da la posibilidad, por ejemplo, de transformar el dibujo de manera tal, que el plano de posición general, dado en el sistema V, H, resulta perpendicular al plano auxiliar de proyección. Un ejemplo se da en la fig. 205, donde el plano complementario S se ha trazado de manera tal, que el plano de posición general, dado por el triángulo ABC, se ha hecho perpendicular al plano S. ¿Cómo se ha obtenido esto?

En el triángulo ABC se ha trazado la horizontal AD. El plano perpendicular a AD es perpendicular a ABC y al mismo tiempo al plano H (puesto que $AD \| H$). Esta condición la satisface el plano S; el triángulo ABC se proyecta sobre él en forma del segmento $b_s c_s$. Si el plano de posición general está dado por sus trazas (fig. 206), entonces, el plano S debe ser trazado perpendicularmente a la traza P_h, o sea, a la línea de intersección del plano P con el plano H. Con ello el plano S resulta ser perpendicular al plano H (es

[1] El hecho de que las rectas AB y CD se cortan se desprende de la comparación de las posiciones de los puntos A y B, C y D.

decir, aparece un plano complementario de proyección) y al plano P. Ahora hay que construir la traza del plano P sobre el plano S. Puesto que $P \perp S$, la proyección de cualquier punto del plano P sobre el plano S se encontrará sobre la recta de intersección de los planos P y S, es decir, sobre la traza P_s. En la fig. 206 como tal punto

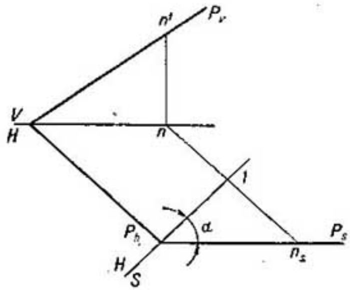


Fig. 206

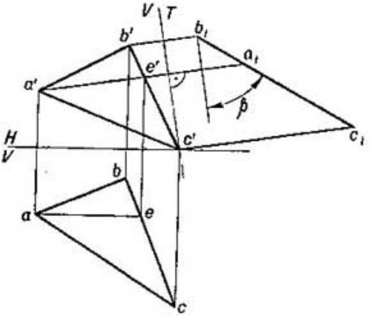


Fig. 207

sirve el punto N tomado en la traza P_v; se ha construido su proyección n_s ($n_s 1 = n'n$), por la cual, así como por el punto de intersección de la traza P_h con el eje S/H, pasa la traza P_s.

Las construcciones en las figs. 205 y 206 conducen a la obtención del ángulo de inclinación α de los planos dados al plano H. Si se toma el plano T (fig. 207) perpendicular al plano V y al plano dado por el triángulo ABC (para lo cual hay que trazar el eje V/T perpendicularmente a la frontal de este plano), entonces se determinará el ángulo de inclinación β del plano ABC al plano V.

Introducción de dos planos de proyección complementarios en el sistema *V, H*. Examinemos la introducción de dos planos de proyección complementarios en el sistema V, H, en el ejemplo siguiente.

Supongamos que se exige disponer la recta de posición general AB, dada en el sistema V, H, perpendicularmente al plano de proyección complementario. ¿Puede ser esto logrado introduciendo un solo plano complementario? No. Tal plano, siendo perpendicular a la recta de posición general, él mismo en el sistema V, H será un plano de posición general, es decir, no perpendicular ni a H, ni a V. Pero con ello se incumple la condición de introducción de planos de proyección complementarios (véase la pág. 28).

¿Cómo vencer este obstáculo y, con todo, emplear el método de cambio de los planos de proyección? Es necesario sujetarse al siguiente esquema: pasar del sistema V, H al sistema S, H, en el que

$S \perp H$ y $S \| AB$, y a continuación pasar al sistema S, T, donde $T \perp S$ y $T \perp AB$ (fig. 208). El dibujo correspondiente se da en la fig. 209. La tarea se reduce a la construcción sucesiva de las proyecciones a_s y a_t del punto A, b_s y b_t del punto B. La recta de posición general en el sistema V, H ha resultado ser perpendicular al plano de proyección complementario T con el paso por una etapa intermedia de paralelismo respecto al primer plano complementario S. Dado que

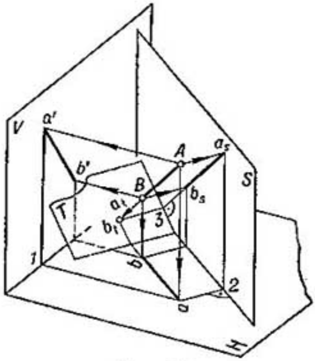


Fig. 208

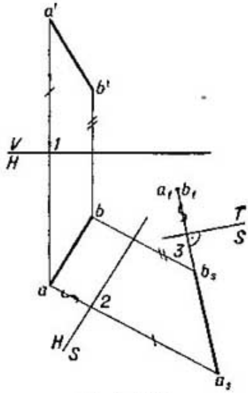


Fig. 209

el plano S está dispuesto paralelamente a la recta AB, las distancias de los puntos A y B al plano S son iguales entre sí y se expresan, por ejemplo, por el segmento $a2$; tomando el eje S/T perpendicularmente a a_sb_s (lo que corresponde en el espacio a la perpendicularidad del plano T a la recta AB) y trazando el segmento $a_t\,3$ igual a $a2$, obtenemos ambas proyecciones a_t y b_t en un mismo punto, es decir, lo que debe obtenerse si $AB \perp T$.

En la fig. 210 se da un ejemplo de construcción de la forma verdadera del $\triangle ABC$. Aquí también se han introducido dos planos de proyección complementarios S y T, pero, por el esquema siguiente: $S \perp H$ y $S \perp ABC$, mientras que $T \perp S$ y $T \| ABC$. La etapa final de la construcción se ha reducido al trazado del plano $T \|$al plano ABC (puesto que hacía falta determinar la forma verdadera del $\triangle ABC$); la etapa intermedia era la perpendicularidad del plano auxiliar S al plano ABC. Esta etapa intermedia repite la construcción mostrada un poco más arriba en la fig. 205. En la etapa final de construcción, en la fig. 210, el eje S/T es paralelo a la proyección $c_sa_sb_s$, es decir, el plano T se ha trazado paralelamente al plano ABC, lo cual conduce a la determinación de la forma verdadera expresada por la proyección $a_tb_tc_t$.

Así pues, en este ejemplo, para obtener el paralelismo del plano del $\triangle ABC$ y el plano T, ha sido necesario disponer el plano del $\triangle ABC$ y el plano S perpendicularmente uno al otro. En el ejemplo de la fig. 209, al contrario, para obtener la perpendicularidad ($AB \perp T$) ha sido necesaria la posición preventiva de paralelismo ($AB \parallel S$).

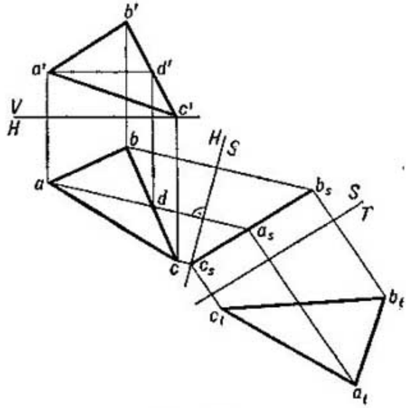


Fig. 210

PREGUNTAS A LOS §§ 32—33

1. ¿Cuáles procedimientos de transformación del dibujo se examinan en el capítulo V?

2. ¿En qué consiste la diferencia fundamental de estos procedimientos?

3. ¿En qué consiste el método conocido bajo el nombre de «método de cambio de los planos de proyección»?

4. ¿Qué posición deberá ocupar en el sistema V, H el plano de proyección S introducido para formar el sistema S, H?

5. ¿Qué posición ocupará en el sistema V, H el plano de proyección T al pasar sucesivamente del sistema V, H, por el S, H, al sistema S, T?

6. ¿Cómo hallar la longitud del segmento de una recta y los ángulos formados por esta recta con los planos V y H, introduciendo planos de proyección complementarios?

7. ¿Cuántos planos de proyección complementarios deberán ser introducidos en el sistema V, H para determinar la forma verdadera de una figura cuyo plano es perpendicular al plano H o al plano V?

8. ¿Cuántos planos complementarios y en qué sucesión deberán ser introducidos en el sistema V, H para que la recta dada de posición general sea perpendicular al plano de proyección complementario?

9. La misma pregunta, pero respecto a la obtención de la forma verdadera de una figura cuyo plano es un plano de posición general.

§ 34. FUNDAMENTOS DEL MÉTODO DE GIRO[1]

Al girar una figura alrededor de cierta recta fija (*eje de giro*) cada punto de esta figura se desplaza en un plano perpendicular al eje de giro (*plano de giro*). El punto describe una circunferencia cuyo

[1] El método de giro fue expuesto detalladamente por V. I. Kurdiúmov en su libro «Curso de Geometría Descriptiva» en el apartado dedicado a las proyecciones ortogonales.

centro es el punto de intersección del eje con el plano de giro (*centro de giro*), y cuyo radio es igual a la distancia desde el punto que gira hasta el centro (este es el *radio de giro*). Si un punto cualquiera del sistema dado se encuentra en el eje de giro, al girar el sistema este punto se considera fijo.

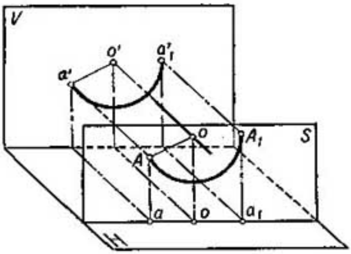


Fig. 211

El eje de giro puede ser dado o elegido; en el último caso es conveniente disponer el eje perpendicularmente a uno de los planos de proyección, puesto que se simplifica la construcción.

Efectivamente, si el eje de giro es perpendicular, por ejemplo, al plano V, entonces, el plano en el que sucede el giro del punto es paralelo al plano V. Por consiguiente, la trayectoria del punto se proyecta sobre este plano sin desfiguraciones, y sobre el plano H, en forma de un segmento de recta (fig. 211).

§ 35. GIRO DE UN PUNTO, UN SEGMENTO DE RECTA Y UN PLANO ALREDEDOR DE UN EJE PERPENDICULAR AL PLANO DE PROYECCIÓN

Giro alrededor de un eje dado.

1. Supongamos que el punto A gira alrededor de un eje perpendicular al plano H (fig. 212). Por el punto A se ha trazado el plano T perpendicular al eje de giro y, por consiguiente, paralelo al plano H. Al girar el punto A describe en el plano T una circunferencia de radio R; la magnitud de este radio se expresa por la longitud de la perpendicular trazada desde el punto A al eje. La circunferencia descrita por el punto A en el espacio, se proyecta sobre el plano H en tamaño natural. Dado que el plano T es perpendicular al plano V, las proyecciones de los puntos de la circunferencia sobre el plano V estarán situados sobre T_v, es decir, sobre una recta perpendicular a la proyección frontal del eje de giro. El dibujo se da en la fig. 212, a la derecha: la circunferencia descrita por el punto A al girar alrededor del eje, se ha proyectado sobre el plano H en tamaño natural. Desde el punto o como centro se ha trazado una circunferencia de radio $R=oa$; en el plano V esta circunferencia viene representada por el segmento de una recta, igual a $2R$.

En la fig. 213 está representado el giro del punto A alrededor de un eje perpendicular al plano V. La circunferencia descrita por el punto A se ha proyectado sobre el plano V en tamaño natural.

Desde el punto o', como centro, se ha trazado la circunferencia de radio $R=oa$; sobre el plano H esta circunferencia se representa con el segmento de una recta, igual a $2R$.

De los ejemplos examinados en las figs. 212 y 213 se aprecia claramente que *al girar un punto alrededor de un eje perpendicular*

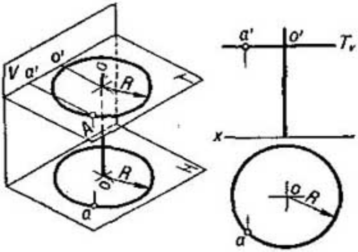


Fig. 212

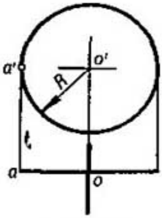


Fig. 213

a un plano de proyección cualquiera, una de las proyecciones de dicho punto se desplaza por una recta perpendicular a la proyección del eje de giro.

En la fig. 214 se muestra el giro de un punto A en sentido contrario a las agujas del reloj de un ángulo α alrededor de un eje que pasa por el punto O perpendicularmente al plano V. Desde el punto o', como centro, se ha trazado el arco de radio $o'a'$, correspondiente al angulo α y al sentido de giro. El punto a_1' es la nueva posición de la proyección frontal del punto A.

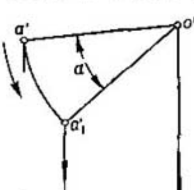


Fig. 214

2. Examinemos ahora el giro del segmento de una recta alrededor de un eje dado. El segmento AB (fig. 215) ha sido girado a la posición A_1B_1. Evidentemente, el problema se ha reducido a girar los puntos A y B un ángulo dado α, en el sentido dado. Las trayectorias de desplazamiento de las proyecciones frontales de estos puntos se indican con rectas trazadas por a' y b' perpendicularmente a la proyección frontal del eje de giro.

La nueva posición de la proyección horizontal del punto A (el punto a_1) se ha obtenido al girar el radio oa el ángulo dado α. Para hallar el punto b_1 (la posición de la proyección horizontal del punto B después del giro) se ha trazado el arco de radio ob y sobre este arco se ha trazado la cuerda bb_1, igual a la cuerda 1—2; esto corresponde al giro del punto B un mismo ángulo α.

Luego, a partir de los puntos a_1 y b_1 se han trazado las líneas de referencia hasta su intersección con las direcciones de desplazamiento de las proyecciones frontales; se han obtenido las proyecciones a_1' y b_1'.

Los segmentos entre los puntos a_1' y b_1' y entre los puntos a_1 y b_1 determinan las nuevas posiciones de las proyecciones frontal y horizontal del segmento AB después de su giro a la posición A_1B_1.

Dado que en los triángulos abo y a_1b_1o (fig. 215) los lados bo y ao del triángulo abo (como radios) son respectivamente iguales a los

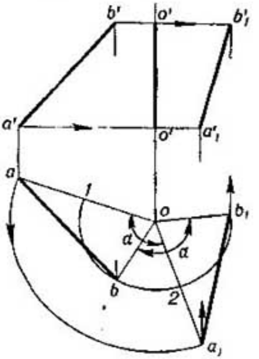


Fig. 215

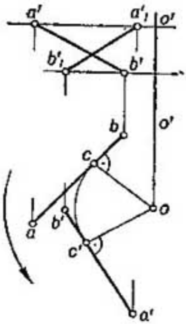


Fig. 216

lados b_1o y a_1o del triángulo a_1b_1o y los ángulos comprendidos entre los lados indicados son también iguales, estos triángulos son iguales entre sí. Por consiguiente, $ab=a_1b_1$, es decir, *la magnitud de la proyección horizontal de un segmento girado alrededor de un eje perpendicular al plano H, no varía.* Evidentemente, también es justa semejante conclusión respecto a *la proyección frontal de un segmento al hacerlo girar alrededor de un eje perpendicular al plano V.*

En los triángulos iguales entre sí abo y a_1b_1o (fig. 215) serán también iguales sus alturas trazadas, por ejemplo, desde el punto o a los lados ab y a_1b_1.

Las conclusiones deducidas permiten establecer el siguiente procedimiento de construcción de las nuevas proyecciones de un segmento que se hace girar alrededor de un eje un ángulo dado (fig. 216). Por el punto o trazamos una recta perpendicular a ab; el punto c (de intersección de la perpendicular con ab) lo giramos el ángulo dado. Trazando por el punto c_1 (la nueva posición del punto c) una recta perpendicular al radio oc_1 obtenemos la dirección de la nueva posición de la proyección horizontal del segmento. Puesto que los segmentos ca y cb no varían su magnitud, entonces. trazando desde el punto c_1 los segmentos $c_1a_1=ca$ y $c_1b_1=cb$, hallamos la nueva posición a_1b_1 de la proyección de todo el segmento. La nueva posición de la proyección frontal $a'_1b'_1$ se halla de la misma manera que anteriormente.

Con ayuda del procedimiento indicado se puede no solamente girar el segmento un ángulo dado, sino determinar el ángulo que debe girarse el segmento dado para que tome la posición requerida (por ejemplo, disponerlo paralelamente al plano V).

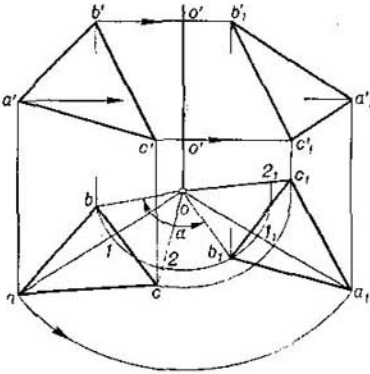


Fig. 217

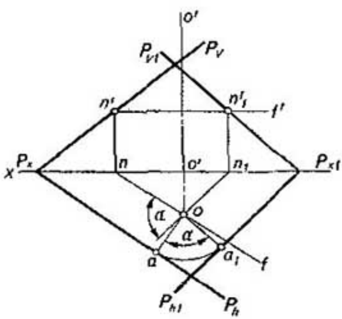


Fig. 218

3. El giro de un plano alrededor de un eje dado se reduce al giro de los puntos y rectas pertenecientes a este plano.

Un ejemplo de este caso se da en la fig. 217: el triángulo ABC que determina el plano se ha girado a la posición $A_1B_1C_1$ de acuerdo con el ángulo dado α y la dirección indicada por la flecha. La construcción es semejante a la dada en la fig. 215: allí fueron girados dos puntos A y B, aquí tres, los vértices A, B y C, y, por consiguiente, toda la figura. Los triángulos abc y $a_1b_1c_1$ son iguales entre sí según la construcción: siendo el eje perpendicular al plano H, la proyección horizontal no varía su magnitud. Esto corresponde a que, si el eje de giro es perpendicular al plano H, el ángulo de inclinación del plano ABC respecto al plano H no varía. Evidentemente, al girar un plano alrededor de un eje perpendicular al plano V, el ángulo de inclinación del plano dado al plano V no varía y las magnitudes de las proyecciones frontales se conservan.

