

VII

CAPITULO

LÍNEAS CURVAS

§ 45. CONOCIMIENTOS GENERALES SOBRE LAS LINEAS CURVAS Y SU PROYECCION

Toda curva puede definirse como la trayectoria de un punto que se mueve en un plano o en el espacio ¹⁾. Como ejemplo sirven la espiral de Arquímedes y línea helicoidal cilíndrica conocidas del curso de dibujo lineal de la escuela secundaria. *La curva puede ser obtenida también como resultado de la intersección de dos superficies (por ejemplo, de dos superficies cilíndricas) o de la intersección de una superficie con un plano (por ejemplo, la elipse, que se obtiene al cortar la superficie lateral de un cilindro circular recto con un plano que forma con el eje del cilindro cierto ángulo agudo). En toda una serie de casos, la curva representa el lugar geométrico de puntos que corresponden a condiciones determinadas para esta curva (circunferencia, elipse, parábola, etc.).*

La curva queda determinada por las posiciones de los puntos que la constituyen. Los puntos de la curva se determinan por sus coordenadas.

Las curvas pueden ser *planas*, es decir, todos los puntos de las cuales pertenecen a un mismo plano, y *espaciales (alabeudas)*, o sea, tales, cuyos puntos pertenecen a distintos planos ²⁾. Como ejemplo de líneas curvas planas sirven la circunferencia, la elipse, la parábola y la espiral de Arquímedes; como ejemplo de curvas espaciales, la línea helicoidal, la línea de intersección de las superficies laterales de un cilindro y un cono circulares rectos.

Para construir las proyecciones de una curva (plana o espacial) es necesario construir las proyecciones de toda una serie de puntos

¹⁾ En toda la extensión de la curva no deben haber secciones rectilíneas.

²⁾ A las curvas espaciales se las llama también *líneas de doble curvatura*.

pertenecientes a esta curva (fig. 289). Un ejemplo de la construcción de las proyecciones de una curva plana se dio en la fig. 119 (pág. 65).

La curva espacial se proyecta en forma de curva plana, la curva plana, también en forma de curva plana o en forma de línea recta, si la curva se encuentra en un plano perpendicular al plano de proyección.

La línea se considera *regular* si en su formación está subordinada a una ley geométrica cualquiera. Si con esto la curva se determina

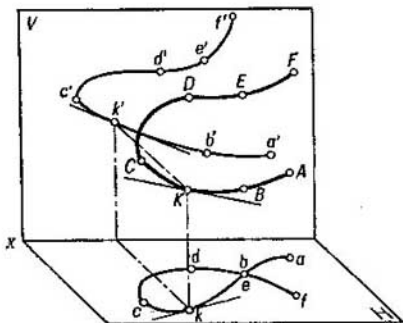


Fig. 289

en las coordenadas cartesianas por una ecuación algebraica, entonces, ésta se llama *curva algebraica*¹⁾. Como ejemplo puede servir la elipse, cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

El grado de la ecuación determina el «orden» de la curva: la elipse es una curva de segundo orden. La curva que representa la proyección de una curva de cierto orden conserva el mismo orden o es una curva de orden inferior.

La tangente a una curva se proyecta, en el caso general, en forma de tangente a la proyección de la curva. Si, por ejemplo, se ha trazado una tangente a una circunferencia situada en un plano que forma con el plano de proyección un ángulo agudo, entonces, esta tangente se proyecta como tangente a la elipse que expresa la proyección de esta circunferencia. En la fig. 289 viene representada una curva

¹⁾ Si la curva se determina no por una ecuación algebraica, entonces esta curva se refiere a las curvas transcendentales.

espacial, sus proyecciones sobre los planos V y H , la tangente a esta recta en el punto K y las proyecciones de esta tangente. El plano proyectante que pasa por la tangente a la proyección de la curva, tiene contacto con la curva en el espacio.

Para tener una idea más clara de una curva en el espacio, al expresar una curva plana o espacial por sus proyecciones, se deben indicar en las proyecciones ciertos puntos característicos para esta curva o para su posición respecto a los planos de proyección. Pueden ser señalados, por ejemplo, los puntos de la curva más alejados de los planos de proyección y los puntos más cercanos a éstos; para ello hay que trazar unos planos tangentes a la curva y paralelos a los planos de proyección correspondientes: en la fig. 290, el plano S , paralelo al plano V , permite establecer que el punto G de la curva en el espacio es el punto más alejado del plano V .

La *curvatura* de una línea curva, plana o espacial, puede ser invariable (en toda la extensión de esta curva o en secciones separadas de ella) o variar en distintos puntos de la curva. Por ejemplo, la curvatura de una circunferencia o de una línea helicoidal cilíndrica es invariable en toda la extensión de éstas, y la curvatura de una elipse se repite en sus cuadrantes, variando continuamente en los límites de un cuadrante. Se usa el término *curvatura de la línea*. La curvatura se expresa por un número; ésta caracteriza a la curva en uno de sus puntos dados, más exactamente, en un arco infinitamente pequeño, o sea, en las *vecindades* de este punto.

La *longitud* de cierta sección de una curva, tanto plana como espacial, se determina aproximadamente, sustituyendo la línea curva por una quebrada, inscrita en esta curva, y midiendo la longitud de los eslabones de esta quebrada (esto, claro está, no se refiere a las curvas, la longitud de las cuales puede ser hallada valiéndose de cálculos simples¹⁾). Para reducir el error deben tomarse segmentos de la quebrada cuyas longitudes se diferencien poco de los arcos de

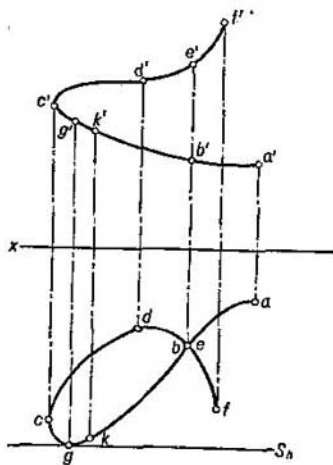


Fig. 290

¹⁾ Por ejemplo, una circunferencia, una espira de una línea helicoidal cilíndrica (véase a continuación el § 48).

la curva cuyas cuerdas son estos segmentos. En la fig. 291 se muestra la determinación de la longitud de la curva ABC : la proyección horizontal (la curva abc) se ha dividido en partes pequeñas y se ha «desarrollado» en una recta sobre el eje x de tal manera que los segmentos a_0I_0 , I_0b_0 , etc. son respectivamente iguales a las cuerdas

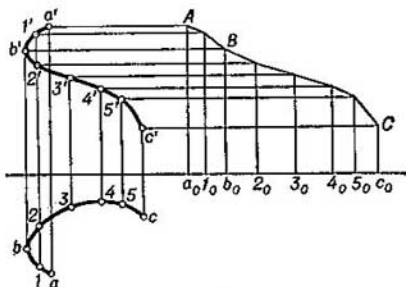


Fig. 291

a_1I_1 , I_1b_1 , etc.; en los puntos a_0 , I_0 , etc. se han levantado perpendiculares al eje x , y sobre estas perpendiculares se han llevado las Z -coordenadas de los puntos de la curva. Obtenemos una quebrada cuya longitud puede ser tomada aproximadamente como longitud de la curva ABC .

§ 46. CURVAS PLANAS

Girando la secante KS_1 (fig. 292) alrededor del eje K de modo tal, que el punto K_1 tienda al punto K , obtendremos la posición límite KT , es decir, la posición de la tangente a la curva en el punto

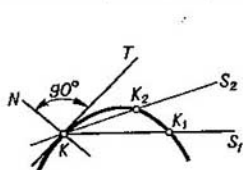


Fig. 292

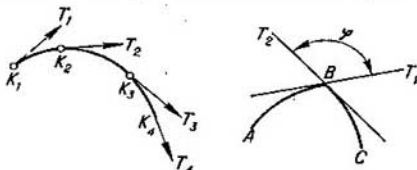


Fig. 293

K . La tangente refleja la dirección de movimiento del punto que engendra la curva; la dirección de la tangente en cierto punto de la curva se llama *dirección de la curva en este punto*.

Trazando por el punto K la recta $KN \perp KT$ obtenemos la normal a la curva en este punto K . La normal a una circunferencia coincide con la dirección de su radio. La construcción de la normal a una elipse se muestra en el § 21.

En el punto K (fig. 292) la curva es *suave*: en el punto K la curva tiene una sola tangente. Si la curva se compone solamente de tales puntos, ésta es una *curva suave* (fig. 293, a la izquierda). Pero en la curva pueden haber puntos (véase la fig. 293, a la derecha) en los que hay dos tangentes con un ángulo entre ellas distinto de 180° . A tal punto se le llama *punto de inflexión*, *punto angular* o *punto de salida*, y la recta en este punto no es suave. En este punto como si

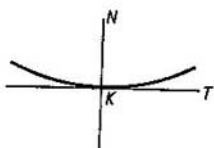


Fig. 294

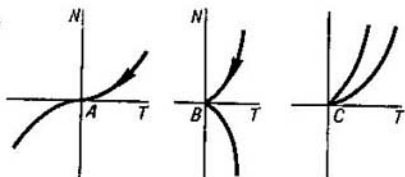


Fig. 295.

se cortaran bajo cierto ángulo dos rectas AB y BC . Si el ángulo φ resulta igual a 180° , las curvas AB y BC harán contacto y cada una de ellas en el punto B resultará suave. Las curvas que hacen contacto tienen una misma tangente en su punto común, y las normales a las curvas en este punto se sitúan en una misma recta.

En la fig. 294, en el punto K de la curva se han trazado la tangente KT y la normal KN . Si en todos los puntos de la curva se repite tal disposición respecto de la tangente y la normal en la vecindad examinada ¹⁾, la curva es *convexa* y sus puntos son *ordinarios* (o *regulares*). Como ejemplo sirve la elipse.

En la fig. 295 se muestran los puntos: A , *punto de inflexión* en el que la curva corta a la tangente; B y C , los *puntos de retorno* en los que la recta tiene punta («pico») y la tangente es común para ambas ramas de la curva (al punto B se le llama *punto de retorno de primer género*, y al punto C , *punto de retorno de segundo género*). Aquí hemos tocado los llamados *puntos singulares de una curva* ²⁾, por ejemplo, tales, en los cuales la dirección de movimiento del punto que describe la curva cambia de sentido (puntos de retorno) o a salto (véase la fig. 293, el punto B).

¹⁾ Por cercanías aquí se comprenden los puntos de la curva en la proximidad inmediata al punto que se examina.

²⁾ Los puntos singulares se estudian en el curso de Geometría Diferencial.

Se puede señalar también el *punto doble* (*punto nodal* o *de auto-intersección*), en el que la curva se corta a sí misma y tiene dos tangentes (fig. 296, el punto D), y el *punto de autocontacto* en el que la curva se encuentra a sí misma, pero ambas tangentes coinciden (en la misma figura, el punto E).

Todos estos casos pueden encontrarse en las proyecciones de las curvas planas, siendo suficiente para la curva plana tener una sola proyección (si, claro está, esta proyección no es una recta) para juzgar sobre el carácter de sus puntos, puesto que cualquier particularidad de esta proyección expresa la misma particularidad de la propia curva plana.



Fig. 296

La curvatura de una curva plana en un punto cualquiera A_1 (fig. 297) se considera como el límite al que tiende la relación entre el ángulo formado por las tangentes trazadas en los puntos vecinos A_1 y A_2 de la curva, y el arco $A_1 A_2$, si el punto A_2 tiende al A_1 :

$$\lim \frac{\varphi_1}{A_1 A_2} = k.$$

Así pues, se llama *curvatura* de una curva en uno de sus puntos A al valor límite de la relación del ángulo φ_1 al arco $A_1 A_2$. La curvatura se designa con la letra k .

Evidentemente, el ángulo φ puede ser también expresado por el ángulo entre las normales a la curva en los puntos A_1 y A_2 .

Si nos imaginamos una circunferencia que pase por el punto A_1 (fig. 297) y dos puntos vecinos al dado en la curva, que tienden al punto A_1 , entonces, la circunferencia alcanzará su posición límite y se exprese por cierto radio $C_1 A_1$. En este caso, la circunferencia hará contacto con la curva en el punto A_1 . La circunferencia y la curva tendrán comunes una tangente y una normal en la que se encuentra el centro de la circunferencia en contacto. Se emplean los términos: *círculo de curvatura* de la curva en el punto dado, *centro de curvatura* (o centro del círculo de curvatura), *radio de curvatura* (o radio del círculo de curvatura). La curvatura de una curva en un punto cualquiera de la misma es igual a la recíproca del radio de curvatura:

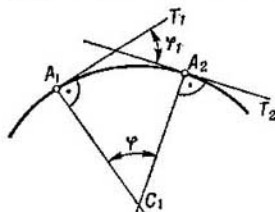


Fig. 297

$$k = \frac{1}{r}.$$

Es evidente que para una circunferencia, en cualquier punto de ésta, el radio de la circunferencia en contacto será igual al radio de la circunferencia dada. De aquí que: la curvatura de una circunferencia es igual en todos sus puntos a la re-

cíproca del radio de esta circunferencia, o sea,

$$k_{cir} = \frac{1}{R}.$$

Cuanto mayor sea R , tanto menor será k .

En la elipse (fig. 298, a la izquierda) los centros de curvatura en los vértices A_1 y A_2 se encuentran en su eje mayor, y en los vértices B_1 y B_2 , en su eje menor. Para determinar la posición de los centros de curvatura hemos empleado las fórmulas conocidas para los radios de curvatura en los vértices de la elipse: en los vértices A_1 y A_2 , la fórmula

$$r_1 = \frac{b^2}{a},$$

y en los vértices B_1 y B_2 , la fórmula

$$r_2 = \frac{a^2}{b},$$

donde a es el semieje mayor, b , el semieje menor de la elipse.

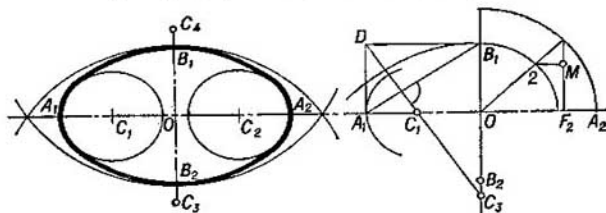


Fig. 298

En la fig. 298, a la derecha, se muestra la construcción de los centros de curvatura C_1 y C_3 y la determinación de la magnitud de los radios de curvatura en los vértices A_1 y B_1 : con ayuda de los semiejes dados OA_1 y OB_1 se construye el rectángulo OB_1DA_1 , en éste se traza la diagonal A_1B_1 y desde el punto D se baja una perpendicular a esta diagonal, que cortará al eje mayor en el punto C_1 y a la prolongación del eje menor en el punto C_3 . Si trazamos con centro en el punto C_1 y radio C_1A_1 y con centro en el punto C_3 y radio C_3B_1 dos arcos de circunferencia, entre éstos habrá una holgura; en ésta, con auxilio de la plantilla de curvas se traza un arco que haga contacto con ambos arcos de las circunferencias. Para trazar este arco con más exactitud es conveniente hallar un punto de la elipse así como se muestra en la misma figura para el punto M sobre una recta trazada por el foco F_2 perpendicularmente al eje de la elipse A_1A_2 . Sucesión de la construcción: el foco F_2 (véase el § 21), los arcos de radios OA_2 y OB_1 , la perpendicular a A_1A_2 en el punto F_2 hasta su intersección con el arco en el punto 1 , el radio $O-1$ y por el punto 2 la recta paralela a OA_2 . Con ayuda de los puntos hallados C_1 y C_3 se pueden hallar dos centros más, y con auxilio del punto M , tres puntos más para trazar la parte restante de la curva. Esta línea mixta es muy próxima a la elipse.

¿Cuál curva plana tiene curvatura constante? La circunferencia (véase más arriba: $k_{cir} = \frac{1}{R}$, donde R es el radio de la circunferencia). Si consideramos a una recta como una circunferencia de $R = \infty$, entonces, también aquí la curvatura es constante: $k=0$.

En la fig. 299 se muestra la construcción aproximada de la tangente y la normal a una curva suave en cierto punto K .

Trazamos la recta auxiliar EF aproximadamente en dirección perpendicular a la dirección supuesta de la tangente a la curva $ABCD$ y a la recta EF . Si llevamos sobre estas rectas que corten a la curva $ABCD$ y a la recta EF . Si llevamos sobre estas rectas los segmentos $A_1A_2=AK$, $B_1B_2=BK$, $C_1C_2=CK$, $D_1D_2=KD$, etc., y trazamos por los puntos $A_2, B_2, C_2, D_2, \dots$ una línea curva suave, entonces en su intersección con la recta EF obtendremos el punto M , es decir, el segundo punto de la recta tangente a la curva $ABCD$ en el punto K ¹⁾.

En la fig. 300 se muestra la construcción aproximada del centro de curvatura en cierto punto K de una curva.

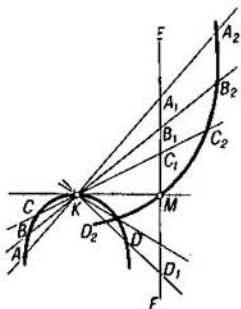


Fig. 299

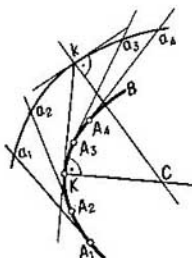


Fig. 300

Tomando en la curva cerca del punto K unos cuantos puntos A_1, A_2, \dots , trazamos por estos puntos y por el punto K tangentes. Llevamos sobre estas tangentes los segmentos arbitrarios, pero iguales entre sí, $A_1a_1, A_2a_2, Kk, \dots$ y trazamos por los puntos a_1, a_2, k, \dots una línea curva. En la intersección de las normales en los puntos K y k se obtiene el punto C , es decir, el centro de curvatura buscado, y el radio de curvatura $r=CK$. De aquí se determina la curvatura en el punto K , igual a $\frac{1}{r}$.

Si se construyen los centros de curvatura de la curva dada en una serie de puntos, entonces, por estos centros pasará a su vez una curva llamada *evoluta de la curva dada* y que es el lugar geométrico de los centros de curvatura de la misma. A la curva dada, con relación a su evoluta, se la llama *evolvente*. Por ejemplo, en la curva llamada evolvente de la circunferencia los centros de curvatura en diferentes puntos de esta curva están situados sobre la circunferencia, la cual es la evoluta respecto a la evolvente dada.

§ 47. CURVAS ESPACIALES

Mucho de lo estudiado respecto a las curvas planas puede ser también referido a las curvas espaciales. Por ejemplo, la tangente a una curva espacial también se obtiene de la secante KS_1 (fig. 292)

¹⁾ La curva $A_2B_2C_2D_2$ es un ejemplo de la así llamada curva de errores.

al coincidir los puntos K y K_1 . También en una curva espacial pueden haber puntos de distinto género: corrientes (regulares), puntos de inflexión, «picos» y otros. Pero, si para la curva plana en el punto K (fig. 292) se podía trazar solamente una perpendicular KN (normal) a la tangente KT , para la curva espacial tales perpendiculares en el punto de contacto pueden haber una infinidad, lo que conduce a la noción de *plano normal*. Luego, para la curva plana es suficiente disponer de una proyección para juzgar sobre el carácter de sus puntos, mientras que para la curva espacial, se puede juzgar sobre el carácter de sus puntos solamente conociendo dos proyecciones de esta curva. Por ejemplo, en las figs. 289 y 290 la confrontación de las proyecciones horizontal y frontal demuestra que, a pesar de que en la proyección horizontal se tiene un punto doble, en la propia curva no existe punto doble. *Lo mismo que para una curva plana, la tangente a una curva en el espacio (fig. 289) se proyecta en una tangente a la proyección de esta curva.* El plano proyectante trazado por la tangente a la proyección de la curva, hace contacto con la curva en el espacio.

Todos los puntos de una curva plana están situados en un mismo plano. En lo que se refiere a una curva espacial, se puede hablar solamente del plano más próximo a la curva en el punto que se examina. A este plano se le llama *de contacto*. Supongamos que en la fig. 292 está representada no la porción de una curva plana, sino la de una espacial. Los tres puntos K , K_1 y K_2 de esta curva determinan a cierto plano. La posición límite de este plano, cuando la secante KS_2 pasa a ser tangente en el punto K y el tercer punto se aproxima infinitamente al punto de tangencia, define al plano de contacto en el punto K de la curva espacial. Cerca del punto K se puede considerar que la curva está situada en el plano de contacto.

Los planos de contacto y normal son perpendiculares entre sí; esto se desprende del hecho de que el plano de contacto contiene a la tangente a la curva.

Al intersecarse los planos normal y de contacto se obtiene una de las normales, la *normal principal*. La normal perpendicular al plano de contacto se llama *binormal*.

A los planos de contacto y normal se les añade un tercer plano perpendicular a los primeros. Este plano pasa por la tangente y la binormal, y se llama *plano de rectificación*.

Estos tres planos, que forman un triedro, se usan como planos de coordenadas al examinar la curva en el punto dado. La posición del triedro depende de la posición del punto en la curva.

Por analogía con el centro de curvatura de una curva plana como la posición límite del punto de intersección de dos normales (fig. 297), obtenemos el *eje de curvatura de una curva espacial* como la posición límite de la recta de intersección de los planos normales vecinos. En esta posición límite el *eje de curvatura es paralelo a la binormal; en la intersección del eje de curvatura con la normal principal se obtiene el centro de curvatura*, de donde se determina el radio de curvatura como la distancia desde este centro hasta el punto examinado de la curva. Así como para la curva plana, la curvatura de una curva espacial es igual a la recíproca del radio de curvatura. Si nos imaginamos la aproximación límite de tres puntos vecinos de una curva espacial y la posición límite de la circunferencia trazada por estos puntos, obtenemos el círculo de curvatura en el plano de contacto, y su centro es el centro de curvatura, y su radio, el radio de curvatura. Esta es la primera curvatura de una curva espacial.

Si en vez del ángulo entre las tangentes, como esto ocurría para las curvas planas, y de la relación entre este ángulo y la longitud del arco entre los puntos de tangencia, se toma el ángulo formado por los planos de contacto (éste es igual al ángulo entre las binormales) y se divide este ángulo entre la longitud del arco entre los puntos examinados de la curva espacial, entonces, el valor límite de esta relación expresa la así llamada curvatura de torsión o segunda curvatura de la curva espacial. Recordemos que a las curvas espaciales se las llama también curvas de doble curvatura.

Si las tangentes a una curva espacial tienen una misma inclinación en todos los puntos de esta curva respecto a un plano cualquiera, entonces estas curvas se llaman curvas de igual pendiente.

PREGUNTAS A LOS §§ 45--47

1. ¿En qué consiste la diferencia entre las curvas plana y espacial?
2. ¿Qué representa la proyección de una curva espacial?
3. ¿Qué representa la proyección de una curva plana?
4. ¿Qué representa la proyección de la tangente a una curva?
5. ¿Cómo se determina la longitud de cierta porción de una curva?
6. ¿A qué se le llama tangente a una curva?
7. ¿A qué se le llama normal en un punto cualquiera de una curva plana?
8. ¿Con qué se determina la suavidad de una curva plana?
9. ¿A cuáles curvas planas se les llama de contacto?
10. ¿Qué significa curva plana convexa?
11. ¿Por cuántas proyecciones se puede juzgar sobre el carácter de los puntos de una curva plana?
12. ¿A qué se le llama curvatura de una curva plana en cierto punto de ella?
13. ¿A qué es igual la curvatura de una circunferencia?
14. ¿Cómo construir una curva mixta similar a la elipse, conociendo los ejes de ésta?
15. ¿Cómo construir la tangente y la normal a una curva suave en cierto punto de ella y cómo hallar el centro de curvatura en este punto?
16. ¿Por cuántas proyecciones se puede juzgar sobre el carácter de los puntos de una curva espacial?
17. ¿A cuáles planos se les llama normal, de contacto y de rectificación en un punto cualquiera de una curva espacial?
18. ¿A qué se le llama normal principal y binormal en un punto cualquiera de una curva espacial?
19. ¿A qué se le llama primera y segunda curvatura de una curva espacial?
20. ¿Cómo se descifra la denominación de «curva de doble curvaturas»?
21. ¿En cuál caso a la curva espacial se le llama curva de igual pendiente?

§ 48. LÍNEAS HELICOIDALES CILÍNDRICAS Y CÓNICAS

La línea helicoidal cilíndrica representa una curva espacial de igual pendiente. El filo de una cuchilla, al hacer contacto con la superficie de un cilindro que gira uniformemente, deja en esta superficie una huella en forma de circunferencia. Si al mismo tiempo se le comunica a la cuchilla un movimiento de avance uniforme a lo largo del eje del cilindro, en la superficie de éste se obtendrá una línea helicoidal cilíndrica.

En la fig. 301 se muestra la formación de una línea helicoidal en la superficie de un cilindro como resultado del movimiento del punto A por la generatriz EC y del movimiento de giro de esta generatriz. Aquí vienen representadas varias posiciones de esta generatriz: E_0C_0, E_1C_1, \dots ; los arcos E_0E_1, E_1E_2, \dots son iguales entre sí y cada uno de ellos es igual a $\frac{\pi d}{n}$, donde d es el diámetro del cilindro y n , el número de divisiones (en la fig. 301 $n=12$). La posición inicial del punto se ha designado con A_0 , y las posiciones ulteriores, con A_1, A_2, \dots , respectivamente.

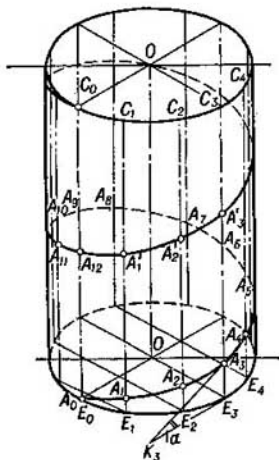


Fig. 301

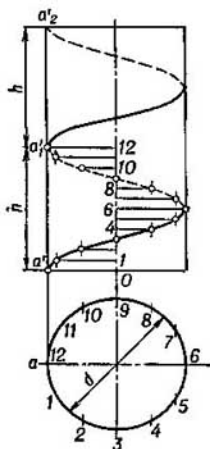


Fig. 302

Si durante el traslado de la generatriz de la posición E_0C_0 a la posición E_1C_1 el punto ocupa la posición A_1 , entonces el segmento E_1A_1 determinará la distancia que ha recorrido el punto por la generatriz desde su posición inicial. Al ocupar la generatriz la siguiente posición (la E_2C_2) el punto se elevará a la altura $E_2A_2=2E_1A_1$ etc. Cuando la generatriz hace una vuelta entera, el punto se desplaza por ella a la distancia $E_0A_{12}=12E_1A_1$.

Al seguir girando la generatriz, el punto A comenzará a formar la *segunda espira* o *vuelta de la línea helicoidal*, ocupando la posición A'_1, A'_2, \dots .

La distancia entre los puntos A_0 y A_{12} se llama *paso de la línea helicoidal*. El paso puede ser elegido en dependencia de unas u otras condiciones.

La distancia del punto A al eje OO se llama *radio de la línea helicoidal*, y el eje OO , *eje de la línea helicoidal*. El radio de la línea helicoidal es igual a la mitad del diámetro del cilindro circular recto en cuya superficie lateral está situada la línea helicoidal. El diámetro del cilindro y la dimensión del paso son los *parámetros*¹⁾ que determinan a la línea helicoidal cilíndrica en la superficie lateral de un cilindro circular recto.

En la fig. 302 se ha cumplido la construcción de las proyecciones de una línea helicoidal cilíndrica. Preliminarmente se han construido las proyecciones del cilindro circular recto. La circunferencia de la base del cilindro (en la proyección horizontal) y el paso (el segmento h llevado al eje del cilindro en la proyección frontal) se han dividido en igual número (n) de partes; en la fig. 302 se ha tomado $n=12$. La posición inicial del punto A se indica con las

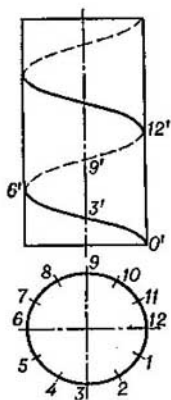


Fig. 303

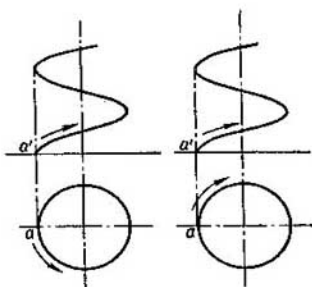


Fig. 304

proyecciones a' y a , este último es el punto denotado con la cifra 0 en la circunferencia.

Dado que el eje del cilindro está dirigido perpendicularmente al plano H , la proyección horizontal de la línea helicoidal se confunde con la circunferencia que representa la proyección horizontal de la superficie del cilindro. En lo que se refiere a la construcción de la proyección frontal de la línea helicoidal, la marcha de su construcción está clara de la fig. 302 y se deriva de la propia formación de la línea helicoidal como la trayectoria de un punto que realiza dos movimientos, un movimiento uniforme en línea recta y al mismo

¹⁾ El parámetro es una magnitud cuyos valores numéricos permiten separar un elemento determinado entre los elementos del mismo género.

tiempo movimiento giratorio uniforme alrededor del eje paralelo a esta recta.

La proyección sobre un plano, paralelo al eje del cilindro, en el caso dado la proyección frontal de la línea helicoidal cilíndrica, es semejante a una *sinusoide*.

En la fig. 302, la proyección frontal de la línea helicoidal tiene en la parte delantera (visible) del cilindro *elevación de izquierda a derecha* o *descenso hacia la izquierda*; si el eje del cilindro se dispone horizontalmente, entonces la elevación de la línea helicoidal es de derecha a izquierda, y el descenso hacia la derecha. Esta es una línea helicoidal con *paso a la derecha* o *línea helicoidal dextrorsa*. En la fig. 303 se muestra una línea helicoidal con *paso a la izquierda* (*línea helicoidal sinistrorsa*): la elevación en la proyección frontal de la línea helicoidal en la parte delantera (vista) del cilindro va de derecha a izquierda, el descenso hacia la derecha; si el eje del cilindro se dispone horizontalmente; la elevación será a la derecha, y el descenso hacia la izquierda.

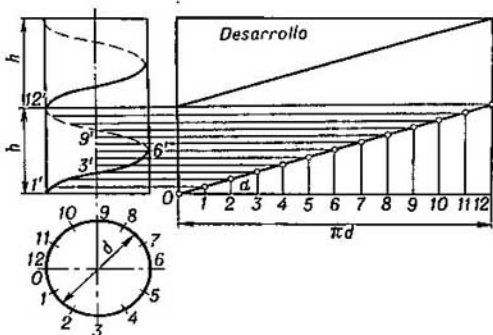


Fig. 305

Si la línea helicoidal se representa sin el cilindro y sin las proyecciones de los puntos, la indicación sobre si es la línea helicoidal dextrorsa o sinistrorsa debe darse con palabras o con flechas, así como se muestra en la fig. 304 a la izquierda para una línea helicoidal dextrorsa, y a la derecha, para una sinistrorsa ¹⁾.

El desarrollo de la espiral de una línea helicoidal cilíndrica se muestra en la fig. 305. En forma desarrollada cada espira representa el segmento de una recta. Esto se desprende de la formación de la línea helicoidal: por cuanto la circunferencia de la base del cilindro

¹⁾ La línea helicoidal cilíndrica se ilustra muy bien en un muelle salomónico, en las roscas de los pernos, en los tornillos, en los espárragos y en el tornillo sin fin cilíndrico.

se dividió en partes iguales y el paso de la línea helicoidal fue dividido en un mismo número de partes iguales, el desarrollo de la línea helicoidal en toda la extensión de su paso puede considerarse como el lugar geométrico de los puntos, para cada uno de los cuales la ordenada es proporcional a la abscisa, es decir, $y=kx$. Esta es la ecuación de una línea recta.

Las tangentes a la línea helicoidal coinciden en el desarrollo con la recta en la que se desarrolla la espira de la línea helicoidal.

En la fig. 305, para el caso de dos pasos de la línea helicoidal, se han obtenido dos segmentos de ésta bajo un ángulo α a la recta que representa a la circunferencia desarrollada de la base del cilindro. La pendiente de la línea helicoidal se expresa con la fórmula

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{\pi d},$$

donde h es el paso de la línea helicoidal y d , el diámetro del cilindro. El ángulo α se llama *ángulo de espira* o *ángulo de paso*.

La longitud de una vuelta (espira) de la línea helicoidal es igual a

$$L = \sqrt{h^2 + (\pi d)^2}.$$

Para un mismo diámetro d , el ángulo α depende solamente del paso de la línea helicoidal; para obtener un ángulo de paso pequeño debe tomarse un paso pequeño, y viceversa. Si para el caso de cilindros de distinto diámetro el paso permanece invariable, el ángulo de paso será tanto menor, cuanto mayor sea el diámetro del cilindro.

Se puede construir el modelo de la línea helicoidal si se toma un rectángulo con la diagonal dibujada en él y se enrolla en forma de un cilindro circular recto; en este caso, la diagonal del rectángulo forma una espira de la línea helicoidal. Evidentemente, la línea helicoidal es la distancia más corta entre dos puntos de la superficie lateral de un cilindro circular: es la *línea geodésica de esta superficie*.

En efecto, en la superficie de tal cilindro, entre dos puntos se puede trazar una infinidad de líneas. Una de estas líneas expresa la distancia más corta entre estos puntos. Al desarrollar la superficie tal línea se desarrolla en una recta. Esto es propio de las líneas de la superficie llamadas geodésicas.

Examinemos la siguiente propiedad de una línea helicoidal cilíndrica.

Supongamos (fig. 304) que a la línea helicoidal, en un punto cualquiera A_1 de ésta, se ha trazado una tangente que corta al plano H en el punto K_2 .

El ángulo entre la línea helicoidal y cualquier generatriz del cilindro se expresa por el ángulo entre esta generatriz y la tangente (a la línea helicoidal) trazada en el punto común para la línea helicoidal y la generatriz. El desarrollo en la fig. 305 muestra que entre la línea helicoidal dada y la generatriz del cilindro se obtiene un ángulo constante, es decir, *todas las tangentes a la línea helicoidal*

tienen una misma inclinación a las generatrices del cilindro y cortan al plano H bajo un mismo ángulo α . Este mismo ángulo se obtuvo entre los desarrollos de la línea helicoidal y la circunferencia de la base.

Al desarrollar la superficie lateral del cilindro con la línea helicoidal dibujada en ésta, por ejemplo, el elemento $A_0A_3E_3$ (fig. 301) adquiere la forma del triángulo rectángulo $K_3A_3E_3$, en el que K_3A_3 es la tangente a la línea helicoidal en el punto A_3 , y K_3E_3 es la proyección de la tangente sobre el plano de la base del cilindro, o sea, la tangente a la circunferencia de su base. De aquí se desprende que el punto K_3 pertenece a la evolvente de la circunferencia, puesto que las tangentes en todos los puntos de la línea helicoidal cilíndrica tienen las trazas en el plano de la base del cilindro que forman la evolvente de la circunferencia de la base de este cilindro.

Aprovechemos esta circunstancia para la construcción de la tangente a la línea helicoidal cilíndrica en un punto cualquiera de ella. En la línea helicoidal representada en la fig. 306, la tangente se ha construido en el punto K . Ante todo se ha trazado la proyección horizontal de la tangente (el segmento kI) perpendicularmente a ok . Con ayuda del punto I en la evolvente se ha hallado la proyección I' , después de lo cual puede trazarse la proyección frontal de la tangente (la recta $I'k'$). La construcción se ha repetido para el punto L .

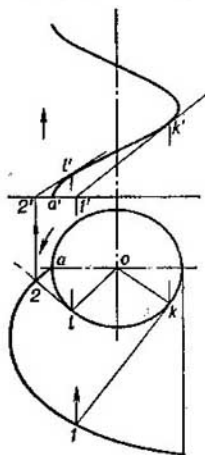


Fig. 306

Se puede construir en la superficie del cilindro una curva formada de la misma manera que la línea helicoidal, pero dejando el giro de la generatriz del cilindro uniforme y haciendo el desplazamiento del punto por la generatriz *alterno* por una ley cualquiera. Estas curvas se llaman a veces *líneas helicoidales de paso variable*.

La construcción de tales curvas se da en la fig. 307 para el caso de movimiento uniformemente acelerado del punto por la generatriz. Vienen dados los desplazamientos del punto en cada una de las doce posiciones indicadas de la generatriz; por ejemplo, al pasar a la novena posición el punto se desplazará en el segmento C_9E_9 (contando a partir de la octava posición de este punto).

En la fig. 307 se da también el desarrollo de la línea construida; el ángulo de paso es variable.

Si el punto se desplaza uniformemente por la generatriz de un cono circular recto y la generatriz realiza un movimiento de giro alrededor del eje del cono con una velocidad angular constante, la

trayectoria del punto es una *línea helicoidal cónica*¹⁾; sus proyecciones se representan en la fig. 308. Los desplazamientos del punto por la generatriz son proporcionales a los desplazamientos angulares de esta generatriz. En la fig. 308 se dan en la superficie del cono doce posiciones de la generatriz y en estas posiciones vienen indicadas las posiciones correspondientes del punto. La distancia entre los puntos de las espiras contiguas $A_0 A_{12} = h$, medida por la generatriz, se llama *paso de la línea helicoidal cónica*²⁾.

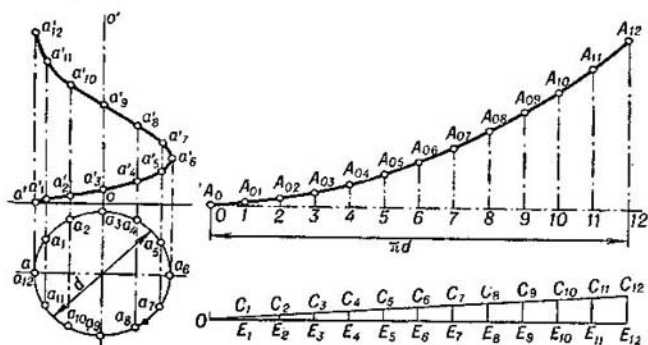


Fig. 307

La proyección de la línea helicoidal cónica sobre el plano paralelo al eje del cono (en el caso en cuestión la proyección frontal) representa una *sinusoide* con altura de onda decreciente; la proyección sobre el plano perpendicular al eje del cono (en el caso dado la proyección horizontal) representa una *espiral de Arquímedes*.

En el desarrollo de la superficie lateral del cono (fig. 308 a la derecha), la línea helicoidal se desarrolla también en una espiral de Arquímedes, puesto que al desplazamiento angular uniforme del radio le corresponde en el desarrollo de la superficie del cono un desplazamiento uniforme del punto por este radio. En el dibujo se muestra el desarrollo para dos vueltas de la línea helicoidal cónica.

¹⁾ La línea helicoidal cónica se ilustra muy bien, por ejemplo, en un muelle helicoidal cónico y en una rosca cónica.

²⁾ El paso de la línea helicoidal cónica se cuenta a veces por su eje. El segmento h_1 (fig. 308) se considera como la proyección del paso h , medido por la generatriz, sobre el eje de la línea helicoidal. La división de h en n partes iguales corresponde a la división de h_1 en la misma cantidad de partes iguales entre sí, y viceversa.

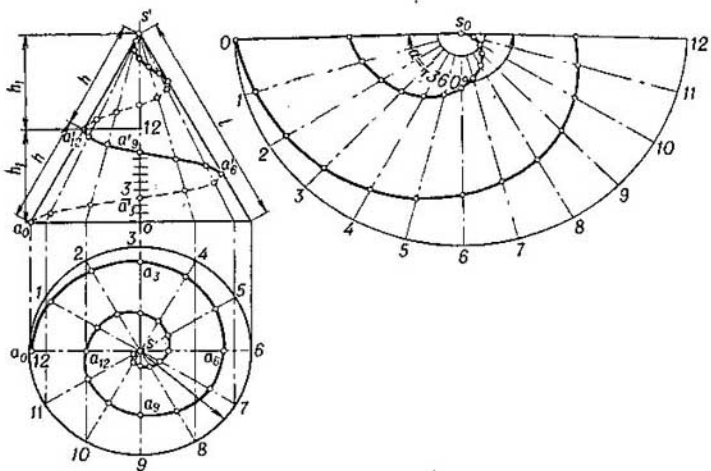


Fig. 308

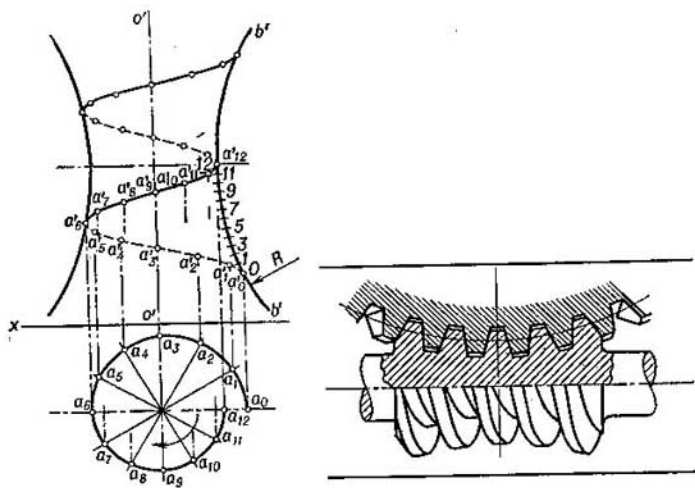


Fig. 309

La línea helicoidal puede ser construida no solamente en una superficie cilíndrica o cónica. Como ejemplo puede servir la línea helicoidal (fig. 309) en la superficie formada con el giro del arco BB alrededor del eje OO , es decir, en la superficie de un *toro*. Una línea helicoidal semejante se puede ver en los tornillos sin fin globoidales (véase la fig. 309, a la derecha).

PREGUNTAS AL § 48

1. ¿Cómo se forman las líneas helicoidales cilíndricas y cónicas?
 2. ¿A qué se le llama paso de una línea helicoidal: cilíndrica y cónica?
 3. ¿Qué forma tienen las proyecciones de las líneas helicoidales cilíndrica y cónica sobre los planos: paralelo al eje de la línea helicoidal y perpendicular a este eje?
 4. ¿Cómo distinguir si la línea helicoidal dibujada en la superficie de unas barras cilíndrica y cónica es dextrorsa o sinistrorsa? ¿Cómo señalar el paso si se representa solamente la línea?
 5. ¿En qué se desarrolla cada espira de una línea helicoidal: cilíndrica y cónica?
 6. ¿Cómo se expresa la pendiente de una línea helicoidal cilíndrica?
 7. ¿Qué línea se forma en el plano perpendicular al eje de una línea helicoidal cilíndrica si se construyen las trazas de las tangentes a esta línea?
-

VIII

CAPÍTULO

SUPERFICIES CURVAS

§ 49. CONOCIMIENTOS GENERALES SOBRE LAS SUPERFICIES CURVAS

1. Podemos darnos idea de la superficie, considerándola como la parte común de dos zonas contiguas del espacio. En la Geometría Descriptiva la superficie se define como la traza de una línea o de otra superficie en movimiento. La idea de superficie como el conjunto de todas las posiciones consecutivas de cierta línea que se mueve en el espacio es cómoda para las construcciones gráficas¹⁾. Claro está, que al representar una superficie nos limitamos a dibujar esta línea solamente en algunas de sus posiciones.

La idea de la generación de la superficie como resultado del movimiento continuo permite llamar a tales superficies *cinemáticas*²⁾.

La línea que engendra la superficie, en toda posición de ésta se llama *generatriz*. Habitualmente, se señala toda una serie de posiciones de la generatriz. Se suele decir: «generatrices», «tracemos la generatriz», etc., comprendiendo bajo estas palabras las diferentes posiciones de la generatriz. La línea generatriz puede ser recta o curva.

Así pues, la superficie cinemática representa el lugar geométrico de las líneas que se mueven en el espacio con arreglo a cualquier ley.

¹⁾ En este caso, la línea que genera la superficie puede deformarse durante el movimiento. Entonces se habla de la superficie con «generatriz variable». Por ejemplo, la superficie lateral de un cono circular se puede obtener girando una circunferencia de modo tal, que su centro se desplace uniformemente en línea recta (por el eje del cono) del vértice a la base, y simultáneamente con este movimiento aumenta regularmente el radio.

²⁾ En el apartado de la Mecánica llamado «Cinemática», el movimiento se examina sólo desde el punto de vista geométrico, independientemente de las causas físicas o fuerzas que lo provocan.

La superficie generada con arreglo a tal ley se llama *regular*, a diferencia de las *irregulares* (o aleatorias).

2. La superficie que puede ser engendrada por una recta, se llama *superficie reglada*. La superficie reglada representa el lugar geométrico de líneas rectas. La superficie para la cual solamente la línea curva puede ser su generatriz, se llama *superficie no reglada* (*superficie curva*)¹⁾.

En la fig. 310 se dan algunos ejemplos de superficies regladas. La superficie representada a la izquierda está generada por la recta A_1A_2 que, permaneciendo constantemente paralela a la recta S_1S_2 , se desliza por cierta línea fija $T_1T_2T_3$ llamada *directriz*.

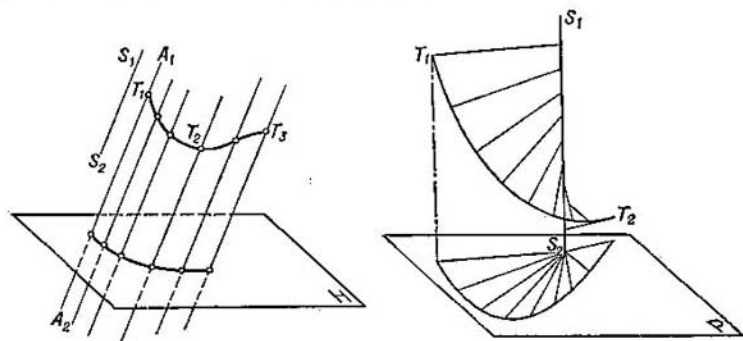


Fig. 310

Es evidente que tal superficie se generará si se considera la línea invariable $T_1T_2T_3$ como generatriz cuyos puntos se desplazan por rectas paralelas a la línea directriz S_1S_2 . Claro está que la curva deberá corresponder en todas sus posiciones a las condiciones de igualdad y paralelismo de las curvas, es decir, a la coincidencia de una con otra al ser superpuestas y al paralelismo recíproco de las tangentes trazadas a la curva en un mismo punto de ella en las posiciones consecutivas.

La superficie representada en la fig. 310, a la derecha, está engendrada por una línea recta que, permaneciendo paralela al plano P , se desliza por dos *directrices* fijas: la recta S_1S_2 y la curva T_1T_2 .

Como ejemplo de superficie curva (no reglada) sirve la esfera (con otras palabras, superficie esférica).

¹⁾ La denominación de «superficies regladas» se debe vincular con la idea de rectitud («regla», «trazado de rectas con ayuda de una regla») y no con el término de «línea».

3. Una misma superficie puede ser generada por el desplazamiento de diferentes líneas y de acuerdo a distintas condiciones que debe cumplir la generatriz en su desplazamiento. Por ejemplo, la superficie lateral de un cilindro circular recto (fig. 311) puede ser examinada como el resultado de un desplazamiento determinado de la generatriz (la recta A_1A_2) o como resultado del desplazamiento de una circunferencia cuyo diámetro se desplaza por la recta O_1O_2 , y el plano determinado por esta circunferencia es perpendicular a O_1O_2 . En la fig. 311 se muestra además la curva $T_1T_2T_3$ en el mismo cilindro; todos sus puntos son equidistantes de la recta O_1O_2 . Podemos darnos idea de la generación de la superficie lateral de este cilindro también como resultado del giro de la línea $T_1T_2T_3$ alrededor del eje O_1O_2 .

En general, las leyes de generación de una superficie pueden ser muy diversas; entre estas leyes y forma de las generatrices es deseable elegir las más simples o cómodas para la representación de las superficies y resolución de los problemas relacionados con las mismas. Si nos imaginamos un conjunto de generatrices rectilíneas y un conjunto de generatrices de circunferencias (fig. 311), cada línea de un conjunto (de una «familia» de líneas) cortará a todas las líneas del otro conjunto (de la otra «familia» de líneas), como resultado de lo cual se obtiene la red (estructura) de dada superficie. Tal representación puede ser extendida también para otras superficies.

4. Sobre el ejemplo de la superficie lateral del cilindro (fig. 311) examinemos la generación de esta superficie como resultado del desplazamiento de una esfera cuyo centro C se mueve por la recta O_1O_2 . Aquí la generatriz no es una línea, sino una superficie (una esfera). La superficie obtenida (la superficie lateral del cilindro) envuelve a la superficie generatriz (a la esfera) en todas sus posiciones. Además, ambas superficies hacen contacto por una circunferencia en cada posición de la esfera.

Si el centro de la esfera se desplazase por cierta curva, entonces, claro está, se generaría otra superficie envolvente, y no la mostrada en la fig. 311 (véase la fig. 349).

Así pues, la generación de una superficie puede ser examinada también como resultado del desplazamiento de cierta superficie generatriz, con la particularidad de que ésta puede ser invariable o variar continuamente con arreglo a cualquier ley durante su movimiento.

5. Algunas superficies curvas pueden ser desarrolladas de tal modo que todos sus puntos coincidan con un plano sin sufrir deformación alguna (por ejemplo, discontinuidades, pliegues). Además, cada punto en el desarrollo corresponde al único punto de la superficie;

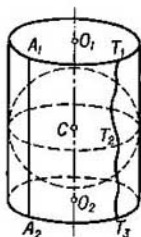


Fig. 311

las líneas rectas pertenecientes a la superficie permanecen rectas; los segmentos de las rectas conservan su longitud; el ángulo formado por la líneas en la superficie se conserva igual al ángulo entre las correspondientes líneas en el desarrollo; el área de una zona cerrada cualquiera en la superficie conserva su magnitud dentro de la correspondiente zona cerrada en el desarrollo¹⁾.

A tales superficies las llamaremos *desarrollables*. A éstas se refieren solamente las superficies regladas, y además, aquellas en las que las generatrices rectilíneas adyacentes son paralelas o se cortan, o son tangentes a cierta curva espacial.

Todas las superficies curvas no regladas y aquellas regladas que no pueden ser desarrolladas sobre un plano se llaman *alabeadas*.

§ 50. EXAMEN DE CIERTAS SUPERFICIES CURVAS, SU DETERMINACIÓN Y REPRESENTACIÓN EN EL DIBUJO

Representar una superficie en el dibujo significa indicar los datos que permiten construir cada punto de esta superficie. Para expresar una superficie basta tener las proyecciones de la línea directriz e indicar cómo se construye la línea generatriz que pasa por cualquier punto de la directriz²⁾. Pero si se le quiere dar a la representación mayor claridad y un carácter más expresivo, se dibuja además el contorno de la superficie, varias posiciones de la generatriz, los puntos y líneas más importantes de la superficie, etc.

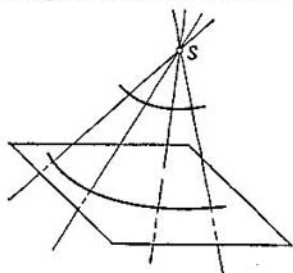


Fig. 312

secutivamente por todos los puntos de cierta curva que es la *directriz* (véase la fig. 310, a la izquierda).

La *superficie cónica* se genera por una línea recta que pasa por cierto punto fijo y consecutivamente por todos los puntos de cierta *directriz* curvilínea (véase la fig. 312). El punto fijo *S* se llama *vértice* de la superficie cónica.

¹⁾ Hacemos recordar, que se llama ángulo de dos curvas que se cortan al ángulo entre las tangentes a estas curvas en el punto de su intersección.

²⁾ En calidad de directriz frecuentemente se toma la línea de intersección de la superficie dada con el plano *H*.

A. Superficies regladas desarrollables

1. *Cilíndricas y cónicas*. La *superficie cilíndrica* se genera por una línea recta que conserva en todas sus posiciones el paralelismo a cierta recta dada y que pasa con-

Si se aleja el punto S al infinito, la superficie cónica se transforma en cilíndrica.

Las superficies cilíndricas y cónicas pueden intersectar al plano de proyección; se obtiene una línea llamada *traza de la superficie* en el plano de proyección dado. En la fig. 313 vienen dadas una superficie cilíndrica expresada por la curva directriz $A_1B_1C_1$ y la dirección de la generatriz ST , y una superficie cónica (a la derecha) expresada por la curva directriz $K_1M_1N_1$ y el vértice S . En ambos casos se han construido las trazas de las superficies sobre el plano H , es decir, las líneas que pasan por las trazas horizontales de las generatrices de la superficie dada (las curvas $a'b'c'$, abc y $k'm'n'$, kmn).

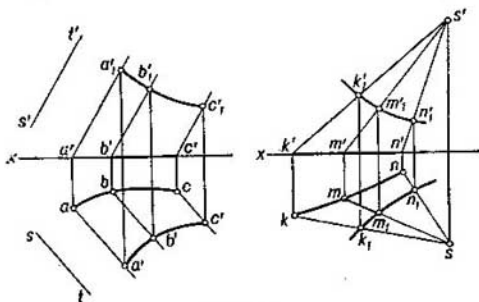


Fig. 313

La superficie cilíndrica puede ser dada por su traza sobre el plano H y la dirección de la directriz; la superficie cónica, por su traza sobre el plano H y el vértice. Dándonos un punto sobre la traza podemos construir la correspondiente generatriz de la superficie.

Para construir el contorno de una superficie cilíndrica o cónica, se debe señalar en cada uno de los planos de proyección las «generatrices límites» que delimitan la zona dentro de la cual se encuentra la proyección de la superficie. Así, por ejemplo, en la fig. 314, a la izquierda, se han señalado sobre la traza de la superficie cilíndrica los puntos por los que pasan las proyecciones de las generatrices límites: a' , a y b' , b (para la proyección frontal) y c' , c y d' , d (para la proyección horizontal). Con ayuda de estos límites y las líneas de interrupción se determinan los contornos de las proyecciones y se realiza la delimitación de las partes vista y oculta de la superficie en las proyecciones (véanse las líneas llenas y de trazos en la fig. 314).

En la fig. 314, a la derecha, se han efectuado construcciones análogas para una superficie cónica. Aquí, ambas proyecciones de la generatriz SB han resultado límites, una para la proyección frontal y la otra para la proyección horizontal del cono.

De acuerdo a las indicaciones generales (véase el comienzo de este párrafo), los puntos en las superficies cilíndrica y cónica pueden ser construidos con auxilio de las generatrices que pasan por los mismos. En algunos casos, al formular el problema, es necesario señalar si se considera el elemento buscado visto u oculto¹⁾.

En la fig. 314 se muestra la construcción de la proyección horizontal del punto E perteneciente a una superficie cilíndrica y dado por su proyección e' ; de acuerdo con los datos del problema el punto

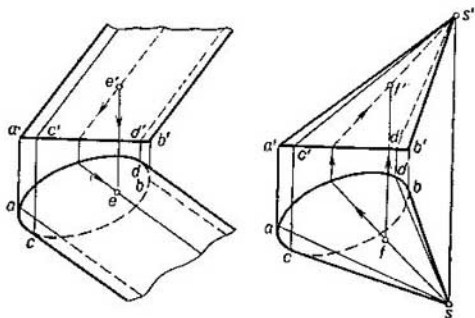


Fig. 314

E está oculto sobre el plano V . Se da también un ejemplo de la construcción de la proyección frontal del punto F perteneciente a una superficie cónica y expresado por su proyección f , con la condición de que este punto es visto sobre el plano H . En ambos casos la construcción se ha realizado con auxilio de la correspondiente generatriz; la marcha de la construcción está indicada con flechas.

Si la curva directriz (dispuesta en el espacio o que representa la traza de la superficie sobre el plano de proyección) se sustituye por una *quebrada* inscrita en dicha curva, entonces la superficie cilíndrica se sustituye por una *prismática*, y la superficie cónica, por una *piramidal* (las caras de un ángulo poliédrico). Tal relación entre estas superficies se utilizará en las construcciones ulteriores (por ejemplo, al desarrollar las superficies cilíndricas y cónicas, véase el § 68).

Las superficies cilíndricas se distinguen por la forma de la sección normal, es decir, por la curva obtenida al intersecar esta superficie con un plano perpendicular a sus generatrices.

¹⁾ Tales indicaciones se hacen a veces tomando entre paréntesis la correspondiente proyección. Por ejemplo, (e') significa que el punto E se encuentra en la parte de la superficie, considerada oculta sobre el plano V .

Destaquemos el caso cuando la sección normal de una superficie cilíndrica representa una curva de segundo orden¹⁾. Tal superficie cilíndrica se refiere a las *superficies de segundo orden*. Los puntos de cualquier superficie de segundo orden satisfacen en las coordenadas cartesianas espaciales a la ecuación de segundo orden. *Cualquier plano corta a tal superficie según una curva de segundo orden*²⁾. Una recta corta a una superficie de segundo orden siempre en dos puntos.

Según la forma de su sección normal, el cilindro de segundo orden puede ser *elíptico* (en el caso particular, *circular*), *parabólico* e *hiperbólico*. La superficie lateral del *cilindro circular recto*, conocido de la Estereometría, es una superficie de segundo orden. De todos los cilindros mencionados, solamente en el circular se puede inscribir una esfera.

Si la sección normal es una línea geométrica indefinida, entonces es un *cilindro de forma general*.

La superficie cónica que se corta por un plano según una curva de segundo orden, es una superficie de segundo orden (*cono de segundo orden*).

En la Estereometría se examina el cono circular recto. Por su vértice pasa una infinidad de planos de simetría de este cono. Estos

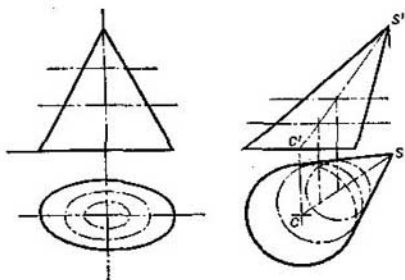


Fig. 315

planos se cortan según una recta que es el eje del cono. En tal cono se puede inscribir una esfera. La superficie lateral de un cono circular recto es una superficie de segundo orden.

Claro está, que el eje del cono circular puede ocupar cualquier posición con respecto a los planos de proyección, que se puede llevar a la más simple (por ejemplo, a la perpendicular al plano H).

En la fig. 315, a la izquierda, viene dado un cono que tiene un sistema de elipses semejantes y semejantemente situadas³⁾ (en la

¹⁾ Sobre las curvas de segundo orden véase el § 21.

²⁾ Sobre los casos de intersección según rectas véase más adelante.

³⁾ Son elipses semejantes y semejantemente situadas las elipses con ejes proporcionales y respectivamente paralelos.

fig. 315 estas elipses están situadas en planos paralelos al plano H). A tal cono se le llama *elíptico*. Claro está, que en él, como en todo cono de segundo orden, las secciones producidas por planos que no pasan por el vértice son circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas, y cada una de estas líneas puede ser adoptada como directriz. Por esta razón, la denominación de «elíptico» no debe comprenderse como indicación de que es preferible elegir la elipse en calidad de directriz.

Podemos darnos idea del cono elíptico considerándolo como un cono circular recto transformado mediante su compresión regular en el plano de la sección axial. Sobre las secciones circulares de tal cono véase el § 63.

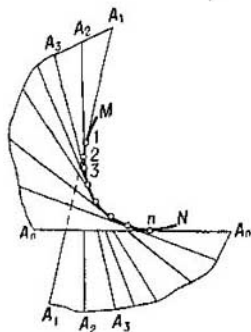


Fig. 316

línea que hace contacto en todas sus posiciones con cierta curva espacial. Esta curva espacial es la *generatriz* de la superficie y se llama *arista de retroceso*.

Tal superficie se muestra en la fig. 316; sus generatrices A_1A_1 , A_2A_2 , etc. son tangentes a la curva espacial MN . La arista de retroceso divide a la superficie en dos cavidades (lo que corresponde a la división de cada tangente en su punto de contacto en dos partes).

Evidentemente, dándose las proyecciones de la arista de retroceso se puede expresar la superficie en el dibujo. Por ejemplo, tomando una línea helicoidal cilíndrica (véase el § 48) en calidad de arista de retroceso y trazando una serie de tangentes a ésta definimos la superficie, y si el eje de la línea helicoidal se dispone perpendicularmente al plano H , la superficie engendrada representará una superficie de igual pendiente (con respecto al plano H), puesto que todas las tangentes a la línea helicoidal cortan al plano H bajo un mismo ángulo (véase la pág. 188). El dibujo de tal superficie (de una de sus cavidades) se muestra en la fig. 317, donde al arco ABC de la línea helicoidal cilíndrica se han trazado unas cuantas

El cono representado en la fig. 315, a la derecha, tiene como base un círculo, lo mismo que el cono circular recto, pero la proyección del vértice sobre el plano de la base no coincide con el centro del círculo. Tal cono se llama *circular oblicuo*. Intersecando su superficie lateral con planos paralelos al plano de la base obtenemos circunferencias cuyos centros están situados sobre la recta que pasa por el vértice y el centro de la base del cono (en la fig. 315 la recta SC).