Al girar un plano dado por sus trazas, corrientemente se hacen girar una de sus trazas y la horizontal (o la frontal) del plano. Un ejemplo se da en la fig. 218; el plano de posición general P se ha girado un ángulo α alrededor de un eje perpendicular al plano H. Sobre la traza P_h se ha tomado un punto $a(oa \perp P_h)$, el punto más cercano al eje de giro, de manera semejante a como se tomó el punto c en la fig. 216. Luego el punto a se ha girado un ángulo α. Por el punto obtenido a_1 se ha trazado una recta perpendicular a oa_1; ésta es la traza horizontal del plano en su nueva posición.

Para hallar la traza frontal del plano después de su giro basta hallar, además del punto obtenido P_{x1} en el eje x, un punto más perteneciente a la traza. En el plano P ha sido tomada la horizontal nf, $n'f'$, que corta al eje de giro (nf pasa por la proyección horizontal del eje de giro). Claro está, que se puede tomar una horizontal que no corte al eje de giro. Puesto que también en la nueva posición del plano la horizontal permanece paralela a su traza horizontal, por el punto o se debe trazar una recta paralela a P_{h1}; se obtendrá la nueva posición de la proyección horizontal de la horizontal. Su proyección frontal no varía su dirección, por lo cual es fácil hallar la nueva traza frontal de la horizontal, el punto n'_1. Ahora se puede construir la traza frontal (P_{v1}).

Giro alrededor de un eje elegido. En toda una serie de casos el eje de giro puede ser elegido. En este caso, si el eje de giro se elige de modo que pase por uno de los extremos de un segmento, la construcción se simplificará, puesto que el punto por el que pasa el eje será «fijo» y para girar el segmento hay que construir la nueva posición de la proyección de un solo punto, el del otro extremo.

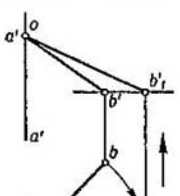


Fig. 219

En la fig. 219 se muestra un caso cuando para el giro del segmento AB se ha elegido un eje de giro perpendicular al plano H y que pasa por el punto A. Al girar el segmento alrededor de tal eje se puede, por ejemplo, disponerlo paralelamente al plano V. Precisamente tal posición se muestra en la fig. 219. La proyección horizontal del segmento, en su nueva posición, es perpendicular a la línea de referencia aa'. Una vez hallado el punto b'_1 y construido el segmento $a'b'_1$, obtenemos la nueva posición de la proyección frontal del segmento AB. La proyección $a'b'_1$ expresa la longitud del segmento AB. El ángulo $a'b'_1b'$ es igual al ángulo formado por la recta AB con el plano H.

Si nos proponemos el objetivo de hallar el ángulo de inclinación de una recta de posición general al plano V, hay que trazar el eje de giro perpendicularmente al plano V y girar la recta de modo que quede paralela al plano H. Proponemos al lector efectuar tal construcción.

Si al girar un plano, dado por sus trazas, se puede elegir el eje de giro, es conveniente disponerlo en el plano de proyección; en este caso las construcciones se simplifican. Un ejemplo se da en la fig. 220. Supongamos que el eje de giro debe ser perpendicular al plano H. Si lo tomamos en el plano V, sobre la traza P_v se encontrará el punto «fijo» O (en su intersección con el eje de giro). Después de girar el plano, su traza frontal debe pasar por este punto. Por consiguiente, una vez hallada la posición de la traza horizontal (P_{h1}) despues del giro, hay que trazar la traza P_{v1} por los puntos P_{x1} y o'. En comparación con la fig. 218 la simplificación consiste en que no se necesita la horizontal. Esta sería necesaria en el caso de que el punto

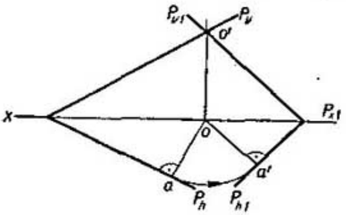


Fig. 220

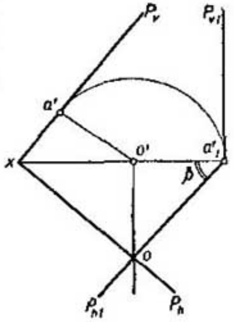


Fig. 221

P_{x1} resultara fuera de los límites del dibujo; pero en un caso análogo en la fig. 218 se tendrían que haber tomado dos líneas auxiliares.

En la fig. 221 el plano de posición general se ha girado a la posición de plano proyectante horizontal; en este caso se ha determinado el ángulo de inclinación del plano P al plano V. Si se toma el eje de giro perpendicular al plano H, el plano P puede ser colocado en la posición de plano proyectante frontal, determinando en este caso el ángulo de inclinación de este plano al plano H.

Comparando los planos antes y después del giro, observamos que el ángulo formado por las trazas P_v y P_h en el dibujo, en general, varía.

Si nos imaginamos un cono circular con su vértice en el punto O y base en el plano H en la fig. 220, y en el plano V en la fig. 221, y un plano P tangente al cono, entonces, el giro del plano P alrededor del eje de giro coincidente con el eje del cono, representa como el «recorrido» del cono por este plano tangente.

PREGUNTAS A LOS §§ 34 Y 35

1. ¿En qué consiste el método de giro?
2. ¿Qué significa plano de giro de un punto y cómo se dispone respecto del eje de giro?

3. ¿Qué significa centro de giro de un punto al girar éste alrededor de cierto eje?

4. ¿Qué significa radio de giro de un punto?

Las preguntas que siguen se refieren al giro alrededor de un eje perpendicular al plano de proyección.

5. ¿Cómo se desplazan las proyecciones de un punto?

6. ¿Cuál de las proyecciones del segmento de una recta no varía su magnitud?

7. ¿Cómo se efectúa el giro de un plano: a) no expresado por sus trazas, b) expresado por sus trazas?

8. ¿En qué caso no varía durante el giro la inclinación de una recta: a) al plano H, b) al plano V?

9. La misma pregunta respecto al plano W.

10. ¿Se puede con ayuda del giro determinar la longitud del segmento de una recta y el ángulo de inclinación de ésta al plano V y al plano H?

11. ¿Se puede con auxilio del giro de un plano determinar el ángulo de inclinación de este plano al plano V y al plano H?

12. ¿Cuál es la posición conveniente que se le puede dar al eje de giro al girar: a) el segmento de una recta, b) un plano expresado por sus trazas?

§ 36. EMPLEO DEL MÉTODO DE GIRO SIN INDICACIÓN EN EL DIBUJO DE LOS EJES DE GIRO PERPENDICULARES A LOS PLANOS DE PROYECCIÓN V O H

Más arriba (véase el § 35) ya vimos que si se gira el segmento de una recta o una figura plana alrededor de un eje perpendicular al plano de proyección, la proyección sobre este plano no varía ni su forma ni su magnitud, varía solamente la posición de esta proyección respecto al eje de proyección. En cuanto a la otra proyección, la proyección sobre el plano paralelo al eje de giro, todos los puntos de esta proyección (excepto, claro está, las proyecciones de los puntos situados en el eje de giro) se desplazan por rectas paralelas al eje de proyección, y la proyección varía su forma y su magnitud. Valiéndose de estas propiedades se puede aplicar el método de giro sin indicar el eje de giro y sin establecer la magnitud del radio de giro; basta desplazar una de las proyecciones de la figura examinada (sin variar su forma y magnitud) a la posición requerida y luego construir la otra proyección como fue indicado más arriba.

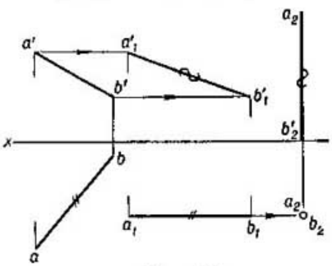


Fig. 222

Por ejemplo, proponiéndose el objetivo de girar el segmento AB de una recta de posición general (fig. 222) de modo que resulte perpendicular al plano H, comenzamos con el giro alrededor de un eje perpendicular al plano H hasta que ocupe una posición paralela al plano V, pero sin indicar este eje en el dibujo. Puesto que en el caso de tal giro la proyección horizontal del segmento no varía su magnitud, la proyección a_1b_1 se toma igual a ab y se dispone paralelamente al eje x, lo que corresponde al paralelismo del propio segmento al plano V.

Una vez hallada la correspondiente proyección frontal del segmento ($a_1'b_1'$) realizamos el segundo giro, ahora alrededor de un eje

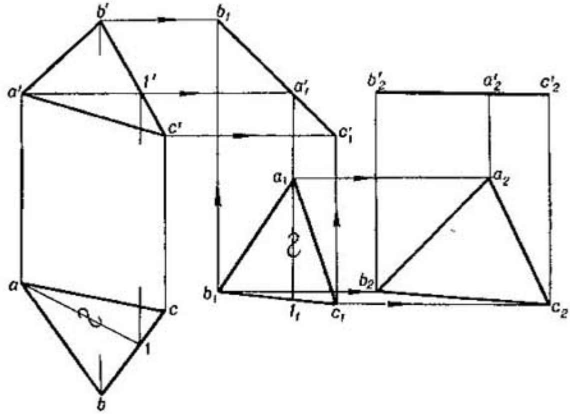


Fig. 223

perpendicular al plano V, hasta la posición buscada, es decir, hasta que AB sea perpendicular al plano H. Este eje tampoco se indica en el dibujo. Colocamos la proyección $a_2'b_2'$, igual a $a_1'b_1'$, perpendicularmente al eje x. La proyección horizontal del segmento se expresa por un punto con doble denotación, a_2b_2.

Así pues, las operaciones ejecutadas corresponden a giros alrededor de ejes perpendiculares a los planos de proyección, pero estos ejes no se indican. Claro está, que pueden ser hallados. Por ejemplo, si se traza una recta por los puntos a y a_1 y otra por los puntos b y b_1 y a continuación se levantan perpendiculares a los puntos medios de los segmentos aa_1 y bb_1, el punto obtenido de intersección de estas perpendiculares será precisamente la proyección horizontal del eje de giro perpendicular al plano H. Pero, como se ve, no hay necesidad de ello.

En la fig. 223 se muestran dos etapas del giro del ΔABC, situado en un plano de posición general, con la finalidad de obtener la forma verdadera de este triángulo. En efecto, en su última posición, este triángulo es paralelo al plano H y, por tanto, la proyección $a_2b_2c_2$ representa la forma verdadera del triángulo. Pero, para obtener tal posición, hay que girar previamente el plano de posición general en el que está situado el triángulo de modo tal, que este plano resulte perpendicular al plano V. Para ello hay que tomar la horizontal en el $\triangle ABC$ y girarla hasta que resulte perpendicular al plano V; entonces, también el triángulo que contiene esta horizontal resultará ser perpendicular al plano V. Puesto que la construcción se realiza

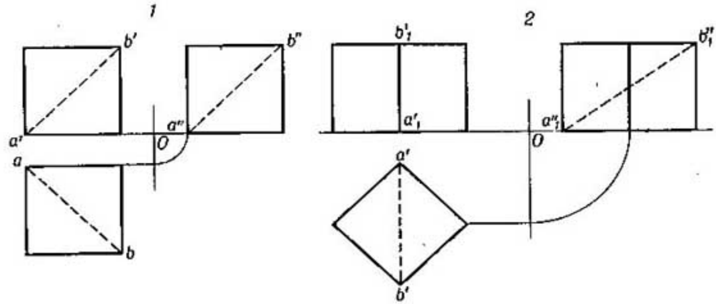


Fig. 224

sin indicación de los ejes de giro, disponemos la proyección $a_1b_1c_1$ arbitrariamente, pero de tal modo que la horizontal sea perpendicular al plano V; para ello dirigimos la proyección de la horizontal $a_1 1_1$ paralelamente aunque sea a la línea de referencia $a'a$ (el dibujo se ha cumplido sin eje de proyección). Durante este giro se supone que el eje de giro es perpendicular al plano H; por eso la proyección horizontal del triángulo conserva su forma y magnitud ($a_1b_1c_1 = abc$), varía solamente su posición. Dado que los puntos A, B y C durante tal giro se desplazan en planos paralelos al plano H, las proyecciones b_1', a_1' y c_1' se encuentran en las líneas de referencia horizontales $a'a_1'$, $b'b_1'$ y $c'c_1'$.

Durante el segundo giro, que lleva al triángulo a una posición paralela al plano H, el eje de giro se supone perpendicular al plano V. Ahora, durante el giro la proyección frontal conserva su forma y magnitud, obtenidas en la segunda etapa de giro; los puntos A_1, B_1 y C_1 se desplazan en planos paralelos al plano V; las proyecciones a_2, b_2 y c_2 se encuentran en las líneas de referencia horizontales de los puntos a_1, b_1 y c_1.

La proyección $a_2b_2c_2$ expresa la forma y la magnitud verdaderas del triángulo ABC.

El empleo de este método, en primer lugar, simplifica en cierto grado las construcciones, y, en segundo lugar, no sucede la superposición de una proyección sobre la otra, aunque el dibujo ocupa mayor superficie [1].

En las figs. 224 y 225 se da un ejemplo más del giro sin indicación de los ejes de giro.

En estas figuras se muestra el giro consecutivo de un cubo, y cómo se lleva a una posición en la que la diagonal AB se sitúa perpendicularmente al plano V.

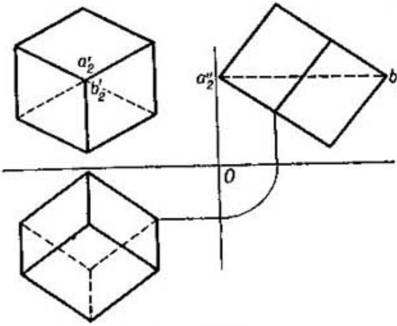


Fig. 225

Primero, mediante el giro alrededor de un eje perpendicular al plano H, el cubo se ha llevado a una posición en la que la diagonal AB se encuentra en el plano de perfil (fig. 224).

De esta posición el cubo se ha pasado a una tercera, en la que la diagonal AB es perpendicular al plano V (fig. 225). Esto se ha alcanzado girando el cubo alrededor de un eje perpendicular al plano W[2].

§ 37. GIRO DE UN PUNTO, UN SEGMENTO DE RECTA Y UN PLANO ALREDEDOR DE UN EJE PARALELO AL PLANO DE PROYECCIÓN, Y ALREDEDOR DE LA TRAZA DE UN PLANO

Giro de una figura plana alrededor de su horizontal. Para determinar la forma y las dimensiones de una figura plana, ésta puede ser girada alrededor de su *horizontal* de modo que como resultado de este giro la figura se sitúe paralelamente al plano H.

[1] El caso de giro examinado, a saber: sin indicación de los ejes de giro, se suele llamar «método de desplazamiento planoparalelo».

[2] La proyección del cubo sobre el plano V, obtenida en este caso, (fig. 225), coincide con la representación del cubo en la proyección isométrica rectangular estudiada en el curso de dibujo lineal en las escuelas secundarias.

Examinemos primeramente el giro de un punto (fig. 226). El punto B gira alrededor de cierto eje horizontal On', describiendo un arco de circunferencia, situado en el plano S. Este plano es perpendicular al eje de giro y, por consiguiente, es un plano proyectante horizontal; por esta razón, la proyección horizontal de la circunferencia descrita por el punto B deberá encontrarse en la traza S_h.

Si el radio OB ocupa la posición paralela al plano H, entonces, la proyección ob_1 es igual a OB_1, es decir, igual a la magnitud verdadera del radio OB.

Examinemos ahora la fig. 227. En esta figura se muestra el giro del triángulo ABC. Como eje de giro se ha tomado la horizontal AD. El punto A situado en el eje de giro permanecerá en su lugar. Por consiguiente, para representar la proyección horizontal del triángulo después del giro hay que hallar las proyecciones de los otros

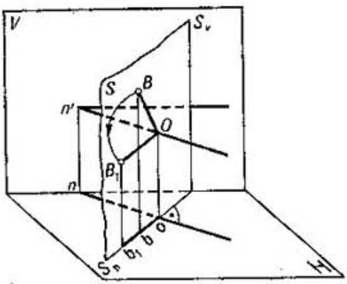


Fig. 226

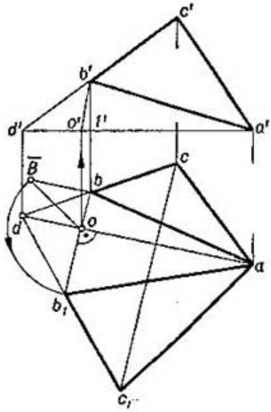


Fig. 227

dos vértices. Bajando desde el punto b una perpendicular a ad hallamos la proyección horizontal del centro de giro, el punto o, y la proyección horizontal del radio de giro del punto B, el segmento ob, y luego, la proyección frontal del centro de giro, el punto o', y la proyección frontal del radio de giro del punto B, el segmento $o'b'$. Ahora es necesario determinar la magnitud verdadera del radio de giro del punto B. Para ello se ha aplicado el método indicado en el § 13, es decir, la construcción del triángulo rectángulo. Por los catetos ob y $b\overline{B}=b'1'$ construimos el triángulo rectángulo $ob\overline{B}$; su hipotenusa es igual al radio de giro del punto B.

Ahora se puede hallar la posición del punto b_1, y a continuación la del punto c_1, sin determinar el radio de giro del punto C, sino hallar la posición del punto c_1 en la intersección de dos rectas, una de las cuales es la perpendicular trazada desde el punto c a la recta ad, y la otra, pasa por el punto hallado b_1 y por el punto d (la proyección horizontal del punto D, perteneciente al lado BC y situado en el eje de giro).

La proyección ab_1c_1 expresa la magnitud verdadera del triángulo ABC, puesto que después del giro el plano del triángulo es paralelo al plano H. La proyección frontal del triángulo se confunde con la proyección frontal de la horizontal, es decir, representa una línea recta.

En la fig. 227 se da la construcción para el caso cuando la horizontal ha sido trazada fuera de los límites de las proyecciones del triángulo. Esto permite evitar que las proyecciones se confundan, pero el dibujo ocupa mayor superficie.

Si se exige girar una figura plana hasta una posición paralela al plano V, como eje de giro debe tomarse la *frontal*.