2. La superficie llamada *superficie con arista de retroceso* se engendra por el movimiento continuo de una generatriz rectilínea que hace contacto en todas sus posiciones con cierta curva espacial.

tangentes con auxilio de la evolvente $a1_0 2_0 3_0 4_0$ como el lugar geométrico de las trazas horizontales de las tangentes (véase la fig. 306). El elemento construido de la superficie está dirigido con su convexidad hacia el observador.

En la misma figura se muestra la construcción de la proyección k' del punto K perteneciente a la superficie dada, con ayuda de la proyección k . Trazando por el punto k una tangente a la semicircunferencia abc , por medio de los puntos 4_0 y 4 hallamos sus proyecciones frontales $4'_0$ y $4'$ y, al mismo tiempo, la proyección de la tangente en la que está situado el punto K . La línea de referencia trazada a partir del punto k determina la proyección buscada k' .

Si fuese dada la proyección frontal de cierto punto perteneciente a la superficie dada y se exigiese hallar su proyección horizontal, sería necesario trazar al nivel de la proyección frontal dada un plano y cortar a éste con una superficie (sobre la intersección de superficie y plano véase más adelante el § 55 y otros). La proyección horizontal buscada del punto deberá pertenecer a la proyección horizontal de la línea de corte. En el caso en cuestión se debería tomar un plano horizontal secante; este plano cortará a la superficie que se examina según la evolvente.

Las superficies cilíndrica y cónica pueden ser consideradas como engendradas de una superficie con arista de retroceso con la condición de que la arista de retroceso representa un punto, en el primer caso infinitamente alejado, y en el segundo, situado a una distancia finita.

En el caso de una curva plana como superficie directriz, determinada por las tangentes a tal curva, representa un plano.

Al intersectar una superficie con arista de retroceso por un plano que no pasa por la generatriz, se obtiene una curva con punto de retroceso (véase la pág. 200) situado sobre la arista de retroceso. De aquí la denominación de «arista de retroceso».

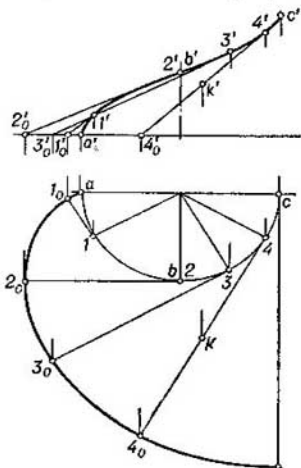


Fig. 317

B. Superficies regladas alabeadas

1. Superficies con plano de paralelismo. 1.1. *Cilindroides y conoides.* La superficie llamada *cilindroide* se genera al desplazarse una

recta que conserva en todas sus posiciones el paralelismo con cierto plano dado («plano de paralelismo») y que corta a dos líneas curvas (a dos *directrices*).

Si las directrices son curvas planas, entonces, claro está, no deben ser coplanares.

En la fig. 318 se muestra un cilindroide engendrado por el movimiento de la recta AD por las directrices ABC y DEF paralelamente al plano de paralelismo P (en este caso, un plano proyectante horizontal). Como se ve, para la construcción del dibujo se debían tener dadas las proyecciones de las directrices y la posición del plano de paralelismo.

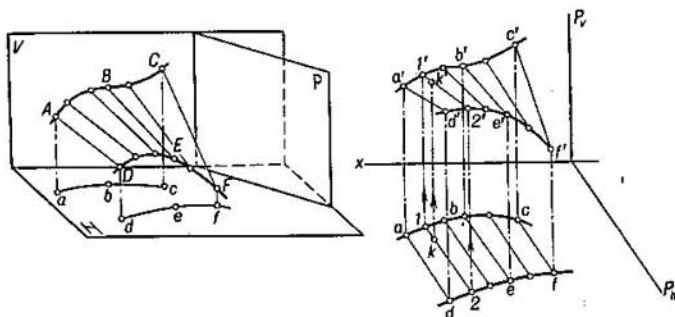


Fig. 318

La superficie llamada *conoide* se engendra por el movimiento de una recta que conserva en todas sus posiciones el paralelismo con cierto plano dado («plano de paralelismo») y que corta a dos *directrices*, una de las cuales es curva y la otra es una recta (si la curva es plana, ella no deberá pertenecer a un mismo plano que la segunda generatriz recta).

El conoide se muestra en la fig. 319. En calidad de plano de paralelismo se ha tomado el plano H . La generatriz (una recta) corta a la curva AFB y a la recta CD , situada en este caso perpendicularmente al plano H ¹⁾.

Todo plano paralelo al «plano de paralelismo» corta al cilindroide y al conoide según una recta. De aquí que, si se exige construir una generatriz cualquiera del cilindroide o del conoide, hay que trazar un plano, correspondiente al problema, que sea paralelo al plano de

¹⁾ Son conoides, por ejemplo, las superficies $SACDS$ y $SBCDS$ en la fig. 265, que, junto con los triángulos ASB y ABC , delimitan al cuerpo representado en esta figura.

paralelismo, hallar los puntos de intersección de las directrices de la superficie con este plano y por estos puntos trazar una recta que será la generatriz buscada. En el caso particular representado en la fig. 319, para construir la generatriz del conoide, que pasa por el punto E de la recta directriz, se puede prescindir del plano secante auxiliar, puesto que la proyección frontal de la generatriz deberá ser paralela al eje x . Basta trazar $e'f' \parallel x$, con ayuda del punto f' hallar el punto f y la proyección horizontal ef .

En la fig. 318, a la derecha, se muestra la determinación de la proyección k' del punto K perteneciente a un cilindroide, si está dada la proyección k . Por el punto k se ha trazado un plano (no se

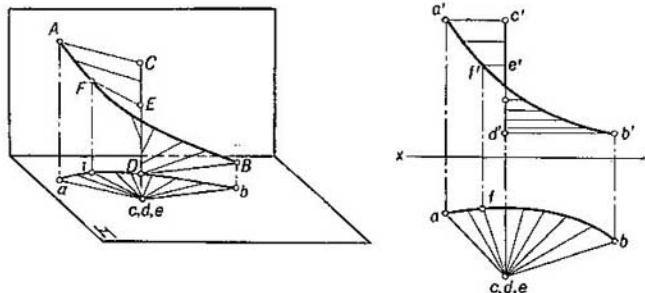


Fig. 319

muestra en el dibujo) paralelo al plano de paralelismo P . Como resultado de la intersección obtenemos la recta con las proyecciones $1-2$, $1'2'$ y la proyección k' sobre $1'2'$.

Si viene dada la proyección frontal de un punto cualquiera perteneciente a un cilindroide y hay que hallar su proyección horizontal se procede como fue explicado en esta página, a saber: se traza cierto plano que corte al cilindroide de tal manera que el punto se encuentre en este plano. Por ejemplo, el cilindroide representado en la fig. 318 se debería cortar con un plano horizontal al nivel de la proyección frontal dada del punto, construir la proyección horizontal de la línea de intersección y en ella la proyección horizontal buscada del punto.

De modo análogo se debe proceder en el caso de la construcción de las proyecciones de un punto en el conoide.

1.2. *Paraboloide hiperbólico (plano oblicuo)*. En la fig. 320 se da el dibujo de la superficie llamada *plano oblicuo* o *paraboloide hiperbólico*. La generación de esta superficie puede ser considerada como resultado del movimiento de una generatriz rectilínea por dos directrices (dos rectas que se cruzan) paralelamente a cierto plano de

paralelismo. En la fig. 320 el plano de paralelismo es el plano de proyección H , y las directrices, las rectas AB y CD .

En la misma figura se muestra la construcción de la proyección k con auxilio de la proyección frontal dada k' del punto perteneciente a un plano oblicuo. La tarea se reduce al trazado de la proyección

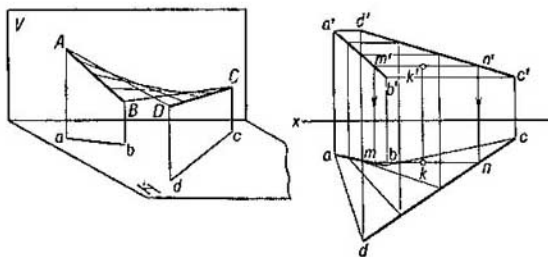


Fig. 320

frontal $m'n'$ de la generatriz al nivel del punto k correspondientemente al plano de paralelismo dado.

Si se conociese la proyección k , entonces, para hallar la proyección k' habría que trazar cierto plano secante de tal modo que pasara en el espacio por el punto K , es decir, proceder así como fue expuesto más arriba para la superficie con curva de retroceso (pág. 201).

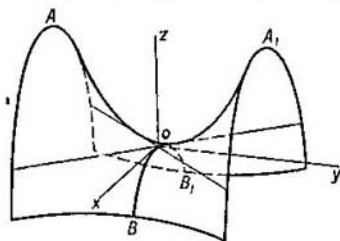


Fig. 321

En la intersección del paraboloides hiperbólico con un plano paralelo a xOy se obtiene una hipérbola (si tal plano pasa por el vértice O , el paraboloides hiperbólico se corta según dos rectas que pasan por el punto O). Los planos paralelos a xOz y yOz cortan al paraboloides hiperbólico según parábolas. Con esto está relacionada la denominación de la superficie «paraboloides hiperbólico».

En la fig. 322 viene representado un plano oblicuo generado por el movimiento de la generatriz rectilínea AB por las rectas que se

cruzan AD y BC , dispuestas en planos recíprocamente paralelos, siendo dado el plano de paralelismo P . Evidentemente, se obtendrá la misma superficie, si en calidad de generatriz se toma la recta AD y se le hace desplazarse por las directrices AB y CD paralelamente al plano P_1 . De aquí se desprende que por cualquier punto de un plano oblicuo se pueden trazar dos rectas pertenecientes a este plano.

En la fig. 322 se ve una parábola correspondiente a la parábola AOA_1 mostrada en la fig. 321. También se ha construido una parábola obtenida al intersectar un paraboloides hiperbólico con un plano de perfil que pasa por los puntos B y D (en la fig. 321, la parábola BOB_1). Para construir la hipérbola según la cual el plano H corta

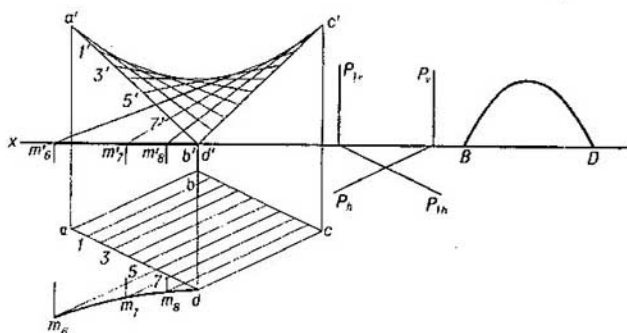


Fig. 322

al paraboloides hiperbólico (fig. 322), hay que hallar las trazas horizontales de las generatrices, como se muestra en la fig. 322 para algunas de ellas.

Así pues, para las superficies examinadas (cilindroide, conoide y paraboloides hiperbólico) la generatriz es una recta que debe cortar al mismo tiempo a dos directrices y permanecer constantemente paralela a cierto plano, con la particularidad de que las posiciones de estas directrices y del plano de paralelismo deben permanecer invariables.

2. Superficies con tres directrices. 2.1. Hiperboloides de una hoja. Se llama hiperboloides de una hoja a la superficie engendrada por el movimiento de una recta que corta simultáneamente a tres rectas que se cruzan (directrices)¹⁾.

¹⁾ Si todas las directrices son paralelas a un plano, entonces la generatriz, al moverse por estas directrices, engendra un paraboloides hiperbólico.

Si (fig. 323) en una de las tres rectas que se cruzan dadas (en la recta I) se toma un punto A_1 y se traza por este punto y cada una de las dos rectas restantes (la II y la III) los planos Q y P , entonces estos planos se cortarán según una recta que pasará por el punto A_1 y que cortará a la recta II en el punto K_2 y a la recta III en el punto K_3 . Si en calidad de puntos de partida se toman todos los puntos de la recta I y para cada uno de éstos se construyen por el procedimiento indicado tales rectas como A_1K_2, \dots , éstas generarán una superficie llamada *hiperboloide de una hoja*.

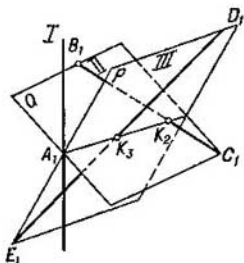


Fig. 323

En la práctica se toma una serie de puntos de la recta I y se construyen las generatrices correspondientes. En la fig. 323 hubiera bastado con la construcción de un solo plano, por ejemplo, el plano Q de la recta II y hallar el punto de intersección K_3 de la recta III con el plano Q .

En la Geometría Analítica se demuestra que el hiperboloide de una hoja puede ser también obtenido como resultado del movimiento de una elipse que se deforma (fig. 324, a la izquierda) cuyo plano permanece paralelo al plano xOy y los extremos de cuyos ejes se deslizan por hipérbolas situadas en los planos xOz y yOz . En la fig. 324, a la derecha, se muestra un hiperboloide de una hoja con las generatrices rec-

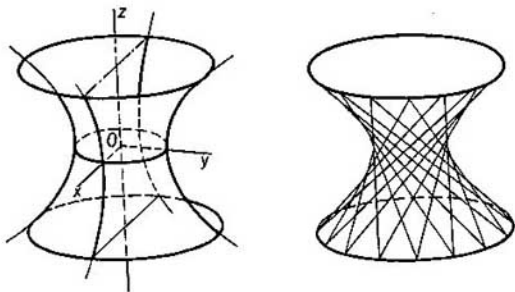


Fig. 324

tilíneas trazadas en él. Si se sustituye la elipse por una *circunferencia deformada*, ambas hipérbolas directrices serán iguales. En este caso, la superficie se llama *hiperboloide de revolución de una hoja* (véase más adelante el § 51).

Por cualquier punto de un hiperboloide de una hoja se pueden trazar dos rectas pertenecientes a esta superficie. Antes esto fue señalado para el paraboloides hiperbólico.

En la fig. 325 está representado un hiperboloide de una hoja dado por tres rectas que se cruzan de posición arbitraria. Una de estas rectas está situada perpendicularmente al plano H . Tal posición siempre se puede obtener, por ejemplo, por el método de cambio de los planos de proyección. En dicha figura se muestra la construcción de la proyección frontal k' del punto K perteneciente al hiperboloide de una hoja y dado por su proyección horizontal k . Trazando por los puntos a y k una recta (la proyección horizontal de la generatriz), con auxilio de los puntos d y f construimos las proyecciones d' y f' , lo que determina la proyección frontal de esta generatriz, y en ella el punto buscado k' .

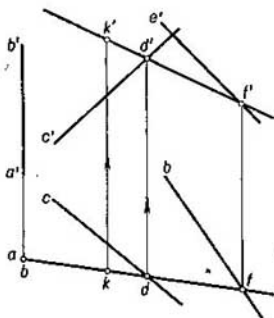


Fig. 325

Si en vez de la proyección horizontal se da la proyección frontal del punto K perteneciente a un hiperboloide de una hoja y, además, ninguna de las directrices es perpendicular al plano V , entonces se debe intersectar el hiperboloide de una hoja con un plano que pase por el punto K , como ya se dijo más arriba.

2.2. *Cilindro oblicuo con tres directrices.* Se llama cilindro oblicuo con tres directrices la superficie generada por el movimiento de la recta generatriz por tres directrices, de las cuales por lo menos una es curva ¹⁾.

Si las generatrices son rectas que se cruzan, se obtiene el hiperboloide de una hoja examinado más arriba (pág. 205). Es posible el caso cuando una de las directrices sea una curva plana. Esta no debe estar situada en un mismo plano con ninguna de las rectas que se cruzan, que son las otras dos directrices. Si dos de las directrices son curvas y la tercera recta, entonces tal cilindro oblicuo se llama *conosoide*. Un ejemplo se da en la fig. 326. El conosoide viene dado por dos curvas situadas en los planos de perfil y la recta AB perpendicular al plano H . Las proyecciones horizontales de las generatrices pasan por el punto a (b). Las proyecciones frontales de las generatrices cortan a la proyección $a'b'$ en distintos puntos. En la fig. 326 se muestra la construcción de las proyecciones frontal y de perfil del punto K perteneciente al conosoide y dado por su proyección k : por los puntos a y k se ha trazado la proyección de la generatriz, se han construido las demás proyecciones de esta generatriz, y sobre ellas,

¹⁾ Sobre la construcción de las generatrices de un cilindro oblicuo con tres directrices véase el § 63.

las proyecciones k' y k'' . Si viene dada, por ejemplo, la proyección k' y hay que hallar la proyección k , entonces se utiliza la correspondiente sección de la superficie, como se dijo sobre esto en la pág. 201.

Los cilindros oblicuos con tres directrices tienen amplia aplicación en la práctica (al diseñar hélices, superficies de la carrocería de los automóviles y otras).

Así pues, para las superficies examinadas (hiperboloide de una hoja y cilindro oblicuo con tres directrices) la generatriz es una recta que debe intersectar simultáneamente tres directrices fijas.

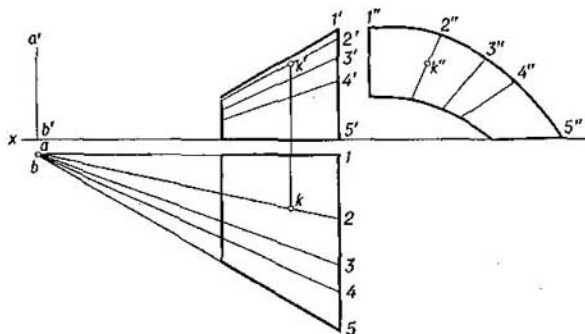


Fig. 326

C. Superficies curvas no regladas

1. De segundo orden. Más arriba se examinaron las superficies *regladas* de segundo orden: cilindro, cono, paraboloides hiperbólico y el hiperboloide de una hoja. Ahora examinemos las demás superficies de segundo orden, las *curvas*: elipsoide, paraboloides elíptico y el hiperboloide de dos hojas.

1.1. *Elipsoide*. El elipsoide puede ser obtenido como resultado del movimiento de una elipse deformable $ACBD$ (fig. 327) cuyo plano queda paralelo al plano xOy y los extremos de cuyos ejes se deslizan por las elipses $AEBF$ y $CEDF$. Si en este elipsoide los tres diámetros AB , CD y EF no son iguales entre sí, entonces el elipsoide se llama *triaxial*; si dos de ellos son iguales entre sí, pero no son iguales al tercero, entonces se obtiene un elipsoide de revolución *achatado* o *estirado* (véase el § 51); si $AB=CD=EF$, se obtiene una *esfera*. Al intersectar el elipsoide con cualquier plano se obtiene una elipse; en casos particulares, una circunferencia.

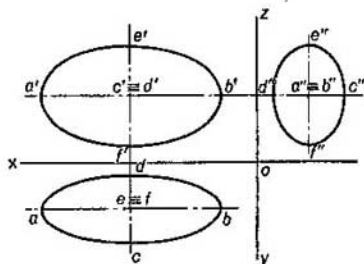


Fig. 327

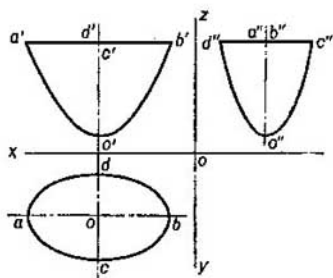


Fig. 328

1.2. *Paraboloide elíptico*. El paraboloide elíptico puede ser obtenido como resultado del movimiento de la elipse deformable $ABCD$ (fig. 328) cuyo plano queda paralelo al plano xOy y los extremos de cuyos ejes se deslizan por las parábolas AOB y COD . Al cortar un paraboloide elíptico con diferentes planos pueden obtenerse solamente elipses (en algunos casos, circunferencias) y parábolas, con la particularidad de que las últimas se obtienen en el caso de planos secantes paralelos al eje del paraboloide elíptico. Si se sustituye la elipse $ABCD$ por una circunferencia deformable, entonces, ambas parábolas AOB y DOC serán iguales. En este caso la superficie se llama *paraboloide circular* o *paraboloide de revolución* (véase el § 51).

1.3. *Hiperboloide de dos hojas*. El hiperboloide de dos hojas (fig. 329) consta de dos partes (hojas) que se extienden al infinito. Cada una de estas hojas puede ser obtenida como resultado del movimiento de una elipse deformable ($A_1C_1B_1D_1$ y $A_2C_2B_2D_2$) cuyo plano queda perpendicular al eje de la superficie O_1O_2 y los extremos de cuyos ejes se deslizan por dos hipérbolas. Si sustituimos la elipse por una circunferencia deformable, ambas hipérbolas $A_1O_1B_1$ y $C_1O_1D_1$ serán iguales. En este caso la superficie se llama *hiperboloide de revolución de dos hojas* (véase el § 51).

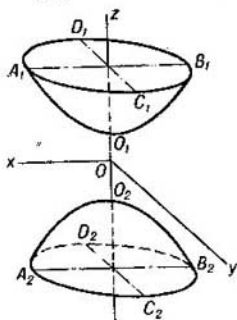


Fig. 329

En las secciones producidas en el hiperboloide de dos hojas por diferentes planos, pueden obtenerse elipses (en casos particulares, circunferencias), hipérbolas y parábolas.

2. Cíclicas. La superficie *cíclica* se genera por una circunferencia de radio variable cuyo centro se desplaza por una curva cualquiera. Destaquemos el caso de generación de una superficie cíclica, cuando el plano de la circunferencia generatriz queda perpendicular a la curva directriz dada por la que se mueve el centro de la circunferencia. Tal superficie se suele llamar *estriada*. Podemos darnos una idea de la superficie estriada considerándola también como una envolvente de la familia de las esferas de diámetro variable cuyos centros se encuentran en cierta curva directriz. El radio de la circunferencia generatriz o de la esfera generatriz puede ser constante. La superficie generada por el movimiento de tal circunferencia por cierta curva directriz o al envolver todas las posiciones consecutivas de la esfera generatriz cuyo centro realiza semejante movimiento, se llama *tubular*. Como ejemplo de su aplicación en la técnica pueden servir los compensadores en las tuberías¹⁾.

La curva directriz para una superficie tubular puede ser una línea helicoidal cilíndrica; en este caso tendremos una *superficie helicoidal tubular*. Véase un ejemplo en la fig. 349: la superficie del alambre de sección circular enrollado en el tubo. Es también una superficie helicoidal tubular la superficie de un muelle cilíndrico con sección circular de sus espiras.

Las superficies cíclicas de diferentes tipos se aplican, por ejemplo, en las tuberías de gas, en las turbinas hidráulicas y en las bombas centrífugas. Si en vez de una directriz curva tomamos una recta, la superficie estriada se transforma en una superficie de revolución (véase el § 51), en particular, en cónica, y la superficie tubular, siendo la directriz recta, se transforma en una superficie del cilindro de revolución.

D. Superficies dadas por su estructura

Se llama *superficie dada por su estructura* a la superficie dada por cierta cantidad de líneas pertenecientes a esta superficie. En particular, podemos imaginarnos un grupo de ciertas curvas planas, cada una de las cuales está dispuesta en planos paralelos entre sí, y otro grupo de líneas que cortan a las del primer grupo; en la intersección se genera la estructura de la superficie.

La superficie dada por su estructura no se puede considerar como completamente determinada: pueden haber superficies con una misma estructura, pero que se distinguen algo una de la otra.

¹⁾ Dispositivos para absorber las variaciones de longitud de la tubería en el caso de oscilación considerable de la temperatura.

Como ejemplo de superficies estructurales pueden servir las superficies de los cascos de los barcos, de los aviones y de los automóviles.

E. Superficies gráficas

Toda superficie puede ser dada gráficamente¹⁾. Pero, para unas superficies las generatrices y las directrices están geoméricamente determinadas y la generación de la superficie está sometida a cierta ley, para otras estas condiciones no existen. En el último caso las superficies se dan solamente con ayuda del dibujo lineal valiéndose de cierta cantidad de líneas que deberán pertenecer (según la idea durante el diseño) a tal superficie o que se revelan en la superficie existente.

A tales superficies se les suele llamar *superficies gráficas*.

A esta clase de superficies pertenece también la superficie llamada *topográfica*, es decir, la superficie terrestre desde el punto de vista de su representación. El relieve de la superficie terrestre se reproduce con líneas (horizontales) obtenidas al intersecar a esta superficie con planos horizontales.

PREGUNTAS A LOS §§ 49 Y 50

1. ¿Qué significa superficie?
2. ¿Cómo se genera la superficie llamada cinemática?
3. ¿Qué significa línea generatriz de una superficie?
4. ¿En qué consiste la diferencia entre las superficies reglada y no reglada?
5. ¿Puede tener la superficie engendrada en calidad de generatriz no una línea, sino una superficie?
6. ¿A qué se le llama línea directriz?
7. ¿Cuáles superficies se refieren a las alabeadas (no desarrollables)?
8. ¿Qué significa «representar una superficie en el dibujo»?
9. ¿Cómo se generan las superficies cilíndrica, cónica, con arista de retroceso y cómo se representan en el dibujo?
10. ¿Qué significa superficie de segundo orden y qué líneas se producen en la intersección de esta superficie con planos?
11. ¿Cómo se distinguen las superficies cilíndricas?
12. ¿A cuál cono se le llama elíptico y a cuál, oblicuo circular?
13. ¿Por qué se expresa la superficie con arista de retroceso en el dibujo?
- ¿Cómo, además de «superficie con arista de retroceso» se le suele llamar a esta superficie?
14. ¿Cómo se generan las superficies con plano de paralelismo?
15. ¿Cuáles líneas son las directrices en el cilindroide y en el conoide?
16. ¿Cómo se genera la superficie oblicua (el paraboloides hiperbólico)?
17. ¿Según cuáles líneas se corta el paraboloides hiperbólico por planos paralelos a los planos de coordenadas?
18. ¿Cuántas rectas pertenecientes al paraboloides hiperbólico se pueden trazar por cada uno de sus puntos?
19. ¿Cómo se genera el hiperboloides de una hoja?
20. ¿Cuántas rectas pertenecientes al hiperboloides de una hoja se pueden trazar por cada uno de sus puntos?

¹⁾ Es decir, con auxilio del dibujo lineal.

21. ¿Cómo se genera la superficie llamada cilindro oblicuo con tres directrices?
22. ¿En cuál caso el cilindro oblicuo con tres directrices se llama conoide?
23. Enumeren las superficies regladas y curvas de segundo orden.
24. ¿Puede ser examinada la esfera como un elipsoide y en cuál caso?
25. ¿Cuáles curvas se obtienen al intersectar un elipsoide con planos?
26. ¿A qué se le llama paraboloides elíptico?
27. ¿Cuáles curvas se obtienen al intersectar un paraboloides elíptico con planos?
28. ¿Cuáles curvas se obtienen en la intersección de un hiperboloides de dos hojas con planos?
29. ¿Cuáles superficies se llaman cíclicas?

§ 51. SUPERFICIES DE REVOLUCION

En el grupo de superficies curvas (regladas y no regladas) se incluyen las superficies, ampliamente difundidas en la práctica, llamadas de revolución. Se llama *superficie de revolución* a la superficie engendrada por el movimiento de cualquier línea generatriz que gira alrededor de una recta fija llamada *eje de la superficie*¹⁾.

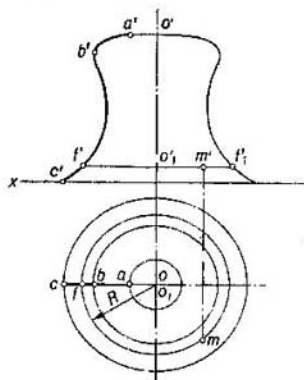


Fig. 330

La superficie de revolución puede ser dada por la generatriz y la posición del eje. En la fig. 330 se muestra dicha superficie. Aquí como generatriz sirve la curva ABC y como eje la recta OO_1 dispuesta en un mismo plano con la curva ABC . Cada punto de la generatriz describe una circunferencia. De este modo, el plano perpendicular al eje de la superficie de revolución corta a esta superficie según una circunferencia. Estas circunferencias se llaman *paralelos*. El mayor de los paralelos se llama *ecuador*, y el menor, *cuello* de la superficie²⁾.

Al plano que pasa por el eje de la superficie de revolución se le llama *plano meridional*. La línea de intersección de una superficie de revolución con el plano meridional se llama *meridiano de la superficie*.

¹⁾ Durante la generación de la superficie de revolución el eje permanece fijo.

²⁾ Más exactamente, se llama ecuador a aquel de los paralelos que es mayor que los paralelos vecinos a éste a ambos lados del mismo, considerados hasta el primer cuello; cuello es el menor de los paralelos vecinos hasta el primer ecuador. De aquí se desprende que la superficie de revolución puede tener unos cuantos ecuadores y cuellos.

Se puede llamar *vértice de la superficie de revolución* al punto de intersección del meridiano de esta superficie con su eje, si en la intersección no se forma un ángulo recto.

Si el eje de la superficie de revolución es paralelo al plano V , el meridiano situado en el plano paralelo al V se llama *meridiano principal*. En tal posición, el meridiano principal se proyecta sobre el plano V en verdadera magnitud. Si el eje de la superficie de revolución es perpendicular al plano H , el contorno de la proyección horizontal de la superficie es una circunferencia.

Lo más conveniente desde el punto de vista de la representación es que el eje de la superficie de revolución sea perpendicular al plano H , al V o al W .

Algunas superficies de revolución representan casos particulares de las superficies examinadas en el § 50. Tales son: 1) el cilindro de revolución, 2) el cono de revolución, 3) el hiperboloide de revolución de una hoja, 4) el elipsoide de revolución, 5) el paraboloides de revolución, 6) el hiperboloide de revolución de dos hojas.

Para el *cilindro* y el *cono de revolución* los meridianos son rectas; en el primer caso, paralelas al eje y equidistantes de éste, en el segundo caso son rectas que cortan al eje en un mismo punto y bajo un mismo ángulo al mismo. Puesto que el cilindro y el cono de revolución son superficies que se extienden infinitamente en dirección de sus generatrices, en las representaciones éstos se delimitan generalmente por algunas líneas, por ejemplo, por las trazas de estas superficies en los planos de proyección o por uno de sus paralelos. El *cilindro circular recto* y el *cono circular recto*, conocidos de la Estereometría, están limitados por una superficie de revolución y planos perpendiculares a sus ejes. Los meridianos de tal cilindro son rectángulos, y los de dicho cono son triángulos.

Para el *hiperboloide de revolución* el meridiano es una hipérbola, con la particularidad de que si el eje de giro es el eje real de la hipérbola, entonces se engendra un hiperboloide de revolución de *dos hojas*, y si se hace girar la hipérbola alrededor de su eje imaginario, se engendra un hiperboloide de revolución de *una hoja*.

El *hiperboloide de revolución de una hoja* puede ser también engendrado por el giro de una recta cuando la generatriz y el eje de giro son rectas que se cruzan. En la fig. 331 se muestra un hiperboloide de revolución de una hoja engendrado por el movimiento de la recta AB que gira alrededor del eje indicado y limitado por dos paralelos; la circunferencia descrita desde el centro O_1 es el cuello de la superficie.

En el hiperboloide de revolución de una hoja se pueden trazar generatrices rectilíneas en dos direcciones, por ejemplo, así como se muestra en la fig. 331, y con inclinación hacia el lado contrario bajo el mismo ángulo al eje.

Además de las rectas en esta superficie pueden haber hipérbolas y circunferencias: las hipérbolas como consecuencia de la intersección con planos que pasan por el eje del hiperboloide, y las circunferencias como resultado de la intersección con planos perpendiculares al eje.

En la fig. 331, a la derecha, se muestra la construcción de la proyección frontal del hiperboloide de revolución de una hoja con ayuda de su eje y su generatriz. Primeramente se ha hallado el radio

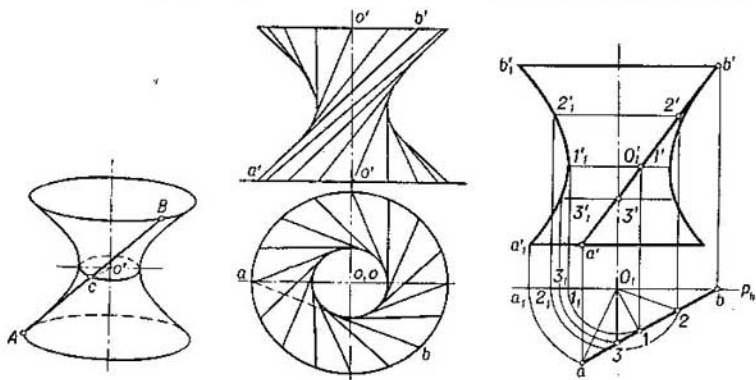


Fig. 331

del cuello de la superficie. Para ello se ha trazado la perpendicular $o_1 I$ a la proyección horizontal de la generatriz. Con esto queda determinada la proyección horizontal de la perpendicular común a la generatriz y al eje. La magnitud verdadera del segmento expresado por las proyecciones $o_1 I'$ y $o_1 I$ es igual al radio del cuello de la superficie. A continuación al girar los puntos con las proyecciones $2', 2; 3', 3; a' y a$ se han llevado al plano P paralelo al V , lo que da la posibilidad de trazar la línea de contorno de la proyección frontal del hiperboloide. Su proyección horizontal representará tres circunferencias concéntricas.

Para el paraboloides de revolución el meridiano es una parábola, cuyo eje es el eje de la superficie.

Para el elipsoide de revolución el meridiano es una elipse. La superficie puede ser engendrada girando la elipse alrededor de su eje mayor (elipsoide de revolución «estirado»; fig. 332, a la izquierda) o alrededor de su eje menor (elipsoide de revolución «comprimido»; fig. 332, a la derecha). El elipsoide de revolución es una superficie delimitada; se puede representar totalmente. También se puede re-

presentar totalmente la esfera. Para la esfera, el ecuador y los meridianos son circunferencias iguales entre sí.

Prestemos atención una vez más a que las superficies de revolución como el cilindro, el cono y el hiperboloide de una hoja son regladas, es decir, pueden ser engendradas por el giro de una recta¹⁾. Pero el elipsoide, el hiperboloide de dos hojas y el paraboloides generan por el giro no de una recta, sino de una elipse, una hipérbola y una parábola, eligiendo el eje de giro de tal modo que la curva generatriz se disponga simétricamente respecto de este eje. Lo mismo

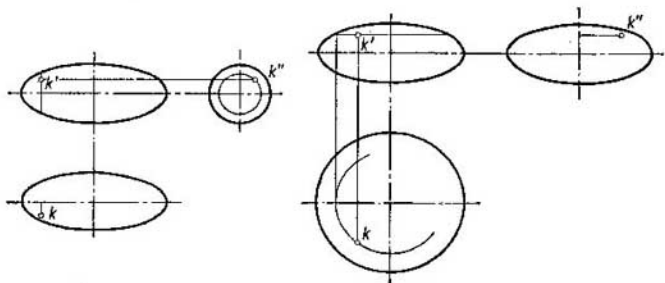


Fig. 332

se puede decir respecto al hiperboloide de revolución de una hoja si se genera como resultado del giro de una hipérbola alrededor de su eje imaginario.

Dado que el eje de giro se elige coincidente con el eje de simetría de la elipse, parábola e hipérbola, la elipse y la hipérbola engendran dos superficies cada una, por el hecho de que ambas curvas tienen dos ejes de simetría, mientras que la parábola genera una sola superficie, por tener un solo eje de simetría. Por consiguiente, cada superficie engendrada se obtiene solamente mediante el giro por un solo procedimiento, mientras que la esfera, que se puede considerar como un elipsoide cuando los ejes mayor y menor de la elipse generatriz son iguales, que se transforma en este caso en una circunferencia, puede ser engendrada por el giro por más de un procedimiento: la circunferencia generatriz es simétrica respecto de cada uno de sus diámetros.

¹⁾ La ley de disposición de las generatrices rectilíneas del hiperboloide de revolución de una hoja se emplea en la construcción conocida bajo el nombre de «Torre de Shújov». Shújov (1853—1939) es uno de los eminentes ingenieros rusos. La «Torre de Shújov» se emplea en los mástiles de transmisión, en las torres con tanque de agua, etc.

Al girar la circunferencia (o su arco) alrededor del eje situado en el plano de esta circunferencia, pero que no pasa por su centro, se obtiene una superficie llamada *toro*. Se llama también toro al cuerpo delimitado por la superficie tórica.

Se distinguen (fig. 333): 1) el *toro abierto*, de otra manera *corona circular*, 2) el *toro cerrado*, 3) el *toro que corta a sí mismo*. En la fig. 333

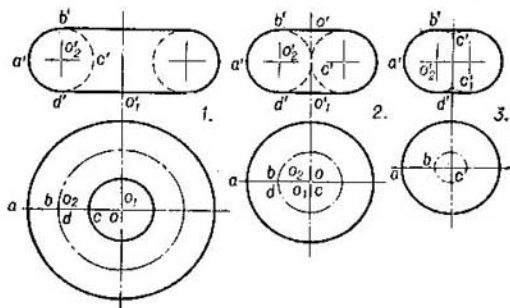


Fig. 333

todos ellos se representan en la posición más simple: el eje del toro es perpendicular al plano de proyección, en el caso dado al plano H .

Como generatriz para el toro abierto y el toro cerrado sirve la circunferencia; para el toro que corta a sí mismo, el arco de circunferencia. En los toros abierto y cerrado se pueden inscribir esferas.

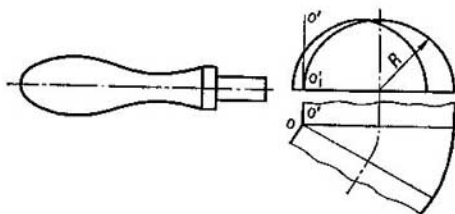


Fig. 334

El toro puede ser considerado como una superficie que envuelve esferas iguales, cuyos centros se encuentran en la circunferencia.

El toro tiene dos sistemas de secciones circulares: en los planos perpendiculares a su eje y en los planos que pasan por el eje del toro.

La superficie llamada toro se encuentra muy frecuentemente en la construcción de maquinaria y en la arquitectura. En la fig. 334, a la izquierda, se repre-

senta una pieza cuya superficie de revolución contiene un toro que corta a sí mismo y un toro abierto y, a la derecha, se muestra esquemáticamente la superficie de paso de una bóveda cilíndrica a otra que tiene la forma de toro cerrado con el eje OO_1 .

Entre las superficies de revolución señalemos además el *catenoide*. Esta superficie se genera por una vuelta completa de la *línea de cadena*¹⁾ alrededor del eje horizontal que se encuentra en un mismo plano con dicha línea.

La posición de un punto en la superficie de revolución queda determinada con ayuda de una circunferencia que pasa por este punto sobre la superficie de revolución.

Pero esto no excluye la posibilidad de emplear generatrices rectilíneas en el caso de superficies de revolución regladas, semejantemente a como se muestra en la fig. 314 para los cilindros y conos de forma general.

En la fig. 330 se muestra el empleo de los paralelos para la construcción de las proyecciones de un punto perteneciente a la superficie de revolución dada. Si se conoce la proyección m' , entonces trazamos la proyección frontal $f'f'_1$ del paralelo y luego con el radio $R=O_1f'$ describimos una circunferencia (la proyección horizontal del paralelo) y sobre ésta hallamos la proyección m . Si se conociera la proyección m , sería necesario trazar con el radio $R=om$ una circunferencia y con ayuda del punto f hallar f' y trazar $f'f'_1$ que es la proyección frontal del paralelo, sobre la cual deberá encontrarse la proyección m' . En la fig. 332 se muestra la construcción de las proyecciones del punto K perteneciente a un elipsoide de revolución, y en la fig. 335, las del punto M perteneciente a la superficie de una corona circular.

En la fig. 335, a la derecha, se muestra la determinación de las proyecciones de los puntos de una esfera. Con auxilio de la proyección dada a del punto A se ha construido la proyección frontal a' ; con ayuda de la proyección dada b' se ha hallado la proyección horizontal b del punto B , que satisface a la condición complementaria de que el punto B está oculto si se mira hacia el plano V .

El punto C viene dado en el ecuador: su proyección c se encuentra en el contorno de la proyección horizontal de la esfera, es decir, en la proyección horizontal del ecuador. Los puntos K y M se encuentran en el meridiano principal; estos puntos pertenecen a los paralelos sobre los cuales se encuentran los puntos A y B . El punto D también se encuentra en el meridiano principal y está oculto si se mira hacia el plano H .

¹⁾ La línea de cadena es la curva cuya forma toma una cadena suspendida en dos de sus puntos, o en general un hilo pesado inelástico suspendido de sus extremos.

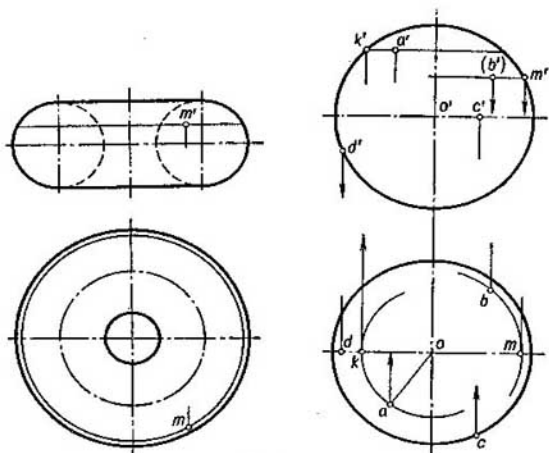


Fig. 335

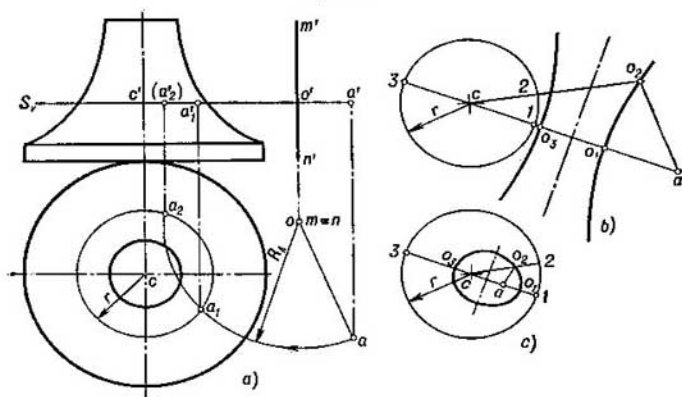


Fig. 336

Examinemos un ejemplo de la construcción de las proyecciones de los puntos pertenecientes a una superficie de revolución. Supongamos que se exige llevar el punto A , haciéndolo girar alrededor del eje dado MN , a la superficie de revolución dada (fig. 336, a). Dado

que en este caso el eje de la superficie de revolución y el eje de giro del punto A son perpendiculares al plano de proyección H , la circunferencia de giro del punto A se proyecta sobre el plano H en verdadera magnitud, así como el paralelo de la superficie de revolución obtenido al intersecarse esta superficie con el plano de giro del punto A . En este plano está situado también el centro de giro del punto A , el punto O (el punto de intersección del eje de giro MN con el plano de giro S). Lo demás está claro del dibujo. En la posición A_2 en la superficie, el punto resulta oculto en el plano V .

Supongamos que se exija elegir el eje de giro de tal modo que el punto dado A pueda ser llevado a la superficie de revolución dada. En la pág. 140 fue examinado un problema semejante, con la diferencia de que allí se exigía elegir el eje de giro de tal manera que se pudiera llevar el punto al plano, haciéndolo girar alrededor de este eje. Entonces fue establecido que existe una zona en la que no se puede elegir el eje, puesto que al girar el punto alrededor de tales ejes dicho punto no puede hacer contacto con el plano. Esta zona quedaba determinada por un cilindro parabólico y la parábola aparecía al examinar la posición recíproca del punto que giraba y la recta en la que debería encontrarse este punto al hacer contacto con el plano.

Ahora, evidentemente, la cuestión se resolverá al examinar la posición recíproca del punto A y la circunferencia (el paralelo) en la superficie del cuerpo de revolución.

De la fig. 336, a se deriva que la proyección o del centro de giro deberá estar situada de tal manera que R_A no sea menor que la distancia desde el punto o hasta el punto más cercano en la proyección de la circunferencia de radio r . Si se toma el punto o a iguales distancias de a y de la proyección de esta circunferencia (por ejemplo, en o_1 u o_2 , véase la fig. 336, b), entonces en este punto se puede colocar el eje de giro: la circunferencia de giro del punto A hará contacto con la circunferencia de radio r , o sea, el punto A hará contacto con la superficie de revolución.

¿Dónde se encuentran en el dibujo todos los puntos alejados a la misma distancia del punto a y de la circunferencia de radio r ? Estos se encuentran en la hipérbola (fig. 336, b) para la cual el punto a es uno de sus focos, el punto o_1 , en el que el segmento $a1$ se divide por la mitad, y que es uno de los vértices. Si se divide el segmento $a3$ por la mitad, obtendremos el segundo vértice de la hipérbola (el punto o_2); el segundo foco se encontrará en el punto c , es decir, en el centro de la circunferencia obtenida en la intersección de la superficie del cuerpo de revolución por el plano S (fig. 336, a).

De lo examinado se desprende que los puntos situados en ambas ramas de la hipérbola o entre éstas pueden ser, cada uno de ellos, elegidos en calidad de proyección horizontal del eje de giro.

Puede darse el caso cuando el punto se encuentra dentro de la superficie de revolución. Por consiguiente, trazando por este punto el plano de giro obtendremos la proyección a dentro de la proyección de la circunferencia de radio r según la cual el plano de giro del punto A corta a la superficie de revolución (fig. 336, c). También en este caso es evidente que R_A no debe ser menor que la distancia del punto o (o sea, la proyección del eje) al punto más cercano de la proyección de la circunferencia de radio r . Las posiciones extremas de las proyecciones de los ejes se dispondrán ahora como los puntos de una elipse con los focos en los puntos a y c , con el eje mayor en la recta $1-3$, con los vértices en los puntos o_1 y o_2 . Dentro de esta elipse no deben tomarse las proyecciones de los ejes; tales ejes no dan la posibilidad de llevar el punto A a la superficie de revolución.

Así pues, la cuestión de cómo elegir el eje de giro para, haciendo girar el punto alrededor de éste, llevar este punto al plano o a la superficie de revolución

cuyo eje es paralelo al eje de giro, nos ha conducido a una elipse (fig. 336, c), una parábola (fig. 244) y a una hipérbola (fig. 336, b) como lugares geométricos de los centros de giro.

Durante la resolución de distintos problemas, como *lugares geométricos* de los puntos o líneas, que responden a determinadas condiciones, *se emplean unas u otras superficies*. Por ejemplo, vienen dados el plano P y el punto K exterior a este plano; es necesario determinar cómo se dispondrán en el plano P los puntos que se encuentran a la distancia dada r del punto K (la distancia r es mayor que la distancia del punto K al plano P). En este caso la resolución está ligada con el empleo de la esfera como lugar geométrico de los puntos que se encuentran a la distancia r del punto K . El plano P cortará a esta esfera según una circunferencia que será precisamente la que dará la solución del problema¹⁾.

Si se exigiera construir en el plano P los puntos que se encuentran a la distancia r , no del punto, sino de cierta recta AB no perteneciente al plano P , el lugar geométrico de tales puntos en el espacio sería la superficie del cilindro de revolución con el eje AB y radio r , y los puntos buscados en el plano P se obtendrían en la línea de intersección de este cilindro con el plano P .

En adelante, en la fig. 368, a la derecha, y en la 401 se pueden ver ejemplos del empleo de superficies de revolución cónicas como lugares geométricos de rectas que pasan por un punto dado.

Si en el problema se plantea la cuestión de puntos equidistantes del plano Q y del punto M dados, entonces como lugar geométrico de tales puntos en el espacio es conveniente emplear el paraboloid de revolución con el foco de la parábola en el punto M .

El empleo de unas u otras superficies en calidad de lugares geométricos, claro está, no se agota con los ejemplos examinados.

PREGUNTAS AL § 51

1. ¿A qué se le llama superficie de revolución?
2. ¿Con qué se puede expresar la superficie de revolución?
3. ¿A qué se les llama paralelos, meridianos, cuello, ecuador y meridiano principal en una superficie de revolución?
4. ¿Cuál de los ejes de la hipérbola sirve como eje de giro para la generación de: a) un hiperboloide de revolución de una hoja, b) un hiperboloide de revolución de dos hojas?
5. ¿Se puede generar un hiperboloide de revolución de una hoja con ayuda de una recta?
6. ¿Cuáles superficies de revolución (excepto el hiperboloide de una hoja) son regladas?
7. ¿Cómo se genera la superficie llamada toro?
8. ¿En cuál caso al toro se le llama «corona circular»?
9. ¿Cuántos sistemas de secciones circulares tiene el toro?
10. ¿Cómo se determina la posición de un punto en la superficie de revolución?

¹⁾ Proponemos al lector cumplir el dibujo y resolver este problema y los que siguen a continuación.

§ 52. SUPERFICIES HELICOIDALES
Y TORNILLOS

En la fig. 337 se representa una espira de una *superficie helicoidal* generada por el movimiento del segmento AB . La recta determinada por este segmento corta en todas las posiciones al eje bajo un mismo ángulo (en la fig. 337, un ángulo de 60°). El desplazamiento de los extremos del segmento a lo largo del eje es proporcional al desplazamiento angular del segmento.

Los puntos A y B generan líneas helicoidales cilíndricas, así como todos los puntos del segmento AB y, por consiguiente, para una representación más exacta del contorno de la super-

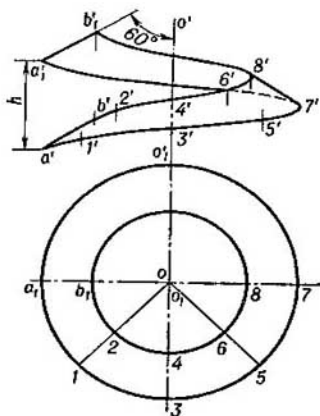


Fig. 337

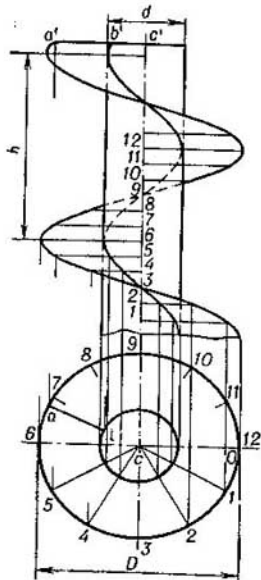


Fig. 338

ficie helicoidal sobre el plano V se debería haber trazado la mayor cantidad posible de proyecciones de las líneas helicoidales descritas por distintos puntos del segmento AB y luego trazar las curvas que envuelven a estas proyecciones. En la práctica, en vez de esta construcción voluminosa se trazan rectas que hacen contacto simultáneamente con las proyecciones de las líneas helicoidales (fig. 345).

Si la inclinación de la generatriz respecto al eje del cilindro no es igual a 90° (por ejemplo, 60° en la fig. 337), la *superficie helicoidal* se llama *oblicua*. Si dicho ángulo es igual a 90° , se engendra una

superficie helicoidal recta. Esta última superficie se muestra en la fig. 338.

Por su generación, la superficie representada en la fig. 338 es un *conoide*. En efecto, la generatriz es una recta paralela en todas sus posiciones a cierto plano (en el caso dado es perpendicular al eje del cilindro); la generatriz corta a dos líneas directrices, una curva y otra recta (el eje del cilindro). Puesto que la curva directriz representa una línea helicoidal, *este conoide se llama helicoidal*. A este conoide se le llama también *heloicoide recto*¹⁾.

En la fig. 338 el conoide helicoidal se muestra junto con un cilindro circular que tiene el eje común con el primero; como resultado, en la superficie del cilindro se genera una línea helicoidal cilíndrica cuyo paso es igual al paso de la línea helicoidal directriz. La superficie comprendida entre ambas líneas helicoidales se llama *conoide helicoidal circular*.

La superficie representada en la fig. 337, llamada superficie helicoidal oblicua, se llama también heloicoide oblicuo. Un rasgo característico de tal superficie es que la generatriz rectilínea corta en todas sus posiciones a las directrices, una línea helicoidal cilíndrica y una recta (el eje de la superficie) y, además, la generatriz corta al eje bajo un ángulo constante diferente de 90° . En todas sus posiciones, la generatriz es paralela a las generatrices de cierto *cono de revolución* cuyo eje coincide con el eje de la línea helicoidal (fig. 339, a la izquierda). Si, por ejemplo, es necesario obtener la proyección frontal de la generatriz del heloicoide oblicuo que pasa por el punto C , se debe trazar primeramente la proyección horizontal de esta generatriz, es decir, trazar el radio sc , con ayuda del punto c_1 , hallar el punto c'_1 y la proyección frontal de la generatriz SC_1 del cono, y a continuación trazar $c'd'$ paralelamente a $s'c'_1$.

En la fig. 339, a la derecha, se muestra una superficie helicoidal generada por el movimiento del segmento tangente a la superficie del cilindro. La construcción se reduce de nuevo a la determinación de las proyecciones de las líneas helicoidales engendradas por dos puntos: por el extremo A del segmento y por el punto de contacto B . El segmento puede ser dirigido respecto al eje o bien bajo un ángulo recto (como se ha tomado en la fig. 339), o bien bajo un ángulo agudo.

La superficie representada en la fig. 339, a la derecha, es un cilindroide (véase la pág. 201). Efectivamente, la generatriz permanece en todas sus posiciones paralela a cierto plano y se desliza por dos directrices, dos curvas espaciales; el plano de paralelismo es perpendicular al eje del cilindro; la generatriz hace contacto con la superficie del cilindro (los puntos de contacto generan una línea helicoidal cilíndrica) y al mismo tiempo corta a la línea helicoidal directriz cuyo eje coincide con el eje del cilindro. La superficie representada en la fig. 339, a la derecha, se llama *cilindroide helicoidal*. Si la generatriz de tal superficie, que se cruza con el eje del cilindro, forma con este eje un ángulo diferente de 90° , la superficie no se refiere a la serie de cilindroides; esta superficie lleva el nombre de *heloicoide circular oblicuo*.

¹⁾ Se le suele llamar también *heloicoide*. Bajo el nombre de heloicoide se comprende una superficie helicoidal reglada.

Las superficies helicoidales examinadas pertenecen a las superficies no desarrollables. Pero existe una superficie que se considera como desarrollable. Esta es la superficie con arista de retorno que es la línea helicoidal cilíndrica (véase la fig. 317). Esta superficie helicoidal se llama *helicoides desarrollable*.

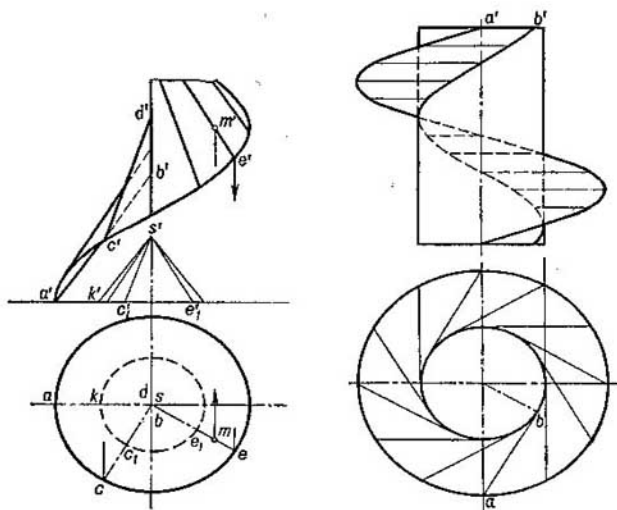


Fig. 339

En la fig. 340 la superficie del helicoides oblicuo se muestra en su intersección con el plano T perpendicular al eje de esta superficie; la curva de intersección se representa en el plano H en tamaño natural, puesto que $T \parallel H$. Esta curva es una espiral de Arquímedes.

La construcción de esta curva se reduce a lo siguiente. Dividiendo el ángulo $a_0c_0c_0$ (180°) en varias (en el caso dado en seis) partes iguales, dividimos en la misma cantidad de partes iguales entre sí el segmento c_0c_0 . Tomando como radio c_0a_1 , a partir del punto c_0 marcamos $c_0c_1 = \frac{c_0c_0}{6}$, tomando como radio c_0a_2 marcamos $c_0c_2 = 2c_0c_1$, etc.

Ahora, prestemos atención en cómo se construyen las proyecciones de los puntos pertenecientes a las superficies helicoidales recta y oblicua. Para la superficie helicoidal recta esto se muestra en la

fig. 338. Supongamos que el punto A , perteneciente a la superficie, viene dado por su proyección horizontal a . Para hallar la proyección a' es necesario trazar la proyección horizontal de la generatriz en la que debe encontrarse el punto A , es decir, trazar el radio cb por la proyección a . Con ayuda del punto b hallamos el punto b' y trazamos la proyección frontal de esta generatriz, que coincide con la recta $c'b'$. Sobre esta recta hallamos la proyección a' ¹⁾.

Si viene dada la proyección a' y hace falta hallar a , entonces, al principio trazamos por a' una recta perpendicular al eje de la línea helicoidal hasta su intersección con la proyección de la línea helicoidal en el punto b' , con auxilio de este punto hallamos el punto b y sobre el radio cb , el punto a .

Si viene dada la proyección a' y hace falta hallar a , entonces, al principio trazamos por a' una recta perpendicular al eje de la línea helicoidal hasta su intersección con la proyección de la línea helicoidal en el punto b' , con auxilio de este punto hallamos el punto b y sobre el radio cb , el punto a .

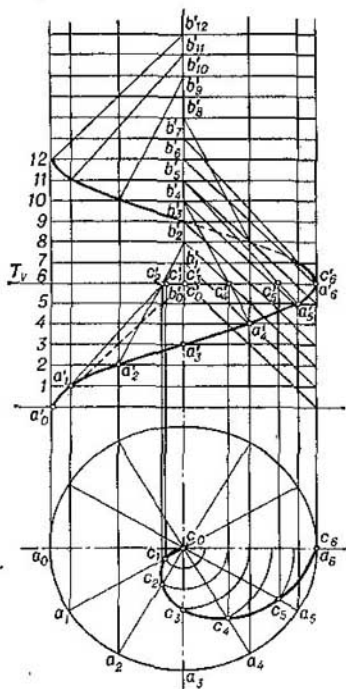


Fig. 340

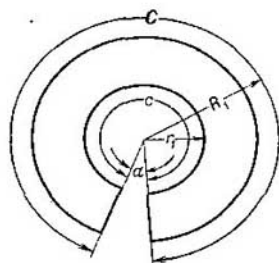


Fig. 341

La precisión de la construcción aquí está relacionada con la precisión del trazado de la sinusoide (la proyección frontal de la línea helicoidal), puesto que el punto b' se encuentra sobre ella.

En el caso de una superficie helicoidal oblicua (fig. 339, a la izquierda), si viene dada la proyección m y es necesario hallar m' , trazamos por el punto m el radio se , con ayuda de los puntos e y e_1

¹⁾ Presten atención en la visibilidad del punto A respecto del plano V ; en el caso de «opacidad» de la superficie helicoidal el punto A está oculto.

hallamos los puntos e' y e'_1 , trazamos la proyección $s'e'_1$ de la generatriz del cono y paralelamente a ésta trazamos a través del punto e' la proyección de la generatriz de la superficie helicoidal. Sobre esta proyección obtenemos la proyección m' .

Si viene dada la proyección m' y hay que hallar m , entonces es necesario construir la curva (la espiral de Arquímedes) de intersección de la superficie helicoidal oblicua con un plano trazado al nivel del punto m' perpendicularmente al eje de la superficie, y sobre la espiral hallar el punto m .

Las superficies helicoidales señaladas en las figs. 337—340 no pueden ser desarrolladas con exactitud sobre un plano. Para la superficie helicoidal recta representada en la fig. 338, se puede *aproximadamente* desarrollar cada vuelta por separado así como se muestra en la fig. 341. El desarrollo de una vuelta se puede representar (aproximadamente) como parte de un anillo plano.

Para construir esta parte de anillo es necesario hallar la magnitud de los radios R_1 y r_1 y del ángulo α . Si se designa el paso de la superficie helicoidal (fig. 338) por h y los diámetros exterior e interior (diámetro del cilindro) por D y d , entonces, por la fórmula dada en la pág. 188, las longitudes de las secciones de las líneas helicoidales se expresarán así:

$$C = \sqrt{\pi^2 D^2 + h^2} \quad \text{y} \quad c = \sqrt{\pi^2 d^2 + h^2}.$$

Puesto que las líneas helicoidales se desarrollan en el caso dado en arcos concéntricos con un mismo ángulo central, $c : C = r_1 : R_1$ y, por consiguiente,

$$r_1 = \frac{c}{C} R_1.$$

Designando la anchura de la superficie helicoidal, o sea, la diferencia $R_1 - r_1 = \frac{D-d}{2}$, por a , obtenemos $R_1 = r_1 + a$, de donde $r_1 = \frac{C}{c} r_1 + \frac{ac}{C}$, o bien $r_1 = \frac{ac}{C-c}$. De aquí se desprende que el ángulo α puede ser determinado con ayuda de la fórmula

$$\alpha = \frac{2\pi R_1 - C}{2\pi R_1} \cdot 360^\circ.$$

Hagamos $D=100$ mm, $d=60$ mm, $h=50$ mm. Hallamos: $a=20$ mm, $C \approx 318$ mm, $c \approx 195$ mm, $r_1 \approx 32$ mm, $R_1 \approx 52$ mm, $\alpha \approx 10^\circ$.

Describimos con los radios $R_1=52$ mm y $r_1=32$ mm dos circunferencias concéntricas, construimos el ángulo central $\alpha=10^\circ$ y de este modo separamos parte del anillo que representa (aproximadamente) el desarrollo de una vuelta de la superficie helicoidal.

Disponiendo de varias de estas vueltas desarrolladas se puede unir cada vuelta con una barra cilíndrica de diámetro d (como se muestra en la fig. 343) y fijar entre sí una tras otra las vueltas enrolladas sobre la barra.

De modo semejante a como durante el movimiento helicoidal de un punto se engendra una línea helicoidal y durante el movimiento helicoidal del segmento de una recta se engendra una superficie helicoidal, se puede obtener un cuerpo helicoidal si se hace mover a cualquier figura plana (por ejemplo, un cuadrado,

un triángulo, un trapecio) por la superficie de un cilindro de tal modo que los vértices de esta figura se desplacen por las líneas helicoidales y el plano de la propia figura pase constantemente por el eje del cilindro. Se forma un resalte helicoidal delimitado por superficies helicoidales y cilíndricas. La construcción de las proyecciones de este resalte helicoidal se reduce a la construcción de tantas líneas helicoidales cuantos vértices tiene la figura elegida.

En la fig. 342 a la izquierda se muestra la construcción del resalte helicoidal generado por el movimiento de un cuadrado. Uno de los lados del cuadrado linda constantemente con la generatriz del cilindro; los vértices del cuadrado se desplazan por las líneas helicoidales.

Durante el fileteado el resalte helicoidal (espira) se obtiene quitando con ayuda de una herramienta cortante parte del material.

El resalte helicoidal obtenido está delimitado por dos superficies helicoidales rectas y dos superficies cilíndricas, exterior e interior, que hace contacto con la superficie del propio cilindro. Al conjunto del cilindro y el resalte helicoidal en éste se le llama tornillo. En el caso representado en la fig. 342, a la izquierda, viene dado un tornillo a derechas: la pendiente del resalte helicoidal en la parte delantera (visible) del cilindro va de izquierda a derecha. Si la pendiente del resalte helicoidal en la parte delantera (visible) del cilindro fuera de derecha a izquierda (fig. 342, a la derecha), tendríamos un tornillo a izquierdas (véase la pág. 187, líneas helicoidales dextrorsa y sinistrorsa).

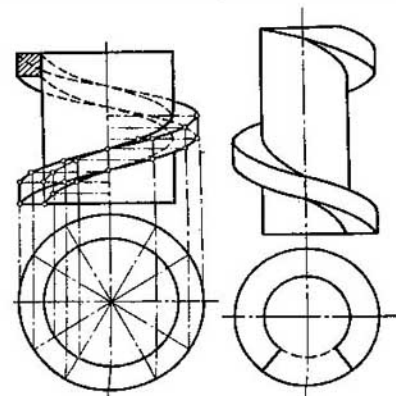


Fig. 342

En la figura 343 se muestra un resalte helicoidal generado por el movimiento de un rectángulo cuyo lado menor linda con la generatriz del cilindro. Los tornillos de este tipo se emplean en los transportadores de tornillo¹⁾.

En la misma fig. se muestra la construcción de la proyección a' del punto A que se encuentra en la superficie helicoidal y que viene dado por su proyección a . La construcción es similar a la mostrada en la fig. 338, pero se muestra cómo evitar el error en el trazado de la sinusoides. Para ello se puede hallar el segmento l que determina el desplazamiento del punto l a lo largo del eje del tornillo al girar la generatriz de la posición inicial a la posición Cl (es decir, el ángulo ocl). Se debe tomar la proporción $x : h = \angle ocl : 360^\circ$ y de aquí determinar x , lo que nos dará precisamente la magnitud l . Lo sucesivo está claro del dibujo.

Los tornillos representados en la fig. 342 tienen rosca cuadrada. Si en vez de un cuadrado tomamos un triángulo y le hacemos desplazarse a lo largo del cilindro así como se hizo con el cuadrado, obtendremos un tornillo con rosca triangular (fig. 344). El triángulo generador linda con uno de sus lados con el cilindro principal; los vértices del triángulo generan líneas helicoidales, para la construcción de las cuales se han tomado dos circunferencias. Estas circunferencias se han dividido en 12 partes; los puntos de división se han proyectado sobre líneas horizontales trazadas a través de las 12 divisiones del paso del tornillo. La su-

¹⁾ El transportador de tornillo (transportador helicoidal), de otra manera, transportador de tornillo sin fin, se usa para el desplazamiento de cereales, materiales en pedazos pequeños, etc.

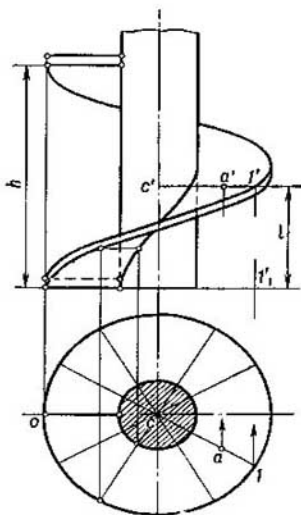


Fig. 343

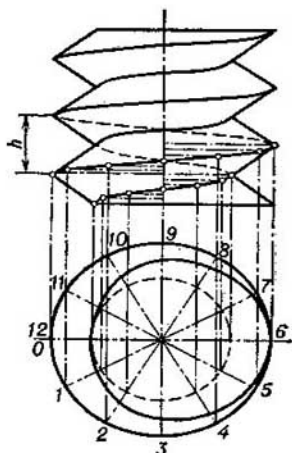


Fig. 344

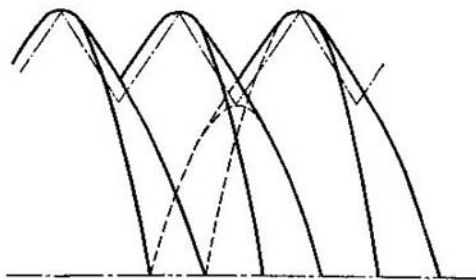


Fig. 345

perficie del tornillo con rosca triangular representa una combinación de dos superficies helicoidales oblicuas. El contorno visible sobre el plano V se ha obtenido trazando tangentes a las líneas helicoidales mayor y menor (fig. 345). Así se procede corrientemente, aunque en realidad el contorno de la proyección de la superficie helicoidal oblicua sobre el plano V representa una línea curva.

En la fig. 346 se muestra la construcción de la sección transversal de un tornillo con rosca triangular por el plano R . Se ha trazado el plano proyectante horizontal auxiliar P que pasa por el eje del tornillo. En la intersección con el

resalte helicoidal el plano P produce el triángulo generador¹⁾, cuya proyección horizontal se sitúa sobre la traza horizontal del plano P ; la proyección frontal del lado AB de este triángulo se corta con la traza R_v en el punto k' que representa la proyección frontal de uno de los puntos pertenecientes a la línea de intersección de la superficie helicoidal por el plano R . Sobre el segmento ab se obtiene la proyección horizontal del punto K , perteneciente a la proyección horizontal de la línea de intersección buscada de la superficie helicoidal por el plano R .

A continuación, se ha construido un punto más M (m' , m) de esta sección; esta vez no se ha trazado el plano proyectante horizontal, con el fin de mostrar que es suficiente marcar solamente la posición de la proyección horizontal del triángulo generador, trazando uno de los radios. Así mismo, en vez de la proyección frontal completa del triángulo generador basta limitarse a la proyección de uno de sus lados, como se muestra en la fig. 346.

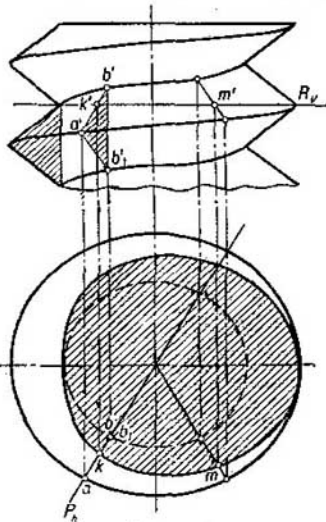


Fig. 346

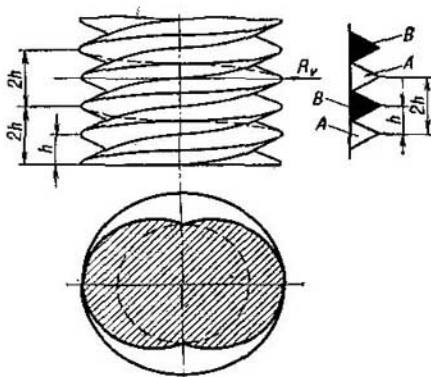


Fig. 347

Trazando una serie de radios y construyendo las posiciones del triángulo generador correspondientes a estos radios, obtendremos una serie de puntos para trazar la proyección horizontal del contorno de la sección. Como se ve, la figura de la sección está delimitada por una línea curva que tiene eje de simetría; por consiguiente, durante la construcción basta hallar una de las mitades de la línea curva, y la otra mitad se puede construir como una rama simétrica. Cada una de las mitades de esta línea curva representa una espiral de Arquímedes, sobre cuya construcción se habló en la pág. 223.

En el tornillo representado en la fig. 344, el triángulo generador, después de cada vuelta alrededor del eje del cilindro principal, se eleva a la posición vecina a la magnitud del paso de la línea helicoidal. Este tornillo se genera por el movimiento de un perfil, y se llama *de rosca simple*²⁾.

¹⁾ El plano P produce el triángulo generador en dos de sus posiciones: en los lados delantero (visible) y posterior (oculto) del tornillo. En la fig. 346 se muestra la construcción para la parte delantera (visible) del tornillo.

²⁾ A los tornillos de rosca simple se les llama a veces *de un filete*, *de filete sencillo* y *de rosca de entrada simple*.

Si se toman dos perfiles y, considerándolos unidos entre sí, se les hace moverse por las líneas helicoidales de tal manera que cada perfil después de una vuelta se eleve a la altura de $2h$ (fig. 347), se obtendrá un tornillo de *doble rosca*¹⁾.

En la fig. 348 están representados un tornillo de rosca cuadrada dextrorsa y una tuerca para éste. En el corte horizontal se ven los segmentos de rectas que junto con las semicircunferencias delimitan la figura de la sección. Estos segmen-

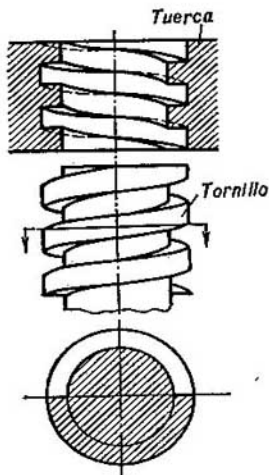


Fig. 348

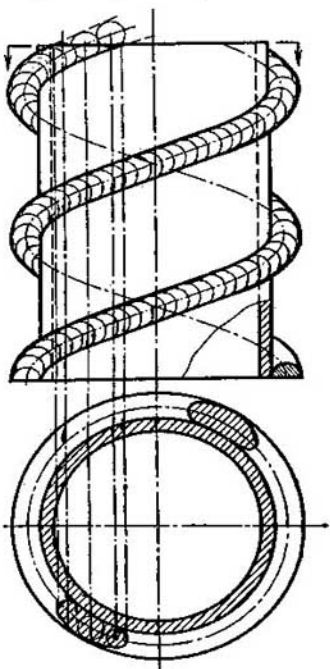


Fig. 349

tos corresponden a que el resalte helicoidal está delimitado no por una superficie helicoidal oblicua, sino por una superficie helicoidal recta.

En la fig. 349 se muestra el tornillo de doble rosca de un transportador de dos tornillos²⁾, generado por el enrollado de un cable de acero de sección circular sobre un tubo de acero; corrientemente, el cable se fija al tubo por soldadura.

Representándose una serie de esferas, el diámetro de las cuales es igual al diámetro del alambre y cuyos centros están situados en la línea helicoidal (en el eje de la espira), trazamos el contorno de la proyección de la espira como una línea que envuelve a la circunferencia (las proyecciones de las esferas).

¹⁾ Se les suele llamar: *de doble filete* y *de rosca de dos entradas*.

²⁾ El transportador de dos tornillos sirve para el desplazamiento de cargas por piezas, por ejemplo, sacos, fardos, etc.

En la proyección horizontal se muestran las secciones de dos espiras (el contorno de la proyección de la sección se ha construido como una línea que envuelve a las circunferencias, obtenidas al intersecar las esferas indicadas más arriba con un plano).

PREGUNTAS AL § 52

1. ¿Cómo se generan las superficies helicoidales recta y oblicua?
2. ¿Por qué a la superficie helicoidal recta se le llama también conoide helicoidal?
3. ¿Qué representa un conoide helicoidal circular?
4. ¿Cómo se engendra un cilindroide helicoidal?
5. ¿Cuáles líneas se producen en la sección de las superficies helicoidales recta y oblicua por un plano perpendicular al eje de estas superficies?
6. ¿Cómo se puede desarrollar aproximadamente una vuelta de una superficie helicoidal recta?
7. ¿Cuál de las superficies helicoidales se refiere a las superficies desarrollables?
8. ¿A qué se le llama tornillo?
9. ¿Cómo distinguir por su aspecto exterior a los tornillos con rosca dextrorsa y sinistrorsa?
10. ¿A qué se le llama tornillo de rosca múltiple?

§ 53. TRAZADO DE PLANOS TANGENTES A LAS SUPERFICIES CURVAS

Al representar las superficies curvas y al ejecutar las construcciones relacionadas con éstas puede surgir la necesidad de trazar un plano tangente a la superficie.

Tomemos una pequeña parte de la superficie y un punto sobre ésta. Si por este punto trazamos curvas contenidas en esta superficie y rectas tangentes a estas curvas, las rectas tangentes serán coplanares¹⁾. A este plano se le llama tangente a la superficie en el punto dado.

El punto de la superficie en el que puede haber un plano tangente (y sólo uno) se llama *ordinario*. A los puntos ordinarios se contraponen los puntos *singulares*, por ejemplo: el vértice de una superficie cónica, el vértice de una superficie de revolución, un punto en la arista de retorno.

El plano queda absolutamente determinado por dos rectas que se cortan; por esta razón, para la construcción de un plano, tangente a una superficie curva en cierto punto de ésta, basta trazar por este punto dos curvas pertenecientes a esta superficie y una tangente a cada una de estas curvas, que pase por dicho punto. Estas dos rectas (tangentes) determinan al plano tangente.

La perpendicular al plano tangente en un punto ordinario de la superficie sirve de *normal a la superficie*. De aquí la denominación

¹⁾ Se examina en la Geometría diferencial. En esta disciplina se estudian las imágenes geométricas a base del método de coordenadas por los medios del cálculo diferencial.

de sección normal de la superficie (sección por un plano que pasa por la normal).

En la fig. 350 viene dado un plano tangente a un elipsoide de revolución estirado en el punto K de este elipsoide. Por este punto se ha trazado la paralela a la superficie y a esta paralela, la tangente KF : la proyección $k'f'$ coincide con la proyección frontal de la paralela, y la proyección horizontal kf es la tangente a la circunferencia, o sea, la proyección horizontal de la paralela. En calidad de segunda curva, que pasa por el punto K , se ha tomado el meridiano, que en

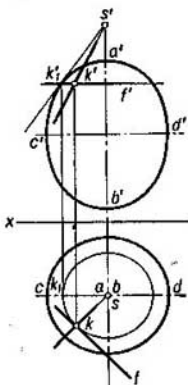


Fig. 350

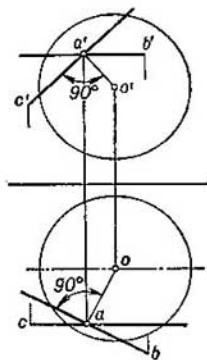


Fig. 351

la fig. 350 no viene representado: se puede hacer uso del meridiano principal ya trazado, es decir, del contorno de la proyección frontal del elipsoide. Hay que imaginarse que el elipsoide ha sido girado alrededor de su eje AB de tal modo que el meridiano, que pasa por el punto dado K , ha ocupado la posición del meridiano principal AK_1B . En este caso, el punto K ocupará la posición K_1 . Trazando en el punto k_1 la tangente a la elipse, obtenemos la proyección frontal de la segunda tangente al elipsoide en el punto K_1 . Ahora es necesario hacer girar a esta tangente de tal manera que el punto k_1 ocupe la posición inicial k . El punto S , situado sobre la tangente y sobre el eje del elipsoide, permanece fijo, y la tangente al meridiano en el punto K se expresará por las proyecciones sk y $s'k'$. Las rectas KF y SK determinan al plano buscado.

Evidentemente, tal construcción es aplicable también para la esfera. Pero, en este caso, se puede proceder con más sencillez, partiendo de que *el plano, tangente a la esfera, es perpendicular al radio trazado en el punto de tangencia*. Por eso, trazando el radio OA (fig.

351), construimos el plano, dando su horizontal AB y su frontal AC , perpendicular a OA . Estas rectas determinan el plano tangente a la esfera en el punto A de ésta.

En los ejemplos examinados (figs. 350 y 351) el plano tangente tiene un punto común con la superficie. Si nos imaginamos curvas pertenecientes a la superficie y que pasen por este punto, entonces cerca del punto de tangencia, estas curvas se situarán a un lado del plano tangente. Lo mismo podríamos observar en el paraboloides de revolución, en el toro, generado por un arco (menor que una semicircunferencia) que gira alrededor de sus cuerdas, etc. Tales puntos en la superficie se llaman *elípticos*. Si todos los puntos de una superficie son elípticos, esta superficie es convexa, por ejemplo, el elipsoide representado en la fig. 350.

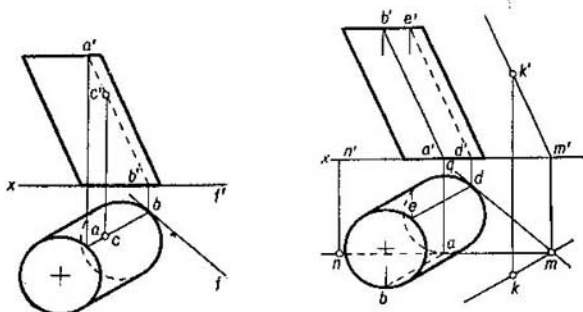


Fig. 352

En la fig. 352 se muestra el trazado de un plano tangente a un cilindro. En la fig. 352, a la izquierda, el plano se ha trazado por el punto dado C de la superficie cilíndrica, y, a la derecha, por el punto K exterior al cilindro.

Aquí el plano hace contacto con la superficie no sólo en un punto, sino en todos los puntos de la generatriz. Tales puntos de la superficie se llaman *parabólicos*. A las superficies con puntos parabólicos se refieren las superficies cilíndricas y cónicas con arista de retorno.

La construcción en la fig. 352, a la izquierda, consiste en lo siguiente. La superficie dada es reglada. Por esta razón, por el punto C se puede trazar la generatriz AB , una de las dos rectas que se cortan y determinan el plano tangente. En calidad de segunda recta se puede tomar la tangente BF a la circunferencia, o sea, a la traza horizontal de la superficie cilíndrica. Las rectas AB y BF determinan el plano tangente buscado. La recta BF es la traza horizontal de este plano.

En la fig. 352, a la derecha, el punto K está dado fuera de la superficie cilíndrica. El plano tangente debe contener a la superficie generatriz; por lo tanto, este plano es paralelo a la dirección de la generatriz. Por eso la recta KM , paralela a la generatriz, pertenece al plano tangente. Como segunda recta que determina, en la intersección con KM , el plano tangente a la superficie cilíndrica, en la fig. 352, a la derecha, se muestra la recta MQ , que es la traza horizontal del plano buscado. Este plano hace contacto con la superficie según la generatriz DE .

Segunda solución: por el punto M se ha trazado la recta MN , la traza horizontal del segundo plano tangente (hace contacto según la generatriz AB).

En la fig. 353 se muestra la construcción de un plano tangente a una superficie cónica en su punto A . La superficie está dada por el vértice S y la directriz, por una elipse situada en el plano H .

La generatriz SM , sobre la cual está situado el punto A , es la línea de contacto del plano con la superficie cónica. Además de esta generatriz al plano tangente lo determina también la recta MN en el plano H , tangente a la elipse.

Si el punto, por el cual hay que trazar el plano tangente a la superficie cónica dada, es exterior a esta superficie, entonces, para la construcción del plano tangente es necesario trazar una recta por el vértice S y el punto dado, hallar la traza horizontal de esta recta y trazar por esta traza tangentes a la elipse (semejantemente a cómo se mostró en la fig. 352 a la derecha, donde las tangentes se trazaban a la circunferencia, a la traza de la superficie cilíndrica en el plano H). Se obtienen dos planos tangentes a la superficie cónica.

En los ejemplos dados en las figs. 350—353 los planos tangentes no cortan a las superficies. Pero si esto es característico para las superficies convexas, en general el plano, tangente a la superficie en cierto punto de ésta, puede cortar a esta superficie. Así, por ejemplo, el plano tangente a la superficie de un paraboloides hiperbólico (véase la fig. 321) en el punto O , contiene las tangentes Ox y Oy a las parábolas BOB_1 y AOA_1 , y corta la superficie en dos partes, teniendo con ella una infinidad de puntos comunes.

Al cortar una superficie con un plano tangente a esta superficie en un punto cualquiera de ésta, pueden obtenerse dos rectas que se cortan en este punto, una recta y una curva o dos curvas. Por ejemplo, el hiperboloides de revolución de una hoja, o sea, una superficie reglada con dos rectas generatrices, puede ser cortado según dos líneas rectas que se cortan. Lo mismo observamos en el caso de un paraboloides hiperbólico (fig. 321).

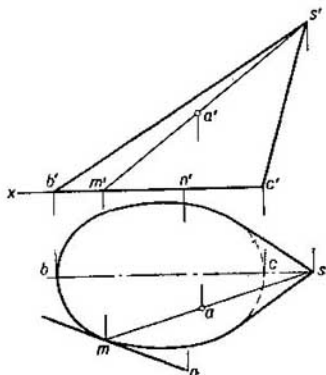


Fig. 353

Como ejemplo del corte según una recta y una curva pueden servir los casos de intersección de una superficie reglada no desarrollable, por ejemplo, la intersección de superficies por el plano de paralelismo, de superficies helicoidales con una generatriz rectilínea (excepto el helicoido desarrollable).

Los puntos de la superficie, en los cuales el plano tangente corta la superficie, se llaman *hiperbólicos*. Tales puntos son propios, entre otros, (véase más arriba) de las superficies de revolución cóncavas (véase un ejemplo de tal superficie en la fig. 330).

Si los puntos de una superficie, en una parte cualquiera de ésta, son solamente hiperbólicos, entonces la superficie en esta parte es *en forma de silla* (por ejemplo, en el paraboloido hiperbólico en las figs. 321 y 322).

Si comparamos entre sí las superficies regladas, desarrollables y no desarrollables, entonces, para las desarrollables, los planos tangentes en distintos puntos de la línea generatriz tienen una misma dirección (por ejemplo, en la superficie de revolución cónica), y para las no desarrollables, los planos tangentes en distintos puntos de la generatriz tienen distinta dirección (por ejemplo, en el hiperboloido de revolución de una hoja).

§ 54. EJEMPLOS DE CONSTRUCCION DE LOS CONTORNOS DE LAS PROYECCIONES DE UN CUERPO DE REVOLUCION CON EJE INCLINADO

En la fig. 354 se representa un cono circular recto cuyo eje es paralelo al plano V y está inclinado al plano H . El contorno de su proyección frontal está dado: es el triángulo isósceles $s'd'e'$. Hace falta construir el contorno de la proyección horizontal.

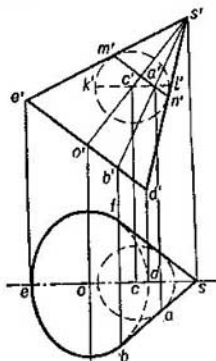


Fig. 354

El contorno buscado está compuesto por parte de una elipse y dos rectas tangentes a ésta. Efectivamente, el cono en la posición dada se proyecta sobre el plano H con auxilio de la superficie de un cilindro elíptico, cuyas generatrices pasan por los puntos de la circunferencia de la base del cono, y con ayuda de dos planos tangentes a la superficie del cono.

La elipse en la proyección horizontal se puede construir por sus dos ejes: el menor de y el mayor, cuya magnitud es igual a $d'e''$ (al diámetro de la circunferencia de la base del cono). Las rectas sb y sf se obtienen, si se trazan desde el punto s tangentes a la elipse. La construcción de estas rectas consiste en hallar las proyecciones de aquellas generatrices del cono según las cuales tiene lugar el contacto del cono con los planos mencionados más arriba. Para esto se ha utilizado una esfera inscrita en el cono. Puesto que el plano que se proyecta sobre el plano de proyección H hace contacto simultáneamente con el cono y con la esfera, se puede trazar una tangente desde el

punto s a la circunferencia, a la proyección del ecuador de la esfera, y tomar esta tangente como proyección de la generatriz buscada. La construcción se puede iniciar hallando el punto a' , la proyección frontal de uno de los puntos de la generatriz buscada. El punto a' se obtiene en la intersección de las proyecciones frontales 1) de la circunferencia de contacto del cono con la esfera (la recta $m'n'$) y 2)

del ecuador de la esfera (la recta $k'l'$). Ahora se puede hallar la proyección a sobre la proyección horizontal del ecuador y por los puntos s y a trazar una recta, la proyección horizontal de la generatriz buscada. Sobre esta recta se determina también el punto B , cuya proyección horizontal (el punto b) es el punto de tangencia de la recta con la elipse.

Con la construcción de los contornos de las proyecciones del cono de revolución nos encontramos, por ejemplo, en el caso siguiente: se conocen las proyecciones del vértice del cono ($s' s_1$), la dirección de su eje (SK), las dimensiones de la altura y del diámetro de la base; construir las pro-

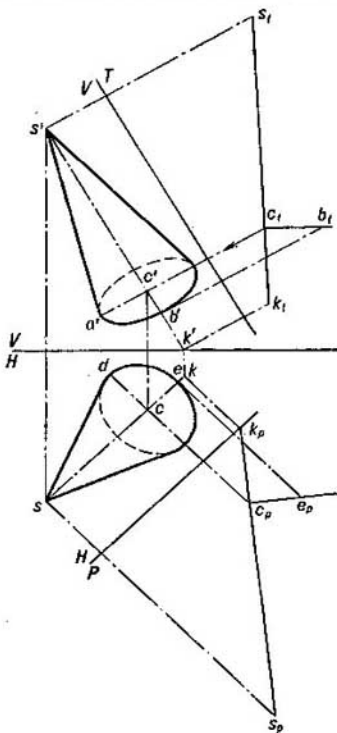


Fig. 355

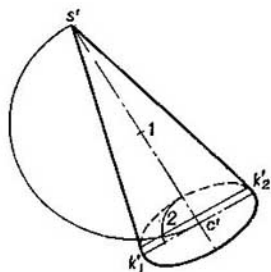


Fig. 356

yecciones del cono. En la fig. 355 esto se ha realizado con ayuda de planos de proyección auxiliares.

Así, para la construcción de la proyección frontal se ha introducido el plano T perpendicular a V y paralelo a la recta SK que determina la dirección del eje del cono. A la proyección $s_1 k_1$ se ha llevado el segmento $s_1 c_1$ igual a la altura dada del cono. En el punto c_1 se ha levantado la perpendicular a $s_1 c_1$ y a ésta se ha lle-

vado el segmento c_1b_1 , igual al radio de la base del cono. Con ayuda de los puntos c_1 y b_1 se han obtenido los puntos c' y b' y con ello se ha obtenido el semieje menor $c'b'$ de la elipse, la proyección frontal de la base del cono. El segmento $c'a'$, igual a c_1b_1 , representa el semieje mayor de esta elipse.

Disponiendo de los ejes de la elipse, ésta puede ser construida así como fue mostrado en la fig. 147.

Para construir la proyección horizontal se ha introducido el plano de proyección P , perpendicular a H y paralelo a SK . La marcha de la construcción es análoga a la descrita para la proyección frontal.

¿Cómo construir los contornos de las proyecciones? En la fig. 356 se muestra un procedimiento distinto, al empleado en la fig. 354, de trazado de la tangente a la elipse (sin la esfera inscrita en el cono).

Primeramente, desde el centro de la elipse, con un radio igual al semieje menor de ésta, se ha descrito un arco (en la fig. 356 es una cuarta parte de circunferencia). Se determina el punto 2 de intersección de este arco con la circunferencia de diámetro $s'c'$. Desde el punto 2 se ha trazado una recta paralela al eje mayor de la elipse; esta recta corta a la elipse en los puntos k_1 y k_2 . Ahora queda trazar las rectas $s'k_1$ y $s'k_2$; estas rectas son tangentes a la elipse y pertenecen al contorno de las proyecciones del cono.

En la fig. 357 está representado un cuerpo de revolución con eje inclinado, paralelo al plano V . Este cuerpo está delimitado por una superficie mixta, compuesta de dos cilindros, de la superficie de un anillo circular y de dos planos. El contorno de la proyección frontal de este cuerpo es su meridiano principal.

El contorno de la proyección horizontal de la parte cilíndrica superior de este cuerpo se compone de una elipse y dos rectas tangentes a ésta. La recta ab es la proyección horizontal de la generatriz del cilindro, según la cual el plano que se proyecta sobre el plano de proyección H tiene contacto con la superficie del cilindro. Esto se refiere

también al contorno de la proyección del cilindro inferior (en la fig. 357 este contorno está representado parcialmente).

Pasamos a la parte más complicada del contorno, a la intermedia. Debemos construir la proyección horizontal de aquella línea curva espacial, en cuyos puntos pasan las rectas proyectantes, tangentes a la superficie del anillo circular y perpendiculares al plano H . La proyección frontal de cada punto de tal curva se ha construido de la misma manera como fue hecho para el punto a' en la fig. 354 (con ayuda de esferas inscritas). Las proyecciones horizontales de los puntos se

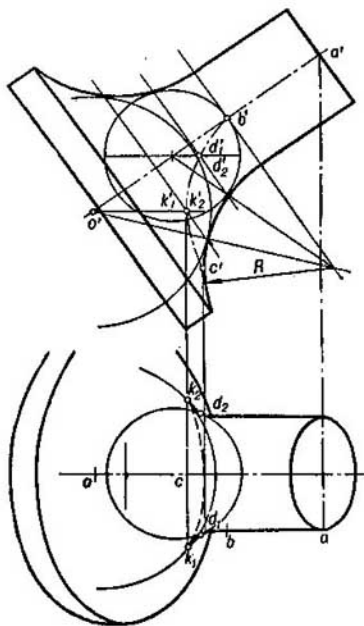


Fig. 357

determinan sobre la proyección del ecuador de la esfera correspondiente. Así se ha construido, por ejemplo, el punto D_1 (d_1, d_1').

Los puntos k_1 y k_2 se obtienen con auxilio del punto k_1' (este mismo punto es el k_2') sobre el ecuador de la esfera con centro O , mientras que el punto k_1' (k_2') trazando la línea de referencia, tangente a la curva construida $b'd_1c'$.

Así pues, la curva $b'd_1k_1c'$ contiene las proyecciones frontales de los puntos cuyas proyecciones horizontales b, d_1, k_1 pertenecen al contorno de la proyección horizontal del cuerpo examinado.

PREGUNTAS A LOS §§ 53 Y 54

1. ¿A qué se le llama plano tangente a una superficie curva en un punto dado de esta superficie?
 2. ¿A qué se le llama punto ordinario de una superficie?
 3. ¿Cómo construir el plano tangente a una superficie curva en cierto punto de ésta?
 4. ¿A qué se le llama normal a una superficie?
 5. ¿Cómo construir el plano tangente a una esfera en cualquier punto perteneciente a esta esfera?
 6. ¿En cuál caso una superficie curva se refiere a las superficies convexas?
 7. ¿Puede un plano tangente a una superficie curva en cualquier punto de esta superficie, cortar a esta última? Señalen un ejemplo de intersección según dos rectas.
 8. ¿Cómo se usan las esferas, inscritas en la superficie de revolución, cuyo eje es paralelo al plano V , para la construcción del contorno de la proyección de esta superficie sobre el plano H , respecto del cual el eje de la superficie está inclinado bajo un ángulo agudo?
 9. ¿Cómo trazar la tangente a una elipse desde un punto que se encuentra en la prolongación de su eje menor?
 10. ¿En cuál caso los contornos de las proyecciones de un cilindro de revolución y de un cono de revolución serán absolutamente iguales sobre el plano V y el plano H ?
-

IX

CAPITULO

INTERSECCIÓN DE LAS SUPERFICIES CURVAS POR UN PLANO Y UNA RECTA

§ 55. PROCEDIMIENTOS GENERALES DE CONSTRUCCION DE LA LINEA DE INTERSECCION DE UNA SUPERFICIE CURVA POR UN PLANO

Para hallar la línea curva, obtenida en la intersección de una superficie reglada con un plano, en el caso general, es necesario construir los puntos de intersección de las generatrices de la superficie con el plano secante, es decir, hallar el punto de intersección de una recta con un plano. La curva buscada (la línea de corte) pasa por estos puntos.

En la fig. 358 se da un ejemplo: la superficie cónica, dada por el punto S y la curva ACE , se ha cortado con el plano proyectante frontal T ; la proyección horizontal de la línea de intersección se ha trazado por las proyecciones horizontales de los puntos de intersección de una serie de generatrices del plano T .

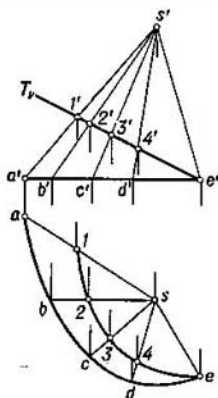


Fig. 358

En este ejemplo, la construcción se simplifica gracias a que el plano secante T es de posición particular. Pero el procedimiento indicado (obtención de los puntos de intersección de una serie de generatrices rectilíneas de la superficie con el plano secante dado para trazar por estos puntos la línea de intersección buscada) es válido para cualquier posición del plano.

Si la superficie curva no es reglada, entonces, para la construcción de la línea de intersección de tal superficie con un plano, en el caso general, se deben emplear planos auxiliares. Los puntos de la línea buscada se determinan en la intersección de las líneas, según las cuales los planos

secantes auxiliares cortan a la superficie y plano dados. Recordemos la fig. 166, en la que se mostró el caso de empleo de planos auxiliares para la construcción de las líneas de intersección de dos planos.

Al elegir los planos auxiliares, como en todos los casos cuando estos se emplean (véase, por ejemplo, la pág. 87), se debe hacer todo lo posible por simplificar las construcciones.

En la fig. 359 viene representado un cuerpo de revolución cortado por un plano dado por el trapecio $ABCD$. Aquí, para la construcción de los puntos de las líneas curvas que se obtienen en la superficie del cuerpo de revolución, se han empleado planos secantes auxiliares. Examinemos como ejemplo uno de ellos, el plano Q . Al cortar a la superficie del cuerpo de revolución, este plano produce una circunferencia (paralelo) de radio $o'_q l'$, y al cortar al plano $ABCD$, la horizontal $A_q D_q$. En la intersección del paralelo de la superficie de revolución con la horizontal $A_q D_q$ se obtienen los puntos X'_q e Y'_q pertenecientes simultáneamente a la superficie de revolución y al plano $ABCD$, es decir, pertenecientes a la línea de intersección buscada.

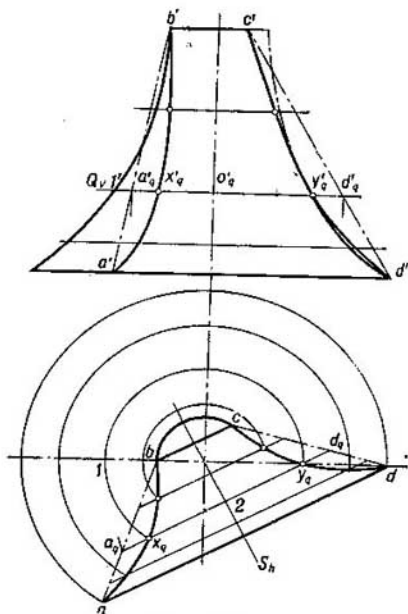


Fig. 359

Repetiendo este procedimiento, obtendremos una serie de puntos que determinan la parte curvilínea de la línea de corte. Las caras planas del cuerpo de revolución dado se han cortado por el plano $ABCD$ según rectas expresadas por los segmentos AD y BC .

En el ejemplo examinado, la construcción se simplifica debido a que el eje del cuerpo de revolución es perpendicular al plano H y los paralelos se proyectan sobre este plano en forma de circunferencias. El plano de simetría S permitía controlar la exactitud de la disposición mutua de los puntos de las curvas $ax_q b$ y $dy_q c$, puesto que, por ejemplo, debe obtenerse $x_q 2 = y_q 2$.

Aplicando el método de cambio de los planos de proyección o de giro, se pueden obtener unas posiciones de la figura cómodas para la construcción, si éstos fueran dados en las posiciones generales en el sistema V, H . Pero todo esto no se refiere al procedimiento expuesto, basado en la introducción de planos auxiliares. Este procedimiento es aplicable independientemente de la posición de la superficie y del plano que se cortan.

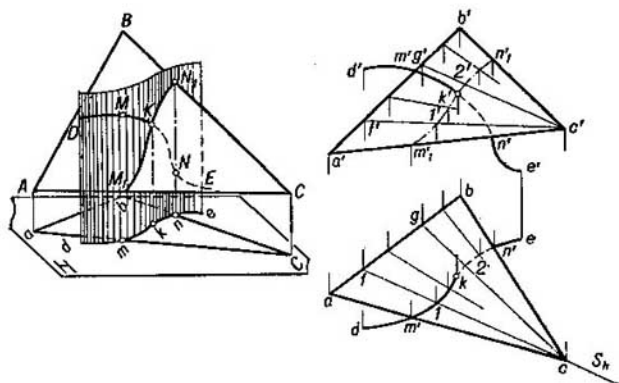


Fig. 360

En toda una serie de casos, la curva, que debe obtenerse en la intersección de una superficie por un plano, es conocida y sus proyecciones pueden ser construidas sobre la base de sus propiedades geométricas. Recordemos, por ejemplo, la espiral de Arquímedes (pág. 223, fig. 340) obtenida al cortar un helicoido oblicuo con un plano perpendicular a su eje. Es obvio que es más conveniente construir esta espiral así como se muestra en la fig. 340, y no buscar puntos para ella mediante su proyección.

§ 56. INTERSECCION DE UNA SUPERFICIE CILÍNDRICA POR UN PLANO. CONSTRUCCION DEL DESARROLLO

Para construir la línea curva obtenida al cortar una superficie cilíndrica con un plano, se debe, en el caso general, hallar los puntos de intersección de las generatrices con el plano secante, como se dijo en la pág. 238 con respecto a las superficies regladas en general. Pero

esto no excluye la posibilidad de emplear planos auxiliares que cortan cada vez a la superficie y al plano. Ante todo señalemos que *toda superficie cilíndrica se corta por un plano, dispuesto paralelamente a la generatriz de esta superficie, según líneas rectas (generatrices)*. En la fig. 360 se muestra la intersección de una superficie cilíndrica por un plano. En este caso, esta superficie es un elemento auxiliar al construir los puntos de intersección de la línea curva con el plano: por la curva dada (véase la fig. 360, a la izquierda) $DMNE$ se ha trazado una superficie cilíndrica, que proyecta a la curva sobre el plano H . A continuación, el plano (en la fig. 360 es un triángulo) corta a la superficie cilíndrica según la curva plana $M_1 \dots N_1$. El punto buscado de intersección de la curva con el plano (el punto K) se obtiene en la intersección de las curvas dada y construida.

Tal esquema de resolución del problema de intersección de una línea curva por un plano coincide con el esquema de resolución de los problemas de intersección de una línea recta con un plano (véanse los §§ 23 y 25); en ambos casos por dicha línea se traza una superficie auxiliar, que para la línea recta es un plano.

La proyección horizontal de la curva $M_1 \dots N_1$, que es la línea de intersección de la superficie cilíndrica con el plano, se confunde con la proyección horizontal de la curva $D \dots E$, puesto que esta curva es la directriz de la superficie cilíndrica, siendo las generatrices de esta superficie perpendiculares al plano H . Por esta razón, con ayuda del punto m_1 sobre la proyección ac podemos hallar la proyección m'_1 sobre la línea $a'c'$ y con auxilio del punto n_1 , la proyección n'_1 . Luego en la fig. 360, a la derecha, se muestra el plano auxiliar S que corta a ABC según la recta CF , y a la superficie cilíndrica, según su generatriz con la proyección horizontal en el punto I . En la intersección de esta generatriz con la recta CF se obtiene el punto con las proyecciones I y I' , perteneciente a la curva $M_1 \dots N_1$. Evidentemente, se puede no mostrar la traza del plano, sino simplemente trazar una recta en el triángulo, como se muestra respecto de la recta CG , sobre la cual se ha obtenido el punto con las proyecciones 2 y $2'$.

En los ejemplos examinados a continuación se mostrarán los desarrollos. El desarrollo de una superficie cilíndrica, en el caso general, se puede realizar por el esquema del desarrollo de la superficie de un prisma. La superficie cilíndrica como si se sustituyera por una superficie prismática inscrita en ésta o circunscrita a la misma, cuyas aristas corresponden a las generatrices de la superficie cilíndrica. El desarrollo, como tal, se efectúa con ayuda de la sección normal, semejantemente al mostrado en la fig. 283. Pero en lugar de la línea quebrada se traza una curva suave.

En la fig. 361 se muestra la intersección de un cilindro circular recto con un plano proyectante frontal. La figura de la sección representa una elipse, cuyo eje menor es igual al diámetro de la base del cilindro; la magnitud del eje mayor depende del ángulo formado por el plano secante con el eje del cilindro.

Dado que el eje del cilindro es perpendicular al plano H , la proyección horizontal de la figura de la sección se confunde con la proyección horizontal del cilindro.

Ordinariamente, para la construcción de los puntos del contorno de la sección se trazan generatrices dispuestas regularmente, o sea, tales, cuyas proyecciones sobre el plano H son puntos equidistantes uno del otro. Es cómodo emplear esta «marcación» no sólo para construir las proyecciones de la sección, sino también el desarrollo de la superficie lateral del cilindro, como se mostrará más abajo.

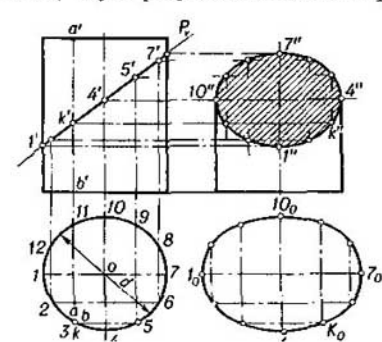


Fig. 361

La proyección de la figura de la sección sobre el plano W es una elipse, cuyo eje mayor es en el caso dado igual al diámetro del cilindro, y el eje menor representa la proyección del segmento $1'7'$. En la fig. 361, la representación sobre el plano W se ha construido de tal manera, como si la parte superior del cilindro hubiera sido separada después de cortar a éste con el plano.

Si en la fig. 361 el plano P formara con el eje del cilindro un ángulo de 45° , entonces la proyección de la elipse sobre el plano W sería una circunferencia. En este caso, los segmentos $1'7'$ y $4'10'$ serían iguales.

Si cortamos el mismo cilindro con un plano de posición general que forma también con el eje del cilindro un ángulo de 45° , entonces la proyección de la figura de la sección (la elipse), en forma de circunferencia se puede obtener sobre el plano auxiliar de proyección, paralelo al eje del cilindro y a las horizontales del plano secante.

Es evidente, que al aumentar el ángulo de inclinación del plano secante al eje del cilindro, disminuye el segmento $1'7'$; si este ángulo es menor de 45° , el segmento $1'7'$ aumenta, haciéndose el eje mayor de la elipse sobre el plano W , mientras que el eje menor de esta elipse es el segmento $4'10'$.

La forma verdadera de la sección representa, como ya se dijo más arriba, una elipse. Sus ejes se obtienen en el dibujo: el eje mayor es el segmento $1_07_0=1'7'$, y el eje menor, el segmento 4_010_0 , igual

al diámetro del cilindro. La elipse puede ser construida con ayuda de estos ejes.

En la fig. 362 se muestra el desarrollo completo de la parte inferior del cilindro. La circunferencia desarrollada de la base del cilindro se ha dividido en partes iguales entre sí correspondientemente a las divisiones en la fig. 361; los segmentos de las generatrices han sido llevados a las perpendiculares trazadas por los puntos de división de la circunferencia desarrollada de la base del cilindro. Los extremos de estos segmentos corresponden a los puntos de la elipse. Por eso, trazando por estos puntos una línea curva, obtenemos la elipse desarrollada (esta línea representa una senoide), es decir, el canto superior del desarrollo de la superficie lateral del cilindro.

Además del desarrollo de la superficie lateral, en la fig. 362 se dan el círculo de la base y la elipse (la forma verdadera de la sección), lo

que ofrece la posibilidad de hacer el modelo del cilindro truncado.

En la fig. 363 está representado un cilindro elíptico con base circular; su eje es paralelo al plano V . Para determinar la sección normal de este cilindro, éste debe ser cortado con un plano perpendicular a las generatrices, en el caso dado, con un plano proyectante

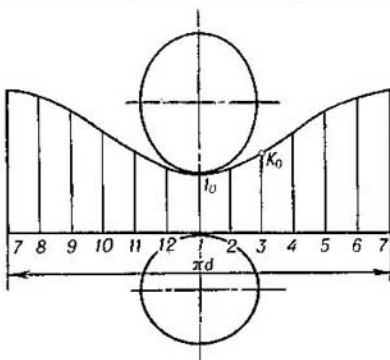


Fig. 362

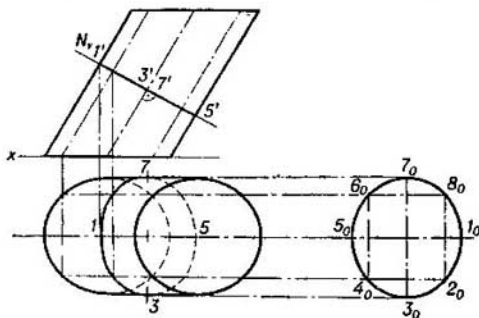


Fig. 363

frontal. La figura de la sección normal representa una elipse cuyo eje mayor es igual al segmento 3_07_0 , y el menor, igual al segmento $1_05_0=1'5'$.

Si es necesario desarrollar la superficie lateral de este cilindro, entonces, disponiendo de la sección normal, se desarrolla la curva que la delimita en una línea recta y a los puntos correspondientes de esta recta, perpendicularmente a la misma, se llevan los segmentos de las generatrices, tomándolos de la proyección frontal. Para el desarrollo de las generatrices se divide la circunferencia de la base

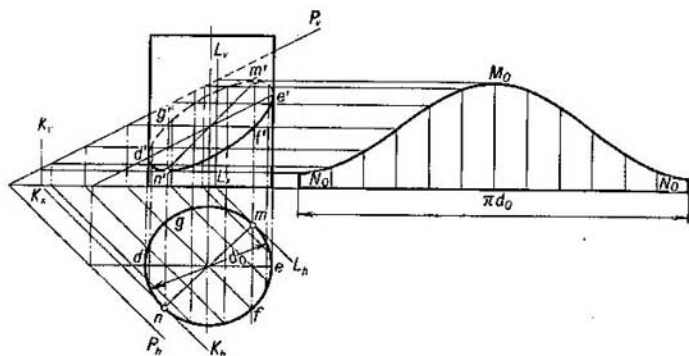


Fig. 364

en partes iguales. En este caso, también la elipse (la sección normal) será dividida en la misma cantidad de partes, pero no todas estas partes son de una misma longitud. El desarrollo de la elipse en una recta se puede efectuar llevando sucesivamente a esta recta partes de la elipse lo suficientemente pequeñas.

En la fig. 364 viene dado un cilindro circular recto cortado con un plano de posición general. En la sección se obtiene una elipse: el plano secante forma con el eje del cilindro cierto ángulo agudo.

Semejantemente a cómo esto sucedió en la fig. 361, la proyección horizontal de la sección se confunde con la proyección horizontal del cilindro. Por esta razón, la posición de la proyección horizontal del punto de intersección de cualquiera de las generatrices del cilindro con el plano P es conocida (por ejemplo, el punto a en la fig. 365). Para hallar la proyección frontal correspondiente se puede trazar en el plano P la horizontal o la frontal sobre la cual debe encontrarse el punto que se busca. En la fig. 365 se ha trazado la frontal; en el lugar en que la proyección frontal de la frontal corta a la proyección frontal de la generatriz correspondiente, se encuentra la proyección

a' . Una misma frontal determina dos puntos de la curva, A y B (fig. 365). Si se construye la frontal correspondiente al punto C , entonces esta línea determinará solamente un punto de la curva de intersección. La frontal construida con ayuda de los puntos D y E , determina los puntos extremos d' y e' .

Continuando las construcciones análogas se puede hallar un número suficiente de puntos para dibujar la proyección frontal de la línea de intersección.

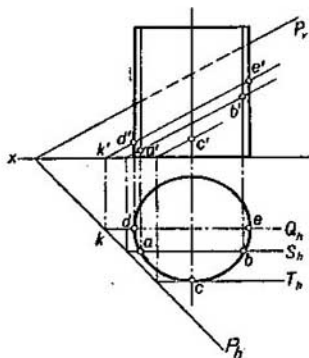


Fig. 365

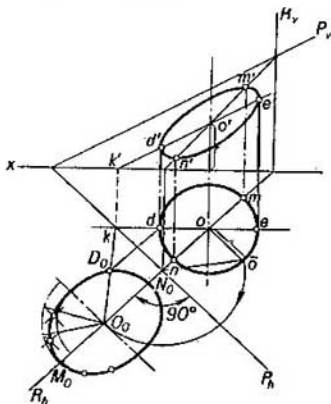


Fig. 366

En la fig. 366 la parte superior del cilindro parece cortada. Si la proyección frontal se muestra totalmente, entonces la línea de intersección se dibuja así como se muestra en la fig. 364.

En la fig. 365 se muestran los planos frontales auxiliares Q , S , T que cortan al cilindro según las generatrices, y el plano P , según las frontales. Esto corresponde a lo dicho al principio del párrafo. El plano auxiliar T solamente hace contacto con el cilindro, lo que da la posibilidad de determinar solamente un punto para la curva.

Al construir la proyección frontal de la línea de intersección, además de los puntos d' y e' (fig. 365), se deben hallar dos puntos extremos, precisamente, los puntos m' y n' (los puntos más alto y más bajo de la proyección de la sección sobre el plano V). Para construir estos puntos debe elegirse un plano auxiliar perpendicular a la traza P_h y que pase por el eje del cilindro (fig. 366). Este plano es el plano común de simetría del cilindro y del plano secante P dados. Una vez hallada la línea de intersección de los planos P y R , señalamos los puntos m' y n' , construyéndolos en la proyección frontal con ayuda de los puntos m y n .

Otro procedimiento para hallar los puntos m' y n' consiste en trazar dos planos tangentes al cilindro, cuyas trazas horizontales son paralelas a la traza P_H . Estos planos se cortarán con el plano P según las horizontales de este último (fig. 364, los planos auxiliares K y L); señalando los puntos m y n , construimos los puntos m' y n' sobre las proyecciones frontales de las horizontales halladas.

El segmento MN representa el eje mayor de la elipse (la figura de la sección producida en el cilindro dado por el plano P). Esto se ve también en la fig. 366, donde se ha construido la elipse (la forma verdadera de la sección) abatida sobre el plano H . Pero el segmento $m'n'$ en la misma figura no es, ni mucho menos, el eje mayor de la elipse (la proyección frontal de la figura de la sección). Este eje mayor puede ser hallado con ayuda de los diámetros conjugados $m'n'$ y $f'g'$ (fig. 364) valiéndose de la construcción indicada en el § 21, o con auxilio de la construcción especial expuesta en el párrafo 76.

La forma verdadera de la sección puede ser hallada abatiendo el plano secante sobre uno de los planos de proyección, H o V .

En la fig. 366, la elipse en la posición abatida se ha construido con ayuda de los ejes mayor y menor (en la misma figura, el punto D_0 se ha obtenido abatiendo la frontal).

El desarrollo de la superficie lateral se muestra en la fig. 364. Presten atención en que la marcación de los puntos (las proyecciones horizontales de las generatrices) en la circunferencia de la base se realizaba a partir del punto n . Con esto la construcción se simplificaba, puesto que con ayuda de una misma horizontal se obtienen dos puntos en la proyección frontal de la elipse. Además, la figura del desarrollo tiene eje de simetría. Pero en este caso, los puntos d y e no figuran entre los puntos marcados en la circunferencia.

En la fig. 367 se da otro ejemplo de construcción de la figura de la sección producida en un cilindro de revolución por un plano. Esta construcción se ha ejecutado con ayuda del método de cambio de los planos de proyección. El plano secante está dado por dos rectas que se cortan: la frontal (AF) y la recta de perfil (AP). Puesto que la proyección de perfil de la frontal y la proyección frontal de la recta de perfil se encuentran sobre una misma recta ($a' = a''$, $a''f'' = a'p'$), estas rectas están situadas en los planos V y W respectivamente (véase la fig. 367 a la izquierda, el dibujo de arriba). El eje V/W pasa por $a''f''$ ($a'p'$).

Introducimos un nuevo plano S de tal manera que $S \perp W$ y $S \perp AP$. El plano secante resulta ser perpendicular al S , y la proyección de la figura de la sección sobre el plano S se obtiene en forma del segmento $2_s 6_s$, igual al eje mayor de la elipse (la figura de la sección). La posición de la recta $a_s 6_s$ se determina construyendo las proyecciones de los puntos A y I sobre el plano S .

Sigamos la construcción de algunos puntos. Para evitar las construcciones innecesarias, la proyección I'' se tomó en la prolongación de la perpendicular levantada desde el punto o'' al eje W/S . Con ayuda del punto I'' se obtuvo la proyección I' ; el segmento $I'I''$, llevado sobre el eje W/S , determinó el punto I_s y el punto o_s que se confunde con éste y que es la proyección del centro de la elipse. Conociendo las proyecciones o_s y o'' se puede obtener el punto o' (el centro de la elipse) de la proyección frontal buscada de la figura de la sección.

Con ayuda de los puntos 2_s y $2''$ se ha hallado el punto $2'$, el punto que menos dista del plano W , y con auxilio de los puntos 6_s y $6''$, el punto $6'$, el punto más alejado del plano W .

Con ayuda del punto $5''$ se ha tomado el punto 5_s , y ahora, con auxilio de los puntos 5_s y $5''$ se ha hallado el punto $5'$, que es uno de los puntos que determinan la división de la elipse en la proyección frontal del cilindro en las partes «vista» y «oculta». El segundo punto está situado simétricamente al punto $5'$ con respecto de o' .

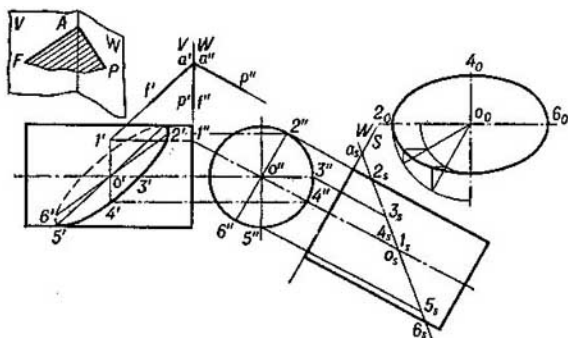


Fig. 367

Lo demás está claro del dibujo. La forma verdadera de la figura de la sección (una elipse en la fig. 367, a la derecha) se ha construido con ayuda de sus ejes: el mayor igual a 2_s6_s , y el menor, igual al diámetro del cilindro.

PREGUNTAS A LOS §§ 55 Y 56

1. ¿Cómo se construye la curva de intersección de una superficie curva con un plano?
2. ¿Según cuáles líneas se corta una superficie cilíndrica con un plano, trazado paralelamente a la generatriz de esta superficie?
3. ¿Cuál procedimiento se emplea en el caso general para hallar los puntos de intersección de una línea curva con un plano?
4. ¿Cuáles líneas se producen al cortar un cilindro de revolución con planos?
5. ¿En cuál caso la elipse que se obtiene en la intersección de un cilindro de revolución, cuyo eje es perpendicular al plano H , con un plano proyectante frontal, se proyecta sobre el plano W en forma de una circunferencia?
6. ¿Cómo debe ser situado el plano de proyección auxiliar, para que la elipse obtenida en la intersección de un cilindro de revolución, cuyo eje es perpendicular al plano H , con un plano de posición general, que forma con el eje del cilindro un ángulo de 45° , se proyecte sobre dicho plano de proyección auxiliar en forma de una circunferencia?

§ 57. INTERSECCION DE UNA SUPERFICIE CONICA POR UN PLANO. CONSTRUCCION DEL DESARROLLO

Para construir la línea curva obtenida en la intersección de una superficie cónica con un plano, en el caso general, se deben hallar los puntos de intersección de las generatrices con el plano secante.

Si el plano que corta a la superficie cónica pasa por su vértice, entonces se obtienen dos rectas, dos generatrices (en la fig. 368, las rectas AA_1 y BB_1).

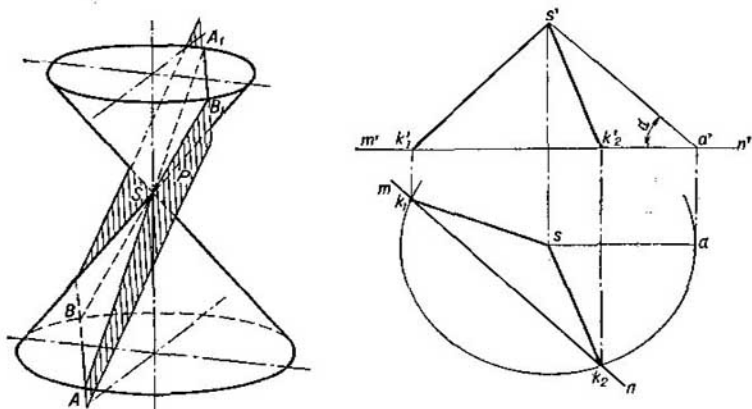


Fig. 368

Examinemos el ejemplo de construcción que ilustra tal intersección de la superficie cónica.

Supongamos que en el plano dado por el punto S y la recta horizontal MN (fig. 368, a la derecha), hay que trazar por el punto S una recta que forme con el plano H cierto ángulo α .

El lugar geométrico de las rectas que forman con el plano H el ángulo α , es una superficie de revolución cónica, cuyo eje es perpendicular al plano H , y cuyo vértice, según la condición, debe ser el punto S . Por consiguiente, el plano dado pasa por el vértice del cono y corta a su superficie según rectas (generatrices). Estas rectas serán las buscadas: ellas pasan por el punto S en el plano dado y bajo el ángulo dado α al plano H .

Ahora queda representar el cono (éste está representado parcialmente), para lo cual se ha trazado la recta $s'a'$ y el arco de circunfe-

rencia con centro en el punto s y de radio igual a sa , además, la base del cono se ha tomado en el plano horizontal que pasa por la recta dada MN .

Lo demás está claro del dibujo. Comparen esta construcción con la ejecutada en las figs. 245 y 246 en el § 38.

En la fig. 369 a la izquierda, se muestra un cono circular recto, situado sobre el plano H . El plano Q es tangente al cono dado; la tangencia tiene lugar según la generatriz SC , la traza Q_h hace contacto con la circunferencia (la proyección horizontal de la base del cono); el hecho de que el punto S se encuentra en el plano Q , se

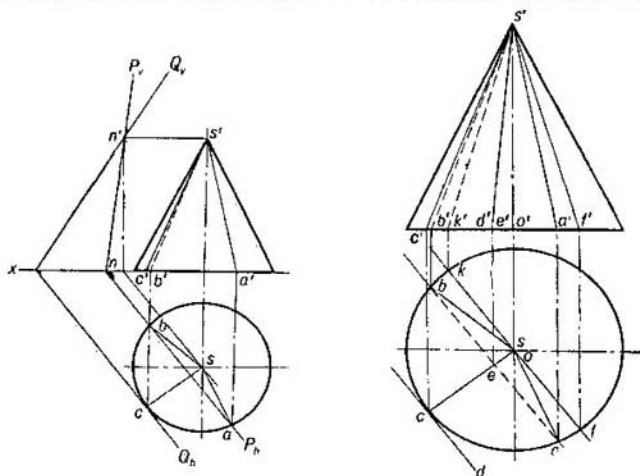


Fig. 369

establece con la ayuda de la horizontal SN . El plano P pasa por el vértice del cono dado y corta a este cono según las generatrices SA y SB .