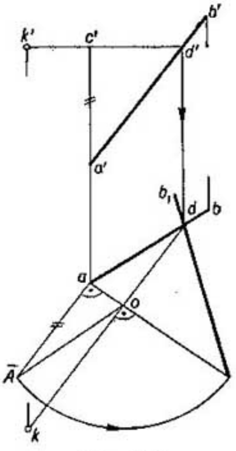


Fig. 228

Prestemos atención a que en la construcción mostrada en la fig. 226, la proyección $o'b'$ del radio de giro del punto B no participa. Evidentemente, una vez comprendida la esencia de la construcción, esta proyección puede no construirse. Un ejemplo se da en la fig. 228, donde se muestra el giro de un plano dado por el punto K y la recta AB, hasta que ocupa una posición paralela al plano H. El giro se ha realizado alrededor de la horizontal KD. La horizontal ha sido trazada por el punto K que, por consiguiente, permanece «fijo». Queda girar la recta AB alrededor de KD, mejor dicho, girar, por ejemplo, solamente el punto A, puesto que el punto D en la recta AB también es «fijo»: pertenece al eje de giro. Trazando $ao \perp kd$, es decir, fijando la posición de la traza horizontal del plano proyectante horizontal al que pertenece y en el que gira el punto A, obtenemos el punto o, la proyección horizontal del centro de giro del punto A, y el segmento oa, la proyección horizontal del radio de giro del punto A. Ahora hallamos la magnitud verdadera del radio de giro R_A, como la hipotenusa del triángulo $oa\overline{A}$, en el que el cateto $a\overline{A} = a'c'$. Una vez hallado el punto a_1, la proyección horizontal del punto A después del giro, trazamos a_1b_1, la proyección horizontal de la recta AB después del giro, valiéndonos del punto d. De este modo, nos han sido innecesarias las proyecciones frontales del centro de giro y del radio de giro.

Giro de un plano alrededor de su traza hasta su abatimiento con el correspondiente plano de proyección [1]. Si se gira un plano alrededor de su traza hasta su abatimiento con el plano de proyección en el que está situada esta traza, los segmentos de líneas y figuras,

[1] Este caso es conocido también bajo el nombre de «método de abatimiento».

dispuestos en el plano se representan en tamaño natural. Evidentemente, esta construcción es análoga por su contenido al giro de un plano alrededor de su horizontal o frontal hasta su paralelismo con el correspondiente plano de proyección: la traza horizontal del plano puede considerarse como su horizontal «cero», y la traza frontal, como su frontal «cero».

En la fig. 229 se muestra el abatimiento de un plano de posición general P con el plano H, con la particularidad de que el giro se ha realizado alrededor de la traza P_h en sentido desde el plano V hacia el observador.

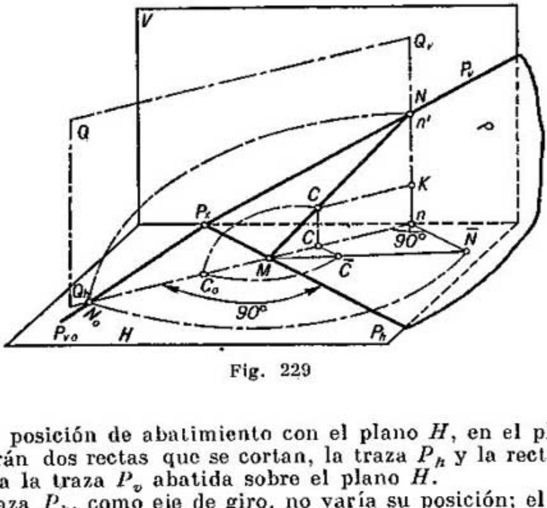


Fig. 229

En la posición de abatimiento con el plano H, en el plano P se encontrarán dos rectas que se cortan, la traza P_h y la recta P_{v0} que representa la traza P_v abatida sobre el plano H.

La traza P_h, como eje de giro, no varía su posición; el punto de intersección de las trazas tampoco varía su posición y, por tanto, si se exigiera indicar la posición abatida de la traza P_v bastaría hallar un punto más de esta traza (además del punto P_x) en la posición abatida sobre el plano H. Hallemos la posición abatida de un punto cualquiera N situado en la traza P_v. Este punto describirá un arco de circunferencia en el plano Q perpendicular al eje de giro; el centro de este arco se encuentra en el punto M_0 de intersección del plano Q con la traza P_h. Describiendo desde el punto M_0 un arco de radio $M_0 N$ en el plano Q, obtenemos en la intersección de este arco con la traza Q_h el punto N_0 en el plano H. Trazando por P_x y N_0 una recta, obtenemos P_{v0}. Puesto que el segmento P_xN no varía su magnitud durante el giro del plano, entonces, es evidente, que el punto N_0 puede ser obtenido en la intersección de Q_h con el arco descrito en el plano H desde P_x con un radio igual a P_xN.

En el dibujo (fig. 230) sobre la traza P_v se ha elegido un punto arbitrario N (este punto se confunde con su proyección n'); por su proyección n se ha trazado la recta nM_0 perpendicular al eje de giro, es decir, a la traza P_h. Sobre esta recta deberá estar situado el punto N después de su abatimiento sobre el plano H, a una distancia del punto M_0 igual al radio de giro del punto N, o a la distancia de P_xn' del punto P_x. La longitud del radio de giro se puede determinar como la hipotenusa del triángulo rectángulo con los catetos M_0n y $n\overline{N}(n\overline{N} = nn')$. Trazando desde el punto M_0 un arco de radio $M_0\overline{N}$, o desde el punto P_x un arco de radio P_xn', obtenemos, sobre la recta nM_0, la posición del punto N abatida sobre el plano H, es decir, el punto N_0. Trazando por los puntos P_x y N_0 una recta, obtenemos la posición abatida de la traza P_v, la recta P_{v0}.

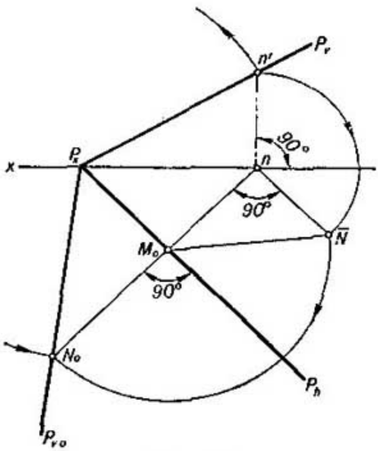


Fig. 230

Volvamos a la fig. 229 y examinemos en ella el abatimiento del punto C sobre el plano H.

En la fig. 231, a la izquierda, se muestra cómo se halla la posición abatida del punto C sobre el plano H. Por el punto c se ha trazado la recta cM_0 perpendicular a P_h. El radio de giro $M_0\overline{C}$ ha sido hallado como la hipotenusa del triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos es M_0c y el otro es $c\overline{C} = {}_{,}c'1$. Con radio $M_0\overline{C}$ trazamos desde el punto M_0 un arco e intersecamos en la prolongación de la recta cM_0 el punto C_0 que es la posición del punto C en el plano H.

Esta construcción puede efectuarse también, así como se muestra en la fig. 231 a la derecha. Estableciendo la posición del punto C en el plano P con ayuda de la frontal y trazando la recta cM_0 perpendicularmente a P_h, intersecamos esta recta con un arco con centro en el punto l y radio igual al segmento $c'l'$, es decir, a la magnitud verdadera del segmento CL en el plano P. Después del abatimiento esta magnitud se conserva: $c_0l = CL$. Si en el plano se da el segmento de una recta, entonces, hallando la posición abatida de los extremos de este segmento, obtenemos *la magnitud verdadera del segmento.*

Como es conocido, toda horizontal tomada en el plano P se dispone paralelamente a P_h, y toda frontal, paralelamente a P_v; por esta razón, si fuera necesario hallar la posición abatida de la horizontal o la frontal, bastaría hallar la posición abatida de la traza de éstas y por esta traza trazar una recta paralela a P_h o P_{v0} respectivamente (si el plano P está abatido sobre el H).

Utilizaremos lo dicho para la construcción inversa. Sea dado el punto C_0, o sea, la posición del punto C abatida sobre el plano H; hay que hallar la proyección del punto C, si éste debe encontrarse en el plano P dado por sus trazas (véase también la fig. 229).

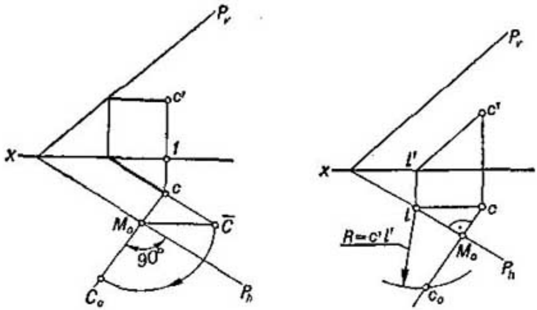


Fig. 231

Cuando el punto C_0 «se levanta al espacio», su proyección horizontal (el punto c) se desplaza por la recta C_0n (fig. 232) perpendicular a P_h, es decir, por la traza Q_h del plano de giro Q. El punto C deberá encontrarse en el espacio sobre la línea de intersección del plano P con el plano de giro (fig. 229) a una distancia M_0C_0 del punto M_0.

Construyamos sobre el plano H el triángulo rectángulo $M_0n\overline{N}$, en el cual el lado $n\overline{N}=n'n$ (fig. 232) y que, por consiguiente, es igual al triángulo Mnn' en el espacio.

Trazando en la hipotenusa $M_0\overline{N}$, a partir del punto M_0, el segmento M_0C_0 (el radio de giro), obtenemos el punto $\overline{C}$. Trazando por este punto una recta perpendicular a M_0n, obtenemos el punto c, que es la posición buscada de la proyección horizontal del punto C.

El punto c' deberá encontrarse en la perpendicular trazada desde el punto c al eje x, a una distancia $c'1$ igual a $c\overline{C}$.

Si hay que «levantar al espacio» el segmento de una recta, en el caso general, se deben levantar dos de sus puntos así como se acaba de indicar, o emplear el llamado punto «fijo». Esto se muestra en la fig. 233, donde había que «levantar al espacio» (es decir, al plano P) el segmento AB dado en la posición abatida sobre el plano H (A_0B_0). La construcción se ha complicado un poco por el hecho de que el punto de intersección de las trazas P_v y P_h se considera inaccesible.

Se ha construido el plano auxiliar $Q \| P$, y se ha hallado la traza Q_v en el abatimiento sobre el plano H. Dado que $Q \| P$, Q_{v0} determina la dirección de las frontales tanto del plano Q como del plano

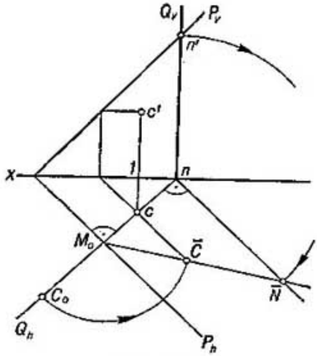


Fig. 232

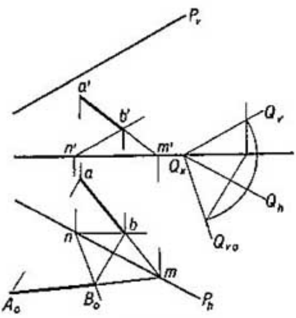


Fig. 233

P en la posición abatida sobre el plano H. Por esta razón, trazando $B_0n \| Q_{v0}$ obtenemos en la posición abatida sobre el plano H la frontal del plano P a la que pertenece en el espacio el punto B. Construyendo las proyecciones de esta frontal hallamos sobre ellas las proyecciones b y b'. Si prolongamos ahora la recta A_0B_0 hasta su intersección con la traza P_h en el punto m, entonces, la proyección horizontal ab se encontrará sobre la recta que pasa por este punto «fijo» m y por la proyección construida b. La proyección $a'b'$ se obtendrá sobre la recta que pasa por los puntos m' y b'.

Hemos examinado el abatimiento de un plano sobre el plano de proyección horizontal, efectuando el giro del plano alrededor de la traza horizontal. Si se exige abatir este plano sobre el plano frontal de proyección, se debe girar el plano alrededor de su traza frontal.

Si se gira un plano proyectante horizontal alrededor de su traza frontal hasta que coincida con el plano V, la traza horizontal del plano después del abatimiento se situará sobre el eje de proyección.

Lo mismo, si se gira un plano proyectante frontal alrededor de su traza horizontal hasta hacerlo coincidir con el plano H, la traza frontal de este plano se situará sobre el eje de proyección.

En la fig. 234 se representa un plano cuyas trazas Q_v y Q_h forman entre sí un ángulo obtuso en el abatimiento sobre el plano H al ser girado «hacia el observador» y al ser girado en sentido contrario.

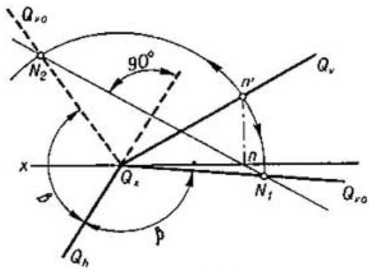


Fig. 234

PREGUNTAS A LOS §§ 36 Y 37

1. ¿Se puede mostrar en el dibujo el giro, por ejemplo, de una recta alrededor de un eje perpendicular al plano H o al V sin representar el eje de giro? ¿En qué se funda tal artificio?

2. ¿Cómo se le suele llamar al giro sin representación del eje de giro?

3. ¿Cómo se sitúa el plano de giro de un punto, si el eje de giro de este último es solamente paralelo al plano H o al V, pero no es perpendicular ni al plano H ni al V? ¿Por qué hay que determinar en este caso la magnitud verdadera del radio de giro?

4. ¿Qué sirve de índice de haber alcanzado la posición horizontal de un plano dado por su horizontal y un punto, al ser girado alrededor de esta horizontal y dónde se obtiene la proyección frontal del punto después del giro?

5. ¿Qué se comprende bajo el nombre de «método de abatimiento»?

6. ¿Qué se comprende bajo el nombre de «levantamiento al espacio»?

§ 38. EJEMPLOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON EL EMPLEO DEL MÉTODO DE CAMBIO DE LOS PLANOS DE PROYECCIÓN Y EL MÉTODO DE GIRO

1. Construir las proyecciones del punto de intersección de dos rectas de perfil situadas en un mismo plano de perfil.

La resolución se da en la fig. 204. Se ha empleado el método de cambio de los planos de proyección. Para obtener la proyección k' hay que trazar el segmento $k'2$ igual al segmento hallado k_q1.

2. Trazar un plano complementario de proyección de tal modo que la recta de posición general sea perpendicular a este plano.

La resolución se expone en la fig. 209. Se han introducido consecutivamente dos planos de proyección complementarios. El segmento AB se ha situado perpendicularmente al segundo plano de proyección complementario T.

3. Girar una recta de posición general de tal manera que resulte perpendicular al plano H.

La resolución se da en la fig. 222. Se han empleado dos giros. Después del segundo giro el segmento AB es perpendicular al plano H.

4. Determinar la longitud del segmento de una recta de posición general y los ángulos de inclinación de esta recta a los planos de proyección V y H.

En la fig. 202 se expone la resolución por el método de cambio de los planos de proyección. Se ha introducido un plano complementario $T \perp V$ y paralelo al segmento dado CD. Se ha determinado la longitud del segmento y el ángulo de inclinación al plano V.

En la fig. 219 se muestra la resolución de este problema por el método de giro. El giro se ha efectuado alrededor de un eje trazado por el punto A del segmento AB que se ha llevado a una posición paralela al plano V. Se ha determinado la longitud del segmento y el ángulo de inclinación al plano H.

5. Determinar la distancia de un punto a una recta. Dirijámonos a la fig. 228. En esta figura se muestra el giro del plano determinado por el punto K y la recta AB, alrededor de la horizontal KD de este plano. Como resultado del giro el plano se sitúa paralelamente al plano H. Ahora (fig. 235) se puede trazar la perpendicular kl: el segmento kl determina la distancia buscada desde el punto K hasta la recta AB.

En la fig. 236 se muestra la resolución del mismo problema girando el sistema compuesto por el punto K y la recta AB alrededor de dos ejes: primeramente alrededor de un eje perpendicular al plano H y, luego, de otro perpendicular al plano V. Los ejes no se representan en el dibujo (véase el § 36). Puesto que durante el primer giro la proyección horizontal del sistema varía sólo su posición, permaneciendo invariable su configuración y su magnitud, entonces, trazando la perpendicular $k1$, construimos la proyección horizontal a_1b_1 en la posición requerida. Con ayuda de esta proyección hallamos la proyección frontal $a_1'b_1'2_1'k_1'$. Durante el segundo giro hay que conservar la configuración y la magnitud de esta proyección. «Fijamos» el punto k_1' a $a_1'b_1'$ con auxilio de la perpendicular $k_1'2_1'$ y construimos la proyección $a_2'b_2'2_2'k_2'$ y por ésta, la proyección k_2 del punto K y el punto con doble denotación (a_2 y b_2) que es la proyección del segmento AB. La distancia buscada del punto K a la recta AB se expresa por el segmento k_2a_2 (k_2b_2).

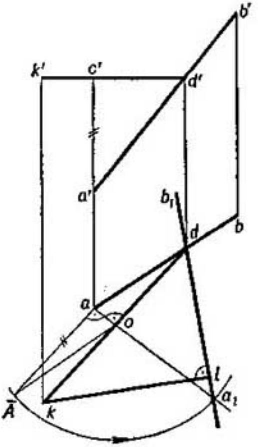


Fig. 235

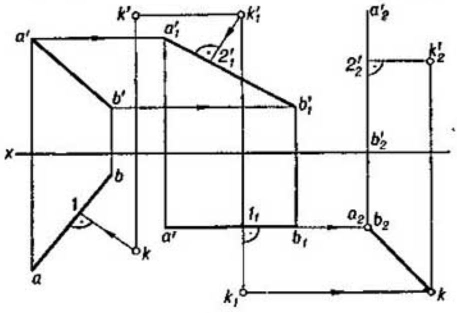


Fig. 236

6. Determinar la distancia desde un punto hasta un plano.

En la fig. 201 se muestra la resolución de este problema para el caso de un plano proyectante horizontal. La resolución se reduce al trazado de la perpendicular ak.

En la fig. 237 se expone la resolución de este mismo problema para el caso de un plano de posición general; a la izquierda el plano viene dado por un triángulo, a la derecha, por sus trazas. Se ha empleado el método de cambio de los planos de proyección; se ha introducido el plano complementario S perpendicular al plano H y al plano dado que, como resultado, se hace perpendicular al plano S (véanse las figs. 205 y 206 y las explicaciones a éstas). La distancia buscada se determina por la perpendicular trazada desde el punto κ_s a la proyección b_sc_s (fig. 237, a la izquierda) y a la traza P_s (fig. 237, a la derecha).