En la misma figura a la derecha, los planos vienen dados no por sus trazas. El plano tangente al cono está dado por la generatriz SC y la recta CD tangente a la circunferencia de la base del cono. El plano que pasa por el vértice y que corta al cono según las generatrices SA y SB , está dado por la recta AB en el plano de la base del cono y la recta SE que pasa por el vértice del cono y que corta a la recta AB en el punto E .

Si el plano pasa por el eje del cono, entonces éste lo corta según las generatrices con el máximo, para el cono dado, ángulo entre ellas.

En la fig. 369 a la derecha, dichas generatrices son la SF y la SK ; el ángulo entre ellas es igual al ángulo cuyo vértice se encuentra entre las rectas de contorno en la proyección frontal del cono.

Si el cono de revolución se corta con un plano que no pasa por su vértice, entonces, en la intersección se obtiene una de las cuatro curvas siguientes: 1) una *elipse*, si el plano secante corta a todas las generatrices de una hoja de la superficie o, de otro modo, si no es paralelo a ninguna de las generatrices del cono (en la fig. 370, los

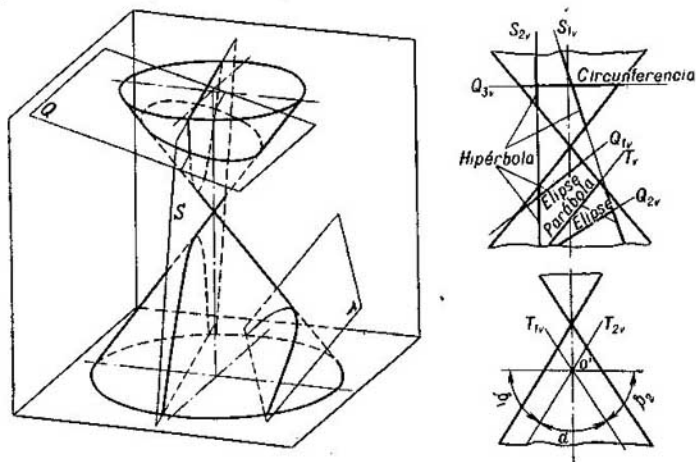


Fig. 370

planos Q , Q_1 y Q_2); en este caso, el ángulo formado por el plano secante con el eje del cono es mayor que el ángulo entre este eje y la generatriz del cono; 2) una *circunferencia*¹⁾, si el plano secante es perpendicular al eje del cono (en la fig. 370, el plano Q_3); 3) una *parábola*, si el plano secante es paralelo solamente a una de las generatrices (en la fig. 370, el plano T); en este caso los ángulos entre el plano secante y el eje del cono y entre este eje y la generatriz del cono son iguales entre sí; 4) una *hipérbola*, si el plano secante es paralelo a dos generatrices (en la fig. 370, los planos S , S_1 y S_2); en este caso el ángulo formado por el plano secante con el eje del cono es menor que el formado por este eje con la generatriz del cono.

En la fig. 370 a la derecha, en el dibujo inferior se muestran los ángulos α , β_1 y β_2 . El ángulo α es el ángulo entre las trazas T_{1v} y T_{2v}

¹⁾ Puede ser considerada como una elipse con ejes iguales en el límite.

de los planos que cortan al cono según parábolas. Si se trazan las trazas por el punto o' dentro del ángulo α , se determinan los planos que cortan al cono según hipérbolas, y si las trazamos por el punto o' dentro de los ángulos β_1 y β_2 , entonces quedarán determinados los planos que cortan al cono según elipses.

Examinemos la demostración de que *al cortar al cono de revolución con un plano que no sea paralelo a ninguna de sus generatrices (y que no pase por su vértice), se obtiene una elipse.*

Independientemente de cómo en el caso dado estén situados en el espacio el cono y el plano secante, siempre se pueden llevar, con ayuda de la transformación del dibujo, a tal posición en la que el eje del cono es perpendicular al plano H , y el plano secante es un plano proyectante frontal. Precisamente en tal posición vienen dados en la fig. 371 el cono y el plano que lo corta T , además, están dadas dos proyecciones del cono: la frontal y la de perfil.

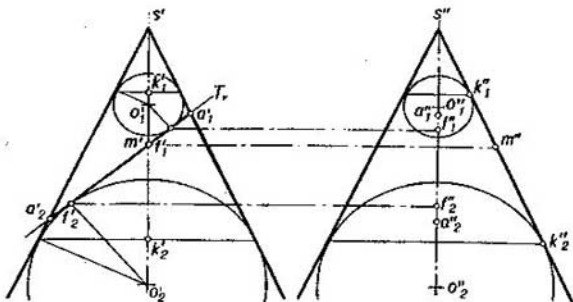


Fig. 371

En el cono se han inscrito esferas tangentes al plano T en los puntos F_1 y F_2 , y al cono, según los paralelos que pasan por los puntos K_1 y K_2 respectivamente. Los puntos F_1 y F_2 se obtienen en el plano del meridiano principal y, por consiguiente, están situados sobre una misma recta con los puntos A_1 y A_2 pertenecientes a la sección producida en el cono por el plano T . La figura sección se proyecta sobre el plano V en forma del segmento a_1a_2 .

Examinemos la generatriz del cono situada en el plano de perfil, y marquemos sobre ella los puntos K_1 y K_2 , en los cuales las esferas inscritas hacen contacto con esta generatriz, y el punto M perteneciente a la misma generatriz y a la curva de intersección del cono con el plano T . Es conocido, que los segmentos de las tangentes trazadas desde cualquier punto a la esfera y determinadas por este punto y los puntos de tangencia, son iguales entre sí. De aquí $MK_1 = MF_1$ y $MK_2 = MF_2$. Sumando miembro a miembro estas igualdades obtenemos que $MK_1 + MK_2 = MF_1 + MF_2$. Pero $MK_1 + MK_2 = K_1K_2$, es decir, la suma de las distancias desde cierto punto, tomado sobre la curva de intersección, hasta dos puntos fijos F_1 y F_2 , pertenecientes al plano de esta sección, es una magnitud constante igual, en el caso dado, al segmento K_1K_2 . Este segmento de la generatriz del cono está situado entre dos de sus paralelos y no depende de la elección del punto M sobre la curva de intersección. En efecto, si en la curva de

intersección del cono se tomase no el punto M , sino otro cualquiera, entonces la generatriz que pasa por este punto haría contacto con ambas esferas en los puntos de los mismos paralelos. El segmento de esta generatriz entre los puntos de tangencia sería igual al mismo segmento K_1K_2 .

La conclusión sacada demuestra que el punto M pertenece al lugar geométrico de los puntos, la suma de las distancias de los cuales a dos puntos dados tiene cierto valor constante. Esto corresponde a la definición de la *elipse*.

De modo semejante se sacan las conclusiones para los casos de intersección del cono de revolución según una parábola y una hipérbola.

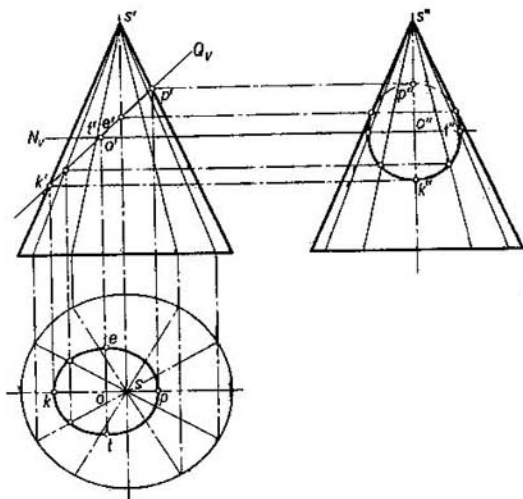


Fig. 372

En la fig. 372 está representado un cono de revolución intersecado por un plano proyectante frontal. Los puntos de intersección de la traza Q_v con las proyecciones frontales de las generatrices representan las proyecciones de los puntos de la curva de intersección que se busca, que en el caso dado es una *elipse*. Con ayuda de estas proyecciones han sido halladas las proyecciones sobre los planos H y W .

Uno de los ejes de la elipse (el mayor) se proyecta sobre el plano V en forma del segmento $k'p'$. El otro (el menor), que es perpendicular al plano V , tiene como proyección un punto: el punto medio del segmento $k'p'$.

Si se traza el plano N por el punto O perpendicularmente al eje del cono (en el caso dado paralelamente al plano H), la proyección del eje menor (fig. 373) se obtendrá en forma de la cuerda te de una

circunferencia (la proyección horizontal de la sección producida en el cono por el plano N).

La proyección del eje menor puede ser obtenida también valiéndose de la construcción indicada en la fig. 373 a la derecha. El cono se ha cortado según un triángulo, girado y abatido sobre el plano V . El segmento o_0t_0 es igual al semieje menor. Trazando este segmento desde el punto o perpendicularmente a kp obtenemos el eje menor ($tt_1 = 2o_0t_0$).

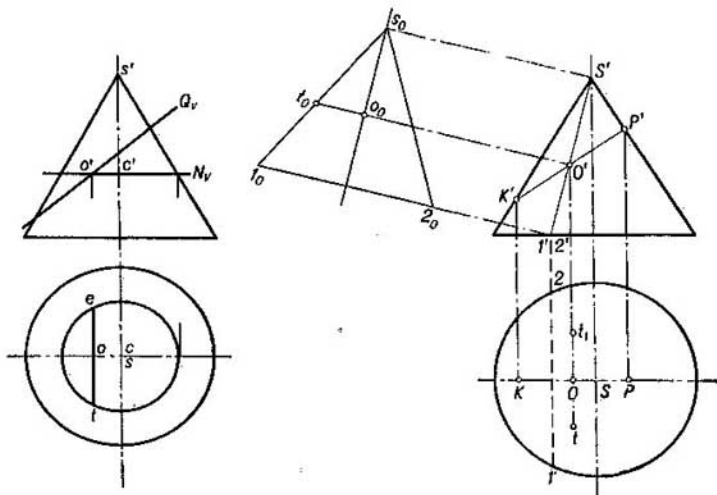


Fig. 373

Las proyecciones de la figura sección sobre los planos H y W son elipses. La proyección sobre el plano W puede ser una circunferencia: en esta proyección, en el caso de cierta inclinación del plano secante, las proyecciones de los ejes de la elipse pueden ser iguales. La proyección de la figura sección (elipse) sobre el plano perpendicular al eje del cono (en el caso dado sobre el plano H), no puede ser una circunferencia.

En la fig. 374 a la izquierda se muestra cómo hallar, para cierto cono, la dirección de la traza frontal de los planos proyectantes frontales que cortan a este cono según elipses que se proyectan sobre el plano W en forma de circunferencia. La construcción se ejecuta en la proyección frontal del cono. La bisectriz del ángulo $s'm'k'$ corta al eje de simetría de la proyección en el punto n' . Levantando en este punto la perpendicular a la bisectriz $m'n'$. Levantando en este punto la perpendicular a la bisectriz $m'n'$, hallamos el punto p' . La recta trazada por los puntos k' y p' , da la dirección para las trazas frontales de los planos secantes que se buscan. La tarea se reduce a la construcción de la diagonal del

trapecio isósceles $k'm'p'q'$, en el cual se puede inscribir una circunferencia con centro en el punto n' . Trazando por el punto n' una recta paralela a $q'p'$, obtenemos el punto o' , que es la proyección del centro de la elipse cuya proyección frontal es el segmento $k'p'$.

¿Se proyectará sobre el plano W en forma de circunferencia la elipse obtenida en la intersección de un cono con el plano Q (fig. 374, a la derecha)? La construcción en la fig. 374 da uno de los procedimientos de comprobación: por el punto p' trazamos una recta paralela a la base, trazamos la bisectriz del ángulo $p'q'k'$, obtenemos el punto n' . Puesto que la perpendicular trazada desde el punto n' a esta bisectriz no pasa por el punto k' , la proyección de la sección sobre el plano W será una elipse, y no una circunferencia.

En la fig. 375 se muestra la construcción de la proyección frontal de la hipérbola obtenida al cortar un cono de revolución con un plano proyectante horizontal.

Dado que la proyección horizontal de la hipérbola se confunde con la traza S_h , en la intersección de S_h con la proyección horizontal de la base se determinan los puntos a y b , y con auxilio de éstos, las proyecciones a' y b' .

Para hallar el punto c' (el punto más alto de la proyección de la hipérbola sobre el plano V) se ha trazado

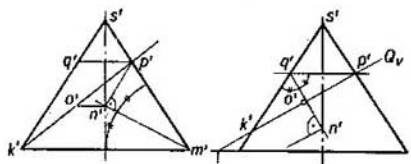


Fig. 374

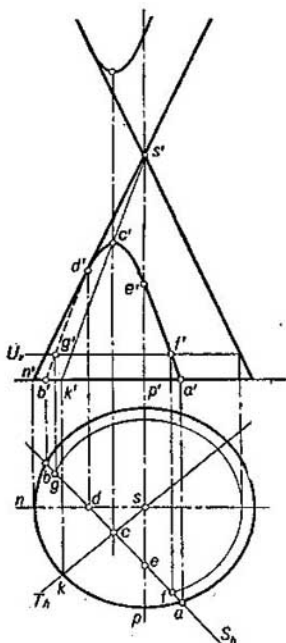


Fig. 375

el plano proyectante horizontal auxiliar T por el eje del cono perpendicularmente a la traza S_h . La proyección horizontal c del punto C buscado se obtiene en la intersección de S_h con T_h ; una vez hallada la proyección frontal de la generatriz SK , marcamos sobre ella el punto c' .

Luego, se ha hallado el punto d' , en el que la proyección frontal de la hipérbola se divide en las partes vista y oculta. Este punto se halla con ayuda de la generatriz SN .

Para hallar los demás puntos de la hipérbola se puede trazar unas cuantas generatrices en los límites de la parte de la superficie del cono marcada con las letras $SAKB$, o unos cuantos planos secantes auxiliares. En la fig. 375 se muestra uno de estos planos auxiliares (el plano horizontal U que corta a la superficie del cono según una circunferencia). Con ayuda de este plano se han hallado los puntos F y G .

En la segunda hoja de la superficie cónica se obtiene la segunda rama de la hipérbola.

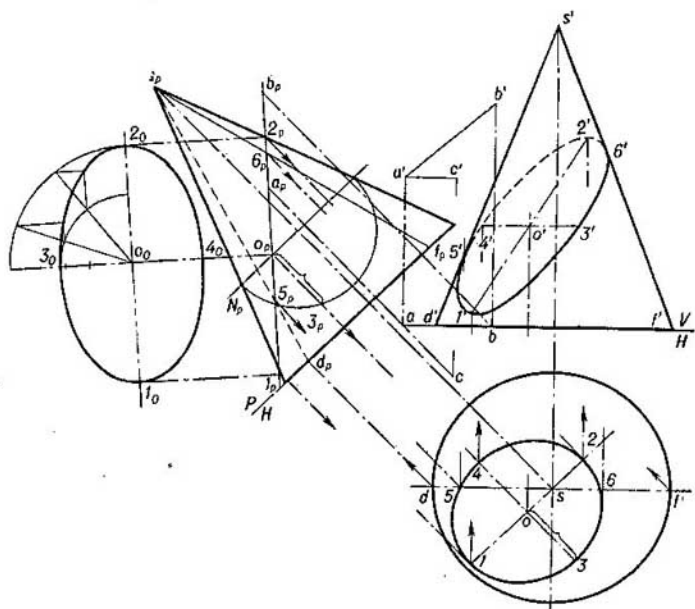


Fig. 376

En la fig. 376 se muestra la construcción de las proyecciones de la figura sección producida en un cono circular recto por un plano de posición general, dado por la horizontal AC y la frontal AB , y la forma verdadera de la figura sección.

La construcción se ha ejecutado con ayuda del método de cambio de los planos de proyección. Se ha introducido un plano auxiliar de proyección P , elegido de tal manera que sea perpendicular no

sólo al plano H , sino también al plano secante: el eje P/H se ha trazado perpendicularmente a la proyección ac . Sobre el plano P , el plano secante tiene como proyección una recta sobre la cual está situada la proyección de la figura sección (el segmento $I_p 2_p$). Con esto queda determinado el eje mayor de la elipse, según el cual el cono se corta por el plano dado. En el punto o_p que divide al segmento $I_p 2_p$ por la mitad, se encuentra la proyección del centro de la elipse. El plano N , trazado perpendicularmente al eje del cono, permite hallar el eje menor de la elipse (en la fig. 376 se ha trazado una semicircunferencia y sobre ella el segmento $o_p 3_p$, igual a la mitad del eje menor de la elipse). Con ayuda de los puntos o_p, I_p y 2_p se han hallado las proyecciones $o, 1$ y 2 , y luego las proyecciones $o', 1'$ y $2'$, que se encuentran del eje V/H a la misma distancia que las proyecciones o_p, I_p y 2_p del eje P/H . El punto $2'$ es el punto más alto de la proyección frontal; el punto $1'$ es el punto más bajo de los puntos de la elipse (la proyección frontal de la sección). Para determinar la posición de los puntos $5'$ y $6'$, en los cuales la elipse en la proyección frontal se divide en las partes «vista» y «oculta», se han construido las proyecciones $s_p d_p$ y $s_p f_p$ de las generatrices SD y SF , se han hallado los puntos 5_p y 6_p y con ayuda de éstos las proyecciones 5 y 6 , y a continuación las $5'$ y $6'$. Pero se hubiera podido hallar aunque fuera solamente el punto $5'$ y trazar por él una recta paralela a la proyección $a'b'$, puesto que el plano del meridiano principal del cono corta al plano secante dado según la frontal.

El eje menor de la elipse se proyecta sobre el plano H en verdadera magnitud (el segmento $3-4$), situándose sobre la horizontal del plano secante, y es también el eje menor de la elipse que representa la proyección horizontal de la figura sección. La forma verdadera de esta figura se ha obtenido construyendo la elipse con ayuda de su eje mayor ($I_0 2_0 = I_p 2_p$) y su eje menor ($3_0 4_0 = 3-4$).

En la fig. 377 se muestra una construcción semejante, cuando el plano secante está dado por sus trazas.

La construcción de las proyecciones de la sección se ha comenzado hallando los puntos pertenecientes al contorno de la proyección frontal del cono. Para ello se ha trazado por el eje del cono el plano secante auxiliar R paralelo al plano V ; la traza de este plano es R_h . El plano R corta al plano P según la frontal, y al cono, según dos generatrices. Los puntos A y B , obtenidos en la intersección de la frontal con las generatrices, pertenecen a la línea de intersección buscada del cono con el plano P .

En los puntos a' y b' la proyección frontal de la línea de intersección hace contacto con el contorno de la proyección frontal del cono y se divide en dos partes: la vista y la oculta. Luego se han construido dos puntos característicos más ¹⁾, a saber: los puntos superior e inferior de la sección, para lo cual se ha

¹⁾ Se llaman puntos característicos a tales puntos de la curva de intersección, como el más alejado y el más cercano al plano de proyección, a los puntos que dividen a la curva en las partes vista y oculta, y a los extremos de los ejes de las elipses.

trazado el plano secante auxiliar Q , que es un plano proyectante horizontal, perpendicular a la traza P_h y que pasa por el eje del cono. El plano Q corta al cono según las generatrices ST ($s't'$, st) y SU ($s'u'$, su), y al plano P , según la línea NK ($n'k'$, nk). Los puntos C y D , obtenidos en la intersección de las generatrices ST y SU con la recta NK , serán los puntos buscados. El segmento CD es el eje mayor de la elipse que se obtiene en la intersección del cono dado con el plano P .

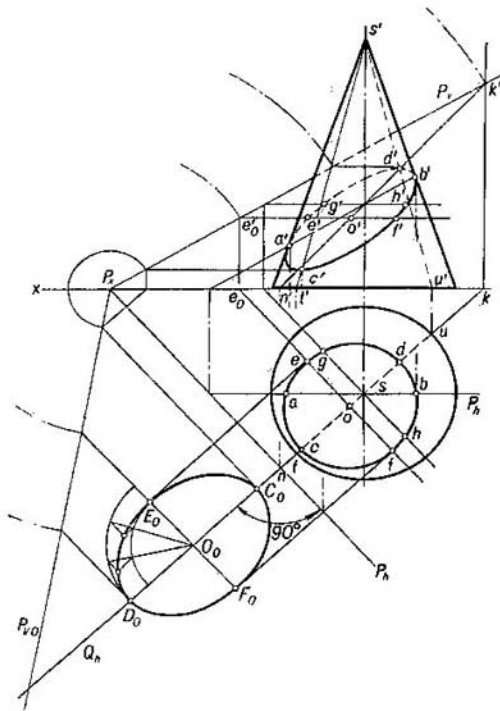


Fig. 377

La proyección cd es el eje mayor de la elipse que representa la proyección horizontal de la sección. Dividiendo CD por la mitad obtendremos la posición del centro de la elipse; los puntos o' y o son los centros de las elipses (las proyecciones de la figura sección).

Para hallar los puntos intermedios de la línea de intersección es cómodo valerse de planos secantes horizontales, puesto que éstos cortan a la superficie del cono según circunferencias, y al plano P , según horizontales. Para esta construcción son útiles solamente aquellos planos cuyas trazas frontales están situadas en los límites entre c' y d' , puesto que en el caso dado por encima del punto

d' y más abajo del punto c' no pueden haber puntos pertenecientes a la línea de intersección. En la fig. 377 se muestra la construcción de los puntos E , F , G y H , con la ayuda de dos de dichos planos; uno de ellos ha sido trazado por el punto O , gracias a lo cual se ha determinado el segmento ef , que representa el eje menor de la elipse obtenida en la intersección del cono con el plano P y al mismo tiempo, el eje menor de la proyección horizontal de ésta elipse.

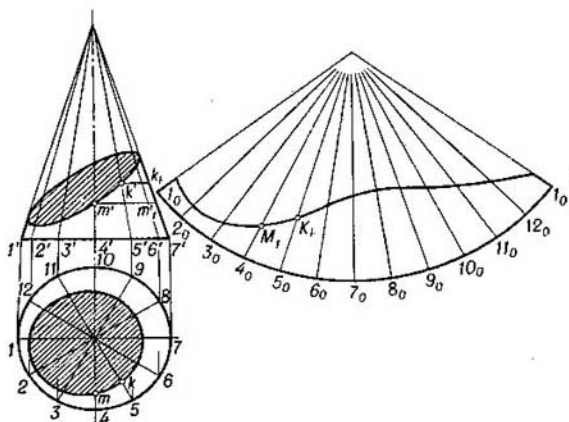


Fig. 378

Los segmentos $c'd'$ y $e'f'$ son diámetros conjugados para la elipse (la proyección frontal de la figura sección). Con ayuda de estos segmentos se pueden hallar los ejes de la elipse¹⁾.

La forma verdadera de la sección se ha hallado abatiendo el plano secante sobre el plano H . La elipse puede ser construida con ayuda de sus ejes mayor y menor, cuyas longitudes se han hallado abatiendo los puntos extremos de los ejes: C_0 y D_0 del eje mayor, y E_0 y F_0 del eje menor.

En la fig. 378 se muestra la construcción del desarrollo. La superficie lateral se desarrolla en un sector circular. El ángulo del sector se calcula por la fórmula $\alpha = \frac{r}{l} \cdot 360^\circ$, donde r es el radio de la circunferencia de la base del cono, y l , la generatriz del cono.

Para marcar en la superficie lateral desarrollada del cono la línea de intersección, se traza una serie de generatrices del cono y se determinan las longitudes de sus segmentos; luego se trazan las generatrices en la superficie lateral desarrollada del cono y se marcan las longitudes de los segmentos de estas generatrices. En la fig. 378 se ha construido el desarrollo de la superficie lateral y en éste se ha marcado la línea de intersección. La longitud de los segmentos de las generatrices se ha determinado girando las generatrices hasta la posición paralela al plano V (esta construcción se muestra para dos generatrices).

¹⁾ Sobre los diámetros conjugados de la elipse véase el § 21.

En la fig. 379 se muestra la determinación de los puntos de la curva de intersección de cierto cono con un plano de posición general Q , más alejado y más cercano al plano H . Para la construcción de estos puntos se han trazado los planos P y T , tangentes al cono, de tal modo que sus trazos P_h y T_h sean paralelas a Q_h ; con esto quedan determinadas las generatrices de la superficie cónica sobre las cuales deben estar situados los puntos que se buscan K y M .

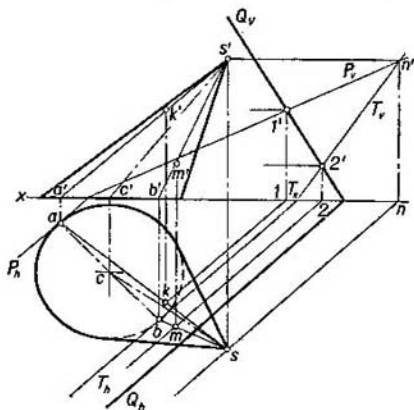


Fig. 379

Primeramente se construyen las proyecciones horizontales k y m en los puntos de intersección de las proyecciones horizontales de las horizontales, según las cuales los planos P y T cortan al plano Q , con las proyecciones horizontales de las generatrices SA y SB , y a continuación, en las proyecciones frontales de estas generatrices se marcan las proyecciones k' y m' .

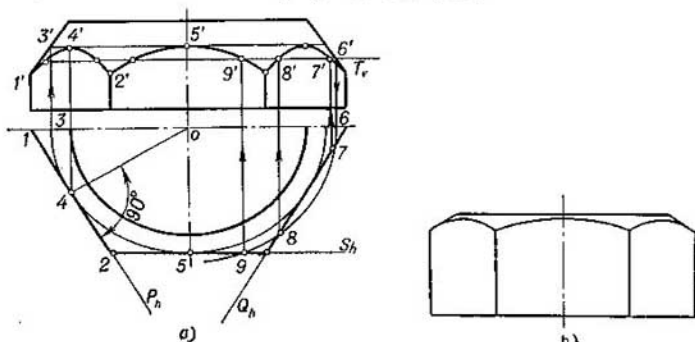


Fig. 380

En la fig. 380, *a* se muestra la construcción de las curvas que se obtienen en la superficie de un cono de revolución al cortarlo con las caras de un prisma hexagonal regular¹⁾. Dos de las caras laterales están situadas en los planos proyectantes horizontales *P* y *Q*, y la tercera, en el plano frontal *S*. La posición de estos planos respecto al eje del cono permite determinar en seguida cuáles curvas se obtendrán en la intersección. Se obtienen hipérbolas, además, una de ellas se proyecta sobre el plano *V* en verdadera magnitud.

Para hallar los puntos de las curvas se han tomado los paralelos del cono. Ante todo se han hallado los puntos extremos *1*, *4*, *2* y *5* en la proyección horizontal, y con ayuda de éstos se han hallado los puntos *1'*, *4'*, *2'* y *5'* en la proyección frontal. Luego con ayuda del plano horizontal auxiliar *T* se ha determinado primero el punto *6'* sobre el contorno de la proyección frontal del cono y a continuación se ha obtenido el punto *6* y con ayuda de la circunferencia de radio *o6* se han construido los puntos *7*, *8* y *9* con auxilio de los cuales se han hallado los puntos *7'*, *8'* y *9'*.

En la fig. 380, *b* está representada una tuerca de seis aristas (viene dada solamente la vista anterior); las curvas que separan las caras laterales de la tuerca de su parte cónica, representan hipérbolas, la construcción de las proyecciones de las cuales es análoga a la mostrada en la fig. 380, *a*.

PREGUNTAS AL § 57

1. ¿En qué consiste el procedimiento general de construcción de la línea curva que se obtiene en la sección producida en una superficie cónica por un plano?
2. ¿Cómo debe trazarse el plano para que éste corte a una superficie cónica según líneas rectas?
3. ¿Cuáles curvas se obtienen al cortar un cono de revolución con planos?
4. ¿En toda superficie cónica puede ser inscrita una esfera?
5. ¿Cómo se construye el eje menor de la elipse que se obtiene al cortar un cono de revolución con un plano?
6. ¿Cuál curva tiene como proyección sobre el plano perpendicular al eje del cono la elipse que se obtiene al cortar un cono de revolución?
7. ¿Cómo se construye el desarrollo de la superficie lateral de un cono de revolución?
8. ¿Qué representan las curvas en una tuerca con bisel cónico?

§ 58. INTERSECCIÓN DE UNA ESFERA Y UN TORO POR UN PLANO. EJEMPLO DE CONSTRUCCIÓN DE LA «LÍNEA DE CORTE» EN LA SUPERFICIE DE UN CUERPO DE REVOLUCIÓN COMPUESTO

Independientemente de cómo esté dirigido el plano secante, éste siempre corta a la esfera según una circunferencia, que se proyecta en forma de un segmento de recta, de una elipse o de una circunferencia, en dependencia de la posición del plano secante con respecto del plano de proyección (fig. 381). El eje mayor de la elipse (3-4), que es la proyección horizontal de la circunferencia sección, es igual al diámetro de esta circunferencia (3-4=1'2'); el eje menor 1-2

¹⁾ Para economizar sitio, la proyección horizontal se representa no totalmente, sino solamente la mitad.

se obtiene por proyección. Los puntos $5'$ y $6'$ en la proyección frontal del ecuador dan la posibilidad de hallar los puntos 5 y 6 , en los que la elipse (la proyección horizontal de la circunferencia) se divide según la visibilidad sobre el plano H .

Al construir las proyecciones de la circunferencia que se obtiene al cortar una esfera con un plano, se emplean planos auxiliares (véase la pág. 238), que dan, por ejemplo, en la esfera sus paralelos, y en el plano las horizontales. Se emplea también la transformación del dibujo con el fin de obtener la perpendicularidad del plano secante con respecto del plano de proyección auxiliar.

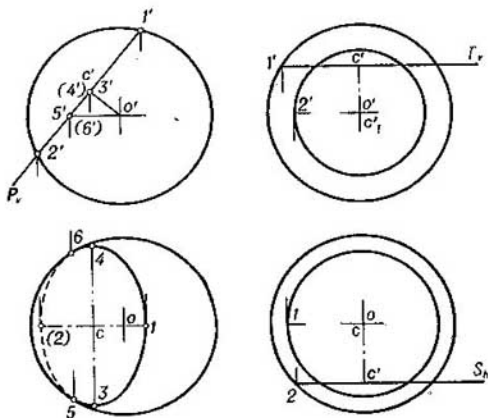


Fig. 38f

La construcción de la curva de intersección de un toro con un plano se realiza también con ayuda de planos que cortan al toro y al plano secante. En este caso, para el toro se eligen planos que lo corten según circunferencias (recordemos que el toro posee dos sistemas de secciones circulares: en los planos perpendiculares a su eje, y en los planos que pasan por este eje). El esquema de construcción en lo fundamental es análogo al mostrado en la fig. 359. En efecto, en la fig. 382 se muestra que los planos auxiliares S_1 y S_2 , perpendiculares al eje del toro (en el caso dado del anillo circular), cortan a su superficie según las circunferencias de radios R_1 y R_2 , y al plano P , según rectas que se proyectan sobre el plano V en los puntos $3'$, $5'$ y $7'$, es decir, perpendiculares al plano V . De ahí se obtienen los puntos de la figura sección.

Aclaremos la construcción en la fig. 382. Para el anillo circular se dan las representaciones: la mitad de la proyección frontal y la proyección de perfil. El anillo se corta con el plano proyectante frontal P . La semicircunferencia de radio R_1 es la línea de intersección del anillo con el plano frontal auxiliar S_1 . Esta semicircunferencia hace contacto con la traza P_v ; por eso se determina solamente un punto ($3'$, $3''$) de la línea de intersección de la superficie del anillo con el plano P sobre el plano S_1 . Pero si se traza el plano S_2 , entonces, sobre este plano se encontrarán dos puntos pertenecientes a la línea de intersección buscada. El plano S_2 determina en la superficie del anillo la semicircunferencia de radio R_2 que corta a la traza P_v en

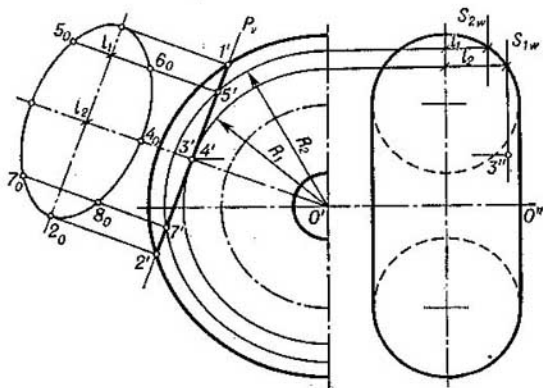


Fig. 382

dos puntos $5'$ y $7'$, que son las proyecciones frontales de los puntos de intersección de la superficie del anillo con el plano P . Así se puede proceder unas cuantas veces más y obtener una serie de puntos pertenecientes a la línea de intersección buscada.

La figura sección posee ejes y centro de simetría. Las distancias l_1 y l_2 , determinadas en el curso de la construcción, desde los planos S_1 y S_2 hasta, en este caso, el plano vertical de simetría del anillo circular, se emplean para marcar los puntos 3_0 y 5_0 al construir la forma verdadera de la sección (para marcar los puntos 4_0 , 6_0 , 7_0 y 8_0 se ha hecho uso de la simetría).

La curva de intersección obtenida nos recuerda una elipse. Pero, claro está, esto es sólo una semejanza exterior, que además no es muy grande. La elipse es una curva de segundo orden (véase el § 21), mientras que la curva construida de intersección de la super-

ficie del toro con el plano se expresa con una ecuación algebraica de cuarto orden¹⁾.

En la fig. 383 se muestran las secciones producidas en la superficie de un toro abierto (anillo circular), en el primer caso, por un plano que pasa por el eje del toro ($l=0$, donde l es la distancia desde el plano secante hasta dicho eje), que son dos circunferencias, y en los demás casos (2—5) el plano corta a dicha superficie según curvas en dependencia de l , R y r .

A las curvas obtenidas se les llama *curvas de Perseo* (uno de los geómetras de la Antigua Grecia). *Esta son curvas algebraicas de cuarto orden.*

Las curvas (2—5) mostradas en la fig. 383, tienen diferente forma: de óvalo con un eje de simetría (2), de curva de dos lóbulos con punto nodal en el origen de coordenadas (3), de curva ondulatoria (4), de óvalo con dos ejes de simetría (5) (véase la fig. 382). Estas curvas pasan a ser *óvalos de Cassini*²⁾ (un caso particular de las curvas de Perseo) en los casos siguientes: para el toro abierto (siendo $R > 2r$, si $R = 2r$ y cuando $R < 2r$), para un toro cerrado ($R = r$) y para un toro

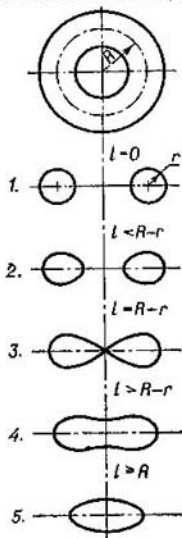


Fig. 383

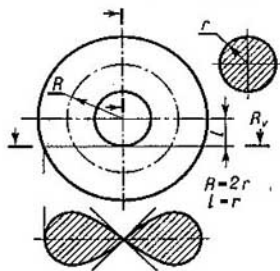


Fig. 384

que se corta a sí mismo ($R < r$), si $l = r$, con la particularidad de que para el toro abierto (anillo circular) siendo $R = 2r$ se obtiene la *lemniscata de Bernoulli*³⁾; para

¹⁾ La curva cerrada construida en la fig. 382 se refiere a los *óvalos*, es decir, a las curvas planas cerradas convexas que no poseen puntos angulares. Entre los óvalos pueden haber compuestos de arcos de circunferencias y, por consiguiente, trazados con ayuda de un compás; pero esto no da motivo para considerar como óvalos solamente a tales líneas.

²⁾ Juan Domingo Cassini (1625—1712), astrónomo. El óvalo de Cassini es una curva algebraica de cuarto orden, simétrica respecto de los ejes de coordenadas, el lugar geométrico de los puntos M , para los cuales $F_1M \cdot F_2M = a^2$, donde F_1 y F_2 son puntos fijados (focos), y a es una constante.

³⁾ Lemniscata procede de la palabra griega *lemniscos* que significa cinta. Daniel Bernoulli (1700—1782), matemático y mecánico, desde 1725 hasta 1733, académico de la Academia de Ciencias de San Petersburgo fundada por Pedro I en el año 1724 (en la actualidad, Academia de Ciencias de la URSS). La lemniscata de Bernoulli es el lugar geométrico de los puntos M , para los cuales

$F_1M \cdot F_2M = \left(\frac{F_1F_2}{2}\right)^2$, donde F_1 y F_2 son puntos fijados (focos).

ésta su origen (fig. 384) es un punto doble: las tangentes ($y = \pm x$) son perpendiculares entre sí¹⁾.

En la fig. 385 viene representado cierto cuerpo de revolución, delimitado en la parte que se examina por tres superficies cilíndricas, una cónica, una esférica y tres superficies de anillo circular, y también por dos planos, que en la posición representada en la fig. 385 son frontales (en el dibujo vienen dadas sólo las mitades de la vista superior y del corte de perfil).

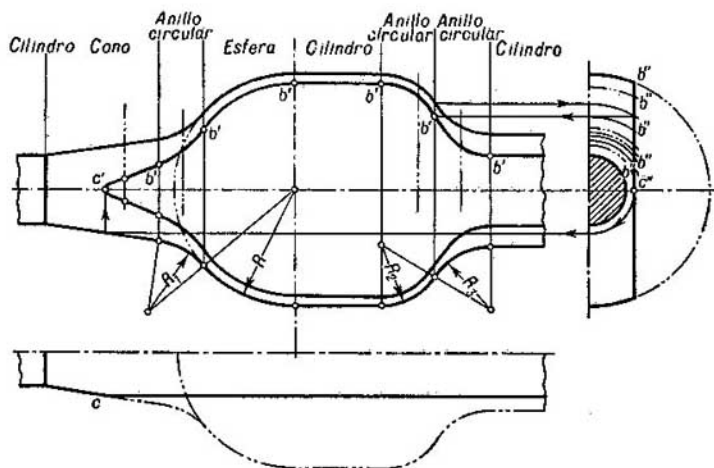


Fig. 385

En la intersección con la superficie del cuerpo de revolución, estos planos dan precisamente «líneas de corte», que se encuentran con frecuencia en las piezas, que representan cuerpos de revolución.

Ante todo se han establecido las «zonas» o sectores de las superficies de revolución que delimitan al cuerpo dado. Esto se ha cumplido con ayuda de los puntos de conjugación, hallados bien sobre las líneas de centros o bien sobre las perpendiculares a las generatrices del cono y de los cilindros²⁾. Por los puntos de conjugación se han trazado planos de perfil que cortan a cada superficie según

¹⁾ A los que les interesen unos datos más detallados acerca de las curvas de Perseo y sus casos particulares les recomendamos el libro de A. A. Savélov «Curvas planas».

²⁾ En la fig. 385 los puntos de conjugación se muestran sólo en una mitad de la vista anterior.

una circunferencia. Los arcos de estas circunferencias representados en el plano W determinan las proyecciones de perfil de los puntos característicos en la línea de corte. Por la posición de los puntos b'' se determina la posición de la proyección b' .

La línea de corte en el cono, en este caso, es una hipérbola. Su vértice (el punto c') ha sido hallado en virtud de la posición evidente de la proyección c'' . Conociendo la posición del punto c'' determinamos la proyección del arco de circunferencia, sobre el cual debe estar situado el punto C .

Se muestra también la construcción con ayuda de un punto (intermedio) en cada sección de la línea de corte. La construcción está clara del dibujo. En las zonas de la esfera y los cilindros los puntos «intermedios» no es necesario hallar, puesto que la esfera se ha «cortado» según una circunferencia, representada en la vista principal en verdadera magnitud, con la particularidad de que el radio de esta circunferencia se obtiene como el mayor de los segmentos $c''b''$, y las superficies cilíndricas han sido «cortadas» según las generatrices.

§ 59. INTERSECCION DE LAS SUPERFICIES CURVAS POR UNA RECTA

En la fig. 386 a la izquierda se muestra la intersección de una línea recta con cierta superficie cilíndrica. Esta superficie está dada por su traza sobre el plano H (la curva MN) y la dirección de la generatriz (la recta MT). Por la recta AB se ha trazado el plano proyectante frontal auxiliar S que corta a la superficie cilíndrica dada

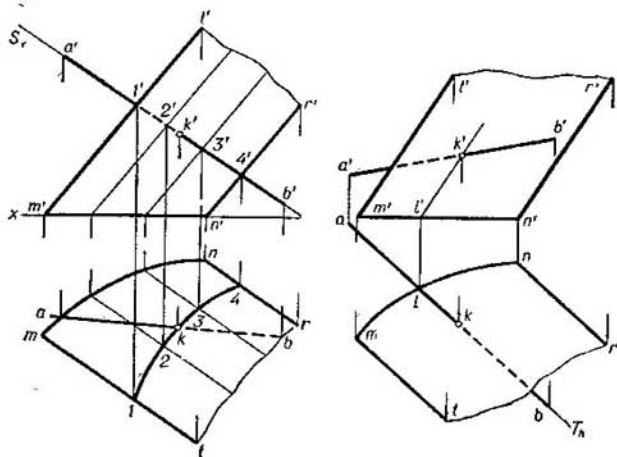


Fig. 386

según una curva, construida con ayuda de los puntos en los cuales las generatrices de la superficie cortan al plano S . En la intersección de la curva obtenida con la recta dada AB hallamos el punto K en el que la recta AB corta a la superficie cilíndrica.

Este procedimiento es general para la construcción de los puntos de intersección de una recta con una superficie cualquiera: *por la recta se debe trazar un plano auxiliar, hallar la línea de intersección de este plano con la superficie; el punto de intersección de la recta dada con la línea construida sobre la superficie será precisamente el punto de intersección de la recta con la superficie buscado.*

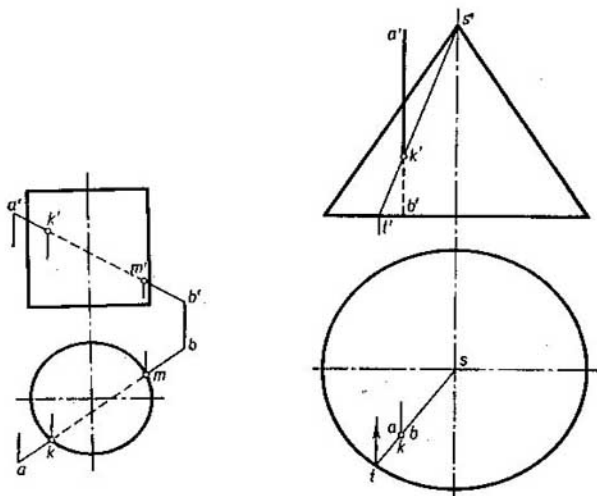


Fig. 387

Aquí se observa una analogía completa con la construcción del punto de intersección de una recta con un plano (véanse los §§ 22 y 25).

La construcción mostrada en la fig. 386 a la izquierda, claro está, se simplifica si (fig. 386, a la derecha) el plano auxiliar T es paralelo a la generatriz MT : la superficie resulta cortada según una recta paralela a MT y determinada por un solo punto L . Este es uno de los casos particulares posibles, a saber: la recta dada AB está situada en el plano paralelo a la generatriz MT .

A veces es innecesario mostrar el plano auxiliar. En la fig. 387 se dan algunos ejemplos: un cilindro circular recto cuyo eje es perpendicular al plano H , y un cono con la misma posición de su eje. La proyección horizontal del punto de intersección de la recta AB , perpendicular al plano H , con la superficie lateral del cono circular recto se confunde con la proyección horizontal de la pro-

plana recta. Trazando la proyección horizontal de la generatriz ST y construyendo su proyección frontal $s't'$, hallamos la proyección frontal k' del punto buscado.

El plano auxiliar trazado por una recta, al cortar ésta a una superficie cualquiera, debe ser elegido de tal modo que se obtengan las secciones más simples.

Por ejemplo, al cortar una superficie cónica con una recta, tal plano es el plano que pasa por el vértice y, por consiguiente, que corta

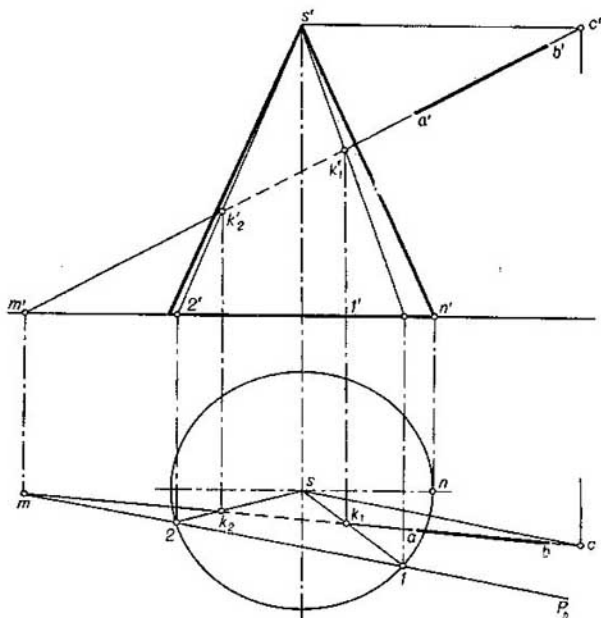


Fig. 388

a esta superficie según líneas rectas. Al cortar una superficie cilíndrica con una recta es conveniente trazar el plano auxiliar por la recta dada paralelamente a las generatrices de esta superficie; al cortar una superficie cilíndrica con un plano trazado de esta manera se obtienen líneas rectas.

En la fig. 388 se da el ejemplo con un cono, donde los puntos de intersección se han hallado con ayuda del plano P determinado por el vértice del cono y la recta dada.

Para construir las generatrices según las cuales el plano P corta al cono, es necesario hallar un punto más para cada generatriz, además del punto S . Estos puntos pueden ser hallados en la intersección de la traza del plano P , obtenida en el plano de la base del cono, con la circunferencia de esta base. En la fig. 388 el plano de la base del cono se ha tomado como plano de proyección H ; por eso la traza del plano se ha designado por P_h . Para su construcción se ha tomado la recta auxiliar SC (la horizontal del plano P) y se ha hallado la traza

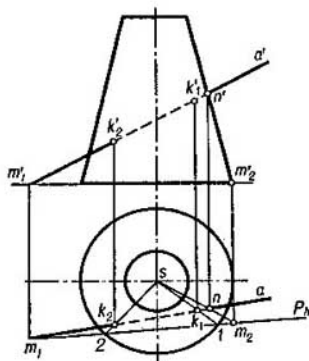


Fig. 389

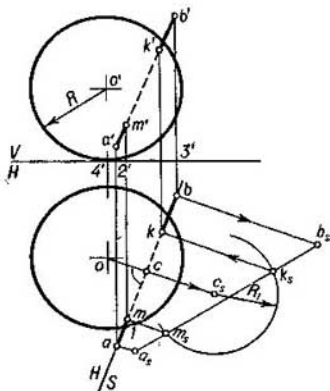


Fig. 390

horizontal de la recta AB . La traza P_h pasa por el punto m paralelamente a la proyección sc . Por los puntos $1, 1'$ y $2, 2'$ pasarán las generatrices buscadas. Los puntos K_1 y K_2 son los puntos de entrada y de salida en la intersección de la recta AB con la superficie del cono.

Si viene dado un cono truncado (fig. 389) y no se puede construir la proyección frontal del vértice, entonces se puede tomar el punto n' como proyección frontal del punto de intersección de la recta dada AM_1 con cierta recta auxiliar que pasa por el vértice S ; una vez hallada la proyección n , construimos la proyección horizontal de la recta auxiliar SM_2 (haciendo uso del punto s). Lo demás está claro del dibujo.

En la fig. 390 se muestra la construcción de los puntos K y M , en los que el segmento AB corta a la esfera de radio R . Se ha aplicado el método de cambio de los planos de proyección.

Ante todo, por AB se ha trazado el plano proyectante horizontal S (su traza en el plano H se confunde con la proyección ab). Este plano corta a la esfera según una circunferencia cuyo radio R_1 es

igual al segmento cI . Tomando este mismo plano S como plano de proyección auxiliar que forma con el plano H el sistema S, H , construimos la proyección $a_s b_s$ del segmento AB ($aa_s = a'2'$, $bb_s = b'3'$) y la proyección de la circunferencia según la cual el plano S corta a la esfera. La proyección del centro c_s la hallamos marcando $c_s c = c'4'$ y desde c_s como centro describimos un arco de radio R_1 de tal modo que se obtengan los puntos k_s y m_s (es innecesario trazar toda la circunferencia de radio R_1). Con ayuda de estos puntos hallamos primero las proyecciones k y m y con auxilio de estas últimas, las proyecciones k' y m' .

En la fig. 391 se da un ejemplo más de construcción de los puntos de intersección de una línea recta con una superficie que delimita cierto cuerpo de revolución. Además de dos planos, el cuerpo está delimitado por dos superficies cilíndricas de revolución y la parte de transición entre éstas (la superficie de un anillo circular). En el punto K_1 la recta corta a la superficie cilíndrica y luego corta en el punto K_2 a la superficie del anillo circular. Para construir las proyecciones de este punto se ha hallado la curva con las proyecciones $1-2-3$, $1'2'3'$, obtenida al cortar la superficie del anillo con el plano S trazado por la recta AB perpendicularmente al plano H . La curva se ha construido con ayuda de sus puntos haciendo uso de los paralelos; en el dibujo se muestran dos, señalados con los puntos M y N . A continuación la recta corta de nuevo a la superficie del anillo en el punto K_3 y sale fuera de los límites de la superficie por el punto K_4 .

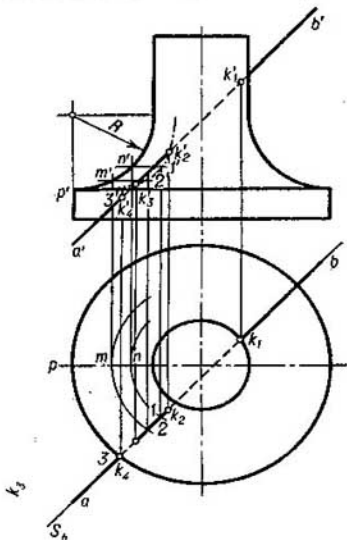


Fig. 391

Ahora prestemos atención en la construcción mostrada en la fig. 392. Aquí está representado un cilindro oblicuo con base circular. Para construir los puntos de intersección de la superficie del cilindro con la recta AB trazamos el plano P determinado, además de la recta AB , por la recta auxiliar BM_1 trazada por el punto B paralelamente a las generatrices del cilindro. Tal plano corta al cilindro según sus generatrices. Si se hallan las trazas horizontales de

las rectas que determinan al plano, entonces se puede trazar la traza horizontal del plano P . Señalando los puntos 1 y 2 en la intersección de la traza P_h con la base del cilindro (ésta está situada en el plano H), trazamos por estos puntos rectas paralelas a la proyección horizontal de la generatriz del cilindro y marcamos los puntos k_1 y k_2 (las proyecciones horizontales de los puntos de intersección de la recta AB con la superficie del cilindro). A continuación hallamos los puntos k'_1 y k'_2 .

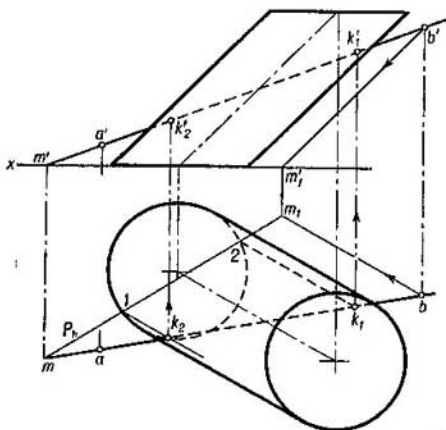


Fig. 392

Tal construcción se puede también representar como la proyección oblicua del cilindro y la recta AB sobre el plano H . La proyección se efectúa en dirección paralela a la generatriz del cilindro. El punto M de la recta AB está situado en el plano H ; el punto M_1 es la proyección oblicua del punto B , construido sobre el plano H . La recta mm_1 es la proyección oblicua de la recta AB sobre el plano H . El cilindro tiene como proyección sobre este plano a su base. Lo demás está claro del dibujo.

Al resolver problemas de la intersección de superficies con una línea recta puede ocurrir que la recta dada no corta a la curva, que delimita a la figura obtenida al cortar la superficie dada con un plano trazado por la recta, sino que sólo hace contacto con ella. En este caso la recta es tangente a la superficie dada. En general, si se necesita determinar cómo está situada la recta respecto de la superficie, es necesario trazar por la recta un plano que corte a la superficie y examinar la posición recíproca de la recta y la figura obtenida en la intersección de la superficie con el plano.

En este párrafo se ha examinado el problema de la construcción de los puntos que se obtienen al cortar una superficie curva con una recta. El procedimiento general es: 1) el trazado de un plano por la recta dada, 2) la construcción de la línea de intersección de la superficie con este plano, 3) la determinación de los puntos de intersección de la línea construida con la recta dada.

¿Cómo se debe proceder si cierta superficie debe ser cortada no con una recta, sino con una curva plana cualquiera? Evidentemente, el procedimiento expuesto es aplicable también en este caso, con la particularidad de que como plano trazado por la línea recta, sirve aquí el plano en el que está situada la propia curva plana.

PREGUNTAS A LOS §§ 58 Y 59

1. ¿Cuál línea se obtiene al cortar una esfera con un plano cualquiera y cuáles pueden ser las proyecciones de esta línea?
 2. ¿En qué consiste el procedimiento de construcción de la sección producida en un toro por un plano?
 3. ¿Cómo deben estar dirigidos los planos que cortan a un toro según circunferencias?
 4. ¿Cómo se llaman las curvas obtenidas al cortar un toro con un plano paralelo al eje del toro? ¿En cuál caso estas curvas pasan a ser óvalos de Cassini y en cuál caso se obtiene la lemniscata de Bernoulli?
 5. ¿Qué se comprende bajo el nombre de «curva de corte»?
 6. ¿En qué consiste el procedimiento general de construcción de los puntos de intersección de una línea recta con una superficie curva?
 7. ¿Cómo trazar el plano secante auxiliar al cortar un cono con una recta, de tal modo que en la superficie del cono se obtengan líneas rectas?
 8. ¿Se puede emplear la proyección oblicua en el caso de intersección de un cilindro con una recta, si las generatrices del cilindro no son perpendiculares al plano de proyección?
-

X

CAPÍTULO

INTERSECCIÓN DE UNA SUPERFICIE POR OTRA, DE LAS CUALES POR LO MENOS UNA ES CURVA

§ 60. MÉTODO GENERAL DE CONSTRUCCIÓN DE LA LÍNEA DE INTERSECCIÓN DE UNA SUPERFICIE CON OTRA

*El método general de construcción de la línea de intersección de una superficie con otra es la determinación de los puntos de esta línea con ayuda de ciertos planos secantes¹⁾. En la fig. 393 a la izquierda se muestra que las superficies *I* y *II* se han cortado con cierta superficie *III*; esta superficie auxiliar corta a la superficie *I* según la línea *AB*, y a la superficie *II*, según la línea *CD*. El punto *K*, en el que se cortan las líneas *AB* y *CD*, es común para las superficies *I* y *II* y, por lo tanto, pertenece a la línea de intersección de las mismas. Repitiendo este procedimiento obtenemos una serie de puntos de la línea buscada. Nosotros ya hicimos uso de este procedimiento al examinar (véase el § 24) la construcción de la línea de intersección de un plano con otro. Entonces el problema se reducía (fig. 166) al empleo de dos planos auxiliares. Cada uno de ellos permitía hallar un punto, común para ambos planos, la línea de intersección de los cuales era necesario hallar.*

Aplicando el procedimiento general indicado para la construcción de la línea de intersección de dos superficies curvas podemos:

- 1) cortar las superficies con *planos* auxiliares;
- 2) cortar las superficies con *superficies curvas* auxiliares (por ejemplo, con esferas).

En algunos casos de resolución de problemas se combina el empleo de planos auxiliares y superficies curvas. Se debe, en lo posible,

¹⁾ Para las líneas de intersección se usa también el nombre de «línea de transición», sobre todo en aquellos casos en que en la transición de una superficie a otra no existe una intersección destacada. A las superficies secantes auxiliares se les suele llamar «intermediarios».

elegir tales superficies auxiliares que en la intersección con las superficies dadas dan líneas simples para la construcción (por ejemplo, rectas o circunferencias).

En el caso general, los planos secantes auxiliares se emplean también para la construcción de la línea de intersección de una superficie curva con otra de caras.

El procedimiento general indicado de construcción de las líneas de intersección de una superficie con otra no excluye el empleo de otro procedimiento, si por lo menos una de estas superficies es reglada: hallar el punto en el que la generatriz rectilínea de una superficie corta a la otra superficie y, repitiendo este artificio para una

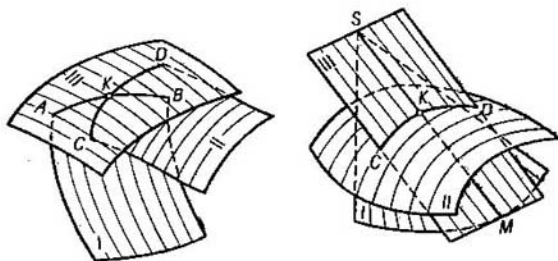


Fig. 393

serie de generatrices, trazar por los puntos hallados la línea buscada. En la fig. 393 a la derecha se muestra que por la generatriz SM de la superficie I se ha trazado el plano III que corta a la segunda superficie (II) según la curva CD ; la generatriz SM corta a esta curva en el punto K por el que pasará la línea buscada de intersección de las superficies I y II .

Esto se refiere también al caso de intersección de una superficie curva por una superficie de caras: aquí como generatrices sirven las aristas de la superficie de caras.

Así pues, para construir los puntos de la línea que se obtiene en una superficie al cortarla con otra superficie se emplean planos secantes auxiliares de posición particular y general, superficies curvas, generatrices rectilíneas de superficies curvas regladas y las aristas de las superficies de caras. Además, se recurre a los procedimientos de transformación del dibujo, si esto simplifica y aclara la construcción.

En los ejemplos dados en la exposición ulterior, principalmente se examinan cuerpos geométricos, es decir, porciones limitadas de espacio con el conjunto de líneas que las delimitan (superficies). De dos superficies solamente una corta a la otra. Por eso una de las

superficies se conserva, y en la otra, en la cortada, surgen orificios. Aquí pueden surgir los casos siguientes: 1) *penetración*, con la particularidad de que se obtienen o bien dos líneas independientes (véase, por ejemplo, la fig. 412, donde el cono con eje horizontal penetra en otro cono), o una sola línea con punto nodal (fig. 427); 2) *morde-dura*, cuando se obtiene una línea (véase, por ejemplo, las figs. 396 y 426).

En las piezas fundidas las líneas de transición son por lo general suaves, es decir, el paso de una superficie a otra tiene lugar por una superficie intermedia, por ejemplo, por un toro. En este caso para designar la transición se construye la línea de intersección de las formas geométricas que sirven como base para las formas técnicas (véase, por ejemplo, las figs. 399 y 430) ¹⁾.

Las proyecciones de la línea de intersección se obtienen dentro de los límites de la parte común de las proyecciones de ambas superficies.

Para construir los puntos de la línea de intersección, primero se deben hallar los puntos llamados corrientemente *característicos* ²⁾. Estos son los puntos, cuyas proyecciones separan la parte vista de la proyección de la línea de intersección de la oculta, son las proyecciones de los puntos de la línea de intersección, más altos y más bajos respecto del plano H , más cercanos y más lejanos con relación al observador, los puntos extremos a la derecha y a la izquierda en las proyecciones de la línea de intersección.

§ 61. ELECCIÓN DE LOS PLANOS SECANTES AUXILIARES EN LOS CASOS CUANDO ÉSTOS PUEDEN CORTAR A AMBAS SUPERFICIES SEGÚN LÍNEAS RECTAS

Cuando ambas superficies son cilíndricas o cónicas, o en el caso en que una de ellas es cilíndrica y la otra cónica, a veces, los planos auxiliares deben elegirse de tal manera que corten a ambas superficies según líneas rectas (según las generatrices de estas superficies). El punto de intersección de la generatriz de una superficie con la generatriz de la otra pertenece a la línea de intersección.

En la fig. 394 se da un ejemplo de la elección de los planos secantes para los casos de intersección de un cilindro por otro. Como «patrón» para estas superficies sirve el plano P , «el plano de paralelismo», determinado por dos rectas que se cortan LM y LN , paralelas respectivamente a las generatrices de los cilindros. Este plano

¹⁾ En semejantes casos, es decir, cuando se considera un cuerpo monolítico, es más exacto hablar de la línea de unión de las superficies.

²⁾ Se les suele llamar también «de apoyo».

es de posición general; por consiguiente, en este caso, los planos secantes auxiliares son también de posición general. Basta prefijar las trazas horizontales de estos planos, trazándolas paralelamente a la traza P_h : las direcciones de las rectas, según las cuales estos planos

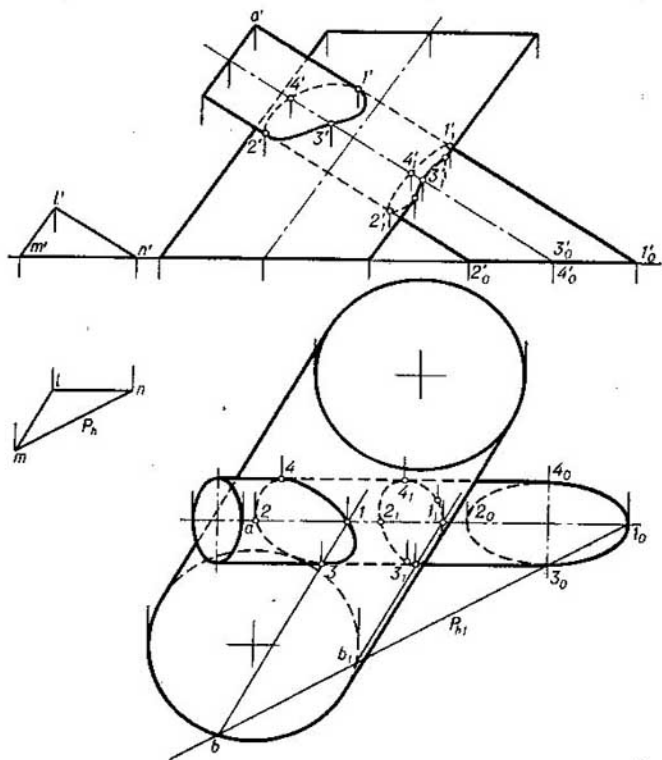


Fig. 394

cortan a ambos cilindros, son conocidas, son paralelas a las generatrices de los cilindros. Por ejemplo, la traza $P_{1h} \parallel P_h$ corta en dos puntos a cada una de las líneas directrices de los cilindros dados, lo que ofrece la posibilidad de determinar sus generatrices. Estas generatrices se cortan en cuatro puntos pertenecientes a la línea de intersección buscada. La construcción se ha efectuado suponiendo que

uno de los cilindros penetra en el otro, formando en la superficie de este último dos orificios.

Evidentemente, en semejante construcción se puede elegir una u otra generatriz de uno de los cilindros, trazar la traza del plano secante por la traza de esta generatriz, como se ha hecho con la traza P_{1h} , y analizar si da este plano los puntos de intersección con las generatrices del otro cilindro, obtenidas con ayuda del mismo plano.

Análogamente se construye el patrón de planos secantes auxiliares en los casos de intersección de un cilindro por un prisma y viceversa.

En la fig. 395 se ha efectuado la construcción de las líneas de intersección de la superficie de un cilindro por una pirámide. Para la elección de los planos que corten según líneas rectas no sólo a las caras de la pirámide, sino también a la superficie cilíndrica según las generatrices, se ha trazado la recta SM paralela a la generatriz de esta superficie y que pasa por el vértice de la pirámide. Obviamente, si en vez de la pirámide tomamos un cono, se debe proceder del mismo modo: trazar una recta por el vértice del cono paralela a la generatriz de la superficie cilíndrica. Las trazas horizontales de los planos secantes auxiliares deberán pasar por el punto m , lo que corresponderá al trazado de los planos por la recta SM . Las trazas horizontales de los planos cortan a las trazas horizontales de las superficies laterales del cilindro y de la pirámide en los puntos por los que pasan las proyecciones horizontales de las líneas de intersección de los planos auxiliares con las superficies dadas. Por ejemplo, la traza T_h corta a las proyecciones horizontales de los lados de la base de la pirámide en los puntos d y e , lo que corresponde a la intersección de las caras SBC y SAC por el plano T según las rectas SD y SE . Pero el mismo plano T corta a la superficie cilíndrica según la generatriz con el punto inicial $7, 7'$. En la intersección de esta generatriz con las rectas SD y SE se obtienen los puntos $8, 8'$ y $9, 9'$, pertenecientes a la línea de intersección. Esta línea se encuentra en la superficie cilíndrica, puesto que en el caso dado la pirámide penetra en el cilindro, saliendo de éste por la base superior, en la que se obtiene un orificio triangular.

Las curvas en la superficie cilíndrica dada son arcos de elipses, puesto que representan las líneas de intersección de esta superficie por planos (las caras de la pirámide). La construcción debe iniciarse con la determinación de los puntos de intersección de las aristas de la pirámide con el cilindro.

En la fig. 396 se ha construido la línea de intersección, que se forma en la superficie del cono (con el vértice S) en el caso de mordedura de éste por el cono de vértice T .

Para hallar los puntos de la línea de intersección se han empleado planos de posición general, cada uno de los cuales debe pasar por los vértices de ambos conos.

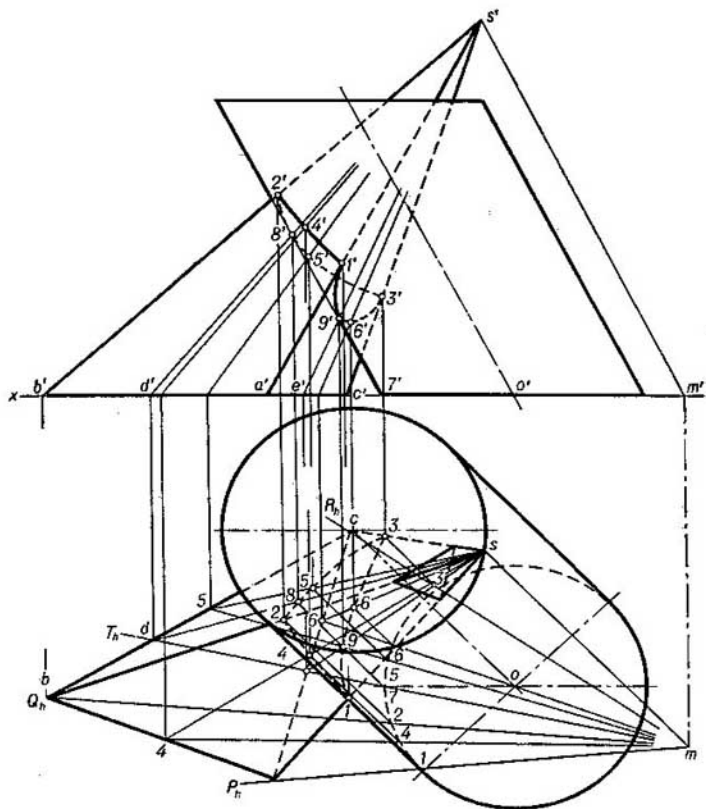


Fig. 395

Previamente se ha trazado una recta por los vértices S y T . Los planos que pasan por la recta ST cortan a las superficies cónicas según sus generatrices.

Estos planos forman un haz, como eje del cual sirve la recta ST . Una vez construida la traza horizontal de esta recta, obtenemos el punto m , por el que deben pasar las trazas horizontales de los planos requeridos, por ejemplo, la traza P_h . Intersecando la circunferencia

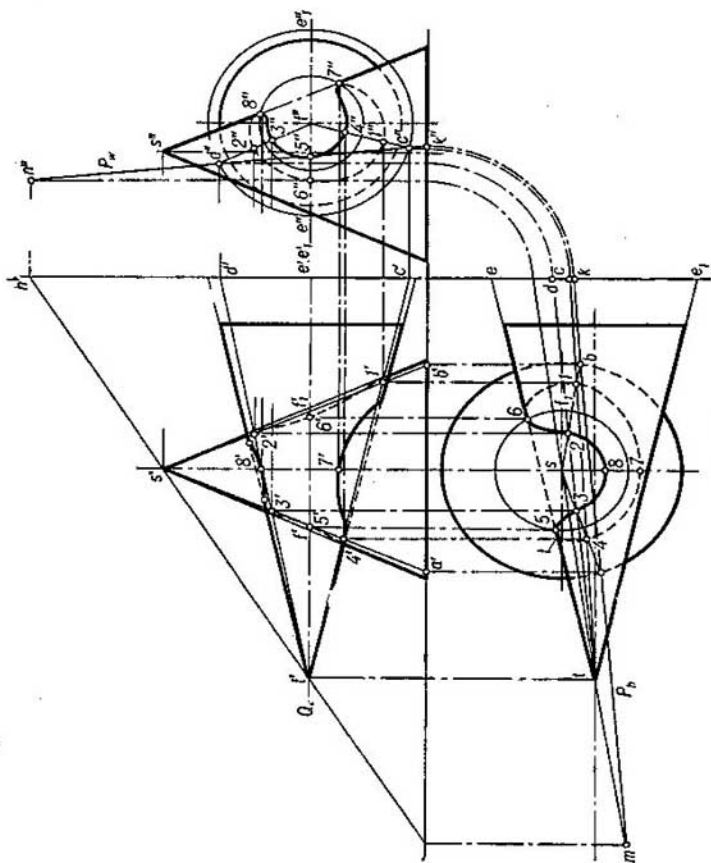


Fig. 396

de la base del cono de vértice S , la traza P_h da los puntos a y b , con ayuda de los cuales se pueden hallar las proyecciones horizontales de las generatrices SA y SB sobre la superficie de este cono. Luego hallamos las proyecciones frontales de las generatrices indicadas ($s'a'$ y $s'b'$).

Ya vimos un procedimiento semejante en la fig. 282, donde se examinaba la intersección de una pirámide por otra.

Pero la traza horizontal P_h no permite en este caso determinar las generatrices del cono de vértice T , situadas en el plano P ; por eso hallamos la traza de perfil P_w que corta a la línea de intersección de la superficie cónica con el plano W en los puntos c'' y d'' . Una vez construidas las proyecciones horizontales y frontales de los puntos C y D , construimos las generatrices del cono de vértice T : CT y DT ($c't'$, ct y $d't'$, dt). Las generatrices halladas se cortan en los puntos pertenecientes a la línea buscada.

Trazando una serie de planos auxiliares por ST , se puede construir una serie de puntos de la línea buscada de intersección y trazar por ellos una curva.

Confrontando las construcciones en la fig. 396 y las construcciones de las figs. 394 y 395 vemos que en estas últimas fueron suficientes las trazas horizontales de los planos, mientras que en el caso de la fig. 396 fueron necesarias las trazas de perfil. Esto se explica por

hecho de que las bases de los cuerpos examinados en las figs. 394 y 395 están situadas en el plano H , mientras que en la fig. 396 solamente uno de los conos se apoya sobre el plano H . Por esta razón, cuando las bases de los cuerpos están situadas en distintos planos de proyección (fig. 397), nos vemos obligados a emplear las trazas correspondientes de los planos secantes. Si, por ejemplo, como en la fig. 396, la superficie de uno de los conos no llega hasta el plano de proyección, entonces ésta se lleva hasta este plano, o sea, se construye la traza de la superficie.

El trazado de los planos secantes por una recta que pasa por los vértices de los conos, evidentemente, es útil también para el caso de la intersección de la superficie de un cono por una pirámide.

En la fig. 396 se muestra el empleo de no sólo planos de posición general, por ejemplo, el plano P , sino también planos de posición particular para hallar ciertos puntos. Así, el plano trazado por el punto T paralelamente al plano H (la traza Q_w) corta al cono según las generatrices TE y TE_1 , y al cono de vértice S , según la circunfe-

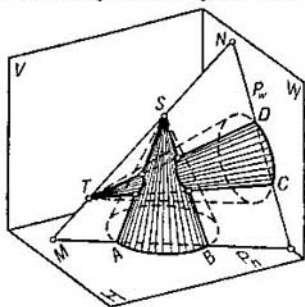


Fig. 397

sencia FF_1 . En la intersección de su proyección horizontal con et hallamos las proyecciones horizontales 5 y 6, y luego las proyecciones 5', 6' y 5'', 6''. Trazando por S un plano de perfil hallamos los puntos con las proyecciones 7, 7', 7'' y 8, 8', 8''.

§ 62. APLICACION DE LOS PLANOS SECANTES AUXILIARES PARALELOS A LOS PLANOS DE PROYECCION

En el párrafo anterior, en la fig. 396 se mostró la aplicación de planos secantes auxiliares: uno, paralelo al plano H y otro, paralelo al plano W . Pero allí el papel principal como planos auxiliares de posición general lo desempeñaba el haz de planos con la recta común ST . Ahora examinaremos ejemplos, cuando el empleo de solamente planos paralelos a los planos de proyección, resuelve por completo el problema de determinación de los puntos para la curva buscada. Esto ocurre en los casos en que estos planos cortan a las superficies, que participan en la construcción, según rectas o circunferencias.

En la fig. 398, un cono truncado, cuyo eje es perpendicular al plano W , penetra en una semiesfera, en la superficie de la cual se forma una curva cerrada. En este caso los puntos de la línea de intersección se han hallado con ayuda de planos paralelos al plano W y perpendiculares al eje del cono. Los planos P y P_1 cortan a la superficie de la semiesfera según circunferencias de radios $o'a'$ y $o_1a'_1$, y a la superficie del cono, según circunferencias de radios $c''b''$ y $c''b''_1$. Construyendo las circunferencias indicadas sobre el plano W , hallamos las proyecciones de perfil de los puntos de la línea buscada. Así pues, en la intersección de las circunferencias, obtenidas con ayuda del plano P , marcamos los puntos 1'' y 2''; las proyecciones frontales y horizontales de estos puntos se encuentran en las trazas P_h y P_r . De modo semejante se han hallado los puntos 3, 3' y 4, 4' con auxilio del plano P_1 .

Dado que el eje del cono es paralelo al plano H , entonces, trazando por él el plano Q paralelo al plano H , cortaremos a la superficie del cono según generatrices, y a la superficie de la semiesfera, según una circunferencia; construyendo la proyección de esta última sobre el plano H , hallaremos en la intersección con las proyecciones de las generatrices correspondientes del cono los puntos 5 y 6.

En este ejemplo, la posición de los puntos 7, 7' y 8, 8' es evidente. Estos puntos, así como los 5, 5' y 6, 6' son puntos característicos; en forma ampliada se muestra la construcción del punto 6, en el que hacen contacto una con otra las proyecciones de la generatriz del cono y de la línea de intersección.

En la fig. 399 se da otro ejemplo, cuando los puntos de la línea de intersección de dos superficies se han hallado con la ayuda de planos secantes paralelos al plano H , y en un caso (el punto B) al plano W . Aquí es más oportuno hablar de la línea de transición

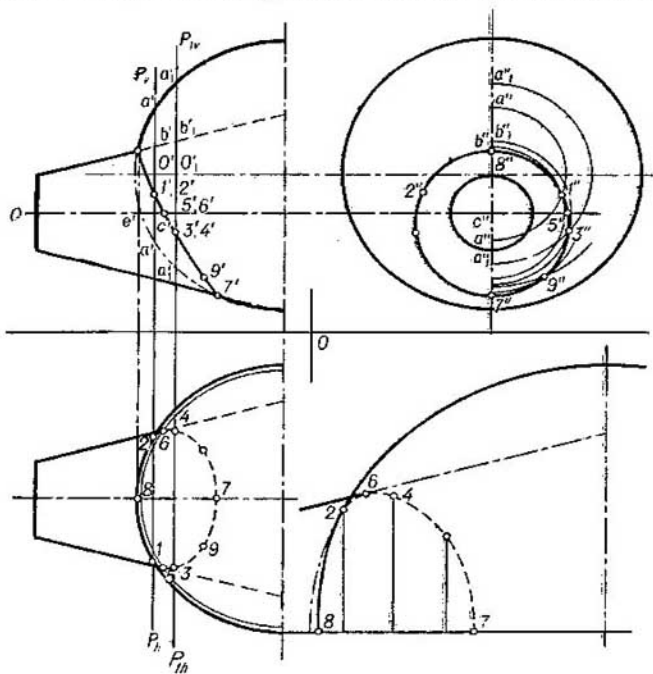


Fig. 398

(véase la nota de la pág. 274), puesto que la pieza representada ¹⁾ (casquete de cojinete) se obtiene por fundición y allí donde la superficie cónica se junta con la esférica, no se obtiene una línea de intersección claramente destacada. Pero en la fig. 399 se ha efectuado la construcción precisamente de la línea de intersección, puesto que se examinan formas geométricas que son las bases de las formas técnicas.

¹⁾ Para economizar lugar, la vista principal y la vista superior se dan no completas.

La marcha de la construcción está clara del dibujo. Para construir las proyecciones del punto B , que tiene importancia para determinar la transición entre las proyecciones de la generatriz del cono y la línea de intersección sobre el plano W (el punto b'') se ha tomado

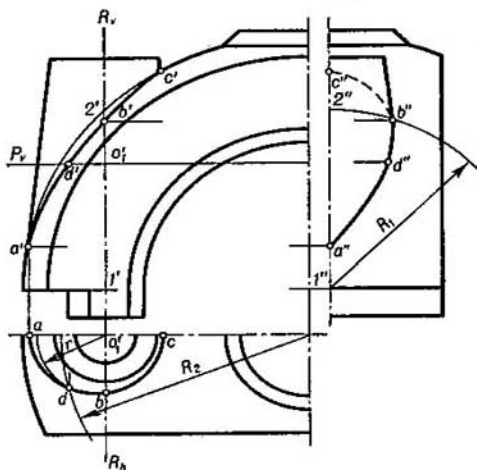


Fig. 399

el plano de perfil que pasa por el eje del cono. La superficie esférica se corta según una circunferencia de radio $R_1 = I'2'$. Primero se ha hallado la proyección b'' , luego b' y b . El punto B , así como los puntos A y C , es también característico ¹⁾.

PREGUNTAS A LOS §§ 60—62

1. ¿En qué consiste el método general de construcción de la línea de intersección de una superficie por otra?
2. ¿Es posible, si por lo menos una de las superficies curvas que se cortan es reglada, construir la línea de intersección con ayuda de los puntos de intersección de las generatrices de esta superficie reglada con la otra?
3. ¿En qué se diferencian la «penetración» y la «mordedura» al intersecar una superficie con otra?
4. ¿Dentro de los límites de cuál parte de las proyecciones de las superficies que se cortan se obtiene la proyección de la línea de intersección?

¹⁾ Acerca de las proyecciones de la línea de intersección de una superficie esférica con una cónica véase el § 65.

5. ¿Cuáles puntos de la línea de intersección de las superficies se llaman «característicos»?

6. ¿Cuáles recomendaciones se pueden dar para la elección de los planos secantes auxiliares en los casos de intersección de cilindros, conos, prismas y pirámides?

7. ¿En cuáles casos se recomienda emplear planos secantes auxiliares paralelos a los planos de proyección para construir la línea de intersección de una superficie por otra?

§ 63. ALGUNOS CASOS PARTICULARES DE INTERSECCION DE UNA SUPERFICIE CON OTRA

1. En la fig. 400 están representados cuerpos que se cortan: a) dos cilindros con generatrices paralelas, b) dos conos con vértice común. En ambos casos las líneas de intersección de las superficies son las generatrices comunes de estas superficies.

Supongamos que hace falta construir las proyecciones de la recta que pasa por el punto B del eje de proyección y que forma con el plano H un ángulo α y con el plano V un ángulo β . Es conocido que para una recta de posición general $\alpha + \beta < 90^\circ$ (véase el § 13).

El lugar geométrico de las rectas que pasan por el punto dado y que forman con el plano H un ángulo α , es una superficie de revolución cónica cuyo vértice se encuentra en el punto dado y sus generatrices forman con el plano H un ángulo α .

Igualmente, el lugar geométrico de las rectas que pasan por el punto dado y que forman con el plano V un ángulo β , es una superficie de revolución cónica cuyo vértice se encuentra en el punto dado y sus generatrices forman con el plano V un ángulo β .

Obviamente, la recta buscada debe pertenecer al mismo tiempo a las superficies de ambos conos que tienen un vértice común en el punto dado, es decir, debe ser la línea de su intersección (la generatriz común). Obtendremos ocho rayos que parten del punto B y que responden a las condiciones planteadas (cuatro rectas).

En la fig. 401 se ha efectuado la construcción de uno de estos rayos. El primer cono se determina por la generatriz BA_1 y el eje perpendicular al plano H , y el segundo cono, por la generatriz BA_2 y el eje perpendicular al plano V . Para la construcción de la recta buscada se tiene por ahora solamente el punto B (el vértice común de los conos). El segundo punto (el punto K), común para las superficies de estos conos, lo hallamos con la ayuda de la esfera con centro en el punto B (véase más adelante la fig. 415).

De otro ejemplo, cuando en el curso de la construcción se emplea la propiedad de la intersección de dos superficies cónicas con vértice común según una recta común para estas superficies (generatriz), sirve la construcción de las gene-

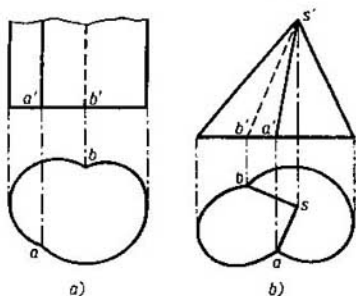


Fig. 400

tratrices de una superficie reglada llamada cilindro con tres directrices (sobre esta superficie véase en el § 50, el apartado B, punto 2.2). Supongamos (fig. 402) que entre las directrices hay una recta AB y dos curvas. Si tomamos el punto (K) sobre la generatriz rectilínea y lo aceptamos como vértice común de las superficies cónicas auxiliares para las cuales las curvas dadas sirven de directrices, entonces la recta de intersección de estas superficies cónicas, pasando por el vértice de las mismas, corta también a sus directrices, es decir, es la generatriz rectilínea del cilindro con tres directrices. Evidentemente, hay que tomar una serie de puntos de la recta dada y efectuar para cada uno de ellos la construcción indicada, lo que da una serie de generatrices del cilindro con tres directrices.

Si las tres directrices de esta superficie son líneas curvas, entonces el método de construcción indicado se conserva el mismo: los puntos, que sirven de vértices de las superficies cónicas auxiliares, se toman sobre una de las curvas dadas.

Si las tres directrices de esta superficie son líneas curvas, entonces el método de construcción indicado se conserva el mismo: los puntos, que sirven de vértices de las superficies cónicas auxiliares, se toman sobre una de las curvas dadas.

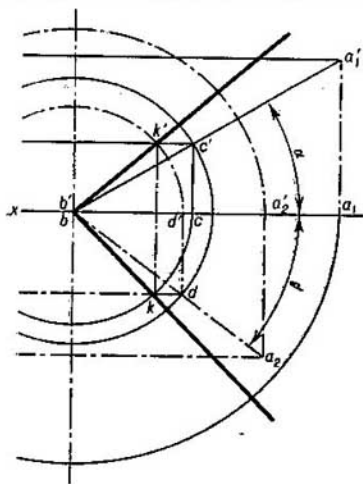


Fig. 401

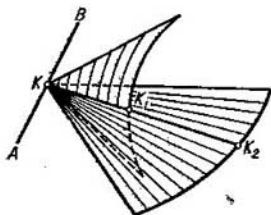


Fig. 402

2. En el caso de intersección mutua de superficies de revolución de segundo orden, en ciertos casos, la línea de intersección se descompone en dos curvas planas de segundo orden. Esto ocurre en los casos cuando ambas superficies de revolución que se cortan (cilindro y cono, dos conos, elipsoide y cono, etc.) están circunscritas a una esfera común para ellas. En los ejemplos dados en la fig. 403, en los tres primeros casos la intersección tiene lugar según elipses, en el cuarto, según una elipse y una parábola, y en el quinto, según una elipse y una hipérbola.

En la fig. 404 se muestran dos cilindros de igual diámetro con ejes que se cortan. Desde el punto de intersección de los ejes se puede trazar una esfera inscrita en ambos cilindros. Ambas superficies se cortan según una línea compuesta por dos elipses. En la fig. 404 a la derecha, están representados también dos cilindros de igual diámetro, pero, en este caso, sus ejes se cortan no bajo un ángulo recto.

La línea de intersección está compuesta por las mitades de dos elipses.

Las curvas de intersección de las superficies representadas en las figs. 403 y 404 se proyectan sobre el plano frontal de proyección en forma de segmentos rectilíneos, puesto que el plano común de simetría para cada par de superficies examinadas está situado paralelamente al plano V .

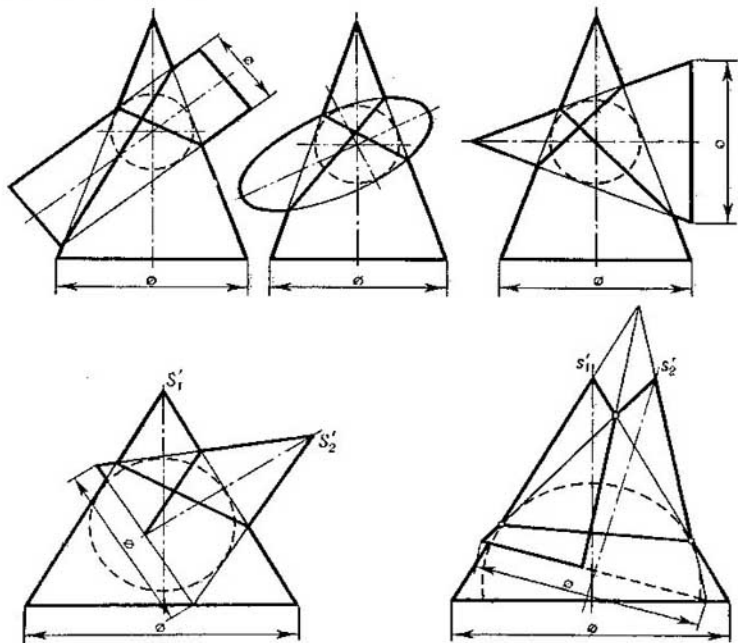


Fig. 403

En los ejemplos examinados tiene lugar un *contacto doble* de las dos superficies de segundo orden que se cortan, es decir, la existencia en estas superficies de dos puntos de contacto y, por lo tanto, dos planos, cada uno de los cuales hace contacto con ambas superficies en un punto común para éstas. Expongamos, sin demostración¹⁾, las dos tesis siguientes, en las cuales se basan las construcciones indicadas más arriba: 1) *las superficies de segundo orden, que tienen doble contacto, se cortan entre sí según dos curvas de segundo orden, con la particularidad de que los planos de estas curvas pasan por la recta determinada por los puntos de contacto;*

¹⁾ Véase en los cursos de Geometría Analítica.

2) *dos superficies de segundo orden circunscritas a una tercera superficie de segundo orden (o inscritas en esta última¹⁾), se cortan entre sí según dos curvas de segundo orden. La segunda tesis, conocida bajo el nombre de teorema de Monge, se desprende de la primera.*

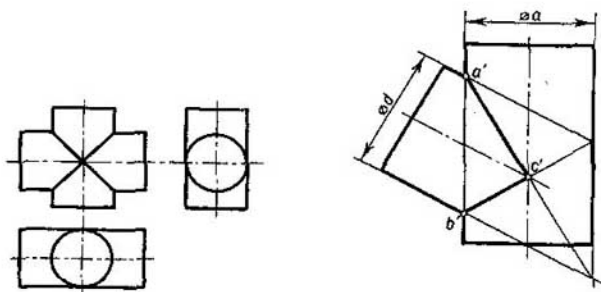


Fig. 404

Sobre la base de lo expuesto se pueden hallar las secciones circulares de un cono elíptico y de un cilindro elíptico (véase la pág. 200). En la fig. 405 se da un ejemplo. Se ha tomado cierta esfera de tal modo que tenga doble contacto con la superficie del cono elíptico. En la intersección de la esfera con el cono se obtienen dos curvas planas: dos circunferencias en los planos proyectantes de perfil T y Q (se muestran las trazas de perfil de estos planos). Los planos paralelos a los planos T y Q dados sistemas de secciones circulares del cono elíptico.

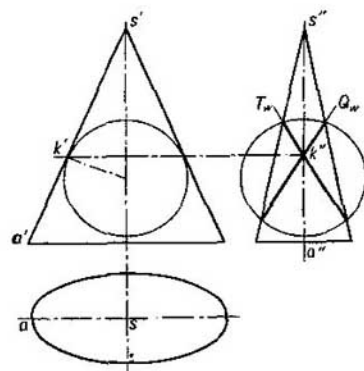


Fig. 405

3. Las superficies de revolución coaxiales (o sea, las superficies con eje común) se cortan según circunferencias. En la fig. 406 se dan tres ejemplos: a) un cilindro y un cono, b) un elipsoide achatado y un cono truncado, c) dos esferas. En todos estos ejemplos se dan solamente las proyecciones frontales, además, el eje común de las superficies

está situado paralelamente al plano V . Por esta razón, las circunferencias que se obtienen en la intersección de una superficie con

¹⁾ Por ejemplo, dos elipsoides de revolución achatados inscritos en una superficie esférica.

otra se proyectan sobre el plano V en forma de segmentos rectilíneos.

Como eje de la esfera se puede tomar cualquiera de sus diámetros. Por eso, las esferas que se cortan se consideran superficies de revolución coaxiales. Como superficies coaxiales también pueden ser con-

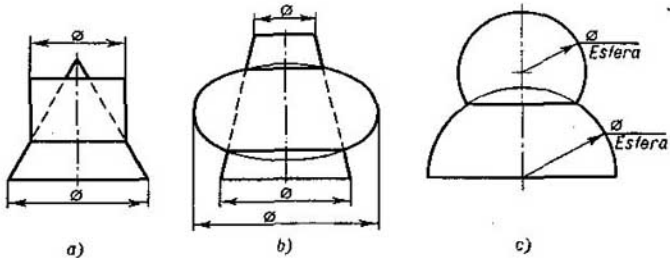


Fig. 406

sideradas el cilindro y la esfera, el cono y la esfera, cierta superficie de revolución y la esfera, representadas en la fig. 407. Los ejes del cilindro, del cono y de la superficie de revolución pasan por los centros de las esferas. La intersección tiene efecto según circunferencias.

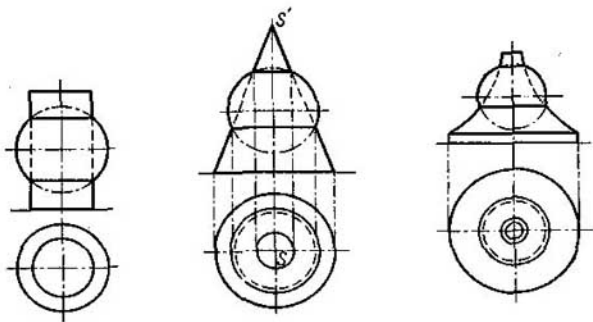


Fig. 407

En la fig. 408 se dan ejemplos de la representación de superficies de revolución coaxiales y de los taladrados en dirección contraria de un mismo diámetro tomados de la práctica del dibujo de máquinas. Las superficies se han designado con las letras siguientes: A ,

la superficie de un anillo circular; *C*, la de un cono; *Cil*, la de un cilindro; *Es*, la de una esfera; las líneas obtenidas en la intersección se han designado con las letras: *Cir*, circunferencia; *El*, elipse. Estas

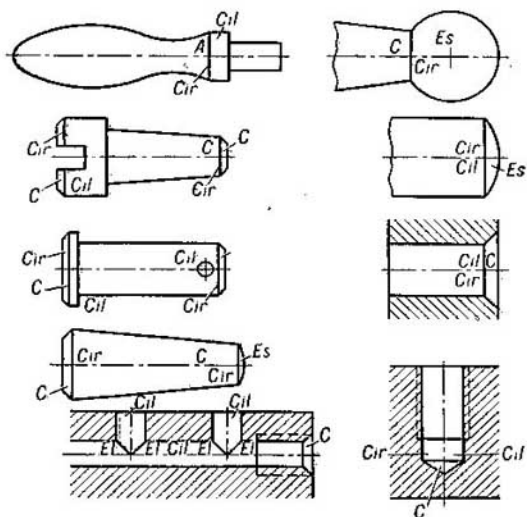


Fig. 408

líneas se proyectan en forma de segmentos rectilíneos, puesto que los ejes de las superficies son paralelos a los planos de proyección (en este caso al plano *V*).

§ 64. APLICACION DE LAS ESFERAS SECANTES AUXILIARES

La intersección de superficies de revolución con una esfera examinada en el § 63 es la base del empleo de las esferas en calidad de superficies auxiliares al construir las líneas de intersección de una superficie por otra.

En la fig. 409 se dan dos superficies de revolución con ejes que se cortan y, por consiguiente, con plano común de simetría paralelo al plano *V*. Desde el punto de intersección de los ejes se puede trazar una serie de esferas. Supongamos que se ha trazado la esfera designada

en la fig. 409 por *Es.1*. Esta esfera se corta con cada una de las superficies según circunferencias; en la intersección de las circunferencias se obtienen puntos, comunes para ambas superficies y, por lo tanto, pertenecientes a la línea de intersección. Como se ve del dibujo, la construcción se simplifica considerablemente como consecuencia de que el plano de simetría, común para las superficies dadas, es paralelo al plano de proyección (en el caso dado al plano *V*): las circunferencias según las cuales la esfera corta simultáneamente a dos superficies, se proyectan sobre el plano *V* en forma de segmentos rectilíneos. Además, la proyección de la línea de intersección se construye sin la ayuda de otras proyecciones de las superficies.

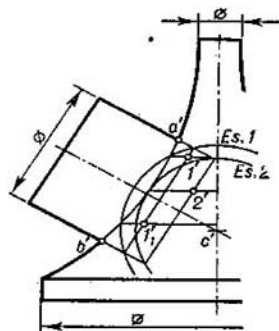


Fig. 409

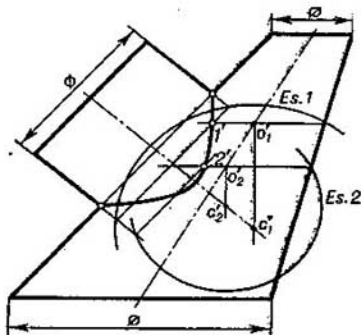


Fig. 440

Claro está, que se trazan varias esferas, para obtener un número suficiente de puntos para trazar la proyección buscada de la línea de intersección. En la fig. 409 se muestra una esfera más, la *Es.2*; ésta sólo hace contacto con la superficie de generatriz curvilínea y da en la proyección que se examina el punto $2''$, «el último» para la proyección frontal: las esferas de menor diámetro no dan puntos para la línea buscada.

Ahora queda trazar por los puntos a' , $1'$, $2'$, $1_1'$ y b' una curva: la proyección frontal de la línea de unión de ambas superficies (examinándolas como un todo).

Como se ve, toda la construcción se ha efectuado solamente en una proyección.

Así pues, si hay que construir la línea de intersección de dos superficies de revolución, cuyos ejes se cortan, se puede emplear esferas secantes auxiliares con centro en el punto de intersección de los ejes de las superficies.

En la fig. 410 se da otro ejemplo del empleo de esferas en la construcción, análoga a la mostrada en la fig. 409. Esta vez, solamente una de ellas es superficie de revolución, la otra es un cono circular oblicuo (véase el § 50); éste tiene una serie de secciones circulares paralelas entre sí. Cada una de estas secciones puede ser considerada como paralelo de la esfera, cuyo centro se toma sobre el eje de la superficie del cilindro. Por ejemplo, tomando el paralelo con centro O_1 (cuya proyección es o'_1), trazamos por O_1 una perpendicular al plano del paralelo hasta su intersección con el eje del cilindro. El punto C_1 (su proyección es c'_1) se toma como centro de la esfera que corta a cada una de las superficies según circunferencias: a la superficie del cono según el paralelo tomado con centro O_1 , a la superficie del cilindro según la circunferencia que se obtiene al «acercarla» a la esfera. Como resultado, sobre la proyección que se examina (la frontal) se obtiene el punto I' perteneciente a la proyección de la línea de intersección buscada. Análogamente pueden ser hallado el

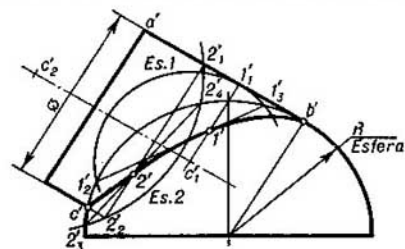


Fig. 411

centro C_2 (con la proyección c'_2) para trazar la esfera con ayuda del paralelo elegido con centro en el punto O_2 (con la proyección o'_2). Lo que sigue está claro del dibujo.

Así pues, las esferas auxiliares pueden emplearse también en los casos de intersección de una superficie de revolución con una superficie que tiene secciones circulares paralelas entre sí,

cuyos centros están situados sobre una misma línea que corta al eje de la superficie de revolución.

En la fig. 411 se muestra la construcción de la línea de unión de la superficie de un cilindro de revolución y una esfera (la generatriz AB del cilindro hace contacto con la esfera en el punto B). Estas superficies tienen un plano de simetría común paralelo al plano V . El centro de una esfera auxiliar la *Es.1*, se ha tomado en el punto cuya proyección frontal es c'_1 . El radio de esta esfera se ha tomado igual al segmento $c'_1 I'_1$ (en el caso dado es el radio menor para las esferas auxiliares); éste es también el radio de la circunferencia por la que tiene efecto el contacto de la esfera auxiliar *Es.1* con la superficie del cilindro. Esta esfera corta a la esfera dada de radio R según la circunferencia de radio $I'_2 I'_3$. En la intersección de las rectas $I'_2 I'_3$ y $c'_1 I'_1$ se obtiene el punto I' (uno de los puntos pertenecientes a la proyección de la línea buscada de unión de las superficies del cilindro y la esfera).

La segunda esfera auxiliar (la $E_{s,2}$) se ha trazado desde el punto tomado también sobre el eje del cilindro (con la proyección c'_2). Esta esfera da el punto $2'$.

Al obtener unos cuantos puntos más entre los puntos extremos b' y c' , se puede trazar la proyección frontal de la línea buscada. En el punto $1'$, obtenido con ayuda de la esfera «extrema» (inscrita en el cilindro), la recta $1'_21'_3$ es tangente a la curva $b'1'2'c'$.

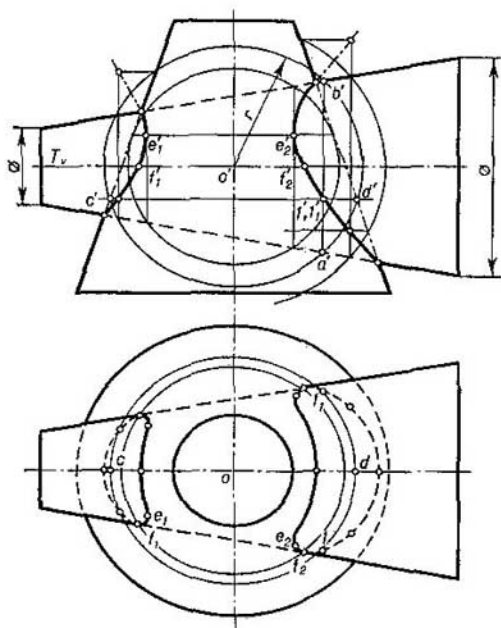


Fig. 412

En la fig. 412 se muestra la intersección de dos conos de revolución. Sus ejes forman en su intersección un plano de simetría, común para estos conos, paralelo al plano V .

En el caso en cuestión se han empleado esferas auxiliares trazadas desde un mismo centro (el punto O de intersección de los ejes de los conos). Así, para hallar el punto 1 se ha trazado la esfera de radio r .

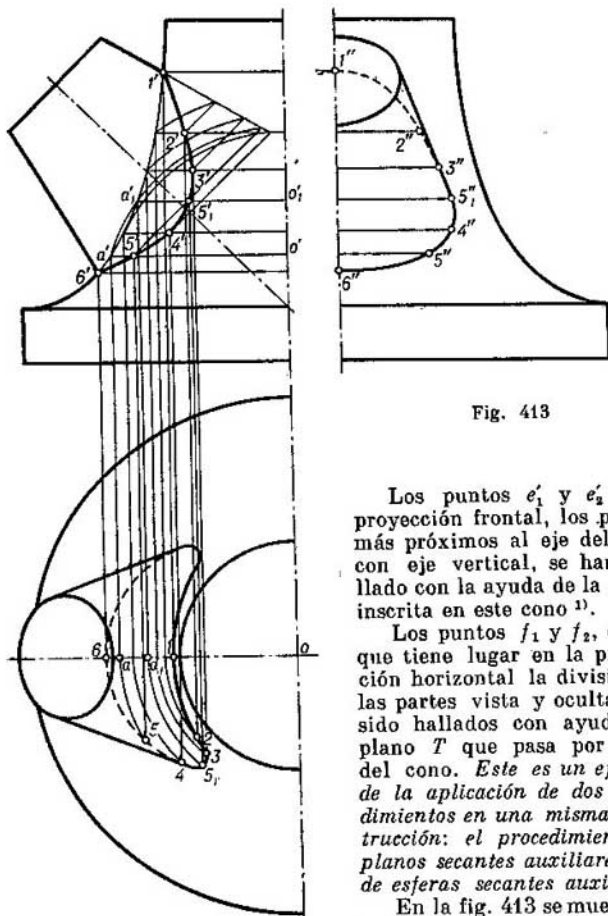


Fig. 413

Los puntos e'_1 y e'_2 en la proyección frontal, los puntos más próximos al eje del cono con eje vertical, se han hallado con la ayuda de la esfera inscrita en este cono ¹⁾.

Los puntos f_1 y f_2 , en los que tiene lugar en la proyección horizontal la división en las partes vista y oculta, han sido hallados con ayuda del plano T que pasa por el eje del cono. *Este es un ejemplo de la aplicación de dos procedimientos en una misma construcción: el procedimiento de planos secantes auxiliares y el de esferas secantes auxiliares.*

En la fig. 413 se muestra la unión de las superficies de dos

¹⁾ La línea de intersección de dos superficies de segundo orden, que tienen un plano de simetría común, se proyecta sobre el plano paralelo al plano de simetría en forma de una curva de segundo orden. En el caso dado se obtiene una hipérbola. Los puntos e'_1 y e'_2 son sus vértices. En la fig. 411 la proyección frontal de la línea de unión de las superficies es una parábola (véase el § 65).

cuerpos de revolución: una cónica y otra con generatriz curvilínea. Se han empleado esferas auxiliares. Primero se hallan las proyecciones de los puntos sobre el plano V y luego sobre el plano H . Por ejemplo, el punto 5 sobre el plano H se ha hallado sobre el arco de circunferencia, descrito desde el punto o con radio $oa = o'a'$; el punto 6 se ha obtenido sobre el arco de radio $oa = o'_1a'_1$. El punto con las proyecciones $4'$ y 4 se ha hallado con ayuda de la esfera inscrita en la superficie de revolución con generatriz curvilínea.

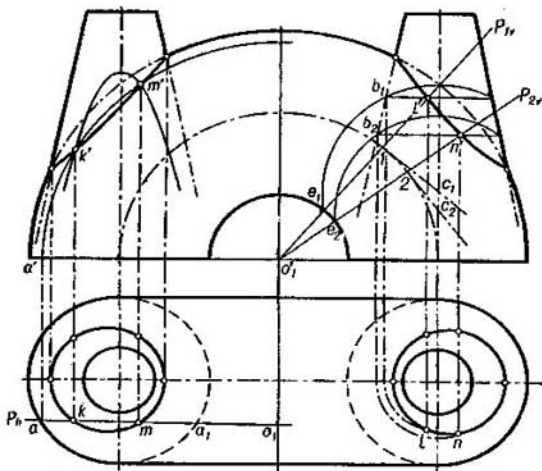


Fig. 414

Los puntos sobre el plano W se han hallado construyendo la tercera proyección con ayuda de las otras dos halladas sobre los planos V y H . Con el fin de economizar lugar, en la fig. 413 las tres vistas se dan no completas.

El ejemplo dado en la fig. 414 permite establecer la ventaja del método de las esferas auxiliares en comparación con otros métodos para el caso dado. Hace falta construir las proyecciones de la línea de unión de las superficies de un cono de revolución y de un anillo. En la parte izquierda del dibujo se muestra el empleo de planos secantes auxiliares paralelos al eje del cono. Estos planos cortan a la superficie del cono según hipérbolas, que deben ser construidas con ayuda de puntos, y al anillo, según semicircunferencias de radios

o_1a y o_1a_1 . Por ejemplo, una vez construida sobre la proyección frontal la hipérbola (la línea de intersección de la superficie cónica con el plano P), describimos el arco de circunferencia de radio $o_1a' = =o_1a$, con lo que hallamos los puntos k' y m' en la proyección frontal y sus correspondientes proyecciones horizontales k y m .

Es necesario construir una serie de hipérbolas, lo que complica la solución y disminuye la precisión. Sería también incómodo emplear planos perpendiculares al eje del cono, puesto que estos planos, estando situado el anillo tal como se muestra en la fig. 414, cortarían a su superficie según ciertas curvas; para construir cada una de éstas es necesario hallar toda una serie de puntos (véase el § 58). También los planos que pasan por el vértice del cono darán en la intersección con la superficie del anillo curvas, que deberán ser halladas con ayuda de puntos.

La construcción se simplifica y se hace más precisa, si se emplean esferas auxiliares cuyos centros deberán estar situados sobre el eje del cono. Las esferas deben ser elegidas de tal manera que corten al anillo según circunferencias. Esto se puede obtener de la siguiente manera.

Tomemos el plano P_1 que pasa por el eje del anillo y que es perpendicular al plano V . Este plano corta al anillo según una circunferencia de radio Ie_1 con centro en el punto I ; sobre el plano V esta circunferencia se proyecta en forma de un segmento de recta. ¿Dónde deberán estar situados los centros de las esferas, que pueden ser trazadas por esta circunferencia? Evidentemente, éstos están situados sobre la recta que pasa por el centro de la circunferencia I y que es perpendicular al plano P_1 . Esta recta se representa en la proyección frontal con la línea Ic_1 perpendicular al plano P_1 (y, por consiguiente, tangente a la circunferencia axial del anillo, representada en el dibujo con línea de puntos y rayas).

Así pues, debemos trazar una esfera cuyo centro está situado, en primer lugar, sobre el eje del cono, y en segundo, sobre la recta Ic_1 . Tal centro c_1 queda determinado por completo por estas dos rectas, y podemos trazar la esfera con centro c_1 y radio c_1e_1 ; en el plano V se muestra parte de la proyección de la esfera (un arco de circunferencia). En la intersección de la esfera con el cono se obtiene una circunferencia, que se proyecta en forma de un segmento que pasa por el punto b_1 ; la intersección de la esfera con el anillo tiene efecto según la circunferencia señalada más arriba, que se proyecta sobre la traza P_{1v} en forma de segmento. En la intersección de estas rectas se ha hallado el punto l' (la proyección de uno de los puntos de la línea buscada).

Análogamente, con ayuda del plano P_2 y los puntos $2, c_2, b_2, e_2$ se ha hallado el punto n' . Para construir las proyecciones horizontales de estos puntos se pueden emplear los paralelos de la superficie cónica, como se muestra para los puntos l y n .

Nos podemos suponer que las rectas c_1l y c_2l son los ejes de ciertos cilindros, la sección normal de los cuales coincide con la sección normal del anillo. Si tomamos los puntos 1 y 2 demasiado cerca uno del otro y nos imaginamos que tales puntos son muchos y, por consiguiente, son muchos los ejes trazados por estos puntos y los cilindros, entonces la superficie del anillo resulta sustituida por superficies cilíndricas sucesivamente dispuestas. Por eso el problema se reduce a hallar los puntos comunes para la superficie del cono y la superficie de cada uno de tal «cilindro instantáneo»¹⁾. Los ejes de los «cilindros instantáneos» cortan al eje del cono en puntos que se toman como centros de las esferas auxiliares que cortan al cono y al «cilindro instantáneo» según circunferencias; las proyecciones de estas circunferencias sobre el plano V representan segmentos de líneas rectas. Las circunferencias, según las cuales las esferas auxiliares cortan a los «cilindros instantáneos», son aquellas secciones normales del anillo, a partir de las cuales se inició la construcción.

En la fig. 415 están representados parcialmente dos conos de revolución con vértice común S y se muestra la construcción de la generatriz según la cual se cortan las superficies cónicas en las partes representadas de éstas. Uno de los puntos de la generatriz buscada es conocido: éste es el vértice S . Para hallar el segundo punto se ha empleado una esfera auxiliar con centro en el punto S . La esfera corta a una de las superficies cónicas según un arco de circunferencia, cuyo radio es igual a oI o $o'I'$. A la segunda superficie la esfera la corta según un arco de circunferencia de radio igual a o_1I_1 o $o'_1I'_1$. Las proyecciones frontales de estos arcos se cortan en el punto m' , y las horizontales, en el punto m ; los puntos m' y m son las proyecciones del punto M (el segundo punto perteneciente a la generatriz buscada).

De tal construcción se hizo uso en la fig. 401.

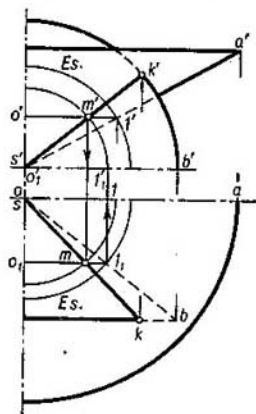


Fig. 415

¹⁾ Hemos empleado la expresión de «cilindro instantáneo» para subrayar la sustitución de la superficie del anillo por una gran cantidad de elementos cilíndricos. Prácticamente se efectúan sólo unas cuantas de estas construcciones.

§ 65. PROYECCIÓN DE LA LÍNEA
DE INTERSECCIÓN DE DOS SUPERFICIES
DE REVOLUCIÓN DE SEGUNDO ORDEN SOBRE
UN PLANO PARALELO A SU PLANO DE SIMETRÍA
COMÚN

En toda una serie de casos tiene efecto la intersección de una superficie de revolución de segundo orden por otra. En estos casos, así como para todas las superficies algebraicas de segundo orden, se obtiene una curva espacial de cuarto orden, llamada *bicuada*.

En la nota al pie de la pág. 292 se dijo que si dos superficies de segundo orden tienen plano de simetría común, entonces la curva

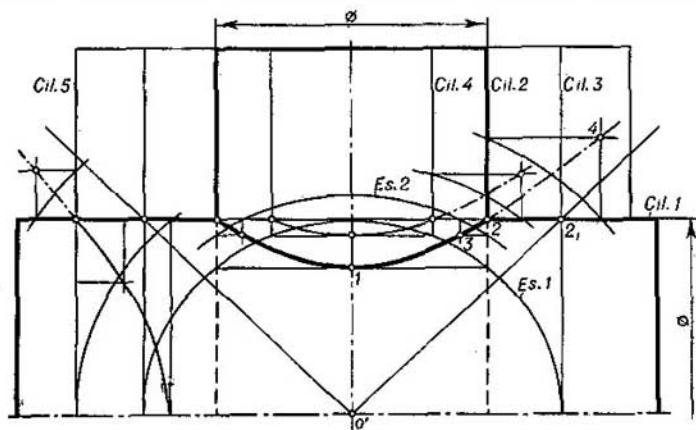


Fig. 416

obtenida en la intersección de estas superficies se proyecta sobre el plano paralelo al plano de simetría de las mismas en forma de una curva de segundo orden. En la fig. 412, a la cual se refiere dicha nota, se representaron dos conos de revolución con ejes que se cortan que determinan el plano de simetría común para estos conos, paralelo al plano V . La proyección frontal de la curva bicuada obtenida en este caso representa una hipérbola.

En la fig. 416 se da¹⁾ la proyección frontal de dos cilindros de revolución (*Cil. 1* y *Cil. 2*) de diferentes diámetros. El punto o'

¹⁾ En éste y en toda una serie de casos que siguen, con el fin de economizar lugar y sin perjuicio para la claridad de la representación se da solamente una parte de la proyección.

es la proyección frontal del punto de intersección de los ejes de los cilindros. La proyección frontal de la curva bicuadrada obtenida representa una hipérbola equilátera (una rama de ella) con centro en el punto o' . Para la construcción se han empleado esferas con centro común en el punto de intersección de los ejes de los cilindros. La esfera (*Es.1*), inscrita en el cilindro de mayor diámetro, permite hallar el punto *1*, que es el vértice de la hipérbola ¹⁾. Las esferas de mayor radio determinan otros puntos de la proyección buscada de la curva (por ejemplo, la esfera *Es.2*, el punto *3*); si en este caso el radio es mayor que el segmento $o'2$, entonces se obtienen puntos (por ejemplo, el *4*) fuera de los límites del área común de las proyecciones de ambos cilindros.

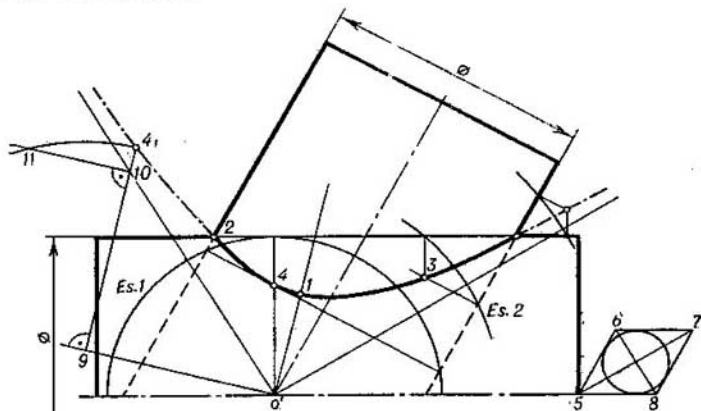


Fig. 417

En la fig. 416 se han trazado las asíntotas de la hipérbola construida; ellas pasan por el punto o' y son perpendiculares entre sí. Estas asíntotas conservan su magnitud para todas las hipérbolas obtenidas en la fig. 416, si se toma, por ejemplo, cilindros con eje vertical de distintos diámetros (*Cil.4* y *Cil.5*). Si los diámetros de los cilindros son iguales (*Cil.1* y *Cil.3*), es decir, estos cilindros tienen una esfera común inscrita (*Es.1*), entonces la proyección frontal de la línea de intersección en la fig. 416 (véase más arriba la fig. 404) representa dos rectas que se cortan bajo un ángulo recto, la posición de las cuales (por ejemplo, $o'2_1$) corresponde a la posición de las asíntotas.

Si los ejes de los cilindros se cortan bajo un ángulo agudo (fig. 417), entonces la proyección de la línea de intersección, para las mismas condiciones que en el caso examinado en la fig. 416, representa también una hipérbola equilátera.

¹⁾ En éste y en otros casos de este párrafo, donde el problema se reduce a la construcción solamente de la curva, los puntos de esta curva se designan no con letras, sino con cifras sin comilla, que simboliza la proyección frontal.

Los puntos para esta proyección se construyen auxiliándose del método de esferas auxiliares, y en este aspecto no existe diferencia alguna entre los casos representados en las figs. 417 y 416. Prestemos solamente atención en que el punto a' , obtenido con auxilio de la esfera (*Es.1*) inscrita en el cilindro mayor, no es el vértice de la hipérbola, como esto tenía lugar en la fig. 416.

Las particularidades en la construcción dada en la fig. 417 son las siguientes. Para hallar la posición de las asíntotas se ha construido el rombo $5-6-7-8$, cuyos lados son tangentes a cierta circunferencia y paralelos a las generatrices

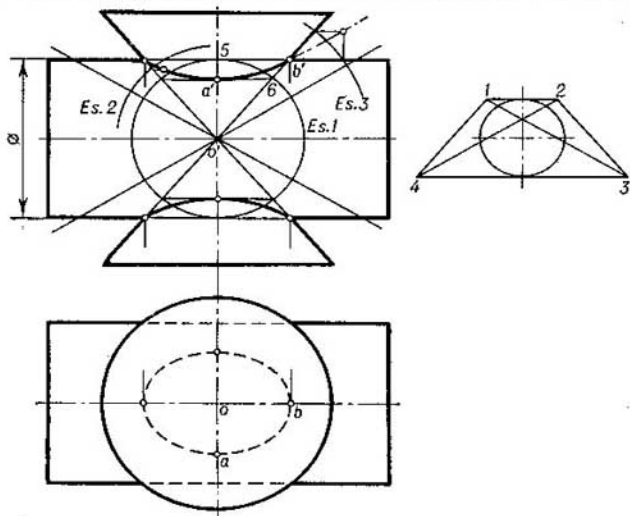


Fig. 418

del cilindro. Las diagonales de este rombo determinan la dirección de las asíntotas. De ahí que las asíntotas sean perpendiculares entre sí y que la hipérbola sea equilátera.

Trazando la bisectriz del ángulo entre las asíntotas, obtenemos el eje real de la hipérbola; sobre este eje deberá encontrarse el vértice (el punto 1). Para hallar este vértice efectuamos la siguiente construcción: tomando un punto cualquiera de la hipérbola, por ejemplo, el 4_1 , trazamos por él una perpendicular al eje imaginario de la hipérbola y señalamos los puntos 9 y 10 , en los que esta perpendicular corta al eje imaginario y a la asíntota; luego trazamos un arco de radio $9-4_1$, intersecando con él en el punto 11 la perpendicular levantada desde el punto 10 a la recta $9-4_1$. El segmento obtenido $10-11$ expresa la distancia desde o' hasta 1 , es decir, hasta el vértice de la hipérbola, que es su semieje real.

La línea de intersección de las superficies de revolución representadas en la fig. 418 se proyecta sobre el plano V , paralelo al plano de simetría común de estas superficies, en forma de hipérbola (sus asíntotas son paralelas a las diagonales $1-3$ y $2-4$ del trapecio cuyos lados son respectivamente paralelos a las

generatrices de las superficies dadas y hacen contacto con cierta circunferencia). Pero, en este caso, se tiene además un plano de simetría perpendicular al eje de la superficie cónica, que es horizontal y que pasa por el eje del cilindro. Sobre este plano, la proyección de la línea de intersección de las superficies que se examinan deberá ser una curva de segundo orden. Se obtiene una curva cerrada con dos ejes de simetría perpendiculares entre sí, o sea, una *elipse*. El semieje mayor ob de esta elipse es igual al segmento $b'5$, el semieje menor oa es igual al segmento $a'6$, es decir, al radio del paralelo de la esfera (*Es. 1*) al que pertenece el punto A .

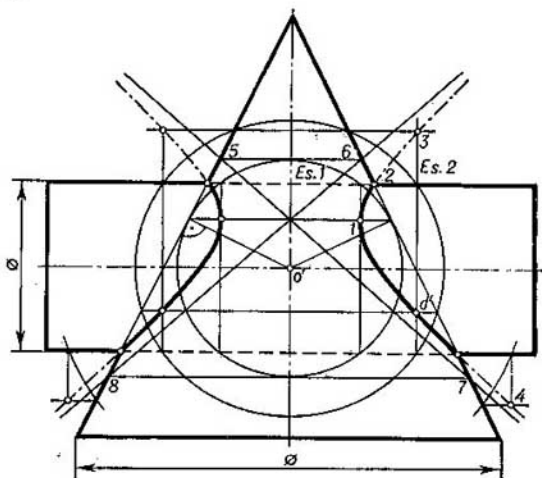


Fig. 419

La hipérbola obtenida en la fig. 418 no es equilátera: sus asíntotas forman ángulos diferentes de 90° . También en la fig. 419, donde igualmente se ha construido una hipérbola como la proyección de la línea de intersección de un cilindro con la superficie de un cono, la hipérbola no es equilátera. Esto es característico para los casos de intersección mutua de superficies cónica y cilíndrica de segundo orden, que tienen un plano común de simetría, cuando la línea de intersección se proyecta sobre un plano paralelo al plano de simetría¹⁾.

En la fig. 419 como centro de las esferas auxiliares sirve el punto O , cuya proyección frontal o' se encuentra en el punto de intersección de los ejes de las superficies cónica y cilíndrica. La esfera (*Es. 1*) inscrita en la superficie cónica ofrece la posibilidad de obtener la posición del eje real, el centro y el vértice de la hipérbola. Las asíntotas se han obtenido como diagonales del trapecio $5-6-7-8$, en el cual los lados $5-6$ y $7-8$ son paralelos a la generatriz del cilindro y hacen contacto con la superficie de la esfera (*Es. 1*).

¹⁾ De acuerdo con la investigación de E. A. Glazunov «Sobre las proyecciones de las líneas de intersección de dos superficies de segundo orden, que tienen plano de simetría común», publicada en el año 1958 en la colección «Trabajos del seminario de Moscú sobre la Geometría Descriptiva y la gráfica de ingeniería».

Así, en las figs. 416 y 417 las proyecciones de las líneas de intersección representan una hipérbola equilátera, mientras que en las figs. 418 y 419 se obtenían también hipérbolas, pero no equiláteras. También se obtiene una hipérbola no equilátera en el caso mostrado en la fig. 420, donde viene construida la proyección de la línea de intersección de una superficie cónica de revolución por otra. Aquí la esfera (*Es. 1*) inscrita en el cono de mayor ángulo del vértice da la posibilidad de obtener la posición del eje real, el centro y el vértice de la hipérbola. Las asíntotas se han construido como diagonales del trapecio 4-5-6-7.