7. Determinar la distancia entre dos planos paralelos.

La resolución de este problema se puede reducir a la determinación de la distancia de un punto, tomado en uno de los planos, al otro plano, o introducir

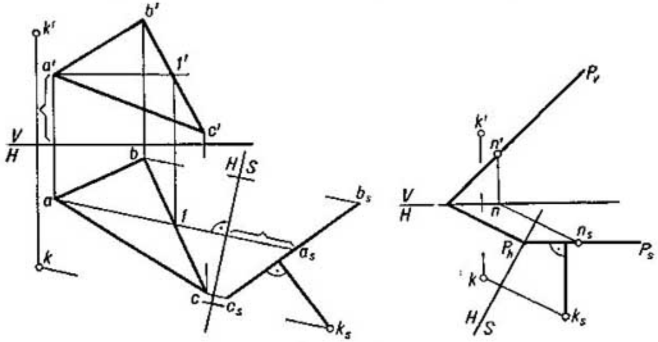


Fig. 237

en el sistema V, H un plano de proyección auxiliar perpendicular a los planos paralelos dados, como se ha hecho en la fig. 237 respecto a un plano.

8. Determinar la distancia entre dos rectas paralelas.

La resolución de este problema se puede reducir a la determinación de la distancia desde un punto, tomado en una de las rectas, hasta la otra recta (véanse las figs. 235 y 236).

En la fig. 238 se muestra la construcción en la que un plano determinado por dos rectas paralelas ha sido girado alrededor de una de sus horizontales (o una de sus frontales) de manera tal, que el plano y, por consiguiente, las rectas dadas se han situado paralelamente al plano de proyección.

El giro se ha efectuado alrededor de la horizontal KM. Basta hallar la nueva posición de aunque sea el punto A (en el plano horizontal, el punto a_1): la recta a_1k y la recta paralela a ésta, trazada por el punto m, representan las proyecciones horizontales de las rectas paralelas dadas, cuando el plano, determinado por éstas, está situado paralelamente al plano H.

En la fig. 239 se muestra la resolución del mismo problema por el método de cambio de los planos de proyección. Primeramente ambas rectas se han proyectado sobre el plano S paralelo a éstas (el plano S se ha trazado por una de las rectas, por la recta AB). Luego, las rectas se han proyectado sobre el plano T perpendicular a estas rectas. Las proyecciones de estas rectas sobre el plano T representan puntos. El segmento a_tc_t (o el b_td_t) determina la distancia buscada entre las rectas.

En la misma fig. 239 se muestran las proyecciones del segmento que determina la distancia entre las rectas dadas. La proyección sobre el plano S se ha trazado por el punto b_s (se podría haber tomado otro punto cualquiera sobre a_sb_s) paralelamente al eje S/T, puesto que en el sistema S, T, la proyección sobre el plano T expresa la magnitud verdadera de la distancia entre AB y CD. Lo siguiente está claro del dibujo. La proyección sobre el plano T deberá ser mayor que cada una de las proyecciones b_se_s, be, $b'e'$.

9. Determinar la distancia más corta entre dos rectas que se cruzan y expresar mediante las proyecciones la perpendicular común a estas rectas.

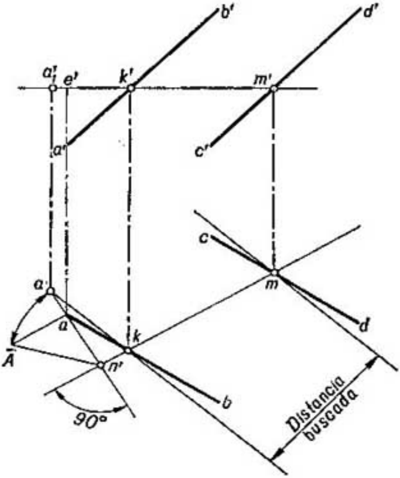


Fig. 238

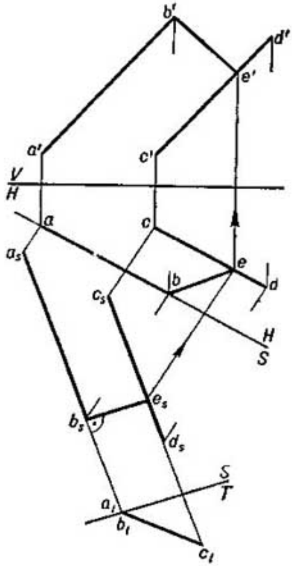


Fig. 239

Les hacemos recordar que la distancia más corta entre dos rectas que se cruzan es al mismo tiempo la distancia entre los planos paralelos a los que pertenecen las rectas que se cruzan.

En la fig. 240 se muestra la perpendicular común a las rectas que se cruzan AB y CD.

Si se trazan por las rectas AB y CD dos planos paralelos entre sí P y Q y luego, por una de estas rectas, por ejemplo, por la AB, se traza un plano S perpendicular a P y a Q y se halla la recta según la cual se cortan los planos S y Q (esta recta MN es paralela a la recta AB), entonces, por el punto E de intersección de las rectas CD y MN pasará la perpendicular buscada a las rectas AB y CD.

En la construcción mostrada en la fig. 241, una de las rectas que se cruzan (la AB) se ha proyectado en un punto sobre el plano de proyección complementario T. Se ha efectuado el siguiente plan de construcción:

a) Del sistema V, H se ha pasado al sistema S, H, donde $S \perp H$ y $S \parallel AB$.
b) Del sistema S, H se ha pasado al sistema S, T, donde $T \perp S$ y $T \perp AB$.

c) Una vez obtenida la proyección de la recta AB sobre el plano T en forma de un punto y la proyección de la segunda recta $(c_t d_t)$ y trazado desde el punto $a_t(b_t)$ la perpendicular a $c_t d_t$, se ha hallado la distancia buscada entre las rectas dadas que se cruzan AB y CD.

Luego, en la fig. 241 se muestra la construcción de la proyección de la perpendicular común a AB y CD. La marcha de la construcción está indicada con flechas. La proyección $e_s f_s$ se ha trazado paralelamente al eje S/T.

10. Construir las proyecciones del segmento de una recta de posición general que forma con el plano H un ángulo α, y con el plano V, un ángulo β. Tal construcción ya se mostró en el § 13 (figs. 73 y 74), pero sin emplear los métodos expuestos en el capítulo V. Examinemos ahora la resolución del problema con auxilio del método de giro.

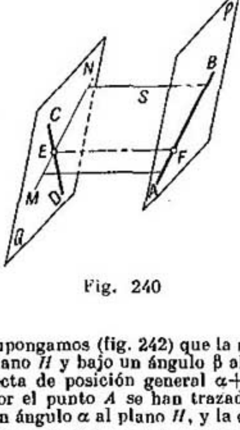


Fig. 240

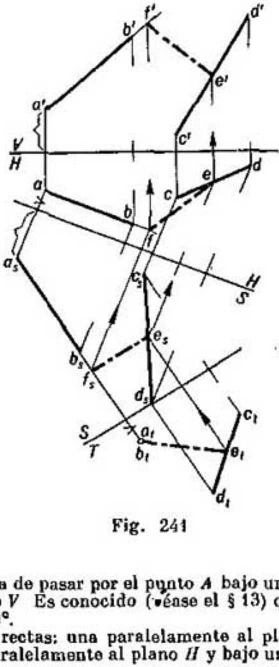


Fig. 241

Supongamos (fig. 242) que la recta ha de pasar por el punto A bajo un ángulo α al plano H y bajo un ángulo β al plano V. Es conocido (véase el § 13) que para una recta de posición general $\alpha+\beta<90°$.

Por el punto A se han trazado dos rectas: una paralelamente al plano V y bajo un ángulo α al plano H, y la otra paralelamente al plano H y bajo un ángulo β al plano V. Sobre ambas rectas se han llevado segmentos iguales: $a'b'_1=ab_2$. Giremos el segmento AB_1 alrededor de un eje perpendicular al plano H, y el segmento AB_2 alrededor de un eje perpendicular al plano V, con la particularidad de que ambos ejes pasan por el punto A (lo que permite conservar este punto en su posición dada). En cierto momento ambos segmentos coincidirán (en la fig. 242 esto se muestra en forma del segmento AB) y, por consiguiente, queda construida la recta buscada. Por el punto A se pueden trazar en total cuatro rectas semejantes.

11. Construir un plano de posición general que pase por el punto A y que esté situado bajo ángulos dados a los planos H y V.

En la pág. 105 se estableció la dependencia entre los ángulos formados por un plano de posición general con los planos H y V y los ángulos formados por la perpendicular a este plano con los mismos planos de proyección. A base de estas dependencias, para construir un plano bajo los ángulos α_1 al plano H y β_1 al plano V hace falta construir previamente una recta bajo el ángulo $\alpha = 90° - \alpha_1$ al plano H y $\beta = 90° - \beta_1$ al plano V (véase el problema 10), y, luego, trazar por el punto A un plano perpendicular a la recta construida[1].

12. Girar un plano de posición general, dado por el triángulo ABC (fig. 243), alrededor de un eje vertical dado de manera tal, que este plano pase por el punto dado K. Si el plano pasa por el punto K, este último se encontrará sobre el plano en una de sus horizontales. Se puede enseguida indicar la horizontal que después del giro del plano deberá pasar por el punto K: para ello basta trazar la proyección frontal de la horizontal por el punto k'. Una vez construida la proyección horizontal de la horizontal (mn) y determinado el radio de giro (od), trazamos una circunferencia respecto a la cual, durante el giro del plano alrededor del eje dado, la proyección horizontal de la horizontal será tangente en cualquier posición. Si trazamos ahora desde el punto k una tangente a esta circunferencia (kd_1), entonces, podemos considerarla como

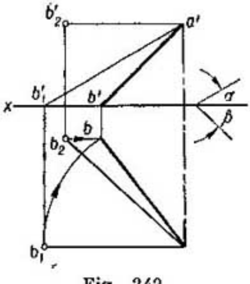


Fig. 242

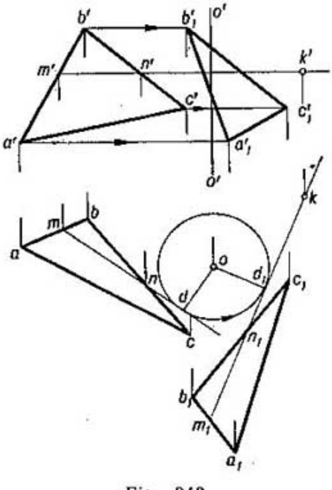


Fig. 243

la proyección horizontal de la horizontal, sobre la cual deberá encontrarse el punto K, cuando el plano pase por este punto.

Construida la proyección horizontal de la horizontal después del giro (m_1n_1), construimos la proyección horizontal del triángulo: ésta varía solamente su posición, permaneciendo invariable su forma y magnitud $(a_1b_1c_1 = abc)$. Con ayuda de la proyección $a_1b_1c_1$ hallamos la proyección $a_1'b_1'c_1'$.

Nos limitamos a una sola solución. La segunda solución se obtendrá si se traza desde el punto k una segunda tangente.

El problema que acabamos de examinar puede ser modificado de la manera siguiente: girar el plano de posición general alrededor de cierto eje vertical de tal manera que el punto dado pertenezca a este plano.

Este problema se diferencia del anterior solamente en que el eje de giro debe ser elegido por nosotros mismos. ¿Puede ser elegido este eje arbitrariamente?

Resulta que *no toda* recta perpendicular al plano H puede ser tomada como eje de giro útil para la resolución del problema dado.

---

[1] Es evidente, que construyendo la recta tal como fue indicado en el § 13, podemos trazar un plano perpendicular a esta recta, que será el plano buscado.

De la fig. 243 se desprende que la proyección horizontal del eje de giro debe estar situada de tal manera que, respecto a las proyecciones horizontales del punto K y de la horizontal MN, la circunferencia de centro o, a la cual es tangente la recta mn, no contenga dentro de sí al punto k, puesto que desde el punto k se debe trazar una tangente a esta circunferencia.

Por tanto, la distancia del punto buscado o al punto k deberá ser no menor que la distancia desde este mismo punto o a la recta mn. Si tomamos el punto o de tal manera que ambas distancias sean iguales (por ejemplo, en el punto o_1 o en el o_2 en la fig. 244), en él se puede disponer el eje de giro.

¿Dónde se situarán en el dibujo los puntos equidistantes del punto k y de la recta mn? Es conocido que estos puntos están situados sobre una línea curva, una *parábola* cuyo foco se encuentra en el punto k y como cuya directriz sirve la recta mn. Los puntos interiores a esta parábola se encuentran más

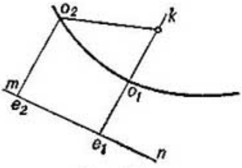


Fig. 244

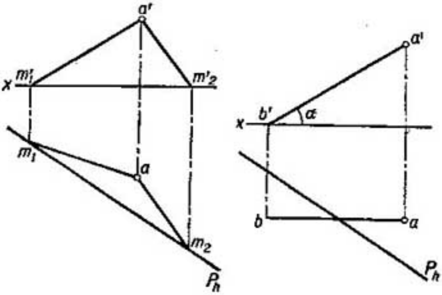


Fig. 245

cerca del foco que de la directriz y no sirven en calidad de proyección horizontal del eje de giro; los puntos que se encuentran en la propia parábola o exteriores a ésta pueden ser elegidos como tal proyección.

13. Por un punto, perteneciente a cierto plano, trazar en este plano una recta bajo un ángulo dado α al plano H.

Supongamos que el plano (designémoslo por P) está dado por dos rectas que se cortan (fig. 245, a la izquierda) y que la recta buscada ha de trazarse por el punto A de intersección de estas rectas.

Hallemos la traza horizontal del plano P. Para ello se ha trazado el eje de proyección x y se han hallado las trazas horizontales de ambas rectas que determinan al plano P. Por estas trazas pasa la traza P_h. Si la recta buscada AB fuese paralela al plano V, el ángulo entre la proyección $a'b'$ y el eje de proyección sería igual al ángulo formado por esta recta con el plano H. Por eso, por el punto a' (fig. 245, a la derecha) hay que trazar una recta bajo el ángulo dado α al eje de proyección. El punto b' sobre esta recta puede ser tomado arbitrariamente; para simplificar la construcción se ha tomado sobre el eje x. Luego, se ha construido la proyección horizontal ab que corresponde al segmento obtenido $a'b'$. La proyección ab debe ser paralela al eje de proyección, puesto que la recta se ha colocado paralelamente al plano V.

La recta construida ($a'b'$, ab) satisface una condición: ha sido trazada bajo el ángulo dado α al plano H, pero no cumple la otra: no pertenece al plano dado. Para que la recta AB pertenezca al plano P y al mismo tiempo se conserve el ángulo α invariable, hace falta girarla alrededor de un eje perpendicular al plano H. Dado que el punto A se encuentra en el plano P, hay que tomar el eje de giro que pase por el punto A (fig. 246); durante este giro, el punto B se desplazará por el plano H, y en el momento en que AB entra en el plano P, el punto B se encontrará en la traza P_h de este plano. Por esta razón, girando la recta ab alrededor del punto o (a), «llevamos» el punto b sobre la traza P_h, y con auxilio de la nueva posición hallada de la proyección horizontal hallamos la nueva posición de la proyección sobre el plano V. El problema, como se ve de la fig. 246, tiene dos respuestas, y su resolución es posible si el ángulo dado α no es mayor que el ángulo de inclinación del propio plano P al plano H. Si estos ángulos son iguales entre sí, se obtiene una sola respuesta.

14. Hallar la magnitud verdadera de un ángulo plano.

La resolución de este problema puede verse en las figs. 203 y 210, en las que la construcción se ha cumplido con ayuda del método de cambio de los planos de proyección (el triángulo se ha proyectado sobre un plano de proyección complementario, paralelo a este triángulo, con lo cual se han determinado los ángulos del mismo). A continuación se puede observar la determinación de la magnitud verdadera del ángulo plano con ayuda del método de giro en las figs. 223 y 227 y en las figs. 230 y 234, donde al abatir el plano sobre el respectivo plano de proyección se ha hallado la magnitud verdadera del ángulo entre las trazas del plano en el primer cuadrante.

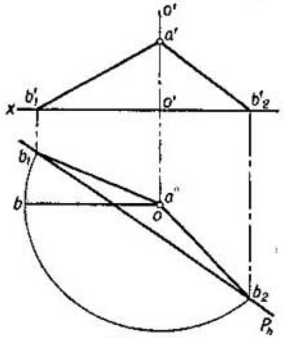


Fig. 246

15. Dividir un ángulo plano por la mitad. La cuestión sobre la construcción de la bisectriz del ángulo en el dibujo fue tratada en el § 15: se examinaron los casos de representación del ángulo, cuando el trazado de la bisectriz del ángulo de la proyección correspondía a la división del ángulo por la mitad en el espacio. Ahora se examina el caso general. La resolución se muestra en la fig. 247.

El plano, determinado por los lados del ángulo dado, debe ser situado paralelamente a uno de los planos de proyección; en este caso, el ángulo se representará en su proyección sobre este plano en verdadera magnitud y podrá ser dividido por la mitad. En la fig. 247 el plano del ángulo se ha girado hasta ocupar una posición paralela al plano H. Para obtener esta posición se ha trazado la horizontal AC. El giro del triángulo ABC alrededor de la horizontal AC se reduce al giro de uno de sus vértices, del punto B. El centro de giro se obtiene en el punto O (sus proyecciones son o', o); la magnitud verdadera del radio de giro R_B se obtiene al construir el triángulo rectángulo $o b\overline{B}$, en el que el cateto ob representa la proyección horizontal del radio de giro, y el cateto $b\overline{B}$ es igual al segmento $b'1$.

El punto b_1 se une con los puntos a y c, o sea, con las proyecciones horizontales de los puntos situados en el eje de giro y pertenecientes a los lados del ángulo. La nueva proyección horizontal, o sea, el ángulo ab_1c, igual al ángulo dado ABC, se divide por la mitad y se obtiene el punto d en la proyección horizontal de la horizontal y, luego, su correspondiente proyección d' en la recta $a'c'$. Estos puntos d y d' representan las proyecciones del punto situado sobre el eje de giro AC y, por consiguiente, «fijo». Las rectas $b'd'$ y bd son las proyecciones de la bisectriz buscada del ángulo.

16. Hallar la magnitud verdadera del ángulo entre una recta y un plano.

En las figs. 202 y 219 se muestra la determinación de la magnitud del ángulo formado por una recta de posición general con los planos de proyección.

Examinemos ahora la resolución del problema para el caso de un plano de posición general.

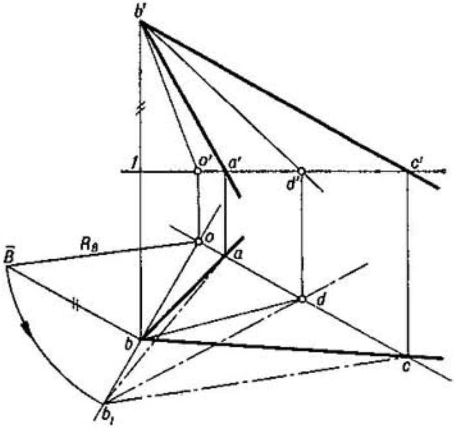


Fig. 247

Si hay que determinar solamente la magnitud del ángulo entre la recta y el plano, entonces no es obligatorio construir las proyecciones de este ángulo [1]. Efectivamente, la magnitud del ángulo formado por la recta AB con el plano P (fig. 248) puede ser hallada construyendo el ángulo β y determinando su magnitud: el ángulo buscado $\alpha=90°-\beta$. En este caso se simplifica considerablemente la resolución del problema, puesto que se hacen innecesarias todas las construcciones relacionadas con la determinación de los puntos D y a_p.

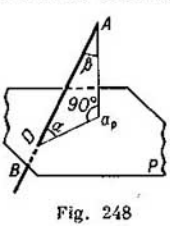


Fig. 248

La construcción se da en la fig. 249. Trazando desde el punto A de la recta AB una perpendicular al plano P, construimos las proyecciones del ángulo complementario al ángulo buscado de la recta AB con el plano P hasta 90°. Trazamos la horizontal CB y girando alrededor de ésta el plano, determinado por el ángulo CAB, lo llevamos a una posición paralela al plano H. La nueva proyección ho-

[1] Sobre la construcción de las proyecciones del ángulo entre una recta y un plano véase el § 31, pág. 108.

rizontal $\angle ca_1b = \angle CAB$. Ahora no hay más que construir el ángulo que complementa al ca_1b hasta 90°; en la fig. 249 éste es el ángulo α, igual al ángulo buscado entre la recta AB y el plano.

Si el plano está dado no por sus trazas, sino, por ejemplo, por un triángulo, entonces, para trazar la perpendicular a este plano hace falta construir en el triángulo la horizontal o la frontal (véase el § 29.)

17. Determinar la magnitud verdadera del ángulo entre dos planos.

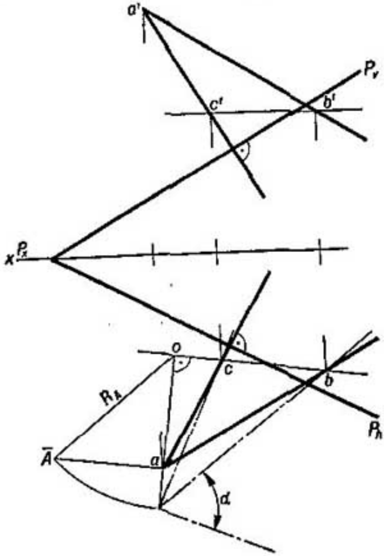


Fig. 249

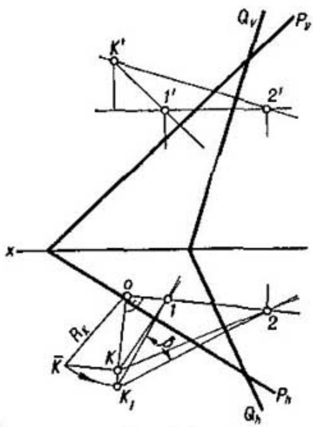


Fig. 250

En la fig. 250 se muestra la resolución de este problema sin construir las proyecciones del ángulo lineal que mide al ángulo diedro formado por los planos P y Q[1]. Tal resolución es sobre todo cómoda cuando los planos están dados por sus trazas.

Si trazamos desde cierto punto las perpendiculares a las caras del ángulo diedro, el ángulo lineal buscado será igual a la diferencia entre el ángulo de 180° y el ángulo formado por estas perpendiculares. En la fig. 250, para determinar el ángulo de dos planos P y Q se han efectuado las construcciones siguientes:

[1] Sobre la construcción de las proyecciones del ángulo lineal en un ángulo diedro véase el § 31, pág. 108.

a) desde cierto punto K se han trazado las perpendiculares: una al plano P y otra al plano Q;

b) valiéndonos del giro alrededor de la horizontal, el ángulo formado por las perpendiculares se ha colocado paralelamente al plano H.

El ángulo buscado de los planos P y Q es igual al ángulo hallado β o (si β es un ángulo obtuso) a la diferencia entre el ángulo de 180° y el ángulo hallado.

En la fig. 251 se da la resolución de este mismo problema con ayuda del método de cambio de los planos de proyección. Se ha determinado la magnitud del ángulo diedro formado por las caras de los triángulos ABC y ABD. Como arista sirve el segmento AB. Si AB es perpendicular al plano de proyección complementario, ambas caras se proyectan sobre este plano en forma de segmentos, el ángulo entre los cuales es igual al ángulo lineal del ángulo diedro dado (fig. 252).

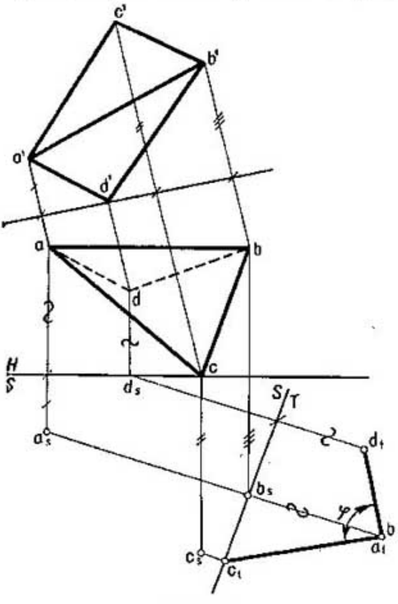


Fig. 251

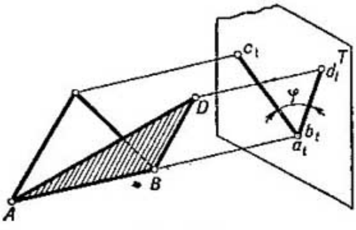


Fig. 252

La construcción en la fig. 251 se ha efectuado por el esquema siguiente: del sistema V, H se ha pasado al sistema S, H, donde $S \perp H$ y $S \| AB$, y luego, al sistema S, T, en el que $T \perp S$ y $T \perp AB$. Sobre el plano S se muestran solamente las proyecciones de los puntos A, B, C y D; las caras ABC y ABD no se han dibujado.

La determinación de la magnitud verdadera de los ángulos formados por un plano de posición general con los planos de proyección H y V con ayuda del método de cambio de los planos de proyección ya se mostró en las figs. 205, 206 y 207, y en la fig. 221, con ayuda del método de giro (el ángulo con el plano V).

18. Determinar la forma verdadera de un triángulo.

La resolución de este problema con ayuda del método de cambio de los planos de proyección se puede hallar en las figs. 203 y 210, y en las figs. 223 y 227, con auxilio del método de giro.

19. Girar un punto A alrededor de un eje MN un ángulo α en sentido de las agujas del reloj, si se mira desde M a N (fig. 253).

La construcción se ha cumplido con ayuda del método de cambio de los planos de proyección. Formando consecutivamente nuevos sistemas de planos de proyección por el esquema: del sistema V, H al sistema S, H, donde $S \perp H$ y $S \parallel MN$, y, por fin, al sistema S, T, en el que $T \perp S$ y $T \perp MN$, obtenemos una posición recíprocamente paralela entre el plano de giro del punto A y el plano de proyección T. En relación con esto, el giro del punto A se representa como el giro de la proyección a_t en un ángulo dado alrededor del centro m_t (n_t) en sentido de las agujas del reloj (puesto que según la condición del problema, para determinar el sentido de giro hay que mirar desde el punto M al punto N). Luego, obtenemos la proyección a_{1s} sobre la recta trazada por a_s perpendicularmente a $m_s n_s$ y, a continuación, las proyecciones a_1 y a_1', lo que corresponde al desplazamiento del punto A a la posición A_1.

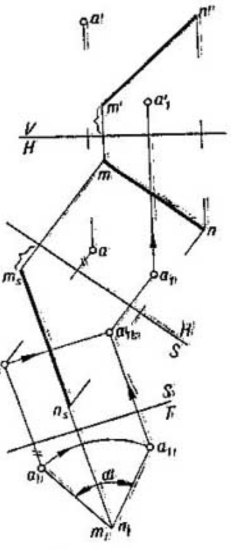


Fig. 253

20. Construir las proyecciones de una circunferencia dada por su diámetro y situada en un plano de posición general.

La resolución se da en la fig. 254. Para mayor claridad, la construcción se ha efectuado por etapas. Se ha empleado el método de giro.

Supongamos que el plano (designémoslo con P) en el que está situada la circunferencia está dado por su horizontal con las proyecciones $c'h'$ y ch y por su frontal cuyas proyecciones son $c'f'$ y cf. La circunferencia tiene como centro el punto C.

En la primera posición (fig. 254, a la izquierda) fijamos el eje x, y hallando la traza horizontal de la frontal CF (el punto M), trazamos la traza P_h paralelamente a la proyección ch de la horizontal. Sobre el plano H hallamos la posición abatida del centro C (el punto C_0) y contruimos en el plano H una circunferencia de radio dado y con centro en este punto.

Las proyecciones buscadas de la circunferencia son elipses. En la fig. 254 se muestra la construcción de los ejes de estas elipses para cada una de las proyecciones de la circunferencia.

Para la elipse que representa la proyección horizontal de la circunferencia, el eje mayor está situado sobre la proyección horizontal de la horizontal, con la particularidad (véase la fig. 254, en el centro) de que $c3 = c4 =$ al radio de la circunferencia, y el eje menor se ha obtenido con ayuda del diámetro $3_0 4_0$ paralelo a la traza P_h, y el diámetro $1_0 2_0$ perpendicular a esta misma traza; el punto 2 se ha obtenido con auxilio de la recta $3_0 k_1$, y el punto 1 en la misma proyección puede ser construido a base de que $c2 = c1$.

En la fig. 254, a la derecha, se muestra que para la proyección frontal, el eje mayor $7'8'$ se encuentra en la proyección frontal de la frontal; a partir del punto c' se han trazado los segmentos $c'7'$ y $c'8'$ iguales al radio de la circunferencia. El eje $7'8'$ corresponde al diámetro $7_0 8_0$ de la circunferencia, situado sobre la frontal MF abatida sobre el plano H.

El eje menor $5'6'$ en la proyección frontal se ha trazado perpendicularmente a $7'8'$. El punto $5'$ se ha construido con auxilio del punto 5_0 del diámetro $5_0 6_0$ de la circunferencia, trazado perpendicularmente al diámetro $7_0 8_0$ y prolongado hasta su intersección con la traza P_h en el punto $k3$; en la recta auxiliar ck_3 sobre la proyección horizontal hallamos la proyección 5 y con su ayuda construimos el punto $5'$. Trazando el segmento $c'6'$ igual al segmento $c'5'$ obtenemos la proyección del eje menor $5'6'$.

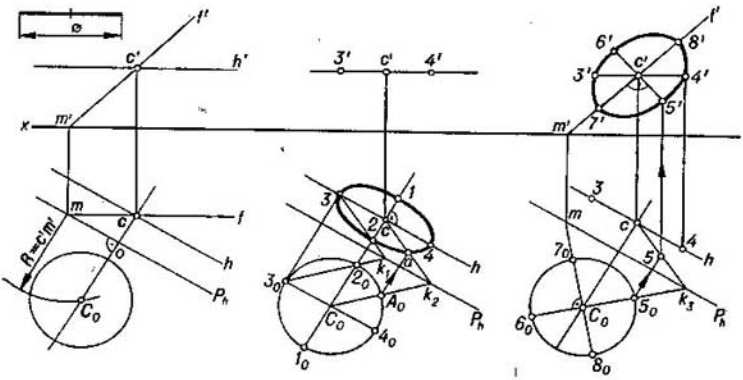


Fig. 254

Una vez construidos ambos ejes de las elipses se puede pasar a la construcción de las propias elipses por puntos. Estos puntos pueden ser obtenidos así como se muestra en la fig. 254 (en el centro) para el punto A; la construcción de las proyecciones a y a' es análoga a la construcción indicada más arriba de los puntos 5 y $5'$.

21. Construir la proyección frontal de un ángulo cuya magnitud verdadera es igual a su proyección horizontal.

En el § 15 se estableció que las proyecciones de un ángulo agudo (u obtuso) situado en un plano de posición general, pueden ser iguales al ángulo proyectado.

Supongamos (fig. 255) que el ángulo akb es la proyección horizontal del ángulo α. Trazando la recta ab, la traza horizontal del plano en el que está situado el ángulo que se examina, giramos alrededor de esta recta el punto K hasta abatirlo sobre el plano H. Si se traza una circunferencia por los puntos a, b y k, entonces, cualquier ángulo inscrito en esta circunferencia y que abarca el arco acb, es igual a α, incluyendo el ángulo aK_0b. Evidentemente, el punto K_0 es el punto K abatido sobre el plano H, o sea, el vértice del ángulo AKB. El punto K_0 se obtiene en la intersección del arco trazado por los puntos a, b y k con la traza S_h del plano de giro del punto K. El segmento oK_0 es el radio de giro del punto K. Trazando la perpendicular desde el punto k a ok e intersecando esta perpendicular con el arco de radio oK_0 obtenemos el punto $\overline{K}$ y el segmento

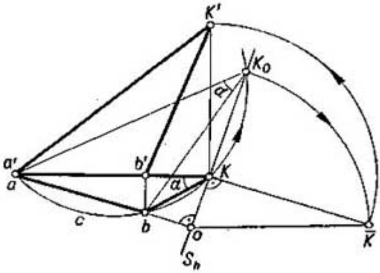


Fig. 255

$k\overline{K}$ que representa la distancia del punto K al plano H, es decir, la distancia de la proyección k' al eje x. El ángulo $a'k'b'$ representa la proyección frontal buscada del ángulo AKB, igual a su proyección horizontal akb.

En el presente parágrafo y en otros anteriores se examinaron problemas en los que había que determinar los elementos comunes de distintas figuras geométricas (por ejemplo, la construcción del punto de intersección de una recta con un plano o el primer problema del presente parágrafo).

A tales problemas se les suele llamar «de posición». A estos problemas se contraponen los problemas llamados métricos, en los cuales se determinan las longitudes de los segmentos, los ángulos, las áreas, etc.

PREGUNTAS AL § 38

1. ¿En cuál sucesión hay que tomar los ejes de giro para disponer una recta de posición general, girándola alrededor de estos ejes, perpendicularmente al plano H? al plano V?
2. ¿Cómo determinar la magnitud verdadera de un segmento de una recta de posición general y sus ángulos con los planos H y V?
3. ¿Cómo determinar la distancia de un punto a una recta de posición general?
4. ¿Cómo determinar la distancia de un punto a un plano de posición general? a un plano de perfil?
5. ¿Cómo determinar la distancia entre dos planos paralelos? entre dos rectas paralelas? entre dos rectas que se cruzan?

6. ¿Se puede con ayuda del método de giro construir las proyecciones del segmento de una recta de posición general según los ángulos de inclinación de esta recta a los planos *H* y *V*? Si esto es posible, ¿cómo hacerlo?

7. ¿Qué representa la parábola construida en la fig. 244?

8. ¿Cómo hallar la magnitud verdadera de un ángulo plano?

9. ¿Cómo construir en el dibujo la bisectriz de un ángulo?

10. ¿Cómo hallar la magnitud verdadera del ángulo de una recta con un plano?

11. ¿Cómo hallar la magnitud verdadera del ángulo formado por dos planos?

12. ¿Cómo construir las proyecciones de una circunferencia situada en un plano de posición general?

VI

CAPÍTULO

REPRESENTACIÓN DE POLIEDROS

§ 39. CONSTRUCCIÓN DE LAS PROYECCIONES DE LOS POLIEDROS

La construcción de las proyecciones de los poliedros sobre cierto plano se reduce a la construcción de las proyecciones de puntos. Por ejemplo, al proyectar la pirámide $SABC$ sobre el plano V (fig. 256, a la izquierda), construimos las proyecciones de los vértices S, A, B y C y, como resultado, las proyecciones de la base ABC, de las caras SAB, SBC y SAC, y de las aristas SA, SB y otras.

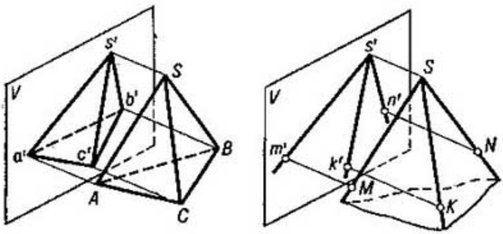


Fig. 256

De manera análoga, al proyectar un ángulo triédrico [1] con vértice S (fig. 256, a la derecha), además del vértice S, tomamos en cada arista del ángulo un punto (K, M, N) y los proyectamos sobre el plano V; como resultado obtenemos las proyecciones de las aristas y las caras (los ángulos planos) del ángulo triédrico y, en total, del propio ángulo.

[1] En el caso dado convexo, es decir, tal, que todo está situado a un mismo lado del plano de cada una de sus caras, prolongado ilimitadamente.

En la fig. 257 está representado un cuerpo poliédrico $ACBB_1D\ldots$ (es decir, una parte del espacio delimitada por todos lados por figuras planas, por polígonos) y su proyección sobre el plano H, la figura $acf_1e_1d_1def$. Todo punto situado dentro del contorno de esta figura (es decir, de la línea que la delimita) es la proyección de dos puntos, por lo menos, de la superficie de este cuerpo. Por ejemplo, el punto con doble denotación m y n sirve de proyección de los puntos M y N situados en una recta proyectante común para ellos.