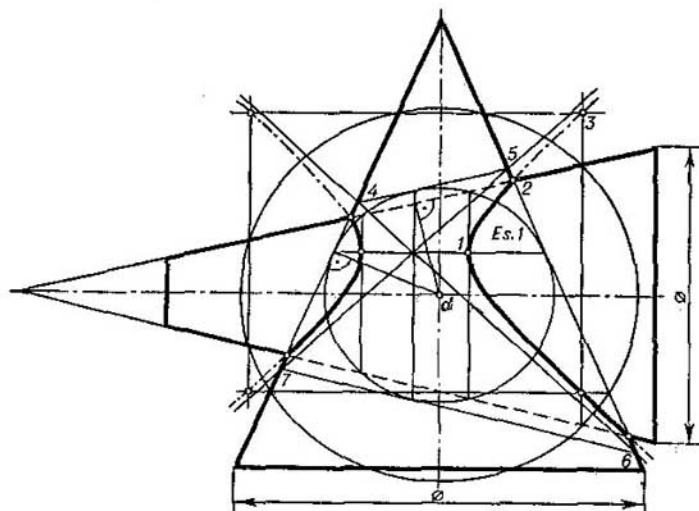


Fig. 420

Un caso análogo se representó en la fig. 412, donde se da el dibujo en dos proyecciones de conos con ejes que se cortan y que son perpendiculares entre sí además un cono pasaba a través del otro.

¿Siempre la proyección de la línea de intersección de dos superficies cónicas es precisamente una hipérbola no equilátera? No, si los ángulos de los vértices de los conos, representados en las figs. 412 y 420, son iguales entre sí, entonces la hipérbola que se obtiene como proyección de la línea de intersección de las superficies cónicas de revolución con ejes que se cortan sobre un plano paralelo a estos ejes, será equilátera.

En la tabla que se da a continuación, se exponen indicaciones acerca de la proyección de la línea de intersección de dos superficies de revolución de segundo orden con ejes que se cortan sobre un plano paralelo a estos ejes, tomadas de la investigación mencionada en la nota al pie de la pág. 299.

Proyección que se obtiene	Superficie de revolución	
	sin ninguna condición particular	con condiciones, a parte de las fundamentales
Hipérbola	Cilíndricas Cónicas Paraboloides Hiperboloides Elipsoides estirados	en cualesquiera combinaciones Ambas superficies son elipsoides achatados

Hipérbola equilateral	Ambas superficies son cilíndricas Ambas superficies son paraboloides Cilíndrica y paraboloidé	Ambas superficies son cónicas con ángulos iguales en los vértices de los conos. Ambas superficies son hiperboloides con ángulos iguales en los vértices de sus conos asintóticos. Cónica o hiperboloide con ángulos iguales en el vértice del cono y en el vértice del cono asintótico del hiperboloide. Ambas superficies son elipsoides, pero semejantes.
-----------------------	---	--

En la pag. 290 se dio la fig. 411 en la que se mostraba la construcción de la proyección frontal de la línea de unión de las superficies de un cilindro de revolución y de una esfera. Además, el plano común de simetría de las superficies, determinado por el eje del cilindro y el centro de la esfera, era paralelo al plano *V*. Por esta razón, la proyección frontal de la línea de unión de las superficies dadas representa una curva de segundo orden, en el caso examinado, una parábola con vértice en el punto *b'*.

En la fig. 421 se muestra la construcción de una parábola (la proyección de la línea de intersección de una esfera con un cilindro). Los puntos 2 y 3 (así como los simétricos a éstos) pertenecen notoriamente a la proyección buscada. El punto 4 se ha construido con auxilio de una circunferencia trazada desde el punto *o'*. Esta circunferencia es el meridiano principal de la esfera (*Es.2*), cuyo centro se

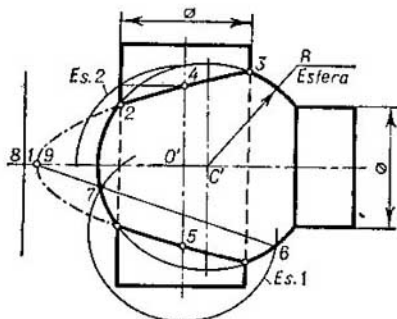


Fig. 421

El punto 4 se ha construido con auxilio de una circunferencia trazada desde el punto *o'*. Esta circunferencia es el meridiano principal de la esfera (*Es.2*), cuyo centro se

encuentra en el eje del cilindro en el punto O . Para la construcción del punto I (el vértice de la parábola) se ha tomado una esfera auxiliar (la *Es. I*); el punto I se ha hallado en la intersección de la recta $\delta-7$ con la proyección del eje de la parábola. En la investigación mencionada más arriba ¹⁾ fue establecido que el parámetro de la parábola es igual a la distancia entre los puntos c' y o' . Llevando sobre el eje de la parábola la mitad de este segmento a cada lado del vértice de la misma, obtenemos los puntos 8 y 9 . Por el punto 8 pasa la directriz de la parábola, y en el punto 9 se encuentra su foco. Ahora se pueden construir los puntos de la parábola auxiliándonos de la directriz y del foco hallados.

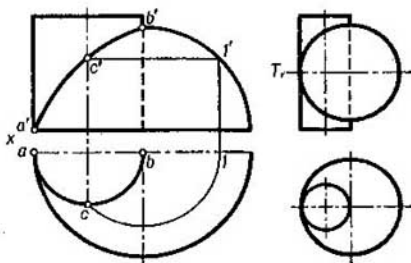


Fig. 422

Si el diámetro del cilindro, que corta a la esfera, es igual al radio de ésta y la generatriz del cilindro pasa por el centro de la esfera (fig. 422), se obtiene una curva bicuadrada, que lleva el nombre de curva de Viviani ²⁾. Su proyección frontal es una parábola.

La proyección sobre el plano, paralelo al otro plano de simetría (véase la fig. 422, a la derecha), es decir, en el caso dado sobre el plano H , coincidiendo con la proyección del cilindro, representa una circunferencia, o sea, una curva de segundo orden, así como debe ser de acuerdo con la regla general indicada al comienzo de este párrafo.

Para la esfera, todo plano diametral es un plano de simetría. Si cualquier superficie de revolución de segundo orden corta a una esfera cuyo centro se encuentra en el plano de simetría de esta superficie, entonces la curva de intersección se proyecta sobre el plano paralelo al plano de simetría, en forma de una curva de segundo or-

¹⁾ Véase la nota al pie de la pág. 299.

²⁾ Vicente Viviani (1622—1703), matemático y arquitecto, discípulo de Galileo, empleaba esta curva bicuadrada para las ventanas en las cúpulas esféricas.

den. Nosotros ya tropezamos con esto en las figs. 418 y 422; si se construyera la proyección horizontal en la fig. 421, entonces la curva de intersección del cilindro con la esfera se proyectaría en forma de circunferencia, lo que es evidente, lo mismo que en la fig. 422. Más arriba, en la fig. 398, la proyección de la curva de intersección de un cono con la superficie de una semiesfera representaba sobre el plano *V* una parábola, y sobre el plano *W*, una elipse. Hay que imaginarnos una segunda semiesfera y un segundo cono en la misma posición recíproca que en la fig. 398, y unir una a otra las bases circulares de ambas semiesferas; el plano de contacto será un plano de simetría claramente expresado, paralelo al plano *W*, y la curva sobre el plano *W* será una elipse.

También en la fig. 399 se obtuvieron una parábola y una elipse como proyecciones de la línea de intersección.

En la tabla que se da a continuación se indica en cuáles casos, en la intersección de dos superficies de revolución de segundo orden con ejes que se cortan, se obtienen parábolas y elipses como proyecciones de las líneas de intersección sobre planos paralelos al plano de simetría de estas superficies ¹⁾.

Proyección que se obtiene Superficies de revolución

Parábola Una esfera con superficies cilíndrica, cónica, parabolóide, hiperbolóide, elipsoide

Elipse Un elipsoide achatado con superficies cilíndrica, cónica, parabolóide, hiperbolóide, elipsoide estirado

Conociendo cuál línea precisamente debe obtenerse al construir las proyecciones, en toda una serie de casos, se pueden emplear las propiedades geométricas de estas líneas, lo que simplifica la construcción y permite obtener resultados más exactos.

PREGUNTAS A LOS §§ 63—65

1. ¿Según cuáles líneas se cortan entre sí: a) las superficies cilíndricas cuyas generatrices son paralelas entre sí, b) las superficies cónicas con vértice común?
2. ¿Cómo se construyen las generatrices de la superficie reglada llamada cilindro con tres directrices, si dos de ellas o las tres son líneas curvas?
3. ¿Cuáles líneas se obtienen al cortarse mutuamente dos superficies de revolución circunscritas a una esfera común para ellas o inscritas en una esfera?
4. ¿Según cuáles líneas se cortan entre sí las superficies de revolución que tienen eje común (superficies coaxiales)?

¹⁾ Tomadas de la misma investigación (véase la nota al pie de la pág. 299).

5. ¿En cuáles casos es posible y conveniente emplear esferas secantes auxiliares?
6. ¿A cuál curva se le llama bicuadrada?
7. ¿En forma de cuál línea se proyecta la curva bicuadrada sobre un plano paralelo al plano común de simetría de dos superficies de segundo orden que se cortan?
8. ¿Cuál de las curvas de segundo orden es la proyección de la línea de intersección de una superficie cilíndrica de revolución por otra sobre un plano paralelo al plano común de simetría de estas superficies?
9. ¿En cuál caso la proyección de la línea de intersección de superficies cónicas, que tienen plano de simetría común paralelo al plano de proyección, es una hipérbola equilátera?
10. ¿Cuáles curvas pueden ser las proyecciones de la línea de intersección de las superficies de un cilindro y un cono de revolución con una esfera, en el caso de que tengan un plano común de simetría?

§ 66. EJEMPLOS DE CONSTRUCCIÓN DE LAS LÍNEAS DE INTERSECCIÓN DE UNA SUPERFICIE CON OTRA

A continuación se examinan varios ejemplos con el empleo de los métodos de construcción indicados en los párrafos anteriores, y también procedimientos especiales, útiles para la construcción de los puntos de la línea buscada en los casos de superficies de posición particular¹⁾.

En la fig. 423 se da el caso en que la proyección de la línea de intersección sobre el plano H se confunde con una circunferencia (la proyección de un cilindro

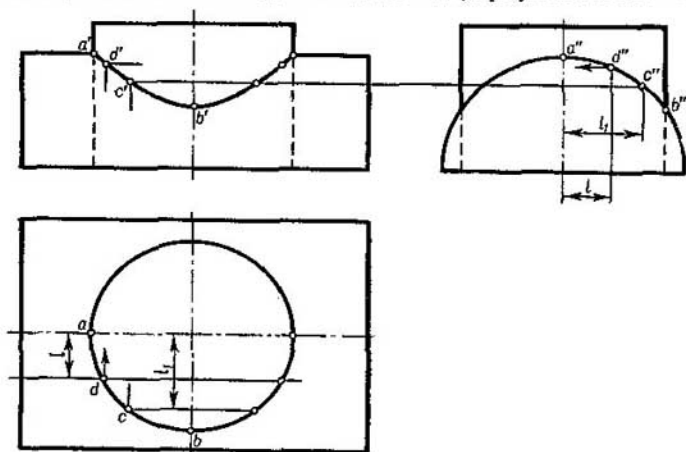


Fig. 423

¹⁾ En algunos dibujos, para economizar lugar, no todas las proyecciones se dan completas.

con eje vertical), y sobre el plano W , con una semicircunferencia (la proyección de un cilindro con eje horizontal). Falta hallar los puntos con ayuda de los cuales se puede construir la proyección de la línea buscada sobre el plano V (la hipérbola con vértice en el punto b').

Evidentemente, la proyección b' se determina directamente con ayuda de la proyección b'' , y, por ejemplo, la proyección d' se determina como el punto de intersección de las líneas de referencia, trazadas desde los puntos d y d'' , coordinadas entre sí por la distancia l hasta los ejes de las proyecciones horizontal y de perfil.

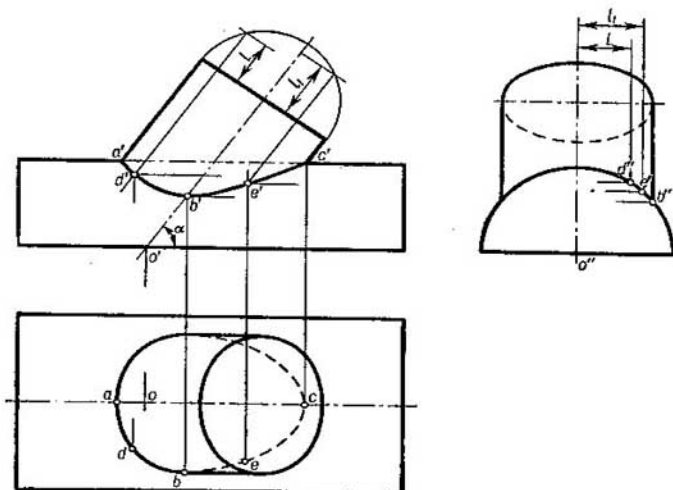


Fig. 424

Igualmente, valiéndose de las proyecciones c y c'' , coordinadas entre sí, se determina la proyección c' . Como se ve, aquí no es necesario trazar planos o esferas secantes auxiliares.

En la fig. 424, para construir las proyecciones b' , d' y e' se ha hecho uso de las proyecciones de perfil b'' , d'' y e'' , con ayuda de las cuales han sido halladas las proyecciones frontales de las generatrices del cilindro oblicuo y las proyecciones b' , d' y e' . Disponiendo de las proyecciones b'' , d'' , e'' , a' , b' , c' , d' y e' , se pueden hallar las proyecciones a , b , c , d y e .

En el caso representado en la fig. 425, los puntos para las proyecciones frontales de las líneas según las cuales el cilindro oblicuo corta a la superficie del cilindro con eje vertical, se han hallado a partir de la posición de las proyecciones horizontales de estos puntos. Es necesario solamente construir las proyecciones frontales de las generatrices correspondientes del cilindro oblicuo. Entre los puntos señalados en la fig. 425, son característicos los puntos $1'$ y $5'$ (los puntos más cercanos al eje del cilindro vertical en las partes vista y oculta de la proyección frontal de la línea derecha), los puntos $3'$ y $3'$ (los puntos más cercano y más

alejado del plano H en las generatrices de contorno del cilindro oblicuo), los puntos $4'$ y $4''$ (que separan la proyección de la generatriz de contorno del cilindro vertical de la proyección de la curva). A estos puntos les corresponden puntos del mismo significado en la curva a la izquierda.

En la fig. 426 se muestra la intersección de la superficie de un cono con un cilindro. Los puntos de partida para la construcción de los puntos $1'$, $2'$, ..., $6'$ son los puntos 1 , 2 , ..., 6 de la proyección horizontal de la línea en la superficie cónica. Por ejemplo, los puntos $4'$ y $4''$ se obtienen en la proyección frontal del paralelo de radio o_4 , el punto $3'$, en la proyección frontal del paralelo de radio o_3

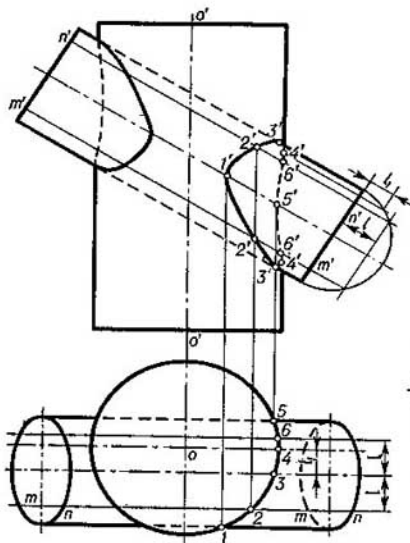


Fig. 425

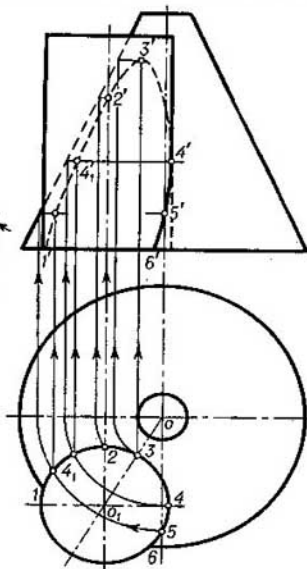


Fig. 426

La construcción de la proyección frontal de la línea de intersección de una superficie cilíndrica con un cono (fig. 427) se ha efectuado con ayuda de los puntos de partida tomados en la proyección de perfil del cilindro. Los puntos $1''$, $3''$, $4''$, $6''$ y $8''$ dan la posibilidad de hallar inmediatamente los puntos característicos $1'$, $3'$, $4'$, $6'$ y $8'$ para la proyección frontal. Los demás puntos pueden ser hallados con auxilio de las generatrices; por ejemplo, tomando la proyección $s'c'$ de la generatriz, sobre la cual deberá estar situada la proyección $5'$, hallamos, por el segmento l , el punto c y la proyección $s''c''$, y luego $s'c'$; falta obtener las proyecciones $5'$ y $5''$.

En la fig. 428, las proyecciones frontales de los puntos de la línea, según la cual el cilindro corta a la superficie de la semiesfera, pueden ser obtenidas con ayuda de las proyecciones horizontales sobre los paralelos correspondientes de la esfera. Por ejemplo, con ayuda del punto k se ha determinado el paralelo

de radio ok y en su proyección frontal se ha hallado la proyección k' . Lo mismo se muestra para los puntos A y F' . Pero, claro está, se puede, por ejemplo, para los mismos puntos A y F' , partiendo de nuevo de la posición de sus proyecciones horizontales a y f , tomar el plano secante T paralelo al plano V y hallar las proyecciones a' y f' sobre la semicircunferencia obtenida al cortar la superficie

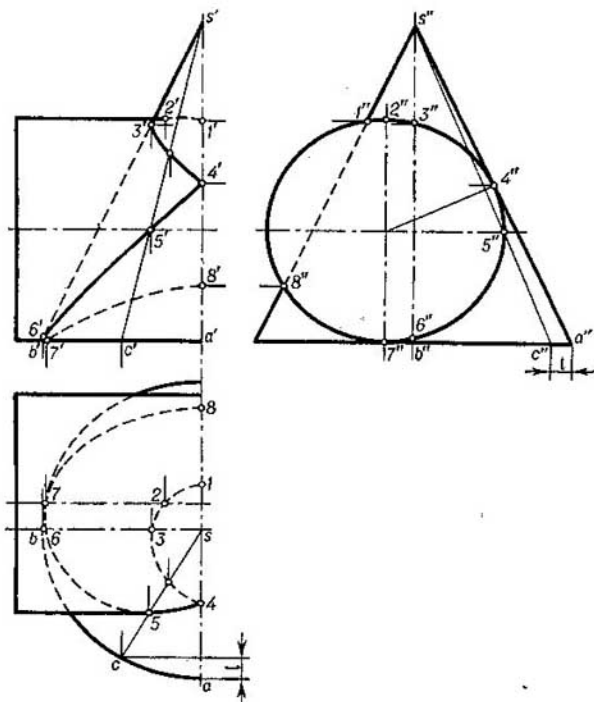


Fig. 427

de la semiesfera con el plano T . Evidentemente, en muchos casos es conveniente variar los métodos de construcción de los puntos para la construcción de las proyecciones de las líneas de intersección, eligiendo los más cómodos de ellos, pretendiendo hacer la construcción más simple y más exacta.

En la fig. 428, las proyecciones b' y e' han sido halladas en el meridiano principal de la esfera directamente con ayuda de los puntos b y e . De la misma manera se podrían hallar las proyecciones d' y g' , si se conociera la proyección de perfil; ahora, sin la proyección de perfil, los puntos d' y g' pueden ser hallados, por ejemplo, de modo semejante a las proyecciones a' y f' .

Las proyecciones a , b , c , y otras, señaladas en la fig. 428, determinan los puntos característicos para la proyección frontal de la curva y para la proyección de perfil en el caso de su construcción. Así, los puntos k' y m' son los puntos más bajo y más alto; en los puntos b' y e' se «interrumpen» el meridiano principal en la esfera, y en los puntos a' y j' la línea de intersección se divide en vista y oculta; los puntos d' , g' , c' , y h' no tienen gran importancia para la proyección frontal, pero permiten construir los puntos característicos en la proyección de perfil de la curva.

En la fig. 429 está representado cierto cuerpo de revolución con un orificio cilíndrico. La curva $k'a'b'm'$ se ha construido con auxilio de los puntos k , a , b , m , es decir, con ayuda de las proyecciones horizontales conocidas por nosotros. Por ejemplo, tomando el punto a , construimos las proyecciones del paralelo en la superficie de revolución, y sobre la proyección frontal de este paralelo hallamos la proyección a' .

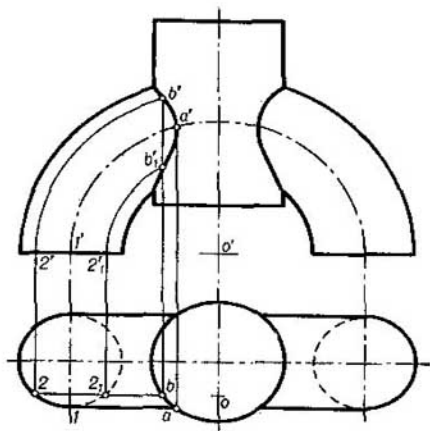


Fig. 430

Para construir la proyección frontal de la línea de contacto de la superficie del anillo circular y el cilindro en la fig. 430, se han utilizado las proyecciones horizontales de ciertos puntos, (de la misma manera que en la fig. 429). Por ejemplo, conociendo la posición del punto b podemos trazar en la superficie del anillo arcos de radios o_2 y o_2_1 y sobre estos arcos obtener los puntos b' y b'_1 . Aquí se hace uso de un sistema de secciones circulares de la superficie del anillo.

En la fig. 431 se ha aprovechado también el hecho de que es conocida la posición de los puntos de una de las proyecciones de la línea buscada. Esto da la posibilidad de construir los puntos de la otra proyección. En el caso representado en la fig. 431, a la izquierda, se ha obtenido en la proyección horizontal un punto angular (el punto de inflexión).

La construcción de la proyección frontal de la curva de intersección de las superficies cónica y cilíndrica en la fig. 432 podría haber sido efectuada como, por ejemplo, se muestra en la fig. 419, es decir, con auxilio de esferas con centro en el punto C . Una vez construida la hipérbola se puede construir la proyección

horizontal de la curva auxiliándose de las generatrices del cilindro; por ejemplo, la generatriz sobre la cual se encuentra el punto E se determina por el segmento l_1 .

En la fig. 432 se muestra otro procedimiento de construcción, a saber: el empleo de las proyecciones sobre un plano auxiliar, en el caso dado, un plano proyectante frontal perpendicular al eje de la superficie cilíndrica. La línea de intersección se proyecta sobre este plano en forma de un arco en la semicircunferencia que es la proyección de esta superficie. Dándose los puntos deseados

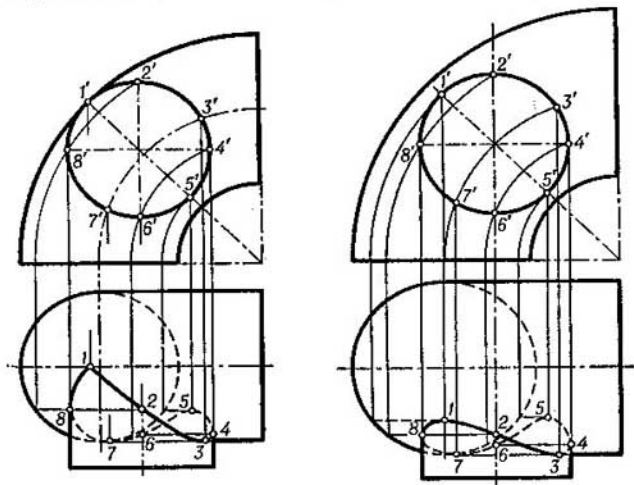


Fig. 431

sobre este arco, se pueden construir sus proyecciones horizontales y frontales. Por ejemplo, tomando el punto e_1 , determinamos el segmento l_2 en la semicircunferencia de radio R , que representa la mitad del paralelo en el cono. Llevando el segmento l_2 (como se muestra en el dibujo) sobre la proyección frontal, obtenemos sobre la línea de referencia con la proyección e_1 la proyección e'_1 .

En la fig. 432, además, se muestra el desarrollo de la superficie lateral del cono truncado examinado en este problema. Se ha construido la proyección del vértice del cono (el punto s'); la circunferencia de la base superior del cono ha sido girada hasta la posición paralela al plano V , y se ha dividido en unas cuantas partes (en el dibujo se muestra la mitad de esta circunferencia). Proyectando los puntos g_2, g_3 , etc. sobre la recta g_1g_7 , trazamos por estas proyecciones y por el punto s' las proyecciones de las generatrices hasta su encuentro con la proyección de la línea de intersección de las superficies; por ejemplo, $s'k'$ ha sido trazada por g_5 .

Una vez construido el desarrollo de la superficie lateral del cono, llevamos sobre el mismo las longitudes de los segmentos de las generatrices. Por ejemplo, hallamos por el método de giro la longitud del segmento de la generatriz G_3K , la llevamos respectivamente sobre el desarrollo.

En la fig. 433 se ha construido la línea de intersección de un prisma cuadrangular con un cilindro y el desarrollo de la parte obtenida del prisma.

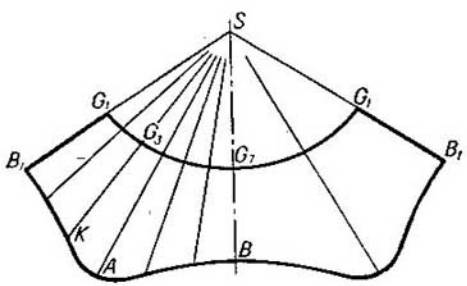
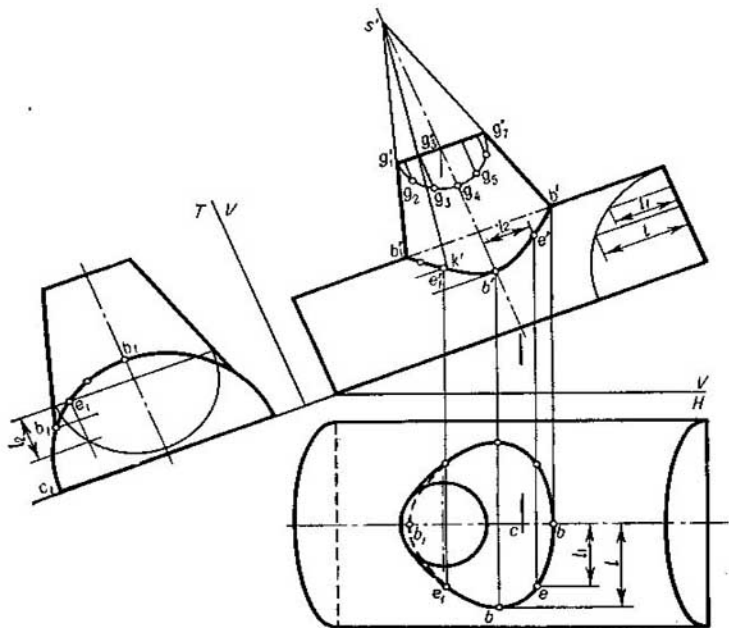


Fig. 432

Cada una de las caras del prisma corta a la superficie cilíndrica según una elipse; estas elipses se cortan entre sí en puntos, que son los puntos de intersección de las aristas del prisma con la superficie cilíndrica. Las proyecciones frontales de los puntos indicados se determinan con auxilio de sus proyecciones de perfil. Para cualquier punto E , con auxilio de su proyección e'' determinamos la proyección e , y valiéndonos de las proyecciones e'' y e hallamos e' . Los puntos a' y b' se determinan con ayuda de sus proyecciones horizontales.

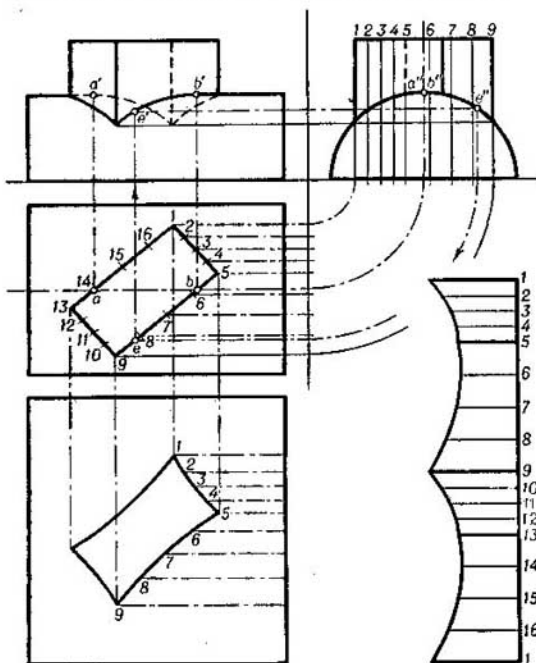


Fig. 433

Para construir el desarrollo del prisma se ha efectuado la división de la proyección horizontal del prisma en segmentos, con la particularidad de que se ha tomado igual número de divisiones en cada cara. Esta división corresponde a la división de la superficie cilíndrica en la zona de su intersección con el prisma.

En la fig. 434 se ha construido la línea de intersección de una pirámide con un cilindro y el desarrollo de ambas superficies.

Las líneas de intersección son elipses, que se cortan entre sí en los puntos de intersección de las aristas de la pirámide con la superficie del cilindro. El punto b' puede ser también construido así como se muestra en el dibujo, o sea, sin auxilio de la proyección de perfil.

Para la construcción de los desarrollos de las superficies de la pirámide y el cilindro se ha dividido la circunferencia en la proyección horizontal del cilindro en 12 partes iguales. Para hallar los puntos, pertenecientes a las elipses, en el desarrollo de la superficie de la pirámide se han trazado rectas auxiliares por el vértice de la pirámide (por ejemplo, la recta SG). La longitud de los segmentos de estas rectas (por ejemplo, $E1$) se ha hallado haciendo uso del método de giro hasta la posición paralela al plano V .

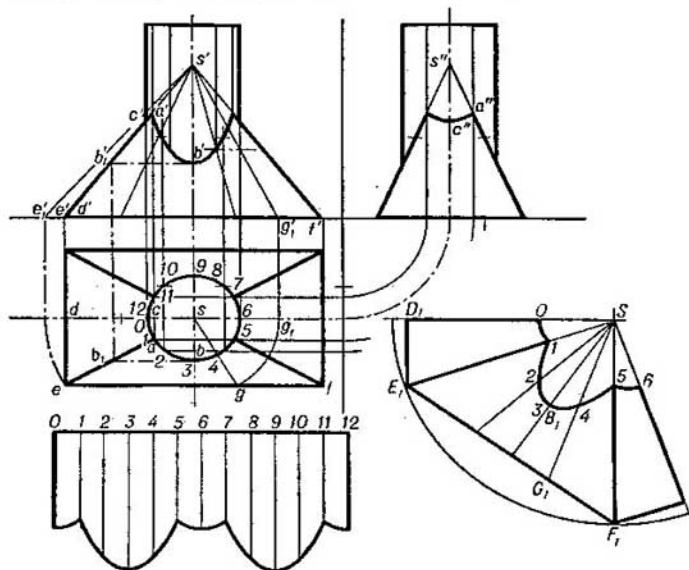


Fig. 434

En la fig. 435 se muestra un ejemplo de la construcción de la línea de intersección de un prisma con una esfera y el desarrollo de la superficie del prisma. Las caras del prisma cortan a la superficie según arcos de circunferencia. Las proyecciones de estos arcos sobre el plano H son partes de elipses; la proyección de la línea de intersección sobre el plano V se compone de partes de elipses, arcos de circunferencias (ya que dos caras del prisma son paralelas al plano V) y una línea recta. Se han hallado los puntos de intersección de las aristas del prisma con la esfera. Luego, se deben señalar los puntos pertenecientes simultáneamente a la línea de intersección del prisma con la esfera y al meridiano principal de la esfera. El plano, que determina el meridiano principal, corta al prisma según una recta sobre la cual deberán encontrarse los puntos indicados. En el dibujo se muestra el desarrollo del prisma. La curva en el desarrollo está compuesta por arcos de circunferencias. Una parte de los radios para describir estos arcos se ha tomado parte de la proyección frontal (R_2, R_3, R_4) y la otra se ha hallado con ayuda de una proyección auxiliar (R_1 y R_6).

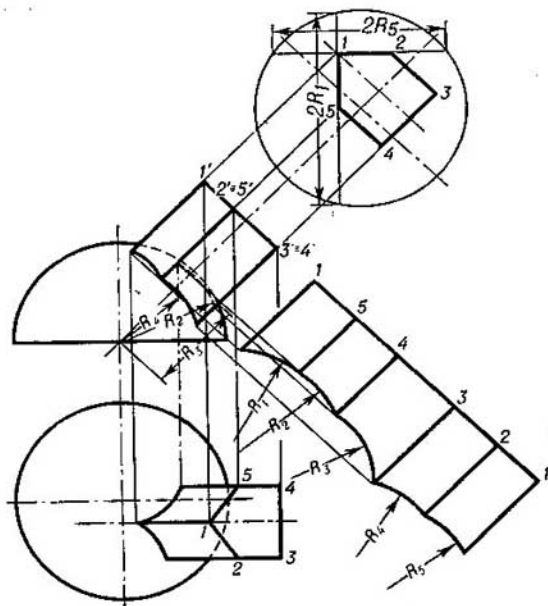


Fig. 435

§ 67. INTERSECCIÓN DE UNA LÍNEA CURVA CON UNA SUPERFICIE CURVA

Para hallar los puntos de intersección de una línea curva con una superficie curva es necesario trazar por la línea curva cierta superficie auxiliar, construir la línea de intersección de las superficies auxiliar y dada, y hallar los puntos de intersección de esta línea con la línea curva dada ¹⁾.

Examinemos algunos ejemplos de la intersección de una curva espacial (curva de doble curvatura) con una superficie curva.

¹⁾ Se debe prestar de nuevo atención en la comunidad de este método con el método empleado en los casos examinados más arriba de intersección de una recta con una superficie (§ 59) y de una recta con un plano (§ 25).

1. En la fig. 436 se muestra la construcción del punto de intersección de la curva AB con una superficie cilíndrica, dada por su traza horizontal MN y la dirección de la generatriz NP .

Por la curva AB se ha trazado una superficie cilíndrica auxiliar, cuyas generatrices son paralelas a NP . Con tal dirección de las generatrices la línea

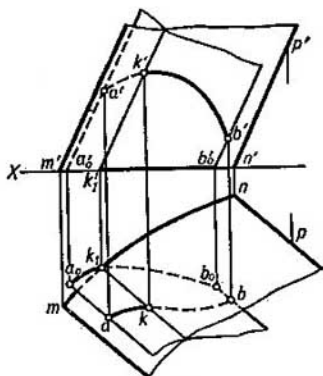


Fig. 436

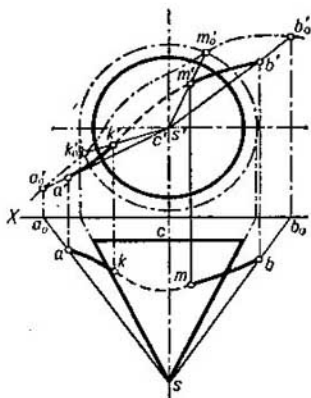


Fig. 437

de intersección de ambas superficies será la generatriz común para ellas. A continuación se ha construido la traza de la superficie cilíndrica auxiliar sobre el plano H (la curva A_0B_0). En la intersección de las curvas MN y A_0B_0 se obtiene el punto K_1 , por el cual pasa la línea de intersección de las superficies (la generatriz común de éstas). Esta generatriz corta a la curva dada AB en el punto K , que es precisamente el punto buscado de intersección de la línea AB con la superficie cilíndrica dada.

2. Para construir los puntos de intersección de la curva AB con la superficie cónica (fig. 437) por la curva AB se ha trazado una superficie cónica auxiliar, cuyo vértice coincide con el vértice S del cono dado. Con tal posición de ambas superficies cónicas, en el caso de su intersección se obtienen rectas, que son generatrices comunes para ambas superficies (véase el § 63).

Sobre el plano V se han construido las trazas de las superficies cónicas dada y auxiliar. En la intersección de ambas trazas obtenemos los puntos K_0 y M_0 que determinan las generatrices SK_0 y SM_0 que en la intersección con la curva AB dan los puntos buscados (K y M) de intersección de esta curva con la superficie cónica dada.

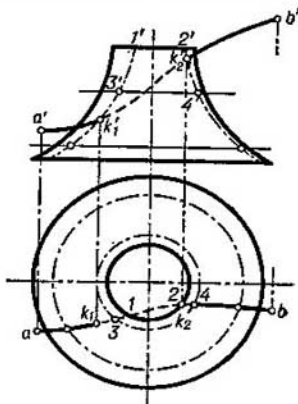


Fig. 438

3. En la fig. 438 se muestra la construcción de los puntos de intersección de la curva AB con la superficie de un anillo circular.

Por la curva AB se ha trazado una superficie cilíndrica auxiliar, cuyas generatrices son perpendiculares al plano H . Luego se ha hallado la línea de intersección de esta superficie con la superficie dada, para lo cual se ha trazado una serie de planos que cortan a la superficie dada según paralelos. Puesto que las generatrices de la superficie cilíndrica auxiliar son perpendiculares al plano H , en la intersección de las proyecciones horizontales de los paralelos con ab se obtienen puntos (1, 2, 3, ...), que son las proyecciones horizontales de los puntos que determinan la línea de intersección de las superficies dada y auxiliar. Construyendo la proyección frontal de esta línea obtenemos las proyecciones k'_1, k'_2 , y con ayuda de éstos hallamos las proyecciones k_1 y k_2 .

PREGUNTAS A LOS §§ 66 Y 67

1. Indiquen los métodos que se emplean para construir las proyecciones de la línea de intersección de una superficie con otra.
 2. ¿Cómo se puede utilizar el caso cuando una de las proyecciones de la línea de intersección coincide con la proyección de la superficie cilíndrica?
 3. ¿Cómo se debe proceder si hace falta hallar el punto (puntos) de intersección de cierta línea curva con una superficie curva? ¿En particular, si la curva corta a una superficie cilíndrica o a una superficie cónica?
-

XI

CAPITULO

DESARROLLO DE LAS SUPERFICIES CURVAS

§ 68. DESARROLLO DE SUPERFICIES CILÍNDRICAS Y CÓNICAS

El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro circular recto, conocido por la Estereometría, se mostró en la fig. 305. La base del rectángulo obtenido en este caso es igual a la circunferencia desarrollada (πd), y su altura es igual a la altura del cilindro. En la fig. 362 está representado el desarrollo de la superficie de un cilindro circular recto con un corte plano según una elipse. Aquí el fundamento es la sección normal de una superficie cilíndrica de revolución, o sea, la circunferencia. Esta se ha desarrollado en una recta; esta recta se ha dividido en cierto número de partes iguales, que corresponde a la división de la circunferencia en la fig. 361. A continuación, se ha empleado el esquema de desarrollo de la superficie de un prisma. Aquí, la superficie cilíndrica como si se sustituyera por la superficie de un prisma inscrito en ella. Las aristas del prisma son iguales a los segmentos de las generatrices de la superficie cilíndrica¹⁾. El desarrollo teórico de la superficie cilíndrica es tanto más exacto, cuanto más caras tiene el prisma inscrito en el cilindro, y cuanto menor es cada segmento de la línea quebrada que delimita el desarrollo de la superficie prismática²⁾.

El desarrollo de una superficie cónica, en el caso general se efectúa por el esquema de desarrollo de la superficie de una pirámide.

¹⁾ La sustitución de una superficie por otra, más simple, o de una línea curva por una quebrada, que aproximadamente expresa la primera, se llama *aproximación* (de la palabra latina *aproximare* — acercarse), lo que en Matemáticas significa la expresión aproximada de unas magnitudes (o objetos geométricos) por otras más conocidas.

²⁾ En el caso de un gran número de construcciones surgen inexactitudes que influyen en la exactitud total del resultado.

En la fig. 308 para el desarrollo de la superficie lateral de un cono circular recto se empleó la construcción, conocida por la Estereometría, con el cálculo del ángulo del sector que representa el desarrollo buscado ($\varphi = \frac{R}{L} \cdot 360^\circ$, donde R es el radio de la base del cono y L es la longitud de su generatriz).

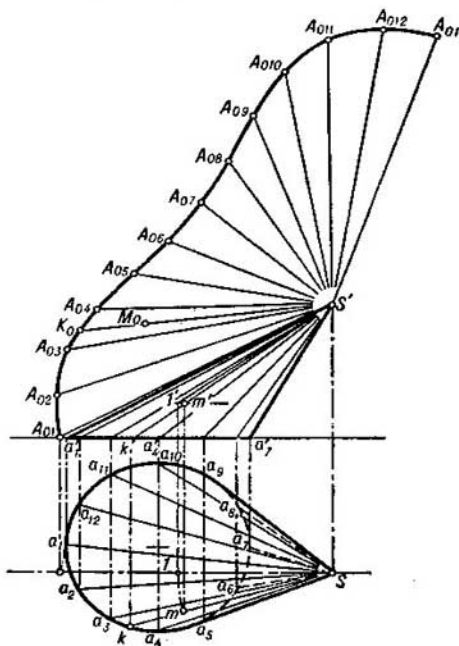


Fig. 439

Ahora examinemos la construcción del desarrollo de la superficie lateral de un cono oblicuo con base circular (fig. 439).

La circunferencia de la base se ha sustituido por un polígono con los lados A_1A_2 , A_2A_3 etc., y la superficie cónica, por la superficie de una pirámide con las caras triangulares SA_1A_2 , SA_2A_3 etc. En forma desarrollada la superficie representa el conjunto de estos triángulos.

Determinando (por el método de giro) la longitud del segmento SA_1 (el segmento $s'A_{01}$) y la longitud del segmento SA_2 (el segmento

$s'A_{02}$), construimos un triángulo según sus tres lados $s'A_{01}$, $s'A_{02}$ y a_1a_2 (la cuerda), luego construimos el segundo triángulo $s'A_{02}A_{03}$, para lo cual determinamos la longitud del segmento SA_3 (el segmento $s'A_{03}$) y tomamos la cuerda a_2a_3 , etc. Obtenemos los puntos A_{01} , A_{02} etc., por los cuales trazamos una curva suave.

Si es necesario hallar en el desarrollo un punto, dado en la superficie, por ejemplo, el M (m' , m), entonces por este punto se traza la generatriz $s'k'$, sk , se halla su posición en el desarrollo ($s'K_0$) y se lleva sobre $s'K_0$ el segmento $s'M_0$. Para construir en el desarrollo el segmento $s'K_0$, hay que marcar la curva $A_{01}A_{02}A_{03}...$ a partir del punto A_{03} con un arco de radio a_3k y trazar por los puntos obtenidos K_0 y s' una recta. El segmento $s'M_0$ representa la magnitud verdadera del segmento $s'm'$, sm , obtenido al girar el segmento $s'm'$, sm a la posición $s'I'$, sI . Obtenemos que $s'M_0 = s'I'$.

Se puede plantear también el problema inverso: construir las proyecciones del punto M dado en el desarrollo (M_0). En este caso se debe comenzar trazando por el punto M_0 en el desarrollo el segmento $s'K_0$, hallar en la circunferencia de la base del cono el punto k en virtud de la igualdad de los segmentos $A_{03}K_0$ y a_3k . Construyendo las proyecciones sk y $s'k'$ de la generatriz, hallamos las proyecciones del segmento SM , para lo cual haciendo girar al segmento SK lo llevamos a la posición en la que se proyecta en verdadera magnitud (por ejemplo, a la posición paralela al plano V), marcamos en esta posición la longitud $s'M_0$ del segmento ($s'I' = s'M_0$) y lo hacemos volver a la posición inicial.

En la fig. 440 se muestra la construcción del desarrollo de la superficie lateral de un cono truncado, con la condición de que el cono no puede ser construido hasta un cono completo.

Se construye un cono auxiliar semejante al dado. Es racional elegir el diámetro de la base de este cono (d) de modo tal, que la relación $\frac{D}{d}$ se exprese por un número entero (k). El cono auxiliar puede ser construido como se muestra en la fig. 440, o bien fuera del cono truncado.

A continuación se construye el desarrollo de la superficie lateral del cono auxiliar (el sector $S_0A_0A_{01}$), se elige arbitrariamente el punto K , a partir de este punto se trazan los rayos KA_0 , KI_0 , $K2_0$, $K3_0$ correspondientemente a las divisiones del arco A_0A_{01} , y sobre estos rayos se llevan los segmentos $KA_1 = k \cdot KA_0$, $KI_1 = k \cdot KI_0$, $K2_1 = k \cdot K2_0$, $K3_1 = k \cdot K3_0$, donde el coeficiente $k = \frac{D}{d}$.

Por los puntos A_1 , I_1 , 2_1 se trazan rectas paralelas a S_0A_0 , S_0I_0 , S_02_0 respectivamente, y sobre estas rectas se llevan los segmentos $A_1A_2 = l$, $I_1I_2 = l$, $2_12_2 = l$. Del mismo modo se marca $3_13_2 = l$. Ahora es necesario trazar una curva de plantilla por los puntos A_1 , I_1 , 2_1 , 3_1 y por los puntos A_2 , I_2 , 2_2 y 3_2 .

La segunda mitad del desarrollo puede ser construida de la misma manera que la primera, o en virtud de la simetría respecto del eje S_03_1 .

En la fig. 441 se da una variante de la construcción del desarrollo¹⁾. Semejantemente a cómo se hizo en la fig. 440, se ha tomado un cono auxiliar (en la fig. 441 la relación $\frac{D}{d}$ es igual a tres) y se ha construido su desarrollo (se muestra

¹⁾ Propuesto por K. V. Beschástnov.

la mitad). Luego, desde el punto K_0 se han trazado varios rayos (por los puntos $A_0, I_0, 2_0, \dots$) y la recta $K_0 M$ bajo un ángulo de $\approx 45^\circ$ a $K_0 A_1$. Sobre esta recta se han tomado los puntos L y M de modo tal, que $K_0 M : K_0 L$ sea igual a tres (es decir, a la relación aceptada entre D y d). Ahora se han trazado los segmentos

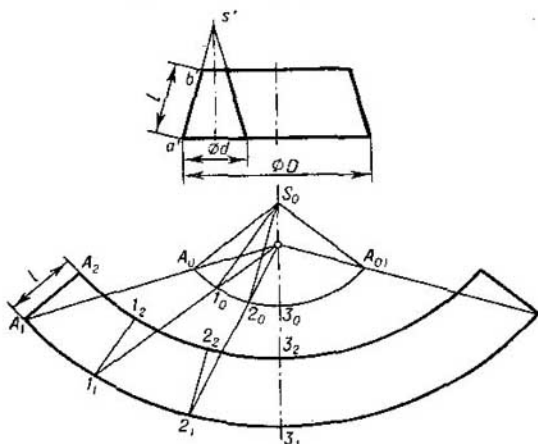


Fig. 440

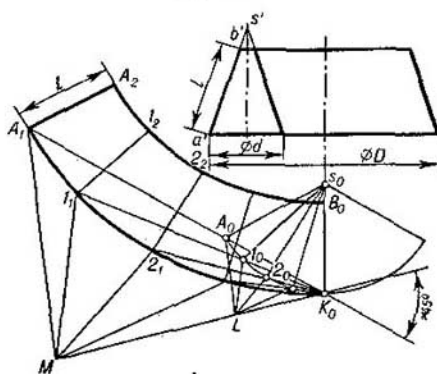


Fig. 441

$LA_0, LI_0, L2_0, \dots$, y por el punto M , las rectas $MA_1 \parallel LA_0, MI_1 \parallel LI_0, \dots$. En la intersección de estas rectas con los rayos $K_0 A_0, K_0 I_0, \dots$, se obtienen los puntos $A_1, I_1, 2_1, \dots$, por los cuales hay que trazar $A_1 A_2 \parallel S_0 A_0, I_1 I_2 \parallel S_0 I_0, \dots$ y marcar $A_1 A_2 = l, I_1 I_2 = l$ etc., y también $K_0 B_0 = l$.

Ahora falta trazar con ayuda de la plantilla curvas por los puntos $A_1, I_1, 2_1, \dots$ y por los puntos $A_2, I_2, 2_2, \dots$ y construir la segunda mitad del desarrollo, simétrica a la primera con respecto de la recta S_0K_0 .

§ 69. DESARROLLO CONVENCIONAL DE UNA SUPERFICIE ESFÉRICA

La superficie esférica no es desarrollable (véase § 49, p. 5). Aquí se puede hablar solamente del desarrollo convencional.

En la fig. 442 se muestra uno de los procedimientos de construcción.

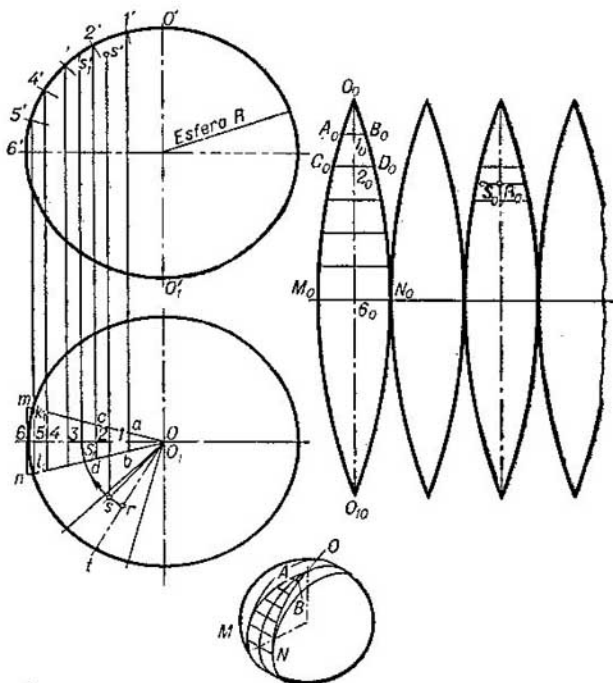


Fig. 442

1. La superficie se «corta» con planos que pasan por el eje de la esfera OO_1 (por ejemplo, en la fig. 442 en 12 partes iguales; las proyecciones frontales de las líneas de intersección no se muestran).

2. Los arcos de circunferencia en el plano H entre las divisiones, se sustituyen por rectas tangentes a la circunferencia (por ejemplo, mn sustituye al arco $k_1\delta l_1$).

3. Cada parte de la superficie esférica se sustituye por una superficie cilíndrica de revolución, cuyo eje pasa por el centro de la esfera paralelamente a la tangente a la circunferencia del círculo mayor (el radio de la superficie cilíndrica es igual al radio de la esférica).

4. Se divide el arco $\sigma'\delta'o_1$ en partes iguales: $\sigma'I' = I'2' = 2'3'$ etc. (en la fig. el arco $\sigma'\delta'$ está dividido en seis partes).

5. Aceptando los puntos $1', 2', \dots$, etc. como las proyecciones frontales de los segmentos de las generatrices de la superficie cilíndrica, cuyo eje es paralelo al segmento mn , se construyen sus proyecciones horizontales ab, cd, \dots .

6. Sobre la recta, que pasa por los puntos M_0 y N_0 , llevamos $M_0N_0 = mn$ y por el centro del segmento M_0N_0 se levanta una perpendicular a este segmento.

7. Sobre esta perpendicular se lleva $\delta_0O_0 = \delta_0O_{10}$; estos segmentos son respectivamente iguales a los arcos $\sigma'\delta'$ y $\delta'o_1$, es decir, $2\pi R : 4$.

8. Estos segmentos se dividen en partes, iguales respectivamente a los arcos $cI', I'2', \dots$, y por los puntos $1_0, 2_0, \dots$ se trazan rectas paralelas a M_0N_0 , llevando sobre ellas $A_0B_0 = ab, C_0D_0 = cd, \dots$.

9. Se trazan curvas por los puntos O_0, A_0, C_0, \dots y por los puntos O_0, B_0, D_0, \dots auxiliándose de la plantilla.

Como resultado se obtiene el desarrollo aproximado de un pétalo de la superficie esférica.

Si hace falta marcar en el desarrollo un punto, por ejemplo, el S (s', s), entonces, en la proyección horizontal, se traza primero la recta ot , que divide por la mitad al segmento en el que se encuentra la proyección s , y el arco de radio os . Luego, el punto s se lleva al meridiano principal y se halla la proyección s'_t . A continuación, en el desarrollo de la tercera división se traza, a partir de su vértice, el segmento igual al arco $\sigma's'_t$, se traza por R_0 una recta paralela a M_0N_0 a la cual se lleva $R_0S_0 = rs$.

§ 70. EJEMPLOS DE CONSTRUCCIÓN DEL DESARROLLO DE ALGUNAS FORMAS

1. La superficie representada en la fig. 443 representa una combinación de las superficies de un prisma y de un cilindro oblicuo con base circular.

Para desarrollar la superficie de un cilindro oblicuo, dividimos la semicircunferencia en partes iguales con los puntos $1, 2, 3, \dots$, por los cuales trazamos las generatrices. Las proyecciones frontales de estas generatrices son iguales a los segmentos de las mismas. Por el punto $1'$ trazamos la traza del plano proyectante frontal T , que da en la intersección con el cilindro su sección normal. Sobre la recta 4_04_0 llevamos los segmentos $4_0E_0, 4_0D_0, 4_0C_0$, iguales a las proyecciones frontales $4'e', 4'd', 4'c'$. Por E_0, D_0 y C_0 trazamos rectas perpendiculares a la recta 4_04_0 . Ahora, desde el punto 4_0 como centro, describimos un arco de radio igual a la cuerda $4-3$, intersectando con éste a la recta trazada por el punto C_0 ; obtenemos el punto 3_0 , desde el cual trazamos a su vez un arco del mismo radio, intersectando con él la recta trazada por el punto D_0 , y desde el punto obtenido 2_0 intersectamos la recta trazada por el punto E_0 , con un arco del mismo radio.

La construcción indicada se basa en el desarrollo de los elementos de la superficie, que se proyectan sobre el plano en forma de triángulos. Examinemos en el plano V uno de estos triángulos $I'k'2'$. El cateto $k'2'$ representa un segmento de la generatriz, que se proyecta en verdadera magnitud, la hipotenusa $I'2'$ es la proyección del arco de una semicircunferencia, y el cateto $I'k'$ es la proyección de una parte de elipse, que se obtiene como sección normal de la superficie cilíndrica dada. En el curso del desarrollo hay que construir un triángulo rectángulo

con ayuda del cateto $2'k'$ y la hipotenusa, en calidad de cual se toma la cuerda $1-2$.

Una vez determinada la posición de los puntos $1_0, 2_0, 3_0$, trazamos por estos puntos y por el punto 4_0 una curva que se toma como el desarrollo del arco de la circunferencia ¹⁾; trazando $1_0I_0, 2_0I_0, \dots$, obtenemos los puntos para la curva que es el desarrollo del arco inferior de la circunferencia. En los puntos I_0 y I_0 trazamos líneas rectas tangentes a las curvas construidas. Lo demás está claro del dibujo.

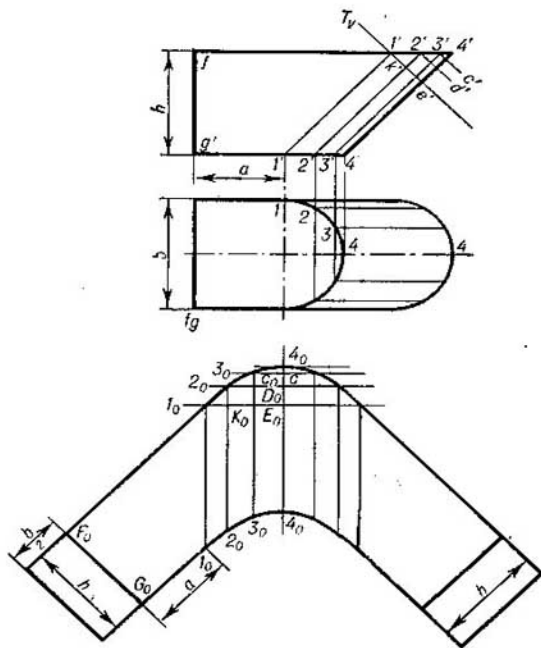


Fig. 443

2. En la fig. 444 se muestra el desarrollo de la parte de transición, que uno dos cilindros. Esta parte de transición está delimitada por las superficies de dos cilindros oblicuos del mismo tipo que en la fig. 443, y por dos planos.

Comenzamos el desarrollo con la recta AB : construimos el triángulo $A_0B_0I_0$ igual al triángulo $a'b'I'$, añadimos a éste el desarrollo de la superficie cilíndrica (este desarrollo se ha efectuado análogamente a cómo se hizo en la fig. 443), luego dibujamos el triángulo $I_0I_0I_0$ igual al triángulo $I'I'I'$, etc.

3. En la fig. 445 viene dado el desarrollo de la superficie lateral de un cono truncado elíptico.

¹⁾ En la fig. 443 está construida la mitad del desarrollo.

Una vez hallado el vértice del cono (s' , s), dividimos la elipse superior con los puntos 1, 2, ... Las generatrices trazadas desde el punto S en los puntos 1, 2, ..., dividen la superficie del cono en partes. Estas partes se desarrollan en forma de triángulos. Por ejemplo, la parte SCD de la superficie cónica se ha desarrollado

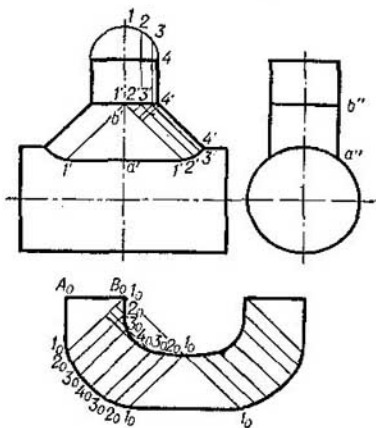


Fig. 444

en el triángulo $S_0C_0D_0$, en el que los lados S_0D_0 y S_0C_0 son iguales a las generatrices SD y SC (la longitud de la generatriz SC se ha determinado por el método de giro), y el lado C_0D_0 se ha tomado como el segmento de una recta, igual al arco desarrollado cd (mediante su división en partes pequeñas).

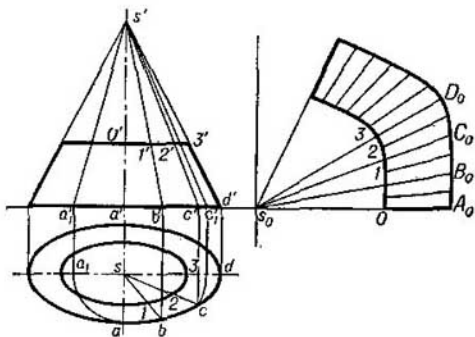


Fig. 445

Hallando los puntos C_0, B_0, A_0 y los puntos situados simétricamente a éstos respecto de la generatriz S_0D_0 , trazamos una curva (el desarrollo de la elipse inferior), y marcando D_03, C_02 , etc., iguales a las longitudes de los segmentos de las generatrices $D3, C2$, etc., hallamos una curva que es el desarrollo de la elipse superior. En la fig. 445 se da la mitad de todo el desarrollo

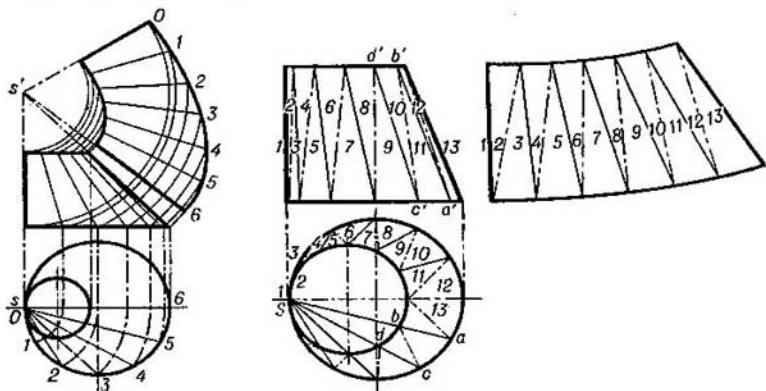


Fig. 446

4. En la fig. 446 se muestra el desarrollo de la superficie lateral de un cono truncado oblicuo con base circular. A la izquierda se muestra el desarrollo efectuado análogamente al de la fig. 445. A la derecha se muestra otro procedimiento: la superficie dada se ha sustituido por una superficie poliédrica inscrita en ella.

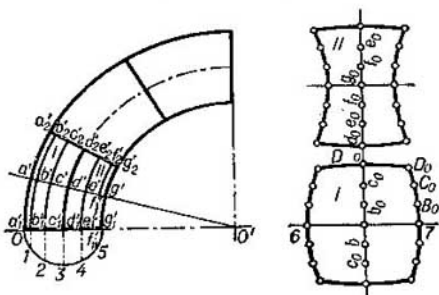


Fig. 447

Valiéndonos de la proyección horizontal del vértice del cono (el punto s), realizamos primero la división de la proyección horizontal trazando rectas desde este punto. Trazando, por ejemplo, la recta sa , obtenemos la proyección ab del seg-

mento de la generatriz. Con ayuda de los puntos en la proyección horizontal obtenemos la división de la proyección frontal. Luego, examinamos, por ejemplo, el elemento plano $ACDB$, trazamos en éste la diagonal BC y determinamos las longitudes de los segmentos para la construcción de los triángulos; uno de los lados de cada triángulo es la cuerda de la circunferencia correspondiente de la proyección horizontal. El desarrollo se compone de semejantes triángulos; las líneas quebradas se sustituyen por curvas suaves trazadas por los vértices de las quebradas.