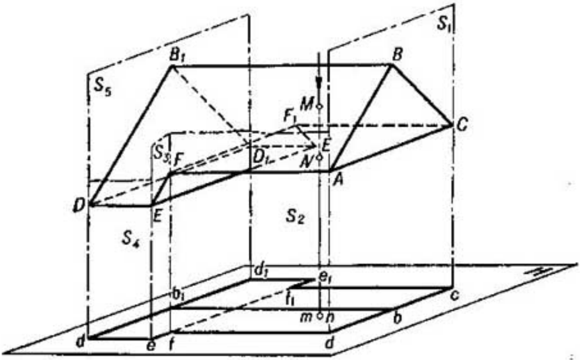


Fig. 257

El punto situado en el contorno de la proyección, es la proyección de un punto (por ejemplo, a es la proyección del punto A), o de unos cuantos y, a veces, de todo un conjunto de puntos (por ejemplo, b es la proyección no sólo del punto B, sino que también de todo un conjunto de puntos de la cara ABC, situados sobre la recta proyectante Bb).

Las rectas proyectantes que pasan por todos los puntos del contorno de la proyección, forman en conjunto una *superficie proyectante*, dentro de la cual, en contacto con ésta, se encuentra el cuerpo dado. Para el cuerpo representado en la fig. 257, la superficie proyectante consta de los planos S_1, S_2, S_3, etc. La línea de contacto de la superficie proyectante con el cuerpo se llama *contorno del cuerpo* respecto al plano de proyección elegido. En la fig. 257 como tal contorno sirve la línea quebrada $ACF_1E_1D_1DEFA$ [1].

[1] Podríamos considerar que, en el caso dado, también todos los puntos de los segmentos AB, BC, DB_1, B_1D_1, EF y E_1F_1 e incluso las áreas de los triángulos ABC y DB_1D_1 y las partes del trapecio EFF_1E_1 pertenecen al contorno del cuerpo, puesto que los planos proyectantes S_1, S_3 y S_5 pasan respectivamente por estas figuras.

En la proyección paralela, la superficie proyectante, como fue indicado en el § 1, es una superficie cilíndrica. Si el contorno de un cuerpo respecto al plano de proyección contiene segmentos rectilíneos, entonces la superficie proyectante para cada uno de estos sectores se transforma en plana.

La recta bb_1 trazada en la proyección es la proyección de la arista BB_1, visible con respecto del plano H. Todas las aristas visibles del cuerpo deben ser trazadas obligatoriamente en la proyección de este cuerpo.

La proyección del segmento FF_1 se obtiene dentro del contorno de la proyección; se muestra con líneas de trazos, puesto que, según las condiciones de visibilidad, los puntos del segmento FF_1 al ser proyectados sobre el plano H están ocultos.

La construcción de la proyección de la *superficie de una cara* también se reduce a la construcción de las proyecciones de ciertos puntos y rectas de esta superficie. La proyección de una superficie que limita un cuerpo cualquiera, tiene el mismo contorno que la proyección de este cuerpo. En el caso de representación de una superficie que se extiende ilimitadamente se separa con líneas cierta parte de esta, con lo cual se establece el contorno aparente con respecto del plano de proyección.

§ 40. DIBUJOS DE PRISMAS Y PIRAMIDES

Supongamos que conocemos la forma y la posición de una figura obtenida intersecando todas las caras laterales de un prisma con un plano, y la dirección de las aristas del prisma (fig. 258). De este modo se define una superficie prismática. Cortando una superficie prismática con dos planos paralelos entre sí obtenemos las bases del prisma (fig. 258). Pueden ser dadas una de las bases del prisma y su altura o la longitud de la arista lateral, con lo cual queda determinado el prisma.

Al elegir la posición del prisma para su representación, es conveniente disponer sus bases paralelamente al plano de proyección.

¿Cuáles índices permiten establecer que en el dibujo dado está representado precisamente un prisma (o, en un caso particular, un paralelepípedo)? La presencia en el dibujo de solamente segmentos rectilíneos [1], con la particularidad de que éstos sirven de proyecciones de las aristas o de las caras, la presencia de paralelogramos o rectángulos como proyecciones de las caras laterales, y de cualquier polígono como proyección de la base.

Algunos ejemplos se dan en las figs. 258—260; aquí en el sistema V, H están representados un prisma triangular recto, un prisma cuadrangular oblicuo y un cubo (que es precisamente un cubo lo atesti-

[1] Condición común para todos los poliedros.

guan la igualdad de las aristas y el hecho de que todas las caras son rectangulares). Pero para el cuerpo representado en la fig. 261, a pesar de que existen algunos de los índices indicados más arriba,

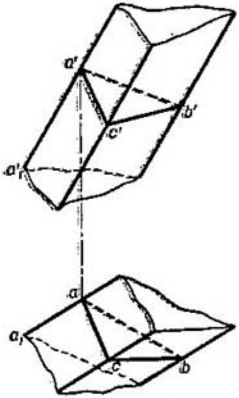


Fig. 258

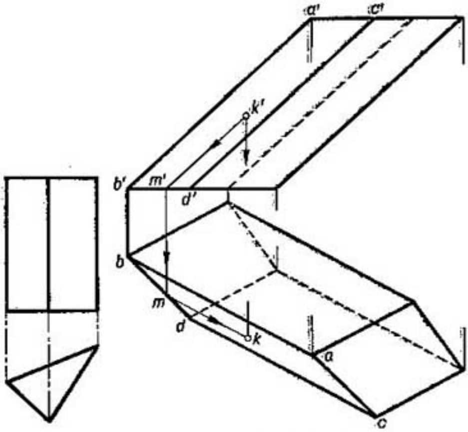


Fig. 259

sería erróneo afirmar que es obligatoriamente un prisma o un paralelepípedo. En la fig. 261, a la derecha, se muestran todas las variantes posibles de solución de este problema. Evidentemente, en este caso, para que este problema estuviese claro deberíamos disponer de la proyección de perfil o de la denotación de los vértices.

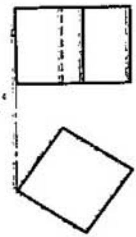


Fig. 260

En la fig. 262 está representado un prisma cuadrangular irregular (sus bases son trapecios). En el dibujo superior de la fig. 263 se muestra la construcción de la proyección de perfil de este prisma empleando una recta auxiliar. En la misma figura (el dibujo inferior) se muestra la representación del prisma en los planos de coordenadas coincidentes con sus caras. En este caso, la tercera proyección se ha construido por las coordenadas de los vértices.

Para fijar la superficie de una pirámide hace falta conocer la figura obtenida como resultado del corte de todas las caras laterales de la pirámide por un plano y el punto de su intersección.

Habitualmente la pirámide se expresa en el dibujo con las proyecciones de su base y su vértice, y la pirámide truncada, con las proyecciones de ambas bases.

Al elegir la posición de la pirámide para su representación, es conveniente disponer su base paralelamente al plano de proyección. En la fig. 264 viene representada en el sistema V, H una pirámide triangular irregular cuya base es paralela al plano H [1]. El dibujo

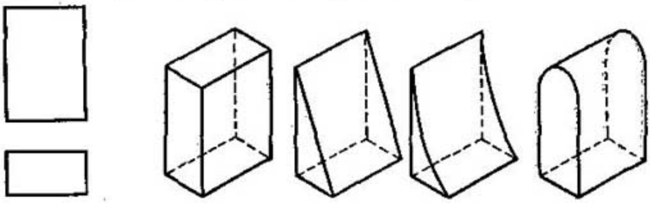


Fig. 261

da una representación clara de la forma de la base y de las caras laterales. Para la pirámide, en general, son suficientes dos proyecciones con la condición de que en una de ellas se muestra la forma de la

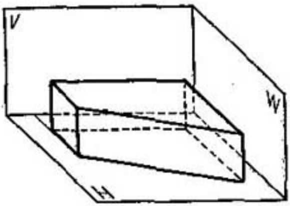


Fig. 262

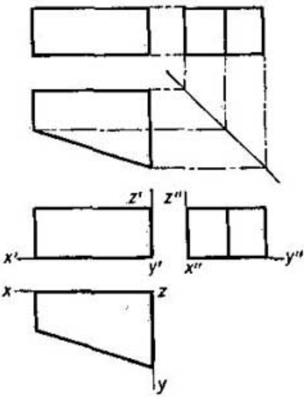


Fig. 263

base. Pero, para el cuerpo representado en la fig. 265, a pesar de muchos índices que nos recuerdan una pirámide, sería erróneo afirmar que es obligatoriamente una pirámide. Aquí, en el sistema V, H,

[1] A la pirámide triangular se la llama también tetraedro (de la palabra griega tetra, que significa cuatro, y hedra, lado). La palabra «tetraedro» se emplea como denominación general de las pirámides triangulares. Pero, se llama también tetraedro a un cuadrilátero regular.

no está clara la línea situada en el plano de perfil. Esta línea puede ser curva, y, por consiguiente, las caras en las que esta línea figura, no serán figuras planas (fig. 265, a la derecha). Evidentemente, el problema de si es el cuerpo dado una pirámide o no, podría resolverse con ayuda de la proyección de perfil.

En la fig. 266 se muestra cómo, por ejemplo, pueden ser tomados los ejes de coordenadas para la pirámide dada. El eje z se ha dirigido según la altura de la pirámide, el plano de coordenadas xOy se ha hecho coincidir con la base de la pirámide. Para los ejes de coordenadas se han dado sus proyecciones. Con tal disposición de los ejes, el vértice S queda determinado con una sola coordenada, con la Z-coordenada.

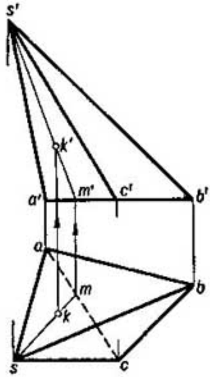


Fig. 264

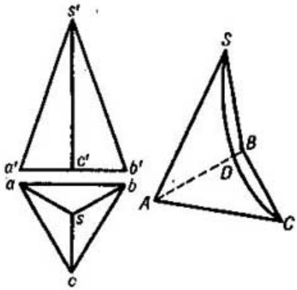


Fig. 265

Si hay que construir en ambas proyecciones del poliedro un punto perteneciente a una de sus caras, se debe «enlazar» este punto con la cara correspondiente mediante una recta cualquiera.

En la fig. 259 el punto K ha sido construido sobre la cara $ABDC$ con auxilio de la recta KM. Supongamos, por ejemplo, que por la proyección frontal dada k' del punto K se exige hallar su proyección horizontal, con la particularidad de que el punto K debe estar situado en la cara $ABCD$. En este caso, primeramente se construye la proyección frontal del segmento de la recta auxiliar ($k'm'$) y luego la proyección horizontal de este segmento y sobre ésta se determina la proyección horizontal del punto K. Dado que el segmento $k'm' \| a'b'$, entonces, también $km \| ab$.

En la fig. 264 se muestra la construcción del punto K sobre la cara SAC con ayuda de una recta trazada por el vértice de la pirá-

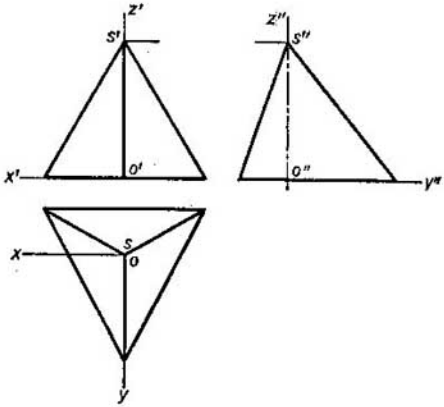


Fig. 266

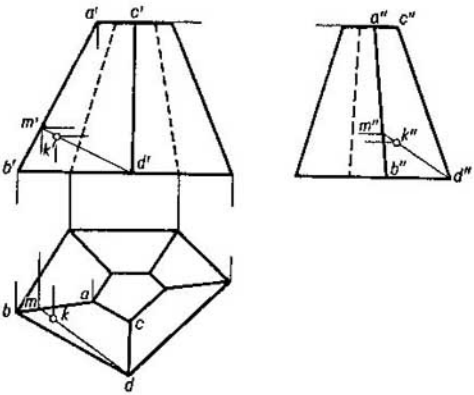


Fig. 267

mide. Si viene dada la proyección horizontal k del punto K y hay que hallar la proyección k', entonces, se debe construir primeramente el segmento sm. Luego hallar el punto m' con auxilio del punto m, obtener el segmento $s'm'$ y sobre éste, la proyección buscada k'.

En la fig. 267 se da una pirámide truncada pentagonal y se muestra la construcción del punto K sobre la cara $ABDC$ con ayuda de la proyección dada k y el segmento de la recta DM.

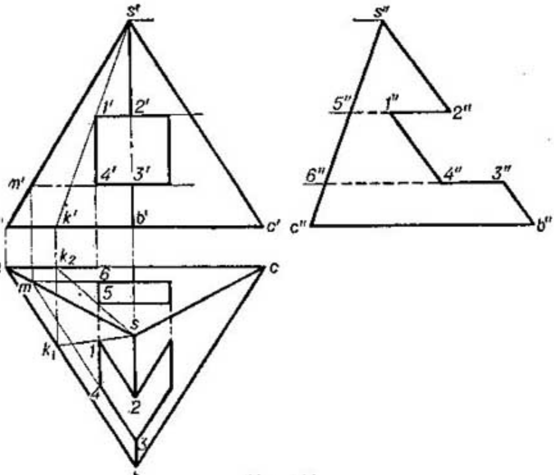


Fig. 268

La elección de la recta auxiliar para la construcción de un punto sobre una cara es, en general, arbitraria; hay que hacer todo lo posible para que las construcciones sean lo más simples posible.

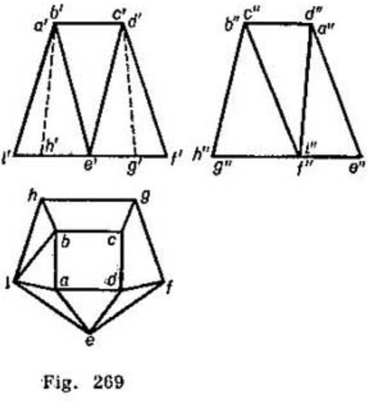


Fig. 269

En la fig. 268 viene representado un cuerpo en forma de pirámide triangular regular con un orificio prismático en él. La construcción se ha efectuado con ayuda de la proyección frontal del plano dado. En el dibujo se muestra la construcción de los puntos *1* y *5* (sobre la proyección horizontal) con auxilio de rectas trazadas por el vértice S. Los puntos *3*, *4* y *6* (sobre la proyección horizontal) se han hallado con auxilio de rectas que pasan por las caras SAB y SAC paralelamente al plano H; las proyecciones horizontales de estas rectas pasan por el punto m paralelamente a ab y a ac. El punto *2* puede ser hallado, en este caso, o bien análogamente al punto 3, o bien con ayuda de las proyecciones sobre el plano W.

En la fig. 269 se expone un ejemplo de un poliedro llamado prismatoide. En tal poliedro, las bases paralelas representan polígonos con un número arbitrario de lados, y sus caras, triángulos o trapecios (en la fig. 269, por ejemplo, el triángulo ADE y el trapecio $BHGC$).

§ 41. SISTEMA DE DISPOSICIÓN DE LAS REPRESENTACIONES EN LOS DIBUJOS TÉCNICOS

Como base de la construcción de los dibujos técnicos se ha tomado la proyección rectangular; ésta garantiza la representación en el dibujo de la forma y las dimensiones de los objetos proyectados sin desfiguración.

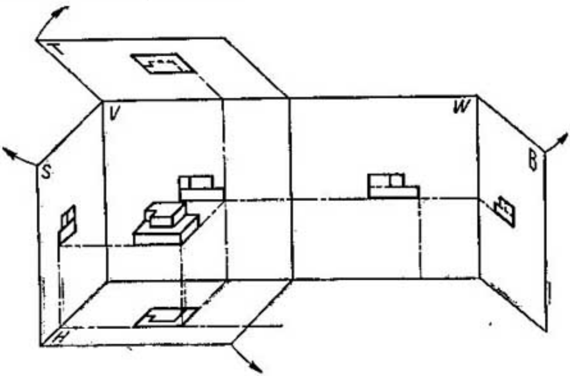


Fig. 270

Las proyecciones dispuestas normalmente, en su conjunto, garantizan la representación de la forma del objeto y su disposición en el espacio. Cada proyección representa una imagen (fig. 270) correspondiente a una dirección determinada de la vista.

En los dibujos técnicos se emplean distintas, por su contenido, representaciones. Estas se dividen en *vistas*, *cortes* y *secciones*. Aquí examinaremos solamente las vistas.

La *vista* se define como la *representación de la parte de la superficie del objeto vista por el observador*. Por consiguiente, en la vista se refleja no todo el objeto dado, no todas sus caras, aristas, etc., sino que solamente las vistas por el observador. Mientras tanto, cada proyección refleja completamente el objeto que se representa. Por consiguiente, entra la proyección y la vista existe cierta diferencia: en la proyección se representa toda la superficie del objeto, mientras que en la vista, solamente la parte de esta superficie vista por el observador. Pero, como *en las vistas se admite indicar las partes ocultas de la superficie del objeto con líneas de trazos*, la diferencia entre la proyección y la vista desaparece. Por ejemplo, en las figs. 268 y 269 cada vista coincide con la proyección.

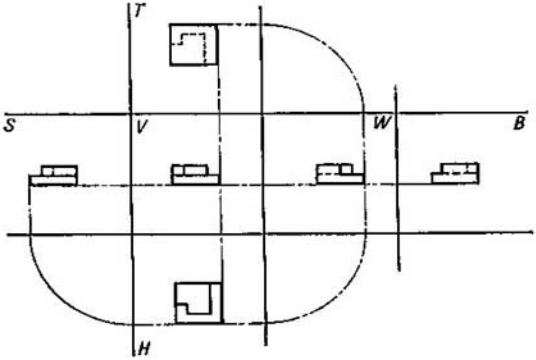


Fig. 271

En el § 5 (pág. 20) se dijo que en la práctica de ejecución de los dibujos de las máquinas y sus elementos se recurre a otros planos de proyección, además de los planos V, H y W. En la fig. 271 se muestran seis caras de un cubo, aceptadas como *planos fundamentales de proyección* y abatidas sobre el plano del dibujo como se desprende de la fig. 270. En el espacio $S \parallel W$, $T \parallel H$ y $B \parallel V$. Con relación a cada uno de los planos B, T y S, el observador debe ocupar la misma posición que ocupa respecto de los planos V, H y W, es decir, una posición tal, que el objeto se encuentre entre el observador y el plano de proyección correspondiente.

Como resultado se obtiene la disposición de las *vistas principales* indicada en la fig. 271. Estas vistas se llaman: *vista anterior* (sobre el plano V), *vista superior* (sobre el H), *vista por la izquierda* (sobre el W), *vista por la derecha* (sobre el S), *vista inferior* (sobre el T) y *vista posterior* (sobre el plano B). A la *vista anterior* se la llama también *vista principal*, puesto que la representación sobre el plano frontal de proyección se considera en los dibujos como principal.

La disposición recíproca de las vistas obtenida corresponde al sistema llamado *sistema del primer ángulo espacial* (primer diedro) o *europeo*. Este sistema se usa en la Unión Soviética al ejecutar dibujos en la construcción de maquinaria y en la construcción de aparatos de precisión, y en casi todos los países de Europa.

Además de este sistema existe el sistema del tercer ángulo espacial (tercer diedro), conocido también bajo el nombre de sistema norteamericano (se usa en E.E.U.U., Inglaterra, Países Bajos, Canadá y algunos otros países). En este sistema el plano de proyección se supone dispuesto entre el observador y el objeto. En la fig.

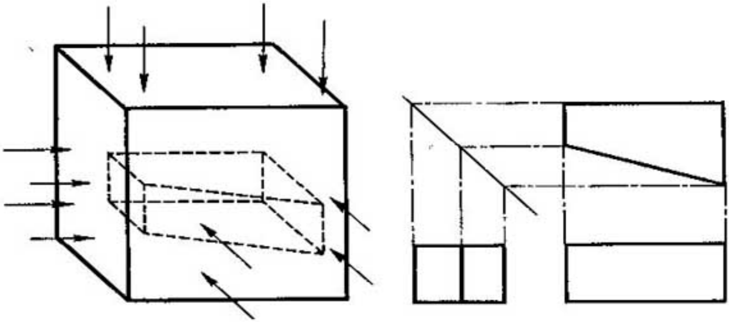


Fig. 272

272 (a la izquierda) el prisma está dispuesto tras el plano frontal y bajo el horizontal; se muestra también el plano de perfil de proyección (es decir, el prisma está situado en el séptimo octante). Con flechas se indica la dirección de la vista del observador; éste mira al objeto como si fuera a través de planos «de vidrio». La disposición de las vistas obtenida (en el caso dado, de la v i s t a a n t e r i o r, de la v i s t a s u p e r i o r y de la v i s t a p o r l a i z q u i e r d a) se muestra en la fig. 272, a la derecha: en la base del dibujo se encuentra la vista anterior (v i s t a p r i n c i p a l), así como en la fig. 271, pero la v i s t a s u p e r i o r se encuentra por encima de la v i s t a p r i n c i p a l y la v i s t a p o r l a i z q u i e r d a, no a la derecha (véase la fig. 268), sino que a la izquierda de la v i s t a p r i n c i p a l.

Ahora bien, al ejecutal los dibujos técnicos se emplean dos sistemas, que desde el punto de vista de la Geometría Descriptiva pueden ser relacionados con la disposición del objeto o bien en el primer cuadrante del espacio, o bien en el tercero. En la URSS, como ya se dijo más arriba, se ha aceptado el primer sistema, el sistema del primer ángulo espacial.

§ 42. INTERSECCIÓN DE LOS PRISMAS Y LAS PIRÁMIDES POR UN PLANO Y UNA RECTA

Para construir la figura que se obtiene al intersecar un prisma y una pirámide con un plano, hay que hallar los puntos en los cuales las aristas del prisma o de la pirámide cortan al plano dado, o hallar los segmentos de las rectas según las cuales el plano dado corta las caras del prisma o de la pirámide. En el primer caso, la construcción se reduce al problema de intersección de una recta con un plano, en el segundo caso, al problema de intersección de dos planos entre sí.

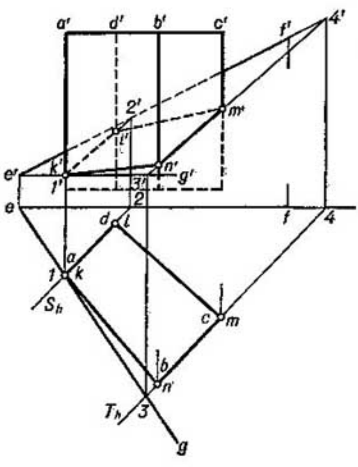


Fig. 273

En los casos cuando el plano secante no es paralelo a ninguno de los planos de proyección, la figura del corte no se proyecta en verdadera magnitud. Por esta razón, si hay que determinar la forma verdadera de la figura de la sección [1], entonces, es necesario emplear uno de los procedimientos que permiten hallar la longitud de un segmento, la magnitud de un ángulo, etc. (véase el cap. V).

En la fig. 273 se muestra la intersección de un prisma cuadrangular recto por un plano dado por las rectas que se cortan EF y EG. Designemos este plano con la letra P.

En la intersección se obtiene un cuadrilátero cuyos vértices representan los puntos de intersección de las aristas del prisma con el plano P. Dado que en este caso el prisma es recto y su base es paralela al plano H, la proyección horizontal de la figura de la sección se determina enseguida, sin construcciones cualesquiera: ella se superpone a la proyección *abcd*. Evidentemente, se pueden hallar los puntos K y L en los que el plano P corta las aristas del prisma que pasan por los puntos A y D, con ayuda de un solo plano S en el que se encuentra la cara del prisma $S \times P = 1-2$, de donde obtenemos los puntos k' y l'. Trazando el plano T, obtenemos $T \times P = 3-4$ y los puntos m y n.

---

[1] Emplearemos la expresión «forma verdadera de la sección» en el caso cuando la figura se da sin desfiguración.

Así pues, el procedimiento de construcción indicado en la fig. 273 se reduce al empleo de los planos auxiliares S y T, que pasan por las caras correspondientes del prisma, y a la construcción de los segmentos KL y MN según los cuales el plano P corta a estas caras.

En la proyección frontal, la línea de intersección consta de las partes vista y oculta; la parte vista de la línea de intersección está situada en las caras vistas por el observador.

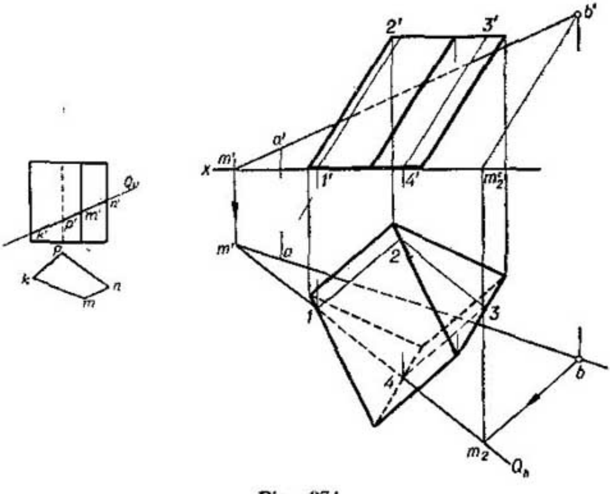


Fig. 274

En la fig. 273, la parte inferior del prisma que se encuentra por debajo del plano P, se representa como oculta. La línea de intersección está solamente dibujada en las caras del prisma.

Si el plano secante es perpendicular a uno de los planos de proyección (fig. 274, a la izquierda), entonces las proyecciones de la figura sección se obtienen sin ninguna clase de construcciones complementarias: la proyección frontal $k'p'm'n'$ se sitúa sobre la traza Q_v, la proyección horizontal $kpnm$ coincide con la proyección del prisma.

En la fig. 274, a la derecha, se muestra la intersección de un prisma por un plano Q dado por las rectas que se cortan AB y BM_2, de las cuales BM_2 es paralela a las aristas del prisma. Por consiguiente, en este caso, el plano secante es de posición general, paralelo a las aristas del prisma. Este plano corta al prisma según el paralelogramo **1—2—3—4**, cuyos lados **1—2** y **3—4** son paralelos a las aristas del prisma. Para construir estos lados hay que construir la traza del plano Q sobre el plano de la base del prisma y cortar con ella dicha base según la recta *1—4*.

En la fig 275 se muestra la intersección de una pirámide por un plano de posición general P expresado por sus trazas. El problema se reduce a hallar los puntos de intersección de las aristas SA, SB y SC con el plano P, o sea, al problema de intersección de una recta con un plano (véase el § 25). Examinemos la determinación del

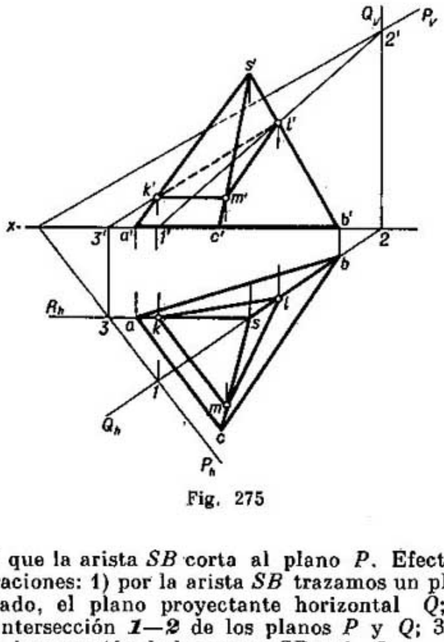


Fig. 275

punto L en el que la arista SB corta al plano P. Efectuamos las siguientes operaciones: 1) por la arista SB trazamos un plano auxiliar, en el caso dado, el plano proyectante horizontal Q; 2) hallamos la recta de intersección *1—2* de los planos P y Q; 3) hallamos el punto L en la intersección de las rectas SB y *1—2*.

Luego, puesto que en este caso la arista SA es paralela al plano V, trazamos por ella el plano frontal auxiliar R. Éste último corta al plano P según su frontal con el punto inicial *3*; en la intersección de esta frontal con la arista SA obtenemos el punto K.

Ahora prestemos atención en otra particularidad del ejemplo dado: la proyección ac es paralela a la traza P_h. Este es el caso cuando las trazas horizontales de dos planos son paralelas entre sí ($P_h \| \| ac$, pero ac es una parte de la traza horizontal del plano de la cara

SAC) y la línea de intersección de tales planos es su horizontal común. Por esta razón, podemos trazar por el punto hallado K una recta paralela a la arista AC (o a P_h), y así hallar el punto M.

Si no existieran estas particularidades se debería proceder análogamente a la construcción del punto L.

El dibujo de la fig. 275 se ha ejecutado de acuerdo con la condición de que el plano P es transparente y que lo principal es dibujar en las caras las líneas de división de la pirámide en dos partes.

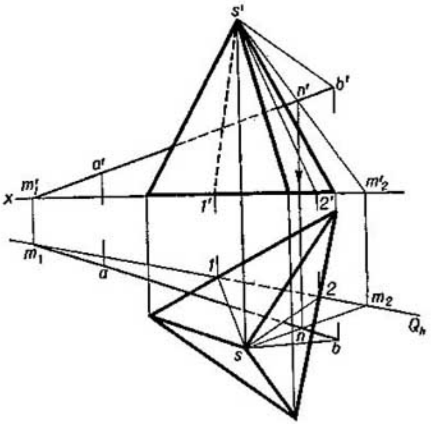


Fig. 276

Supongamos (fig. 276) que una pirámide se ha cortado con un plano P dado por las rectas que se cortan AB y SB, con la particularidad de que la SB pasa por el vértice de la pirámide. Por consiguiente, el plano P corta a la pirámide según un triángulo, uno de cuyos vértices se encuentra en el punto S. Para hallar los otros dos vértices del triángulo (los puntos *1* y *2*) es necesario construir la traza del plano P sobre el plano de la base de la pirámide. Lo demás está claro del dibujo.

Al intersecar la superficie de un prisma o de una pirámide con una *recta* se obtienen dos puntos. Estos puntos suelen llamarse *punto de entrada* y *punto de salida*. Para hallar estos puntos hay que trazar por la recta dada un plano auxiliar y hallar la línea de su intersección con las caras; estas líneas en las caras resultan situadas en un mismo plano con la recta dada y en su intersección dan los puntos en los que la recta dada corta a la superficie.

Pueden darse los casos cuando no hay necesidad de tales construcciones. Un ejemplo se da en la fig. 277: la posición de las proyecciones k y m es evidente, puesto que las caras laterales del prisma son perpendiculares al plano H. Con auxilio de los puntos k y m se han hallado los puntos k' y m'.

En la fig. 278 se muestra la construcción de los puntos de intersección de una recta con la superficie de una pirámide. Por la recta AB se ha trazado el plano proyectante frontal auxiliar Q. La proyección frontal de la figura sección producida por este plano en la pirámide se confunde con la proyección frontal del plano; la proyección horizontal de la sección se ha hallado con ayuda de la construcción. Los puntos de intersección de la proyección horizontal de

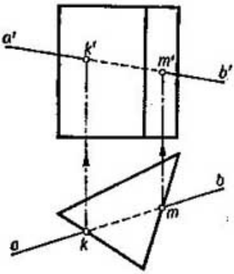


Fig. 277

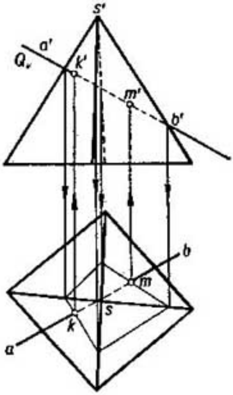


Fig. 278

la recta AB con la proyección horizontal de la figura sección representan las proyecciones horizontales de los puntos buscados; con ayuda de las proyecciones horizontales halladas (los puntos k y m) se han construido las proyecciones frontales (k' y m') de los puntos de intersección.

Uno puede darse una idea de la construcción de los puntos de intersección de una recta con la superficie de un prisma de la manera siguiente. Supongamos que en vez de la proyección rectangular empleamos la o b l i c u á n g u l a [1]. Proyectemos el prisma y la recta AB (fig. 279) sobre el plano H en dirección paralela a las aristas del

[1] Véase la pág. 14.

prisma dado. El prisma tendrá como proyección el triángulo $c_0d_0e_0$ que coincide con la proyección horizontal de la base inferior del prisma, y la recta AB se proyectará en forma de la recta a_0b_0 que cortará a los lados del triángulo $c_0d_0e_0$ en los puntos *2* y *3*. Mediante la proyección inversa obtendremos las proyecciones k_1 y k_2, y con auxilio de éstas, las k_1' y k_2'.

Así pues, hemos examinado la intersección de un prisma y una pirámide por un plano y una recta. Las construcciones se reducen a la resolución de problemas de la intersección de planos entre si y de una recta con un plano, expuestos en los §§ 24—26. Estos problemas tienen gran importancia y se encuentran en distintos casos. Estos sirven de base para la construcción de las líneas de intersección de superficies poliédricas, examinada en el siguiente parágrafo.

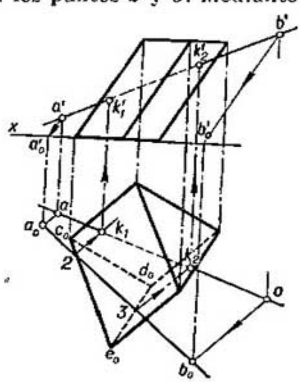


Fig. 279

PREGUNTAS A LOS §§ 39—42

1. ¿A qué se le llama contorno del cuerpo respecto al plano de proyección?
2. ¿Con qué se representa una superficie prismática?
3. ¿Cuáles índices permiten establecer que en el dibujo dado está representado un prisma (o un paralelepípedo)?
4. ¿Con qué se expresa la superficie de una pirámide?
5. ¿Qué se comprende bajo el nombre de «tetraedro»?
6. ¿Con cuál condición son suficientes dos proyecciones para la representación de una pirámide?
7. ¿A qué se le llama prismatoide?
8. ¿A qué se le llama *vista* en los dibujos técnicos?
9. ¿En qué consiste la diferencia entre *vista* y *proyección* y con cuál condición esta diferencia desaparece?
10. ¿Cuáles sistemas de disposición de las representaciones se emplean en los dibujos técnicos?
11. ¿Cómo se construye la figura obtenida al intersecar un prisma o una pirámide con un plano?
12. ¿Cómo se construyen los puntos de intersección de un prisma o una pirámide con una recta (los puntos de entrada y salida)?
13. ¿Se puede establecer la comunidad de los métodos de tal construcción y de la construcción de los puntos de intersección de un plano con una recta?
14. ¿Cómo se interseca un prisma por un plano paralelo a las aristas laterales del prisma?
15. ¿Cómo se corta una pirámide con un plano que pasa por el vértice de la pirámide?
16. ¿Cómo se puede emplear la proyección oblicuángula para hallar los puntos de intersección de un prisma por una recta?

§ 43. INTERSECCION DE UNA SUPERFICIE POLIEDRICA POR OTRA

La construcción de las líneas de intersección de las superficies poliédricas se puede efectuar por dos procedimientos, combinándolos o eligiendo el que, según los datos del problema, ofrece construcciones más simples. Estos procedimientos son los siguientes:

1) *Se determinan los puntos en los que las aristas de una de las superficies cortan a las caras de la otra y las aristas de la segunda cortan a las caras de la primera*[1]. Por los puntos hallados, en una sucesión determinada, se traza una línea quebrada que representa la línea de intersección de las superficies dadas. En este caso, se pueden unir con rectas solamente las proyecciones de aquellos puntos, obtenidos como resultado de la construcción, que pertenecen a una misma cara.

2) *Se determinan los segmentos de las rectas según las cuales las caras de una superficie cortan a las caras de la otra*[2]; estos segmentos son los eslabones de la quebrada obtenida al intersecarse dos superficies poliédricas.

Si la proyección de la arista de una superficie no corta por lo menos a una de las proyecciones de la cara de la otra, esta arista no corta a esta cara. No obstante, la intersección de las proyecciones de la arista y la cara no significa todavía que dadas arista y cara se cortan en el espacio.

En algunos de los ejemplos expuestos a continuación se han empleado los esquemas generales de construcción de los puntos de intersección, expuestos más arriba, y en otros se han utilizado las particularidades singulares para simplificar las construcciones.

El ejemplo expuesto en la fig. 268 se puede examinar como un caso de intersección de una pirámide con un prisma. Los puntos *2* y *3* se obtienen al intersecar las caras superior e inferior del prisma con la arista de la pirámide, y las rectas que pasan por los puntos *5* y *6* se obtienen como resultado de la intersección de las mismas caras del prisma con la cara SAC de la pirámide.