5. En la fig. 447 se muestra la construcción del desarrollo de un anillo circular. En la proyección está representado un codo, o sea, $1/4$ del anillo circular; en el desarrollo se representa la superficie de un tercio de este codo.

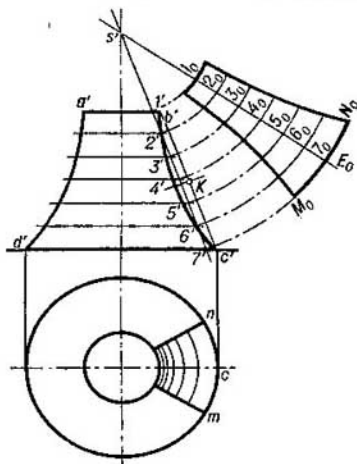


Fig. 448

Se ha trazado la recta $o'a'$, que es el eje de simetría de la proyección de la parte examinada del codo. Con esto se determina una circunferencia (la sección normal) cuyo desarrollo, en forma de la recta D_0D_0 , se toma como la línea media de la figura del desarrollo de la sección examinada del anillo. Correspondientemente a las divisiones $1, 2, \dots$ en esta sección, se han trazado desde el punto o' arcos concéntricos. La construcción del desarrollo se realiza para la I y II partes por separado. Para la primera parte marcamos el segmento D_0D_0 igual por su longitud a la mitad de la circunferencia de la sección normal, y lo dividimos en partes correspondientemente a las divisiones iniciales $1, 2, \dots$. En el punto A_0 levantamos una perpendicular a D_0D_0 y llevamos sobre ella, a ambos lados del punto A_0 , los segmentos A_0G y A_0Z iguales a los arcos $a'a'_1$ y $a'a'_2$. Para determinar el punto B_0 en el desarrollo

trazamos desde el punto b_0 un arco de radio igual a la longitud del arco $b'b'_2$, y desde el punto Z , un arco de radio igual al segmento $a'_1 1$. Del mismo modo procedemos para la construcción de los puntos C_0, D_0 y otros.

Análogamente construimos el desarrollo de la II parte del codo.

6. En la fig. 448 se muestra la construcción del desarrollo de una superficie de revolución con generatriz curvilínea.

Realizamos el desarrollo dividiendo la superficie primero en partes iguales por medio de los meridianos. En el dibujo se muestra el desarrollo de una sexta parte.

Trazamos la cuerda $b'c'$, la dividimos por la mitad, y en el punto de división K levantamos una perpendicular hasta su intersección con el arco $b'c'$. El segmento obtenido de esta perpendicular, desde el punto K hasta el arco, lo dividimos por la mitad y por el punto de división trazamos una recta paralela a la cuerda $b'c'$. Dividimos el segmento $1'7'$ en cierto número de partes iguales entre sí y por los puntos de división trazamos planos horizontales, que dan en la intersección con la superficie de revolución paralelos. La construcción del desarrollo se comienza con la línea media (la recta $s'E_0$). Sobre la recta $s'E_0$ se han llevado los segmentos $1_02_0, 2_03_0, \dots$, iguales correspondientemente a los segmen-

tos $1'2'$, $2'3'$, ..., trazando arcos desde el punto s' de radios $s'1'$, $s'2'$, ... Sobre estos arcos, a partir de los puntos $1_0, 2_0, \dots$, trazamos las longitudes de los arcos de las proyecciones horizontales de los paralelos de la parte de la superficie que se desarrolla (por ejemplo, $7_0M_0=cm$ y $7_0N_0=cn$).

PREGUNTAS AL CAPÍTULO XI

1. Indiquen los procedimientos de construcción de los desarrollos de las superficies cilíndricas y cónicas.
 2. ¿Cómo construir el desarrollo de la superficie lateral de un cono truncado, si este cono no se puede construir hasta un cono completo?
 3. ¿Cómo construir el desarrollo convencional de una superficie esférica?
-

XII

CAPÍTULO

PROYECCIONES AXONOMÉTRICAS

§ 71. CONOCIMIENTOS GENERALES

En muchos casos, al ejecutar dibujos industriales surge la necesidad de tener, a la par con la representación de los objetos en el sistema de proyecciones ortogonales, representaciones más intuitivas. Para construir tales representaciones se emplean las proyecciones llamadas *axonométricas* o, abreviadamente, *axonometría*. La denominación de «axonometría» se ha formado de las palabras de la lengua antigua griega: *axon* — eje, y *metreo* — mido.

*El método de proyección axonométrica reside en que la figura dada, junto con los ejes coordenados rectangulares, a los cuales este sistema de puntos está referido en el espacio, se proyecta ortogonalmente sobre cierto plano*¹⁾. Por consiguiente, la proyección axonométrica es, ante todo, una proyección sobre un solo plano, y no sobre dos y más, como esto tenía efecto en el sistema de proyecciones ortogonales. Al mismo tiempo, es necesario asegurar la claridad de las representaciones y la posibilidad de efectuar la determinación de las posiciones y las dimensiones, como se expone más abajo.

En la fig. 449 se muestra el esquema de proyección del punto *A* sobre cierto plano *P*, aceptado como *plano de proyección axonométrica* (llamado también *plano de la imagen*). La dirección de proyección se indica con la flecha²⁾.

¹⁾ La axonometría puede ser también central; aquí se examina la axonometría paralela.

²⁾ La dirección de proyección puede formar con el plano de proyecciones axonométricas un ángulo agudo o un ángulo recto. Para asegurar la claridad de las representaciones la dirección de proyección no se debe tomar paralela a ninguno de los planos coordenados.

Las rectas Ox , Oy , Oz representan los ejes coordenados en el espacio, las rectas $O_p x$, $O_p y$, $O_p z$ son sus proyecciones sobre el plano P , llamadas *ejes axonométricos* (o ejes de coordenadas axonométricas).

En los ejes x , y , z se ha marcado cierto segmento de longitud l , aceptado como unidad de medición por estos ejes (*unidad natural*). Los segmentos l_x , l_y , l_z en los ejes axonométricos representan las

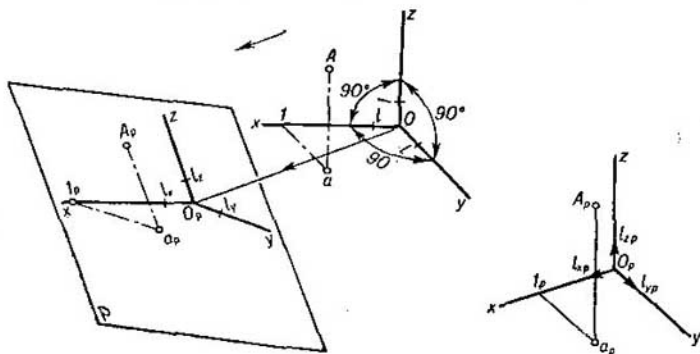


Fig. 449

proyecciones del segmento l ; ellos en general no son iguales a l y no son iguales entre sí. Los segmentos l_x , l_y , l_z son unidades de medida por los ejes axonométricos, o sea, *unidades axonométricas*¹⁾.

Las relaciones:

$$\frac{l_x}{l}, \quad \frac{l_y}{l}, \quad \frac{l_z}{l}$$

se llaman *coeficientes de reducción* (o coeficiente de distorsión) de los ejes axonométricos. Designemos el coeficiente de reducción del eje $O_p x$ por k , el del eje $O_p y$ por m , y el del eje $O_p z$ por n .

La línea espacial de tres elementos $OlaA$ se ha proyectado en una línea plana quebrada $O_p l_p a_p A_p$ (fig. 449). El punto A_p es la *proyección axonométrica* del punto A ; el punto a_p representa la proyección axonométrica del punto a , que es una de las proyecciones ortogonales del punto A , a saber: sobre el plano H (xOy). Al punto a_p se la llama *segunda proyección* del punto A . Se pueden construir dos segundas proyecciones más del punto A , correspondientes a sus otras dos proyecciones ortogonales (sobre los planos V (xOz) y W (yOz)).

¹⁾ Se emplean también las denominaciones de «escalas axonométricas» y correspondientemente «escala natural».

Las relaciones entre las proyecciones axonométricas de segmentos de líneas rectas paralelas a los ejes coordenados rectangulares y los propios segmentos se expresan con los coeficientes k , m , n .

Puesto que (véase la fig. 449) $aI \parallel Oy$ y $aA \parallel Oz$, entonces, en el caso de proyección paralela, $a_p I_p \parallel O_p y$ y $a_p A_p \parallel O_p z$. En la proyección paralela la relación de los segmentos paralelos se conserva; por consiguiente, $a_p I_p : l_y = aI : l$ o bien $a_p I_p : aI = l_y : l = m$, donde m es el coeficiente de reducción del eje $O_p y$. Se pueden sacar conclusiones análogas también respecto a los segmentos situados paralelamente a los ejes x y z : la relación de las proyecciones de tales segmentos a

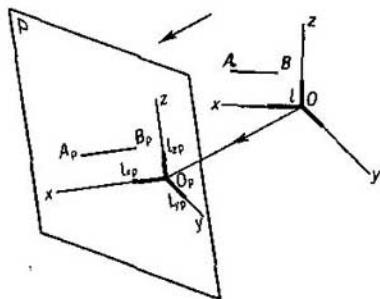


Fig. 450

los propios segmentos son iguales (respectivamente) a los coeficientes de reducción k y n .

Así, la relación entre la proyección axonométrica $A_p B_p$ del segmento AB , paralelo al eje x (fig. 450), y el propio segmento es igual a $A_p B_p : AB = k$.

Cada uno de los segmentos de la línea $OIAA$ determina una de las proyecciones rectangulares del punto A ; las proyecciones de estos segmentos (los segmentos de la quebrada plana $O_p I_p a_p A_p$) determinan

respectivamente las *coordenadas axonométricas* del mismo punto A . Evidentemente, con auxilio de los coeficientes de reducción se puede pasar de las coordenadas rectangulares a las axonométricas, y viceversa: $x_p = kx$, $y_p = my$, $z_p = nz$, donde con las letras x_p , y_p , z_p se han designado los segmentos que determinan las coordenadas axonométricas del punto, y con las letras x , y , z , los segmentos que determinan sus coordenadas rectangulares.

En la fig. 451 se da un ejemplo de la construcción de la proyección axonométrica de un punto con ayuda de sus proyecciones ortogonales.

El punto A_p se ha construido con auxilio de los segmentos coordenados tomados del dibujo: $x = OI$, $y = aI$, $z = a'I$. Teniendo en cuenta los coeficientes de reducción k , m y n , llevamos al eje $O_p x$ el segmento $O_p I_p = k \cdot OI$, luego, paralelamente al eje $O_p y$, trazamos el segmento $I_p a_p = m \cdot aI$ y, finalmente, trazamos el segmento $a_p A_p = n \cdot a'I$ paralelamente al eje $O_p z$.

El plano Q (fig. 452) está representado por sus trazas y en la proyección axonométrica. Para construir las trazas se han tomado los puntos de intersección de las mismas con los ejes con ayuda de los segmentos en los ejes (por ejemplo, el punto Q_{xp} se ha construido con ayuda del segmento $OQ_x : O_p Q_{xp} = k \cdot OQ_x$).

El punto A situado en el plano Q se ha construido en la proyección axonométrica con ayuda de sus coordenadas; la horizontal $N_p A_p$ deberá ser paralela a su segunda proyección y a la traza en el plano $xO_p y$. El punto A_p se podría haber construido también como el punto de intersección de dos rectas cualesquiera en el plano Q , construyendo las proyecciones axonométricas de estas rectas.

En la misma fig. 452 viene representada la proyección axonométrica de un plano proyectante frontal y del punto B_p perteneciente a este plano. ¿Cómo determinar las coordenadas rectangulares de este punto? La construcción se muestra

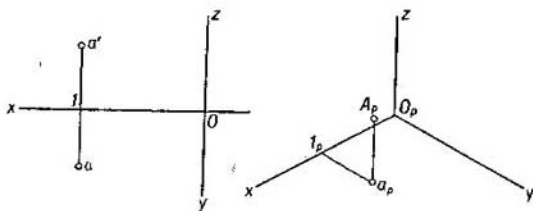


Fig. 451

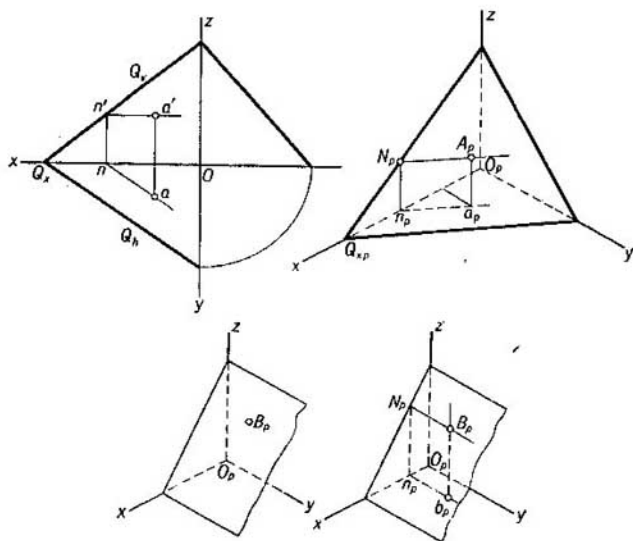


Fig. 452

en la fig. 452 a la derecha: en la proyección axonométrica se ha trazado la horizontal $N_p B_p$ y se ha construido su segunda proyección, en la que se ha obtenido la segunda proyección b_p . Las coordenadas buscadas del punto B son:

$$x = \frac{O_p n_p}{k}, \quad y = \frac{n_p b_p}{m}, \quad z = \frac{b_p B_p}{n},$$

donde k, m, n son los coeficientes de reducción.

Dándose los coeficientes de reducción se puede tomar el mayor de ellos igual a la unidad, lo que simplifica la construcción.

Si sobre el plano P se toman arbitrariamente cuatro puntos O_p , A_p , B_p y C_p , tres cualesquiera de los cuales no son coplanares, y se unen dos a dos con rectas, entonces se obtiene una figura llamada *cuadrilátero completo* ($O_pA_pB_pC_p$); éste es un cuadrilátero con sus diagonales (fig. 453, a). Si, luego, por estos puntos se trazan rectas paralelas entre sí y se toma en cada una de ellas un punto arbitrario O , A , B y C de modo tal, que todos ellos estén situados en distintos planos, entonces en el espacio se genera, en general, cierto tetraedro

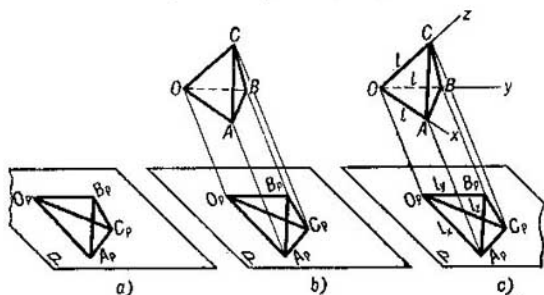


Fig. 453

$OABC$ ¹⁾. Obviamente, en el espacio pueden haber una infinidad de tetraedros, como proyecciones paralelas de los cuales puede servir el cuadrilátero completo $O_pA_pB_pC_p$. Entre ellos existe un tetraedro con un ángulo triédrico recto en el punto O y con aristas iguales OA , OB , OC ; a tal tetraedro se le puede considerar como *de escala*, es decir, las tres aristas iguales y perpendiculares entre sí de este tetraedro sirven de escalas de los ejes coordenados en el espacio (fig. 453, b). Esto forma el contenido del *teorema principal de la axonometría*, expuesto en la siguiente formulación: *todo cuadrilátero completo en un plano es siempre la proyección paralela de cierto tetraedro de escala*. Por esta razón, tres rectas cualesquiera que pasen por un punto del plano y que no se confundan, pueden ser tomadas como ejes axonométricos, es decir, como proyecciones de los ejes coordenados rectangulares, y tres segmentos cualesquiera trazados sobre estas rectas a partir del punto de su intersección, pueden ser tomados, en correspondencia con la proporción elegida de los coeficientes de reducción, en calidad de escalas axonométricas²⁾.

¹⁾ En el caso dado, el tetraedro es una pirámide triangular de forma arbitraria.

²⁾ «El teorema principal de la axonometría» fue formulado por K. Polke (en el año 1851) en forma del siguiente teorema: *tres segmentos cualesquiera que*

Si los tres coeficientes de reducción son iguales entre sí ($k=m=n$), la proyección axonométrica se llama *isométrica*; si son iguales entre sí sólo dos coeficientes de reducción (por ejemplo, $k=n$, pero m no es igual a k , o bien $k=m$, pero n no es igual a k), la proyección se llama *dimétrica* o *monodimétrica*; finalmente, si $k \neq m$, $k \neq n$, $m \neq n$, la proyección se llama *trimétrica* o *anisométrica*¹⁾.

Si la dirección de proyección no es perpendicular al plano P , entonces la proyección axonométrica se llama *oblicua*. En el caso contrario, la proyección axonométrica se llama *rectangular* u *ortogonal*.

Para comparar estas dos proyecciones imaginémosnos una esfera en las proyecciones axonométricas ortogonal y oblicua. En el primer caso, las generatrices de la superficie proyectante cilíndrica, que envuelve a la esfera, son perpendiculares al plano de proyección axonométrica; y puesto que el cilindro proyectante es un cilindro de revolución, la proyección axonométrica ortogonal de la esfera es una circunferencia.

En el caso de la proyección oblicua en la intersección de la superficie proyectante con el plano de proyección axonométrica se obtiene una elipse; en la proyección axonométrica oblicua la representación de la esfera pierde su claridad.

En la práctica de construcción de representaciones intuitivas habitualmente se emplean solamente algunas combinaciones determinadas de dirección de los ejes axonométricos y de coeficientes de reducción.

§ 72. PROYECCIONES AXONOMÉTRICAS RECTANGULARES. COEFICIENTES DE REDUCCIÓN Y ÁNGULOS ENTRE LOS EJES

1. Tomemos el plano de proyección axonométrica de tal modo que corte a los tres ejes de coordenadas (fig. 454, a la izquierda) en los puntos X , Y , Z . En el caso de proyecciones axonométricas rectangulares el segmento OO_p es perpendicular al plano P . Los segmentos O_pX , O_pY , O_pZ (las proyecciones axonométricas de los segmentos en los ejes) son los catetos de triángulos rectángulos y los propios segmentos en los ejes de coordenadas son las hipotenusas. De

parten de un mismo punto en el plano, pueden ser tomados como las proyecciones paralelas de tres segmentos iguales y perpendiculares entre sí en el espacio. En la sexta década del siglo XIX H. Schwarz generalizó el teorema de Polko, demostrando que cualquier cuadrilátero completo en el plano siempre puede ser considerado como la proyección paralela de un tetraedro, semejante a cualquier dado.

¹⁾ De la palabra del idioma griego antiguo «isos» — igual; la proyección isométrica es la proyección de iguales coeficientes de reducción de los tres ejes; «di» — doble; la proyección dimétrica es la proyección de iguales coeficientes de reducción de dos ejes; «treis» — tres; la proyección trimétrica es la proyección de desiguales coeficientes de reducción de los tres ejes.

aquí $O_p X : OX = \cos \alpha$, $O_p Y : OY = \cos \beta$, $O_p Z : OZ = \cos \gamma$. Pero estas relaciones representan los coeficientes de reducción k , m y n . Por consiguiente, $k = \cos \alpha$, $m = \cos \beta$, $n = \cos \gamma$. Para el segmento OO_p los cosenos de los ángulos α_1 , β_1 , γ_1 (fig. 454, a la derecha), suplementarios a los ángulos α , β y γ , son los *cosenos directores*.

Por esta razón, $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1$ ¹⁾, y puesto que $\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$, etc., entonces, $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$, es decir, $1 - \cos^2 \alpha + 1 - \cos^2 \beta + 1 - \cos^2 \gamma = 1$, de donde $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2$.

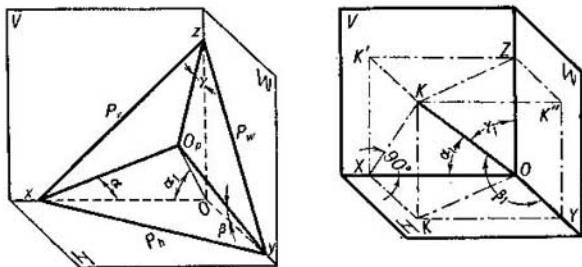


Fig. 454

Por consiguiente, $k^2 + m^2 + n^2 = 2$, es decir, para la *proyección axonométrica rectangular* la suma de los cuadrados de los coeficientes de reducción es igual a dos.

2. **Proyección isométrica**²⁾. Puesto que $k = m = n$, entonces $3k^2 = 2$, de donde

$$k = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,82.$$

¹⁾ Les recordamos la deducción de esta relación (fig. 454, a la derecha): $OK^2 = OX^2 + OY^2 + OZ^2$; pero $OX = OK \cdot \cos \alpha_1$, $OY = OK \cos \beta_1$ y $OZ = OK \cos \gamma_1$, de donde $OK^2 = OK^2 \cos^2 \alpha_1 + OK^2 \cos^2 \beta_1 + OK^2 \cos^2 \gamma_1$ y (después de simplificar por OK^2) $1 = \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1$.

²⁾ El término «proyecciones isométricas» fue propuesto por primera vez en el año 1820 en las conferencias de W. Farich dadas en Cambridge (Inglaterra). En estas conferencias Farich expuso la teoría de las proyecciones isométricas; él empleó estas proyecciones en la técnica y las popularizó ampliamente. En el idioma ruso los datos acerca de las proyecciones isométricas rectangulares fueron expuestos por primera vez en el artículo del profesor del Instituto de ingenieros de vías de comunicación de San Petersburgo A. J. Reder (1809—1872) en el año 1855. Una exposición más profunda del problema acerca de la proyección isométrica como caso particular de las proyecciones axonométricas rectangulares fue dada por N. I. Makárov y, luego, por V. I. Kurdiúmov, que en general dedicó a las proyecciones axonométricas toda una serie de trabajos. V. I. Kurdiúmov propuso emplear un papel especial con una red de líneas rectas trazadas en él, que corresponden a las direcciones de los ejes en la proyección isométrica. La idea sobre tal papel para ejecutar en él esbozos en proyección isométrica se la dictó a Kurdiúmov su práctica de ingeniero.

Esto significa que en la proyección isométrica rectangular, en cada eje (o en cada recta paralela a estos ejes) se obtiene una reducción igual aproximadamente a 0,82.

3. **Proyección dimétrica.** Dos coeficientes de reducción son iguales entre sí, y el tercero no es igual a éstos. Si se toma $k=n$ y se elige $m=\frac{1}{2}k$, obtendremos:

$$2k^2 + \frac{1}{4}k^2 = 2, \quad k = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0,94.$$

Por consiguiente, en la proyección dimétrica rectangular, en dos ejes (en el caso dado en los ejes $O_p x$ y $O_p z$) o en dos rectas paralelas a estos ejes, se obtiene una reducción igual aproximadamente a 0,94, y en el tercer eje (en el caso dado en el eje $O_p y$) se obtiene una reducción de $\approx 0,47$.

4. El plano de proyección axonométrica, al cortar al plano de coordenadas, forma un triángulo llamado *triángulo de trazas*.

Demostremos que en las proyecciones axonométricas rectangulares, los ejes axonométricos son las alturas del triángulo de trazas.

Efectivamente, (fig. 455), si $OO_p \perp P$, entonces $OK \perp XY$ y de acuerdo con el teorema de tres perpendiculares $ZK \perp XY$. Análogamente $XM \perp YZ$. El punto O_p es el punto de intersección de las alturas (el ortocentro) del triángulo de trazas.

Luego, en las proyecciones axonométricas rectangulares el triángulo de trazas es acutángulo.

En efecto, en este caso el ortocentro está situado dentro de este triángulo, y tal disposición del ortocentro es propia solamente del triángulo acutángulo.

De esto se deriva que los ángulos $XO_p Z$, $XO_p Y$ y $YO_p Z$ son obtusos. En efecto, dado que el triángulo de trazas es acutángulo, el ángulo entre las alturas complementa al ángulo agudo hasta 180° , por ejemplo, $\angle MO_p K = 180^\circ - \angle XO_p K$; pero el $\angle XO_p K$ es agudo, por lo tanto, el $\angle MO_p K$ será obtuso.

Pero esto no quiere decir que en la proyección axonométrica rectangular se puede emplear sólo tal esquema de disposición de los ejes, como el endicado, por ejemplo, en la fig. 456, a. Supongamos que el eje x ha sido prolongado a partir del punto O_p a la derecha y hacia arriba y el eje y se ha prolongado a partir del punto O_p a la izquierda y hacia arriba. En este caso el ángulo formado por los

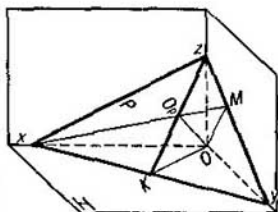


Fig. 455

ejes prolongados x e y se conserva obtuso, pero los ángulos formados con el eje z resultan agudos. Sin embargo, no es difícil establecer que en la proyección axonométrica rectangular la elección de los ejes está limitada, a saber: *es necesario que el ángulo obtuso formado por dos ejes esté dividido por la prolongación del tercer eje, y que el ángulo agudo formado por dos ejes no pueda ser dividido por la prolongación del tercer eje.*

5. Supongamos que sean dados los ejes para la proyección axonométrica rectangular (fig. 456, a). Hace falta *determinar los coeficientes de reducción para la disposición dada de los ejes.*

Ante todo construimos cierto triángulo en el que las alturas están dirigidas respectivamente en dirección paralela a los ejes dados (fig. 456, b). Este triángulo desempeña el papel de triángulo de trazas. El ángulo XO_pY se ha obtenido como proyección del ángulo recto formado por los ejes x e y en el espacio. Valiéndonos del método de abatimiento hagamos coincidir ambos ángulos con el plano del dibujo: $\angle XO_pY$ y $\angle XOY$, girando el $\angle XOY$ alrededor de la recta

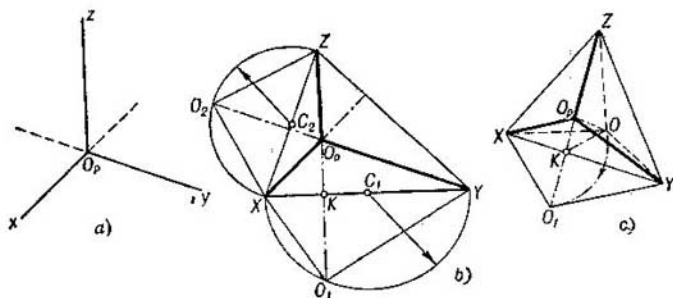


Fig. 456

XY hasta hacerlo coincidir con el plano P (fig. 456, c). En la fig. 456, b se muestra que dividiendo con el punto C_1 la recta XY por la mitad y trazando desde este punto como centro una semicircunferencia de radio C_1X , podemos proyectar el punto O_p perpendicularmente a XY sobre la semicircunferencia. El punto O_1 es el vértice del ángulo recto formado por los ejes x e y en el espacio después del giro.

Ahora, los coeficientes de reducción buscados se determinan de las relaciones $O_pX : O_1X = k$ y $OY : O_1Y = m$. Para determinar el coeficiente n se puede emplear la fórmula $k^2 + m^2 + n^2 = 2$, o bien construir una semicircunferencia tomando XZ como diámetro, y tomar la relación $O_pX : O_2X = n$.

6. Más arriba (pag. 335) fueron deducidos los valores de los coeficientes de reducción para las proyecciones rectangulares isométrica y dimétrica. Valiéndonos de estos valores de los coeficientes de reducción se puede determinar la magnitud de los ángulos formados por los ejes de estas proyecciones axonométricas rectangulares con ayuda de los triángulos de trazas ¹⁾.

Proyección isométrica (fig. 457). Examinamos la proyección rectangular; por consiguiente, la recta OO_p es perpendicular al plano en el que está situado el triángulo de trazas.

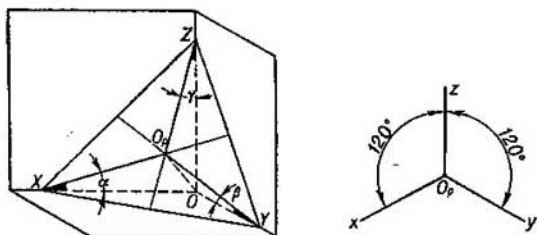


Fig. 457

En la proyección isométrica, los coeficientes de reducción son iguales entre sí: $k=m=n$; por consiguiente, $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma$ y $\alpha = \beta = \gamma$ (los ángulos son agudos).

De esto se desprende que el triángulo de trazas, para la proyección isométrica, es equilátero. Y de esto se deriva que en el triángulo de trazas, cada uno de los ángulos XO_pZ , XO_pY y YO_pZ es igual a 120° .

Así pues, para la proyección isométrica se obtiene la disposición de los ejes indicada en la fig. 457 a la derecha.

El plano de proyección isométrica, que corta a los semiejes positivos x , y , z , se representa en el sistema de proyecciones ortogonales así como se muestra en la fig. 458, a. Este plano forma con cada uno de los planos de coordenadas un ángulo $\delta \approx 55^\circ$, más exactamente, $54^\circ 45'$.

Evidentemente, los planos, cuya posición es semejante a la de los planos indicados en la fig. 458, c, y las figuras situadas sobre ellos se representan en la proyección isométrica en forma de una línea recta.

Proyección dimétrica. Aquí, dos de los tres coeficientes de reducción son iguales entre sí; examinaremos el caso cuando $k=n$, $k=2m$.

¹⁾ Más exactamente, con ayuda de triángulos semejantes a los triángulos de trazas. La construcción de los ejes en la proyección axonométrica rectangular con ayuda de los coeficientes de reducción dados, en general, se puede realizar a base del teorema de Weisbach: «En la proyección axonométrica rectangular, los ejes axonométricos son las bisectrices de los ángulos del triángulo, cuyos lados son proporcionales a los cuadrados de los coeficientes de reducción».

En este caso, el ángulo entre los ejes axonométricos O_pz y $O_p y$ deberá ser igual a $131^\circ 25'$, y el eje $O_p x$ forma con la perpendicular al eje $O_p z$ un ángulo de $7^\circ 10'$.

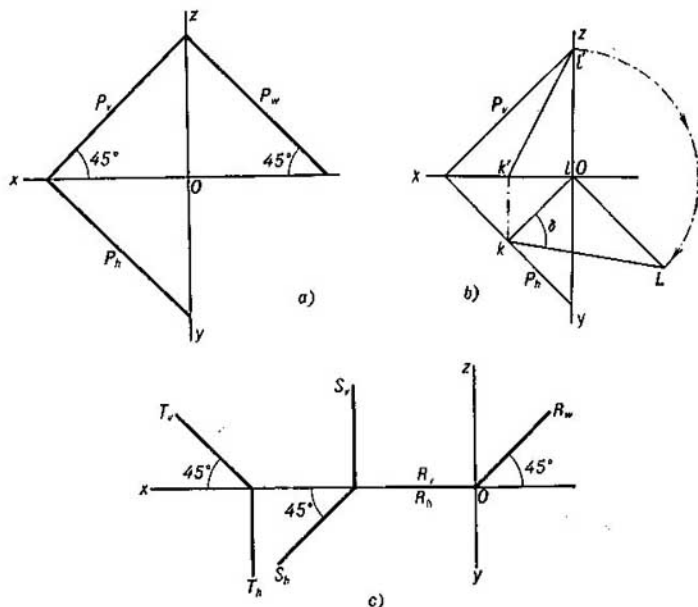


Fig. 458

Demostremos esto. Sea $k=n$ y, por consiguiente, $\alpha=\gamma$ y $OX=OZ$ (fig. 457, a la izquierda). Aceptando el segmento OX como unidad, obtenemos que $XZ = \sqrt{2}$. Examinando la proyección dimétrica en la que $k=n=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ y $m=\frac{\sqrt{2}}{3}$, podemos escribir que $O_p X = O_p Z = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Puesto que $OX=OZ$, entonces $XY=ZY$, es decir, el triángulo XYZ en este caso es isósceles.

En este triángulo (fig. 459) la altura YK divide al lado XZ por la mitad, o sea,

$$XK = KZ = \frac{XZ}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Del exámen del triángulo rectángulo $O_p KZ$ se desprende:

$$\text{sen } \delta = \frac{ZK}{O_p Z} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 0,75.$$

El ángulo $\delta \approx 48^{\circ}35'$; $2\delta = 97^{\circ}10'$. En la figura se ve que el $\angle SO_pX \approx 7^{\circ}10'$, puesto que $O_pS \perp O_pZ$.

Luego, observámos que

$$\angle KO_pS \approx 48^{\circ}35' - 7^{\circ}10' = 41^{\circ}25'.$$

Así pues, hemos obtenido la disposición de los ejes, indicada en la fig. 459 a la derecha, para la proyección dimétrica, en la cual los coeficientes de reducción forman la proporción 1:0,5:1.

Se puede construir el eje O_px tomando $\text{tg } 7^{\circ}10'$ igual a $1/8$, y el eje O_py , tomando $\text{tg } 41^{\circ}25'$ igual a $7/8$. El eje O_py puede ser trazado

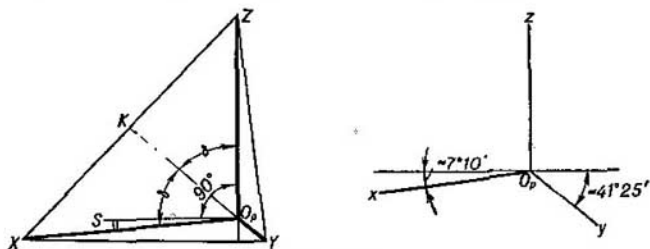


Fig. 459

también valiéndose de otro procedimiento, a saber: como la prolongación de la bisectriz del ángulo zO_px (véase la fig. 459, a la izquierda). Este procedimiento es más preferente.

Si el plano de la proyección dimétrica examinada por nosotros, que corta a los semiejes positivos x , y , z , se representa en el sistema de proyecciones ortogonales, se obtiene el dibujo mostrado en la fig. 460, a, con la particularidad de que el ángulo $\mu \approx 20^{\circ}40'$ ($OP_y : OP_x = \text{tg } \mu \approx 0,377$).

Así pues, si el plano de proyección dimétrica se representa en el sistema de proyecciones ortogonales, entonces hay que trazar (véase la fig. 460, a) $OP_z = OP_x$ y $OP_y \approx 0,377 \cdot OP_x$ o bien, redondeando, $0,4 \cdot OP_x$.

Evidentemente, los planos situados semejantemente a los señalados en la fig. 460, c, y las figuras pertenecientes a estos planos se representan en la proyección dimétrica en forma de una línea recta.

Los segmentos dispuestos paralelamente a los ejes de coordenadas en el espacio, sufren en la proyección axonométrica una reducción expresada por los respectivos coeficientes de reducción. Pero entre los segmentos dispuestos en el espacio, existen tales, cuya dimensión no varía al ser proyectados en el sistema axonométrico. Estos son los segmentos dispuestos en el espacio paralelamente a cualquiera de los lados del triángulo de trazas. En efecto, todo segmento dispuesto, por ejemplo, paralelamente a la traza XY (fig. 457, a la izquierda), incluyendo el propio segmento XY , conserva también

su magnitud en la proyección axonométrica. Pero en la proyección axonométrica rectangular estos segmentos resultan dispuestos perpendicularmente a los ejes axonométricos, como rectas paralelas a los lados del triángulo de trazas.

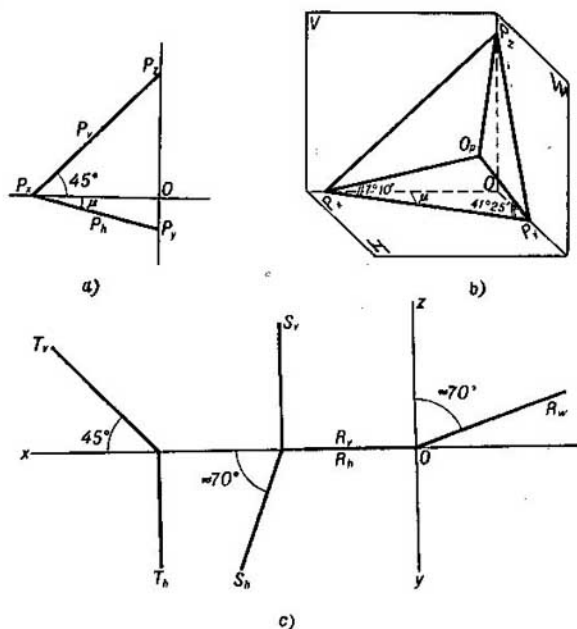


Fig. 460

Nos limitaremos a examinar las dos proyecciones axonométricas rectangulares indicadas: *la isométrica* y *la dimétrica* con la proporción de los coeficientes de reducción $1 : 0,5 : 1$ y los ejes dispuestos así como se indica en la fig. 459. En lo sucesivo, al emplear la denominación de proyecciones *isométrica* y *dimétrica*., tendremos en cuenta precisamente estas proyecciones axonométricas rectangulares estudiadas por nosotros.

En la práctica de construcción de las proyecciones indicadas se admiten las siguientes divergencias:

1) en la proyección isométrica, en la mayoría de los casos, no se emplean los coeficientes de reducción iguales a $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ($\approx 0,82$), sino que se toman iguales a la unidad;

2) en la proyección dimétrica *por lo general no se emplean los coeficientes de reducción iguales a $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ($\approx 0,94$) y a $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ($\approx 0,47$), sino que se toman iguales a 1 y 0,5 respectivamente.*

La sustitución de los valores de los coeficientes de reducción naturales por números más cómodos representa una comodidad considerable en la construcción práctica. El aumento de las representaciones que se obtiene con esto, menos notable en la proyección dimétrica que en la isométrica, puede ser inaceptable sólo en casos particulares de construcción; entonces, se deben emplear los coeficientes de reducción naturales.

El alargamiento de los segmentos en la proyección isométrica, construida según los coeficientes de reducción redondeados, se expresa por la relación $1 : \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 1,22$, y en la proyección dimétrica, por la relación $1 : \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 1,06$.

Por ejemplo, los segmentos paralelos en el espacio a los lados del triángulo de trazas y, por consiguiente, trazados en la proyección axonométrica en direcciones perpendiculares a los ejes axonométricos, se alargan en la proyección isométrica 1,22 veces en comparación con su magnitud verdadera, y en la proyección dimétrica, 1,06 veces.

§ 73. CONSTRUCCIÓN DE LA PROYECCIÓN AXONOMETRICA RECTANGULAR DE UNA CIRCUNFERENCIA

1. Comencemos con el problema general: *construir la proyección axonométrica rectangular de una circunferencia situada en cierto plano de posición general Q.*

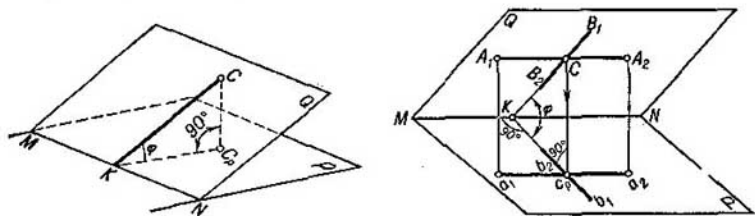


Fig. 461

Si el plano Q forma con el plano de proyección axonométrica P un ángulo agudo φ (fig. 461), entonces la proyección axonométrica de la circunferencia representa una *elipse*. El eje mayor de esta elipse

es la proyección del diámetro de la circunferencia, paralelo a la recta MN de intersección de los planos Q y P ; el eje menor de la elipse será la proyección del diámetro de la circunferencia, situado perpendicularmente a la recta MN , o sea, situado sobre la línea que determina la inclinación del plano Q con respecto al plano P . Si el punto

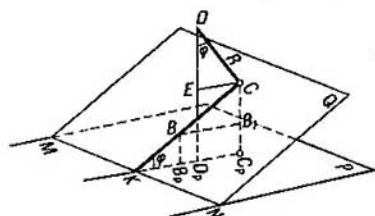


Fig. 462

C es el centro de la circunferencia situada sobre el plano Q , entonces el eje menor de la elipse, al proyectar esta circunferencia sobre el plano P , estará situado sobre la recta $C_p K$. La dimensión del eje menor de la elipse dependerá de la magnitud del ángulo φ formado por los planos Q y P ; si (fig. 462) el segmento CB es igual al radio

(R) de la circunferencia, entonces el semieje menor de la elipse será $C_p B_p = R \cos \varphi$.

2. Si $\varphi = 0^\circ$, entonces $C_p B_p = R$: el plano Q_1 (fig. 463) es paralelo al plano de proyección axonométrica P , y la proyección axonométrica de la circunferencia, situada sobre el plano Q_1 , representa una *circunferencia*.

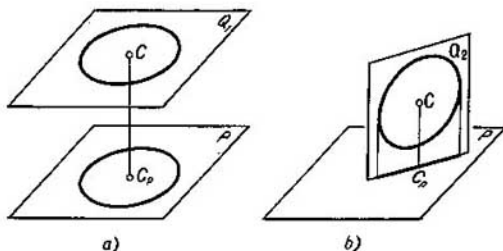


Fig. 463

Si $\varphi = 90^\circ$, entonces $C_p B_p = 0$: el plano Q_2 (fig. 463) es perpendicular al plano de proyección axonométrica P , y la proyección axonométrica de la circunferencia, situada sobre el plano Q_2 , representa el *segmento de una línea recta*.

En el caso cuando la circunferencia se proyecta en forma de elipse, se puede construir las proyecciones de dos cualesquiera diámetros perpendiculares entre sí. Se obtienen dos diámetros conjugados de la elipse, lo que da la posibilidad de construir la propia elipse, y también hallar sus ejes con ayuda de estos diámetros conjugados.

3. Más abajo se examina la construcción directa de los ejes de la elipse (la proyección axonométrica rectangular de la circunferencia), lo cual se reduce a hallar la dirección y la magnitud del eje menor de la elipse.

Puesto que la magnitud del eje menor de la elipse depende sólo de la magnitud del diámetro de la circunferencia que se representa y de la magnitud del ángulo φ (véase más arriba), entonces, evidentemente, en una multitud de casos se obtendrán elipses (las proyecciones de las circunferencias) con ejes que se repiten por su magnitud. Para esto es necesario y suficiente que todas las circunferencias sean de un mismo diámetro y estén situadas sobre planos que formen con el plano de proyecciones axonométricas ángulos iguales entre sí.

Estos planos son tangentes al cono de revolución, cuyo eje es perpendicular al plano de proyección axonométrica, y cuya generatriz forma con este plano un ángulo φ . Denominemos a este cono directriz.

Por ejemplo, las circunferencias situadas sobre los planos horizontales, frontales y de perfil, se representan en la proyección isométrica en forma de elipses, el eje menor de las cuales constituye $\approx 0,58$ de la magnitud del eje mayor (véase a continuación). Pero si se toma una circunferencia en cualquier plano que forma con el plano de proyección isométrica un ángulo igual a $\approx 54^\circ 45'$, es decir, igual al ángulo que forman con el plano de proyección isométrica los planos H , V y W , entonces la relación entre las magnitudes de los ejes menor y mayor de la elipse (la proyección isométrica de la circunferencia) será también $\approx 0,58$.

Imaginémonos un tetraedro rectangular, formado por los planos de proyección y el plano de proyección isométrica, en el que está situado el cono director, cuyo vértice se encuentra en el punto O , la circunferencia de la base resulta inscrita en el triángulo de trazas, y la generatriz forma con el plano de proyección isométrica un ángulo $\varphi \approx 54^\circ 45'$ ($\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{2}$). Las circunferencias situadas en planos tangentes al cono director, se representan en la proyección isométrica en forma de elipses, el eje menor de las cuales constituye $\approx 0,58$ de la magnitud del eje mayor.

Así pues, se obtiene una multitud de elipses iguales entre sí (las proyecciones axonométricas de circunferencias de un mismo diámetro) en una multitud de posiciones respecto de los ejes axonométricos.

Pero las elipses pueden repetirse no sólo por su magnitud, sino también por su posición respecto de los ejes axonométricos, es decir, se pueden obtener elipses-proyecciones iguales e igualmente orientadas, a pesar de que las circunferencias-originales no estén situadas en planos paralelos entre sí. Si nos imaginamos dos conos directrices iguales, situados sobre el plano de proyección axonométrica a ambos lados de éste, y examinamos planos tangentes a los conos directores y que tienen una traza común en el plano de proyección axonométrica (o planos paralelos a éstos), entonces las circunferencias de iguales diámetros situadas sobre estos planos se representarán en la proyección axonométrica en forma de elipses iguales e igualmente orientadas.

4. Examinemos ahora el método de construcción del eje menor de la elipse, que representa la proyección axonométrica rectangular de una circunferencia de radio R , situada sobre el plano Q que forma con el plano de proyección axonométrica P cierto ángulo agudo φ . Supongamos que desde el punto C (fig. 462) se ha trazado la perpendicular CD al plano Q . La proyección de esta perpendicular sobre el plano P se encontrará sobre la misma recta $C_p K$ a la que pertenece el eje menor de la elipse, que es la proyección axonométrica de una circunferencia descrita en el plano Q desde el centro C .

Por consiguiente, la proyección sobre el plano P de una perpendicular levantada al plano Q , determina la dirección del eje menor de la elipse.

Si a partir del punto C se traza sobre esta perpendicular el segmento $CD=R$ y se construye el triángulo rectángulo CED , se puede establecer que $\triangle CED = \triangle CB_1B$ y el cateto $DE = BB_1 = C_p B_p = R \cos \varphi$, es decir, es igual a la mitad del eje menor de la elipse. El segundo cateto de este triángulo (el CE) es igual a $C_p D_p$, o sea, es igual a la proyección del propio segmento CD sobre el plano de proyección axonométrica P .

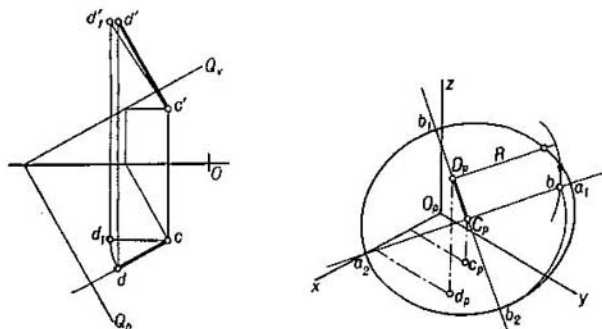


Fig. 464

Por consiguiente, la construcción de los ejes de la elipse, que representa la proyección axonométrica de una circunferencia de radio R situada sobre el plano de posición general Q , se puede efectuar de la manera siguiente:

a) trazar en el dibujo (fig. 464, a la izquierda) desde el centro de la circunferencia (el punto C) una perpendicular al plano Q y llevar sobre esta perpendicular el segmento $CD=R$;

b) construir en el sistema de ejes axonométricos dados con auxilio de las coordenadas de los puntos C y D la proyección axonométrica del segmento CD , o sea, el segmento $C_p D_p$ (fig. 464, a la derecha), que da la dirección del eje menor de la elipse;

c) determinar la dimensión del semieje menor de la elipse, para lo cual trazar desde el punto C_p una perpendicular a $C_p D_p$, intersecarla con un arco de radio R , descrito desde el punto D_p como centro, y llevar la longitud del segmento obtenido $C_p b$, igual a $R \cos \varphi$, sobre la recta $C_p D_p$ a ambos lados de C_p ; obtendremos el eje menor de la elipse ($b_1 b_2 = 2R \cos \varphi$);

d) llevar sobre la perpendicular, trazada desde el punto C_p a la recta $C_p D_p$, los segmentos $C_p a_1$ y $C_p a_2$, iguales cada uno al radio R de la circunferencia que se representa; obtendremos el eje mayor de la elipse ($a_1 a_2 = 2R$).

La elipse puede ser construida con ayuda de sus ejes hallados ¹⁾.

5. El método indicado de construcción de los ejes de la elipse, que representa la proyección axonométrica rectangular de una circunferencia, es también aplicable en los casos cuando la circunferencia está situada en el plano proyectante. En este caso se hace innecesaria la construcción de la proyección del segmento con ayuda

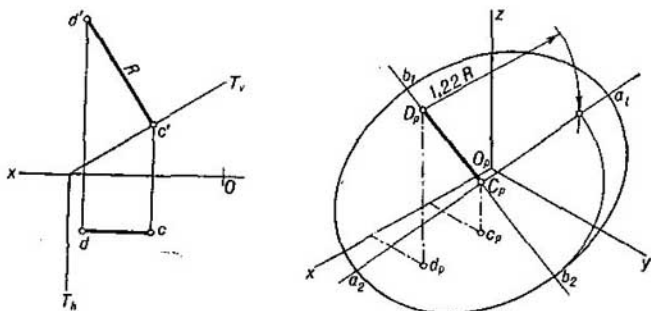


Fig. 465

de su magnitud dada R : si la circunferencia se encuentra sobre el plano T (fig. 465), entonces la perpendicular a este plano es paralela al plano V y, por consiguiente, la proyección sobre este plano es un segmento igual al segmento que se proyecta R .

La construcción se da para dos posiciones: en la fig. 465, la circunferencia de radio R está situada sobre el plano proyectante frontal T , y en la fig. 466 ²⁾, sobre el plano proyectante horizontal S . Lo mismo que en el caso de un plano de posición general, con ayuda de las coordenadas de los puntos C (el centro de la circunferencia que se representa) y D , hay que construir la proyección axonométrica del segmento CD igual a R , determinar la dimensión del semieje

¹⁾ En la fig. 464 la construcción se ha efectuado en la proyección isométrica empleando los coeficientes de reducción naturales ($\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,82$).

²⁾ En la fig. 465 la construcción se ha ejecutado en la proyección isométrica con los coeficientes de reducción redondeados; por eso en el dibujo se ha tomado $1,22R$. En la fig. 466 la construcción se ha cumplido en la proyección dimétrica con los coeficientes de reducción redondeados; por eso en el dibujo se ha tomado $1,06R$.

menor, con auxilio de la misma construcción que en la fig. 464, y construir la elipse con ayuda de sus ejes hallados.

6. El método de construcción expuesto es aplicable al caso, muy frecuente en la práctica, cuando la circunferencia está situada en un plano paralelo al plano de proyección. Supongamos que la circun-

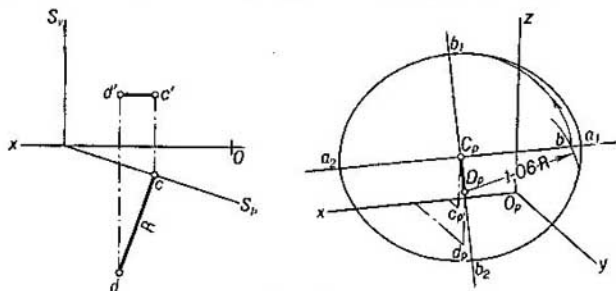


Fig. 466

ferencia está situada en cierto plano horizontal S (fig. 467). En este caso, la perpendicular trazada desde el centro de la circunferencia al plano S , será paralela al eje z y su proyección axonométrica (el segmento $D_p C_p$) se dispone paralelamente al eje axonométrico $O_p z$.

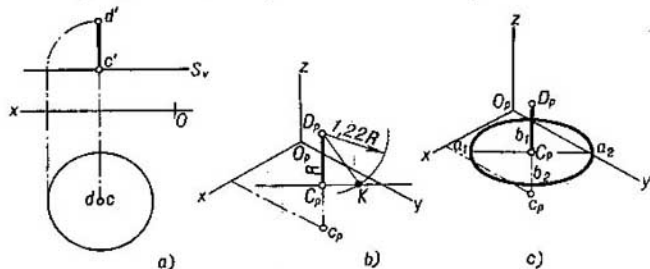


Fig. 467

Pero la proyección axonométrica de esta perpendicular determina la dirección del eje menor de la elipse. Por consiguiente, el eje menor de la elipse, en este caso, es paralelo al eje $O_p z$ y el eje mayor es perpendicular a este eje. Evidentemente, el examen de los casos cuando las circunferencias están situadas en los planos frontal y de perfil nos lleva a la conclusión de que el eje mayor de la elipse en el primer caso será perpendicular al eje $O_p y$, y en el segundo caso, al eje $O_p x$.

El esquema de disposición de los ejes de las elipses, representado en la fig. 468, se obtiene al proyectar en el sistema axonométrico rectangular las circunferencias situadas en planos paralelos respectivamente a los planos de proyección.

La determinación de la dimensión del semieje menor en estos casos puede efectuarse así como se indicó más arriba. Con ayuda de los ejes construidos de la elipse se construyen las propias elipses.

Empleemos esto en las proyecciones isométrica y dimétrica examinadas más arriba.

7. Proyección isométrica.

Puesto que el plano de proyección isométrica está inclinado respecto de los planos H , V y W a un mismo ángulo, basta con determinar el semieje menor de la elipse, aunque sea para el caso cuando la circunferencia de radio R está situada sobre un plano paralelo al plano H .

Supongamos que las coordenadas fueron trazadas sin multiplicarlas por 0,82. En este caso $C_p D_p$ (fig. 467, b y c) es igual a R y desde el punto D_p hay que trazar un arco de radio igual a $1,22R$, que interseca la perpendicular a $C_p D_p$. Del triángulo rectángulo $C_p D_p K$ obtenemos: $C_p K$ (el eje menor de la elipse) $\approx \sqrt{(1,22R)^2 - R^2} \approx 0,7R$. A esto le corresponderá el eje mayor igual a $1,22R$.

Si las coordenadas se trazan teniendo en cuenta el coeficiente de reducción 0,82, los semiejes de la elipse se obtienen iguales a: el mayor a R , y el menor a $0,58R$.

Así pues, si la circunferencia de diámetro D está situada en los planos horizontal, frontal o de perfil, entonces en la proyección isométrica, el eje mayor de la elipse es igual a D , y el menor es igual a $0,58D$. Si se toma la proyección isométrica con los coeficientes de reducción redondeados, entonces los ejes de las elipses indicadas más arriba deben tomarse iguales a $1,22D$ y $0,7D$ respectivamente.

A los cuatro puntos (los extremos de los ejes de la elipse) se pueden añadir cuatro puntos más (los extremos de los dos diámetros conjugados de la elipse, paralelos respectivamente a dos de los ejes axonométricos, en dependencia de a cuál de los planos de coordenadas es paralelo el plano sobre el que está situada la circunferencia que se examina). Estos diámetros conjugados, en el caso del aumento indicado más arriba (1,22), son iguales al diámetro de la circunferencia que se representa.

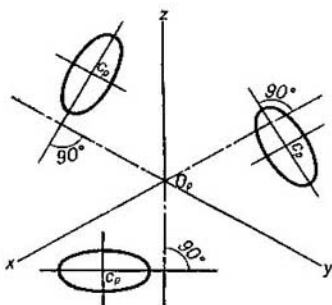


Fig. 468

Supongamos, por ejemplo, que hay que construir la proyección isométrica de una circunferencia de diámetro igual a 100 mm, situada en el espacio sobre cierto plano paralelo al plano W . La posición de la elipse se determina por los ejes $O_p y$ y $O_p z$. Tomando en el dibujo, de acuerdo a una u otra condición, el centro C_p (fig. 469) trazamos:

- una recta perpendicular al eje x , y llevamos sobre ella el eje mayor de la elipse $a_1 a_2 = 122$ mm;
- una recta paralela al eje x , y llevamos sobre ella el eje menor de la elipse $b_1 b_2 = 70$ mm;
- una recta paralela al eje y , y llevamos sobre ella el diámetro de la elipse $d_1 d_2 = 100$ mm;
- una recta paralela al eje z , y llevamos sobre ella el diámetro de la elipse $e_1 e_2 = 100$ mm.

Los ocho puntos hallados permiten reproducir la propia elipse con bastante exactitud incluso a mano. Ordinariamente, al contornear la elipse no se dejan

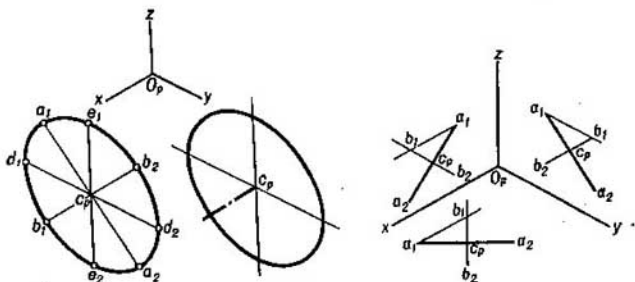


Fig. 469

sus ejes mayor y menor, sino que se indican solamente las direcciones paralelas a los ejes axonómicos, con la particularidad de que una de ellas, la correspondiente al eje perpendicular al plano de la circunferencia que se representa, se señala con línea gruesa.

La dimensión del eje menor puede obtenerse haciendo uso del método indicado en la fig. 469 a la derecha: una vez construido el eje mayor de la elipse $a_1 a_2$ y trazada la perpendicular a este eje desde el centro de la elipse C_p , trazamos desde el extremo del eje mayor (por ejemplo, desde a_1) una recta paralela al eje x , al y o al z hasta su intersección con dicha perpendicular; el segmento $C_p b_1$ obtenido determina el semieje menor.

8. Proyección dimétrica. Puesto que el plano de proyección dimétrica forma un mismo ángulo solamente con dos planos de proyección H y W , entonces es necesario hallar el eje menor de la elipse para el caso cuando las circunferencias están situadas en planos paralelos a los planos de proyección H y W , y, a parte, para el caso en que la circunferencia está situada en un plano paralelo al plano V .

Empleando una construcción análoga a la indicada en la fig. 467, obtendremos en un caso (fig. 470) $C_p D_p \parallel$ al eje z , y en otro caso $C_p D_p \parallel$ al eje y y, por consiguiente, en el primer caso $C_p D_p = R$,

y en el segundo $C_p D_p = 0,5R$, donde R es el diámetro de la circunferencia representada en la proyección dimétrica (es necesario recordar que la proyección dimétrica se construye con los coeficientes de reducción 1 : 0,5 : 1).

De los triángulos rectángulos $C_p D_p K$ (fig. 470) se desprende que en el primer caso $C_p K$ (el semieje menor de la elipse) es igual a

$$\sqrt{(1,06R)^2 - R^2} \approx 0,35R,$$

y en el segundo caso es igual a

$$\sqrt{(1,06R)^2 - (0,5R)^2} \approx 0,94R.$$

Así pues, si las circunferencias de diámetro D están situadas en los planos horizontal y de perfil (o paralelos a éstos), entonces en la

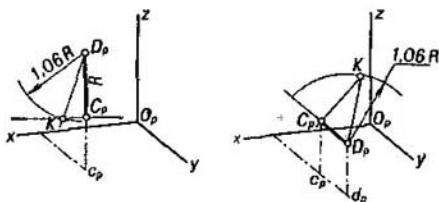


Fig. 470

proyección dimétrica el eje mayor de la elipse se obtiene igual a D , y el menor a $\frac{D}{3}$.

Si la circunferencia de diámetro D pertenece al plano frontal (o a un plano paralelo a éste), entonces en la proyección dimétrica de esta circunferencia los ejes de la elipse son iguales: el eje mayor a D , y el menor a $0,88D$.

Pero puesto que la proyección dimétrica se construye con los coeficientes de reducción redondeados, *los ejes de la elipse deben tomarse, para las circunferencias situadas en los planos horizontal y de perfil (o paralelos a estos planos), iguales a $1,06D$ y $0,35D$, y para la circunferencia perteneciente al plano frontal (o a un plano paralelo a éste) iguales a $1,06D$ y $0,94D$.*

En la fig. 471 se da la construcción de ocho puntos para cada elipse en la proyección dimétrica. En todos los casos el eje mayor $a_1 a_2 = 1,06D$, los diámetros $f_1 f_2 = e_1 e_2 = D$, el diámetro $d_1 d_2 = 0,5D$; en lo que se refiere al eje menor $b_1 b_2$ en dos posiciones es igual a $0,35D$, y en una (cuando es paralelo al eje y) es igual a $0,94D$.

Al contornear las elipses, lo mismo que en la proyección isométrica, se indican sólo las direcciones paralelas a los ejes (véase la fig. 471, a la derecha).

Para la elipse, cuyo eje menor es paralelo al eje y , se puede hallar el punto b_1 trazando desde el punto a_1 una recta paralela al eje x (si desde el punto a_1 se traza una recta paralela al eje z , entonces se obtiene el punto b_2).

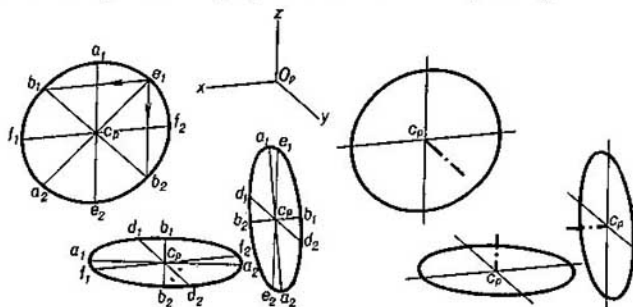


Fig. 471

9. En la pág. 351 se da otra deducción de los valores de los coeficientes para calcular la magnitud del eje menor de la elipse que representa una circunferencia dispuesta en el espacio en el plano de coordenadas xOy , xOz o bien en el yOz (o paralelamente a estos planos). En la fig. 472 están representados los planos de proyección axonométrica abatidos sobre el plano del dibujo, es decir, en posición frontal: 1) el plano de proyección isométrica, 2) el plano de proyección dimétrica (1 : 0,5 : 1), 3) lo mismo, pero con el eje y en posición vertical. En todos los casos se dan además las representaciones sobre un plano auxiliar de perfil, con la particularidad de que vienen representados los planos de proyección axonométrica (P'') y los ejes de coordenadas en su posición con relación al plano de proyección axonométrica para las proyecciones isométrica y dimétrica.

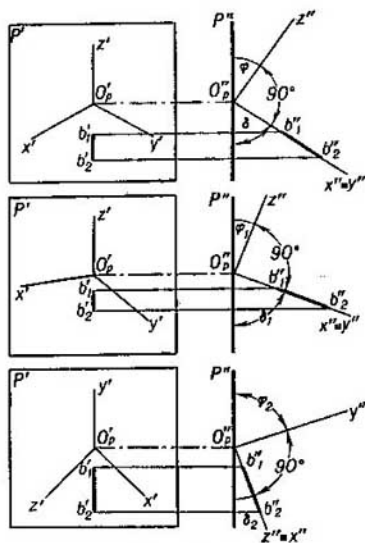


Fig. 472

Dado que en la proyección isométrica los ángulos formados por

los ejes de coordenadas Ox , Oy y Oz con el plano de proyección isométrica son iguales entre sí y el coeficiente de reducción es, en los tres casos, igual a $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ¹⁾, la construcción de la proyección $O_p z'$ se reduce a la construcción del ángulo φ según el valor de su coseno: $\cos \varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Puesto que el eje Oz se encuentra en el espacio sobre el plano de perfil, la proyección de perfil del plano de coordenadas xOy representará una línea recta que forma con $O_p z'$ un ángulo de 90° .

Ahora se puede pasar al cálculo del coeficiente para determinar la magnitud del eje menor de la elipse al construir la proyección isométrica de la circunferencia referida al plano de coordenadas xOy . De todos los diámetros de la circunferencia, el que más se reducirá será el que forma el ángulo δ con el plano de proyección isométrica. Supongamos que sea el diámetro con las proyecciones $b'_1 b'_2$ y $b''_1 b''_2$ y, además, $b''_1 b''_2$ es igual al diámetro de la circunferencia (teniendo en cuenta la escala del dibujo).

Puesto que $\delta + \varphi = 90^\circ$, entonces, $\cos \varphi = \sqrt{\frac{2}{3}} = \sin \delta$. Pero para hallar $b'_1 b'_2$ con ayuda de $b''_1 b''_2$ es necesario conocer

$$\cos \delta = \sqrt{1 - \sin^2 \delta} = \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0,58.$$

Así pues, en la proyección isométrica, para calcular la magnitud del eje menor de la elipse con auxilio del diámetro de la circunferencia, hay que tomar el coeficiente 0,58, y en el recuento al coeficiente de reducción, 0,7. Esto es justo para los tres casos: la circunferencia está situada en el espacio sobre el plano horizontal, sobre el frontal o bien sobre el de perfil.

Pasando, a continuación, a la proyección dimétrica (2ª y 3ª posiciones en la fig. 472), se debe prestar atención en que el plano de proyección dimétrica forma ángulos iguales sólo con dos ejes de coordenadas, con el Ox y el Oz . Por eso vienen dadas dos posiciones (la 2ª y la 3ª): en la primera, la circunferencia se considera en el plano xOy (esto se extiende también al caso de disposición de la circunferencia en el plano yOz), y en la segunda posición la circunferencia se considera situada en el plano xOz .

Guiándonos por los valores del $\cos \varphi$ en la 2ª posición: $\cos \varphi_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, y en la 3ª posición: $\cos \varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}$, obtendremos:

$$\cos \delta_1 = \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \sqrt{\frac{1}{9}} \approx 0,33$$

¹⁾ Todos los cálculos se dan con los coeficientes de reducción naturales, y no con los redondeados.

y

$$\cos \delta_s = \sqrt{1 - \frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3} \approx 0,88,$$

y en el recuento a los coeficientes de reducción $\approx 0,35$ y $\approx 0,94$.

§ 74. EJEMPLOS DE CONSTRUCCIONES EN LAS PROYECCIONES ISOMÉTRICA Y DIMÉTRICA

Más abajo se exponen algunos ejemplos de construcciones en las proyecciones rectangulares isométrica y dimétrica.

1. **Proyección de la esfera.** En la fig. 473, arriba, viene dada la representación de una esfera en las proyecciones isométrica y dimétrica.

En ambos casos la esfera se muestra con una octava parte cortada. Las circunferencias que representan el contorno de las proyecciones, se han descrito:

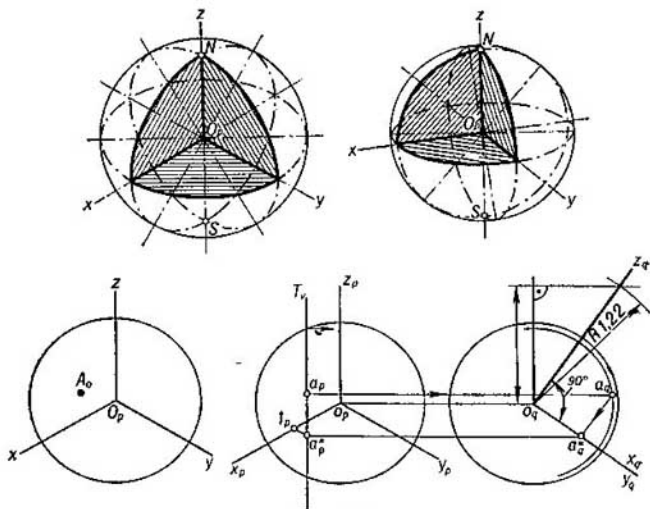


Fig. 473

para la proyección isométrica con un radio igual a $1,22R$, y para la proyección dimétrica, con un radio igual a $1,06R$, donde R es el radio de la esfera. En ambos casos las elipses corresponden a una sección ecuatorial y a dos secciones meridianales.

En la fig. 473, abajo y a la izquierda, viene dada la representación de la esfera en la proyección isométrica; en la parte vista de la esfera se da el punto A . A la derecha se muestra la construcción de la segunda proyección a_p^* (véase la fig. 449) y la quebrada de coordenadas de tres elementos $a_p a_p^* t_p O_p$, lo que da la

posibilidad de determinar las coordenadas rectangulares del punto A en el espacio. La construcción se ha efectuado suponiendo que el plano de proyección isométrica ocupa la posición frontal y que los ejes de coordenadas rectangulares x , y y z , que forman con dicho plano ángulos iguales entre sí, se han proyectado no sólo sobre este plano, sino también sobre el plano auxiliar de perfil Q . Se

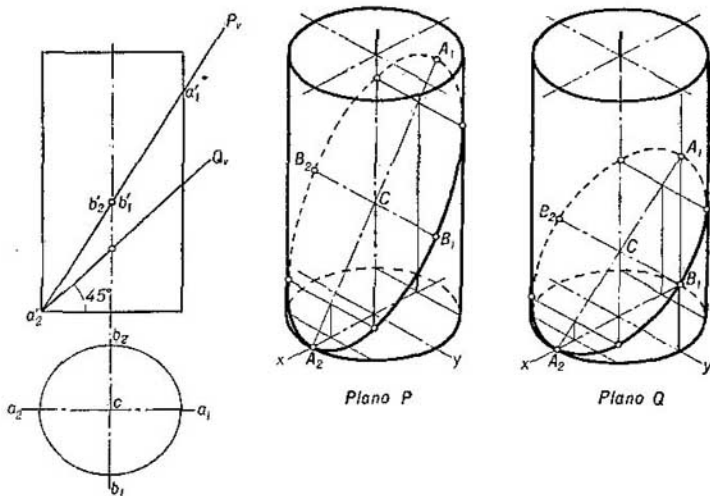


Fig. 474

obtiene el sistema de planos de proyección P , Q y las proyecciones a_p y a_q del punto dado A , con la particularidad de que la proyección a_q se ha obtenido con auxilio del corte de la esfera con el plano T . La segunda proyección del punto A también viene representada por dos proyecciones: a_p y a_q .

2. Líneas de intersección de un cilindro y un cono por un plano. En las figs. 474 y 475 se muestra la construcción, en la proyección isométrica, de las líneas de intersección de un cilindro y un cono con planos proyectantes frontales¹⁾. En los casos que se examinan las líneas de intersección son elipses.

Ante todo, guiándonos por el dibujo, trazamos con ayuda de las coordenadas de los puntos A_1 y A_2 las líneas de inclinación de los planos P y Q . Para construir los puntos de las elipses tomamos planos secantes auxiliares: para el cilindro, paralelamente a sus generatrices y al plano yOz , y para el cono, planos que pasan por su vértice paralelamente al eje y . Estos planos vienen dados por sus trazas, paralelas al eje y , sobre los planos de las bases del cilindro y el cono.

Con tal elección de los planos auxiliares, las rectas según las cuales se cortan con los planos P y Q son paralelas al eje y . En la intersección de estas rectas con las generatrices del cilindro y el cono se obtienen los puntos de la elipse.

¹⁾ La construcción se ha efectuado empleando los coeficientes de reducción redondeados.

En primer lugar se deben hallar tales puntos característicos como los señalados en los dibujos con las letras A_1, A_2, B_1 y B_2 , y también los obtenidos en las líneas de contorno en la proyección isométrica. El semieje menor de la elipse que se obtiene en la sección, igual a cb_1 , conserva su magnitud también en la proyección isométrica ($cb_1 = CB_1$). Pero en la proyección isométrica, el segmento

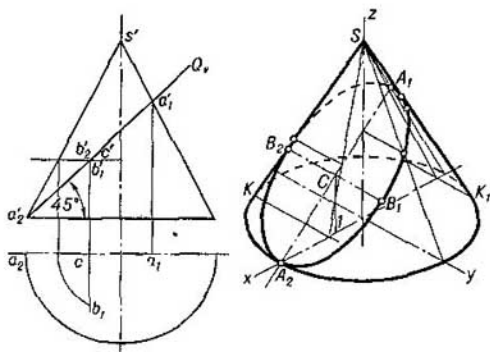


Fig. 475

B_1B_2 , conserva su magnitud de eje menor de la elipse solamente en el plano Q , es decir, cuando el ángulo de inclinación de este plano es igual al ángulo de 45° indicado en el dibujo.

Efectivamente, en este caso el segmento B_1B_2 , siendo paralelo al eje y , conserva también en la proyección isométrica su posición perpendicular a A_1A_2 ; por consiguiente, los segmentos A_1A_2 y B_1B_2 conservan su valor de ejes de la elipse. En el caso de otra inclinación del plano, como se muestra en el cilindro para el plano P , los segmentos A_1A_2 y B_1B_2 en la proyección isométrica ya no son los ejes de la elipse, sino sólo sus diámetros conjugados.

3. Construcción de los segmentos coordenados para el punto dado en la superficie de un cilindro y un cono de revolución en la proyección axonométrica. En la fig. 476 se dan ejemplos para el cono y el cilindro en la proyección isométrica. En todos los casos el origen de coordenadas se ha tomado en el centro de la base (en el punto O).

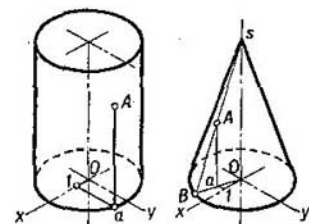


Fig. 476

Por el punto A dado en el cilindro se ha trazado una recta paralela al eje z , y desde la segunda proyección a se ha trazado una recta paralela al eje y hasta su intersección con el eje x . Los segmentos OI, Ia y aA permiten determinar las coordenadas del punto A en el sistema dado de ejes de coordenadas.

Por el punto A dado en el cono se ha trazado una generatriz y se ha construido la segunda proyección (OB) de esta generatriz. Trazando desde el punto A

una perpendicular hasta su intersección con OB obtenemos la segunda proyección del punto A . Lo demás está claro del dibujo.

En la fig. 477 se muestra la construcción de los segmentos coordenados para un punto dado en la superficie de un cono truncado de revolución en la proyección isométrica (fig. 477, a). Supongamos que nos es conocida la sección producida en el cono por un plano que pasa por el eje del cono y el punto B (fig. 477, b). En el trapecio obtenido se ha trazado la recta $SA \parallel CD$ y la recta BO que corta a SA en el punto K . Obtenemos que $OK : KB = OA : AD$. Pero esta proporción se conservará también en la proyección isométrica. Construyamos el cono con el

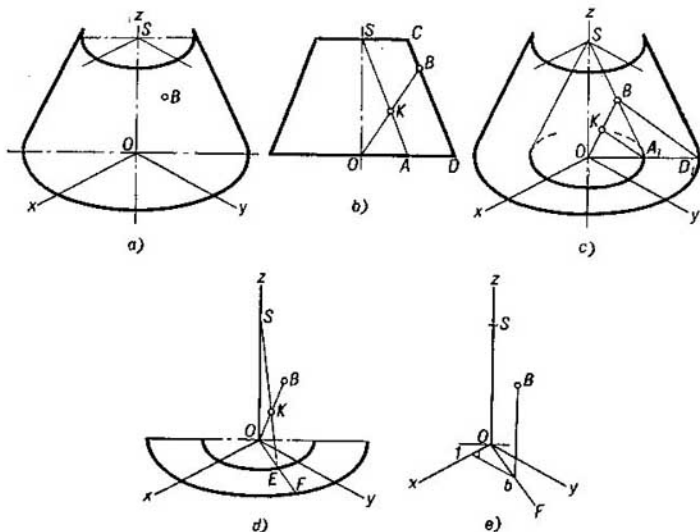


Fig. 477

vértice en el punto S y la generatriz paralela a la generatriz del cono truncado (fig. 477, c). La relación $OA_1 : A_1D_1$ es idéntica a la relación $OA : AD$ contenida en la proporción indicada más arriba. Ahora se puede obtener el punto K sobre OB en la fig. 477, c. La generatriz trazada por los puntos S y E determina el punto K (fig. 477, d) y la proyección OF de la generatriz a la cual pertenece el punto B . De aquí obtenemos la posibilidad de determinar la segunda proyección b (fig. 477, e) y los segmentos coordenados Bb , bi y Oi que determinan las coordenadas z , y y x .

La construcción indicada se da para el caso, cuando el cono no puede ser construido hasta un cono completo. Si éste se puede construir, entonces la construcción se realiza como se muestra para el cono en la fig. 477, b.

4. Ejemplos de construcción de las líneas de intersección de superficies de revolución cilíndrica y cónica entre sí. Las líneas de intersección se construyen con auxilio de puntos; estos puntos se hallan o bien valiéndose de sus coor-

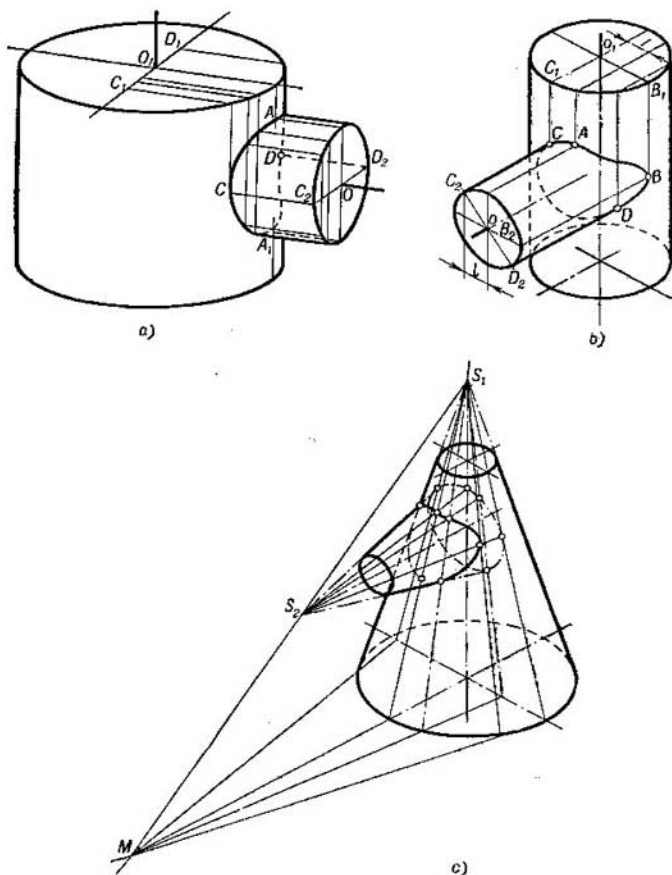


Fig. 478

denadas, tomadas de las proyecciones ortogonales, o bien haciendo uso del método de planos secantes auxiliares directamente en las proyecciones axonométricas. El último caso se muestra en la fig. 478, a—d.

Los planos secantes auxiliares cortan a los cilindros y conos dados según líneas generatrices. En la fig. 478, a los ejes de los cilindros se cortan, y en la

fig. b) se cruzan. Si en la fig. 478, *a* los puntos *A* y *A*₁ fueron hallados con ayuda de un plano secante que pasa por los ejes de ambos cilindros, en la fig. 478, *b* hay que tener en cuenta el desplazamiento a la magnitud *l*¹⁾. En la fig. 478, *c* los planos secantes pasan por la recta *S*₁*S*₂, y sus trazas sobre el plano de la base del cono con el vértice *S*₁ pasan por la traza de la recta *S*₁*S*₂ sobre este plano. En la fig. 478, *d* los planos pasan por la recta *MN* trazada por el vértice del cono (el punto *S*) paralelamente a la generatriz del cilindro.

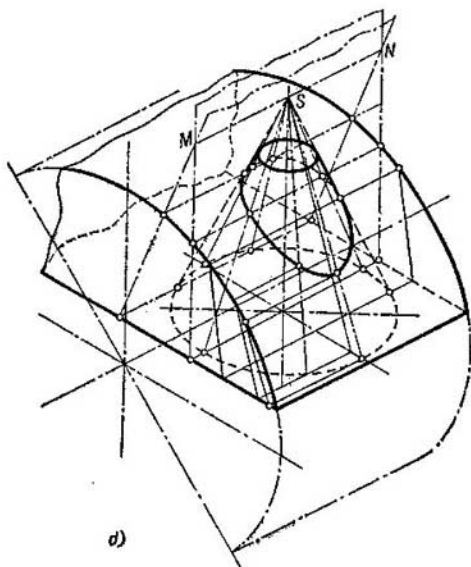


Fig. 478

5. Construcción de los puntos de tangencia de una circunferencia (el contorno de la proyección de una esfera) y una elipse (la proyección de la circunferencia obtenida en la esfera al cortar a ésta con un plano). En la fig. 479, *a* se muestra una esfera cortada por tres planos proyectantes: de perfil (*T*), horizontal (*Q*) y frontal (*S*). Guiándonos por este dibujo se ha construido la proyección isométrica (fig. 479, *b*) empleando los coeficientes de reducción redondeados. La elipse *E*₁ se ha construido como se mostró en la fig. 469, y la *E*₂, como en la fig. 465. La proyección de la esfera se da por su contorno (una circunferencia de radio igual a $1,22R$). Esta circunferencia hace contacto con la elipse *E*₁ en el punto *K*, y con la elipse *E*₂, en el punto *L*.

Examinemos cómo se ha hallado el punto *K*. Este punto se ha obtenido en la circunferencia (en el contorno de la proyección de la esfera), es decir, en el plano de proyección isométrica (*P*) y al mismo tiempo en la elipse *E*₁, es decir, en el

¹⁾ La marcación de los puntos con letras se ha realizado solamente para las aclaraciones.

plano T que corta a la esfera. Pero si este punto pertenece simultáneamente a dos planos, entonces pertenece a la línea de intersección de estos planos.

El plano de proyección isométrica, como es conocido, forma ángulos iguales con los planos V , H y W . El triángulo de trazas de este plano es equilátero (véase la fig. 457). Refiriendo el plano P al punto O_p , o sea, al origen de los ejes y al centro de la esfera, obtenemos la posición de las trazas indicada en la fig. 479, *c*.

El plano T en el sistema de los mismos ejes se representará por sus trazas, así como se muestra en la fig. 479, *d*. Hagamos coincidir las figs. 479, *c* y 479, *d* y construyamos la línea de intersección de los planos P y T (fig. 479, *e*): la recta MN pasa por el punto M de intersección de las trazas horizontales paralelamente a la traza P_w , puesto que $T \parallel W$ (en este caso $P_w \perp O_p x$, por consiguiente, $MN \perp O_p x$).

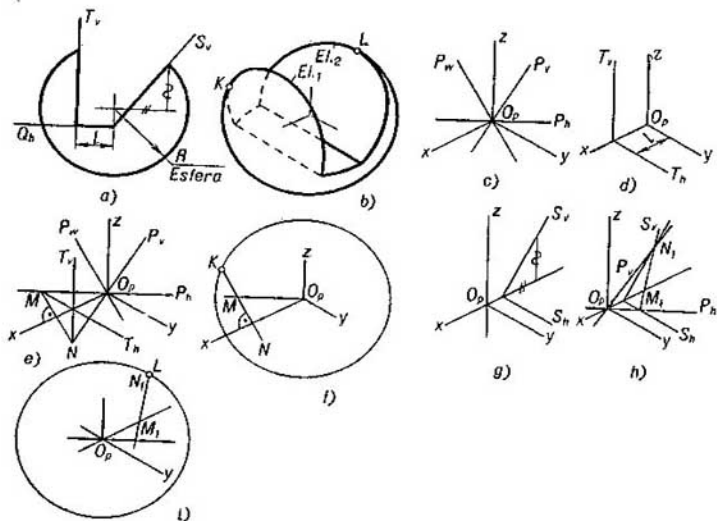


Fig. 479

Ahora queda hallar el punto K en la intersección de la recta MN con la circunferencia que representa la proyección isométrica de la esfera (fig. 479, *f*).

Para determinar la posición del punto L (véase la fig. 479, *b*) hay que representar el plano proyectante frontal S en el sistema de ejes axonométricos (fig. 479, *g*), y luego hallar la recta de intersección de los planos P y S (fig. 479, *h*): esta recta pasa por el punto M_1 de intersección de las trazas S_h y P_h y por el punto N_1 de intersección de las trazas S_v y P_v . El punto buscado L se obtiene en la intersección de la recta $M_1 N_1$ con la circunferencia que representa la proyección isométrica de la esfera (fig. 479, *i*).

§ 75. ALGUNAS PROYECCIONES AXONOMÉTRICAS OBLICUAS

Entre las proyecciones axonométricas *oblicuas* detengámonos, ante todo, en la proyección frecuentemente aplicada, obtenida sobre un plano paralelo al plano V . Si el plano de proyección axonométrica P es paralelo al plano V , la dirección de proyección no debe elegirse paralela al plano W , puesto que las proyecciones de los ejes de coordenadas ocuparán una posición, en la cual la representación axonométrica resulta poco intuitiva. La dirección de proyección debe elegirse de tal manera que las proyecciones de los ejes de coordenadas sobre el plano P se dispongan tal como se muestra en la fig. 480.

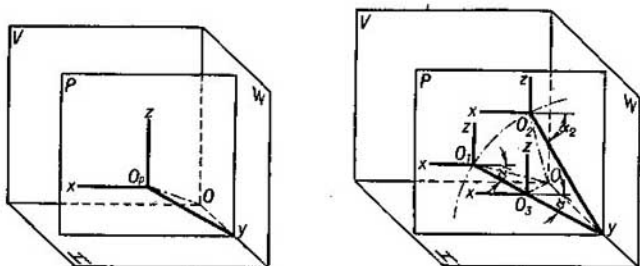


Fig. 480

En este caso, los segmentos en los ejes x y z se proyectan en verdadera magnitud, lo mismo que el propio ángulo xO_pz ; de este modo, los coeficientes de reducción de los ejes O_px y O_pz en el plano P son iguales a la unidad. En lo que se refiere al eje y , el coeficiente de reducción correspondiente a este eje puede tener diferentes valores, incluyendo la unidad; en el último caso tendremos una *proyección isométrica oblicua*. Si el coeficiente de reducción del eje O_py no es igual a la unidad, entonces la proyección axonométrica oblicua sobre el plano P será *dimétrica*.

El segmento OO_p paralelo a la dirección de proyección, y los segmentos Oy y O_1y determinan al triángulo rectángulo OyO_1 (el ángulo OyO_1 es recto). En efecto, el segmento Oy es perpendicular al plano V , y puesto que el plano P es paralelo al plano V , por lo tanto, el plano P es perpendicular a Oy . Girando el triángulo OyO_1 alrededor del cateto Oy , se pueden obtener distintas posiciones del punto O_1 en el plano P , con la particularidad de que en todas sus posiciones el punto O_1 se encuentra a una misma distancia del eje y : el lugar geométrico de las posiciones del punto O_1 será una circunferencia descrita desde el punto y con el radio yO_1 . En la fig. 480 a la derecha se dan dos de estas posiciones: O_1 y O_2 ; cada uno de los puntos O_1 y O_2 sirve de origen de los ejes, de los cuales los ejes x y z conservan su dirección, y el eje y cambia de dirección: esto se expresa

por la variación del ángulo α entre los ejes axonométricos x e y . En este caso varía la dirección de proyección (véase en la fig. 480 la dirección de los segmentos OO_1 y OO_2). El ángulo α puede ser elegido arbitrariamente.

Por otra parte, si se toma sobre el plano P el origen de los ejes en el punto O_3 sobre el segmento yO_1 , es decir, se toma la dirección de proyección paralelamente a la dirección del segmento OO_3 , entonces la magnitud del ángulo α_1 permanece invariable, mientras que O_3y/Oy no es igual a la relación O_1y/Oy ; esta relación es el coeficiente de reducción del eje y . Por consiguiente, se puede elegir arbitrariamente tanto la magnitud del coeficiente de reducción del eje y , como la magnitud del ángulo α , con el fin de obtener la representación más clara y expresiva.

A la proyección axonométrica oblicua sobre un plano paralelo al plano V , examinada por nosotros, se le llama «proyección frontal» y también «proyección caballera» y «perspectiva caballera». Frecuentemente se emplea el caso de proyección frontal cuando el coeficiente de reducción del eje y se ha elegido igual a 0,5 y el ángulo α se ha tomado igual a 45° ; a esta proyección se le suele llamar «proyección de gabinete»¹⁾.

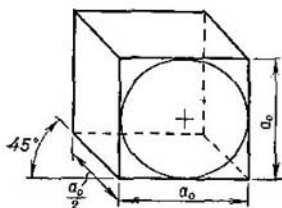


Fig. 481

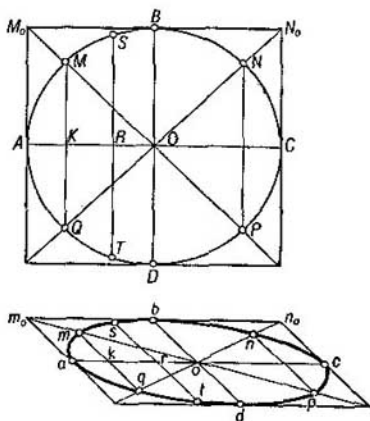


Fig. 482

En la fig. 481 viene dada la representación de un cubo en la proyección de gabinete. La cara anterior repite la proyección sobre el plano V . Por eso, la circunferencia inscrita en esta cara, en la proyección de gabinete es también una circunferencia. De aquí se puede hacer la conclusión de que la proyección de gabinete, que es un método sencillo e intuitivo de representación de cuerpos con configuración rectilínea, es cómoda también para los casos en que hay que operar con circunferencias situadas sobre planos paralelos al plano de proyección axonométrica, es decir, paralelos al plano V .

¹⁾ De la palabra inglesa *Cabinet projection*.

Si hay que representar en la proyección de gabinete una circunferencia situada en un plano paralelo al plano de proyección H y al plano de proyección W , entonces esta circunferencia se inscribe en un cuadrado, se construye un paralelogramo, que es la proyección de gabinete de este cuadrado, luego se fijan en la circunferencia una serie de puntos y se construyen sus proyecciones. Estas estarán situadas sobre la elipse, que representa la proyección de la circunferencia.

En la fig. 482 se muestra la construcción de los puntos de la elipse, que representa la proyección de la circunferencia situada en un plano paralelo al plano H .

Primeramente, la circunferencia se inscribe en un cuadrado y se construye la proyección de este cuadrado. El diámetro AC conserva su magnitud y dirección (obtenemos los puntos a y c); el diámetro BD , perpendicular a AC , ocupará la posición bajo un ángulo de 45° a ac y se reducirá dos veces (los puntos b y d). Las cuerdas MQ y NP , obtenidas al trazar las diagonales del cuadrado, dan cuatro puntos más (m, q, n, p), con la particularidad de que

$$mq = \frac{MQ}{2}, \quad np = \frac{NP}{2}, \quad ok = OK.$$

Luego se ha tomado el segmento arbitrario OR y se ha trazado en la dirección de oa ; por el punto r se ha trazado el segmento st paralelo

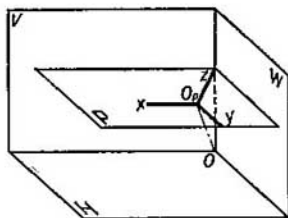
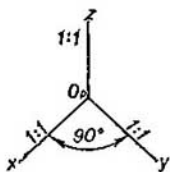


Fig. 483

a bd e igual a $ST : 2$. Si obtienen dos puntos más (s y t), pertenecientes a la elipse buscada. Procediendo análogamente, se puede hallar una serie de puntos, por los cuales pasa la elipse.

La construcción de la proyección de la circunferencia situada sobre un plano paralelo al plano W es análoga a la examinada.

Señalemos también el caso de proyección axonométrica oblicua, cuando el plano de proyección axonométrica es paralelo al plano H (fig. 483). Para tal disposición del plano P , el ángulo $xO_p y = 90^\circ$. En lo que se refiere al eje z , obtenido sobre el plano P , el coeficiente de reducción correspondiente a este eje se expresa por la relación $O_p z : Oz$ (los segmentos $O_p z$ y Oz representan los catetos del triángulo rectángulo OzO_p con el ángulo recto en el punto z). En los casos en que

se emplea esta proyección axonométrica oblicua, la dirección de proyección se toma bajo un ángulo de 45° al plano P (o al plano H). En este caso el segmento $O_p z$ es igual al segmento Oz , es decir, el coeficiente de reducción del eje z se obtiene igual a la unidad y la proyección resulta isométrica.

PREGUNTAS AL CAPÍTULO XII

1. ¿En qué consiste el método de proyección axonométrica?
2. ¿A qué se le llama coeficientes de reducción?
3. ¿A qué se le llama segunda proyección de un punto?
4. ¿Cómo se realiza el paso de las coordenadas rectangulares a las axonométricas?
5. ¿En qué consiste el «teorema principal de la axonometría»?
6. ¿En cuáles casos la proyección axonométrica se llama: a) isométrica, b) dimétrica, c) trimétrica?
7. ¿Cuál es la diferencia entre las proyecciones axonométricas oblicua y rectangular?
8. ¿Cuál línea es la configuración de la proyección axonométrica de una esfera: a) oblicua, b) rectangular?
9. ¿A qué es igual la suma de los cuadrados de los coeficientes de reducción para la proyección axonométrica rectangular?
10. ¿A qué son iguales los coeficientes de reducción para la proyección rectangular: a) isométrica, b) dimétrica (con la relación de los coeficientes $1 : 0,5 : 1$; y cuáles son estos coeficientes en forma redondeada (hasta la unidad)?
11. ¿A qué se le llama «triángulo de las trazas» y cuáles deducciones se pueden sacar de él en las proyecciones axonométricas rectangulares?
12. ¿Cómo se construyen los ejes en las proyecciones rectangulares: a) isométrica, b) dimétrica ($1 : 0,5 : 1$)?
13. ¿Cómo se determina la dirección y la magnitud del eje menor de la elipse, que es la proyección isométrica o dimétrica de la circunferencia situada en: a) un plano de posición general, b) planos proyectantes frontal y horizontal, c) planos frontal, horizontal y de perfil?
14. ¿En cuáles casos la proyección axonométrica rectangular de la circunferencia puede ser el segmento de una recta o una circunferencia?
15. ¿Cómo determinar las coordenadas de los puntos dados en la proyección axonométrica rectangular sobre la superficie: a) de una esfera, b) de un cilindro de revolución, c) de un cono de revolución?
16. ¿A cuál proyección axonométrica oblicua se le llama: a) frontal o caballera, b) de gabinete?

APÉNDICE

§ 76. SOBRE LA CORRESPONDENCIA AFÍN Y SU APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DE CIERTOS PROBLEMAS

Examinemos la *correspondencia afín* de las figuras situadas sobre dos planos que se cortan o sobre un plano en el sistema de proyección paralela.

En la fig. 484 los puntos A_1 y B_1 del plano T se han proyectado paralelamente en dirección dada por la flecha, sobre el plano P . Las rectas proyectantes A_1A_2 y B_1B_2 determinan al plano proyectante que corta a los planos T y P según las rectas CB_1 y CB_2 , convergentes en el punto C de la recta MN .

Si se toma en el plano T cierta recta A_1B_1 , la proyección de esta recta sobre el plano P , en su prolongación se encontrará en la línea de intersección de los planos T y P con la propia recta A_1B_1 .

La proyección paralela de los puntos del plano T sobre el plano P establece entre estos planos cierta correspondencia: al punto A_1 en el plano T le corresponde el punto A_2 en el plano P , al punto B_1 , el punto B_2 , etc. Esta correspondencia posee las propiedades principales siguientes:

1) a cada punto de un plano le corresponde un punto único en el otro plano (la correspondencia es biunívoca);

2) si sobre una recta, perteneciente a uno de los planos, se ha establecido la existencia de dos puntos correspondientes a los puntos de la recta situada sobre el otro plano, entonces estas rectas corresponden una a la otra, con la particularidad de que a cada punto de una de estas rectas le corresponde un punto determinado de la otra recta;

3) la recta perteneciente a uno de los planos se corta con la recta correspondiente, perteneciente al otro plano, en un punto situado sobre la línea de intersección de ambos planos¹⁾.

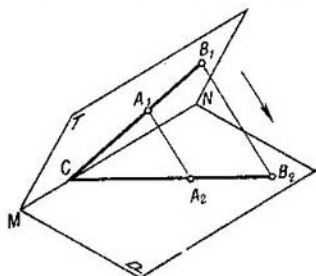


Fig. 484

¹⁾ Si estas rectas son paralelas a la línea de intersección de los planos, el punto de intersección de las rectas es un punto infinitamente alejado.

- 4) la recta según la cual se cortan ambos planos, corresponde a sí misma;
 5) si las rectas de un plano son paralelas entre sí, entonces las rectas correspondientes del otro plano también serán paralelas entre sí;
 6) la relación de dos segmentos situados en uno de los planos y pertenecientes a una misma recta o a rectas paralelas entre sí, es igual a la relación de los segmentos correspondientes del otro plano.

La correspondencia examinada entre dos planos, que posee las propiedades enumeradas, se llama *correspondencia afin* o, abreviadamente, *afinidad*. En la fig. 484, los puntos A_2 y B_2 son afines a los puntos A_1 y B_1 ; la recta A_2B_2 es afin a la recta A_1B_1 .

Si se toma en el plano T una figura cualquiera y en el plano P se examinan los puntos afines a todos los puntos de esta figura, entonces el conjunto de los últimos da en el plano P una figura afin a la figura tomada sobre el plano T .

La recta MN de intersección de los planos se llama *eje de afinidad*.

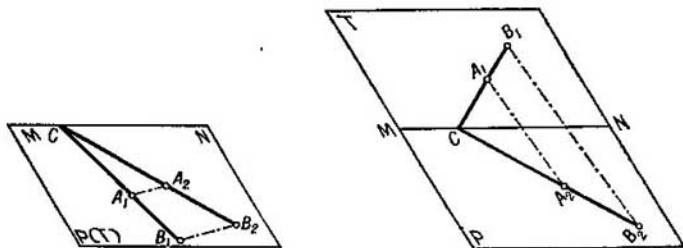


Fig. 485

En la fig. 485 a la izquierda, los mismos planos se dan en posición abatida: el plano T , girándolo alrededor de la recta MN se ha abatido sobre el plano P .

Si se toma el sentido inverso de giro, obtendremos la disposición de los planos abatidos, mostrada en la fig. 485 a la derecha.

Si entre los planos T y P en el espacio fue establecida la correspondencia afin, entonces también después de abatir estos planos (fig. 485) entre los puntos, rectas y figuras pertenecientes a estos planos tendrá efecto la correspondencia afin, cuyas propiedades coincidirán con las propiedades de afinidad establecidas en la proyección paralela. En efecto, en ambos casos a una línea recta le corresponde una recta, a un punto de una de las rectas le corresponde un punto determinado de la otra recta, la relación $\frac{CA_1}{A_1B_1}$ se conserva igual a la relación $\frac{CA_2}{A_2B_2}$

y el paralelismo de las rectas proyectantes A_1A_2 y B_1B_2 (fig. 484) se convierte en paralelismo de las rectas A_1A_2 y B_1B_2 en la fig. 485 al abatir los planos.

Ahora bien, independientemente de si examinamos rectas afines en el espacio o en planos abatidos, las rectas afines se cortan en el eje de afinidad y los puntos, correspondientes uno a otro, están situados en rectas paralelas entre sí.

La dirección de la recta A_1A_2 ahora ya no es la dirección de proyección (como en la fig. 484); a esta dirección la llamaremos *dirección de afinidad*.

Si en el dibujo de dos planos abatidos vienen dados el eje de afinidad y dos puntos, afines uno al otro, entonces para cada punto cualquiera de la afinidad dada se puede hallar su punto afin. Supongamos (fig. 486) que la recta MN es el eje de afinidad, los puntos A_1 y A_2 son puntos afines y, por consiguiente, A_1A_2 es la dirección de afinidad. Hay que hallar el punto afin para el punto B_2 . Trazamos la recta B_2A_2 hasta su intersección con MN : por los puntos C y A_1

trazamos una recta, sobre la cual hallamos el punto B_1 afín al punto B_2 , trazando la recta B_2B_1 paralelamente a A_2A_1 .

Sabiendo construir los puntos afines, se puede construir una figura afín a cualquier figura dada.

Si la figura dada es un polígono, entonces su figura afín será también un polígono con la misma cantidad de lados, y para su construcción basta hallar los puntos, afines a los vértices, y unirlos con segmentos rectilíneos. Si la figura dada es curvilínea, entonces la construcción de su figura afín se efectúa con ayuda de varios puntos de la misma; por los puntos obtenidos se traza una curva.

Al examinar una figura, afín a la figura dada, observamos que la magnitud de los ángulos no se conserva en general (véase, por ejemplo, la fig. 491: los ángulos del cuadrilátero $abcd$ no son iguales a los ángulos homólogos en el cuadrilátero afín $A_0B_0C_0D_0$).

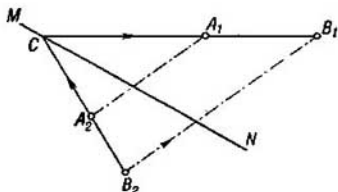


Fig. 486

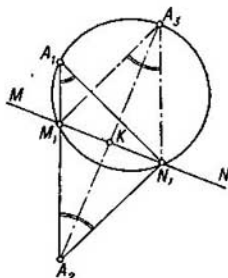


Fig. 487

No obstante, siendo dado el eje de afinidad MN (fig. 487), al par de puntos afines A_1 y A_2 y al par de rectas afines A_1M_1 y A_2M_1 , que pasan por estos puntos, se puede construir otro par más de rectas afines A_1N_1 y A_2N_1 de tal modo que el ángulo $M_1A_1N_1$ sea igual al ángulo $M_1A_2N_1$. Desde el punto A_2 se ha levantado una perpendicular a la recta MN y se ha construido el punto A_3 de modo tal, que $A_2K=KA_3$. Por los puntos A_1 , A_3 y M_1 se ha trazado una circunferencia que corta a la recta MN también en el punto N_1 . Lo demás está claro del dibujo.

En la correspondencia afín de dos planos, dados por el eje y dos puntos afines A_1 y A_2 , se pueden construir dos direcciones perpendiculares entre sí de uno de los planos, que corresponden a dos direcciones perpendiculares entre sí del otro plano. Tales direcciones se llaman principales en la correspondencia afín dada. La construcción se muestra en la fig. 488. El segmento A_1A_2 se ha dividido por la mitad en el punto K y por este punto se ha trazado la perpendicular a A_1A_2 hasta su intersección con MN en el punto C . Desde el punto C se ha descrito una circunferencia por los puntos A_1 y A_2 . Se han obtenido dos pares de rectas afines: A_1M y A_2M , A_1N y A_2N . Los ángulos MA_1N y MA_2N son rectos.

La figura afín a la circunferencia será en general una elipse, con la particularidad de que los diámetros perpendiculares entre sí de la circunferencia pasan a ser los diámetros conjugados de la elipse.

En la fig. 489 vienen representados el eje de afinidad MN y dos puntos afines C_1 y C_2 , siendo el punto C_1 el centro de la circunferencia dada. La dirección de afinidad C_1C_2 es perpendicular al eje. Se ha construido la figura afín a la circunferencia: la elipse con centro C_2 . Los semiejes de la elipse A_2C_2 y B_2C_2 so

han obtenido como rectas afines a dos radios perpendiculares entre sí A_1C_1 y B_1C_1 . En el caso dado, el ángulo recto A_2C_2K , afín al ángulo recto A_1C_1K , se ha obtenido trazando la recta $A_2C_2 \parallel MN$, puesto que $C_1A_1 \parallel MN$.

En la fig. 490 se muestra la construcción de los semejes A_2C_2 y B_2C_2 de la elipse afín a la circunferencia de centro C_1 , cuando la dirección de afinidad

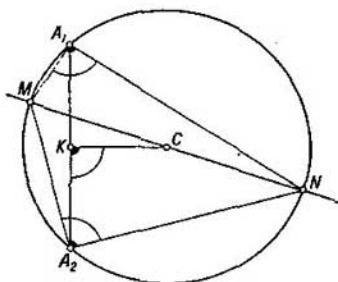


Fig. 488

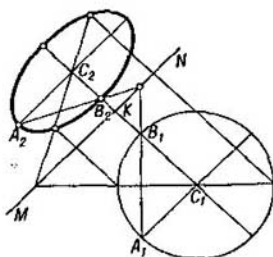


Fig. 489

C_1C_2 no es perpendicular al eje de afinidad. Se ha empleado una construcción auxiliar, como la de la fig. 488, para determinar las direcciones principales MC_1 y NC_1 , MC_2 y NC_2 , que definen la dirección de los diámetros perpendiculares entre sí de la circunferencia, que se transforman en ejes de la elipse (en la fig. 490 se muestra la construcción de los semejes A_2C_2 y B_2C_2 solamente).

Si se toma cierto plano de posición general en el sistema de planos V , H y W , entonces, entre el plano P y cada uno de los planos de proyección tiene efecto la correspondencia afín mencionada más arriba, puesto que la proyección ortogonal es un caso particular de la proyección paralela general. Las trazas del plano P serán los ejes de afinidad: la traza P_h , para los planos P y H , la traza P_v , para los planos P y V , y la traza P_w , para los planos P y W . La recta situada sobre el plano P , y cada una de sus proyecciones, se cortan en las trazas correspondientes del plano, es decir, en los ejes de afinidad.

En la fig. 491 se da la construcción del cuadrilátero $A_0B_0C_0D_0$ (su vista natural) como figura afín a la proyec-

ción $abcd$. La traza P_h del plano proyectante frontal en el que se encuentra el cuadrilátero dado, sirve de eje de afinidad; la dirección de afinidad es perpendicular a P_h . Hallamos por el método corriente (por el método de abatimiento) el punto C_0 , afín al punto c , y luego construimos los puntos A_0 , B_0 y D_0 por el esquema indicado en la fig. 486.

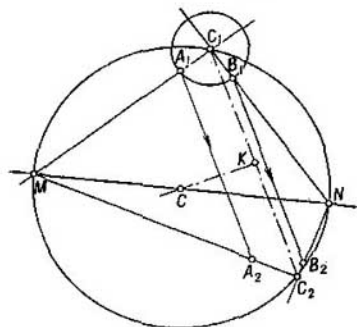


Fig. 490

La fig. 492 muestra que entre las proyecciones horizontal y frontal de toda figura plana (en el caso dado un triángulo) existe correspondencia afín.

Primero señalamos que las rectas que unen los puntos a y a' , b y b' , c y c' , son paralelas entre sí. A continuación, debe establecerse que dos rectas cualesquiera, correspondientes una a la otra, se cortan en una misma recta. Prolonguemos las rectas ab y $a'b'$ hasta su intersección. El punto m_2 representa simultáneamente las proyecciones horizontal y frontal de un punto perteneciente a la

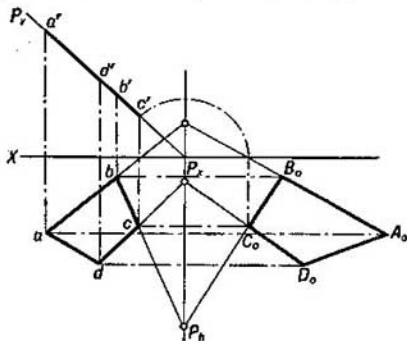


Fig. 491

recta AB en el espacio. La coincidencia de las proyecciones demuestra que este punto se encuentra a iguales distancias de los planos H y V .

Lo mismo se puede decir respecto a los puntos m_1 y m_3 . La equidistancia de los puntos de los planos H y V permite deducir que estos puntos, perteneciendo

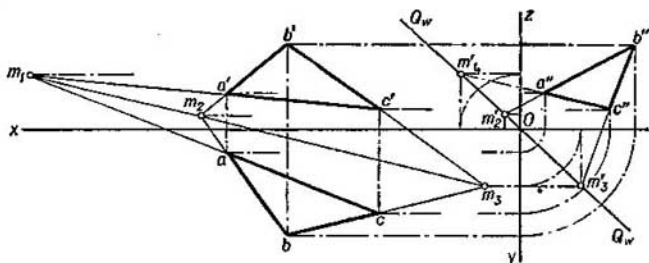


Fig. 492

al plano del triángulo ABC , se encuentran al mismo tiempo en el plano que divide al segundo y cuarto diedros (cuadrantes) del espacio por la mitad.

En la fig. 492 este plano viene expresado por su traza Q_w . Puesto que los puntos examinados deben pertenecer simultáneamente a dos planos (al plano Q y al plano del triángulo ABC), entonces, es obvio que deberán estar situados sobre la línea de intersección del plano del triángulo ABC y el plano Q . Esta recta,

encontrándose en el plano que divide al segundo y cuarto diedros (cuadrantes) del espacio por la mitad, se representará en los planos H y V por una misma recta (las proyecciones horizontal y frontal coinciden), y, por consiguiente, los puntos m_1 , m_2 y m_3 están situados sobre una misma recta, que sirve de eje de afinidad. Las proyecciones de toda recta situada en el plano del triángulo ABC , se cortan en el eje de afinidad hallado¹⁾.

Ahora bien, las proyecciones abc y $a'b'c'$ son afines; la dirección de afinidad es perpendicular al eje x , el eje de afinidad se dispone, en general, bajo cierto ángulo al eje x . En el caso, cuando el plano de la figura dada pasa por el eje x , el eje de afinidad de las proyecciones horizontal y frontal coincide con el eje x .

Para las proyecciones horizontales y frontales de todas las figuras coplanares, se obtiene un eje de afinidad común; en efecto, este eje representa las proyecciones confundidas horizontal y frontal de la línea de intersección de cierto plano con el plano permanente Q (fig. 492).

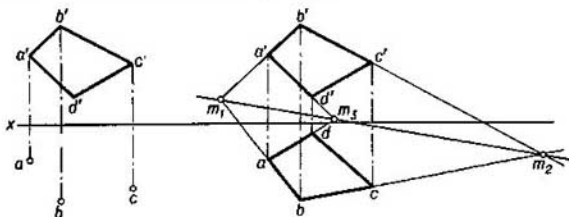


Fig. 493

En la fig. 493 la correspondencia afín se ha empleado para construir la proyección horizontal del cuadrilátero, si se conoce su proyección frontal $a'b'c'd'$ y las proyecciones horizontales de tres de sus vértices (los puntos a , b y c).

En primer lugar se han hallado los puntos m_1 y m_2 y con ello se ha determinado el eje de afinidad. Luego la recta $a'd'$ se ha prolongado hasta su intersección con el eje de afinidad, y el punto obtenido m_3 se ha unido con una recta con el punto a .

El punto buscado d se obtendrá en la intersección de la recta am_3 con la línea de referencia $d'd$. Queda unir entre sí con rectas los puntos a y d , y los puntos c y d .

En la fig. 494 a la izquierda, la correspondencia afín se ha empleado para hallar las proyecciones del punto de intersección de la recta EF con el plano dado por dos rectas paralelas AB y CD .

El problema se reduce a la determinación en las rectas ef y $e'f'$ los puntos afines unos a los otros en la correspondencia afín dada. Esta correspondencia queda determinada por dos puntos afines cualesquiera (en la fig. 494 se han tomado los puntos g y g') y el eje de afinidad, trazado por los puntos m_1 y m_2 , hallados en la intersección de las rectas ab y $a'b'$, cd y $c'd'$. Si, a continuación, se construye una recta afín a la recta $e'f'$, entonces, con ello nosotros trazamos en el plano, dado por las rectas AB y CD , una nueva recta que se encuentra al mismo tiempo en un mismo plano con la recta dada EF (la proyección frontal común $e'f'$).

La construcción de la recta afín a la recta $e'f'$ se ha cumplido de la manera siguiente: valiéndonos de los puntos afines g y g' y del punto t' elegido arbitra-

¹⁾ Si la recta está situada en el plano del triángulo ABC y es paralela al eje de afinidad, entonces ella se corta con el eje de afinidad en el infinito; sus dos proyecciones son paralelas al eje de afinidad.

riamente sobre la recta $e'f'$, construimos el punto t afín al punto t' ; si, luego, se halla el punto m_3 y se traza por él y por el punto t una recta, entonces se determinará una recta afín a la recta $e'f'$. Queda señalar el punto k en el que se cortan las rectas im_3 y ef . Este punto k es la proyección horizontal del punto de intersección buscado.

En la fig. 494 a la derecha se muestra la resolución de este problema, pero, empleando el procedimiento expuesto en el § 25; por la recta EF se ha trazado el plano S , se ha construido la recta con las proyecciones $1'2'$ y $1-2$, según la cual el plano S corta al plano dado, se ha obtenido la proyección k del punto buscado, y con ayuda de ésta, la proyección k' . Esta construcción es más sencilla que la mostrada en la fig. 494, a la izquierda.

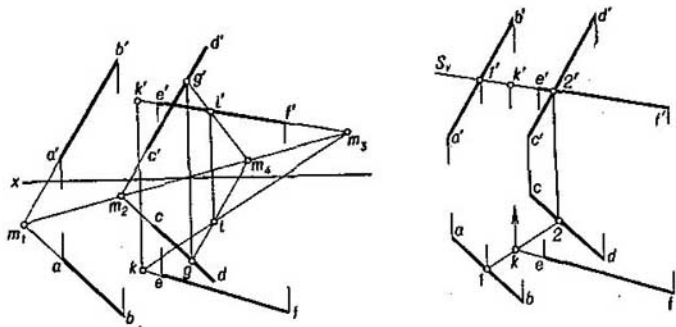


Fig. 494

Pero en el ejemplo dado en la fig. 495, el empleo de la correspondencia afín permite construir los ejes de la elipse (lo que no se hizo en las figs. 364—366 en el § 56), sin recurrir al paso de sus diámetros conjugados a los ejes.

Sin explicar la determinación de una serie de puntos de la elipse, que representa la proyección frontal de la sección producida en un cilindro por un plano (esto ya se hizo en el § 56), aquí nos detendremos solamente en la construcción de los ejes de la elipse.

Las proyecciones de la figura sección (una elipse y una circunferencia) son afines si la dirección de afinidad es perpendicular al eje x . El eje de afinidad (la recta MN) se construye con auxilio de las proyecciones afines en la misma afinidad $k'o'$ y ko , y también aunque sea la traza P_x y el eje x : hallando el punto k y trazando por él y por P_x una recta, obtenemos el eje de afinidad. Ahora, haciendo uso del artificio mostrado en la fig. 490 hallamos las direcciones perpendiculares entre sí: para la proyección frontal No' y Mo' y para la proyección horizontal No y Mo , con ayuda de los puntos 3 y 4 hallamos los vértices de la elipse 3' y 4' en su eje mayor, y auxiliándonos de los puntos 5 y 6 determinamos los vértices 5' y 6' en su eje menor.

En la fig. 496 se examina el caso de intersección de un cono oblicuo por un plano, dado por las rectas que se cortan AB y BC .

El eje de afinidad, que junto con un par de puntos afines, por ejemplo, a y a' , define la correspondencia afín, pasa por los puntos m_1 y m_2 de intersección de las proyecciones ab y $a'b'$, bc y $b'c'$. La dirección de afinidad es perpendicular al eje x .

APÉNDICE

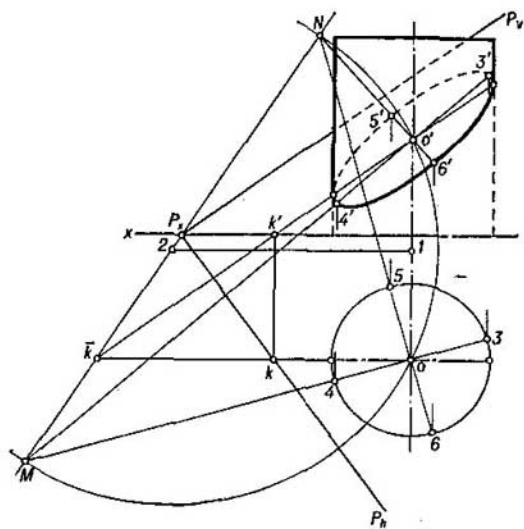


Fig. 495

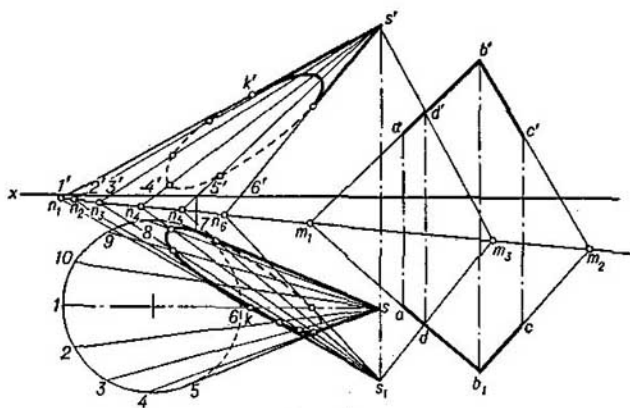


Fig. 496

Puesto que la sección buscada del cono se encontrará en el plano determinado por las rectas AB y BC , el problema se reduce a hallar en las proyecciones del cono una serie de pares de puntos afines en la afinidad dada.

Construimos el punto s_1 afín al punto s' (con ayuda del par de puntos afines d y d' y el punto m_3 en el eje de afinidad).

Si se prolongan las proyecciones frontales de las generatrices del cono hasta su intersección con el eje de afinidad en los puntos n_1, n_2, n_3 , etc., y luego se unen todos estos puntos con el punto s_1 por medio de rectas, se determina una serie de rectas situadas sobre el plano dado; las proyecciones de estas rectas son afines unas a las otras.

Tomando un punto en la intersección de la proyección horizontal de la generatriz con aquella de las proyecciones horizontales s_1n_1, s_1n_2 , etc., que es afín a la proyección frontal de esta generatriz, obtendremos la proyección horizontal del punto perteneciente a la figura de la sección producida en el cono por el plano dado. Por ejemplo, el punto k se ha obtenido en la intersección de las rectas s_1n_1 y s_1l ; hallamos la proyección frontal correspondiente k' . Por consiguiente, se ha hallado el punto K , que está situado sobre la generatriz del cono y al mismo tiempo pertenece al plano dado.

Hallando de modo semejante una serie de puntos, obtenemos la posibilidad de construir las elipses que representan las proyecciones de las líneas de la sección.

PREGUNTAS AL § 76

1. ¿Cuáles son las propiedades principales de la correspondencia entre dos planos que se cortan en la proyección paralela?
2. ¿Cómo se le llama a tal correspondencia?
3. ¿Qué significa eje y dirección de afinidad?
4. ¿A cuáles direcciones se les llama principales en la correspondencia afín dada?
5. ¿Cuál figura es afín a la circunferencia?
6. ¿Cómo se construyen los ejes de la elipse afín a la circunferencia dada, cuando la dirección de afinidad no es perpendicular al eje de afinidad?
7. ¿Cómo demostrar que entre las proyecciones frontal y horizontal de cualquier figura plana existe correspondencia afín?
8. ¿En cuál caso el eje de afinidad de las proyecciones frontal y horizontal de una figura plana coincide con el eje de proyección V/H ?

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés y árabe. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica; manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a Editorial MIR, I Rizhski per. 2, 129820 Moscú GSP 1-110, URSS.

LA EDITORIAL "MIR" PUBLICA LOS TÍTULOS
SIGUIENTES DE MATEMATICAS:

GOLOVINA L.

ALGEBRA LINEAL Y SUS APLICACIONES.

La autora de este libro, candidata a doctor en ciencias fisicomatemáticas, durante muchos años de docencia en la facultad de mecánico-matemática de la Universidad Lomonósov de Moscú.

No obstante su pequeño volumen, el libro contiene problemas fundamentales del curso de álgebra lineal, así como sus distintas aplicaciones, incluyendo la investigación de las curvas y superficies de segundo orden, la noción sobre tensores y otros problemas.

En el libro se exponen los conceptos primordiales referentes a los espacios lineales y euclidianos, y transformaciones lineales; se estudian problemas sobre vectores y se obtiene la forma canónica de las matrices de las transformaciones autoconjugada y ortogonal en el espacio euclidiano, dándose ejemplos básicos de la teoría de las formas cuadráticas.

Un mérito evidente del libro es la elección acertada del material, en el cual se han examinado los problemas que no entran en el programa para los estudiantes de especialidades no matemáticas, pero que son de cierto interés para éstos. Con ello, las nociones indispensables previas y el nivel de la exposición son tales que, al leer el texto, los estudiantes no encuentran ningunas dificultades.

El libro está destinado para los estudiantes y profesores de centros de enseñanza superior. También será de gran utilidad para los ingenieros que deseen conocer las nociones fundamentales del álgebra lineal mediante una fuente que no exige información previa de las matemáticas superiores.

GORDÓN V. Y OTROS.

PROBLEMAS DE GEOMETRÍA DESCRIPTIVA

Este libro ha sido confeccionado de acuerdo con el material expuesto en el manual de V. O. Gordón "Curso de Geometría descriptiva" y es un complemento de éste. Sin embargo, esto no excluye la posibilidad de utilizar otros manuales, puesto que para la comprensión de los problemas de dicho libro solamente se exige el conocimiento de las tesis fundamentales que debe tener todo manual.

Esta recopilación demuestra el proceso para resolver los problemas tipo, los que aclaran las tesis fundamentales del curso de geometría descriptiva, dándose soluciones detalladas de una serie de problemas.

Al final del libro se encuentran las respuestas a los problemas propuestos. Estas respuestas se dan en forma textual o gráfica, en función del carácter de los problemas.

La selección de problemas según su cantidad y contenido garantiza la debida fijación del material teórico del curso general de geometría descriptiva.

En el compendio los problemas sobre geometría descriptiva han sido elegidos según el programa para los estudiantes de especialidades de construcción de maquinaria, de aparatos y mecánico-tecnológicas de los centros de enseñanza técnica superior.

POGORÉLOV A.
GEOMETRÍA ELEMENTAL

El autor del presente manual A. Pogorélov es profesor de la Universidad de Járkov, miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de la URSS, laureado con el Premio Lenin.

Este libro es una modificación substancial de dos libros del mismo autor ya editados: "Planimetría (1969)" y "Estereometría (1970)". Ante todo, se presta la mayor atención a la axiomática. Además, el manual contiene una exposición elemental, pero muy estricta, de la estereometría. De una forma preclara se explica la temática sobre el área de la superficie. Muchas demostraciones han sido mejoradas y simplificadas, lo cual facilita la aplicación del manual en las escuelas.

Cada párrafo termina con un cuestionario, que facilita la repetición del material, y ejercicios que permiten controlar la asimilación de cada apartado.

Este libro se recomienda para los estudiantes de las escuelas pedagógicas superiores, profesores, así como para los alumnos de las escuelas de enseñanza secundaria.