En la fig. 280 se muestra la intersección de la superficie de un prisma triangular por una pirámide triangular; la pirámide se ha colocado en el orificio, correspondiente por su forma, del prisma.

La construcción se funda en la determinación de los puntos de intersección de las aristas de uno de los poliedros con las caras del otro. En la fig. 281 se muestra la construcción de los puntos A_1 y A_2 en los que la arista SA de la pirámide corta a las caras DEE_1D_1 y EFF_1E_1 del prisma. Por la arista SA se ha trazado el plano Q (proyectante horizontal) que en la proyección horizontal corta a las aristas del prisma en los puntos *1*, *2* y *3*; con ayuda de estas proyecciones han

---

[1] Problema de intersección de una recta con un plano.
[2] Problema de intersección de dos planos.

sido halladas las proyecciones frontales de los puntos de intersección del plano Q con las aristas del prisma $1'$, $2'$ y $3'$. Luego se han señalado los puntos a'_1 y a'_2 en los cuales $a's'$ se interseca con el contorno $1'2'3'$. Los puntos a'_1 y a'_2 son las proyecciones frontales de los puntos de encuentro de la arista SA con las caras del prisma; las proyecciones horizontales de estos puntos, o sea, los puntos a_1 y a_2, se encuentran sobre la proyección horizontal de la arista SA. Procediendo del mismo modo con las aristas SB y SC, hallamos los puntos B_1, B_2, C_1 y C_2 (fig. 280).

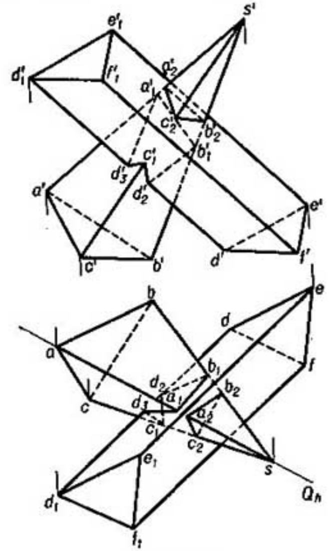


Fig. 280

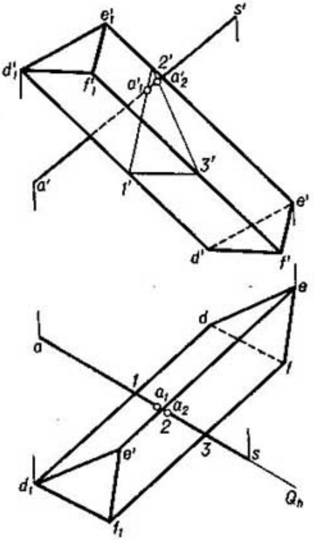


Fig. 281

A continuación hallamos la intersección de las aristas del prisma con las caras de la pirámide, trazando también planos proyectantes horizontales auxiliares (claro que en este caso, lo mismo que en el anterior, se pueden emplear los planos proyectantes frontales). Analizando la arista DD_1 señalamos los puntos de encuentro D_2 y D_3. La arista EE_1 no se corta con las caras de la pirámide, lo mismo que la arista FF_1.

Para no cometer errores en el caso de gran cantidad de construcciones auxiliares, los puntos de encuentro hallados se pueden escribir como se da en la tabla de la pág 168.

En este ejemplo se obtienen dos poliedros independientes. En la tabla, el orden de formación de los poliedros se señala con las cifras *1*, *2*, etc., para uno de ellos, y con las cifras I, II, etc., para el otro. Esto significa que el punto a'_1 (*1*) debe unirse con el punto b'_1 (*2*), el punto b'_1, con el punto d'_2 (*3*), el d'_2, con el c'_1 (*4*), el c'_1, con el d'_3 (*5*) y, por fin, el d'_3, con el a'_1 (*6*).

Arista que se investiga		Cara con la que se interseca la arista	Punto de intersección de la arista con la cara	Lugar que ocupa el punto dado en el orden general de unión de los puntos
Pirámide	SA	DEE_1D_1	A_1	*1,6*
		EFF_1E_1	A_2	I
	SB	DEE_1D_1	B_1	*2*
		EFF_1E_1	B_2	II
	SC	DFF_1D_1	C_1	*4*
		EFF_1E_1	C_2	III
Prisma	DD_1	SCB	D_2	*3*
		SAC	D_3	*5*
	EE_1	no existe	—	—
	FF_1	ídem	—	—

En las construcciones expuestas en las figs. 280 y 281 se utilizaron como auxiliares planos proyectantes horizontales. Y, aunque el empleo precisamente de los planos proyectantes horizontales o frontales como planos auxiliares al determinar los puntos de intersección de una recta con un plano o de dos planos entre sí (y, por consiguiente, también en los casos de intersección de superficies poliédricas) es cómodo y es el procedimiento más común, pueden darse los casos

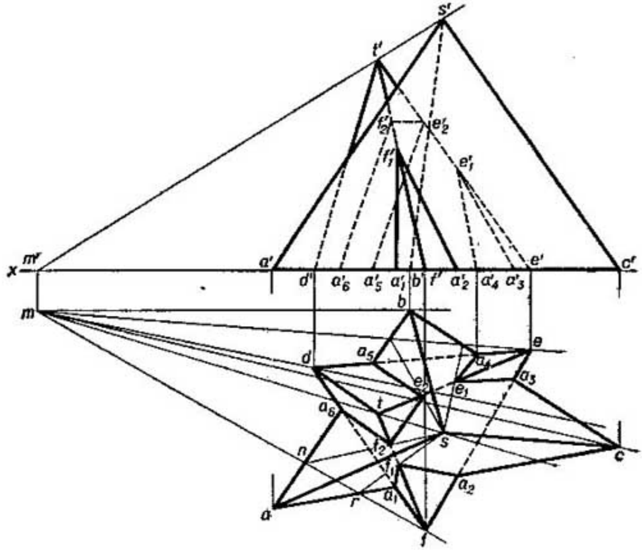


Fig. 282

cuando es más conveniente emplear como planos auxiliares los planos de posición general: éstos ofrecen menos construcciones auxiliares. Pero para ello deben tenerse las condiciones correspondientes. Un ejemplo se da en la fig. 282. Aquí las bases de ambas pirámides se encuentran en un mismo plano. Por los vértices de las pirámides se ha trazado una recta y se ha hallado la traza de esta recta (el punto M) sobre el plano de las bases de las pirámides. Todo plano trazado por la recta ST pasa por los vértices de ambas pirámides y corta a sus caras según rectas (véase la fig. 276); las trazas de estos planos sobre el plano de las bases de las pirámides pasan por el punto m.

Trazando, por ejemplo, la recta mf, se puede tomar como traza de uno de tales planos; en la fig. 282 la traza de este plano se confunde con la proyección mf.

Tal plano corta a la base de la pirámide $ABCS$ en los puntos n y r; uniendo estos puntos con el punto s obtendremos el contorno de la sección producida en la pirámide por este plano (en el que se encuentra la arista TF) y hallaremos las proyecciones de los puntos de intersección de la arista TF, los puntos f_1 y f_2; la determinación de las proyecciones frontales de estos puntos de intersección no presenta dificultades.

Investigando de este modo todas las aristas de ambas pirámides, revelaremos los puntos necesarios para la construcción de las líneas de intersección.

Los puntos de intersección de los lados de la base se determinan en la proyección horizontal sin construcciones suplementarias.

En la tabla siguiente se da el resumen de las construcciones.

Arista que se investiga	Caras con las que se corta la arista que se investiga	Aristas con las que se corta la arista que se investiga	Punto de intersección
TF	ACS	—	F_1
	ABS	—	F_2
ET	CBS	—	E_1
	ABS	—	E_2
DT			
FD	No existe	—	—
	—	AC	A_1
	—	AB	A_6
DE	—	BC	A_4
	—	AB	A_5
EF	—	BC	A_3
	—	AC	A_2
AS	No existe	—	—
BS	ídem	—	—
CS	ídem	—	—

La construcción indicada en la fig. 282 puede emplearse también cuando la base de una de las pirámides se encuentra en el plano H y la base de la otra, en el plano V. Además, en el caso general, hay que hallar las trazas de la recta trazada por los vértices de las pirámides sobre los planos H y V y, respectivamente, las trazas horizontal y frontal de cada uno de los planos auxiliares.

Si se intersecan un prisma y una pirámide, entonces, el procedimiento indicado en la fig. 282 para la intersección de dos pirámides, puede ser empleado si se traza una recta por el vértice de la pirámide paralelamente a las aristas del prisma; los planos trazados por esta recta cortarán a las caras del prisma por rectas paralelas a las aristas, y a las caras de la pirámide por rectas que pasan por su vértice. En el caso de intersección de dos prismas, los planos secantes auxiliares pueden tomarse paralelamente a las aristas de ambos prismas.

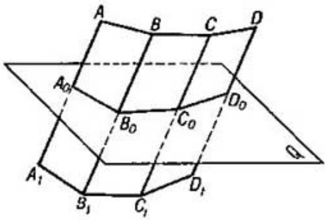
Si en la intersección participa un prisma, puede emplearse también el método de cambio de los planos de proyección: obteniendo las proyecciones de los poliedros sobre el plano perpendicular a las aristas del prisma, utilizamos las caras del prisma en esta posición en calidad de planos secantes.

§ 44. PROCEDIMIENTOS GENERALES DE DESARROLLO DE SUPERFICIES POLIÉDRICAS (PRISMAS Y PIRÁMIDES)

El desarrollo de una superficie prismática se puede efectuar por dos esquemas. Primer esquema (fig. 283):

1) cortar la superficie con un plano perpendicular a las aristas;

2) determinar las longitudes de los segmentos de la línea quebrada obtenida al intersecar la superficie del prisma con este plano;



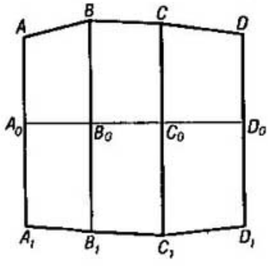


Fig. 283

3) desarrollar la línea quebrada en la recta A_0D_0 y llevar sobre las perpendiculares trazadas en los puntos A_0, B_0, ... a la recta A_0D_0 las longitudes de los segmentos de las aristas A_0A, A_0A_1, B_0B, B_0B_1, etc.;

4) trazar los segmentos AB, BC y CD, y también los segmentos A_1B_1, B_1C_1 y C_1D_1.

El segundo esquema de desarrollo de una superficie prismática consiste en lo siguiente (fig. 284):

1) dividir los cuadriláteros (las caras) en triángulos con ayuda de diagonales;

2) determinar las longitudes de los lados de estos triángulos;

3) construir sucesivamente los triángulos *1*, *2*, *3*, etc. en el plano del dibujo.

El desarrollo puede efectuarse así cómo se indica a continuación en la fig. 287.

En las figs. 285 y 286 se da un ejemplo del desarrollo de la superficie lateral de un prisma.

La construcción del desarrollo se ha efectuado por el primer esquema. En la fig. 285 se han cumplido las construcciones prepara-

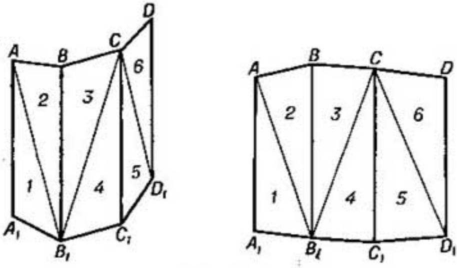


Fig. 284

torias para el desarrollo de la superficie. Ante todo se ha introducido el plano de proyección complementario S perpendicular al plano H y paralelo a las aristas del prisma.

Para obtener la sección normal se ha trazado el plano Q perpendicular a las aristas del prisma. En el sistema S, H, el plano Q es perpendicular al plano S, por lo cual la proyección de la figura sección sobre el plano S se encuentra en la traza Q_s. Por ser el plano Q perpendicular a las aristas del prisma, las proyecciones de estas aristas sobre el plano S son perpendiculares a Q_s, y dado que el plano S es paralelo a las aristas, sus longitudes son iguales a las longitudes de los segmentos a_se_s, b_sf_s, etc. Luego, con ayuda del abatimiento del plano Q sobre el plano H se determina la forma verdadera de la sección, el cuadrilátero $1_02_03_04_0$.

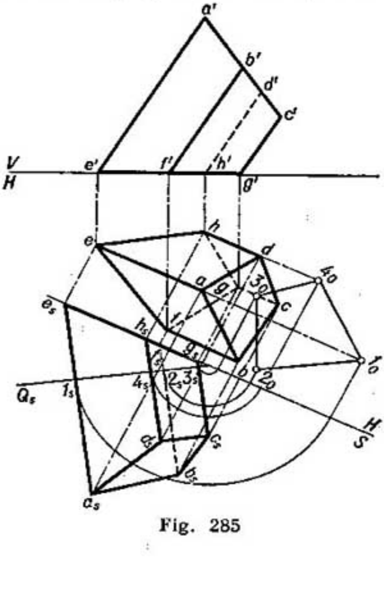


Fig. 285

En la fig. 286 se muestra el desarrollo buscado: sobre una recta se han llevado sucesivamente los segmentos $1-2=1_0 2_0$, $2-3==2_0 3_0$, etc.; en los puntos 1, 2, etc. se han trazado las perpendiculares a esta recta y sobre ellas se han llevado los segmentos $1A==1_s a_s$, $1E=1_s e_s$, $2B=2_s b_s$, etc. Luego se han trazado las quebradas $ABCDA$ y $EFGHE$.

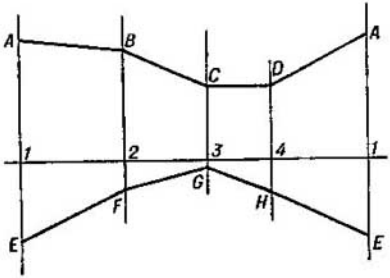


Fig. 286

En la fig. 287 se da una construcción distinta. Una vez construida la proyección del prisma sobre el plano S paralelo a las aristas del prisma, trazamos a partir de los puntos e_s, h_s, g_s, f_s, a_s, d_s, c_s

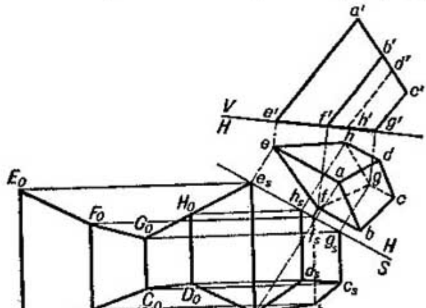


Fig. 287

y b_s rectas perpendiculares a $e_s a_s$. Con centro en el punto e_s describimos un arco de radio igual a eh, y en la intersección con la recta trazada desde el punto h_s obtenemos el punto H_0; con centro en este punto describimos un arco de radio igual a hg y en su intersección con la recta trazada desde el punto g_s obtenemos el punto G_0, etc.

($G_0F_0=gf$, $F_0E_0=fe$). A partir de los puntos H_0, G_0, F_0 y E_0 trazamos rectas paralelas a e_sa_s hasta su intersección con las rectas correspondientes trazadas desde los puntos d_s, c_s, b_s y a_s. La variante indicada es conveniente cuando la magnitud de los lados de la base puede ser tomada directamente del dibujo.

El desarrollo de la superficie lateral de una pirámide se puede realizar por el esquema siguiente:

1) determinar las longitudes de las aristas y los lados de la base de la pirámide;

2) construir en el plano del dibujo sucesivamente los triángulos (las caras de la pirámide).

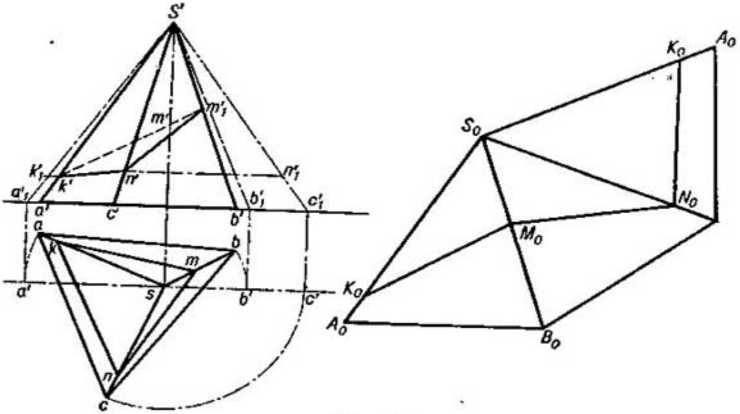


Fig. 288

En la fig. 288 se muestra la construcción del desarrollo de la superficie lateral de una pirámide en el que, en las caras de la pirámide, se han dibujado los lados de la sección triangular producida en esta pirámide por un plano. Se ha hallado la longitud de cada arista, luego se ha construido el triángulo $A_0S_0B_0$ por sus tres lados: la base A_0B_0 se ha tomado igual a la proyección horizontal ab, y los lados laterales se han tomado iguales a las magnitudes verdaderas de las aristas SA y SB (es decir, iguales a los segmentos $s'a'_1$ y $s'b'_1$).

A continuación, sobre el lado S_0B_0 se ha construido el segundo triángulo, con la particularidad de que las longitudes de los otros dos lados se han tomado: la del lado B_0C_0, igual a la proyección horizontal bc, y la del lado S_0C_0, igual a la longitud de la arista SC (es decir, al segmento $s'c'_1$).

De la misma manera se ha construido el tercer triángulo. Como resultado se ha obtenido la superficie lateral desarrollada de la pirámide. Si se lleva ahora sobre los lados S_0A_0, S_0B_0 y S_0C_0 los segmentos S_0K_0, S_0M_0 y S_0N_0 iguales a los segmentos de las aristas de la pirámide, intersecada por un plano, obtendremos la línea quebrada $K_0M_0N_0K_0$ compuesta por los lados de la figura sección.

PREGUNTAS A LOS §§ 43 Y 44

1. ¿Cómo se construye la línea de intersección de una superficie poliédrica por otra?
2. ¿En cuál caso es conveniente emplear planos de posición general (como auxiliares) al intersecarse dos pirámides y cómo deben trazarse estos planos?
3. ¿Por cuáles esquemas se puede realizar el desarrollo de las superficies que limitan a un prisma y a una pirámide?
4. ¿En cuál caso estos desarrollos serán completos?